



НЕДЕЛЯ

НАУКИ СПбПУ

13–19 ноября 2017 года

МАТЕРИАЛЫ
научной конференции
с международным участием

**ИНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЙ
МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ**

Санкт-Петербург
2017

Министерство образования и науки Российской Федерации
САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ ПОЛИТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ ПЕТРА ВЕЛИКОГО

• • • • •
• • • • •
• • • • •
• • • • •

НЕДЕЛЯ
НАУКИ СПбПУ
П 13–19 ноября 2017 года

**ИНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЙ
МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ**

Санкт-Петербург
Издательство Политехнического университета
2017

УДК 51;531
ББК 22.1;22.2
Н42

Неделя науки СПбПУ : материалы научной конференции с международным участием. **Институт прикладной математики и механики.** – СПб. : Изд-во Политехн. ун-та, 2017. – 311 с.

В сборник включены статьи студентов, аспирантов, молодых ученых и сотрудников СПбПУ, университетов, научных организаций и предприятий Санкт-Петербурга, России, зарубежных стран по материалам докладов, принятых на секционные заседания конференции «Неделя науки СПбПУ» Института прикладной математики и механики. Статьи отражают современный уровень научно-исследовательской работы участников конференции в области прикладной математики и механики.

Представляют интерес для специалистов в различных областях знаний, для учащихся и работников системы высшего образования и Российской академии наук.

Редакционная коллегия

Института прикладной математики и механики СПбПУ:

М. Е. Фролов (директор института), *Я. А. Гатаулин* (зам. директора по НИРС – отв. ред.), *Н. Г. Иванов* (зам. директора по НИР), *В. И. Антонов*, *А. В. Востров*, *В. С. Заборовский*, *Н. Ю. Золоторевский*, *Д. А. Индейцев*, *В. Е. Клавдиев*, *А. М. Кривцов*, *А. С. Мурачёв*, *А. С. Немов*, *Д. А. Савчук*, *А. С. Семёнов*, *Е. М. Смирнов*, *Н. В. Филимоненкова*

Печатается по решению

Совета по издательской деятельности Ученого совета
Санкт-Петербургского политехнического университета Петра Великого.

ISBN 978-5-7422-6027-1

© Санкт-Петербургский политехнический
университет Петра Великого, 2017

УДК 519.63

М.Е. Фролов, О.И. Чистякова
Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого

**ЗАДАЧИ ОБ ИЗГИБЕ ПЛАСТИН РЕЙССНЕРА-МИНДЛИНА: КОНТРОЛЬ ТОЧНОСТИ
РЕШЕНИЙ, АДАПТИВНЫЕ АЛГОРИТМЫ И ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЙ ЭКСПЕРИМЕНТ**

Одной из популярных моделей для решения механических задач об изгибе пластины методом конечных элементов (МКЭ) является модель Рейсснера-Миндлина [1]. Эта модель считается более общей по сравнению с классической моделью Кирхгоффа-Лява. Она позволяет рассматривать пластины не только малой по сравнению с остальными размерами толщины, но и средней, поскольку учитывает сдвиговые деформации, вводя как независимое поле поворот нормали к срединной плоскости пластины после деформирования. Такие модели играют важную роль в описании инженерных конструкций, при этом оставаясь относительно простыми для того, чтобы разрабатывать с их помощью новые подходы в рамках МКЭ и исследовать их математические свойства. Методы решения задач теории пластин и оболочек широко представлены, в том числе, в известных коммерческих программных продуктах для инженерных расчетов.

Система уравнений равновесия для рассматриваемой модели выглядит следующим образом:

$$\begin{cases} -\mathbf{Div}(C\varepsilon(\theta)) = \gamma \\ -\mathbf{div}\gamma = g \\ \gamma := \lambda t^{-2}(\nabla u - \theta) \end{cases} \quad \text{в } \Omega \subset R^2,$$

где u – прогиб срединной плоскости пластины, θ – повороты вектора нормали к срединной плоскости при деформировании; γ – соответствующее паре (u, θ) векторное поле, ε – тензор деформаций; t – толщина; gt^3 – распределенная поперечная нагрузка; $\lambda = 1/2 Ek/(1+\nu)$, где E – модуль Юнга, ν – коэффициент Пуассона, а k – корректировочный коэффициент; C – симметричный тензор четвертого ранга; $:=$ означает равенство по определению. Область, занимаемая пластиной, обозначается Ω , а ее граница Γ предполагается жестко закрепленной на Γ_D (часть ненулевой меры) и свободной на $\Gamma_S = \Gamma \setminus \Gamma_D$. Другие типы граничных условий рассматриваются аналогичным образом. Внешняя нормаль к границе далее обозначается n .

Построить аналитическое решение для краевых задач такого типа оказывается возможным только в редких случаях, например, когда задача имеет симметрию и форма области достаточно проста. Такие решения можно использовать для проверки реализации вычислительных методов. В более сложных случаях инженеру необходимо прибегать к численному расчету, например, в рамках МКЭ. После его проведения в вычислительной практике актуальным оказывается вопрос оценки точности полученного решения – апостериорной оценки погрешности. Область исследований, связанная с решением этой проблемы, активно развивается (см., например, [2,4] и цитируемую там литературу). Естественные требования, которые в идеале предъявляются к апостериорным оценкам – надежность (ошибка должна быть оценена строго сверху), универсальность (возможность применения для любого приближенного решения независимо от аппроксимации, с помощью которой оно было получено), и эффективность (существенная переоценка ошибки

нежелательна, а переоценка на порядок – недопустима). Общей мерой эффективности оценки традиционно служит индекс эффективности, вычисляемый как отношение оценки к ошибке. Для линейных задач оценку принято считать эффективной, если индекс эффективности не превосходит 2. К рассматриваемому классу задач применялись различные методы построения апостериорных оценок – обзор источников можно найти в [3]. Далее рассматривается функциональный подход [2, 4], который позволяет получать математически строго обоснованные методы, удовлетворяющие всем указанным выше требованиям. Апостериорная оценка функционального типа для решения задачи об изгибе пластины Рейсснера-Миндлина в удобном для реализации виде была получена в 2014 году [5] и выглядит следующим образом:

$$\|\theta - \tilde{\theta}\|^2 + \lambda^{-1}t^2 \|\gamma - \tilde{\gamma}\|_{\Omega}^2 \leq M^2 := \hat{a}^2 + \lambda^{-1}t^2 \hat{b}^2,$$

где

$$\hat{a} = \left\| C^{-1} \text{sym}(\tilde{\kappa}) - \varepsilon(\tilde{\theta}) \right\| + c_I \left\| \text{skew}(\tilde{\kappa}) \right\|_{\Omega} + c_{II} c_{III} \sqrt{|\Omega| \left\| g + \text{div} \tilde{y} \right\|_{\Omega}^2 + |\Gamma_S| \left\| \tilde{y} \cdot n \right\|_{\Gamma_S}^2} + c_{IV} \sqrt{|\Omega| \left\| \tilde{y} + [\text{div} \tilde{\kappa}^1, \text{div} \tilde{\kappa}^2] \right\|_{\Omega}^2 + |\Gamma_S| \left\| \tilde{\kappa}^1 \cdot n, \tilde{\kappa}^2 \cdot n \right\|_{\Gamma_S}^2},$$

$$\hat{b} = \left\| \tilde{y} - \tilde{\gamma} \right\|_{\Omega} + c_{III} \sqrt{|\Omega| \left\| g + \text{div} \tilde{y} \right\|_{\Omega}^2 + |\Gamma_S| \left\| \tilde{y} \cdot n \right\|_{\Gamma_S}^2},$$

$$\|\gamma - \tilde{\gamma}\|_{\Omega}^2 := \int_{\Omega} |\gamma - \tilde{\gamma}|^2 dx, \quad \|\theta - \tilde{\theta}\|^2 := \int_{\Omega} C \varepsilon(\theta - \tilde{\theta}) : \varepsilon(\theta - \tilde{\theta}) dx.$$

В ней волной обозначается приближенное решение (перемещение, повороты и вспомогательное поле), двумя волнами обозначаются свободные элементы:

$$\tilde{\kappa} = [\tilde{\kappa}^1, \tilde{\kappa}^2]; \tilde{y}, \tilde{\kappa}^1, \tilde{\kappa}^2 \in H(\Omega, \text{div}).$$

Все эти элементы принадлежат одному и тому же гильбертову пространству $H(\Omega, \text{div})$, состоящему из векторных полей с суммируемыми с квадратом компонентами и дивергенцией (в смысле интеграла Лебега). Константы $c_I, c_{II}, c_{III}, c_{IV}$ не зависят от расчетной сетки и типа аппроксимации, и считаются приближенно один раз.

Разработка новой вычислительной технологии контроля точности в рамках МКЭ требует обязательного прохождения нескольких этапов, конечной целью которых является строгое обоснование предлагаемых методов и их верификация посредством вычислительного эксперимента. Сначала необходимо выбрать (и, желательно, реализовать самостоятельно) хорошо себя зарекомендовавший численный метод решения исходной задачи. Можно для этого использовать стандартные пакеты, но отсутствие полной информации о реализуемых в коммерческих программных продуктах процедурах расчета может накладывать определенные ограничения. Так как стандартные аппроксимации МКЭ для данного класса задач часто оказываются подвержены так называемому эффекту локинга, был реализован решатель на основе элементов, предложенных в работе [6]. Эта же работа лежит, в числе прочих, в основе реализации МКЭ в пакете ANSYS в ряде опций SHELL-элементов.

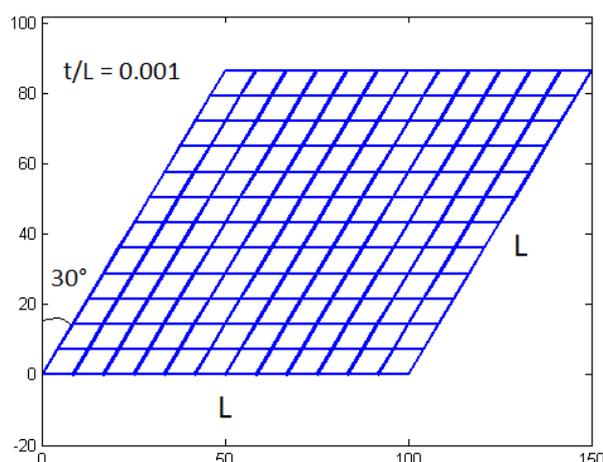


Рис. 1. Косоугольная пластина (Razzaque's skew plate)

Вспомогательный, но не менее важный вопрос, связан с тем, каким образом разбивать область на конечные элементы и перестраивать сетку в случае необходимости. На эту тему существует масса литературы, поскольку проблема эта, вообще говоря, нетривиальна. «Плохая» сетка в методе может загубить расчет даже самой простой задачи. В качестве алгоритма перестроения сетки нами был выбран алгоритм, предложенный в работе [7].

Далее необходимо реализовать вычисление функционала M (мажоранты) в правой части апостериорной оценки. Этот этап представляет определенную трудность, поскольку эти оценки не имеют прямых аналогов в коммерческих и свободно распространяемых программных продуктах. Поэтому проверить результат возможно лишь посредством вычислительного эксперимента, опираясь на накопленный опыт решения других плоских задач линейной теории упругости.

Поскольку квадрат мажоранты представим в виде суммы вкладов на отдельных конечных элементах, с ее помощью можно строить адаптивный алгоритм решения исходной задачи. Такой алгоритм состоит из нескольких шагов: 1) выбор желаемой точности; 2) построение начальной сетки; 3) вычисление приближенного решения; 4) контроль точности решения в глобальной норме и остановка вычислительного процесса при достижении глобальной точности; 5) индикация зон, в которых локальные ошибки велики; 6) перестроение сетки, в общем случае включающее как ее измельчение, так и укрупнение; 7) повтор, начиная с третьего шага.

Таким образом, реализация и верификация адаптивных методов с надежным контролем погрешности вычисляемых решений – это достаточно трудоемкий и многоступенчатый процесс.

Продемонстрируем работу адаптивного алгоритма на одном из примеров, рассмотренных в статье [8] (рис. 1). Эта задача является одним из классических примеров для тестирования методов численного решения. Пусть пластина имеет форму ромба со стороной $L = 100$ и толщиной $t = 0.1$, параметры материала: $E = 1092$, $\nu = 0.3$ (все размерные параметры даны в единицах системы СИ). Два противоположных ребра пластины, расположенных параллельно оси x , жестко закреплены, оставшиеся два свободны. По всей площади к пластине приложена равномерная поперечная нагрузка, равная 1. Локальный индикатор погрешности, полученный при помощи функциональной апостериорной оценки на мелкой равномерной сетке, представлен на рис. 2. Области вблизи закрепления отмечены как зоны с относительно малой погрешностью, а основные локальные ошибки сконцентрированы около средней линии пластины, что вполне соответствует особенностям рассматриваемого примера.

Полученные результаты были сопоставлены с результатами, приведенными в статье [8] для элементов того же типа (MITC4). Сравнение представлено в табл. 1. Кроме того, в работе [8] была предложена апостериорная оценка погрешности. В этой статье не даны абсолютные величины индекса эффективности, но в ней указан логарифм по основанию два от отношения оценок на двух последовательных сетках (см. столбец, отмеченный *). Поведение этой величины лишь отражает тот факт, что «асимптотически» индикатор погрешности ведет себя соответственно теоретическому поведению самой погрешности, в итоге уменьшаясь на следующей сетке в два раза. Но при этом индекс эффективности может быть равен, например, ста или одной сотой, остается только делать предположения. В то же время индекс эффективности функциональной апостериорной оценки ведет себя стабильно, не завывая истинную погрешность чрезмерно.

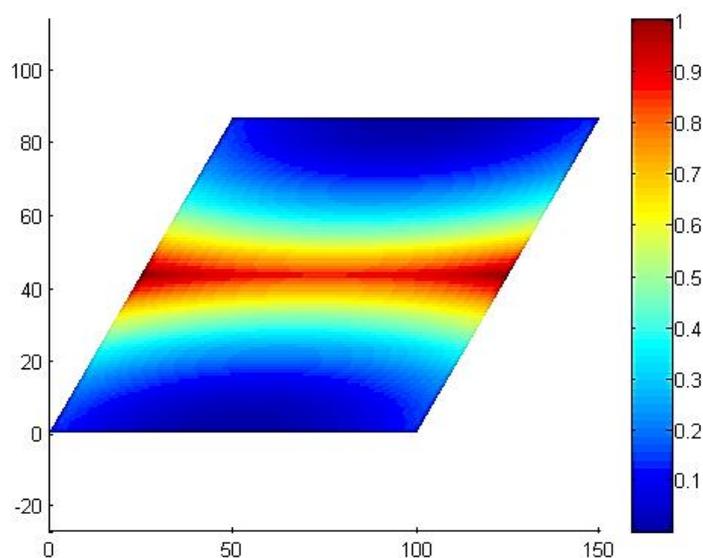


Рис. 2. Локальный индикатор погрешности на основе функциональной апостериорной оценки

Табл. 1. Верификация решателя (солвера) и анализ эффективности апостериорных оценок.

Сетка	Прогиб в центре		Относительная ошибка		Индекс эффективности	
	[8]	Наша реализация	[8]	Наша реализация	[8]*	Функц. оценка
4×4	0.67	0.64	16.1%	18.3%	0.35	1.82
8×8	0.76	0.75	4.7%	4.9%	0.87	1.76
16×16	0.78	0.78	1.7%	1.4%	0.97	1.76
32×32	0.79	0.79	0.9%	0.9%	0.99	1.77

Результат работы адаптивного алгоритма приведен на рис. 3. Видно, что области сгущения сетки совпадают с областями высокой погрешности на рис. 2. Кроме того, сохраняется симметричность сетки, что важно контролировать при верификации метода.

Полученные результаты позволяют сделать вывод, что теоретические свойства функциональной апостериорной оценки подтверждаются вычислительным экспериментом, а использование ее в качестве локального индикатора ошибки позволяет строить адаптивные алгоритмы измельчения сетки, приводящие к корректному ее сгущению.

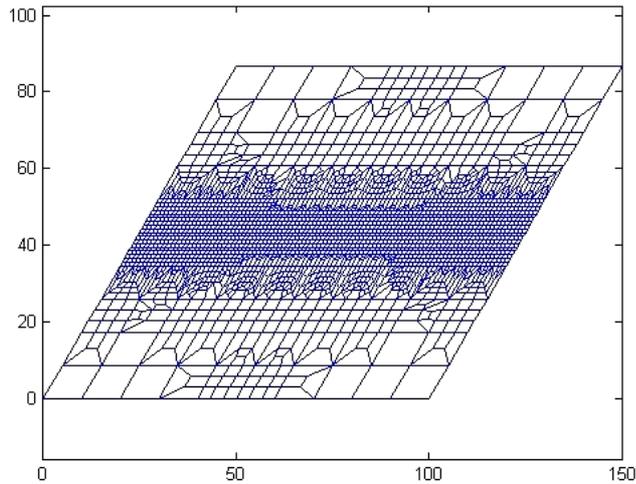


Рис. 3. Результат адаптивного измельчения исходной равномерной сетки

Работа выполнена при поддержке гранта Президента Российской Федерации для государственной поддержки молодых российских ученых МД-1071.2017.1.

ЛИТЕРАТУРА:

1. Falk R.S. Finite elements for the Reissner–Mindlin plate. In: Mixed finite elements, compatibility conditions, and applications (Eds. D. Boffi and L. Gastaldi). Springer, Berlin, Florenz: Fondazione CIME Roberto Conti. Lecture Notes in Mathematics, 2008, Vol. 1939, 195–232.
2. Repin S.I. A posteriori estimates for partial differential equations. Radon Ser. on Comput. and Appl. Mathematics 4 – Berlin: de Gruyter, 2008. – 316 p.
3. Frolov M., Chistiakova O. A functional-type a posteriori error estimate of approximate solutions for Reissner-Mindlin plates and its implementation. Winter School on Continuous Media Mechanics. IOP Publishing. IOP Conf. Series: Materials Science and Engineering 208 (2017) 012043 doi:10.1088/1757-899X/208/1/012043, 8 pages.
4. Mali O., Neittaanmäki P., Repin S. Accuracy verification methods. Theory and algorithms, Computational Methods in Applied Sciences 32 – Springer, 2014.
5. Фролов М.Е. Надежный апостериорный контроль точности решений задач об изгибе пластин Рейсснера–Миндлина. Сеточные методы для краевых задач и приложения. Материалы Десятой Международной конференции – Казань, 2014. – 728 с. – С. 610–615.
6. Bathe K.J., Dvorkin E.H. A four-node plate bending element based on Mindlin-Reissner plate theory and mixed interpolation. Int. J. Numer. Methods Engrg., 1989, Vol 21, 367-383.
7. Караваев А.С., Копысов С.П. Перестроение неструктурированных четырехугольных и смешанных сеток. Вестник удмуртского университета, 2013, Вып. 4.
8. Carstensen C., Xie X., Yu G., Zhou T. A priori and a posteriori analysis for a locking-free low order quadrilateral hybrid finite element for Reissner-Mindlin plates. Comput. Methods Appl. Mech. Engrg., 2011, Vol. 200.

УДК 548.4

¹А.М. Смирнов, ²С.А. Красницкий, ^{1,2,3}М.Ю. Гуткин
¹ Университет ИТМО,
² Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого,
³ Институт проблем машиноведения РАН

ДИСЛОКАЦИИ НЕСООТВЕТСТВИЯ В КОМПОЗИТНЫХ НАНОПРОВОЛОКАХ С ЯДРОМ В ВИДЕ ДЛИННОГО ПАРАЛЛЕЛЕПИПЕДА

В настоящее время разработка, изучение и использование композитных нанопроволок (КНП) вызывают большой научный и практический интерес. КНП представляют собой материалы, состоящие из наноразмерных фаз с разными параметрами кристаллической решетки, упругими постоянными и т. д. Повышенное внимание к КНП объясняется их уникальными электронными, оптическими, химическими и механическими свойствами, благодаря которым КНП широко применяются в электронике, фотонике, катализе, и т. д.

Свойства КНП зависят не только от их химического состава, но и от геометрии составляющих их фаз, наличия упругих деформаций и напряжений, а также от присутствия дефектов кристаллической структуры. Механические напряжения (напряжения несоответствия) возникают в КНП из-за различия параметров кристаллической решетки материалов, составляющих КНП. Релаксация этих напряжений может проходить за счет образования различных дефектов: дислокаций (в частности, призматических и скользящих дислокационных петель), полостей, трещин и т.п. Присутствие дефектов в композитных наноструктурах влияет на их свойства. Например, наличие полости в наночастицах ZnS-Ag₂S и Ag₂S-ZnS приводит к снижению квантового выхода фотолюминесценции [1]. Образование дислокационных петель вызывает деградацию оптических свойств наночастиц, состоящих из ядра CdSe и оболочки CdS [2]. Каталитические свойства наночастиц Au-Pd сильно зависят от толщины Pd оболочки и от присутствия в ней дефектов [3]. Некоторые из этих композитных наночастиц имеют ограниченные ядра, т. е. содержат плоские границы, вдоль которых развивается дефектная структура. Наиболее простая для теоретического анализа модель такой наноструктуры – это длинная нанопроволока с включением в виде параллелепипеда.

Экспериментальные и теоретические исследования напряженно-деформированного состояния КНП и изучение их устойчивости к образованию в них дефектов представляют большой интерес, поскольку, как уже отмечалось, именно дефекты влияют на электронные, оптические и химические свойства КНП. Теоретический анализ условий зарождения дефектов позволяет определить критические значения основных параметров КНП: радиуса ядра, толщины оболочки и решеточного несоответствия материалов, составляющих КНП. Это в конечном итоге важно для создания материалов с заранее заданными свойствами.

В настоящей работе рассматриваются теоретические модели, описывающие релаксацию напряжений несоответствия в КНП с ядром в виде длинного параллелепипеда за счет зарождения полных (ПДН) и частичных (ЧДН) дислокаций несоответствия в ядре и оболочке нанопроволоки путем скольжения или переползания, а также путем зарождения диполей ПДН и ЧДН (рис. 1).

Задача о релаксации напряжений несоответствия решалась в рамках энергетического подхода: считалось, что формирование ПДН или ЧДН энергетически выгодно, если соответствующее изменение полной энергии системы ΔW оказывается отрицательным. При этом

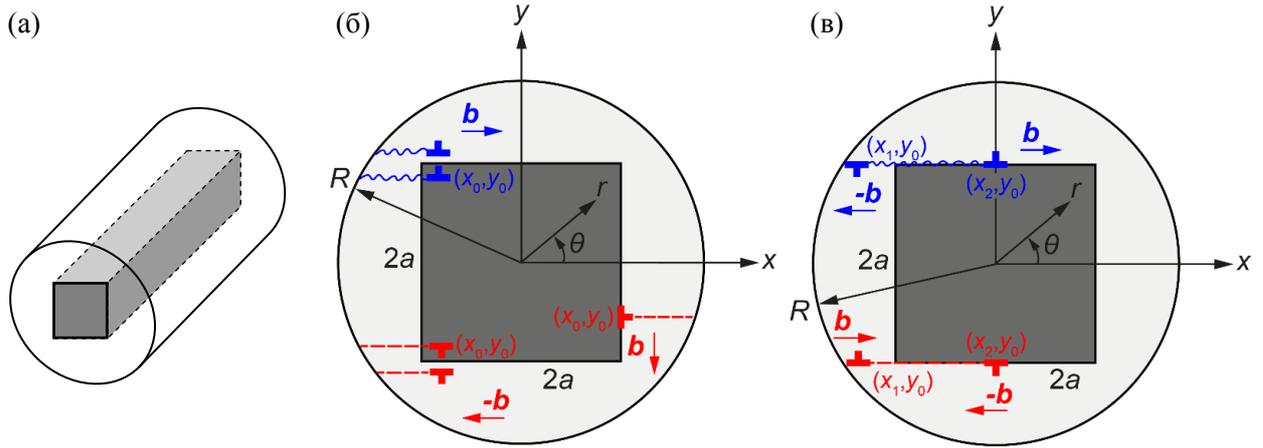


Рис. 1. Механизмы зарождения ДН в КНП радиуса R с ядром в виде длинного параллелепипеда квадратного поперечного сечения $2a \times 2a$: (а) общий вид КНП; (б) зарождение ЧДН (синие) и ПДН (красные) путем скольжения или переползания в оболочке или ядре КНП от ее внешней поверхности; (в) зарождение диполей ЧДН и ПДН в оболочке КНП на ребрах ее ядра

предполагалось, что ядро и оболочка упруго изотропны и обладают одинаковыми упругими модулями.

В случае зарождения ЧДН, ПДН или их диполей соответствующие изменения полной энергии системы ΔW_{par} , ΔW_{per} , $\Delta W_{par}^{(1-2)}$ и $\Delta W_{per}^{(1-2)}$ принимают следующий вид:

$$\Delta W_{par} = W_{el}(b_{par}) + W_{\gamma}(b_{par}) + W_{int}(b_{par}) + W_c(b_{par}) + W_{ss}(b_{par}), \quad (1)$$

$$\Delta W_{per} = W_{el}(b_{per}) + W_{int}(b_{per}) + W_c(b_{per}) + W_{ss}(b_{per}), \quad (2)$$

$$\Delta W_{par}^{(1-2)} = W_{el}^{(1-2)}(b_{par}) + W_{\gamma}^{(1-2)}(b_{par}) + W_{int}^{(1-2)}(b_{par}) + 2W_c(b_{par}), \quad (3)$$

$$\Delta W_{per}^{(1-2)} = W_{el}^{(1-2)}(b_{per}) + W_{int}^{(1-2)}(b_{per}) + 2W_c(b_{per}), \quad (4)$$

где W_{el} – упругая энергия дислокации, W_{γ} – энергия дефекта упаковки, W_{int} – энергия взаимодействия дислокации с упругим полем напряжений несоответствия в КНП, W_c – энергия ядра дислокации, W_{ss} – энергия образования ступеньки при зарождении дислокации со свободной поверхности, $W_{el}^{(1-2)}$ – упругая энергия дислокационного диполя, $W_{int}^{(1-2)}$ – энергия взаимодействия дислокационного диполя с упругим полем напряжений несоответствия нанопроволоки, b_{par} – модуль вектора Бюргерса ЧДН, b_{per} – модуль вектора Бюргерса ПДН.

На рис. 2 показаны сводные диаграммы относительной предпочтительности механизмов релаксации для разных размеров КНП. Показано, что зарождение диполей ДН энергетически выгоднее зарождения одиночных ДН для всех рассмотренных размеров КНП, причем в относительно толстых КНП отсутствует энергетический барьер, препятствующий зарождению диполей ДН (рис. 2б). В относительно тонких КНП зарождение ЧДН вероятнее, чем ПДН, в относительно толстых – наоборот. Образование ДН в ядре КНП предпочтительнее, чем в оболочке. Наименее энергетически выгодно образование ПДН путем переползания в КНП с отношением размеров $R/a = 2$.

На рис. 3 представлены зависимости критического несоответствия f_c (решеточное несоответствие f определяется как $f = 2(a_c - a_s)/(a_c + a_s)$, где a_c и a_s – соответственно

параметры решеток ядра и оболочки) от приведенного внешнего радиуса R/a КНП с разными значениями размера ядра $a = 2.5$ и 5 нм. Величину f_c можно найти из равенства $\Delta W = 0$. Из рисунка видно, что зарождение конечной конфигурации диполя ЧДН (синяя кривая) выгоднее, чем зарождение диполя ПДН (красная кривая) при малых размерах нанопроволоки: $R < 5.2$ нм (при $a = 2.5$ нм) и $R < 10.5$ нм (при $a = 5$ нм), что связано с длиной дефекта упаковки. Рост кривой для диполя ЧДН связан с увеличением вклада энергии дефекта упаковки W_y при увеличении размера КНП. Чем больше размер ядра КНП, тем при меньших значениях несоответствия f возможно зарождение диполей ДН.

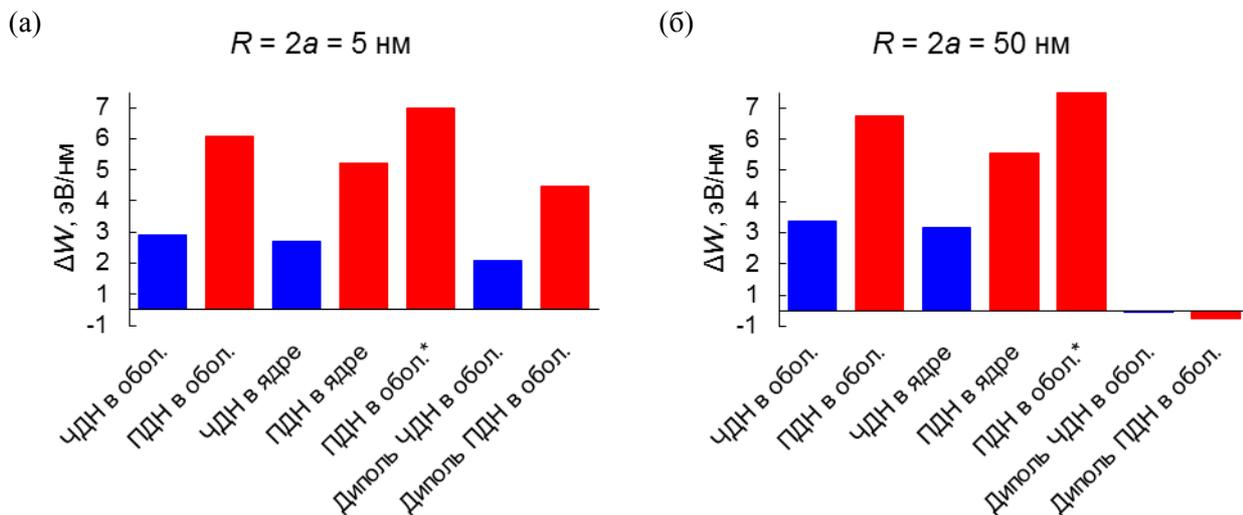
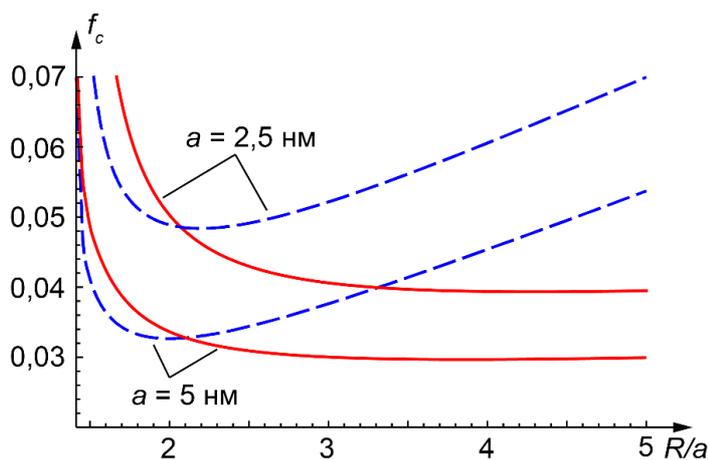


Рис.2. Диаграммы относительной предпочтительности зарождения ЧДН, ПДН и их диполей для разных размеров КНП с ядром Pd и оболочкой Au-Pd. По оси ординат отложена величина энергетического барьера или максимальное значение изменения энергии ΔW (только для отрицательных значений). Символом * отмечен случай, когда ПДН зарождаются переползанием. Красным цветом показаны ПДН, синим – ЧДН в КНП с размерами $R = 2a = 5$ нм (а) и 50 нм (б)



При $a = 2.5$ нм и $y_0 = a + b'$ координаты диполя ЧДН:

$$x_1 = -\sqrt{R^2 - y_0^2} + b_{par}, \quad x_2 = -2a/3;$$

координаты диполя ПДН:

$$x_1 = -\sqrt{R^2 - y_0^2} + b_{per}, \quad x_2 = 0;$$

При $a = 5$ нм и $y_0 = a + b'$ координаты диполя ЧДН:

$$x_1 = -\sqrt{R^2 - y_0^2} + b_{par}, \quad x_2 = -a/3;$$

координаты диполя ПДН:

$$x_1 = -2/3(\sqrt{R^2 - y_0^2} - b_{per}) - a/3, \quad x_2 = 0$$

Рис. 3. Зависимости критического несоответствия f_c от приведенного внешнего радиуса КНП R/a для диполей ЧДН (синие кривые) и ПДН (красные кривые)

Таким образом, в рамках исследованных моделей образование диполей ЧДН и ПДН на ребрах ядра КНП всегда предпочтительнее образования одиночных ЧДН или ПДН на ее свободной поверхности. В относительно тонких КНП предпочтительнее образование диполя

ЧДН, в относительно толстых КНП – наоборот. Критическое несоответствие, необходимое для образования этих диполей, падает с увеличением толщины КНП.

А.М. Смирнов и С.А. Красницкий благодарят РФФИ за финансовую поддержку исследования в рамках научного проекта № 16-32-00521 мол_а.

ЛИТЕРАТУРА:

1. R.G. Chaudhuri, S. Paria. *J. Phys. Chem. C* **117** (2013) 23385.
2. X. Chen, et al. *Nano Lett.* **3** (2003) 799.
3. M. Laskar, S.E. Skrabalak. *J. Mat. Chem. A* **4** (2016) 6911.

УДК 539.3

Е.А. Мордасова¹, А.Л. Колесникова^{2,3}, М.Ю. Гуткин¹⁻³, А.Е. Романов^{3,4}

¹ Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого,

² Институт проблем машиноведения РАН,

³ Университет ИТМО,

⁴ Физико-технический институт имени А.Ф. Иоффе РАН

ЦИЛИНДРИЧЕСКОЕ ВКЛЮЧЕНИЕ КОНЕЧНОЙ ДЛИНЫ С ОДНООСНОЙ СОБСТВЕННОЙ ДЕФОРМАЦИЕЙ

Развитие аналитических методов решения граничных задач теории упругости требует разработки новых подходов, позволяющих ставить и решать задачи, актуальные для современных неоднородных материалов и твердотельных структур. Одним из таких подходов является использование в качестве базовых элементов упругих полей различных дислокационных и дисклинационных конфигураций [1].

Цель настоящей работы – расчет полей смещений и напряжений для цилиндрического включения конечной длины с одноосной собственной деформацией.

Рассмотрим цилиндрическое включение с осью по оси z , собственная дисторсия которого задана в цилиндрической системе координат (r, φ, z) формулой:

$$\beta_{zz}^* = \varepsilon_{zz}^* = \varepsilon^* H\left(1 - \frac{r}{c}\right) \begin{cases} 1, & z \in [-h/2, h/2] \\ 0, & z \notin [-h/2, h/2] \end{cases}, \quad (1)$$

где ε^* – величина собственной деформации, $H(x)$ – функция Хевисайда, c – радиус включения, h – его длина. Упругие поля такого включения можно смоделировать с помощью однородного распределения вдоль оси z виртуальных круговых призматических дислокационных петель (PL) с дисторсией [1-3]:

$${}^{PL}\beta_{zz}^* = bH\left(1 - \frac{r}{c}\right) \delta(z - z_0), \quad (2)$$

где b – величина вектора Бюргера дислокационной петли, $\delta(z - z_0)$ – дельта-функция Дирака, z_0 – положение петли.

Поле смещений круговой дислокационной призматической петли известно [1]:

$${}^{PL}u_r = \frac{b}{4(1-\nu)} \left[(2\nu - 1)J(1,1;0) + \frac{|z - z_0|}{c} J(1,1;1) \right], \quad (3a)$$

$${}^{PL}u_\varphi = 0, \quad (3b)$$

$${}^{PL}u_z = \frac{b \operatorname{sgn}(z - z_0)}{4(1-\nu)} \left[2(1-\nu)J(1,0;0) + \frac{|z - z_0|}{c} J(1,0;1) \right], \quad (3c)$$

где ν – коэффициент Пуассона, $J(m,n;p) = \int_0^\infty J_m(\kappa) J_n(\kappa \frac{r}{c}) e^{-\kappa \frac{|z-z_0|}{c}} \kappa^p d\kappa$ – интегралы Лифшица-Ханкеля [4]. Найдем поле смещений включения, проинтегрировав поле смещений призматической петли (3) по координате петли z_0 с постоянной плотностью $\rho = \varepsilon^* / b$:

$$u_r = \frac{b\rho}{4(1-\nu)} \left[(2\nu-1) \int_0^\infty J_1(\kappa) J_1(\kappa \frac{r}{c}) d\kappa \int_{-h/2}^{h/2} e^{-\kappa \frac{|z-z_0|}{c}} dz_0 + \frac{1}{c} \int_0^\infty J_1(\kappa) J_1(\kappa \frac{r}{c}) \kappa d\kappa \int_{-h/2}^{h/2} |z-z_0| e^{-\kappa \frac{|z-z_0|}{c}} dz_0 \right]$$

$$\Rightarrow \frac{\varepsilon^* c}{4(1-\nu)} \left[(2\nu-1) 2 \int_0^\infty J_1(\kappa) J_1(\frac{\kappa r}{c}) \kappa^{-1} \left\{ \begin{array}{l} e^{-\frac{z\kappa}{c}} \sinh(\frac{h\kappa}{2c}), z \geq \frac{h}{2} \\ 1 - e^{-\frac{h\kappa}{2c}} \cosh(\frac{z\kappa}{c}), -\frac{h}{2} \leq z \leq \frac{h}{2} \\ e^{\frac{z\kappa}{c}} \sinh(\frac{h\kappa}{2c}), z \leq -\frac{h}{2} \end{array} \right\} d\kappa + \right.$$

$$\left. \int_0^\infty J_1(\kappa) J_1(\kappa \frac{r}{c}) \kappa^{-1} \left\{ \begin{array}{l} e^{-\frac{z\kappa}{c}} \left(-\frac{h}{c} \kappa \cosh(\frac{h\kappa}{2c}) + 2 \sinh(\frac{h\kappa}{2c}) + 2 \frac{z}{c} \kappa \sinh(\frac{h\kappa}{2c}) \right), z \geq \frac{h}{2} \\ -2e^{-\frac{h\kappa}{2c}} \cosh(\frac{z\kappa}{c}) + 2 - \frac{h}{c} \kappa e^{-\frac{h\kappa}{2c}} \cosh(\frac{z\kappa}{c}) + 2 \frac{z}{c} \kappa e^{-\frac{h\kappa}{2c}} \sinh(\frac{z\kappa}{c}), -\frac{h}{2} \leq z \leq \frac{h}{2} \\ e^{\frac{z\kappa}{c}} \left(-\frac{h}{c} \kappa \cosh(\frac{h\kappa}{2c}) + 2 \sinh(\frac{h\kappa}{2c}) - 2 \frac{z}{c} \kappa \sinh(\frac{h\kappa}{2c}) \right), z \leq -\frac{h}{2} \end{array} \right\} d\kappa \right], \quad (4a)$$

$$u_\varphi = 0, \quad (4b)$$

$$u_z = \frac{b\rho}{4(1-\nu)} \left[2(1-\nu) \int_0^\infty J_1(\kappa) J_0(\kappa \frac{r}{c}) d\kappa \int_{-h/2}^{h/2} \text{sgn}(z-z_0) e^{-\kappa \frac{|z-z_0|}{c}} dz_0 + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{c} \int_0^\infty J_1(\kappa) J_0(\kappa \frac{r}{c}) \kappa d\kappa \int_{-h/2}^{h/2} (z-z_0) e^{-\kappa \frac{|z-z_0|}{c}} dz_0 \right]$$

$$\Rightarrow u_z = \frac{\varepsilon^* c}{4(1-\nu)} \left[4(1-\nu) \int_0^\infty J_1(\kappa) J_0(\frac{\kappa r}{c}) \kappa^{-1} \left\{ \begin{array}{l} e^{-\frac{z\kappa}{c}} \sinh(\frac{h\kappa}{2c}), z \geq \frac{h}{2} \\ e^{-\frac{h\kappa}{2c}} \sinh(\frac{z\kappa}{c}), -\frac{h}{2} < z < \frac{h}{2} \\ -e^{\frac{z\kappa}{c}} \sinh(\frac{h\kappa}{2c}), z \leq -\frac{h}{2} \end{array} \right\} d\kappa + \right.$$

$$\left. \int_0^\infty J_1(\kappa) J_0(\kappa \frac{r}{c}) \kappa^{-1} \left\{ \begin{array}{l} e^{-\frac{z\kappa}{c}} \left(-\frac{h}{c} \kappa \cosh(\frac{h\kappa}{2c}) + 2 \sinh(\frac{h\kappa}{2c}) + 2 \frac{z}{c} \kappa \sinh(\frac{h\kappa}{2c}) \right), z \geq \frac{h}{2} \\ 2e^{-\frac{h\kappa}{2c}} \sinh(\frac{z\kappa}{c}) + \frac{h}{c} \kappa e^{-\frac{h\kappa}{2c}} \sinh(\frac{z\kappa}{c}) - 2 \frac{z}{c} \kappa e^{-\frac{h\kappa}{2c}} \cosh(\frac{z\kappa}{c}), -\frac{h}{2} < z < \frac{h}{2} \\ -e^{\frac{z\kappa}{c}} \left(-\frac{h}{c} \kappa \cosh(\frac{h\kappa}{2c}) + 2 \sinh(\frac{h\kappa}{2c}) - 2 \frac{z}{c} \kappa \sinh(\frac{h\kappa}{2c}) \right), z \leq -\frac{h}{2} \end{array} \right\} d\kappa \right]. \quad (4c)$$

Представим поле смещений включения (4) в виде суперпозиции интегралов Лифшица-Ханкеля:

внутри включения ($r < c$, $-\frac{h}{2} < z < \frac{h}{2}$)

$$u_r^{in} = \frac{\varepsilon^* c}{4(1-\nu)} \left[2\nu \left(\frac{r}{c} - J^{(1)}(1,1;-1) - J^{(2)}(1,1;-1) \right) + \frac{|z|-h/2}{c} J^{(1)}(1,1;0) - \frac{|z|+h/2}{c} J^{(2)}(1,1;0) \right], \quad (5a)$$

$$u_\varphi^{in} = 0, \quad (5b)$$

$$u_z^{in} = \frac{\varepsilon^* c \text{sgn}(z)}{4(1-\nu)} \left[(3-2\nu) \left(J^{(1)}(1,0;-1) - J^{(2)}(1,0;-1) \right) - \frac{|z|-h/2}{c} J^{(1)}(1,0;0) - \frac{|z|+h/2}{c} J^{(2)}(1,0;0) \right]; \quad (5c)$$

снаружи включения ($z > \frac{h}{2}$, или $z < -\frac{h}{2}$, или $-\frac{h}{2} \leq z \leq \frac{h}{2}$, $r > c$)

$$u_r^{out} = \frac{\varepsilon^* c}{4(1-\nu)} \begin{cases} \left[2\nu \left(J^{(3)}(1,1;-1) - J^{(2)}(1,1;-1) \right) + \frac{|z|-h/2}{c} J^{(3)}(1,1;0) - \frac{|z|+h/2}{c} J^{(2)}(1,1;0) \right], \\ z > \frac{h}{2} \text{ or } z < -\frac{h}{2}; \\ \left[2\nu \left(\frac{c}{r} - J^{(1)}(1,1;-1) - J^{(2)}(1,1;-1) \right) + \frac{|z|-h/2}{c} J^{(1)}(1,1;0) - \frac{|z|+h/2}{c} J^{(2)}(1,1;0) \right], \\ -\frac{h}{2} \leq z \leq \frac{h}{2}, r > c; \end{cases} \quad (6a)$$

$$u_\varphi^{out} = 0, \quad (6b)$$

$$u_z^{out} = \frac{\varepsilon^* c \operatorname{sgn}(z)}{4(1-\nu)} \begin{cases} \left[(3-2\nu) \left(J^{(3)}(1,0;-1) - J^{(2)}(1,0;-1) \right) + \frac{|z|-h/2}{c} J^{(3)}(1,0;0) - \frac{|z|+h/2}{c} J^{(2)}(1,0;0) \right], \\ z > \frac{h}{2} \text{ or } z < -\frac{h}{2}; \\ \left[(3-2\nu) \left(J^{(1)}(1,0;-1) - J^{(2)}(1,0;-1) \right) - \frac{|z|-h/2}{c} J^{(1)}(1,0;0) - \frac{|z|+h/2}{c} J^{(2)}(1,0;0) \right], \\ -\frac{h}{2} \leq z \leq \frac{h}{2}, r > c; \end{cases} \quad (6c)$$

Здесь интегралы Лифшица-Ханкеля имеют следующий вид:

$$J^{(1)}(m,n;p) = \int_0^\infty J_m(\kappa) J_n\left(\kappa \frac{r}{c}\right) e^{-\kappa \xi_1} \kappa^p d\kappa, \text{ где } \xi_1 = \frac{h-|z|}{c}; \quad J^{(2)}(m,n;p) = \int_0^\infty J_m(\kappa) J_n\left(\kappa \frac{r}{c}\right) e^{-\kappa \xi_2} \kappa^p d\kappa,$$

где $\xi_2 = \frac{h+|z|}{c}$; $J^{(3)}(m,n;p) = \int_0^\infty J_m(\kappa) J_n\left(\kappa \frac{r}{c}\right) e^{-\kappa \xi_3} \kappa^p d\kappa$, где $\xi_3 = \frac{|z|-h/2}{c}$. Отметим, что $\xi_1 > 0$ при

$-\frac{h}{2} \leq z \leq \frac{h}{2}$, $\xi_2 > 0$ при любом z , и $\xi_3 > 0$ при $z > \frac{h}{2}$ или $z < -\frac{h}{2}$.

Представление смещений в виде (5) и (6) позволяет легко провести численные расчет их полей с помощью программного пакета Wolfram Mathematica. Например, на рис. 1 показаны поля радиального и осевого смещений в центральном продольном сечении включения.

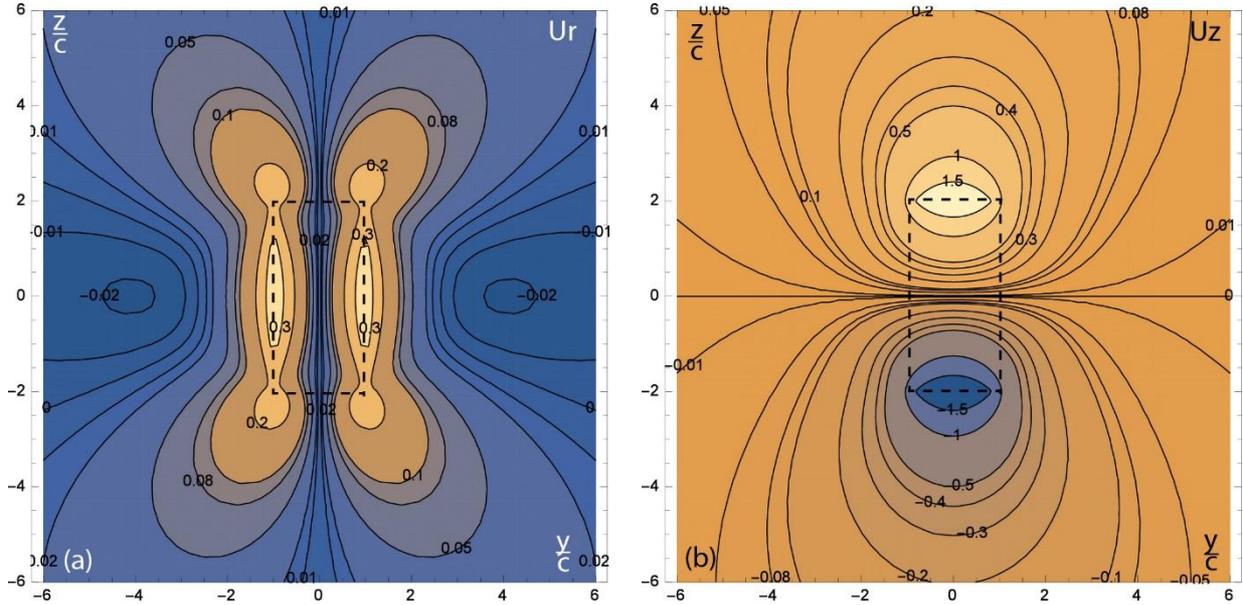


Рис. 1. Карты радиального u_r (а) и осевого u_z (б) смещений в центральном продольном сечении включения с одноосной собственной деформацией ε^* вдоль его оси при $h = 4c$ и $\nu = 0.3$. Значения смещений даны в единицах $\varepsilon^* c / [4(1-\nu)]$

Аналогично были получены поля напряжений и упругой дилатации. Полученные решения служат основой для разработки моделей релаксации напряжений и образования дефектов в квантовых точках и в различных композитных наноструктурах современных электроники и фотоники.

Авторы благодарны Минобрнауки Российской Федерации за финансовую поддержку работы (госзадание № 3.3194.2017/4.6).

ЛИТЕРАТУРА:

1. А.Л. Колесникова, А.Е. Романов, Препринт № 1019 ФТИ им. А.Ф. Иоффе АН СССР, Л., 1986, 62 с.
2. T. Mura, In: *Advances of Materials Research*, ed. H. Herman (Intersci. Publ., N.Y., 1968), Vol. 3, p.1-108.
3. T. Mura, *Arch. Mech.* **24** (3) (1972) 449-456.
4. G. Eason, B. Noble, I.N. Sneddon, *Phil. Trans. Roy. Soc. London A* **247** (1955) 529-551.

УДК 548.4

М.Ю. Кравченко¹, С.А. Красницкий^{1,2}, М.Ю. Гуткин¹⁻³,
А.Л. Колесникова^{1,3,4}, А.Е. Романов^{1,4,5}

¹Университет ИТМО

²Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого

³Институт проблем машиноведения РАН

⁴ФТИ им. А.Ф. Иоффе РАН

⁵Тольяттинский государственный университет

ЗАРОЖДЕНИЕ ДИСЛОКАЦИОННЫХ ПЕТЕЛЬ В ПЕНТАГОНАЛЬНЫХ ЧАСТИЦАХ

Малые металлические частицы с гранецентрированной кубической кристаллической структурой часто принимают форму многогранника с осями симметрии пятого порядка: пентагональной призмы, икосаэдра или декаэдра. Такие объекты называют «многократно двойникованными» или «пентагональными» частицами [1]. На сегодня имеется обширная база исследований, которая создавалась на основе изучения частиц в течении последних пятидесяти лет [1-3]. Особый интерес представляет изучение происхождения и внутреннего строения сравнительно крупных пентагональных кристаллов [4]. Благодаря тому, что доля атомов на свободной поверхности у малых частиц гораздо больше, чем у объемных кристаллов тех же материалов, они находят широкое применение в качестве катализаторов, фильтров и биосенсоров.

Наличие пентагональной симметрии вызывает неоднородную упругую деформацию частицы, соответствующую высокому уровню внутренних напряжений. По мере роста такой частицы ее упругая энергия быстро возрастает пропорционально ее объему и при некоторых условиях может релаксировать. Большой интерес вызывают механизмы релаксации остаточных напряжений в пентагональных наночастицах по мере увеличения их размера и трансформации в малые частицы с обычной кристаллической структурой. Напряжения и энергии могут релаксировать по разным механизмам, за счет зарождения различных дефектов – дислокаций, дисклинаций, малоугловых границ зерен, пустот и т. д. [4]. Некоторые из дефектов развиваются последовательно с увеличением размера кристалла. Начало релаксации напряжений в пентагональных частицах происходит вследствие зарождения одиночных дефектов, например, таких как отдельная круговая призматическая дислокационная петля (КПДП) [5].

В настоящей работе рассматривается релаксация напряжений в декаэдрической частице путем формирования отдельной КПДП. Напряженное состояние декаэдрической частицы моделируется с помощью упругого шара с аксиально расположенной в нем положительной клиновидной дисклинацией (рис. 1). В рамках настоящей модели предполагается, что КПДП с вектором Бюргерса величиной b и радиусом c образуется в экваториальной плоскости этого шара. В основу расчетов положено найденное ранее точное выражение для упругой энергии КПДП в однородном упругом шаре [6].

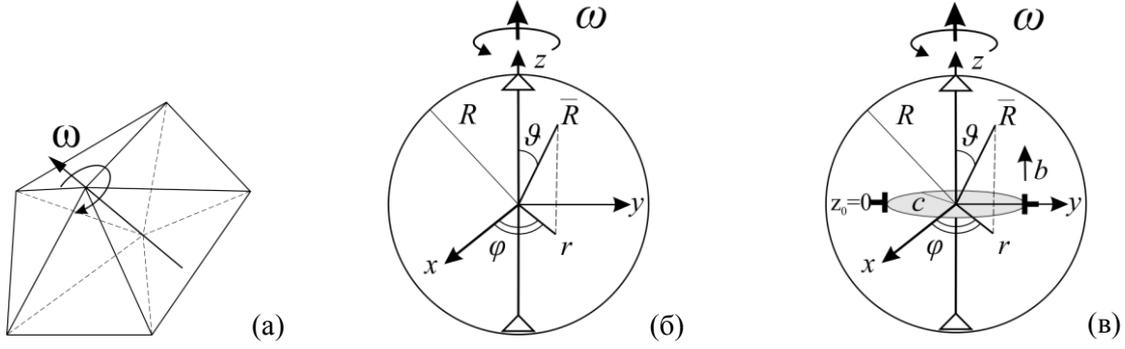


Рис. 1. а) Клиновая дисклинация в декаэдрической малой частице, б) начальное нерелаксированное состояние модели, в) модель КПДП в декаэдрической частице

Для определения критических условий зарождения петли найдем изменение полной энергии системы ΔW , вызванное ее появлением: $\Delta W = W_1 - W_2 = W_c + W_{el} + W_{int}$, где W_{el} — упругая энергия КПДП в наночастице [6], W_c — энергия дислокационного ядра КПДП, W_{int} — энергия взаимодействия КПДП с упругим полем клиновидной дисклинации.

На основе полученных ранее формул найдены слагаемые, составляющие ΔW [7]:

$$W_c \approx \frac{Gb^2 cZ}{2(1-\nu)}, \quad Z = \ln \alpha,$$

$$W_{el} = W_{el}^\infty + W_{el}^* = W_{el}^\infty - \frac{1}{2\nu} \int \sigma_{zz} \Big|_{z=z_0} \beta_{zz} dV,$$

$$W_{el}^\infty = \frac{Gbc^2}{2(1-\nu)} \ln \left(\frac{1.08c}{r_c} \right), \quad \beta_{zz} = H \left(1 - \frac{r}{c} \right) \delta(z - z_0) b,$$

$$W_{el}^* = \pi Gb \sum_{m=0}^{\infty} \left(\frac{A_{2m}^* (4m^2 + 8m + 2 + 2\nu)(2m+1)}{2m+2} c^{2m+2} + B_{2m}^* 2mc^{2m} \right) P_{2m}(\cos \theta),$$

$$W_{int} = W_{int}^\infty + W_{int}^*,$$

$$W_{int}^\infty = \frac{Gbc^2 \nu \omega}{(1-\nu)(1-2\nu)} (\ln c - 2\nu \ln c + 2\nu),$$

$$W_{int}^* = -4\pi Gb \sum_{m=0}^{\infty} \left(\tilde{A}_{2m} \frac{(2m+1)(4m^2 + 8m + 2 + 2\nu)}{(2m+2)R^{2m}} c^{2m+2} + 2\tilde{B}_{2m} m \frac{c^{2m}}{R^{2m-2}} \right) P_{2m}(\cos \theta).$$

где G — модуль сдвига, ν — коэффициент Пуассона, b — величина вектора Бюргерса, c — радиус КПДП, α — параметр дислокационного ядра КПДП, который может меняться в интервале от 1 до 5, r_c — радиус ядра КПДП, W_{el}^∞ — упругая энергия КПДП в бесконечной упругой среде, σ_{zz} — компонента дополнительного поля напряжений КПДП, обусловленного наличием свободной поверхности шара, W_{el}^* — соответствующая ей упругая энергия, $P_{2m}(\cos \theta)$ — полиномы Лежандра, W_{int}^∞ — энергия взаимодействия КПДП и дисклинации в бесконечной среде, W_{int}^* — энергия взаимодействия КПДП с дополнительным полем напряжения дисклинации, обусловленным наличием свободной поверхности шара.

Проведенные в работе расчеты, выполненные при фиксированных значениях энергии ядра дислокации (при $\alpha = 1$) и коэффициента Пуассона $\nu = 0.3$, дали следующие основные результаты. При $R/b = 100$ зарождение КПДП энергетически невыгодно, а при $R/b = 500$ – выгодно. Соответственно, существует некоторый критический размер частицы R_c , такой что при $R > R_c$ зарождение КПДП становится энергетически выгодно. При выбранных значениях $\alpha = 1$ и $\nu = 0.3$ имеем $R_c/b = 258$.

В случае малой декаэдрической частицы R_c для зарождения КПДП примерно в 2 раза превышает соответствующий критический радиус пентагонального уса $R_c^w/b \approx 135$ [9] и в разы превышает критический радиус малой икосаэдрической частицы R_c^{ic}/b [10], что показывает значительно большую устойчивость декаэдрических частиц к зарождению КПДП по сравнению с другими пентагональными частицами.

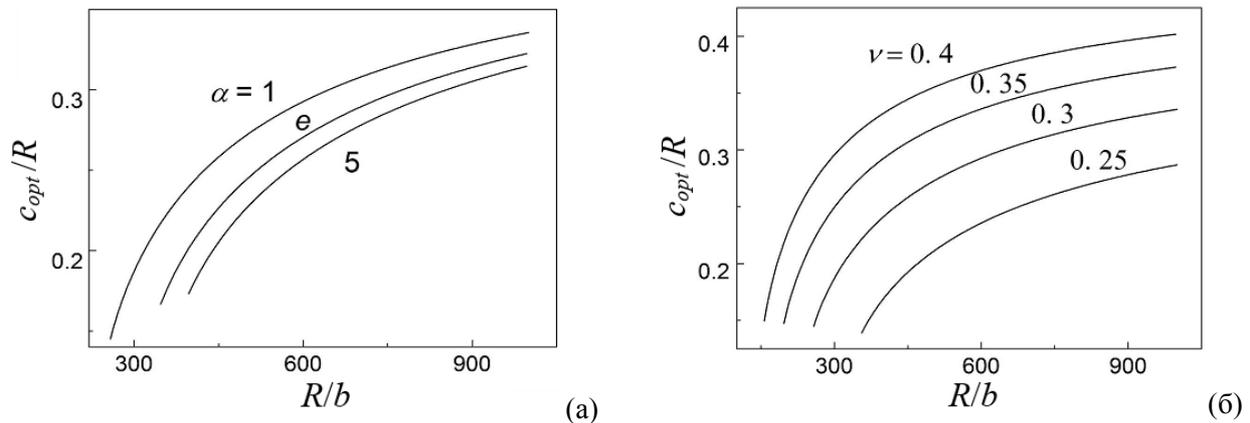


Рис. 2. а) Увеличение значения параметра α приводит к увеличению критического размера частицы и уменьшению оптимального радиуса дислокационной петли c_{opt} . б) Увеличение значения коэффициента Пуассона ν приводит к уменьшению критического размера частицы и к увеличению оптимального радиуса дислокационной петли

Таким образом, зарождение КПДП становится эффективным каналом релаксации остаточных напряжений в малых декаэдрических частицах, если размеры этих частиц превышают некоторое критическое значение, которое зависит от свойств материала. При варьировании таких параметров материала, как энергия дислокационного ядра и коэффициент Пуассона, можно достичь как большей устойчивости, так и большей податливости пентагональных частиц к зарождению дислокационных петель (рис. 2). Во всех этих случаях можно рассчитать значение оптимального радиуса петли в зависимости от размера частицы. Из рассмотренных форм пентагональных кристаллов именно декаэдрическая частица является наиболее устойчивой к зарождению КПДП.

ЛИТЕРАТУРА:

1. L.D. Marks, L. Peng, J. Phys.: Condensed Matter 28 (2016) 053001.
2. H. Hofmeister, Cryst. Res. Technol. 33 (1998) 3.
3. A.E. Romanov et al., J. Mater. Res. 27 (2012) 545.
3. V.G. Gryaznov et al., Cryst. Res. Technol. 34 (1999) 1091
4. M.Yu. Gutkin et al., Scripta Mater. 83 (2014) 1.
5. A.L. Kolesnikova, M.Yu. Gutkin, S.A. Krasnitckii, A.E. Romanov, Int. J. Sol. Struct. 50 (2013) 1839.
6. М.Ю. Кравченко и др. Неделя науки СПбПУ: материалы научной конференции с международным участием. Институт прикладной математики и механики. – СПб.: Из-во Политехн. ун-та, 2016. – 2016. – С. 143-145.

7. A.L. Kolesnikova, M.Yu. Gutkin, A.V. Proskura, N.F. Morozov, A.E. Romanov, *Int. J. Sol. Struct.* 99 (2016) 82.

8. А.Л. Колесникова, А.Е. Романов, *Письма в ЖТФ* 33 (20) (2007) 73.

9. M.Yu. Gutkin, A.L. Kolesnikova, S.A. Krasnitckii, L.M. Dorogin, V.S. Serebryakova, A.A. Vikarchuk, A.E. Romanov, *Scripta Mater.* 105 (2015) 10.

УДК 539.32

С.А. Красницкий¹, А.С. Трофимов³, И.Б. Севастьянов⁴, Э. Ради⁵

¹Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого, РФ

²Университет ИТМО, Санкт-Петербург, РФ

³Сколковский институт науки и технологии, Московская обл., РФ

⁴New Mexico State University, Las Cruces, USA

⁵Univertsida di Modena e Reggio Emilia, Via Amendola, Italy

ЭФФЕКТИВНЫЕ УПРУГИЕ СВОЙСТВА МАТРИЦЫ С ЖЕСТКИМ ТОРОИДАЛЬНЫМ ВКЛЮЧЕНИЕМ

Создание новых композитных материалов с включениями различной формы является перспективным направлением материаловедения. В частности, особый интерес представляет описание эффективных упругих свойств материалов с тороидальными включениями. Композитные материалы с включениями такого рода благодаря своим функциональным свойствам нашли применение при создании электродов для литиевых батарей [1,2]. Полимерные микроторы используются в биотехнологиях [3]. Однако при аналитическом описании упругих свойств материалов с такой микроструктурой обычно используется подход основанный на включениях с эллипсоидальной формой. Это нереалистичное допущение может привести к ошибочным результатам при оценке эффективных упругих свойств композитов.

Применение аналитических методов микромеханики для предсказания эффективных свойств ограничено геометрией включений составляющих композит. На сегодняшний день известно несколько аналитических решений описывающих эффективные свойства композита с тороидальными включениями [4-5]. В [4] с помощью асимптотического подхода определяют вклад от жесткого тонкого тора в упругие свойства. Авторы работы [5] аналитически рассчитали температурные поля вокруг тороидальной полости в теплопроводящей среде и использовали полученные результаты для описания теплопроводящих свойств композитного материала содержащего множество случайно ориентированных пор такой формы.

Отправной точкой в корректном определении эффективных упругих свойств композитных материалов является расчет упругих напряжений вокруг включения. В рамках данной работы мы получили строгое аналитическое решение граничной задачи теории упругости для абсолютно жесткого включения тороидальной формы в изотропной среде под действием однородной деформации. Решение найдено в форме рядов по присоединенным полиномам Лежандра, следуя методу изложенному в работе [6]. Полученные упругие поля были использованы для анализа компонентов тензора упругого вклада от жесткого включения в зависимости от геометрических параметров тора, упругих свойств матрицы (рис. 1). Эти компоненты сравниваются с результатами полученными методом конечных элементов и соответствующими компонентами жесткого эллипсоидального включения.

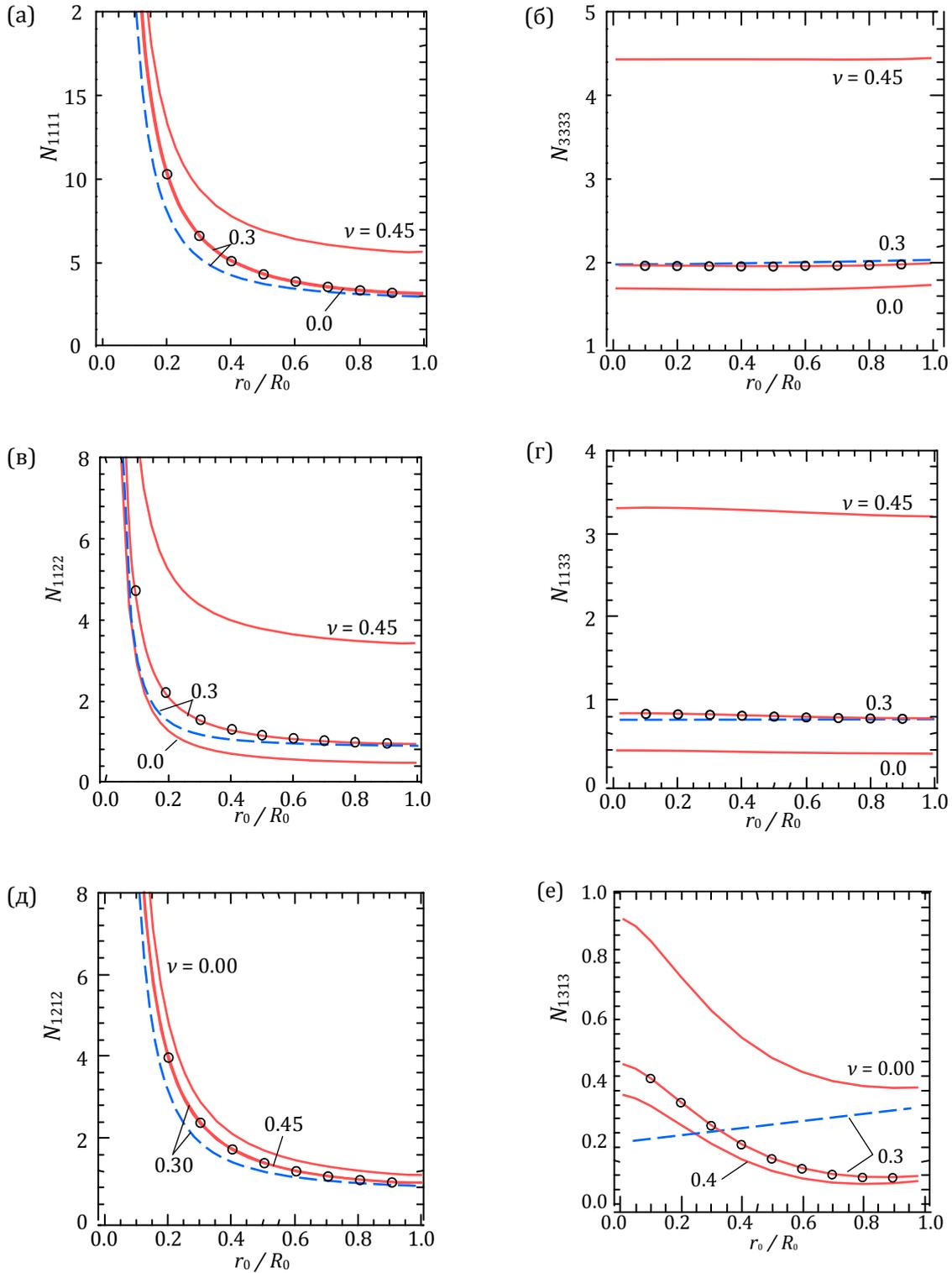


Рис. 1. Ненулевые компоненты тензора упругого вклада (а) $N_{1111} = N_{2222}$, (б) N_{3333} , (в) N_{1122} , (г) N_{1133} , (д) N_{1212} и (е) $N_{1313} = N_{2323}$ в зависимости от отношения радиусов тора r_0/R_0 . Сплошные кривые соответствуют жесткому тороидальному включению; пунктирные к жесткому включению в виде сплюснутого (а,в,д) и вытянутого (б,г,е) сфероида того же объема что и тороид. Результаты, полученные методом конечных элементов, отмечены символом «о». Упругий вклад приведен в единицах модуля Юнга матрицы для разных значений коэффициента Пуассона (0.0, 0.3 и 0.45)

ЛИТЕРАТУРА:

1. Horstmann B, et al. 2013 *J. Phys. Chem. Lett.* **4** 4217
2. Chen Y, et al. 2013 *Nat. Chem.* **5** 489
3. Alexander L, et al. 2008 *Chem. Commun.* **30** 3507
4. Argatov I, et al. 2011 *Int. J. Eng. Sci.* **49** 61
5. Radi E, et al. 2016 *Proc. R. Soc. A* **472**
6. Krokhmal P 2002 *J. Eng. Math.* **44** 345

УДК 548.4

А.Н. Матвиенко, Н. Ю. Золоторевский, Э.А. Ушанова, С.А. Филиппов
Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого

РАСПРЕДЕЛЕНИЕ РАЗОРИЕНТИРОВОК НА ГРАНИЦАХ ДЕФОРМАЦИОННОГО ПРОИСХОЖДЕНИЯ В ПОЛИКРИСТАЛЛИЧЕСКОЙ МЕДИ

Явление фрагментации металлов и сплавов в процессе пластической деформации [1] широко используется для получения ультрамелкозернистых структурных состояний [2]. В то же время, при изучении границ деформационного происхождения (ДП) возникают методические трудности, затрудняющие исследование закономерностей фрагментации. При малых деформациях границы ДП – это малоугловые границы, поэтому нетрудно отделить их вклад в общий спектр разориентировок от вклада исходных границ зерен. Однако с ростом деформации постепенно образуются и накапливаются в структуре большеугловые границы ДП. Проблема выделения их вклада – гораздо сложнее, и до сих пор не имела универсального решения [3, 4]. Особенно она актуальна для той стадии фрагментации, на которой общая протяженность границ ДП и исходных границ зерен сопоставимы, т.е. при истинных деформациях от ~1 до 2-3.

В основе подхода, предложенного в настоящей работе, лежит фундаментальная особенность явления фрагментации. Она заключается в том, что эволюция границ ДП обычно сопровождается ответвлением малоугловых границ, которые «уносят» с собой небольшие порции разориентировки. В результате, разориентировка вдоль такой границы может варьироваться от нескольких десятков градусов на одном ее участке до углов порядка 1° на другом. С другой стороны, подавляющее большинство исходных границ зерен являются большеугловыми на всем своем протяжении. Это различие исходных границ зерен и границ ДП используется в предложенном методе анализа экспериментальных данных, полученных с помощью дифракции обратно рассеянных электронов (EBSD).

Исследовали технически чистую медь. Образцы цилиндрической формы деформировали одноосным сжатием на лабораторном комплексе Gleeble-3800 при 20°C и 150°C со скоростью 10 с^{-1} . Степени деформации на исследованных участках составляли 1, 1.3 и 1.8. Разориентировки определяли на базе данных EBSD, полученных на сканирующем электронном микроскопе Quanta 3D FEG. Для анализа данных использовали расширение MTEX для MatLab.

Предложенная в настоящей работе методика выделения вклада исходных границ зерен в общий спектр разориентировок заключается в следующем. На первом этапе необходимо получить карту, на которой присутствуют только границы исходных зерен. Для этого границы ДП, присутствующие внутри зерен на ориентационной карте (рис. 1а), удаляются с помощью процедуры выделения «зерен», которая позволяет оставить на карте только замкнутые границы с разориентировкой более θ_{\min} . Дополнительно, чтобы удалить с карты мелкие «зерна», являющиеся фрагментами деформационной структуры, можно использовать

функцию удаления «зерен» с размерами меньше заданного d_{min} . В итоге, подобрав оптимальную величину параметра d_{min} , получаем карту, показанную на рис. 1б. На втором этапе для выделенных границ исходных зерен получаем распределение разориентировок в форме «протяженность границ *versus* угол разориентировки» (рис. 1в) и вычитаем его из полного распределения разориентировок, в результате чего получаем искомое распределение для границ ДП.

Для проверки объективности процедуры идентификации исходных границ, методом секущих были определены поперечные размеры выделенных зерен вдоль оси сжатия. Было показано, что средние значения измеренных размеров хорошо согласуются с размером зерна, рассчитанным в предположении, что форма зерен в ходе деформации изменяется также, как форма деформируемого образца (рис. 2).

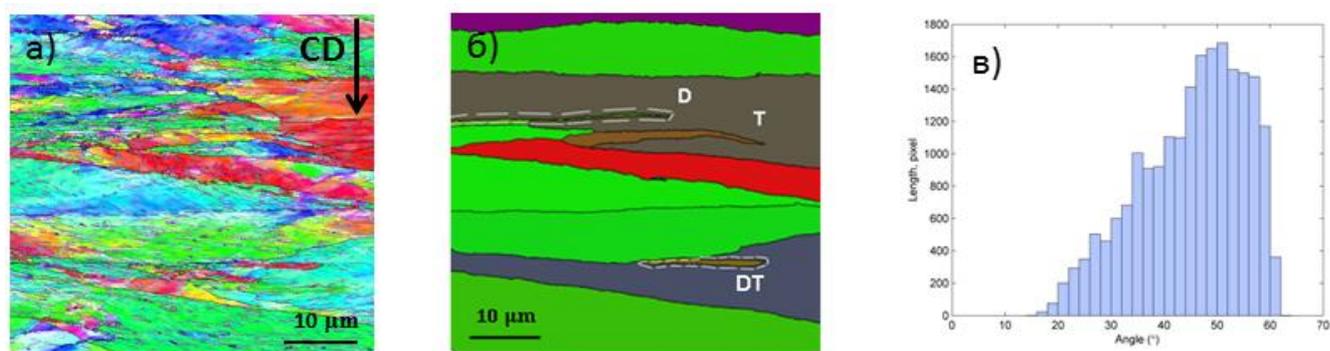


Рис. 1. (а) – Ориентационная карта для оси сжатия (вертикальное направление) образца, деформированного до $\epsilon = 1.3$ при $T = 20^\circ\text{C}$, (б) – карта зерен, (в) – гистограмма разориентировок на границах зерен

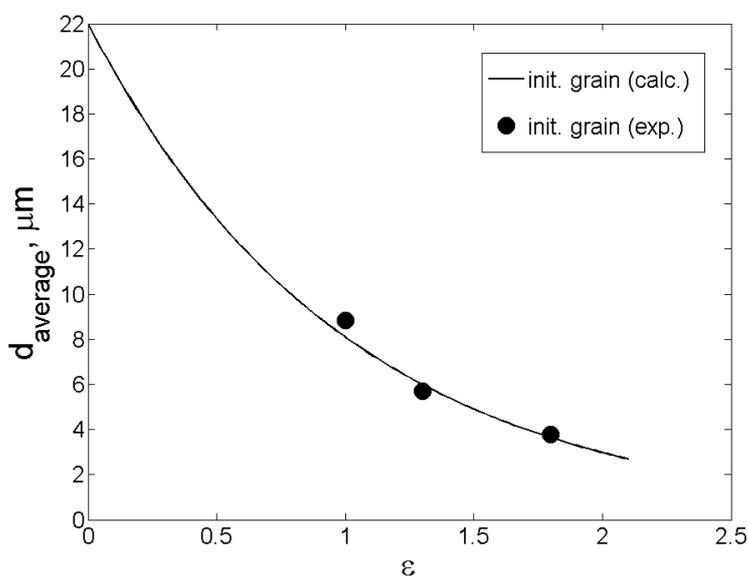


Рис. 2. Зависимость среднего размера исходного зерна, полученного согласно предложенной процедуре, от деформации (кружки). Линия – теоретическая зависимость

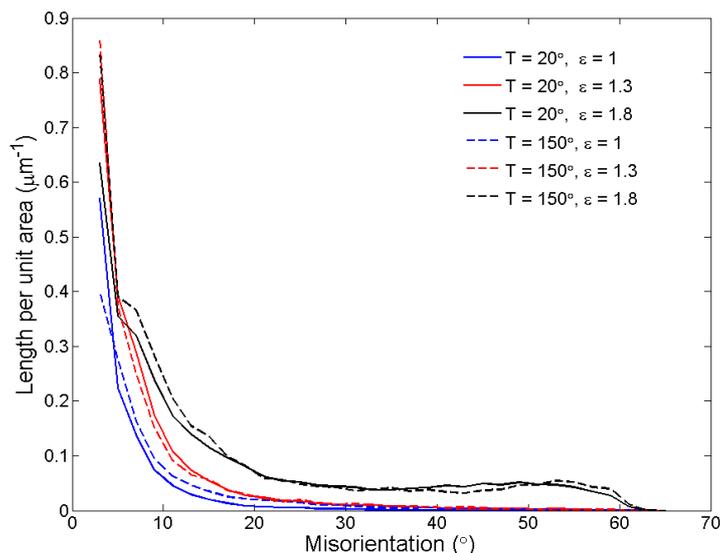


Рис. 3. Распределения разориентировок на границах ДП для шести исследованных состояний меди, подвергнутой сжатию. Температуры и степени деформации указаны на графике

Чтобы распределения разориентировок, полученные для разных образцов, были сопоставимы между собой, на рис. 3 они представлены в форме «удельная протяженность границ *versus* угол разориентировки». Для этого длину границ, выраженную в пикселях (точках ориентационной карты), преобразовывали в реальную длину, а затем нормировали на площадь исследованного участка.

По результатам настоящей работы можно сделать следующие выводы:

1. В распределениях разориентировок, полученных на основе EBSD анализа образцов меди, деформированной сжатием, удастся разделить вклады исходных границ зерен и границ ДП.

2. В интервале степеней деформации от 1.3 до 1.8 происходит резкое ускорение в образовании БУГ ДП и увеличении их разориентировки.

3. При температурах 20°C и 150°C эволюция разориентировок на границах ДП происходит практически одинаково.

Работа поддержана грантом Российского Научного Фонда, проект № 15-13-20030.

ЛИТЕРАТУРА:

1. Рыбин В.В. Большие пластические деформации и вязкое разрушение металлов. – Металлургия, 1986. – 231 с.
2. T.G. Langdon: Twenty-five years of ultrafine-grained materials: Achieving exceptional properties through grain refinement // Acta Materialia. 2013. No. 61. Pp. 7035–7059.
3. Delannay L., Mishin O.V., Juul Jensen D., Van Houtte P. Quantitative analysis of grain subdivision in cold rolled aluminium// Acta Materialia. 2001. No. 49. Pp. 2441–2451.
4. W. He, W. Ma, W. Pantleon, Microstructure of individual grains in cold-rolled aluminium from orientation inhomogeneities resolved by electron backscattering diffraction// Materials Science and Engineering. 2008. Vol A 494. Pp. 21–27.

МОДЕЛИРОВАНИЕ АУСТЕНИТИЗАЦИИ РЕКРИСТАЛЛИЗОВАННЫХ ПОСЛЕ
ХОЛОДНОЙ ПРОКАТКИ АВТОМОБИЛЬНЫХ СТАЛЕЙ

В последние годы значительное внимание уделяется как всесторонним экспериментальным исследованиям процессов структурообразования (в частности, аустенизации), развивающихся в холоднокатаном листе автомобильных сталей при последующем отжиге [1–5], так и разработке математических моделей для их описания [6,7].

В статье представлены некоторые результаты работы по созданию количественной модели аустенизации рассматриваемых сталей в процессе их отжига. Данная работа является частью комплексных экспериментальных и теоретических исследований, проводимых в СПбПУ, и направленных на создание интегральной математической модели для описания сложной эволюции микроструктуры холоднокатаного листа автомобильных сталей на всех этапах его промышленного производства и предсказания конечных механических свойств.

Определение значений эмпирических параметров модели проведено на основе данных исследования кинетики аустенизации как полностью, так и частично рекристаллизованных структур холоднокатаного листа, проведенного в условиях непрерывного нагрева с помощью модуля Pocket Jaw экспериментального комплекса Gleeble 3800 [8].

В феррито-перлитных сталях зарождение аустенита происходит преимущественно на границах между перлитными колониями и ферритом. Согласно данным работы [7], число мест зарождения на единицу площади этих границ составляет $n_s^0 = 2,4 \times 10^{-2} \text{ мкм}^{-2}$. Полагая, что после холодной прокатки и рекристаллизации границы между областями сфероидизованного перлита и феррита остаются предпочтительным местом зарождения, для объемной плотности N_γ зародышей зерен аустенита запишем:

$$N_\gamma = k_\gamma^n n_s^0 S_{PE}, \quad S_{PE} = f_{PE}^{2/3} D_{PF}^{-1}, \quad (1)$$

где S_{PE} – площадь рассматриваемых границ в единице объема; f_{PE} , D_{PF} – соответственно, объемная доля перлита и размер зерна полигонального феррита после горячей прокатки; k_γ^n – эмпирический параметр модели.

Согласно экспериментальным данным, кинетика аустенитного превращения при непрерывном нагреве существенно ускоряется с увеличением скорости нагрева [2]. Физический механизм такой зависимости связан, по-видимому, с тем, что в процессе нагрева эволюция структуры продолжается и после завершения первичной рекристаллизации. В частности, продолжается рост зерна феррита и сфероидизация цементита – факторы, от которых зависит количество мест зарождения. В рамках рассматриваемой модели количественное описание указанных процессов не проводится, поэтому эффект скорости нагрева учитывается путем введения соответствующего эмпирического множителя:

$$N_\gamma^* \equiv N_\gamma^*(R_H) = N_\gamma (k_{\gamma 0}^R + k_{\gamma 1}^R R_H^p), \quad (2)$$

где N_γ^* – эффективная плотность мест зарождения; R_H – скорость нагрева; $k_{\gamma 0}^R$, $k_{\gamma 1}^R$, p – эмпирические параметры. Поскольку особенности зарождения аустенита на границах зерен феррита изучены мало, эта мода зарождения в явном виде в модели не учитывается. Таким образом, выражение (2) описывает полную объемную плотность зародышей аустенита, которая, в частности, определяет конечный размер его зерна.

При расчете скорости роста аустенита в перлите G_γ^{PE} используются следующие выражения [9]:

$$G_\gamma^{PE} = k_\gamma^{PE} \frac{2\bar{D}_C}{\lambda} \frac{C_{\gamma 0} - C_{\gamma \alpha}}{C_0 - \bar{C}_{PE}}, \quad k_\gamma^{PE} \equiv k_\gamma^{PE}(R_H) = k_{\gamma 0}^{PE} + k_{\gamma 1}^{PE} R_H^q, \quad (3)$$

где C_0 – концентрация углерода в цементите; $C_{\gamma 0}$ и $C_{\gamma \alpha}$ – соответствующие граничные концентрации углерода; \bar{C}_{PE} – средняя концентрация углерода в аустените; λ – межпластинчатое расстояние в перлите (предполагается, что после сфероидизации цементита характерное расстояние между его частицами остается близким к величине λ); \bar{D}_C – эффективный коэффициент диффузии углерода в слое аустенита [9], значение которого рассчитывается для его средней концентрации: $\bar{C} = (C_{\gamma 0} + C_{\gamma \alpha})/2$. По причинам, указанным выше, скорость нагрева должна влиять не только на зарождение, но и на рост аустенита. Этот эффект в (3) учитывается с помощью параметра $k_\gamma^{PE}(R)$, где $k_{\gamma 0}^{PE}, k_{\gamma 1}^{PE}, q$ – эмпирические параметры.

В приближении трехмерного (сферического) роста частиц аустенита в перлите его объемная доля X_γ рассчитывается по формуле:

$$X_\gamma = f_{PE} \left(1 - \exp(-X_\gamma^{ext} / f_{PE}) \right), \quad (4)$$

где X_γ^{ext} – соответствующий продолженный объем. Переход к моделированию роста аустенита в феррите осуществляется, когда доля аустенита (4) достигает величины $0,99 f_{PE}$.

При моделировании роста аустенита в феррите полагается, что кинетика этого процесса контролируется подвижностью межфазной α/γ -границы $M_{\alpha/\gamma}$. При этом рассматриваемая скорость роста G_γ^{FE} рассчитывается с использованием формул:

$$G_\gamma^{FE} = k_\gamma^{FE} M_{\alpha/\gamma}(T) (T - A_{p1}), \quad M_{\alpha/\gamma}(T) = M_{\alpha/\gamma}^0 \exp\left(-\frac{Q_{\alpha/\gamma}}{RT}\right), \quad (5)$$

где A_{p1} – соответствующая критическая температура, рассчитываемая с помощью ThermoCalc в приближении паравывесия; $Q_{\alpha/\gamma}$ – энергия активации перемещения α/γ – границы; $k_\gamma^{FE}, M_{\alpha/\gamma}^0$ – эмпирические параметры, величина произведения которых определяется при калибровке модели.

С учетом того, что зерна аустенита, в основном, растут от границ ферритных зерен к их центру, приращение объемной доли аустенита за время dt рассчитывается как утолщение слоя, площадь которого пропорциональна удельной протяженности границ ферритных зерен $S_{PF}^{RX} \sim (D_{PF}^{RX})^{-1} (D_{PF}^{RX} - \text{размер рекристаллизованного зерна феррита})$ и плотности зародившихся зерен аустенита:

$$dX_\gamma^{ext} = N_\gamma^* S_{PF}^{RX} G_\gamma^{FE} dt. \quad (6)$$

Реальное приращение соответствующей объемной доли вычисляется как:

$$dX_\gamma = (X_{\max} - X_\gamma) dX_\gamma^{ext}, \quad (7)$$

где X_{\max} – максимально возможная (равновесная при данной температуре) объемная доля аустенита.

Оптимальные значения параметров рассматриваемой модели определены с использованием данных экспериментального исследования кинетики аустенитизации ряда

автомобильных сталей с широким диапазоном изменения химического состава, а также данных по размеру рекристаллизованного зерна феррита D_{PF}^{RX} [8]. Используемые при этом значения структурных параметров сталей после горячей прокатки (f_{PE} , D_{PF}) рассчитаны с помощью компьютерной программы STAN 2000 [10].

Сравнение кинетических кривых аустенитного превращения для двух сталей (**S320GD**: 0,18С, 0,45Mn, 0,23Si; **08пс**: 0,07С, 0,18Mn, 0,04Si (масс.%)), представленное на рис. 1, показывает хорошее согласие данных расчета с экспериментом.

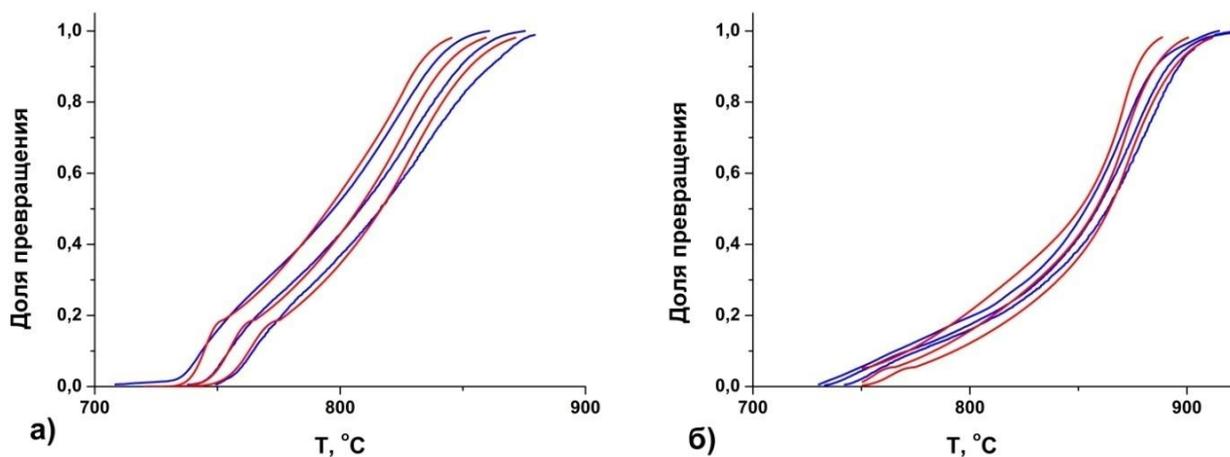


Рис. 1. Сравнение расчетных кинетических кривых аустенитизации рекристаллизованных структур сталей S320GD (а) и 08пс (б) при непрерывном нагреве со скоростями 1, 5 и 20°С с соответствующими экспериментальными данными [8]. Экспериментальные кривые выделены красным цветом, а расчетные – синим

Настоящее исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект №17-19-01178).

ЛИТЕРАТУРА:

- Huang J., Poole W.J., Militzer M. Austenite Formation during Intercritical Annealing // Metall. Mater. Trans. A. 2004. Vol. 35A. P.3364–3375.
- Martin D., Cock T., Garcia-Junceda A., Caballer F.G., Capdevila C., Garcia de Andres C. Effect of Heating Rate on Reaustenitisation of Low Carbon Niobium Microalloyed Steel // Mater. Sci. Tech. 2008. Vol. 24. P.266–272.
- Asadi Asadabad M., Goodarzi M., Kheirandish S. Kinetics of Austenite Formation in Dual Phase Steels // ISIJ Int. 2008. Vol. 48 (9). P.1251 – 1255.
- Azizi-Alizamini H., Militzer M., Poole W.J. Austenite Formation in Plain Low-Carbon Steels // Metall. Mater. Trans. A. 2011. Vol. 42A. P.1544–1557.
- Kulakov M., Poole W.J., Militzer M. The Effect of the Initial Microstructure on Recrystallization and Austenite Formation in a DP600 Steel // Metall. Mater. Trans. A. 2013. Vol. 44A. P.3564–3576.
- Senuma T. Present Status and Future Prospects of Simulation Models for Predicting the Microstructure of Cold-rolled Steel Sheets // ISIJ Int. 2012. Vol. 52 (4). P.679–687.
- Kulakov M., Poole W. J., Militzer M. A Microstructure Evolution Model for Intercritical Annealing of a Low-carbon Dual-phase Steel // ISIJ Int. 2014. Vol. 54 (11). P.2627–2636.
- Васильев А.А., Колбасников Н.Г., Рудской А.И., Соколов Д.Ф., Соколов С.Ф. Исследование кинетики процессов структурообразования при нагреве холоднокатаного листа автомобильных сталей // Сталь. 2017. №10 (в печати).
- Голиков П.А., Золоторевский Н.Ю., Васильев А.А. Моделирование кинетики $\alpha \rightarrow \gamma$ превращения в сталях с феррито-перлитной структурой // НТВ СПбГПУ. 2011. Том.129 (3). С.110–117.
- Ogoltcov A., Sokolov D., Sokolov S., Vasilyev A. Computer Model for Simulation of Steels Hot Rolling on Mill 2000 of Severstal // Mater. Sci. Forum. 2016. Vol. 854. P.183–189.

ДИНАМИКА ПРОНИКАЮЩИХ ДИСЛОКАЦИЙ В ПОРИСТЫХ
ГЕТЕРОЭПИТАКСИАЛЬНЫХ ПЛЕНКАХ GaN

Полупроводниковые гетероструктуры на основе нитрида галлия (GaN), полученные эпитаксиальным ростом, широко используются в современных электронных и оптоэлектронных приборах [1-2]. Качество выращенного кристалла GaN сильно зависит от выбора подложки. В настоящее время в основном используются подложки, изготовленные из других кристаллов, обладающих решеточным несоответствием относительно кристаллической решетки GaN. Это несоответствие вызывает в растущем слое значительные напряжения несоответствия, релаксация которых сопровождается прорастанием в этот слой проникающих дислокаций (ПД). ПД оказывают существенное негативное воздействие на проводящие и оптоэлектронные свойства гетероструктур, полученных на основе III-нитридных полупроводников [3], так что уменьшение их плотности является важной научной и технологической задачей.

Эффективным методом снижения плотности ПД может служить формирование промежуточных пористых слоев GaN, которые затем зарастаются сплошными слоями. Из экспериментов известно, что применение пористых подложек приводит к значительному снижению плотности ПД в растущих пленках GaN [4]. Тем не менее, в настоящее время отсутствует полное понимание влияния пористости на эволюцию ПД в зарастающем слое GaN. Только в самые последние годы появились первые физические модели, развитые на основе реакционно-кинетической модели поведения дислокаций [7] и описывающие эволюцию плотности ПД в таких слоях [6,7].

Описание кинетики эволюции плотности ПД указывает общую тенденцию к ее снижению с увеличением толщины пористого слоя, однако не может прояснить деталей упругого поведения взаимодействующих между собой ПД вблизи пор. Общее представление об особенностях этого поведения и о микромеханизмах снижения плотности ПД можно получить, используя альтернативный подход, который заключается в компьютерном моделировании дискретной динамики дислокаций вблизи пор в напряженном растущем слое GaN.

Цель настоящей работы – изучение динамики ПД вблизи поры в напряженном слое GaN с помощью компьютерного. Для достижения поставленной цели использовался метод двумерной дискретной дислокационно-дислокационной динамики, который ранее уже применялся для описания деформационных процессов в различных условиях нагружения.

В настоящей работе рассматривался случай одномерного решеточного несоответствия слоя и подложки. В центре области моделирования ($-x_b \leq x \leq x_b$, $-y_b \leq y \leq y_b$) располагалась цилиндрическая пора (рис. 1), имеющая круглое сечение радиуса R с координатами центра, совпадающими с началом декартовой системы координат ($x=0, y=0$). Ось поры была перпендикулярна поверхности слоя и совпадает с осью z . На большом удалении от этой поры, на линии ($x=-x_b, y$), в момент времени $t=0$ под действием действующего в слое сдвигового напряжения τ , вызванного растягивающим напряжением несоответствия σ , начиналась генерация положительных краевых дислокаций с векторами Бюргерса \mathbf{b} , направленными вдоль оси x . Одновременно начиналась генерация отрицательных

дислокаций с векторами Бюргерса $-\mathbf{b}$ на линии $(x = x_b, y)$. Распределение дислокаций вдоль оси y и моменты их появления задаются с помощью генератора случайных чисел, а плоскости $y = const$ служат плоскостями скольжения дислокаций. Если в процессе моделирования расстояние между двумя дислокациями противоположных знаков становится меньше $3a$ (a – параметр решетки), то считается, что дислокации аннигилируют. Каждая подвижная дислокация в представленной модели находилась под совместным действием сил, вызванных приложенным сдвиговым напряжением, полями упругих напряжений дисклинаций и остальных дислокаций в рассматриваемой области. Уравнение движения i -й дислокации бралось в обычном виде [8]: $m\ddot{x}_i + \beta\dot{x}_i = F_i$, $i = 1, 2, \dots, N$, где $m = \rho b^2 / 2$ – эффективная масса дислокации, x_i , \dot{x}_i , \ddot{x}_i – ее координата, скорость и ускорение, ρ – плотность материала, β – коэффициент динамического трения, F_i – суммарная сила, действующая на дислокацию, N – общее число подвижных дислокаций, генерированных за время проведения одного численного эксперимента.

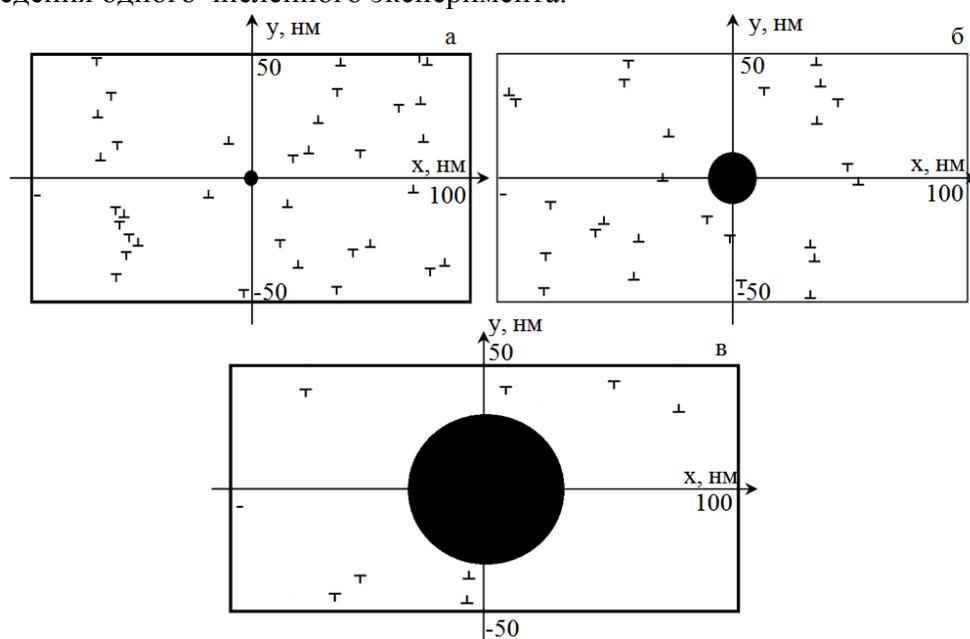


Рис. 1. Карты распределения проникающих дислокаций вблизи цилиндрической поры радиусом 1 nm (а), 10 nm (б) и 30 nm (в) в области моделирования с размерами $200 \times 100 \text{ nm}^2$, к которой приложено однородное одноосное растягивающее напряжение 10 GPa под углом 45° к оси x

Исследование динамики дислокационного ансамбля проводилось внутри двумерной прямоугольной области упруго-изотропной среды с размерами $L \times 2L$, где $L = 100 \text{ nm}$, в центр которой помещалась пора со свободной поверхностью. Значения параметров системы выбирались для кристалла GaN в приближении его упругой изотропии, согласно данным, полученным в [9]: $G = 121 \text{ GPa}$, $\nu = 0.26$, величина вектора Бюргерса $b \approx 2.78 \text{ \AA}$, плотность $\rho = 6150 \text{ kg m}^{-3}$, масса дислокации $m = 3.1 \cdot 10^{-16} \text{ kg m}^{-1}$, $\beta \approx 7.22 \cdot 10^{-5} \text{ Pa s}$. Все расчеты проводились для $N = 250$ дислокаций, вероятность появления которых на экране в определенный момент времени и с определенной координатой по оси y соответствовала равномерному распределению. Каждая дислокация начинала свое движение с линий $x = \pm x_{in} = \pm 120 \text{ nm}$ за пределами области моделирования. Моделирование проводилось в течении времени $t = 10 \text{ ns}$ при значении растягивающего внешнего напряжения $\sigma = 10 \text{ GPa}$.

Примеры результатов проведенных расчетов представлены на рис. 1 в виде карт конечного распределения ПД вблизи поры. Здесь рассмотрены три случая формирования

дислокационной структуры при разных значениях радиуса поры: $R=1$ nm (рис. 1,а), 10 nm (рис. 1,б) и 30 nm (рис. 1,в).

В первом случае (рис. 1,а) пора практически не влияет на формирование дислокационной структуры. Большая часть (167 ПД) за 10 ns пересекла область моделирования и вышла за ее пределы, меньшая часть (48 ПД) за это время аннигилировала, одна попала в пору и была ею захвачена, а остальные (17 положительных и 17 отрицательных ПД) сформировали устойчивые равновесные дипольные, квадрупольные и мультипольные конфигурации.

Во втором случае (рис. 1,б) наличие поры привело к заметным количественным изменениям в структуре ансамбля ПД. Хотя их большая часть (173 ПД) по-прежнему пересекла область моделирования и вышла за ее пределы, и примерно то же самое количество, что и в первом случае, (22 ПД) аннигилировало, однако вторая по численности часть ансамбля (29 ПД) оказалась поглощена порой, и только оставшиеся 13 положительных и 13 отрицательных ПД остались в области моделирования вне поры.

В третьем случае (рис. 1,в) пора относительно большого размера поглотила почти половину (107) ПД. Часть (129) ПД прошла мимо поры и вышла за пределы области моделирования, 6 ПД аннигилировали, и всего 8 ПД остались в области моделирования вне поры.

Проведенное компьютерное моделирование дискретной динамики ПД показало, что создание пор является эффективным способом контроля плотности ПД, генерируемых в процессе релаксации напряжений несоответствия в эпитаксиальных слоях GaN. Полученные результаты говорят о том, что увеличение доли поверхности пор на поверхности слоя до 2 % должно приводить к снижению конечной плотности ПД примерно в 1.5 раза, а увеличение этой доли до 15 % – примерно в 4.5 раза.

ЛИТЕРАТУРА:

1. Paskova T. [GaN substrates for III-nitride devices](#)/ T. Paskova, D.A. Hanser, K.R. Evans// Proc. IEEE. – 2010. – Vol. 98. – No. 7. – P. 1324-1338.
2. Nakamura S. History of gallium-nitride-based light-emitting diodes for illumination/ S. Nakamura, M.R. Krames// Proc. IEEE. – 2013. – Vol. 101. – No. 10. – P. 2211-2220.
3. Marino F.A. Effects of Threading Dislocations on AlGaIn/GaN High-Electron Mobility Transistors/ A. Marino, N. Faralli, T. Palacios, D.K. Ferry, S.M. Goodnick, M. Saraniti// IEEE Trans. Electron Devices. – 2010. – Vol. 57. – No 1. – P. 353-360.
4. Y.D. Wang, K.Y. Zang, S.J. Chua, S. Tripathy, C.G. Fonstad, P. Chen, Appl. Phys. Lett. 87 (2005) 251915.
5. Wang Y. D. Nanoair-bridged lateral overgrowth of GaN on ordered nanoporous GaN template/ Y.D. Wang, K.Y. Zang, S.J. Chua, S. Tripathy, C.G. Fonstad, P. Chen// Appl. Phys. Lett. – 2005. – Vol. 87. – Issue 25. – P. 251915.
6. Artemiev D.M. Reaction-kinetics model for threading dislocation density reduction in GaN porous layer/ D.M. Artemiev, T.S. Orlova, V.E. Bougrov, M.A. Odnoblyudov, A.E. Romanov// AIP Conf. Proc. – 2014. – Vol. 1583. – P. 310 -314.
7. Artemiev D.M. Modeling of Threading Dislocation Density Reduction in Porous III-Nitride Layers/ D.M. Artemiev, T.S. Orlova, V.E. Bougrov, M.A. Odnoblyudov, A.E. Romanov// J. Electron. Mater. – 2015. – Vol. 44. – Issue 5. – P. 1287-1292.
8. Микаелян К.Н. Компьютерное моделирование динамики двумерного дислокационно-дислокационного ансамбля/ К.Н. Микаелян, М. Seefeldt, М.Ю. Гуткин, Р. Klimanek, А.Е. Романов // ФТТ, 2003, том 45, вып. 11, с. 2002-2008.
9. Николаев В.И. Определение модуля упругости эпитаксиальных слоев GaN методом микроиндентирования / В.И. Николаев, В.В. Шпейзман, Б.И. Смирнов// ФТТ. – 2000. – Том. 42. – Вып. 3. – С. 428-431.

**РЕАЛИЗАЦИЯ АЛГОРИТМОВ ВЫБОРКИ ДАННЫХ О ЛОКАЛЬНЫХ И ГЛОБАЛЬНЫХ
БЕСПРОВОДНЫХ СЕТЯХ ИЗ ТЕЛЕМАТИЧЕСКОЙ КАРТЫ**

Современные ИТС предполагают превращение каждого транспортного средства в активный источник и приёмник данных о дорожной обстановке, что важно в задачах предотвращения дорожных инцидентов, снижения выбросов диоксида углерода, уменьшения потерь времени водителя и пассажиров в дорожных заторах. Для этого каждое транспортное средство обеспечивает непрерывную двустороннюю связь между транспортным средством и облачными средствами, находящимися вне автомобиля [1,2,3], для непрерывного получения данных о глобальной дорожной обстановке, локальных изменениях дорожного трафика, нежелательных изменениях погодных условий. Обеспечение непрерывности соединения затруднено по причине большого числа и высокой динамики движения транспортных средств в городских условиях, ограниченной области покрытия сетями локальных беспроводных технологий и наличием пробелов в покрытии сетями глобальных технологий, изменчивости сетевого трафика между транспортными средствами. Принципиальным решением такой проблемы является непрерывное получение данных о потенциальных точках подключения не только вокруг текущей точки траектории каждого транспортного средства, но и в любой точке ближайшей географической области. Выбор актуальных сетей географического региона обеспечивает сочетание технологии управления данными телематической карты и мультипротокольного узла [4]. Предложенная идея реализует технологии сбора и агрегации данных о доступных беспроводных сетях региона [5].

Целью исследования является получение и анализ временных зависимостей выполнения запросов на извлечение данных о телематических ресурсах географического региона при реализации двух режимов извлечения данных для прогнозирования телематической обстановки из транспортного средства.

В процессе движения транспортного средства по маршруту происходит загрузка и передача данных. При возникновении таких потоков необходимо выбрать наилучшую точку подключения к беспроводной сети и осуществить передачу данных. Выбор конкретной точки осуществляется на основе таких высокоуровневых критериев как: скорость передачи данных, время нахождения транспортного средства в области покрытия этой сети, стоимость передачи данных, времени подключения к сети. Однако, приём и передачу данных можно перераспределить в случае, если известны объёмы, приоритеты потоков данных, моменты начала использования полученных или отправленных данных и траектории движения транспортного средства. Тогда сценарии управления данными могут являться локальными, когда данные запрашиваются в области вокруг транспортного средства и глобальными, на всей предполагаемой траектории движения. Исходя из этой идеи можно сформулировать два базовых сценария получения данных транспортным средством из телематической карты при движении транспортного средства в условиях городского или загородного циклов: локальный, основанный на данных о местоположении транспортного средства и глобальный, основанный на данных о предполагаемой траектории движения в случае:

1. Нахождения транспортного средства на стоянке, парковке, в гараже дома или когда транспортное средство движется с невысокой скоростью или нахождения сети для планируемой передачи или приёма данных из транспортного средства в некоторой точке

маршрута - перечня сетей в прямоугольной области вокруг транспортного средства с ранжированием по уровню сигнала в области или по максимальной площади охвата в области.

2. Планирования непрерывного подключения транспортного средства к беспроводным сетям на всей траектории движения транспортного средства – перечня сетей, последовательное переключение между которыми, обеспечит непрерывное соединение транспортного средства с внешними ресурсами.

Графическая интерпретация сценариев представлена на рис. 1.

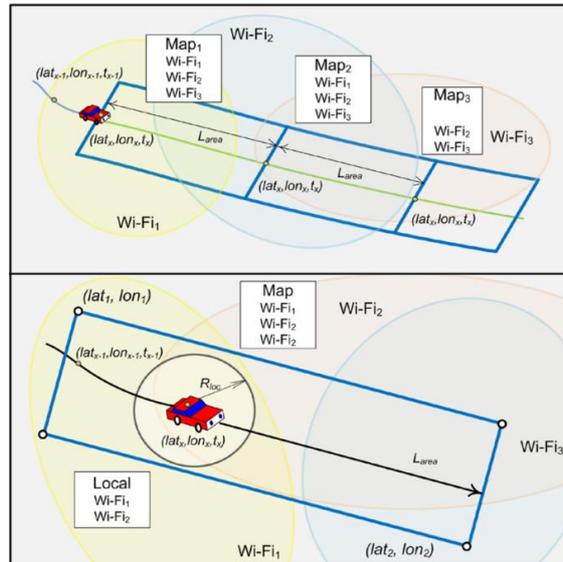


Рис. 1. Графическое представление сценариев извлечения данных о беспроводных сетях региона

Для реализации сценариев был разработан облачный сервис телематической карты и предложены механизмы для извлечения данных в форме реляционных запросов к схеме базы данных, схема базы данных приведена в работе [5].

1. Сценарий 1: получение данных о телематической обстановке вокруг транспортного средства (рис. 2). Исходными данными для определения телематической обстановки является текущее положение транспортного средства, полученное от системы глобального позиционирования GPS в системе координат WGS84, и размер области для запроса данных о телематической обстановке. Размер области определяется такими факторами как, направление движения транспортного средства и чувствительностью приёмника беспроводной сети. Вычисление области для определения сетей определяется максимальной скоростью движения транспортного средства, чувствительностью приёмника. Запрос возвращает SSID беспроводной сети и процент площади прямоугольной области, на которой она будет доступна с учётом чувствительности приёмника в транспортном средстве.
2. Сценарий 2: получение данных о телематической обстановке на всей траектории маршрута (рис. 3). Исходными данными для выполнения сценария является планируемая траектория движения транспортного средства полученное от навигационной системы автомобиля или смартфона пользователя. Траектория определяется набором точек в системе координат WGS84 и моментами времени, в которые предположительно будет находиться транспортное средство в процессе движения. Область доступных сетей определяется чувствительностью приёмника. Запрос возвращает SSID беспроводной сети, точку на пересечении с траекторией,

в которой она определяется первый раз и отношение площади прямоугольной области к площади, занятой этой сетью с учётом чувствительности приёмника сети в транспортном средстве.

Целью проведения эксперимента являлось получение данных о времени выполнения запросов из транспортного средства движущегося в реальной городской среде.

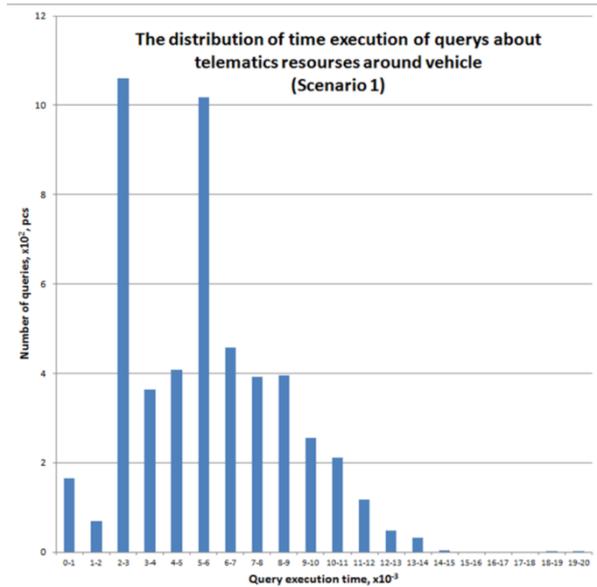


Рис. 2. Распределение времени выполнения запросов при запросе данных вокруг транспортного средства

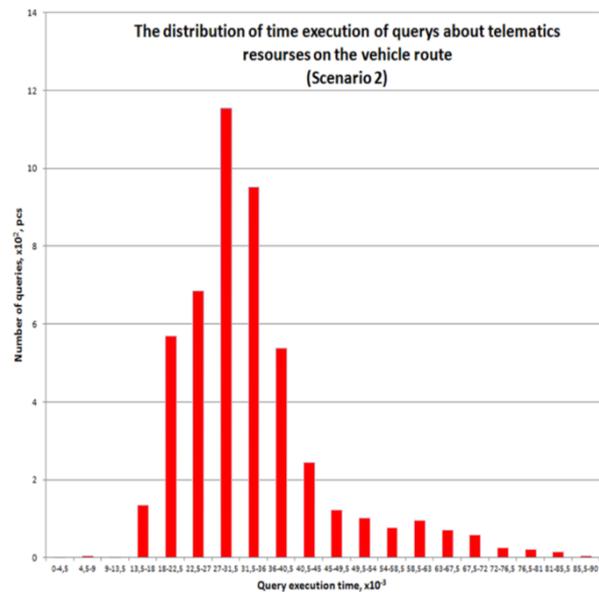


Рис. 3. Распределение времени выполнения запросов для планируемой траектории движения транспортного средства

В результате проведённых экспериментов показано, что время выполнения запросов составляет в среднем 0,1с и 0,3с для локального сценария и сценария с путём соответственно, что позволяет обновлять данные о доступных сетях на транспортном средстве с частотой до 1Гц или увеличивать длину предполагаемого пути. Результаты могут быть использованы как для непосредственного подключения транспортного средства в локальной точке так и для использования в качестве исходных данных в алгоритмах интеллектуального планирования передачи данных из транспортного средства по всему маршруту. Дальнейшим развитием работы может стать увеличение числа как реальных транспортных средств, так и транспортных средств из средств моделирования и выявление оптимальной длины или фрагмента планируемого маршрута, для поддержания актуальных данных о телематической обстановке.

Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ в рамках научного проекта № 16-29-04319.

ЛИТЕРАТУРА:

1. Zaborovskiy, V., Lukashin, A., Popov, S., and Vostrov, A. (2013). Adage mobile services for its infrastructure. In ITS Telecommunications (ITST), 2013 13th International Conference on, pages 127–132.
2. Annese, S., Casetti, C., Chiasserini, C. F., Maio, N. D., Ghittino, A., and Reineri, M. (2011). Seamless connectivity and routing in vehicular networks with infrastructure. IEEE Journal on Selected Areas in Communications, 29(3):501–514.
3. Kutscher, D. and Ott, J. (2006). Service maps for heterogeneous network environments. In 7th International Conference on Mobile Data Management (MDM'06), pages 27–27.

4. Mikhail, C., Vadim, G., Michail, K., and Serge, P. (2015). Methods of interaction between multiprotocol unit and telematics map cloud service. In Proceedings of the 1st International Conference on Vehicle Technology and Intelligent Transport Systems - Volume 1: VENITS., pages 161–166.
5. Glazunov, V., Kurochkin, L., Popov, S., and Chuvatov, M. (2015). Prototype of the telematics map cloud service. In Open Innovations Association (FRUCT), 2015 17TH Conference of, pages 50– 55.

УДК 004.021, 004.85, 004.93

М.А. Рябинин, Л.В. Уткин

Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого

МОДИФИКАЦИЯ ГЛУБОКИХ ЛЕСОВ ДЛЯ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ ПЕРЕРАСПРЕДЕЛЕНИЯ ОБЪЕКТОВ В ПРОСТРАНСТВЕ ПРИЗНАКОВ

Данные, получаемые из реального мира, обычно имеют высокую размерность и нелинейную сложную структуру, чтобы повысить эффективность многих алгоритмов классификации, особенно тех, которые полагаются на вычисления расстояний (классификатор k -ближайших соседей, метод опорных векторов и т. д.), широко применяются методы измерения метрики расстояния. А. Беллет [1] выделил три основные группы методов дистанционного метрического обучения, которые определяются условиями доступной информации о метках классов обучающих примеров. Первая группа состоит из полностью контролируемых алгоритмов, для которых есть набор таких примеров обучения $S = \{(x_i, y_i), i=1, \dots, n\}$, что для каждого из них имеется метка класса $y_i \in Y$, т. е. известны классы отдельных примеров обучения. Вторая группа состоит из слабо контролируемых алгоритмов. Эта группа характеризуется отсутствием меток классов для обучения каждого примера, но есть дополнительная информация в виде ограничений, соответствующих семантическому сходству или различию пар примеров обучения (это информация о метке только на уровне пары). Третья группа состоит из полуконтролируемых алгоритмов, для которых часть данных помечена или принадлежит ограничениям сходства, а другая часть состоит из полностью немаркированных данных.

В данной работе рассматривается первая группа алгоритмов. Основная цель полностью контролируемого обучения с дистанционной метрикой - использовать дискриминативную информацию, чтобы все примеры данных одного класса были близки, а разных классов были разделены.

Основная идея состоит в следующем: если имеется два вектора наблюдения $x_i \in R^m$ и $x_j \in R^m$ из обучающего набора, а сходство объектов определяется их принадлежностью к одному и тому же классу, то расстояние между векторами $d(x_i, x_j)$ должно быть сведено к минимуму, если они принадлежат одному классу, и должно быть максимизировано, если они из разных классов. Мощная реализация метрического обучения, связанного с нелинейными структурами данных, представляет собой так называемую сиамскую нейронную сеть, представленную Дж. Бромлей [2], для решения проблемы согласования изображений при проверке подписей. Сиамская архитектура использовалась во многих приложениях, например, при проверке лица, в построении инерциальной классификации жестов, в глубоком обучении и т.д. Новый мощный метод, который можно рассматривать как альтернативу глубоким нейронным сетям, - это глубокий лес, предложенный З.Н. Чжоу и Дж. Фэн [3] и названный "gcForest". Его можно сравнить с многослойной структурой нейронной сети, но каждый слой в gcForest содержит несколько случайных лесов вместо нейронов. GsForest можно рассматривать как многослойный каскад ансамблей деревьев решений, где каждый последующий каскад расширяет входной экземпляр из выборки X . Каждый лес в данном каскаде производит оценку распределения вероятности классов на листовом узле, в который попадает соответствующий экземпляр, а затем усреднения по всем

деревьям в том же лесу. Распределение классов формирует вектор класса, который затем объединяется с исходным вектором X , который вводится на следующий уровень каскада.

В данной работе предлагается дискриминативный глубокий лес (ДГЛ), который является алгоритмом оценки метрики расстояния. Он основан на gcForest, предложенном З. Н. Чжоу и Дж. Фэн, и может рассматриваться как его модификация. Основная идея, лежащая в основе предлагаемого ДГЛ, заключается в назначении весов деревьям решений в случайном лесу, чтобы уменьшить расстояния между парами примеров из одного класса и увеличить их между парами из разных классов. Эта модификация осуществляется путем объединения евклидовых и манхэттенских расстояний в функции потерь. Для больших объемов данных применяется алгоритм Франка-Вулфа [4], который достаточно прост, при условии, что допустимое множество весов является единичным симплексом.

Например, если случайный лес является комбинацией T деревьев решений $\{F_t(x), t=1, \dots, T\}$, то мера расстояния равна:

$$d(x_i, x_j) = T^{-1} \sum_{t=1}^T F_t(\varphi(x_i, x_j)) \quad (1)$$

Функция $\varphi(x_i, x_j)$ в (1), определенная в работе [5]. Пример реализации метрики с помощью весов для трех классов представлен на рисунке 1.

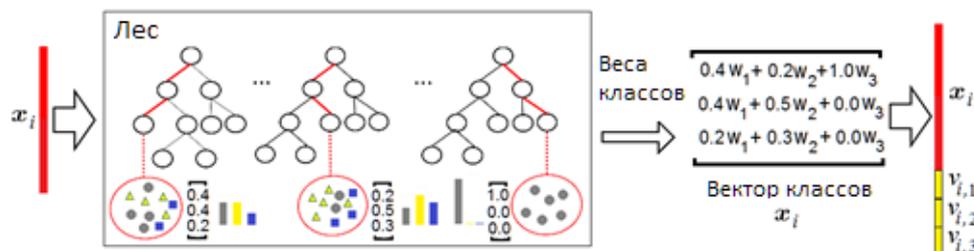


Рис. 1. Каскад вектора классов с учетом весов

Из рис. 1 видно, что распределение оценивается путем подсчета процента вероятности различных классов нового примера обучения x_i на листовом узле, в который он входит. Тогда вектор класса x_i вычисляется как взвешенное среднее. Таким образом, мы имеем средневзвешенные значения для каждого леса, а веса - это подготовленные параметры, которые оптимизированы для уменьшения расстояния между объектами одного класса и увеличения расстояния между объектами из разных классов.

Сравнение результатов обучения ДГЛ и gcForest на различных выборках приведены в процентах и сведены далее в табл. 1-3. Параметр T – количество деревьев в лесу, параметр N – количество примеров обучающей выборки, количество примеров для тестирования равно $2/3$ от N .

Табл.1. Результаты обучения ДГЛ и gcForest на выборке “Parkinson”

T	100		400		700		1000	
	gcF	ДГЛ	gcF	ДГЛ	gcF	ДГЛ	gcF	ДГЛ
50	80	84	85	87	84	84	79	80
80	81,5	87	87,5	90	85	87,5	80	85
100	83,3	86	88	92	86	88	83	90
120	84	88,3	92	95	92	95	92	95

В табл. 1 приведены результаты распознавания выборки “Parkinson”, состоящей из 2 классов (болен\не болен), каждый пример имеет 22 признака.

Табл. 2. Результаты обучения ДГЛ и gsForest на выборке “Ecoli”

Г	100		400		700		1000	
N	gcF	ДГЛ	gcF	ДГЛ	gcF	ДГЛ	gcF	ДГЛ
50	78	82	80	86	72	76	73	77
80	88	89	81	83	87	90	84	88
100	85	90	85	87	82	84	90	93
120	84	88	80	85	93	92	95	96

В табл. 2 приведены результаты распознавания выборки “Ecoli”, состоящей из 8 классов (различные виды), каждый пример имеет 7 признаков.

Табл. 3. Результаты обучения ДГЛ и gsForest на выборке MNIST

Г	100		400		700		1000	
N	gcF	ДГЛ	gcF	ДГЛ	gcF	ДГЛ	gcF	ДГЛ
50	63	70	67	71	68	68	69	70
80	63	70	75	77	75	77	70	70
100	70	73	76	78	76	78	76	78
120	74	75	76	76	76	78	77	78

В табл. 3 приведены результаты распознавания выборки MNIST, состоящей из 10 классов (изображение цифр 0-9), каждый пример имеет 784 признака.

Из результатов обучения приведенных в таблицах 1, 2 и 3 видно, что наиболее эффективно алгоритм ДГЛ работает на выборках малого размера, которых недостаточно для обучения глубоких нейронных сетей. Однако и на выборке большего размера ДГЛ также классифицирует объекты выборки точнее, чем gsForest. ДГЛ позволяет эффективнее использовать алгоритмы классификации при недостаточном количестве данных для обучения.

Следует отметить два основных преимущества алгоритма ДГЛ. Во-первых, представлены веса для деревьев, которые позволяют применить новые свойства для глубокого леса. С помощью весов есть возможность управлять свойствами глубокого леса и его модификациями, создавая соответствующие целевые функции, которые аналогичны функциям потери или восстановления в нейронных сетях. Во-вторых, использование новой целевой функции, которая объединяет две метрики: евклидовы и манхэттенские расстояния.

Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ в рамках научного проекта № 17-01-00118.

ЛИТЕРАТУРА:

1. A. Bellet, A. Habrard, and M. Sebban. A survey on metric learning for feature vectors and structured data. arXiv preprint arXiv:1306.6709, 28 Jun 2013.
2. J. Bromley, J.W. Bentz, L. Bottou, I. Guyon, Y. LeCun, C. Moore, E. Sackinger, and R. Shah. Signature verification using a siamese time delay neural network. International Journal of Pattern Recognition and Artificial Intelligence, 7(4):737–744, 1993.
3. Z.-H. Zhou and J. Feng. Deep forest: Towards an alternative to deep neural networks. arXiv:1702.08835v1, February 2017.
4. M. Frank and P. Wolfe. An algorithm for quadratic programming. Naval Research Logistics Quarterly, 3(1-2):95–110, March 1956.
5. Y. Dong, B. Du, and L. Zhang. Target detection based on random forest metric learning. IEEE Journal of Selected Topics in Applied Earth Observations and Remote Sensing, 8(4):1830–1838, 2015.

ИМИТАЦИОННАЯ МОДЕЛЬ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ПОТОКОВ ДАННЫХ МЕЖДУ
ГЕТЕРОГЕННЫМИ КАНАЛАМИ СВЯЗИ ТРАНСПОРТНЫХ СРЕДСТВ

Приложения мультипротокольного узла транспортного средства и облачные сервисы интеллектуальной транспортной системы (ИТС) непрерывно формируют телекоммуникационный трафик [1, 2], передача которого осуществляется в произвольные моменты времени с использованием гетерогенных каналов передачи данных.

Для обеспечения полного использования суммарной пропускной способности гетерогенных каналов на всей траектории движения транспортного средства в работе [3] был разработан алгоритм распределения потоков данных между беспроводными глобальными и локальными сетями связи.

С целью обоснования и проверки области применимости алгоритма была разработана имитационная модель распределения потоков данных, проходящих через мультипротокольный узел.

Исходными данными для формирования модели являются заявки на передачу телекоммуникационного трафика, формируемого приложениями, установленными на мультипротокольным узле. При этом каждая заявка характеризуется следующим набором параметров:

- приоритетом – низшим - трафик от фоновых процессов мультипротокольного узла, средним - трафик от мультимедийных приложений, электронной почты, приложений, отражающих ситуации на дорогах и высшим - сообщения класса «emergency call»;
- минимально требуемой пропускной способностью канала для обслуживания заявки;
- объемом передаваемых данных.

Модель состоит из приложений, очереди заявок, пула заявок и каналов передачи данных, программно мультиплексируемых протоколом МРТСП [4]. Использование очереди и пула заявок обусловлено учетом непрерывной оценки пропускных способностей каналов и их комбинаций в алгоритме распределения потоков данных. На рис. 1 представлено графическое представление имитационной модели распределения потоков данных, поступающих от мультипротокольного узла.

На вход очереди поступает пуассоновский поток заявок, генерируемых каждым зарегистрированным приложением на мультипротокольном узле. Положение заявки в очереди определяется текущей используемой стратегией обслуживания. Очередь, используемая в процессе распределения потоков данных, конечна. При переполнении очереди приложению будет отказано в передаче данных. Приложение может возобновить попытку передачи через случайный промежуток времени или по повторному запросу пользователя.

После добавления новой заявки из очереди выбирается набор, который передается в пул. Выбор набора заявок осуществляется в соответствии с заданной стратегией. Заявка, необслуженная в течение определенного стратегией времени, оповещает приложение об отказе в обслуживании.

В соответствии с текущей стратегией выполняется анализ доступных каналов передачи данных, их пропускных способностей и времени существования. Далее, выбираются заявки из пула, удовлетворяющие критерию оптимальности, сформулированному в работе [3].

Обслуживание заявки, состоящее в дисциплине добавления в очередь и объединении заявок в пул, не привязано к конкретной стратегии обслуживания очереди, однако при реализации на них базируется. Модель инвариантна к стратегиям обслуживания заявки, что позволяет тестировать различные правила (стратегии) формирования пула заявок.

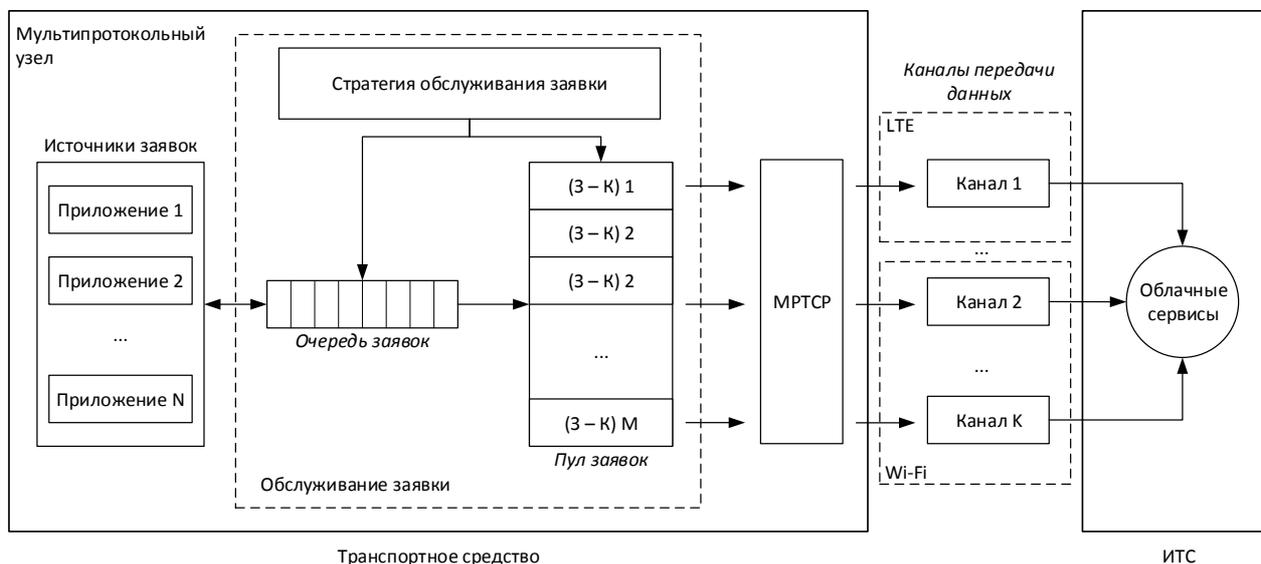


Рис. 1. Схема распределения потоков данных мультипротокольного узла

Пул представляет собой словарь «номер (ID) заявки - канал передачи данных». Результатом моделирования процесса распределения потоков данных является регистрация времени исполнения алгоритма динамического мультиплексирования гетерогенных каналов связи в зависимости от предложенных и/или разработанных стратегий обслуживания заявок в модели. Пример распределения заявок, попавших в пул, приведен на рис. 2.

<i>ID заявки</i>	381	382	...	1459
<i>Канал передачи данных</i>	LTE1+Wi-Fi2	LTE2+MESH	...	LTE1+LTE2

Рис. 2. Пример заполненного пула заявок

Предложенная модель является основой технологической среды тестирования стратегий обслуживания очереди, а также в целом алгоритмов распределения телекоммуникационного трафика мультипротокольного узла, и использована для получения результатов в полунатурных экспериментах по маршрутизации сетевого трафика транспортных средств.

Работа выполнена при поддержке РФФИ, грант 16-29-04319.

ЛИТЕРАТУРА:

1. А.С. Тучков, С.Г. Попов, Интеграция программно-аппаратных компонент автомобильного мультипротокольного узла // Неделя науки СПбГПУ: материал научно-практической конференции с международным участием. Институт прикладной математики и механики СПбГПУ. – СПб.: Изд-во Политехн. ун-та, 2013. – №1. С. 309-310.
2. Popov, S., Kurochkin, M., Kurochkin, L., and Glazunov, V. (2015). The implementing of the internet of things concepts for the continuous provision of informational services for vehicle drivers and passengers. In Telematics and Future Generation Networks (TAFGEN), 2015 1st International Conference on, pages 1–5.

3. С.Г. Попов, А.С. Тучков, Л.М. Курочкин, М.П. Шарагин, Алгоритм распределения потоков данных между беспроводными глобальными и локальными сетями связи // Науч.-техн. вед. СПбГПУ. Сер.: Информатика. Телекоммуникации. Управление. – 2017.– № 3 (242). С. 20-41.

4. A. Ford, C. Raiciu, M. Handley, and O. Bonaventure, “TCP Extensions for Multipath Operation with Multiple Addresses,” RFC 6824, Internet Engineering Task Force, January 2013. [Электронный ресурс] URL:<http://tools.ietf.org/html/rfc6824> (дата обращения: 06.10.2017).

УДК 004.75

Д.А. Кучуков, А.А. Лукашин
Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого

АСПЕКТЫ ПРИМЕНЕНИЯ СУПЕРКОМПЬЮТЕРОВ В ЗАДАЧАХ МАШИННОГО ОБУЧЕНИЯ

Машинное обучение в настоящее время продолжает проникать во все сферы нашей жизни. Оно широко применяется не только в сфере информационных технологий, но и среди более традиционных, таких как медицина, образование, промышленность [1].

Методы глубокого машинного обучения не новы, первые работы датируются 1980 годом [2], но долгое время не хватало производительности аппаратного обеспечения, чтобы эффективно использовать их. Нынешний расцвет глубокого машинного обучения связан во многом с появлением достаточно производительных процессоров, а также таких технологий как CUDA, позволяющих выполнять высокопараллельные вычисления на графических процессорах. Такое направление машинного обучения как глубокое обучение вряд ли бы стало достаточно эффективным без этого.

Однако подобные параллельные вычисления можно вести не только на кластерах из видеокарт. Есть системы, специально спроектированные для таких вычислений – суперкомпьютеры. В настоящее время они по разным причинам почти не используются для машинного обучения, однако их потенциал весьма велик. Стоит отметить, что суперкомпьютер – это не просто большое количество компьютеров, объединенных в единую вычислительную сеть. Корпорации, такие как Google или Amazon используют огромное количество вычислительных узлов для своих целей, но такие системы нельзя назвать суперкомпьютером. Главное отличие суперкомпьютеров – это сеть, которая связывает вычислительные узлы, а точнее скорость и задержки этой сети. Высокопроизводительные вычисления требуют интенсивного обмена данными, но сеть, объединяющая компьютеры медленнее, чем обмен данными между процессорами на узле. Это создает фундаментальную проблему известную как «стена памяти» [3]. Также есть ограничение на увеличение скорости вычислений от увеличения количества узлов, выраженное в виде закона Амдала [4]. Обычная сеть, такая как Ethernet не позволяет с достаточной скоростью передавать данные и результаты обработки между вычислительными узлами для совместной работы над ними. Именно этот недостаток не позволяет эффективно распараллеливать обработку данных на большом количестве обычных компьютеров. Суперкомпьютер же имеет архитектуру, специально разработанную для параллельных вычислений. Кроме того, суперкомпьютеры строятся не только на основе ЦПУ, но и на основе GPU, FPGA и их гибридов. Так суперкомпьютер СПбПУ имеет 3 подсистемы:

1. Tornado – ЦПУ общего назначения Intel Xeon,
2. Tornado-k40 – ЦПУ Intel Xeon + ГПУ Nvidia Tesla,
3. Mic – ЦПУ с поддержкой массового параллелизма.

Это большой плюс для задач машинного обучения, так как самые популярные фреймворки такие как Tensorflow, Theano, Caffe поддерживают вычисления на GPU. Перечисленные фреймворки в основном используются для задач глубокого обучения. Одна

из его проблем – обучение модели требует большого количества данных и времени (недели в случае одного узла). При этом тонкая настройка модели зачастую осуществляется перебором параметров, что еще сильнее увеличивает требуемое время до получения результата. Не все из данных задач могут быть решены распределением вычислений по большому количеству обычных узлов из-за описанной выше проблемы. К примеру, MITIE - инструмент для работы с естественными языками обучается неделю на нескольких сотнях записей. Для нескольких тысяч записей время обучения предсказать сложно.

Суперкомпьютеры позволяют эффективно распараллеливать подобные задачи на десятки и сотни узлов. Примером такой задачи является «Сегментирование снимков УЗИ для диагностики рака молочной железы». В рамках данной задачи необходимо сегментировать большое количество снимков УЗИ. Это подразумевает большое количество данных, а также обработку изображений, что наиболее эффективно решается методами глубокого обучения. На данный момент обучение на усеченной выборке занимает несколько часов. Распределение вычислений между большим количеством узлов суперкомпьютера позволит увеличить выборку, уменьшить время обучения и произвести более тонкую настройку модели за счет большего количества итераций. Кроме этого, использование гибридных суперкомпьютеров с GPU или Xeon Phi даст качественный скачок производительности.

Авторами был проведен эксперимент с обучением рекуррентной нейронной сети, построенной на основе фреймворка Tensorflow. Задача связана с обработкой естественных языков. Для показателя производительности использовалась абстрактная единица измерения «слов в секунду» (с/с). Было задействовано 1, 16, 32 узла подсистемы Tornado. Результаты отображены на рис.1.

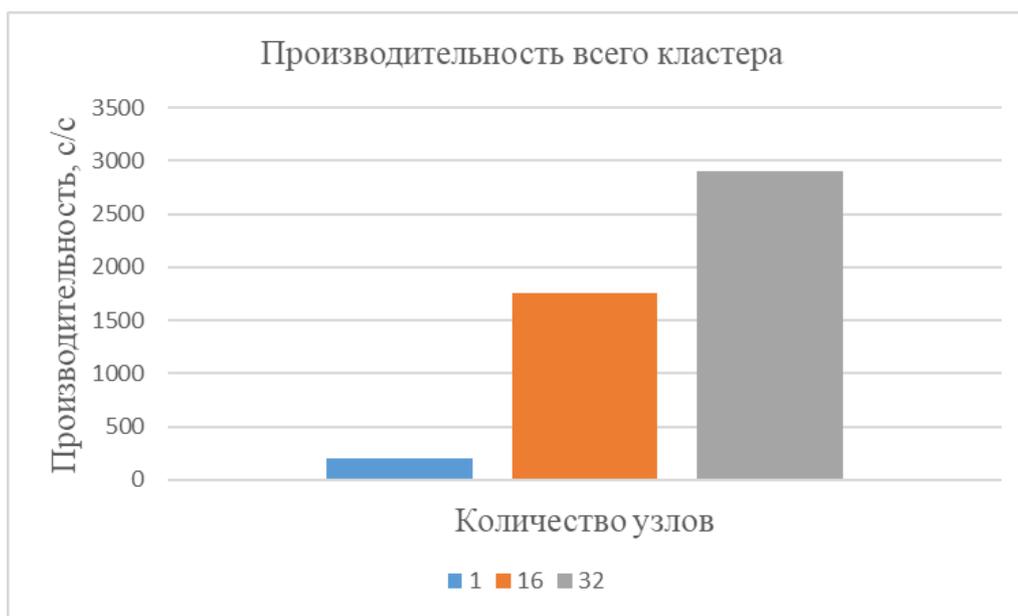


Рис. 1. Показатели производительности обучения нейронной сети на разном количестве узлов

Увеличение количества узлов в 32 раза дало почти пятнадцатикратный прирост производительности. То есть вместо двух недель, мы можем завершить обучение за сутки. Необходимы дальнейшие исследования на других моделях нейронных сетей, а также других архитектурах аппаратного обеспечения.

В рамках исследования решаются следующие задачи:

1. Исследование возможности применения современных фреймворков для решения задач глубокого машинного обучения с использованием суперкомпьютеров.

2. Разработка методов использования гибридных суперкомпьютерных систем для задач машинного обучения.
3. Исследование эффективности применения гибридных суперкомпьютерных систем для различных топологий нейронных сетей.
4. Решение задачи сегментации изображений УЗИ снимков для поиска новообразований.

ЛИТЕРАТУРА:

1. Домингос, П. Верховный алгоритм – М.: Манн, Иванов и Фербер, 2016. – 336 с.
2. Dechter R. Learning while searching in constraint-satisfaction problems. - 1986 [Электронный ресурс]. - http://ftp.cs.ucla.edu/tech-report/198_-reports/860049.pdf.
3. Wulf Wm. A., McKee S. A. Hitting the memory wall: implications of the obvious // ACM SIGARCH Computer Architecture News. – 1995 – Vol. 23 Issue 1 – P. 20 – 24.
4. Amdahl G. Validity of the Single Processor Approach to Achieving Large-Scale Computing Capabilities [Электронный ресурс]. – <http://www-inst.eecs.berkeley.edu/~n252/paper/Amdahl.pdf>.

УДК 004.416.6, 004.418

М.В. Попов, С.Г. Попов

Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого

СРАВНЕНИЕ ТОЧНОСТИ СТАТИЧЕСКИХ ОПРЕДЕЛЕНИЙ МУЛЬТИСИСТЕМНОГО ОДНОЧАСТОТНОГО ПРИЕМНИКА СПУТНИКОВЫХ СИСТЕМ

Введение. Для определения позиционирования используются несколько спутниковых систем, наиболее популярные: BeiDou, Galileo, GPS, GLONASS. Использование систем позиционирования в одиночном режиме или в комбинации дают различные точности позиционирования. Зависит это от ряда факторов: погодные условия, ионосферные и тропосферные рефракции, особенности рельефа в точке определения координат, расположения спутников на орбите от времени суток, погрешности ухода шкалы времени спутника, характеристики приемника [1].

Точность определения координат может быть повышена за счет применения фильтрации данных, использования дифференциальных навигационных поправок (постпроцессинг, DGPS, и RTK) [2]. Помимо постобработки данных есть возможность комбинировать системы позиционирования получая различную точность определения координат. Методы комбинации систем вызывают интерес как у исследователей, так и у специалистов, решающих прикладные задачи.

Анализ доступности различных спутниковых навигационных систем и точности предоставляемых ими данных, в зависимости от периода наблюдения (состояния конкретной группировки или их комбинаций) для конкретной точки также вызывает интерес у исследователей. Использование такого рода наблюдений и их анализ позволяет сформировать рекомендации для выбора комбинации систем спутниковой навигации, предоставляющего наиболее точные данные в конкретный момент для данной области. Результаты такого рода исследований представлены в работе [3].

Для определения оптимальной комбинации спутниковых систем существует множество методов и критериев, как в динамическом, так и в статическом определении координат. Для статических определений можно рассматривать следующие критерии:

- кучность расположения полученных координат между собой (применение кластерного анализа; оценка расстояний между центрами кластеров: методы k-means, c-means);

- стабильность во времени местоположения (оценка смещения центра кластера во времени; по ограниченному набору точек);

- Оценка количества и фильтрация выбросов (использование правила 3-сигма).

В данной работе будет рассмотрен анализ выбросов от комбинации спутниковых систем с помощью правила 3-сигма.

Цели и задачи. Целью работы является сравнение точности мультисистемного одночастотного приемника спутниковых систем при определении координат в статическом режиме. Критерием сравнения точности является анализ выбросов по правилу 3-сигма.

Постановка и реализация эксперимента. Для проведения сравнительной характеристики использовалось следующее оборудование и программное обеспечение:

- мультисистемный одночастотный приемник спутниковых систем - EVK-7 Multi-GNSS evaluation kit;
- программное обеспечение для снятия данных от приемника – u-center 8.21 GNSS Evolution Software;
- программное обеспечение для получения точности и обработки выбросов – MatLab R2014b.

Снятие данных производилось с продолжительностью 15 минут, приемник на время проведения эксперимента оставался неподвижен. Эксперименты проводился при различном местоположении для получения различного покрытия спутниковых систем.

Результаты эксперимента. Результатами экспериментов были получены данные местоположения с длительностью 15 минут в статическом режиме от комбинаций спутниковых систем при различном покрытии. Рисунки будут предоставлены только для одного эксперимента.

На рис. 1 предоставлены полученные наборы координат от различных комбинаций спутниковых систем.

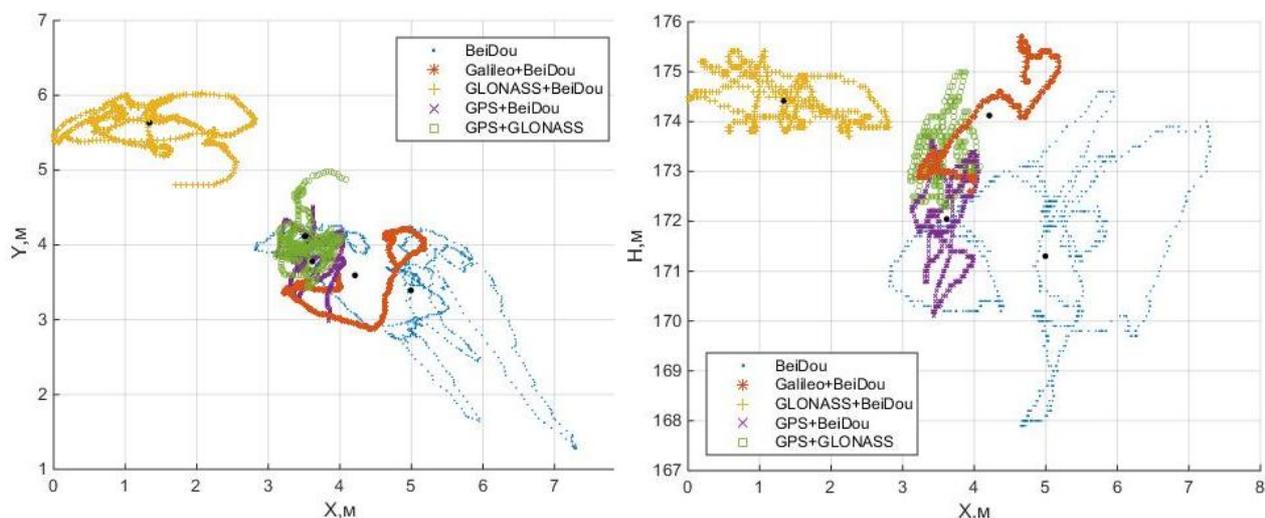


Рис. 1. График зависимостей X-Y и X-Z полученных координат от комбинаций спутниковых систем. (координаты по X-Y относительно, по Z – относительно уровня моря)

На рис. 2 предоставлены полученные наборы координат от различных спутниковых систем. Системы работали независимо друг от друга.

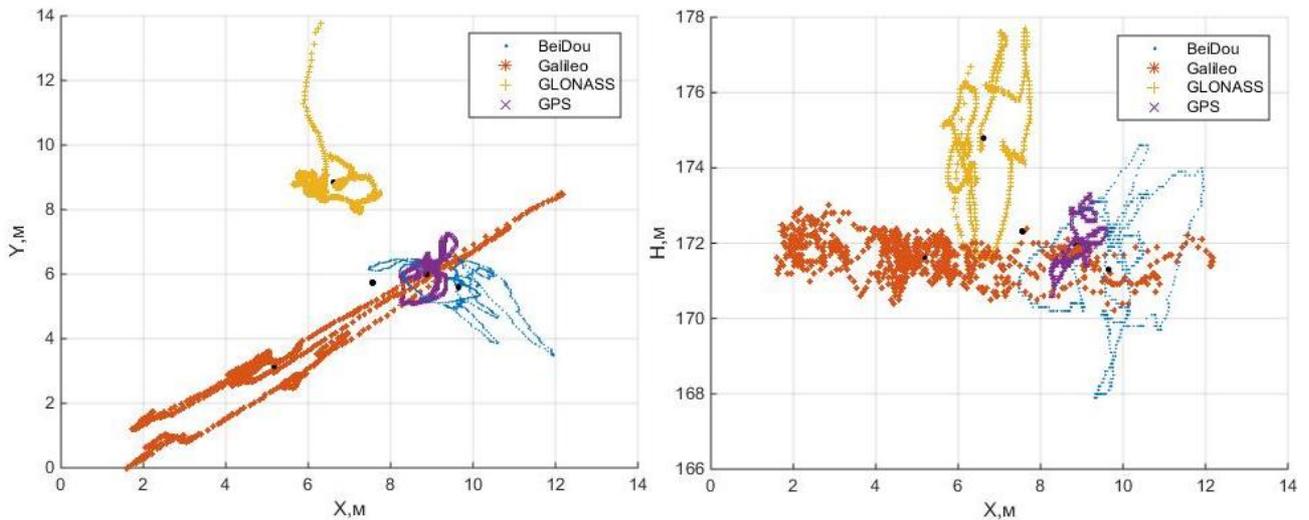


Рис. 2. График зависимостей X-Y и X-Z полученных координат от спутниковых систем. (координаты по X-Y относительно, по Z – относительно уровня моря)

На рис. 1 и 2 проиллюстрированы в виде черных точек центры координат как отдельно полученных данных, так и в композиции. Центры были найдены с помощью среднего арифметического каждой компоненты координат.

Постобработка данных. Для получения распределения расстояния от центра в качестве расстояния возможно выбрать различные метрики. Для обработки было выбрано евклидово расстояние.

$$\rho(x, x') = \sqrt{\sum_i^n (x_i - x'_i)^2}$$

В качестве центра были выбраны центры координат композиции измерений, центры каждого измерения по отдельности, начала координат [0,0,0]. По правилам 3-сигма были отброшены выбросы, которые не попадают в интервал $(-3\sigma < \bar{x} < 3\sigma)$.

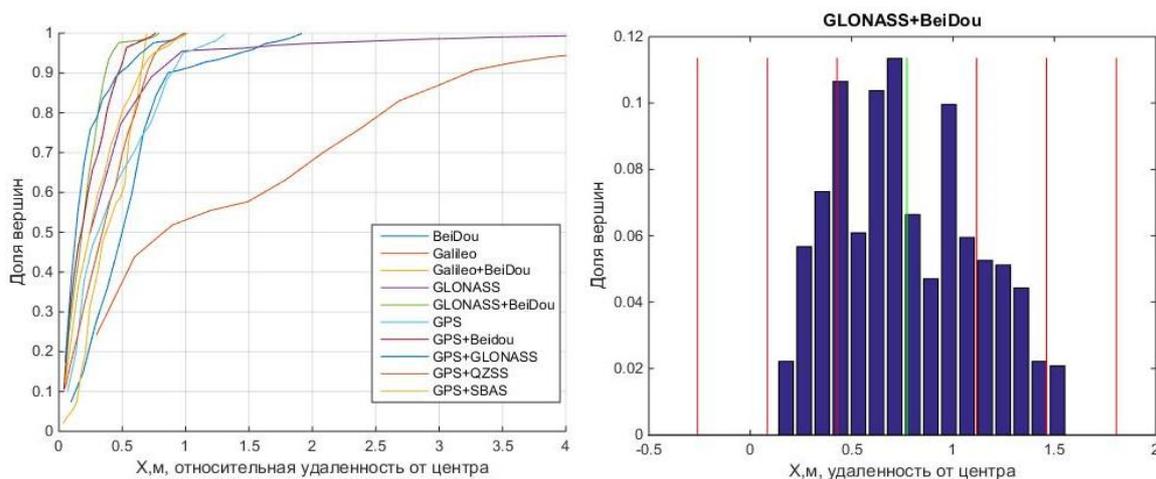


Рис. 3. Функция и гистограмма распределения кол-ва координат от относительной удаленности от центра координат для каждой композиции системы навигации

На рис. 3 изображены функция распределения и гистограмма выборочного измерения. Так же на гистограмме изображены математическое ожидание и среднеквадратичные

отклонения. Функция распределения дает сравнительную характеристику точности различных композиций спутниковых систем.

Выводы. Проведенные сравнительные характеристики с помощью анализа выбросов по правилу 3-сигма дают в небольшой промежуток времени получить необходимую комбинацию спутниковых систем при заданных критериях точности. В проведенных экспериментах для 1-го эксперимента по относительной удаленности от центра координат для одного измерения наилучшим образом показала комбинация систем позиционирования GPS-GLONASS. Во втором эксперименте – Galileo-BeiDou. Дальнейшее развитие работы будет проводиться при использовании различных метрик определения расстояния. Исследование в динамическом режиме получения данных от спутниковых систем позиционирования.

ЛИТЕРАТУРА:

1. Adrados C Global Positioning System (GPS) location accuracy improvement due to Selective Availability removal // ComptesRendusBiologies. - Elsevier. – 2002. - Volume 325.-№2, P. 165-170
2. *Сератинас Б.Б.* Глобальные системы позиционирования. — Издание 3-е, исправленное и дополненное. — Москва: ИФК «Каталог», 2002. — С. 62. — 106 с.
3. Xingxing Li, Xiaohong Zhang, Xiaodong Ren, Mathias Fritsche, Jens Wickert & Harald Schuh Precise positioning with current multi-constellation Global Navigation Satellite Systems: GPS, GLONASS, Galileo and BeiDou Scientific Reports 5, Article number: 8328 (2015) <https://www.nature.com/articles/srep08328>

УДК 004.62.514

А.А. Лисенкова, С.Г. Попов

Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого

МЕХАНИЗМ ИНТЕРАКТИВНОЙ ВИЗУАЛИЗАЦИИ МНОГОМЕРНЫХ ДАННЫХ OLAP-КУБОВ

С появлением многомерной модели данных, позволяющей производить эффективный анализ больших данных, возникла проблема визуализации - представления в краткой и наглядной графической форме интегрированных результатов обработки [1,2]. В этом случае On-Line Analytical Processing (OLAP) – технология комплексного анализа данных, которая заключается в подготовке суммарной информации на основе больших массивов данных, структурированных по многомерному принципу [3] используется для хранения агрегированных данных, причём осями многомерной системы координат служат основные атрибуты анализируемого процесса. На пересечении осей (измерений) находятся данные, количественно характеризующие процесс (меры). Следует отметить, что метки могут объединяться в иерархии, состоящие из одного или нескольких уровней. [4] В результате визуализации получается естественное и интуитивно понятное представление данных организованное в форме навигации по многомерным кубам. Визуализацию данных можно определить, как создание графических образов в максимально информативной форме. От выбора визуализации зависит процесс понимания информации пользователем. Основными методами визуализации многомерных данных считаются сводные таблицы и диаграммы в форме сводчатых и круговых гистограмм. В работе приведен один из механизмов визуализации многомерных данных с использованием иерархического подхода к отображению данных в форме гистограмм.

На практике довольно редко работают одновременно со всеми данными гиперкуба, особенно в необработанном виде, поэтому для получения актуальных данных применяются операции манипулирования измерениями. Анализируя информацию, можно «разрезать» куб по разным направлениям, фиксировать значения одного или более измерений, получая

некоторое подмножество исходного гиперкуба – срез. Кроме этого можно получать агрегированные или детализированные данные, используя стандартные функции: сумма, минимум, максимум, среднее. Операцию агрегации – переход от детализированных данных к агрегированным, принято называть Drill Up. Обратную ей операцию, детализации, – Drill Down.

Пусть OLAP-данные хранятся в традиционных реляционных СУБД. В этом случае применение специальных структур данных – схемы «звезды» и «снежинки», а также хранение вычислительных агрегатов делают возможным многомерный анализ реляционных данных. Для наиболее простого и эффективного доступа к многомерным структурам данных будем использовать язык MDX (Multidimensional Expressions).

Таким образом, технология взаимодействия будет описываться следующей схемой: графический OLAP-клиент предоставляет интерактивный интерфейс пользователю, генерирует запросы на MDX языке к ROLAP-серверу, который на основе метаданных из собственного репозитория преобразует их в SQL-запросы к источникам данных – реляционным СУБД. Структура взаимодействия компонентов представлена на рис. 1.

Пусть задан куб содержащий данные анализа продаж смартфонов в торговой организации. Куб имеет три измерения: время, смартфон и регион, и одну меру – объём продаж в денежном эквиваленте. Схематическое изображение размерностей и мер куба приведено на рис. 2.

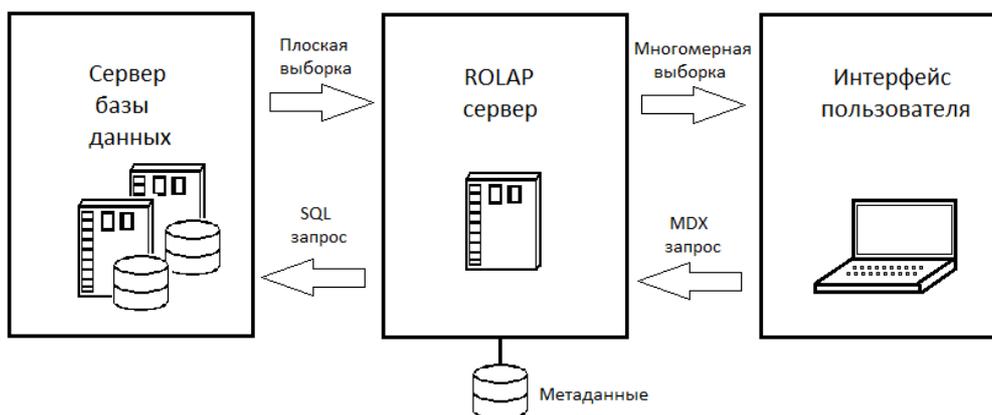


Рис. 1. Архитектура взаимодействия компонентов в технологии клиент-сервер

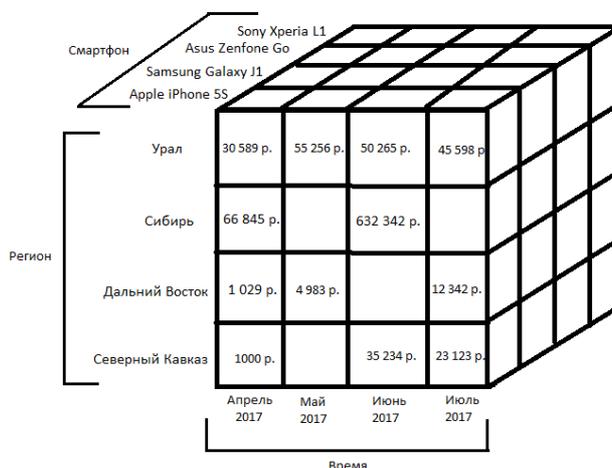


Рис. 2. Куб изображением размерностей, значений мер и примером данных о продажах смартфонов в различных регионах торговой организации

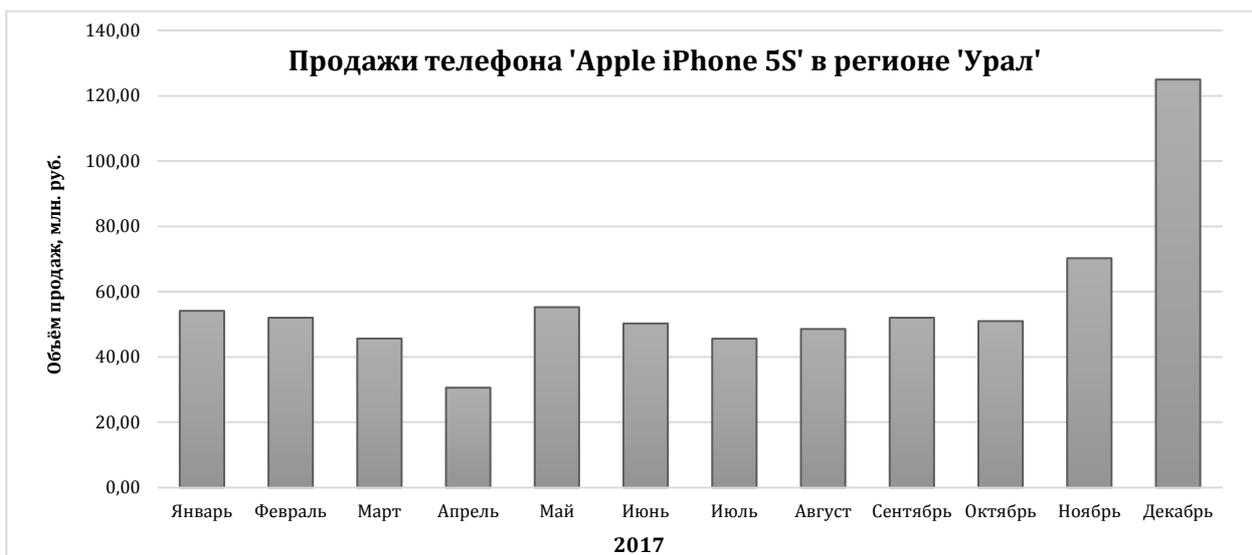


Рис. 3. Результат визуализации - вертикальная столбчатая диаграмма

Выполнив запрос к данным, путём фиксации двух измерений: «Смартфон» = «Apple iPhone 5S» и «Регион» = «Урал», получим срез исходного гиперкуба. Полученные данные могут быть визуализированы в форме столбчатой диаграммы, пример которой приведён на рис. 3.

При выборе столбика «Январь» на диаграмме выполняется операция детализации (Drill Down), то есть можно получить сведения по продажам за конкретный месяц. В этом случае будет осуществлен переход от агрегированного представления данных к детальному, а диаграмма будет полностью перерисована. Детализируя январь месяц получим диаграмму, представленную на рис. 4. Агрегация данных осуществляется выбором дополнительного элемента управления, для «подъёма» на один уровень вверх (Drill Up), что обеспечивает непрерывную навигацию по графическим представлениям данных.

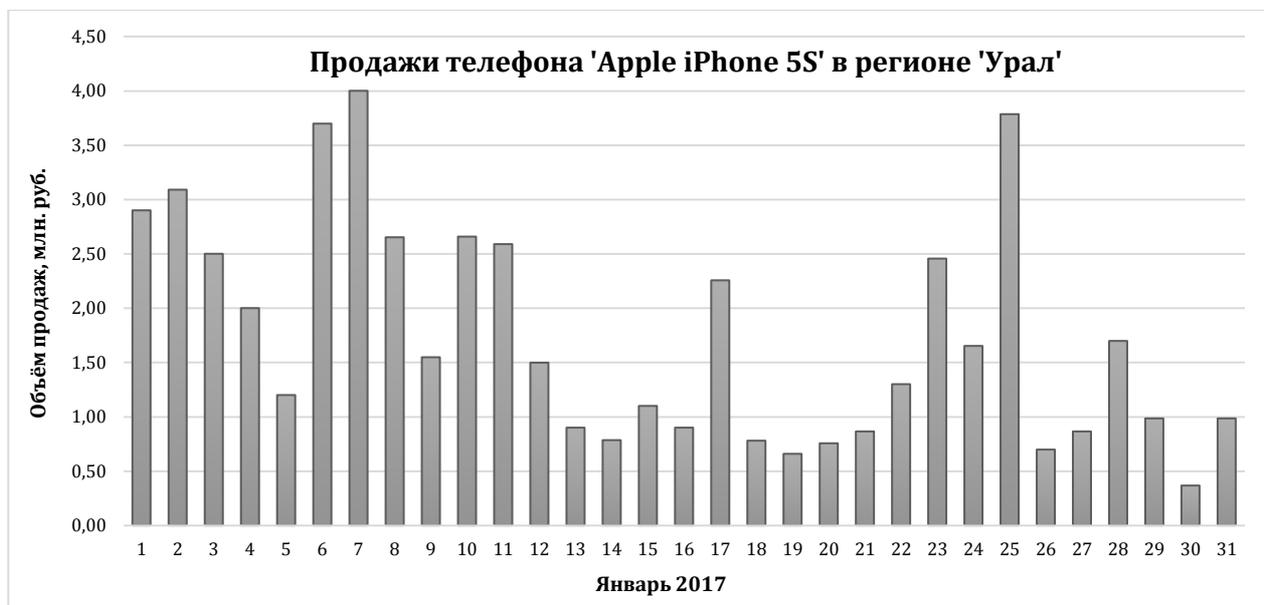


Рис. 4. Столбчатая диаграмма детализированных данных

Таким образом, комбинируя выборки данных из основного OLAP-куба механизм Drill Up и Drill Down можно осуществлять динамическую навигацию по данным для визуального

представления данных пользователям.

Работа подготовлена в ходе реализации комплексного проекта в рамках Постановления Правительства РФ от 09.04.2010 №218 при финансовой поддержке Минобрнауки России. Договор № 03.G25.31.0259 от 28.04.2017.

ЛИТЕРАТУРА:

1. T. Bhowmik, A. Sarkar and N. C. Debnath, "OLAP umbrella: Visualization model for multidimensional databases," ACS/IEEE International Conference on Computer Systems and Applications - AICCSA 2010, Hammamet, 2010, pp. 1-8.
2. I. Kovačević and I. Mekterović, "Alternative business intelligence engines," 2017 40th International Convention on Information and Communication Technology, Electronics and Microelectronics (MIPRO), Opatija, 2017, pp. 1385-1390.
3. Наумов В.Н., Лычагина Е.Б., Шарабабаева Л.Ю. Использование BI-систем для обеспечения информационно-аналитической деятельности органов государственной власти //Управленческое консультирование, 2016, No 3(87). С. 144–153.
4. Кобец Д.А., Балашов И.В., Данилов И.Д., Лупян Е.А., Сычугов И.Г., Толопин В.А. Использование BI-технологий для создания инструментов для анализа данных спутникового мониторинга // Современные проблемы дистанционного зондирования земли из космоса, 2015, No 4. С. 17–27.

УДК 004.7

В.В. Глазунов, М.А. Курочкин, Т.А. Андреева
Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого

АРХИТЕКТУРА ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ ПОЛЬЗОВАТЕЛЬСКИХ ПРИЛОЖЕНИЙ С ОБЛАЧНЫМ СЕРВИСОМ В МУЛЬТИПРОТОКОЛЬНЫХ СЕТЯХ С АГРЕГАЦИЕЙ КАНАЛОВ

Использование беспроводных технологий передачи данных в мобильных транспортных сетях создает основу для развития интеллектуальных транспортных систем. Расширение спектра информационных услуг, предоставляемых сервисным центрам, службам управления движением, водителям и пассажирам позволяет повысить безопасность участников движения, увеличить пропускную способность автомагистралей, повысить комфорт пассажиров.

В настоящее время ведущими автомобильными компаниями ведутся работы по установке на борту автомобиля телематических устройств, позволяющих поддерживать непрерывную двунаправленную цифровую связь с другими участниками движения и дорожными службами. Ограничением таких устройств является использование одного канала передачи данных, поэтому при повышении объема передаваемых данных, скорость и надежность передачи резко падает или соединение абонентов разрывается. Кроме этого нерешенной проблемой является разработка методов доступа к информационным сервисам в районах где стационарные узлы передачи данных не покрывают все зоны перемещения транспортных средств в интеллектуальной транспортной сети. Алгоритмы планирования моментов передачи данных требуют доступности нескольких каналов связи в мультипротокольном узле [1], в соответствии с заданными приложениями и системой ограничениями.

В общем случае задача обслуживания запросов и доступности каналов решается следующим образом:

Имеется n каналов, на которые поступает поток данных с интенсивностью λ . Поток обслуживания каждого канала имеет интенсивность μ . Найти предельные вероятности состояний системы и показатели ее эффективности.

В качестве показателей эффективности многоканальной системы будем рассматривать:

A - абсолютную пропускную способность;

Q - относительную пропускную способность;

$P_{отк}$ - вероятность отказа;

$\overline{k_{зан}}$ - среднее число занятых каналов.

Размеченный граф состояний представлен на рис. 1:

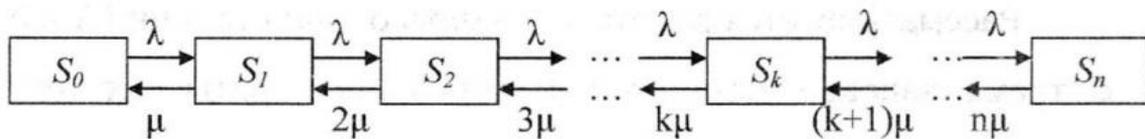


Рис. 1. Размеченный граф состояний многоканальной системы

Состояния описываются следующим образом:

S_0 - все каналы свободны, $k = 0$,

S_1 - все каналы свободны, $k = 1$,

S_2 - все каналы свободны, $k = 2$,

....

S_k - заняты k каналов (пропускная способность всех каналов = 0).

Предельные вероятности можно задать следующим образом:

$$p_0 = (1 + p + \frac{p^2}{2!} + \dots + \frac{p^n}{n!})^{-1}, \text{ где } p = \frac{\lambda}{\mu} - \text{интенсивность нагрузки канала,}$$

$$p_1 = pp_0, p_2 = \frac{p^2}{2!} p_0, \dots, p_n = \frac{p^n}{n!} p_0$$

$$P_{отк} = \frac{p^n}{n!} p_0, Q = 1 - P_{отк} = 1 - \frac{p^n}{n!} p_0,$$

$$A = \lambda Q = \lambda (1 - \frac{p^n}{n!} p_0), \overline{k_{зан}} = \sum_{k=0}^n k p_k = \frac{A}{\mu} = p (1 - \frac{p^n}{n!} p_0)$$

В предложенной системе обработка запросов осуществляется следующим образом:

1. Заявка (Request) поступает от пользовательского приложения, на основе используемой этим приложением функции.
2. Сформированные Request 1, 2, ..., n отправляется в алгоритм планирования.
3. На вход алгоритма планирования также передается функция планирования, текущее состояние доступных каналов и состояние сетей из облачной карты.
4. Список заявок сортируется и распределяется по доступным каналам.

На рис. 2 приведена структурная схема передачи и обработки заявки от приложения, которая обеспечивает передачу заявки от пользовательского приложения в алгоритм планирования и генерацию правила включающего состояние каналов. Ее отличительной особенностью является возможность решить проблему единой точки отказа при передаче данных, что позволяет выполнять априорное планирование передачи данных [2].

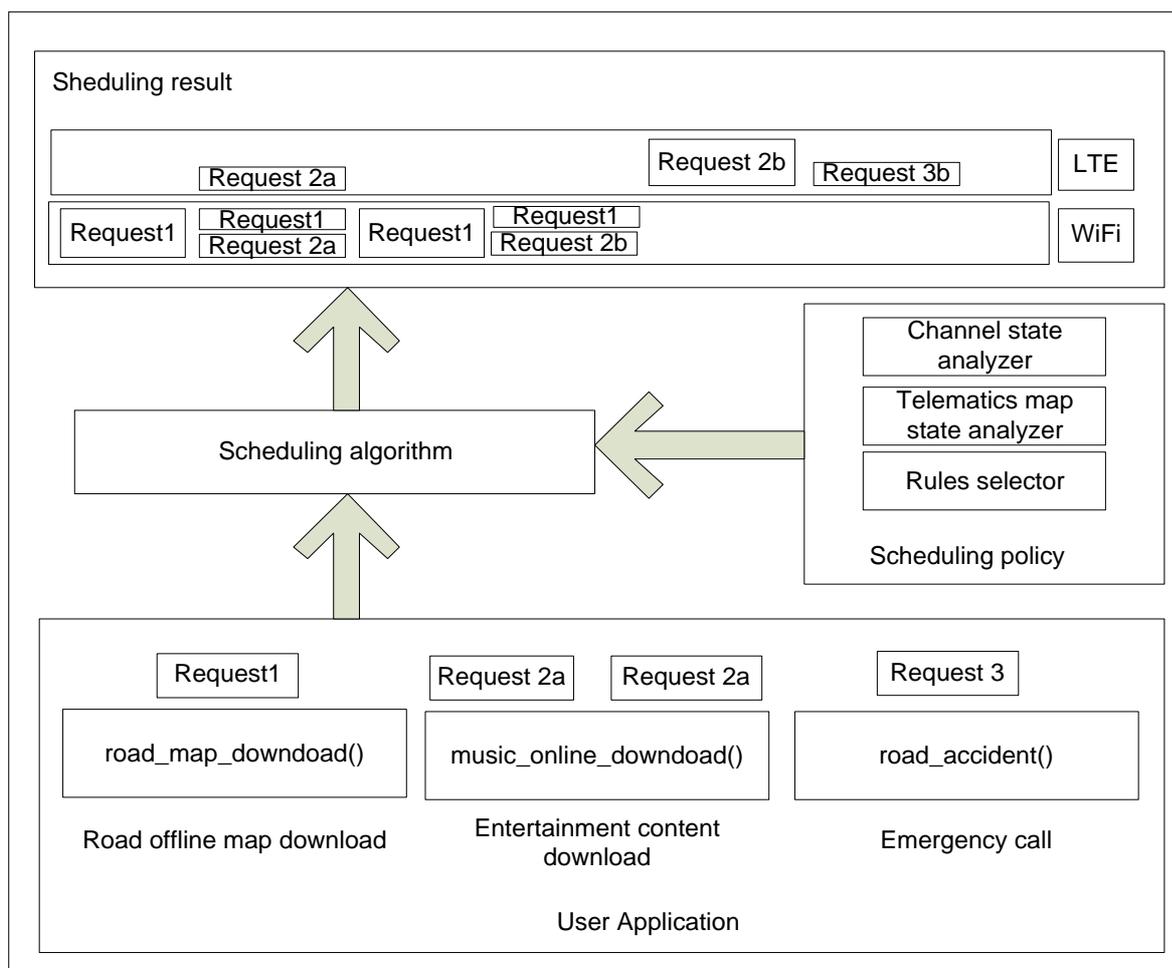


Рис. 2. Структурная схема передачи и обработки заявки от приложения

Алгоритм планирования запускается в модуле Connection Manager, в который на вход поступают запросы и потоки данных от приложений. Правила Rules представляют собой алгоритм обрабатывающий входную заявку и на выходе выдающий состояние текущих доступных каналов и режим работы. Режим работы каналов может быть агрегированным с МРТСП [3], либо быть режимом BACKUP. Connmandbus library является промежуточным слоем между библиотекой получения результатов и менеджером соединений в операционной системе. Smanager library - библиотека получения заявок от приложения, включающая в себя имя приложения, минимальную требуемую пропускную способность, локальный приоритет.

Поддержка абонентом нескольких технологий позволяет решить проблему отсутствия единой точки отказа при передаче данных, но не позволяет решать проблему низкой пропускной способности одного канала связи, а также использовать приложения, требующие пропускную способность, превышающую скорость одного канала связи.

Существующие решения данной проблемы требуют использования специальных сетевых протоколов и интерфейсов, что не позволяет использовать стандартные ТСР приложения общего назначения.

В результате решением проблемы является использование метода агрегации каналов с использованием протокола МРТСП. Для динамического управления состоянием протокола, изменяющимся от требований приложения или текущего режима движения, требуется разработать систему управления соединениями (Connection Manager).

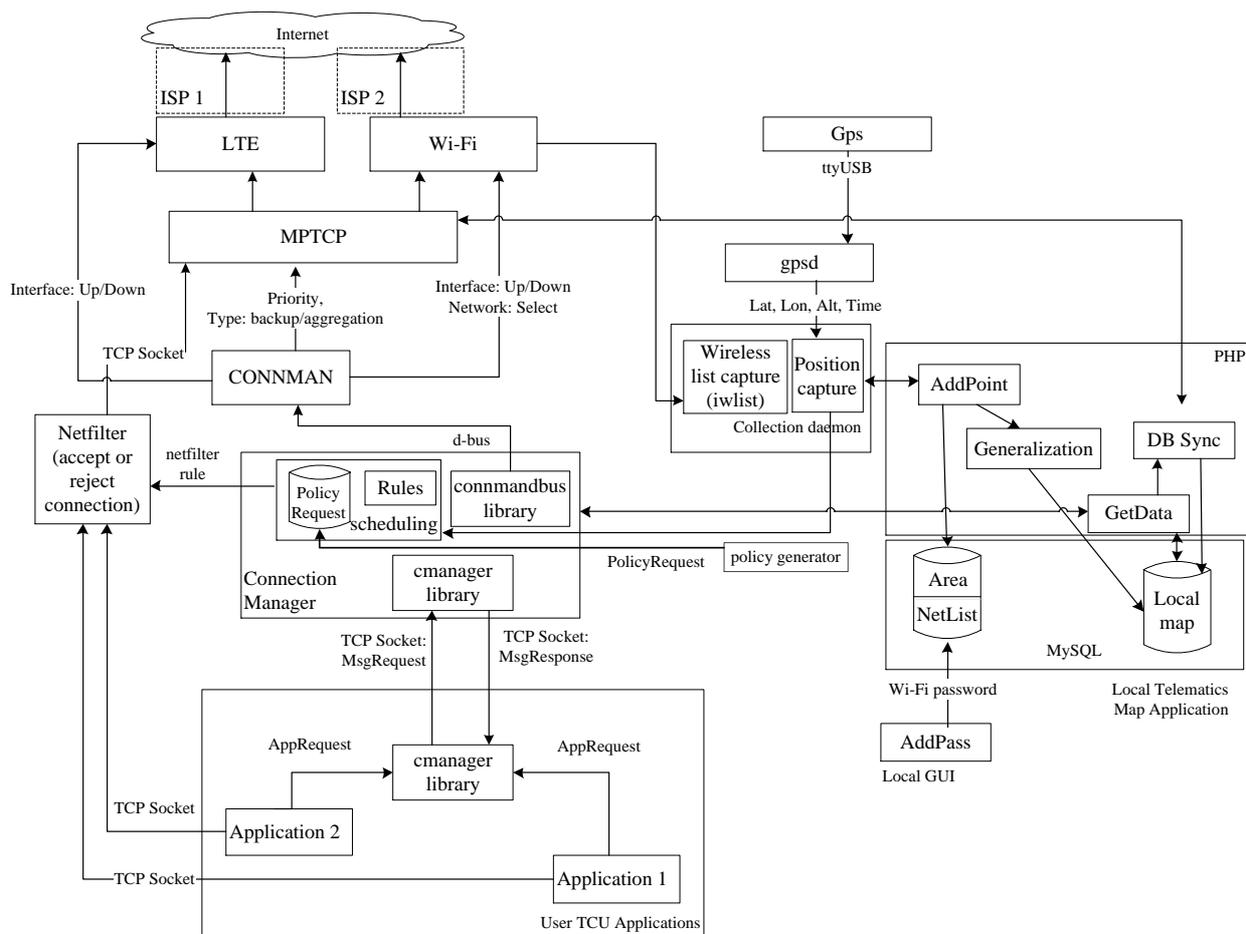


Рис. 3. Архитектура системы взаимодействия пользовательских приложений с облачным сервисом

На рис. 3 приведена архитектура системы взаимодействия пользовательских приложений с облачным сервисом. Предлагаемое решение предполагает взаимодействие пользовательского приложения через специальную библиотеку (cmanager library) для перенастройки правил доступа сетевого фильтра (Netfilter). Решение отличается от существующих поддержкой информационного сервиса «Телематическая карта» [4], который обеспечивает алгоритм планирования необходимыми априорными данными о списках сетей в указанных координатах. Данный подход обеспечивает поддержку механизмов агрегации каналов для прозрачного использования нескольких сетей передачи данных пользовательским приложением.

Проведены натурные эксперименты при движении автомобилей в городской черте, которые показали, что время передачи больших объемов данных более 50 мегабайт на стабильных каналах будет меньше на 40% при использовании двух каналов связи с MPTCP по сравнению с одним каналом Wi-Fi. В сценарии движения, предполагающем нестабильную работу локальных сетей, использование двух каналов связи будет замедлять передачу данных на 60%. Использование статически назначенного канала связи позволит сократить это время до 15%. Такой результат обусловлен постоянной потерей пакетов в нестабильном канале и частыми повторными отправками пакетов на транспортном уровне.

Использование механизмов агрегации каналов для стабильных каналов связи, с динамическим включением протокола повышает скорость передачи данных на 40% по сравнению с одноканальной технологией. В случае нестабильных каналов связи статический подход для управления каналами позволяет исключить повторные отправки и потери пакетов, что позволяет не допустить заметного снижения скорости передачи данных.

Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ в рамках научного проекта № 16-29-04319.

ЛИТЕРАТУРА:

1. Campolo C., Cozzetti H.A., Molinaro A., Scopigno R. Augmenting Vehicle-to-Roadside connectivity in multi-channel vehicular Ad Hoc Networks / Journal of Network and Computer Applications, vol. 36, issue 5, 2013. Pp. 1275-1286.
2. Chuvatov, M., Glazunov, V., Kurochkin, L., Popov, S. The technology of management of data about wireless networks for vehicle's telematics map. // 2nd International Conference on Vehicle Technology and Intelligent Transport Systems, VEHITS 2016, pp. 138-143.
3. Y. Muraki, Y. Ito and K. Tashiro, Study on MPTCP Enhancement by IP Routing for WebQoE Improvement, 2017 International Conference on Platform Technology and Service (PlatCon), 2017, P. 1-4.
4. Popov, S., Kurochkin, M., Kurochkin, L., Glazunov, V. The implementing of the Internet of things concepts for the continuous provision of informational services for vehicle drivers and passengers. // International Conference on Telematics and Future Generation Networks, TAFGEN 2015, art. no. 7289565, pp. 1-5.

ГЕКСАГОНАЛЬНАЯ ТРИГОНОМЕТРИЯ

Исследование посвящено неклассической тригонометрии. Целью является разработка новой ее разновидности, которую мы называем «гексагональной тригонометрией». Исследование вдохновлено теоретическими положениями классической тригонометрии [1], [2] и имеет некоторые неклассические параллели («Квадратная тригонометрия» [3]).

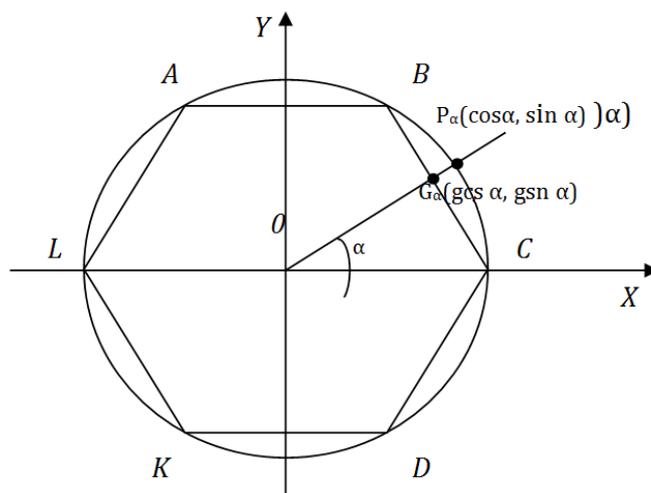


Рис. 1. Единичный гексагон

Гексагональной мы называем тригонометрию, которая получается, если в определении синуса и косинуса единичную окружность заменить правильным шестиугольником – гексагоном (рис.1). Гексагональные синус (gsn) и косинус (gcs) – это координаты точки пересечения стороны единичного гексагона и луча OP_α . Гексагональные тангенс (gtg) и котангенс (gct) определяются аналогично классическим.

В гексагональной и классической тригонометриях есть схожие свойства. Отличными являются значения для углов не кратных $\{60^\circ n, n \in \mathbb{Z}\}$ и $\{180^\circ k, k \in \mathbb{Z}\}$. Также, если учитывать значения констант, различны периоды тригонометрических функций. Основное гексагональное тригонометрическое тождество (далее ОГТТ) определяется уравнениями прямых, содержащих стороны гексагона.

Точки $B(\frac{1}{2}; \frac{\sqrt{3}}{2})$ и $C(1; 0)$ лежат на прямой $y = \sqrt{3} - \sqrt{3}x$ [4]. Но график в I четверти координатной плоскости состоит из отрезков двух прямых, таким образом, для графика в I четверти мы получим систему уравнений, и аналогично во II, III и IV четверти:

$$\text{I. } y = \begin{cases} \frac{\sqrt{3}}{2}, & x \in [0; \frac{1}{2}], \\ \sqrt{3} - \sqrt{3}x, & x \in [\frac{1}{2}; 1]; \end{cases} \quad \text{II. } y = \begin{cases} \frac{\sqrt{3}}{2}, & x \in [-\frac{1}{2}; 0], \\ \sqrt{3} + \sqrt{3}x, & x \in [-1; -\frac{1}{2}]; \end{cases}$$

$$\text{III. } y = \begin{cases} -\frac{\sqrt{3}}{2}, & x \in \left[-\frac{1}{2}; 0\right], \\ -\sqrt{3} - \sqrt{3}x, & x \in \left[-1; -\frac{1}{2}\right]; \end{cases} \quad \text{IV. } y = \begin{cases} -\frac{\sqrt{3}}{2}, & x \in \left[0; \frac{1}{2}\right], \\ -\sqrt{3} + \sqrt{3}x, & x \in \left[\frac{1}{2}; 1\right]. \end{cases}$$

Заменим x и y на gcn и gsn соответственно и получим свое ОГТТ для каждой четверти координатной плоскости:

$$\text{I. } \begin{cases} gsn \alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}, & x \in \left[0; \frac{1}{2}\right], \\ \frac{gsn \alpha}{\sqrt{3}} + gcn \alpha = 1; \end{cases} \quad \text{II. } \begin{cases} gsn \alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}, & x \in \left[-\frac{1}{2}; 0\right], \\ \frac{gsn \alpha}{\sqrt{3}} - gcn \alpha = 1; \end{cases}$$

$$\text{III. } \begin{cases} gsn \alpha = -\frac{\sqrt{3}}{2}, & x \in \left[-\frac{1}{2}; 0\right], \\ -\frac{gsn \alpha}{\sqrt{3}} - gcn \alpha = 1; \end{cases} \quad \text{IV. } \begin{cases} gsn \alpha = -\frac{\sqrt{3}}{2}, & x \in \left[0; \frac{1}{2}\right], \\ -\frac{gsn \alpha}{\sqrt{3}} + gcn \alpha = 1. \end{cases}$$

Общий вид основного тождества гексагональной тригонометрии таков:

$$\begin{cases} |gsn \alpha| = \frac{\sqrt{3}}{2}, \\ \left| \frac{gsn \alpha}{\sqrt{3}} \right| + |gcn \alpha| = 1. \end{cases}$$

Выведем основные значения гексагональных функций для углов I четверти координатной плоскости:

$$x = gcn \alpha = \frac{\sqrt{3}}{tg \alpha + \sqrt{3}}, \quad y = gsn \alpha = \frac{\sqrt{3}tg \alpha}{tg \alpha + \sqrt{3}}.$$

Вычислим значения гексагональных косинуса и синуса угла 30° :

$$gcn 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{tg 30^\circ + \sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{\frac{1}{\sqrt{3}} + \sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3} \cdot \sqrt{3}}{4} = \frac{3}{4}, \quad gsn 30^\circ = \frac{\sqrt{3}tg 30^\circ}{tg 30^\circ + \sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3} \cdot \frac{1}{\sqrt{3}}}{\frac{1}{\sqrt{3}} + \sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{4}.$$

Полученные значения гексагональных функций основных углов I четверти представлены в табл. 1.

Табл. 1. Значения гексагональных тригонометрических функций

	30°	45°	60°
$gsn \alpha$	$\frac{\sqrt{3}}{4}$	$\frac{\sqrt{3}}{1 + \sqrt{3}}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
$gcn \alpha$	$\frac{3}{4}$	$\frac{\sqrt{3}}{1 + \sqrt{3}}$	$\frac{1}{2}$
$gtg \alpha$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$
$gcg \alpha$	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$

Введем в рассмотрение понятие гексагональной меры угла и константу μ («мю»), выражающую отношение суммы длин всех сторон гексагона к его большой диагонали. Поскольку все стороны нашего гексагона равны и равны 1, то $\mu=3$; примем ее за единицу длины числовой оси. При этом точки $1, \frac{\mu}{2}, -1, -\frac{\mu}{2}$ числовой прямой сопоставляются точкам гексагона $M_1\left(\frac{1}{2}; \frac{\sqrt{3}}{2}\right), M_2\left(0; \frac{\sqrt{3}}{2}\right), M_3\left(\frac{1}{2}; -\frac{\sqrt{3}}{2}\right), M_4\left(0; -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

Рассмотрим функцию $y = gsn x$ (рис. 2). Основные ее свойства совпадают со свойствами классического косинуса. Отдельно можно отметить:

1. Функция $y = gsn x$ периодическая с периодом 2μ , четная, $y \in [-1, 1]$.
2. Функция $y = gsn x$ принимает значения $y = 0$ при $x = \frac{\mu}{2} + \mu k$, $k \in \mathbb{Z}$; $y = 1$ при $x = 2\mu k$, $k \in \mathbb{Z}$, и $y = -1$ при $x = \mu + 2\mu k$, $k \in \mathbb{Z}$.
3. Функция $y = gsn x$ возрастает при $x \in [-\mu + 2\mu k; 2\mu k]$, $k \in \mathbb{Z}$, убывает при $x \in [2\mu k; \mu + 2\mu k]$, $k \in \mathbb{Z}$.

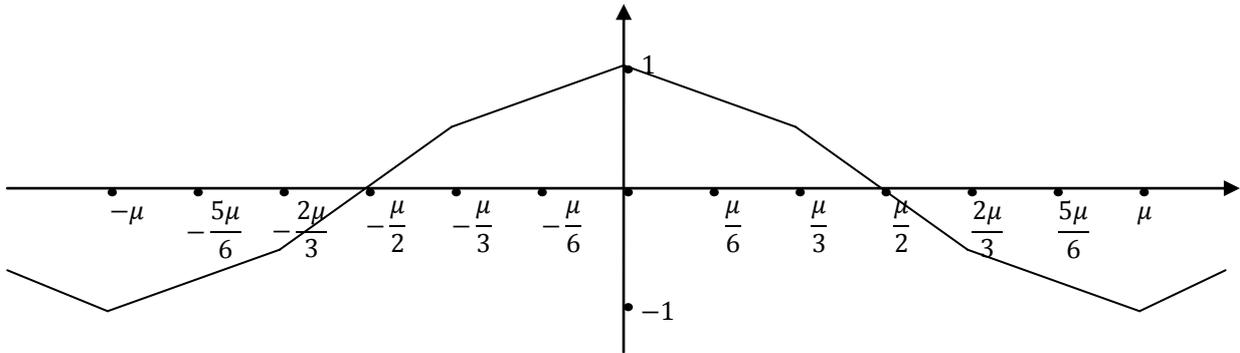


Рис. 2. График гексагонального косинуса

Рассмотрим функцию $y = gsn x$ (рис. 3). Основные ее свойства также аналогичны свойствам классического синуса. Отдельно отметим:

1. Функция $y = gsn x$ периодическая с периодом 2μ , нечетная, $y \in \left[-\frac{\sqrt{3}}{2}; \frac{\sqrt{3}}{2}\right]$.
2. Функция $y = gsn x$ принимает значения: $y = 0$ при $x = \mu k$, $k \in \mathbb{Z}$; $y = \frac{\sqrt{3}}{2}$ на отрезках $[\frac{\mu}{3} + 2\mu k; \frac{2\mu}{3} + 2\mu k]$, $k \in \mathbb{Z}$, и $y = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ на отрезках $[-\frac{2\mu}{3} + 2\mu k; -\frac{\mu}{3} + 2\mu k]$, $k \in \mathbb{Z}$.
3. Функция $y = gsn x$ возрастает при $x \in [-\frac{\mu}{3} + 2\mu k; \frac{\mu}{3} + 2\mu k]$, $k \in \mathbb{Z}$, и убывает при $x \in [\frac{2\mu}{3} + 2\mu k; \frac{4\mu}{3} + 2\mu k]$, $k \in \mathbb{Z}$.

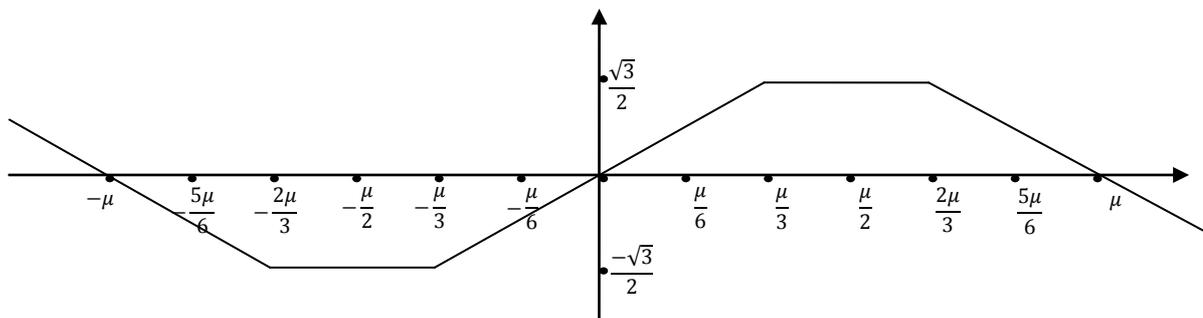


Рис. 3. График гексагонального синуса

Так как $gtgx \equiv tgx$ и $gctx \equiv ctgx$, графики этих функций попарно идентичны.

Особенностью гексагональной тригонометрии являются формулы приведения для углов, кратных 60° . При повороте угла $\frac{\mu}{3}$ на углы 60° и 240° модули гексагональных синуса и косинуса будут одинаковы:

$$gsn\left(\frac{\mu}{3} + 60^\circ\right) = gsn\frac{\mu}{3}, \quad gcn\left(\frac{\mu}{3} + 60^\circ\right) = -gcn\frac{\mu}{3},$$

$$g \operatorname{sn} \left(\frac{\mu}{3} + 240^\circ \right) = -g \operatorname{sn} \frac{\mu}{3}, \quad g \operatorname{cn} \left(\frac{\mu}{3} + 240^\circ \right) = g \operatorname{cn} \frac{\mu}{3}.$$

Таким образом, работа устанавливает положения нового направления неклассической тригонометрии – гексагональной тригонометрии. В ней введены определения и обозначения для гексагональных тригонометрических функций, выяснены их свойства, построены их графики. Выведено основное гексагональное тригонометрическое тождество. Введена гексагональная мера угла, аналогичная радианной. Полученные результаты являются новыми и ранее не публиковались. Перспективным продолжением работы может стать разработка методов решения уравнений неклассической тригонометрии.

Гексагональная тригонометрия может найти применение в кристаллографии, исследовании свойств гексагональных сеток, разработке компьютерной графики и элементов архитектурной среды, в исследовании конвективных ячеек Рэлея-Бернара, имеющих шестиугольную форму.

ЛИТЕРАТУРА:

1. Алгебра и начала анализа. 10-11 классы : учеб. для общеобразоват. организаций : базовый уровень // [Ш.А. Алимов, Ю.М. Колягин, М.В. Ткачѳв и др.]. – 19-е изд. – М. : Просвещение, 2013. – 474 с. : ил. – ISBN 978-5-09-030365-1.
2. Геометрия 7- 9 : учеб. для общеобразоват. учреждений // [Л.С. Атасян, В.Ф. Бутузов, С. Б. Кадонцев и др.] – 16-е издание – М. : Просвещение, 2006. – 384 с.
3. Любимова В.В. Учебный исследовательский проект «Квадратная тригонометрия» (Часть 2) // Математика в школе. 2013. № 9. С. 62-67
4. Ефимов Н.В. Краткий курс аналитической геометрии. //М.: Книга по требованию, 2012. – 267 с. ISBN 978-5-458-25977-4.

УДК 51-72

М.Р. Бортковская, П.И. Васильев, Д.А. Семенова, Д.А. Тархов, П.П. Удалов, И.А. Шишкина
Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого

ИЗУЧЕНИЕ ПРОГИБА МЕМБРАНЫ С ПОМОЩЬЮ МНОГОСЛОЙНЫХ ПОЛУЭМПИРИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ (РАССМОТРЕНИЕ НЕОДНОРОДНОГО УРАВНЕНИЯ)

Рассмотрено решение задачи о моделировании прогиба нагруженной круговой мембраны в симметрическом случае. Сравниваются модели, выражающие зависимость прогиба мембраны от расстояния до центра. Первая основана на аналитическом решении уравнений условий равновесия. Вторая получена с помощью оригинальной модификации уточнённого метода Эйлера. Коэффициенты моделей подбирались по экспериментально полученным данным. Сравнение показало, что модель, основанная на уточнённом методе Эйлера [1], более достоверно выражает зависимость прогиба мембраны от расстояния до центра.

Рассматривается круглая мембрана радиуса R , на ней располагаются поочередно грузы различной массы, мембрана предполагается невесомой (масса мембраны много меньше массы груза), груз размещается в центре мембраны, его радиус далее обозначен как a , предполагается, что растяжение изотропно (натяжение одинаково по всем направлениям).

В данной статье сравниваются точное решение дифференциального уравнения, с одной стороны, и приближенное решение, полученное двухшаговым методом Эйлера, с другой стороны, в плане их соответствия экспериментальным данным.

Пусть $u(r)$ – отклонение мембраны от положения равновесия. Для его описания используем уравнение:

$$u''_{rr} + \frac{1}{r}u'_r = \begin{cases} -B, \text{ если } r \in [0, a], \\ 0, \text{ если } r \in (a, R], \end{cases} \quad (1)$$

которое представляет собой уравнение Лапласа в полярных координатах, где $u(r, \varphi) = u(r)$, то есть искомая функция не зависит от направления, а зависит только от расстояния r точки от центра мембраны [2]. Здесь $B = \frac{A}{T}$, A -- вес груза, T - абсолютная величина приложенной к краю мембраны растягивающей силы. Поскольку мембрана предполагается невесомой, ее вес в правой части уравнения (1) отсутствует.

Рассматриваемое уравнение является обыкновенным дифференциальным уравнением второго порядка. Для дальнейшего сравнения с приближенным решением выпишем его точное решение:

$$u(r) = \begin{cases} \frac{1}{2}Ba^2 \ln \frac{a}{R} + u_0 - \frac{1}{4}B(r^2 - a^2) \text{ при } r \in [0, a], \\ \frac{1}{2}Ba^2 \ln \frac{r}{R} + u_0 \text{ при } r \in (a, R]. \end{cases} \quad (2)$$

Здесь $u_0 = u(R)$, вообще говоря, это значение нулевое, но поскольку из технических соображений измерения значений прогиба произведены от некоторого начального значения, его и берем в качестве u_0 . Решение (2) получено с учетом непрерывности $u(r)$ при $r = a$ и ограниченности решения при $r = 0$. Выбор параметра B здесь производится с помощью метода наименьших квадратов так, чтобы минимизировать величину $\sum_{i=1}^{10} (u(r_i) - u_i)^2$. Здесь

r_i – значения r , для которых проводились измерения прогиба, u_i – результаты соответствующих измерений, $u(r_i)$ – значения функции $u(r)$, найденные по формуле (2). Очевидно, найдя значение B , мы будем знать и соответствующее значение $z_0 = u'(R)$. С учетом приведенных выше формул, зная из эксперимента вес груза, и определяя значение B , мы определяем величину растягивающей силы T .

Приведем уравнение (1) к нормальной системе дифференциальных уравнений [3]:

$$\begin{cases} u' = z, \\ z' = -\frac{z}{r} + f(r). \end{cases} \quad (3)$$

Здесь $f(r)$ - правая часть уравнения (1). После замены переменной $x = R - r$, решая систему (3) двухшаговым методом Эйлера, получим

$$\begin{aligned} u(x) &= u_0 - xz_0 - \frac{x^2 z_0}{4R}, \\ z(x) &= (z_0 + \frac{xz_0}{2R}) \cdot \frac{2R}{2R - x}. \end{aligned} \quad (4)$$

Значение u_0 , как и раньше, берется из эксперимента. Значение z_0 пока не определено. Решение (2) рассматривается при $x \in [0, R - a]$, то есть при $r \in (a, R]$.

Теперь для $r \in [0, a]$ решим систему (3) тем же методом, считая значение прогиба \tilde{u}_0 при $r = 0$ неизвестным, а значение производной u'_r при $r = 0$ нулевым. Тогда получим

$$u(r) = \tilde{u}_0 - \frac{r^2 B}{4},$$

$$z(r) = -\frac{rB}{2}.$$
(5)

Требую непрерывности решения u и его производной z в точке $r=a$, получим следующие условия:

$$\tilde{u}_0 - \frac{a^2 B}{4} = u_0 - (R-a)z_0 - \frac{(R-a)^2 z_0}{4R},$$

$$-\frac{1}{2}aB = z_0 \frac{2R}{R+a}.$$
(6)

Из условий непрерывности (6) найдем выражения параметров \tilde{u}_0 и B через значение z_0 , а последнее определим с помощью метода наименьших квадратов так, чтобы минимизировать величину $\sum_{i=1}^{10} (u(r_i) - u_i)^2$, где $u(r_i)$ вычисляются по формуле (5) для $r_i \leq a$ и по формуле (4) для $r_i \geq a$, $x_i = R - r_i$.

Теперь в приближенном решении u , выраженном формулами (4) и (5), будут найдены все параметры, и мы можем сравнить его с точным решением так же, как при рассмотрении однородного дифференциального уравнения мембраны.

Результаты опытов

Значение z_0 для точного решения = 0.082, для приближенного = 0.127, значение B для точного решения = 72.599, для приближенного = 41.996, значение T для точного решения = 0.0014, для приближенного = 0.0024. Масса груза = 456 гр, радиус груза = 1,5 см, радиус мембраны = 10 см. С использованием вышеупомянутых значений были получены приближенное и точное решения рис. 1.

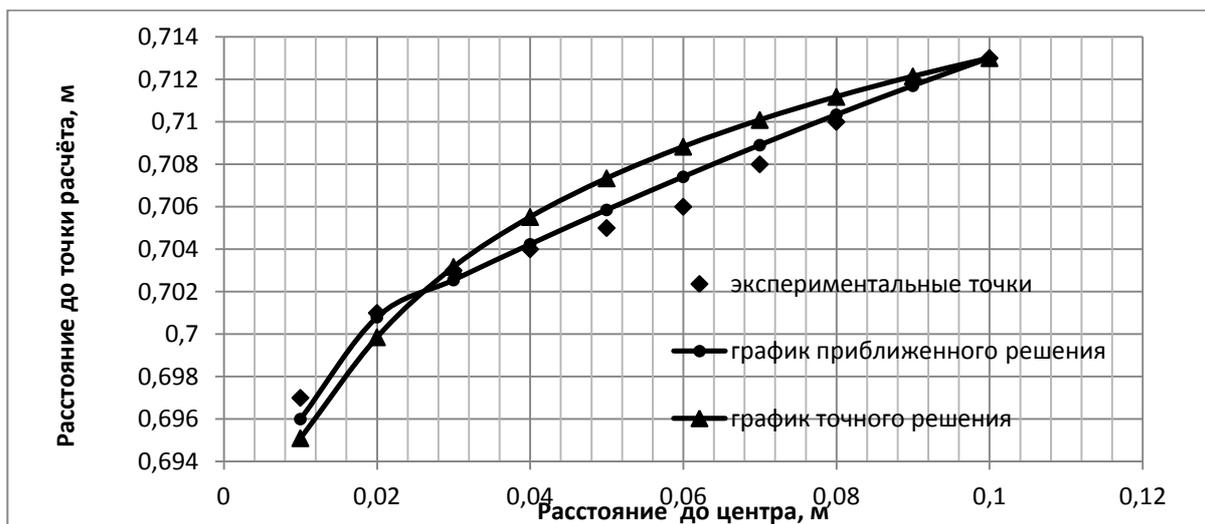


Рис. 1. Графики решений

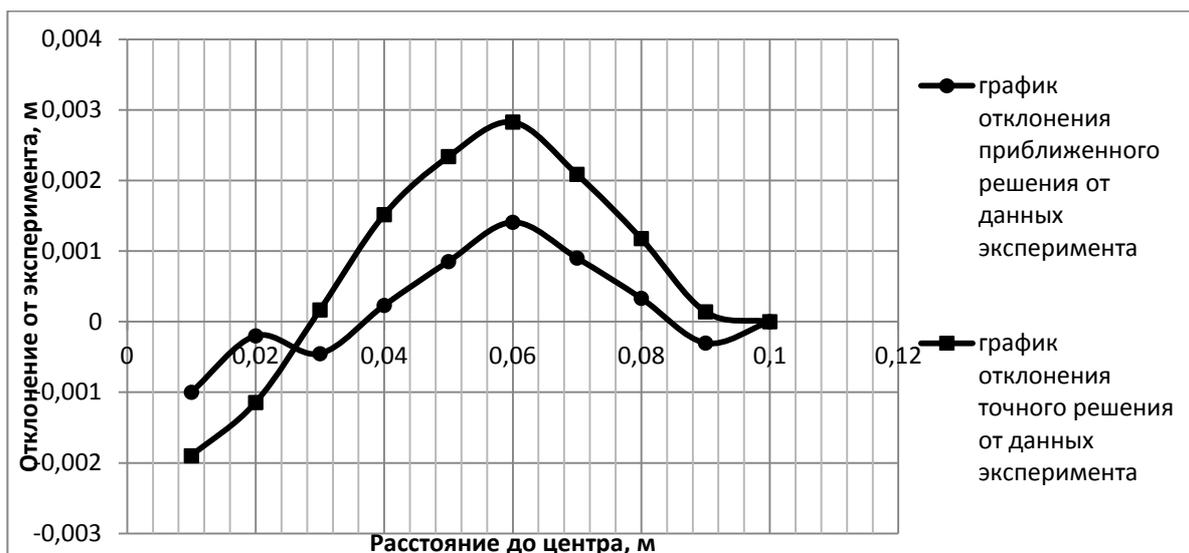


Рис. 2. Графики отклонения решений от экспериментальных значений для опыта

Заключение

В результате на рис. 2 видим, что точное решение сильнее отклоняется от эксперимента. Это говорит о том, что модель требует уточнения. Для анализа зависимости силы натяжения T от массы мембраны требуется исследование большего количества экспериментов. Для значения производной прогиба z_0 метод наименьших квадратов дает одинаковые значения для однородного и неоднородного дифференциального уравнения (и для приближенного, и для точного решения, при использовании данных трех различных экспериментов).

ЛИТЕРАТУРА:

1. Вербжицкий В.М. Численные методы. Математический анализ и обыкновенные дифференциальные уравнения // М.: Высшая школа. — 2001. — С. 218-220.
2. Тихонов А. Н., Самарский А. А. Уравнения математической физики // М.: Наука. — 1977. — С. 430-437.
3. Араманович И. Г., Левин В. И. Уравнения математической физики // М.: Наука. — 1960. — С. 130-143.

УДК 004.04

Т.В. Виноходов, Д.Р. Капицин, Т.Т. Каверзнева, Д.А. Тархов, В.А. Терёшин
Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого

ПРИМЕНЕНИЕ НОВЫХ МЕТОДОВ ПОСТРОЕНИЯ МНОГОСЛОЙНЫХ ПОЛУЭМПИРИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ К ЗАДАЧЕ НЕЛИНЕЙНОГО ИЗГИБА КОНСОЛЬНОГО СТЕРЖНЯ

Моделирование технических объектов часто затруднено недостаточной изученностью происходящих в них процессов. Задача идентификации математической модели по результатам наблюдений обычно гораздо сложнее прямой задачи решения дифференциального уравнения с граничными условиями. Для ускорения ее решения был разработан новый класс многослойных моделей [1-4]. Суть подхода заключается в

применении известных рекуррентных формул численного интегрирования дифференциальных уравнений к интервалу с переменным верхним пределом. В данной работе указанный подход применяется к задаче моделирования формы изгиба прямого консольно закрепленного металлического стержня. Разработанные методы можно применить для долгосрочного прогнозирования поведения строительных балок, разнообразных конструктивных элементов грузоподъемных машин и механизмов с учетом реальной картины процессов износа, старения и коррозии металла.

Измерения выполнялись с прямым стержнем из алюминиевого сплава длиной 940 мм круглого сечения с диаметром 8 мм, массой 126 гр. Один конец стержня был зажат в тисках, а к другому прикреплялись поочередно грузы весом 100, 200 и т.д. до 1900 гр. Стержень фотографировался после прикрепления и снятия каждого груза.

В качестве математической модели использовано уравнение большого статического прогиба тонкого однородного физически линейного упругого стержня под действием распределенной и сосредоточенной сил [5].

$$\frac{d^2\theta}{dz^2} = a(\mu_i + z)\cos\theta \quad (1)$$

где $a = \frac{mgL^2}{D}$, $\mu_i = \frac{m_i}{m}$, D и L – постоянная изгибная жесткость и длина стержня; θ – угол наклона касательной; $z = 1 - s/L$ – s – натуральная координата изогнутой оси стержня, отсчитываемая от заделки, m – масса стержня, m_i – масса груза.

Нам известно граничное условие на свободном конце стержня: $\left. \frac{d\theta}{dz} \right|_{z=0} = 0$, условие в

заделке неизвестно, так как при изменении массы груза стержень проворачивался в ней.

Угол θ связан с координатами точек на стержне равенствами

$$\frac{dx}{ds} = \cos(\theta); \quad \frac{dy}{ds} = \sin(\theta); \quad (2)$$

От $\theta(z, \theta_0, a)$ переходим к исходным декартовым координатам, интегрируя (2) по формуле Симпсона для интервала переменной длины. Для построения адекватной модели мы переходим от системы (1,2) к её приближенному параметрическому решению $x(s, \theta_0, a)$ и $y(s, \theta_0, a)$. Параметры θ_0, a находятся по методу наименьших квадратов минимизацией выражения

$$\sum_{j=1}^N (x(s_j, \theta_0, a) - x_j)^2 + (y(s_j, \theta_0, a) - y_j)^2. \quad (3)$$

Здесь N – число точек, в которых проводились измерения, $\{x_i, y_i\}$ – измеренные координаты точек на стержне, находящиеся на расстоянии s_i от заделки. При этом s_i заранее неизвестны.

Для определения функций $x(s_i, \theta_0, a)$, $y(s_i, \theta_0, a)$ мы применили подход [1-4]. Его суть применительно к уравнению (1) состоит в том, чтобы известные формулы численного решения дифференциальных уравнений применить не к промежутку $[0, 1]$ а к промежутку с переменным верхним пределом $[0, z]$. При этом вместо таблицы чисел мы получаем функцию $\theta(z, \theta_0, a)$, причём параметры задачи θ_0, a входят в число её аргументов.

В результате применения упомянутой выше модификации [1-4] неявного метода Эйлера [6] с одним шагом получаем приближённое равенство $\theta(z) \cong \theta_0 + z^2 a(\mu_i + z) \cos(\theta(z))$, из которого находим приближённое решение

$$\theta(z) \cong 2 \frac{\theta_0 + z^2 a(\mu_i + z)}{\sqrt{1 + 2z^2 a(\mu_i + z)(\theta_0 + z^2 a(\mu_i + z))} + 1} \quad (4)$$

где $\theta_0 = \theta(0)$ - угол наклона стержня на его конце. Подстановка (4) в формулы Симпсона позволяет получить зависимости $x(s, \theta_0, a)$ и $y(s, \theta_0, a)$.

Приведем результаты вычислений для двух значений массы груза $m_1 = 0$ и $m_2 = 1500$ грамм (рис. 1).

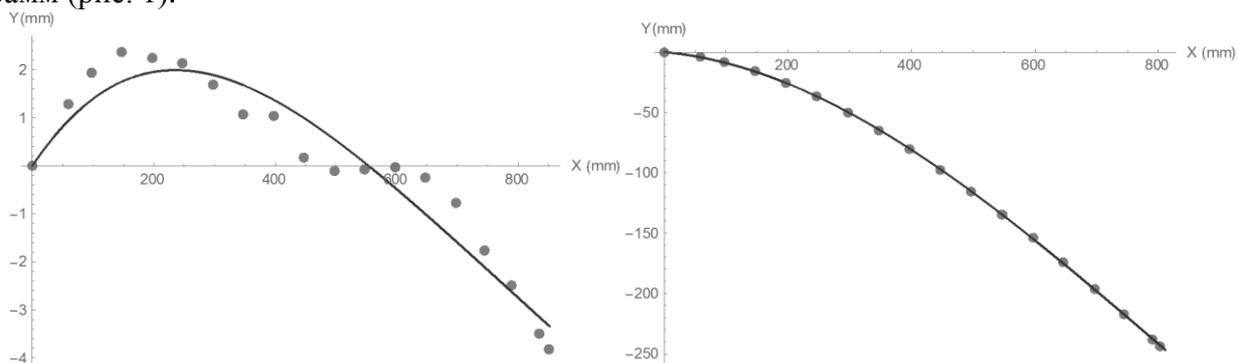


Рис. 1. Теоретические и экспериментальные кривые прогиба стержня, полученные с использованием формулы 4 для массы груза $m_1 = 0$ слева и $m_2 = 1500$ грамм справа

Принципиальным отличием нашего метода от традиционных численных методов является получение функции вместо таблицы чисел, при этом параметры задачи естественным образом входят в число аргументов данной функции. Достаточно типичной для практики является ситуация, когда результаты наблюдений за реальным объектом противоречат математической модели, полученной на основе попытки применения известных физических законов. Эти трудности часто приводят к тому, что модель объекта строится эмпирически с помощью интерполяции по экспериментальным данным. Наш метод позволяет применить промежуточный подход, который состоит в получении приближенных полуэмпирических формул на основе неточной дифференциальной модели и результатов измерений. Известные теоремы о погрешности численных методов [6] позволяют утверждать, что мы можем получить сколь угодно точное приближение к решению дифференциального уравнения, используя разбиение на достаточно большое число интервалов. Наш подход позволяет без использования интерполяции получить формулы, которые можно уточнять по экспериментальным данным.

ЛИТЕРАТУРА:

1. T. Lazovskaya, D. Tarkhov Multilayer neural network models based on grid methods, IOP Conf. Series: Materials Science and Engineering 158 (2016) <http://iopscience.iop.org/article/10.1088/1757-899X/158/1/01206>
2. Alexander Vasilyev, Dmitry Tarkhov, Ivan Bolgov, Tatyana Kaverzneva, Svetlana Kolesova, Tatyana Lazovskaya, Evgeniy Lukinskiy, Alexey Petrov, Vladimir Filkin MULTILAYER NEURAL NETWORK MODELS BASED ON EXPERIMENTAL DATA FOR PROCESSES OF SAMPLE DEFORMATION AND DESTRUCTION// Selected Papers of the First International Scientific Conference Convergent Cognitive

Information Technologies (Convergent 2016) Moscow, Russia, November 25-26, 2016 p.6-14 <http://ceur-ws.org/Vol-1763/paper01.pdf>.

3. Alexander Vasilyev, Dmitry Tarkhov, Tatyana Shemyakina APPROXIMATE ANALYTICAL SOLUTIONS OF ORDINARY DIFFERENTIAL EQUATIONS// Selected Papers of the XI International Scientific-Practical Conference Modern Information Technologies and IT-Education (SITITO 2016) Moscow, Russia, November 25-26, 2016 p.393-400 <http://ceur-ws.org/Vol-1761/paper50.pdf>

4. Dmitry Tarkhov, Ekaterina Shershneva APPROXIMATE ANALYTICAL SOLUTIONS OF MATHIEU'S EQUATIONS BASED ON CLASSICAL NUMERICAL METHODS// Selected Papers of the XI International Scientific-Practical Conference Modern Information Technologies and IT-Education (SITITO 2016) Moscow, Russia, November 25-26, 2016 p.356-362 <http://ceur-ws.org/Vol-1761/paper46.pdf>

5. Yu.P.Artyukhin. Arbitrary Bending of a cantilever Beam by a Conservative Force//Sc.Notes of Kazan Univ.Physic-Math sc. 2013. B.2 p.144-157

6. E. Hairer, S. P. Norsett, G. Wanner Solving Ordinary Differential Equations I: Nonstiff Problem, Springer-Verlag, Berlin, 1987. xiv + 480 pp

УДК 004.032.26+53.096

Е.А. Варшавчик, Ю.А. Каспаров, Ю.С. Седова, Д.А.Тархов, Е.В. Фильчук
Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого

УСТАНОВЛЕНИЕ ЗАВИСИМОСТИ МЕХАНИЧЕСКОГО ПОВЕДЕНИЯ ПРИ РАСТЯЖЕНИИ УПРУГОГО МАТЕРИАЛА ОТ ТЕМПЕРАТУРЫ С ПОМОЩЬЮ ПРИМЕНЕНИЯ НЕЙРОННЫХ СЕТЕЙ

Введение

Целью работы является установление зависимости растяжимости упругого материала от температуры и, как следствие, построение прогноза деформации в зависимости от силы натяжения и температуры в достаточно широких пределах.

В работе [1] были описаны процессы деформации упругих материалов и предсказание нейронными сетями момента разрыва образцов при конкретных значениях температур. В работе [2] проводились аналогичные исследования, но при разных скоростях деформации. В нашей работе, помимо этого, исследуется зависимость растяжения образца при любых температурах в заданном диапазоне и строится прогноз поведения материала при произвольной температуре на основе деформации при некоторых конкретных значениях температуры.

Исследование арамидной нити

Эксперименты проводились над арамидной нитью при температурах от 100 до 300 °С с шагом в 50 °С. На универсальной измерительной установке Instron устанавливался образец и растягивался с постоянной скоростью относительно верхнего зажима в 100 мм/мин. В зависимости от температуры результаты экспериментов представляли собой кривые растяжения. Данная диаграмма отражает зависимость между удлинением и напряжением, возникающим внутри испытуемого образца при разных температурах.

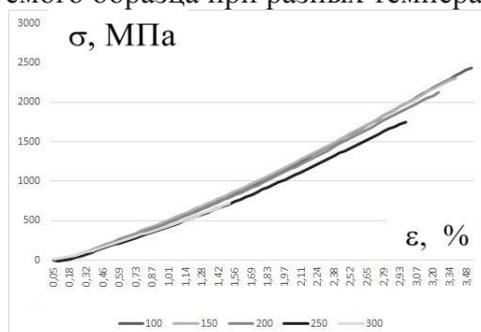


Рис. 1. Зависимость напряжения, возникающего внутри образца, от относительного удлинения

Упругие свойства различных материалов трудно прогнозировать, в связи с их сложным механическим поведением. Для решения подобных задач применяют нейронные сети в силу их адаптивности и устойчивости к погрешностям в данных [3].

Посредством нейронной сети удалось вывести функцию отображающей динамику растяжения для конкретной температуры, используя персептрон с двумя нейронами для аппроксимации результатов измерений [4]. На первом этапе работы с помощью зависимости вида $\sigma(\varepsilon) = c_1 \text{th}[a_1(\varepsilon - x_{c1})] + c_2 \text{th}[a_2(\varepsilon - x_{c2})]$ удалось достаточно точно аппроксимировать зависимость напряжения от относительного удлинения. Здесь ε - относительное удлинение, а $\sigma(\varepsilon)$ - соответствующее ему напряжение. Коэффициенты $a_{1,2}$, $c_{1,2}$ и $x_{c1,2}$ искались из условия минимума среднеквадратичной ошибки. Как результат, мы получили график зависимости напряжения от относительного удлинения (рис. 1).

Второй этап заключался в определении зависимости каждого из коэффициентов от температуры материала (рис. 2). Мы использовали полученные коэффициенты функции $\sigma(\varepsilon)$ для каждой из температур, а также новую нейронную сеть с 1 нейроном. Для этой задачи использовали зависимость вида $G(T) = c_3 - c_4 \text{th}[a_3(T - x_{c3})]$, где T - температура материала. Коэффициенты функции $G(T)$ по-прежнему искались из условия минимума функционала ошибки.

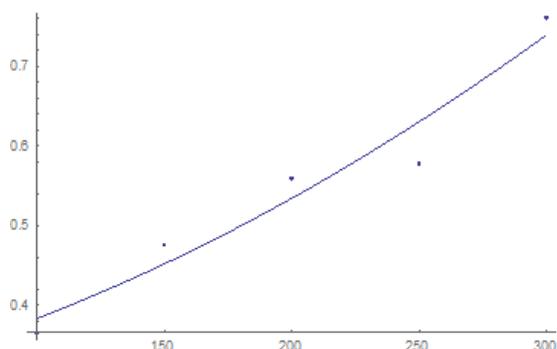


Рис. 2. Пример зависимости коэффициента a_1 функции $\sigma(\varepsilon)$ от температуры

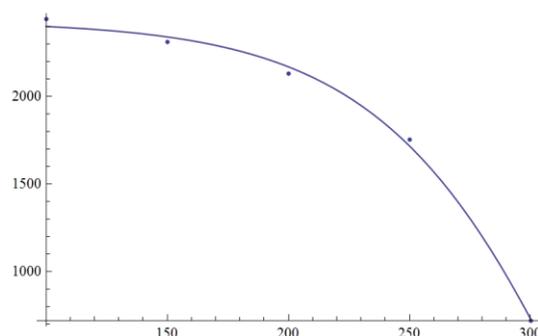


Рис. 3. График зависимости координат точек разрыва от температуры

На третьем этапе применения нейронных сетей мы использовали персептрон с одним нейроном для аппроксимации зависимости координат точек разрыва от температуры. Её график представлен на рис. 3.

Заключение

В результате мы вывели функцию, позволяющую найти критическую температуру, при которой напряжение разрыва на образце обращается в ноль, то есть температуру, при которой образец расплавляется. В лабораторных исследованиях при данной нагрузке, нить теряет упругие свойства при схожей температуре, следовательно, нахождение функции нейронными сетями дает достаточно точный прогноз [5].

Данные исследования дают возможность предсказывать поведение материала при изменении механических характеристик с помощью определенной методики, которая основана на построении зависимости напряжения, возникающее внутри образца, от относительного удлинения при растяжении упругого материала в зависимости от температуры испытания в виде соответствующей нейросетевой аппроксимация. В современных условиях стало необходимо учитывать влияние температурных климатических изменений на длительность безопасной эксплуатации разнообразных материалов и их износ [6,7]. В наших исследованиях проведенные температурные «нагрузки» образцов

позволяют нам осуществить своеобразное «старение» материалов с построением модели прогнозирования деформации материала нити при ее растяжении.

ЛИТЕРАТУРА:

1. Bolgov I., Kaverzneva T., Kolesova S., Lazovskaya T., Stolyarov O., Tarkhov D. Neural network model of rupture conditions for elastic material sample based on measurements at static loading under different strain rates// Journal of Physics: Conference Series V. 772 <http://iopscience.iop.org/article/10.1088/1742-6596/772/1/012032>
2. Filkin V., Kaverzneva T., Lazovskaya T., Lukinskiy E., Petrov A., Stolyarov O., Tarkhov D. Neural network modeling of conditions of destruction of wood plank based on measurements// Journal of Physics: Conference Series V. 772 <http://iopscience.iop.org/article/10.1088/1742-6596/772/1/012041>
3. Alexander Vasilyev, Dmitry Tarkhov, Ivan Bolgov, Tatyana Kaverzneva, Svetlana Kolesova, Tatyana Lazovskaya, Evgeniy Lukinskiy, Alexey Petrov, Vladimir Filkin MULTILAYER NEURAL NETWORK MODELS BASED ON EXPERIMENTAL DATA FOR PROCESSES OF SAMPLE DEFORMATION AND DESTRUCTION// Selected Papers of the First International Scientific Conference Convergent Cognitive Information Technologies (Convergent 2016) Moscow, Russia, November 25-26, 2016 p.6-14 <http://ceur-ws.org/Vol-1763/paper01.pdf>
4. D. Aranda-Iglesias, G. Vadillo, J.A. Rodríguez-Martínez, K.Y. Volokh. Modeling deformation and failure of elastomers at high strain rates // Mechanics of Materials, Volume 104, January 2017, Pages 85–92 <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0167663616303933>
5. Gérard-Philippe Zéhil, Henri P. Gavin. Unified constitutive modeling of rubber-like materials under diverse loading conditions // International Journal of Engineering Science, Volume 62, January 2013, Pages 90–105 <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0020722512001759>
6. Каверзнева Т.Т., Смирнова О.В. Влияние износа строительного оборудования и ручного инструмента на условия труда рабочих // Безопасность в техносфере. – 2013. - №3 (42), май-июнь, – С. 14-18.
7. Ефремов С.В., Каверзнева Т.Т., Тархов Д.А. Нейросетевое моделирование в охране труда – СПб: Изд-во Политехн. ун-та, 2014. – 136 с.

УДК 004.032.26

А.Н. Васильев, Д.А. Тархов, К.В. Сколис, О.Д. Боровская
Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого

СРАВНИТЕЛЬНЫЙ АНАЛИЗ ОДНОСЛОЙНОГО И МНОГОСЛОЙНОГО РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ О ПОРИСТОМ КАТАЛИЗАТОРЕ

Рассматривается новый метод [1] моделирования процессов тепломассопереноса в грануле пористого катализатора [2,3], основанный на модификации известных численных методов, позволяющей получить приближённое решение в аналитической форме. В работе [4] было установлено, что однослойное нейросетевое решение достаточно точно моделирует исследуемые процессы не только для конкретных значений параметров, но и в интервалах изменения этих параметров. В данной работе рассматривается многослойное решение задачи, которое оказалось более эффективным.

Анализ исследуемых процессов в грануле пористого катализатора при каталитической химической реакции можно свести к решению краевой задачи для обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка, построенного с учетом геометрии гранулы [2,3]. Далее рассматриваем случай плоской гранулы. Тогда задача о пористом катализаторе будет сводиться к решению дифференциального уравнения (1) с учетом краевых условий (2)

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \alpha(1+y) \exp\left[-\frac{\gamma\beta y}{1-\beta y}\right] \quad (1)$$

$$y(1) = 0, y'(0) = 0 \quad (2)$$

Особенность задачи заключается в том, что классические численные методы предназначены для решения задач Коши, а не краевых задач. Чтобы избежать данной проблемы было построено многослойное решение [1] задачи на основе известного метода Штёрмера [5], для которого неизвестное условие решения на левом конце входит в виде параметра: $y(0) = p$. Простейший вариант данного метода, который применяется к уравнению вида (3) состоит в применении рекуррентного соотношения (4).

$$y''(x) = f(x, y) \quad (3)$$

$$y_{k+1} = 2y_k - y_{k-1} + h^2 f(x_k, y_k), h = x/n \quad (4)$$

Исследовалась погрешность, получаемая при расчетах с использованием значений параметров из некоторого интервала. К каждой комбинации были введены все три параметра, изменяющиеся в пределах двух интервалов: $\alpha, \beta, \gamma \in (0;1)$ и $\alpha, \beta, \gamma \in (0;2)$. Исследуемые интервалы намного больше, чем интервалы, в которых получено решение в [4]. Так же, в данной работе все три параметра принимали значения из одного и того же интервала, например, $\alpha, \beta, \gamma \in (0;1)$ или $\alpha, \beta, \gamma \in (0;2)$, в то время как в ходе экспериментов, проводимых в [4], значения брались из различных интервалов: $\alpha \in (0,05;0,15)$, $\beta \in (0,4;0,6)$, $\gamma \in (0,8;1,2)$.

Для приближения к решению $y(x, p, \alpha, \beta, \gamma)$ (где p -параметр, получаемый в виде нейросетевой функции параметров задачи $p = p(\alpha, \beta, \gamma)$,, число слоёв в котором равно двум, получаем выражение

$$p + 0.25x^2\alpha \left(e^{-\frac{p\beta\gamma}{1-p\beta}} (1+p) \right) + \exp \left[-\frac{\left(p + 0.125e^{-\frac{p\beta\gamma}{1-p\beta}} (1+p)x^2\alpha \right) \beta\gamma}{1 - \left(p + 0.125e^{-\frac{p\beta\gamma}{1-p\beta}} (1+p)x^2\alpha \right) \beta} \right] (1+p) \left(1 + 0.125e^{-\frac{p\beta\gamma}{1-p\beta}} x^2\alpha \right).$$

Для формулы, количество слоёв в которой соответствовало двум, увеличение количества нейронов приближающей сети, не выявило значительного увеличения точности полученного нейросетевого приближения (рис. 1). Наименьшая ошибка была достигнута при максимальном рассматриваемом количестве нейронов - 15, она составила 0.0025 при изменении входных параметров α, β и γ в интервале (0;1).

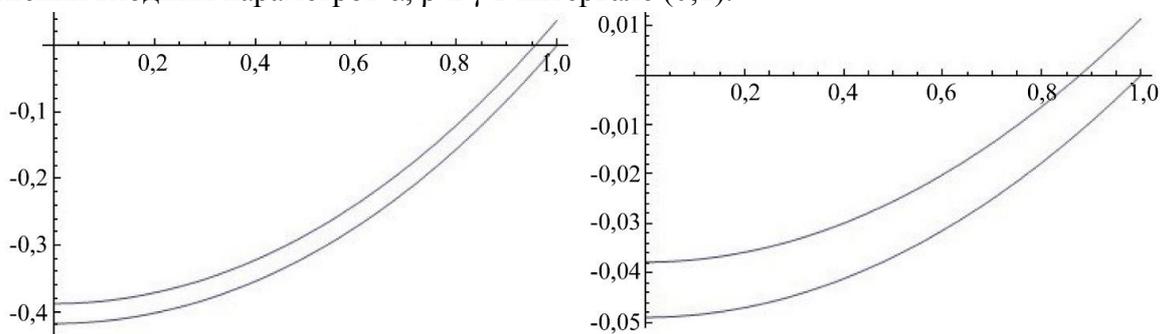


Рис. 1. График решения, найденный в пакете Mathematica, для двухслойных формул с использованием приближающей сети, включающей 2 нейроны и график решения подсчитанные по приближённой формуле для интервала изменения параметров (0;1) (слева) и для интервала (0;2) (справа)

Уже при рассмотрении приближающей сети с количеством нейронов 2, 5 и 15 для количества слоев 2, 3 и 4 наблюдалось, что для приближающей сети из двух нейронов погрешность при изменении параметров α , β и γ в интервале (0;1) меньше погрешности при их изменении в интервале (0;2) на порядок, тогда как при рассмотрении приближающей сети, включающей 5 или 15 нейронов.

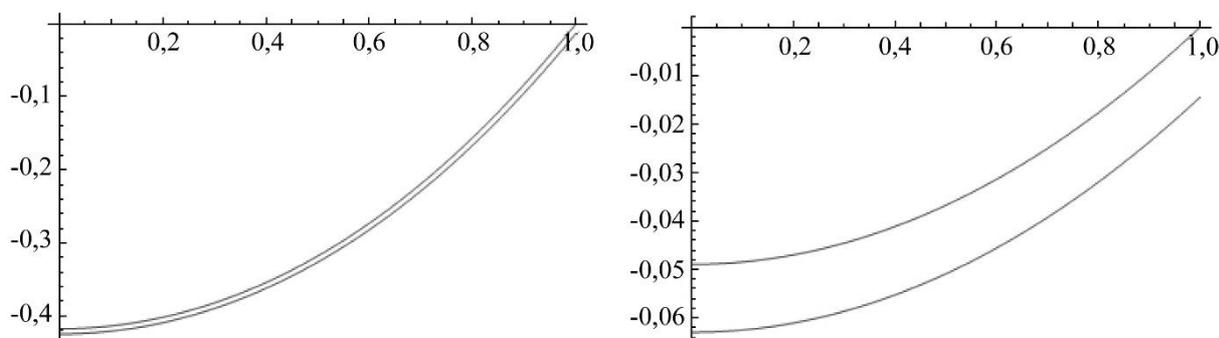


Рис. 2. График решения, найденный в пакете Mathematica, для трехслойных формул с использованием приближающей сети, включающей 5 нейронов и график решения подсчитанные по приближенной формуле для интервала изменения параметров (0;1) и (0;2)

При проведении расчетов для трехслойной и четырехслойной формулы значительно увеличилось время получения приближенного решения и среднеквадратичных ошибок. Результаты расчетов, проводимых для трехслойной формулы, показали, что наименьшая погрешность так же достигается при большем количестве нейронов в приближающей сети и при изменении входных параметров в меньшем интервале.

Результаты вычислений погрешностей расчетов для трехслойных формул показали, что наиболее точный результат достигается при 5 нейронах в сети (рис. 2), приближающей начальные условия. Для пробных точек для уравнения наименьшая среднеквадратичная ошибка составила 0.0025.

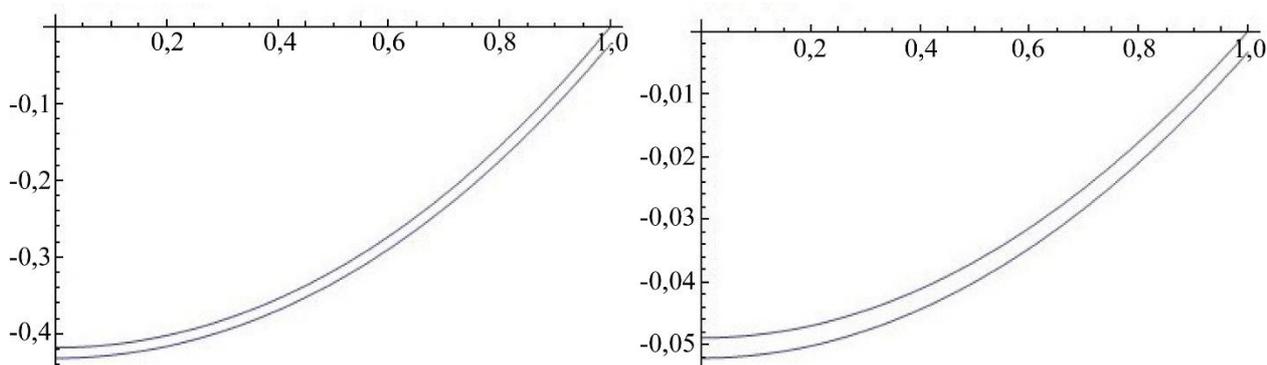


Рис. 3. График решения, найденный в пакете Mathematica, для четырехслойных формул с использованием приближающей сети, включающей 15 нейронов и график решения подсчитанные по приближенной формуле для интервала изменения параметров (0;1)

Для четырехслойной выяснилось, что наименьшая погрешность для данной серии как для интервала (0;1) изменения параметров α , β и γ , так и для интервала (0;2) была получена при 15 нейронах приближающей сети и составила 0.0020 и 0.0085 соответственно (рис. 3). Данные показатели стали минимальными для всех трех серий проведенных экспериментов.

Данный факт доказывает, что существует прямая зависимость между увеличением точности приближённого вычисления и числом слоев.

Таким образом, можно заключить, что многослойный метод может оказаться эффективным для более широкого спектра задач построения приближенных решений обыкновенных дифференциальных уравнений и уравнений в частных производных.

ЛИТЕРАТУРА:

1. T. Lazovskaya, D. Tarkhov Multilayer neural network models based on grid methods, IOP Conf. Series: Materials Science and Engineering 158 (2016) <http://iopscience.iop.org/article/10.1088/1757-899X/158/1/01206>
2. Е.Б. Кузнецов, С.С.Дмитриев. Перенос тепла и массы в пористом катализаторе// Материалы VI Международной конференции по неравновесным процессам в соплах и струях – NPNJ - 2006, СПб. – М.:Вузовская книга,2006. - С.159-160.
3. Ц. На. Вычислительные методы решения прикладных граничных задач.- М.:Мир, 1982.- 296 с.
4. А.Н.Васильев, Д.А.Тархов. Принципы и техника нейросетевого моделирования. - СПб.:Нестор-История,2014. – 218 с.
5. E. Hairer, S. P. Norsett, G. Wanner Solving Ordinary Differential Equations I: Nonstiff Problem, Springer-Verlag, Berlin, 1987. xiv + 480 pp.

УДК 517.977.58.

А.Д. Суббота, И.Ю. Суриков, Д.А. Тархов
Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого

ПРИМЕНЕНИЕ ПРИБЛИЖЕННЫХ МНОГОСЛОЙНЫХ МЕТОДОВ РЕШЕНИЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ К ЗАДАЧЕ СТАБИЛИЗАЦИИ ПЕРЕВЕРНУТОГО МАЯТНИКА

Задача управления маятником в окрестности неустойчивого равновесия, перевод его в верхнее неустойчивое состояние и стабилизация этого неустойчивого состояния исследовалась многими авторами [1]. Интерес к этой задаче вызван тем, что неустойчивые объекты управления, если ими правильно управлять, обладают рядом полезных качеств, в том числе и быстродействием. Данная задача является простым примером стабилизации нелинейной динамической системы в неустойчивом состоянии. На ее примере имеет смысл тестировать методы поиска оптимального управления перед их применением к решению более сложных задач, например, управлению передвижением роботов на двух опорах, управлению квадрокоптерами [2-3] и т.д. По данной задаче проведено большое количество исследований [1], но, как правило, все они обеспечивают синтез управлений только при введении различного рода упрощений и ограничений.

В нашей работе сравниваются три подхода к управлению системой. Первый подход основан на переходе нелинейных дифференциальных уравнений к приближенной модели и движении к положению равновесия по заданному экспоненциальному закону [4]. Второй подход состоит в дроблении времени управления на небольшие постоянные интервалы и выборе (рис.1, 2) постоянного управления на заранее определенном интервале времени, причем знак управления выбирается таким образом, чтобы движение приближенной системы приводило к меньшему расстоянию до целевого положения неустойчивого равновесия. Для этих двух подходов сравниваются алгоритмы, построенные на линеаризации рассматриваемого дифференциального уравнения и на методах, предложенных в [5]. Суть данных методов заключается в применении классических методов приближённого решения дифференциальных уравнений к интервалу переменной длины, что позволяет перейти от

численного решения к функциональному. Третий подход состоит в совершении двух шагов с управлениями разных знаков фиксированной амплитуды. Время каждого шага подбирается оптимальным образом на основе приближенного решения, полученного модификацией [5] неявного метода Эйлера [6].

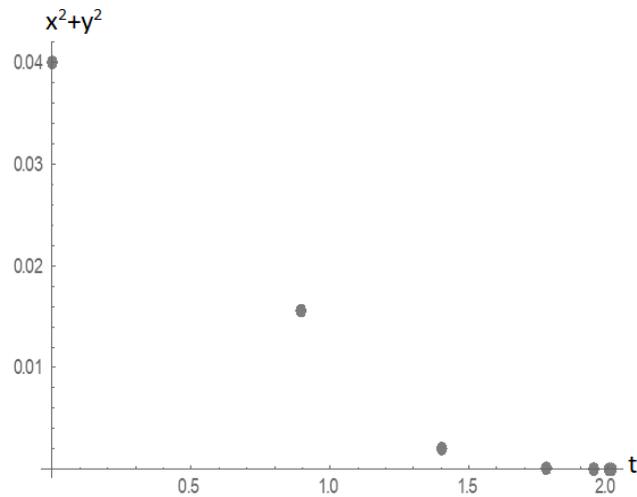


Рис. 1. Последовательность расстояний до начала координат для второго метода

Целью исследования является определение самого эффективного из предложенных методов стабилизации системы, т.е. метода, который позволяет привести исходную систему в малую окрестность верхнего положения равновесия за минимальное время. При малых начальных отклонениях, третий подход оказывается более эффективным.

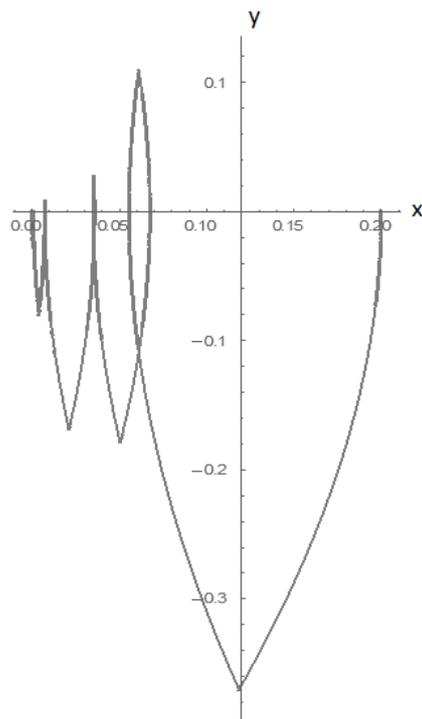


Рис. 2. Фазовые траектории для второго метода

Аналогичные результаты получаются и при большинстве других начальных точек, в том числе, далеких от состояния равновесия.

Проведенные вычислительные эксперименты показали, что предложенные в [5] модификации классических численных методов могут успешно применяться к задачам управления, в том числе, к задачам, связанным с управлением в условиях неустойчивости. Они могут оказаться особенно полезными в ситуации, когда математическая модель управляемого объекта неточна и может уточняться в процессе управления им по мере накопления данных о процессах в моделируемой системе.

Наиболее перспективным представляется третий подход. Его развитие, в частности применение более точных методов (например, метода трапеций), требует решения на каждом шаге нелинейного уравнения, что может быть проведено с помощью предварительно обученной нейронной сети. Возможно применение замены метода из двух шагов методами из большего числа шагов, сравнение с методом, основанным на линеаризованной системе и т.д.

ЛИТЕРАТУРА:

1. Андрусевич П.А. Обратный маятник, история создания и исследований. Электронный журнал «Молодежный научно-технический вестник», 2017, №1
2. Евгенов А. А. Нейросетевой регулятор системы управления квадрокоптером. Журнал «Современные проблемы науки и образования», №5/2013.
3. Веселов Г.Е., Скляр А.А., Скляр С.А. Синергетический подход к управлению беспилотным летательным аппаратом. Журнал «[Известия Южного федерального университета. Технические науки](#)», 2013
4. Эмирбеков Н.Э., Эмирбеков М.Э. Разработка алгоритмов раскочки и стабилизации обратного маятника, закрепленного на валу двигателя. Журнал «Автоматика и программная инженерия». 2016, №1(15)
5. T. Lazovskaya, D. Tarkhov Multilayer neural network models based on grid methods, IOP Conf. Series: Materials Science and Engineering 158 (2016) <http://iopscience.iop.org/article/10.1088/1757-899X/158/1/01206>
6. Вержбицкий В.М., Численные методы. Математический анализ и обыкновенные дифференциальные уравнения, М.: Высшая школа, 2001

УДК 51-72+519.624

М.С. Берминова, А.Н. Васильев, А.Р. Галютдинова, Д.А. Тархов, В.А. Терешин
Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого

ПОЛУЭМПИРИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ПРОВИСАНИЯ ВЕРЁВКИ

Разработанная авторами методика построения полуэмпирических моделей сложных объектов применяется к моделированию свободно провисающей веревки на основе приближенного дифференциального уравнения и экспериментальных данных.

В статье рассматривается задача расчёта линии провисания пеньковой верёвки, которую трудно решить стандартными методами. Мы будем строить полуэмпирическую модель объекта, опираясь на данные наблюдений за ним, используя методы [1-4].

На рис.1 изображена расчетная схема свободно свисающей нерастяжимой нити длиной $l=1$ м, закрепленной концами на одинаковом уровне. Здесь и далее L – расстояние между опорами, s – длина участка кривой, θ – угол наклона касательной, A и B – векторы сил реакций опор, q – распределенная нагрузка, $z = \frac{s}{l}$.

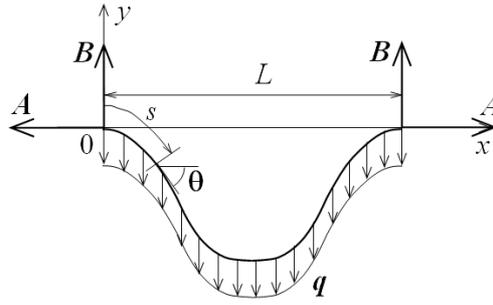


Рис. 1. Расчетная схема нити

Для отыскания уравнения кривой для свободно свисающей нити достаточно определить функцию $\theta(z)$. В обозначениях $\xi = \frac{x}{l}$ и $\eta = \frac{y}{l}$

$$\frac{d\xi}{dz} = \cos \theta(z), \frac{d\eta}{dz} = \sin \theta(z) \quad (1)$$

Наш подход состоит из двух этапов. На первом строится приближенное решение рассматриваемых дифференциальных уравнений в виде функции. На втором этапе эта функция уточняется по наблюдениям.

Для учета изгибной жесткости воспользуемся уравнением

$$EJ \frac{d^2\theta}{ds^2} = (B - qs) \cos \theta + A \sin \theta \quad (2)$$

с граничными условиями: $\theta(0) = 0$, $\theta(l) = 0$ и системой уравнений (1).

Уравнение (2) преобразуем к виду

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = -a t \cos \theta + b \sin \theta \quad (3)$$

Уравнение (3) дополняется краевыми условиями $\theta(0) = \theta(1) = 0$.

Далее используется один из вариантов многослойного подхода к построению приближенных решений обыкновенных дифференциальных уравнений [1-4].

Первый шаг делаем по исправленному методу Эйлера для промежутка переменной длины. Второй - по методу Штёрмера для такого же промежутка.

Уравнения для координат линии получим интегрированием (1) с помощью метода Симпсона

$$x(s, \mathbf{a}) = \frac{s}{6m} \left(1 + \cos \theta(s, \mathbf{a}) + 4 \sum_{i=1}^m \cos \theta\left(\frac{s}{2m}(2i-1), \mathbf{a}\right) + 2 \sum_{i=1}^{m-1} \cos \theta\left(\frac{s}{m}i, \mathbf{a}\right) \right);$$

$$y(s, \mathbf{a}) = \frac{s}{6m} \left(\sin \theta(s, \mathbf{a}) + 4 \sum_{i=1}^m \sin \theta\left(\frac{s}{2m}(2i-1), \mathbf{a}\right) + 2 \sum_{i=1}^{m-1} \sin \theta\left(\frac{s}{m}i, \mathbf{a}\right) \right).$$

Идентификацию параметров a , b и c проводим минимизацией функционала ошибки

$$J = \sum_{i=1}^M (x(s_i, \mathbf{a}) - x_i)^2 + \sum_{i=1}^M (y(s_i, \mathbf{a}) - y_i)^2, \text{ включающего данные наблюдений } \{x_i, y_i\}_{i=1}^M.$$

Идентифицируя параметры a , b и c , при $L = 0.1$ получаем график на рис. 2.

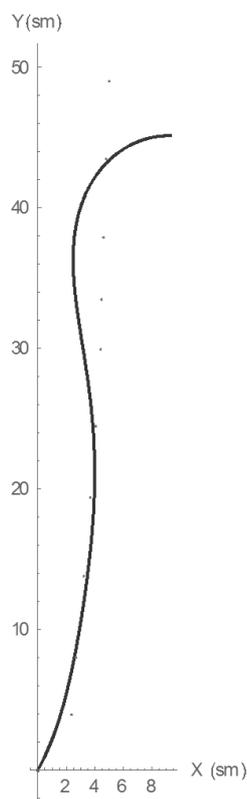


Рис. 2. График провисания нити при $L=0,1$ м

Заметим, что никакой подбор коэффициентов уравнения (2) не позволяет получить решение также или лучше соответствующее экспериментальным данным. Методы, изложенные в [1-4] и в данной работе имеет смысл применять для быстрого построения математической модели приемлемой точности при не самом удачном выборе физической модели и соответствующих ей дифференциальных уравнений за счет подбора настраиваемых параметров для удовлетворения экспериментальным данным.

ЛИТЕРАТУРА:

1. Lazovskaya T., Tarkhov D. Multilayer neural network models based on grid methods, IOP Conf. Series: Materials Science and Engineering 158 (2016) <http://iopscience.iop.org/article/10.1088/1757-899X/158/1/01206>
2. Vasilyev Alexander, Tarkhov Dmitry, Bolgov Ivan, Kaverzneva Tatyana, Kolesova Svetlana, Lazovskaya Tatyana, Lukinskiy Evgeniy, Petrov Alexey, Filkin Vladimir MULTILAYER NEURAL NETWORK MODELS BASED ON EXPERIMENTAL DATA FOR PROCESSES OF SAMPLE DEFORMATION AND DESTRUCTION// Selected Papers of the First International Scientific Conference Convergent Cognitive Information Technologies (Convergent 2016) Moscow, Russia, November 25-26, 2016 p.6-14 <http://ceur-ws.org/Vol-1763/paper01.pdf> - Scopus.
3. Tarkhov Dmitry, Shershneva Ekaterina APPROXIMATE ANALYTICAL SOLUTIONS OF MATHIEU'S EQUATIONS BASED ON CLASSICAL NUMERICAL METHODS// Selected Papers of the XI International Scientific-Practical Conference Modern Information Technologies and IT-Education (SITITO 2016) Moscow, Russia, November 25-26, 2016 p.356-362 <http://ceur-ws.org/Vol-1761/paper46.pdf> - Scopus.
4. Vasilyev Alexander, Tarkhov Dmitry, Shemyakina Tatyana APPROXIMATE ANALYTICAL SOLUTIONS OF ORDINARY DIFFERENTIAL EQUATIONS// Selected Papers of the XI International Scientific-Practical Conference Modern Information Technologies and IT-Education (SITITO 2016) Moscow, Russia, November 25-26, 2016 p.393-400 <http://ceur-ws.org/Vol-1761/paper50.pdf>

ОПТИМИЗАЦИЯ SMC-АЛГОРИТМА В ЧАСТИ ПРАВИЛ ОБХОДА КОМПАКТА ИЗ ПАРАМЕТРИЧЕСКОГО ПРОСТРАНСТВА МОДЕЛИ СЛУЧАЙНОГО ПРОЦЕССА

Данная работа посвящена оцениванию параметров закона распределения нестационарного случайного процесса при помощи SMC-алгоритма, а именно его оптимизации в части обхода компакта из параметрического пространства модели случайного процесса. Используется аддитивная модель процесса Леви [1]. Модели и формы этого процесса применяются в различных областях биологии, экономики и физики, например, при изучении броуновского движения и диффузии, что подтверждает адекватность такой модели широкому кругу количественных характеристик, наблюдаемых в различных предметных областях.

Оба слагаемых аддитивной модели являются нестационарными случайными процессами. Модель представляется следующим образом:

$$Z(t) = X(t) + Y(t), \quad (1)$$

где $X(t) \sim W(m, \sigma)$, винеровский процесс, а $Y(t)$ характеризует сумму процессов Леви

$$Y(t) = \sum_{i=1}^d \text{Pareto}(i; x_{min}; k) \cdot I(t \geq t_i) \cdot e^{-\lambda C(t-t_i)}, \quad (2)$$

где d - количество скачков, произошедших на промежутке $[0, t]$. $I(t \geq t_i)$ - индикаторная функция, обеспечивающая вклад в ординату процесса на текущем шаге скачка, который имел место прежде. $e^{-\lambda C(t-t_i)}$ отвечает за процесс возврата к среднему. Здесь λC - скорость возврата к среднему, t_i - момент возникновения скачка, t - рассматриваемый момент времени. $\text{Pareto}(i; x_{min}; k)$ - распределение Парето с тяжёлым хвостом, плотность которого представлена формулой (3).

$$f_{\text{Pareto}}(u) = \begin{cases} \frac{kx_{min}^k}{u^{k+1}}, & u \geq x_{min}, k > 0 \\ 0, & u < x_{min} \end{cases}, \quad (3)$$

где x_{min} – параметр положения, k – параметр формы. Первый множитель в формуле (2) определяет амплитуду выброса.

Выбросы порождаются пуассоновским законом с параметром λ .

Введём параметрическое пространство аддитивной модели (1). Параметры изучаемого процесса формируют вектор из этого параметрического пространства с размерностью 6 (начальное условие для винеровского процесса в данном примере предполагаем известным):

$$(k, x_{min}, m, \sigma, \lambda C, \lambda) \in R^6$$

Начальными данными алгоритма оценивания являются выборочная функция и интервальные оценки рассматриваемых параметров. На основе интервальных оценок в R^6 строится компакт K – замкнутое ограниченное множество конечной мощности.

Далее при помощи фильтра частиц (Particle Filter) [2] – метода из класса последовательных методов Монте-Карло (Sequential Monte-Carlo methods) в пределах K получаем точечные оценки.

Следует отметить, что данный алгоритм имеет преимущество по сравнению с другими методами оценивания. Например, один из основных недостатков метода максимального правдоподобия – асимптотическая несмещенность МП-оценок, т.е. МП-оценки обладают достаточно низкой дисперсией, но, вообще говоря, смещены. (Применение данного метода

оценивания используется в бакалаврской работе [4].) Последовательные методы Монте-Карло позволяют получить несмещенные оценки, хотя и обладают большей дисперсией.

Т.к. в описанной выше реализации алгоритма [3] последовательно проходим по всем точкам компакта, естественным способом оптимизации представляется его распараллеливание. В предыдущих версиях фреймворка была ОМР-реализация распараллеливания, которая существенно ограничивала нас в части выбора стратегии обхода компакта. Поэтому в настоящем исследовании была разработана и реализована новая архитектура распараллеливания этого алгоритма.

Для этого в исходном компакте K на основе равномерного распределения $U(0, \text{card}(K))$ выбирается некоторое количество точек, далее называемых стартовыми. Правая граница носителя меры этого равномерного распределения, $\text{card}(K)$, - мощность множества точек в исходном компакте.

Затем для каждая из этих точек используется для построения подмножеств исходного компакта. Эти подмножества замкнутые и непересекающиеся.

Алгоритм RF-метода применяется для каждого из подмножеств. Оптимизация заключается прежде всего в том, что для подмножеств вычисления проводятся параллельно, в отдельных потоках, что позволяет существенно ускорить работу алгоритма. По итогам оценивания в пределах каждого подмножества выполняется второй шаг в части оптимизации алгоритма – порядок обхода исходного компакта меняется согласно оценкам логарифма правдоподобия, полученным для каждого из подмножеств.

На рис.1 представлены графики плотностей распределения, которые показывают изменение логарифма правдоподобия при обходе точек двух подмножеств исходного компакта K (справа для первого подмножества и слева для второго). Мощность подмножеств 10^5 , а мощность всего компакта 10^9 .

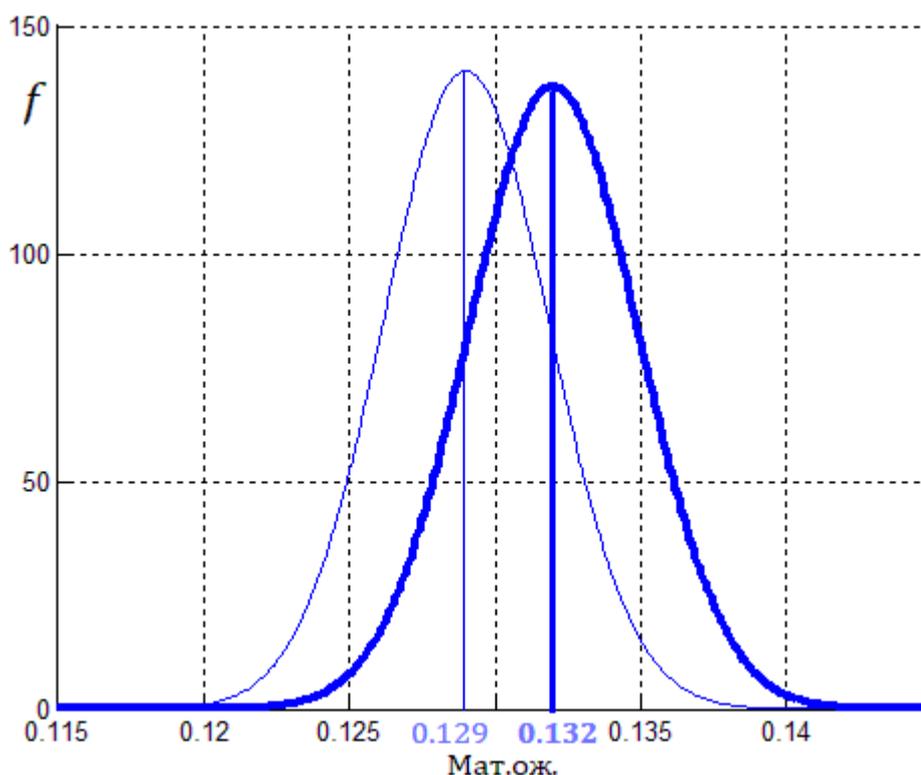


Рис. 1. Изменение логарифма правдоподобия в пределах подмножеств

В данном случае средние значения логарифма правдоподобия в двух подмножествах отличаются на 0.003, но эти различия значимые, поскольку эти оценки, как и сама аппроксимация распределения логарифма правдоподобия нормальным законом, построены на множествах мощности больше 10^5 .

ЛИТЕРАТУРА:

1. Булинский А.В., Ширяев А.Н. Теория случайных процессов – М.: Физматлит, 2005. – 408 с.
2. Doucet A., de Freitas N., Gordon.N., Sequential Monte Carlo methods in practice. NY, Springer-Verlag, 2001, p.583.
3. Сидоровская А.А.: Реализация алгоритма фильтра частиц для оценивания параметров модели в форме суммы процессов Леви. СПб, СПбПУ, 2015.
4. Нкодиа С.-Р.: Оптимизация алгоритма вычисления функции правдоподобия в задаче оценивания параметров аддитивной модели процесса Леви: выпускная работа бакалавра. СПб. СПбПУ, 2017.

УДК 532.529.5

А.А. Елисеев, Б.С. Григорьев

Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого

МОДИФИКАЦИЯ СМЕСЕВОЙ МОДЕЛИ ТЕЧЕНИЯ МНОГОФАЗНЫХ ЖИДКОСТЕЙ ДЛЯ УЧЕТА ГАЗОВОДОПРОЯВЛЕНИЙ ПРИ БУРЕНИИ

Введение. Технологии бурения нефтедобывающих скважин предполагают использование многофазных сред. При бурении в скважине одновременно присутствуют как выбуренная порода (шлам), так и буровой раствор, обеспечивающий подъем шлама на поверхность. Помимо этого в скважину могут проникать пластовые флюиды или газ из окружающей разбуриваемой породы (газоводопроявления). Так как это может нарушить нормальный процесс бурения, то такую возможность необходимо учесть при построении модели образующегося течения.

Цели и задачи работы. Целью данной работы является модификация смеси модели, построенной в [1], которая позволит учесть возможные поступления жидкости или газа из породы, окружающей скважину. Также требуется продемонстрировать работу модифицированной модели на конкретном практическом примере.

Основные уравнения смеси модели имеют вид [1]

$$\frac{\partial}{\partial t}(\alpha_k \rho_k A) + \frac{\partial}{\partial z}(\alpha_k \rho_k u_k A) = 0, k = 1..n \quad (1)$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho_m A) + \frac{\partial}{\partial z}(\rho_m u_m A) = 0 \quad (2)$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho_m u_m A) + \frac{\partial}{\partial z}(\rho_m u_m^2 A) = \left(-\frac{\partial p_m}{\partial z} + F_{fr} + \rho_m g \right) A \quad (3)$$

Здесь (1) – уравнение неразрывности для отдельной фазы, (2) – уравнение неразрывности для смеси, (3) – уравнение баланса импульса для смеси. Также обозначено: k – номер фазы (n – общее число фаз), α_k – объемное содержание отдельной фазы, ρ_k, u_k – плотность и продольная скорость фазы, F_{fr} – сила трения смеси, g – ускорение свободного падения, A – площадь поперечного сечения скважины, z – осевая координата, направленная по глубине скважины, t – время. Плотность смеси определяется соотношением $\rho_m = \sum_{k=1}^n \alpha_k \rho_k$, а скорость

$u_m = \frac{1}{\rho_m} \sum_{k=1}^n \alpha_k \rho_k u_k$. Кроме того, считается, что все фазы смеси делят одно давление, равное давлению смеси p_m .

Нетрудно видеть, что в системе уравнений (1)-(3) число уравнений меньше числа неизвестных, которыми являются объемные содержания и скорости всех фаз, а также давление смеси. Следовательно, к данной системе необходимо добавить замыкающие соотношения. Одним из таких соотношений является условие баланса объемного содержания фаз $\sum_{k=1}^n \alpha_k = 1$. Другое связано с соотношением для скоростей. Для каждой фазы вводится

скорость относительно смеси (скорость диффузии) $u_{mk} = u_k - u_m$ и относительно несущей фазы (скорость проскальзывания) $u_{ck} = u_k - u_c$ (индекс c относится к несущей фазе, которой является буровой раствор). Нетрудно показать, что введенные скорости связаны между собой соотношением $u_{mk} = u_{ck} - \frac{1}{\rho_m} \sum_{l=1}^n \alpha_l \rho_l u_{cl}$. Для случая, когда фаза является дисперсной, то

есть, состоит из твердых или жидких частиц, имеет место следующее соотношение для скорости проскальзывания [2]

$$u_{ck} = \frac{t_k}{f(u_{ck})} \frac{\rho_k - \rho_m}{\rho_m} \left(g - u_m \frac{\partial u_m}{\partial z} - \frac{\partial u_m}{\partial t} \right) \quad (4)$$

Здесь t_k – время релаксации частиц до равновесного положения, а $f(u_{ck})$ – функция сопротивления.

В системе уравнений (1)-(3) отсутствуют слагаемые, характеризующие возможные поступления дополнительных фаз из окружающей породы, поскольку при построении модели считалось, что поперечные составляющие скорости течения на стенке скважины равны нулю. Если отбросить это предположение, то после проведения осреднения по сечению скважины в правой части уравнения (1) появляется источниковое слагаемое $Q_k = \oint_{\partial A(z)} \rho_k v_k d\gamma$, где $\partial A(z)$ – контур поперечного сечения скважины, v_k – скорость

поступления фазы (скорость фильтрации), которая по построению оказывается направленной по нормали к контуру. Аналогично в уравнение баланса импульса для отдельной фазы добавляется слагаемое вида $Q_k u_k$.

Уравнения для смеси получаются в результате сложения уравнений неразрывности и баланса импульса для всех фаз течения. В результате модифицированная система уравнений смесевой модели будет иметь следующий вид

$$\frac{\partial}{\partial t} (\alpha_k \rho_k A) + \frac{\partial}{\partial z} (\alpha_k \rho_k u_k A) = Q_k, k = 1..n \quad (5)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho_m A) + \frac{\partial}{\partial z} (\rho_m u_m A) = \sum_{k=1}^n Q_k \quad (6)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho_m u_m A) + \frac{\partial}{\partial z} (\rho_m u_m^2 A) = \left(-\frac{\partial p_m}{\partial z} + F_{fr} + \rho_m g \right) A + \sum_{k=1}^n Q_k u_k \quad (7)$$

Из окружающей породы в скважину могут поступать пластовый флюид и газ. Рассмотрим более детально случай появления газа. Если радиус пузырьков газа достаточно мал, они не изменяют свои размеры [3], [4], что позволяет включить газовую фазу в рассматриваемую смесевую модель без дальнейших модификаций. Для определения скорости фильтрации использовался закон Дарси [5]:

$$v_k(z) = -\frac{\kappa}{\mu_k} (p_m(z) - p_\infty(z)), \quad (8)$$

где κ – коэффициент проницаемости пласта, μ_k – динамическая вязкость фильтруемой фазы, $p_\infty(z)$ – пластовое давление на заданной глубине. При вычислении притока фазы Q_k предполагалось, что скорость фильтрации постоянна по сечению скважины, тогда для скважины круглого сечения имеем $Q_k = \oint_{\partial A(z)} \rho_k v_k d\gamma = 2\pi\rho_k v_k D$, где D — диаметр скважины.

Результаты. Для проверки правильности модели был рассмотрен геологический разрез из [6], по которому был построен проект скважины, а для него произведены расчеты различных сценариев ее работы. На рис. 1 показаны результаты расчета газопроявлений, полученные с использованием построенной модели. Здесь приведены распределения давления смеси по глубине скважины в разные моменты времени: штриховой линией в момент $T = 167$ с, штрихпунктирной – при $T = 1189$ с, пунктирной – при $T = 1837$ с. Сплошной линией для сравнения приведено распределение пластового давления.

Так как плотность газа существенно меньше плотности бурового раствора и шлама, то при его поступлении в скважину плотность смеси резко падает, в результате чего падает давление смеси, и, как видно из формулы (8), растёт скорость фильтрации газа. Благодаря этому давление смеси с течением времени стремительно падает, что и наблюдается на рис. 1. В момент $T = 1837$ с почти на всей глубине скважины давление смеси либо существенно меньше пластового, либо едва его превышает. Это может привести к увеличению поступления газа, дальнейшему понижению давления в скважине и в конце концов, возможно, к возникновению газового фонтана [7]. Таким образом, процесс бурения с принятыми параметрами может привести к аварийной ситуации и должен быть пересмотрен.

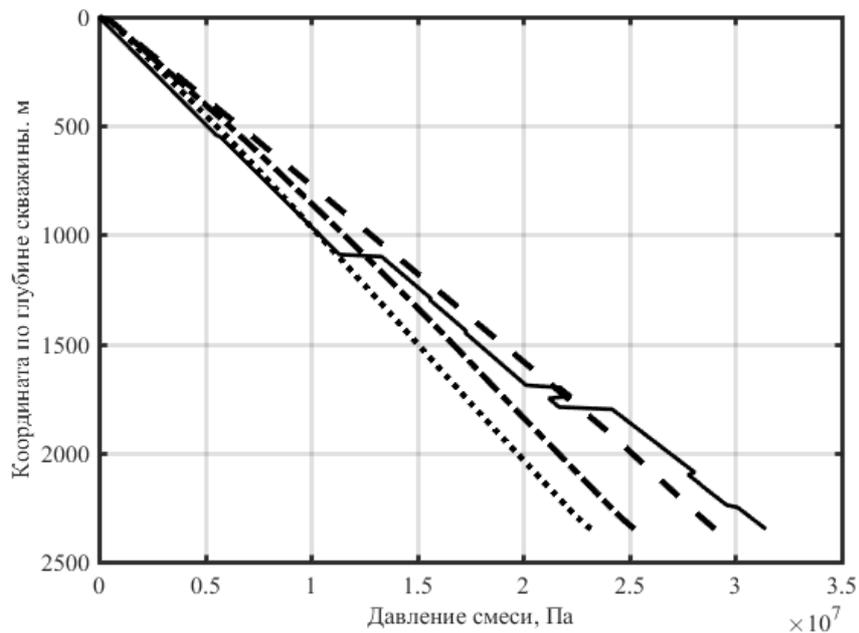


Рис. 1. Результаты расчета газопроявлений

Заключение. В рамках смесевой модели учтены возможные проявления пластового флюида и газа в скважину. На примере расчета газопроявлений с помощью разработанной модели показана возможность предсказания аварийной ситуации при бурении реальной скважины.

ЛИТЕРАТУРА:

1. Елисеев А.А., Григорьев Б.С. Смесевая модель течения многофазных жидкостей при бурении нефтедобывающих скважин // Неделя науки СПбПУ: материалы научной конференции с международным участием. Институт прикладной математики и механики. — СПб.: Изд-во Политехн. Ун-та, 2016. — с.252–255.
2. Manninen M., et al. On the mixture model for multiphase flow. Espoo, 1996. 67 p.
3. Левич В.Г. Физико-химическая гидродинамика. М.: Физматгиз, 1959. 699 с.
4. Осипцов А.А., Синьков К.Ф., Спесивцев П.Е. Обоснование модели дрейфа для двухфазных течений в круглой трубе // Изв. РАН. МЖГ. — 2014. — No 5. — с. 60–73.
5. Леонтьев Н.Е. Основы теории фильтрации. — М.: МГУ, 2009. 88 с.
6. Холодилов В.А. Геология, нефтегазоносность и научные основы стратегии освоения ресурсов нефти и газа Баренцева и Карского морей. Диссертация на звание доктора геолого-минералогических наук, Москва, 2006.
7. Леонов Е.Г., Исаев В.И. Осложнения и аварии при бурении нефтяных и газовых скважин. Часть 1. Гидроаэромеханика в бурении. — М.: Недра, 2006. 416 с.

УДК 519.246.08

А.О. Гаврилов, А.А. Иванков

Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого

СРАВНЕНИЕ КИНЕТИЧЕСКОЙ И РЕГРЕССИОННОЙ МОДЕЛЕЙ ДЛЯ ПРОГНОЗА ОБМЕННОГО КУРСА

Введение. В эконометрике один из главных критериев качества математической модели – адекватность прогноза, построенного на ее основе. Исследователям приходится иметь дело с различными моделями нестационарных временных рядов (н.в.р.), в основу которых положены различные гипотезы о тех или иных свойствах процесса. Как следствие – возникает задача выбора одного из альтернативных описаний н.в.р. Один из возможных подходов к решению такой задачи – сравнительный анализ прогнозов, построенных с помощью альтернативных математических моделей. Как правило, такие прогнозы строят на достаточно обширном наборе исторических данных. В частности, в данной работе было проведено сравнение результатов прогнозирования в рамках т.н. кинетического [1,2] и регрессионного подходов. Регрессионные модели были выбраны из тех соображений, что именно им отдают предпочтение трейдеры, работающие на валютных рынках. В данной публикации для иллюстрации прогнозов были выбраны обменные курсы ЕСВ за последние 10 лет [3].

Цель работы: Изучения прикладной значимости кинетического подхода, основанного на решении эмпирического уравнения Лиувилля, путем сравнения его результатов с результатами регрессионного анализа (классическая полиномиальная регрессионная модель). Метод прогнозирования в.р. в рамках кинетического подхода основан на использовании кинетических уравнений для моделирования эволюции выборочной (эмпирической) плотности функции распределения (ВПФР). Подробно подход изложен в монографии [1]. Результаты, построенные с помощью нашей собственной программной реализации этого подхода, представлены в [2]. Суть алгоритма построения прогноза сводится к вычислению прогнозных, на момент времени t , оценок разностных моментов u, e, e_3 , на основании известных к моменту времени $t-1$ значений

$$u(x,t) = \frac{\sum \dot{x} f(x, \dot{x}, t)}{f(x,t)}, \quad e(x,t) = \frac{\sum \dot{x}^2 f(x, \dot{x}, t)}{f(x,t)}, \quad e_3(x,t) = \frac{\sum \dot{x}^3 f(x, \dot{x}, t)}{f(x,t)}. \quad (1)$$

Затем строится прогноз самой ВПФР $f(x,t)$ на момент времени $t+1$. Для этого решаем следующую систему:

$$\begin{aligned}
 f : f(x,t+1) &= f(x,t) + f(x,t)u(x,t) - f(x+1,t)u(x+1,t) \\
 u : (u(x,t) - u(x,t-1))f(x,t-1) &= \\
 &= u(x+1,t-1)(u(x+1,t-1)f(x+1,t-1) - u(x,t-1)f(x,t-1)) + \\
 &+ e(x,t)f(x,t-1) - e(x+1,t)f(x+1,t-1) \\
 e : (e(x,t) - e(x,t-1))f(x,t-1) &= \\
 &= e(x,t-1)(u(x+1,t-1)f(x+1,t-1) - u(x,t-1)f(x,t-1)) + \\
 &+ e_3(x,t-1)f(x,t-1) - e_3(x+1,t-1)f(x+1,t-1)
 \end{aligned} \tag{2}$$

Далее на основании прогнозной плотности можно строить оценки, например, среднего значения, как первого момента исследуемого распределения.

Основное предположение, лежащее в основе регрессионного анализа временных рядов, состоит в том, что факторы, влияющие на исследуемый объект в настоящем и прошлом, будут влиять на него и в будущем. Это условие для реальных н.в.р. не выполняется. Поэтому в ходе анализа н.в.р. чаще всего переходят к кусочно-регрессионной модели, когда весь в.р. рассматривают как объединение самостоятельных регрессионных моделей с ограниченными носителями. На границах носителей смежных моделей, в т.н. точках разладки, должно выполняться условие сшивки. В данной работе для описания поведения выборочной функции (или ее первых разностей), на каждом из смежных участков выполнялось построение регрессионной модели в форме полинома не выше четвертой степени. Идентификация точек разладки, границ носителей смежных регрессионных моделей, выполнялась как процедура последовательной проверки гипотезы о принадлежности очередной точки носителю текущей регрессионной модели. В качестве статистик для проверки такой гипотезы использовались как классические статистики Фишера, Стьюдента, так и статистика Эндрю [4]. Прогнозные оценки первого момента строились на основании оценок параметров регрессионной модели, построенной на самом последнем участке в.р.

Результаты. В ходе работы изучались различные участки исходного в.р. и ряда первых разностей. Ниже приведены оценки первого момента для горизонтов прогноза равным 24 и 75 торговым дням в конце 2008 и 2014 года (рис.1-6). Прогноз строился на основании объемов выборки в 75 и 150 значений соответственно.



Рис. 1. Долгосрочный прогноз. 2008 год.



Рис. 2. Долгосрочный прогноз. 2014 год.



Рис. 3. Краткосрочный прогноз. 2008 год.



Рис. 4. Краткосрочный прогноз. 2014 год

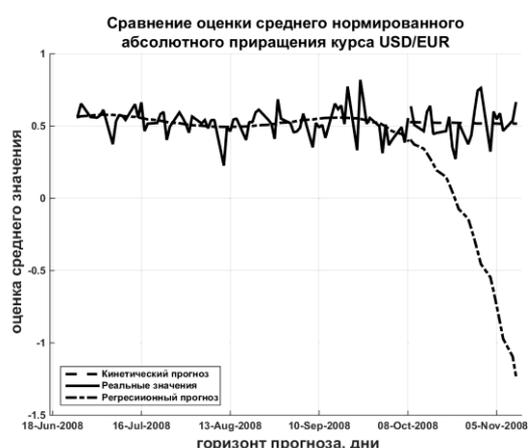


Рис. 5. Прогноз первых разностей. 2008 год.

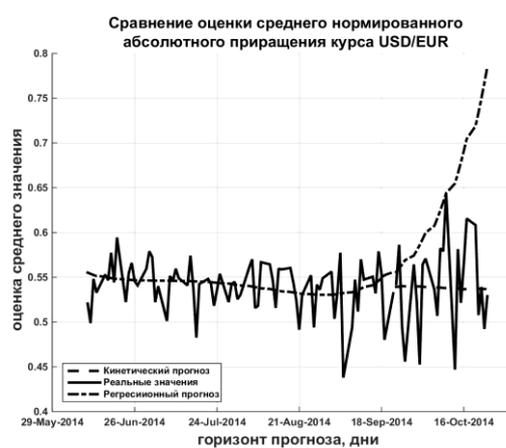


Рис. 6. Прогноз первых разностей. 2014 год.

Вывод. Несмотря на то, что кинетический прогноз дает весьма смещенную оценку для исходного в.р., связанную, в первую очередь, с условием нулевого ускорения $w(x, \dot{x}, t) = 0$, необходимого для замыкания системы (2), качество прогноза на основе оценки, полученной из (2), превосходит качество прогноза регрессионной модели (рис. 2,3,4). Регрессионная модель, в данном случае, корректно описывает процесс по имеющимся данным, т.е. можно предположить, что в случае прогноза стационарного ряда оценки превосходили бы по качеству оценки, полученные в результате кинетического подхода. Однако для ряда первых разностей, где в большей степени наблюдается стационарность, регрессионный подход также показал кардинальное расхождение прогноза и реального значения уже для малых горизонтов прогноза (рис. 5, 6).

ЛИТЕРАТУРА:

1. Орлов Ю.Н., Осминин К.П. Нестационарные временные ряды: методы прогнозирования с примерами анализа финансовых и сырьевых рынков. – М.: Эдиториал УРСС, 2011. – 384 с.
2. Гаврилов А.О., Иванков А.А. Прогноз обменного курса ЦБ РФ как решение эмпирического уравнения Лиувилля – Неделя науки СПбПУ: материалы научной конференции с международным участием. Институт прикладной математики и механики. – Спб.: Изд-во Политехн. ун-та, 2016. – 204с.
3. http://www.ecb.europa.eu/stats/policy_and_exchange_rates/euro_reference_exchange_rates/html/index.en.html
4. Andrews, D.W.K. (1993) Tests for parameter instability and structural change with unknown change point. *Econometrica*, 61, 821–856.

АЛГОРИТМЫ ПОИСКА ПУТИ И РАЗРЕЗА В ГРАФЕ ДЛЯ ПОЛУАВТОМАТИЧЕСКОЙ
СЕГМЕНТАЦИИ МЕДИЦИНСКИХ ИЗОБРАЖЕНИЙ

Сегментация изображений – процесс разбиения множества пикселей исходного изображения на два подмножества: множества пикселей области интереса и множества пикселей вне области интереса. В сфере медицины эта задача часто возникает при анализе изображений компьютерного или магнитно-резонансного томографа, где объектами являются отдельные ткани, опухоли или другие патологии. Решение ее при помощи компьютера существенно улучшает точность и скорость сегментации при диагностике, планировании лечения и проведении хирургических операций. В настоящее время широкое распространение получили методы полуавтоматической сегментации, предполагающие наличие врача, который некоторым образом обозначает точки объекта, затем алгоритм уточняет границы объекта. В данной работе исследуются алгоритмы, основанные на представлении изображения в виде взвешенного графа [1, 2].

Определим взвешенный граф $G = (V, E)$, где V – множество пикселей изображения, E – множество ребер, построенных следующим образом. Пусть $v(x, y)$ – вершина, соответствующая пикселю с координатами x, y . Каждая вершина имеет ребро с вершинами, $v(x + 1, y)$, $v(x, y + 1)$, $v(x - 1, y)$, $v(x, y - 1)$. Обозначим $W_{p,q}$ – вес ребра между вершинами p и q .

При расстановке весов в графе естественным образом можно использовать значения градиента в пикселях изображения. Идея метода в том, чтобы соединить две контрольные точки путем, проходящим по границе области [2]. Для этого веса расставляются таким образом, что путь, проходящий по границе выделяемой области, имеет наименьшую стоимость. Таким образом, задача сводится к поиску кратчайшего пути в графе. Для этого весовая функция задается обратно зависящей от значения градиента, поскольку на границе оно больше, чем в самой области. В ходе исследования была выбрана следующая весовая функция: пусть p, q – два пикселя, I_p – интенсивность пикселя p . Тогда, значение весовой функции вычисляются по формуле.

$$W_{p,q} = \frac{1}{0.1 + \max(\nabla I_p^2, \nabla I_q^2)}$$

Также в процессе работы решались такие задачи, как выбор порядка аппроксимации самого градиента. В итоге применялась формула конечных разностей [3]. Пусть пиксель изображения имеет координаты x, y . Тогда значение градиента вычисляется по формуле:

$$|\nabla I_{x,y}| = (\max(D_{x,y}^{-x}, -D_{x,y}^{+x}, 0)^2 + \max(D_{x,y}^{-y}, -D_{x,y}^{+y}, 0)^2)^{1/2}, \text{ где}$$

$D_{x,y}^{-x} = \frac{I_{x,y} - I_{x-1,y}}{h}$; $D_{x,y}^{+x} = \frac{I_{x+1,y} - I_{x,y}}{h}$; h - шаг сетки равен 1, $D_{x,y}^{-y}$ и $D_{x,y}^{+y}$ определяются аналогично.

К изображению также применялся медианный фильтр для подавления шумов. А для поиска кратчайшего пути применяется алгоритм Дейкстры [4].

Алгоритм, основанный на поиске разреза в графе, принимает на вход множества пикселей объекта и фона, указанные пользователем. Данный метод использует информацию об интенсивности пикселей, и для его работы требуется построение дополнительных ребер в графе следующим образом. Пусть O – множество пикселей объекта, B – множество пикселей фона; выберем $s \in O$ – источник, $t \in B$ – сток. Соединим каждую вершину графа с источником и стоком, вес этих ребер зависит от интенсивности пикселей. Назовем ребра,

соединяющие s и t с вершинами из множеств O и B жесткими ограничениями. В полученном графе будем искать минимальный разрез. Подграф, вершины которого достижимы из источника через ребра, не входящие в разрез является множеством пикселей объекта [1]. Задача поиска разреза в графе алгоритмически разрешима за полиномиальное время, сами алгоритмы в данной работе не рассматриваются. Обозначим p – произвольный пиксель изображения, q – пиксель, соседний к p .

Граничные ребра:

$W_{p,q} = \exp\left(-\frac{(I_p - I_q)^2}{2\sigma^2}\right)$, где σ – разница между интенсивностями пикселей, считающаяся границей.

Жесткие ограничения:

$$W_{b,s} = 0; W_{b,t} = K, b \in B$$

$$W_{o,s} = K; W_{o,t} = 0, o \in O, \text{ где } K > W_{p,q}$$

Ребра с источником и стоком:

$$W_{p,s} = -\ln(\text{Pr}(I_p|O))$$

$$W_{p,t} = -\ln(\text{Pr}(I_p|B))$$

Здесь $\text{Pr}(I_p|O)$ и $\text{Pr}(I_p|B)$ – вероятность принадлежности пикселя p объекту или фону соответственно, основанная на интенсивности пикселя. В качестве функции вероятности использовалась плотность нормального распределения. При использовании данной модели существует риск попадания в сегментированную область всех пикселей, имеющих близкую к интересующему объекту интенсивность. В литературе данная проблема носит название «проблема камуфляжа» [5]. Для ее решения в данном алгоритме используется двухэтапная процедура сегментации. На первом этапе изображение сегментируется только с использованием граничных ребер и жестких ограничений. Полученное таким образом начальное приближение используется для поиска параметров функции вероятности и вычисления штрафных коэффициентов для весов ребер с источником и стоком [6]:

$$W_{p,s} = -\ln(\text{Pr}(I_p|O)) \exp\left(\frac{\text{dist}(p)^2}{2\sigma_d^2}\right)$$

$$W_{p,t} = -\ln(\text{Pr}(I_p|B)) \exp\left(-\frac{\text{dist}(p)^2}{2\sigma_d^2}\right), \text{ где } \sigma_d \text{ – максимальная допустимая удаленность пикселей объекта от границы начального приближения.}$$

В полученном графе производится еще один поиск разреза и его результат возвращается пользователю.

Оба алгоритма были реализованы на языке C++ как независимые модули графического редактора. Алгоритм поиска пути реализован с интерфейсом, предоставляющим возможность выставлять на изображении контрольные точки, которые при помощи данного алгоритма корректируются согласно весам в графе и занимают позиции на границах контрастных объектов. Аналогичный инструмент реализован в графическом редакторе GIMP. Сравнение результатов работы двух инструментов представлено на рис. 1 на примере изображения компьютерного томографа. Перед запуском алгоритма поиска разреза в графе пользователь указывает некоторое количество пикселей, как объекта, так и фона. Аналогичный по интерфейсу инструмент присутствует в GIMP. На рис. 2 представлены результаты их работы на том же примере. В ходе исследования оба представленных в данной работе алгоритма показали лучшие результаты по сравнению с аналогами в GIMP. Инструмент «отделение фона» удобен и прост в применении, так как не требует точного задания исходных данных для работы алгоритма, однако он не всегда позволяет достичь правильного результата в случае нечетких границ. В таких ситуациях инструмент «умные ножницы» позволяет сегментировать объект точнее, но требует больше точек на границе.

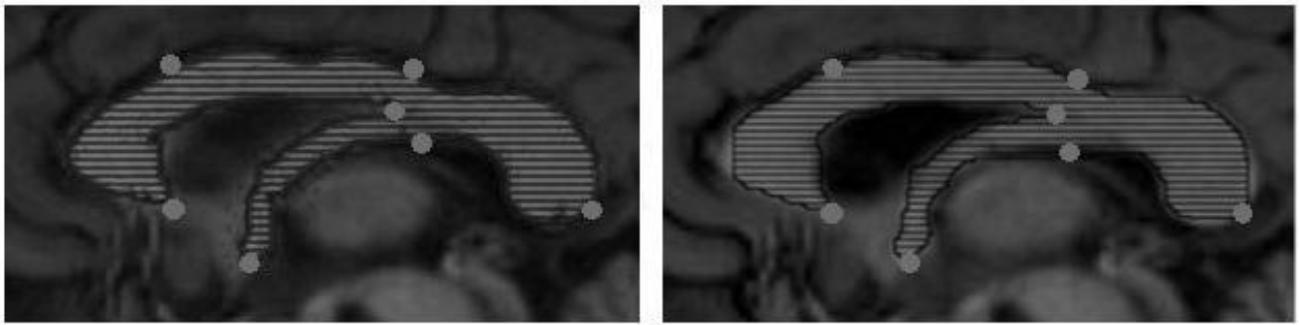


Рис. 1. Результат сегментации: слева – алгоритм поиска пути, описанного в данной статье, справа – инструмент «Умные ножницы» в GIMP. Точки на изображении – выбор пикселей границы пользователем

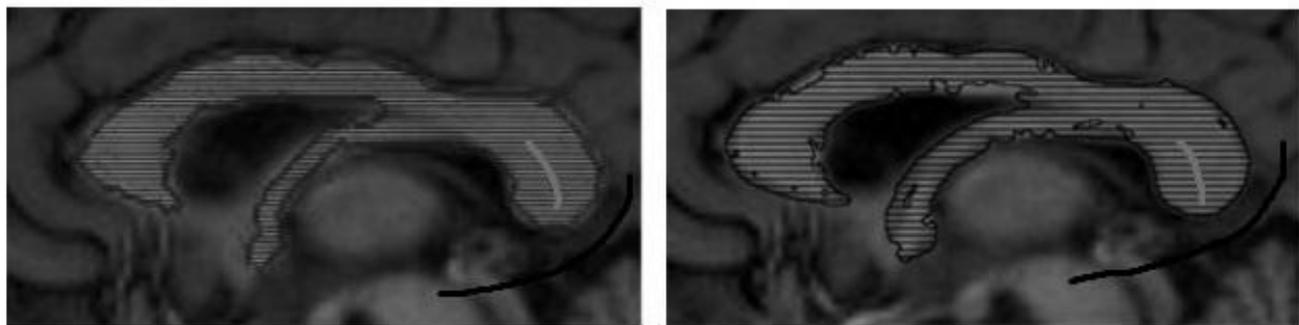


Рис. 2. Результат сегментации: слева – алгоритм поиска разреза, справа – инструмент «Отделение фона» в GIMP. Светлые линии на объекте – пиксели, обозначенные пользователем как объект, черные – фон

ЛИТЕРАТУРА:

1. Boykov Yuri, Funka-Lea Gareth. Graph Cuts and Efficient N-D Image Segmentation [Журнал]. - [б.м.] : Springer Science & Business Media, 2006 г.
2. Detlev Stalling, Hans-Christian Hege. Intelligent Scissors for medical image segmentation [Журнал]. - Berlin : Proceedings of 4th Freiburger Workshop Digitale Bildverarbeitung , 1996 г.
3. Aubert Gilles, Kornprobst Pierre. Mathematical problems in image processing: partial differential equations and the calculus of variations [Книга]. - [б.м.] : Springer Science & Business Media, 1996.
4. Cormen Thomas. Introduction to algorithms [Книга]. - 1989.
5. Blake Andrew, Rother Carsten, Hilaire Torr Phillip. Interactive Image Segmentation Using an Adaptive GMMRF Model [Конференция]. - 2004.
6. Bieth Marie. Medical image segmentation using Graph Cut techniques [Отчет]. - [б.м.] : Ecole Polytechnique, 2008.

УДК 044.932.72

М.К. Вердина, А.В. Константинов, М.В. Позигун, В.С. Чуканов
Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого

АЛГОРИТМЫ ФИКСАЦИИ УРОВНЯ И БЫСТРОГО РАСПРОСТРАНЕНИЯ КОНТУРА ДЛЯ ПОЛУАВТОМАТИЧЕСКОЙ СЕГМЕНТАЦИИ МЕДИЦИНСКИХ ИЗОБРАЖЕНИЙ

Важным этапом анализа медицинских изображений, полученных в результате компьютерной или магнитно-резонансной томографии (МРТ), является сегментация

областей интереса на изображениях. Сегментация изображений – процесс разбиения множества пикселей исходного изображения на два подмножества: множества пикселей области интереса и множества пикселей вне области интереса. Для того, чтобы медицинским специалистам не приходилось вручную выполнять сегментацию, разрабатываются инструменты автоматической и полуавтоматической сегментации. В данной статье рассматриваются модификации двух алгоритмов полуавтоматической сегментации. Преимуществами такого типа средств сегментации являются возможности проверки и корректировки промежуточных результатов, подбора входных параметров в зависимости от предыдущих результатов.

Одним из инструментов полуавтоматической сегментации является «Умная кисть» – интерактивное средство сегментации, требующее задания пользователем таких параметров, как центр и радиус. «Умная кисть» позволяет выделить те пиксели, которые содержатся в круге с заданными центром и радиусом и находятся внутри некоторой области интереса.

Алгоритм фиксации уровня (далее – ФУ, англ. “Level Set Method”) и алгоритм быстрого распространения контура (далее – БРК, англ. “Fast Marching Method”), предложенные Д. Сетианом и описанные в книге [1], лежат в основе двух различных реализаций «Умной кисти». В статье [2] он описал применение этих алгоритмов к задаче сегментации медицинских изображений.

Алгоритм ФУ позволяет определить изменение области с течением времени под действием внешних сил. Представим контур, ограничивающий искомую область, как нулевой уровень функции трёх переменных: двух пространственных и одной временной.

$$\phi(x, y, t) = 0 \quad (1)$$

Пусть в искомой области функция будет принимать только положительные значения, за пределами области – отрицательные, а на границе – нуль. После дифференцирования уравнения (1), согласно [1], уравнение эволюции контура примет вид:

$$\phi_t + F|\nabla\phi| = 0 \quad (2)$$

где функция F определяет скорость роста в точке (x, y) в момент времени t и принимает вид линейной комбинации плотностной функции и кривизны:

$$F = -(\alpha D + (1 - \alpha)\nabla \cdot \nabla\phi / |\nabla\phi|)$$

Выбор плотностной функции связывает метод эволюции контуров с сегментацией изображений. На плотностную функцию накладываются следующие требования: в области интереса функция должна быть больше, чем вне области интереса. Существует несколько способов определения функции D , согласно [1] и [3]:

$$D(I) = \epsilon - |I - T| \quad (3)$$

$$D(I) = 1/(1 + \lambda|\nabla I|), \quad (4)$$

где I – интенсивность изображения в точке (x, y) .

Плотностная функция (3) принимает положительные значения, когда $I \in [T - \epsilon, T + \epsilon]$, и отрицательные в ином случае. Таким образом, параметры T и ϵ можно трактовать, как наиболее подходящую интенсивность и ширину окна допустимых значений интенсивности, соответственно. Плотностная функция (4) учитывает границы исходного изображения, что аналогично предварительному использованию фильтра выделения границ. Однако, большая вычислительная сложность функции (4) делает ее менее предпочтительной, чем (3). Можно заметить, что функция D не зависит от временной переменной, что позволяет построить матрицу значений функции на некоторой сетке заранее. Для решения неявного уравнения (2) применяется дискретизация. Сетка совпадает с сеткой пикселей исходного изображения. Поиск решения осуществляется итерационно и останавливается, когда изменения контура становятся меньше определённого порога точности. Начальное приближение функции ϕ должно быть построено так, чтобы соответствовать требованиям, определяющим область, то есть: функция должна принимать положительные значения внутри исходной области и

отрицательные снаружи. Существует подход к созданию требуемой матрицы с помощью построения знаковой функции расстояний, определяющей расстояние от точки до границы со знаком (положительным внутри области и отрицательным вне ее), однако этот процесс требует значительного времени. Поэтому было предложено использовать альтернативный подход: заполнить исходную область значениями +1, а все остальные ячейки – значениями –1. На границе области в начальный момент времени функция не будет близка к нулю, что делает приближение достаточно грубым, однако после нескольких итераций функция сглаживается у границ. На изменение искомого контура влияют только точки, близкие к границам области на текущей итерации (далее – БкГ-точки). Поэтому имеет смысл вычислять новые значения функции ϕ только в них. Если при решении дифференциального уравнения (2) используется векторизация, то вычисление только в БкГ-точках становится проблематичным. Поэтому было предложено определять прямоугольные области БкГ-точек.

При применении алгоритма ФУ для инструмента «Умная кисть», в качестве начального приближения выбирается окружность радиуса, меньшего радиуса кисти, а за параметр T в функции (3) принимается медианное значение интенсивностей в точках начального приближения.

В алгоритме БРК рассматривается замкнутый контур Γ на сетке, расширяющийся, распространяющийся со скоростью $F > 0$. Положение контура можно охарактеризовать, используя время прибытия $T(x, y)$ контура в точку (x, y) . Тогда $T(x, y)$ – решение следующего уравнения:

$$|\nabla T|F = 1, T = 0 \text{ на } \Gamma \quad (5)$$

Алгоритм БРК позволяет найти значения функции T в точках сетки. Входом алгоритма является начальное множество точек контура. Алгоритм совершает обход точек сетки. За каждый шаг контур распространяется на одну точку. На каждом шаге, множество точек плоскости представляет собой объединение трёх непересекающихся подмножеств: множества помеченных точек (англ. “Active”); множества точек, соседних к точкам контура (англ. “Trial”); множества точек, до которых контур ещё не распространился (англ. “Far”).

Алгоритм 1. Алгоритм БРК

- 1: Поместить в Trial начальное множество точек, для них $T = 0$
- 2: Поместить в Far все точки, которых нет в Trial, для них $T = +\infty$
- 3: **Цикл:** пока множество Trial не пусто:
- 4: Пусть p – элемент Trial с минимальным весом T
- 5: Положить p в Active, убрать из Trial
- 6: Пересчитать значения T для соседних к p точек
- 7: Поместить в Trial 4 соседних к p точки

Пересчёт значения $T_{i,j}$ для каждой точки (i, j) выполняется путём решения квадратного уравнения, с использованием значений $T_{i+1,j}, T_{i-1,j}, T_{i,j+1}, T_{i,j-1}$:

$$\max(D_{ij}^{-x}T, -D_{ij}^{+x}T, 0)^2 + \max(D_{ij}^{-y}T, -D_{ij}^{+y}T, 0)^2 = \frac{1}{F_{ij}}, \quad (6)$$

$$\text{где } D_{ij}^{\pm x}T = \frac{T_{i\pm 1,j} - T_{i,j}}{\pm 1}, D_{ij}^{\pm y}T = \frac{T_{i,j\pm 1} - T_{i,j}}{\pm 1} \quad (7)$$

Для поставленной задачи множество точек на плоскости – множество пикселей изображения, в каждом из которых определена функция интенсивности I . Согласно [2], функция F может быть определена следующим образом:

$$F(x, y) = \exp(-(\max(D_{ij}^{-x}I, -D_{ij}^{+x}I, 0)^2 + \max(D_{ij}^{-y}I, -D_{ij}^{+y}I, 0)^2)) \quad (8)$$

Для данной задачи исходное множество точек контура включает только центр. Чтобы в выходном множестве были только точки внутри круглой области с центром в заданной позиции, был предложен дополнительный критерий остановки цикла алгоритма 1: если

расстояние от точки с минимальным весом до начальной позиции не меньше, чем заданный радиус, то цикл прерывается. Чтобы точки внутри круга имели наибольший приоритет и контур распространялся вдоль окружностей внутри области интереса, веса вычислялись для каждой точки (x, y) как

$$d(x, y) * (1 + T_{x,y}), \text{ где } d(x, y) = 1 + \max(0, \|(x, y) - p\|_2 - d_{\max}); \quad (9)$$

p – начальная точка, d_{\max} – текущий радиус

Кроме того, для улучшения качества сегментации было предложено использовать фильтрацию области изображения, включающей заданный круг, в качестве предобработки. Для этого был выбран фильтр анизотропной диффузии [4], позволяющий сгладить изображение, сохранив границы областей.

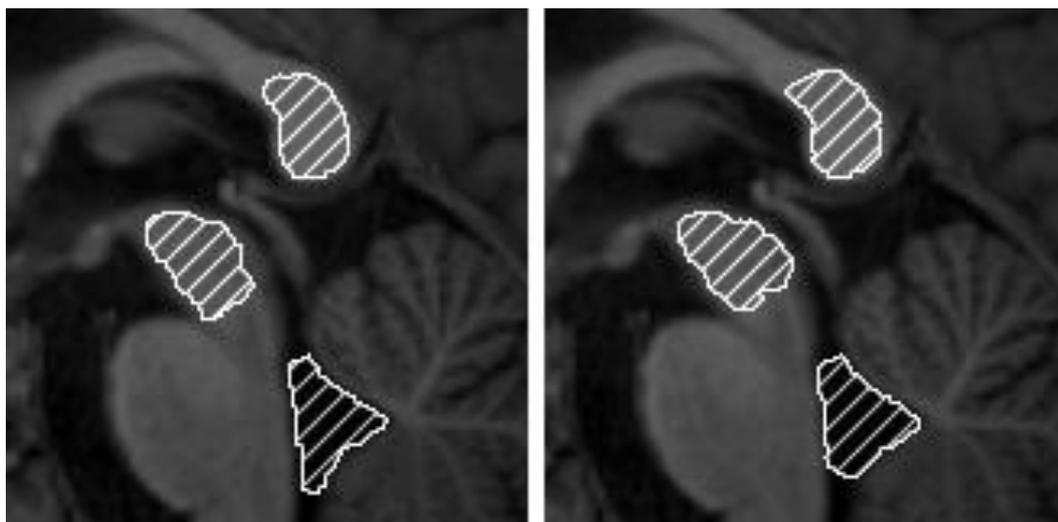


Рис. 1. Результаты сегментации областей МРТ-изображения мозга

Таким образом, нами разработаны следующие модификации алгоритмов сегментации. Для реализации инструмента «Умная кисть» с использованием описанных алгоритмов были предложены: для ФУ - новый подход к выбору начального приближения и параметров плотностной функции, инициализации функции ϕ , а также применение прямоугольных областей БкГ-точек. Для БРК предложены дополнительный критерий остановки и использование фильтра в качестве предобработки. Алгоритмы были реализованы на языке C++. Оба алгоритма показали достаточный уровень точности сегментации на МРТ-изображениях. Примеры работы алгоритмов показан на рис. 1; слева – сегментация с ФУ, справа – с БРК. Видно, что алгоритм ФУ позволяет получить более плавные границы за счет учета кривизны, однако он имеет существенно большее время работы.

ЛИТЕРАТУРА:

1. Sethian J. A. Level set methods and fast marching methods: evolving interfaces in computational geometry, fluid mechanics, computer vision, and materials science [Журнал]. - [б.м.]: Cambridge university press, 1999 г.. - Т. 3.
2. R. Malladi и A. Sethian J. Computer Vision [Конференция] // A real-time algorithm for medical shape recovery. - [б.м.]: IEEE, 1998. - стр. 304-310.
3. Parascandolo P. [и др.] Image and Signal Processing and Analysis (ISPA) [Конференция] // Smart brush: a real time segmentation tool for 3D medical images. - [б.м.]: IEEE, 2013. - стр. 689-694.
4. P. Perona и J. Malik Scale-space and edge detection using anisotropic diffusion [Журнал] // IEEE Transactions on pattern analysis and machine intelligence. - 1990 г.. - 7 : Т. 12. - стр. 629-639.

МОДЕЛИРОВАНИЕ ДИНАМИКИ БУРИЛЬНОЙ КОЛОННЫ В СОСТАВЕ ПОДВОДНОГО БУРОВОГО КОМПЛЕКСА

Задача, рассматриваемая в данной работе, обусловлена современными потребностями нефтедобывающей промышленности. Выработанность существующей ресурсной базы в совокупности с неубывающим спросом и высокой конкуренцией на рынке приводит к необходимости разработки новых и усовершенствования существующих методов нефтедобычи. Сегодня одним из быстро развивающихся направлений программы освоения полезных ископаемых является разработка автономных комплексов для подводного бурения. Такие комплексы не связаны с буровой платформой или наземными установками, независимы от окружающих погодных условий и позволят добывать полезные ископаемые на ранее недоступных глубинах, под толщей льда.

Построенная модель подводного бурового комплекса объединяет различные модули, каждый из которых отвечает за отдельный физический процесс. С помощью системы управления модули обмениваются данными в ходе решения; таким образом, достигается моделирование мультифизического процесса. Одним из таких модулей является модуль бурильной колонны, позволяющий вычислять перемещения колонны внутри скважины, а также рассчитывать мощностные характеристики системы.

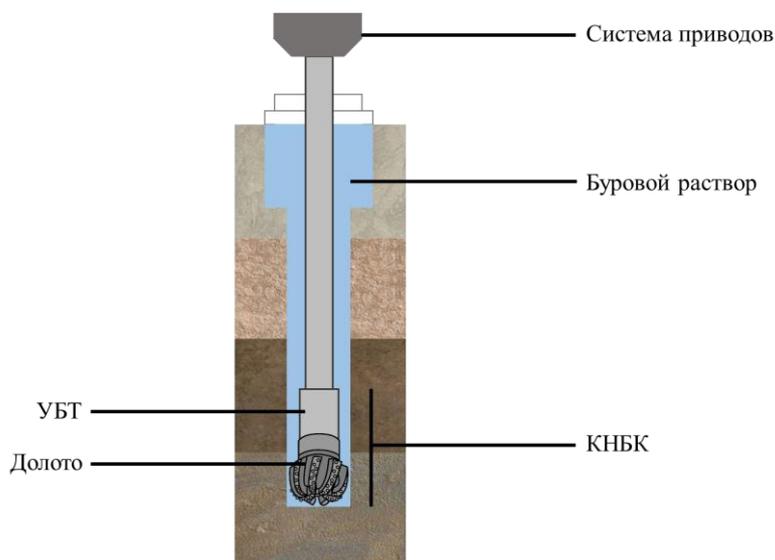


Рис. 1. Схема бурильной колонны

Схема бурильной колонны приведена на рис. 1. Бурильная колонна (БК) состоит из набора бурильных труб, в которых нижняя группа элементов, состоящая из утяжеленных бурильных труб с присоединенными стабилизирующими, измерительными и другими вспомогательными устройствами, а также долотом, называется КНБК (компоновка низа бурильной колонны). Общая длина бурильной колонны достигает нескольких километров, при этом длина КНБК может составлять до 300 метров. Верхний конец БК крепится к системе приводов. При роторном бурении вся бурильная колонна поворачивается в скважине, передавая вращение от двигателя на поверхности земли к долоту, разрушающему породу. Обычно наблюдающаяся при этом неравномерность вращения ведет к вибрациям,

которые могут уменьшать скорость проходки и сопровождаются опасностью потерять скважину из-за поломки оборудования [1].

В качестве теоретической основы для построения модели БК используется теория стержней, которая позволяет составить систему дифференциальных уравнений для описания колебаний колонны. В уравнения поперечных колебаний введены слагаемые, описывающие влияние протекания бурового раствора внутри БК [2], а также слагаемые, моделирующие контактное взаимодействие колонны со скважиной. Рассмотрение контакта колонны со стенками скважины является особенно важным при расчете поведения БК, помещенной в изогнутую скважину. Контактное взаимодействие реализуется с помощью нелинейного вязкоупругого элемента, соединяющего бурильную колонну и стенку скважины [3]. Наличие бурового раствора в кольцевом пространстве учитывается как вязкое трение системы. Динамика бурильной колонны моделируется с помощью конечно-элементного кода собственной разработки, реализованного в пакете MatLab. Для численного решения задачи используется метод конечных элементов. В качестве основного элемента выбран стержневой конечный элемент с базисными функциями третьего порядка – кубическими полиномами Эрмита. Для решения системы уравнений, полученной при переходе к МКЭ, используется метод Ньюмарк- β [4].

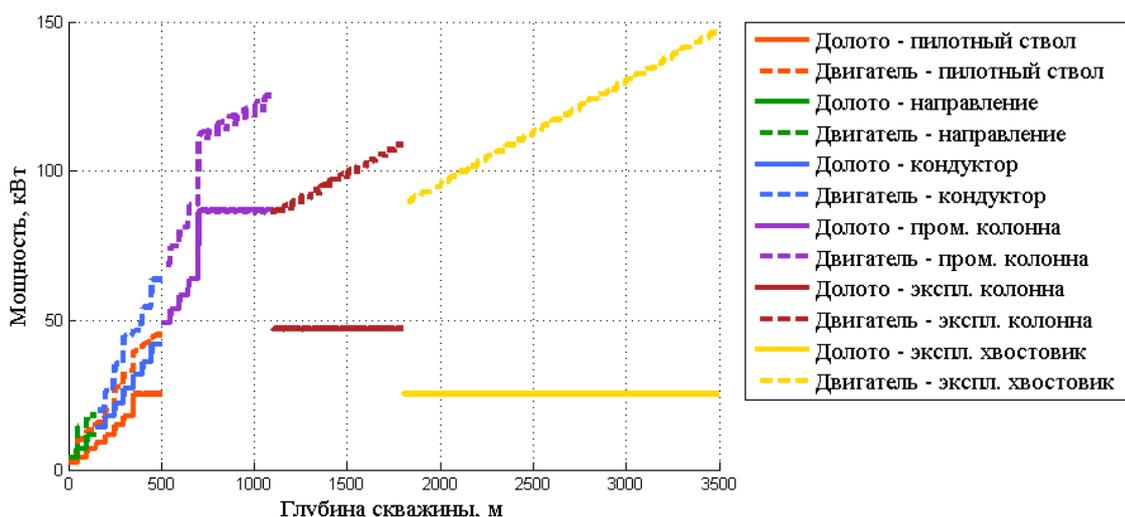


Рис. 2. Изменение мощности по интервалам бурения

При выполнении расчетов модули комплекса обмениваются данными; с учетом предоставленных модулем бурового раствора данных (например, распределения скоростей раствора), модуль БК рассчитывает и передает текущую скорость проходки и мощность модулям теплообмена и взаимодействия долота с грунтом. На рис. 2 приведен график изменения мощности двигателя и мощности на долоте в процессе бурения. Следует отметить, что для разных интервалов бурения согласно технологическим руководствам используются долота разных типов [5]. Из графика видно, что при увеличении глубины в рамках интервала для сохранения постоянной мощности на долоте требуется увеличивать мощность двигателя. Предельная мощность двигателя, заявленная в документации, составляет 300 кВт и при данной конфигурации системы не достигается.

Также модуль БК рассчитывает ряд параметров, которые являются конечными данными (т.е. не используются в других модулях системы) и позволяют судить о состоянии системы. К таким параметрам относятся, например, перемещения колонны (рис. 3). При допущениях, использованных для расчета натяжения, была выявлена линейная зависимость силы натяжения от первой производной по координате от продольного перемещения. Это

означает, что абсцисса экстремума функции перемещения должна совпадать с абсциссой корня функции натяжения, что наблюдается на приведенном графике. При проверке возникающих в БК напряжений используются два критерия: критерий для нормальной силы и критерий для максимального скручивающего момента, зависящие от свойств материала и геометрических свойств БК; для вычисления критерия для нормальной силы используется полученное при расчетах значение натяжения.

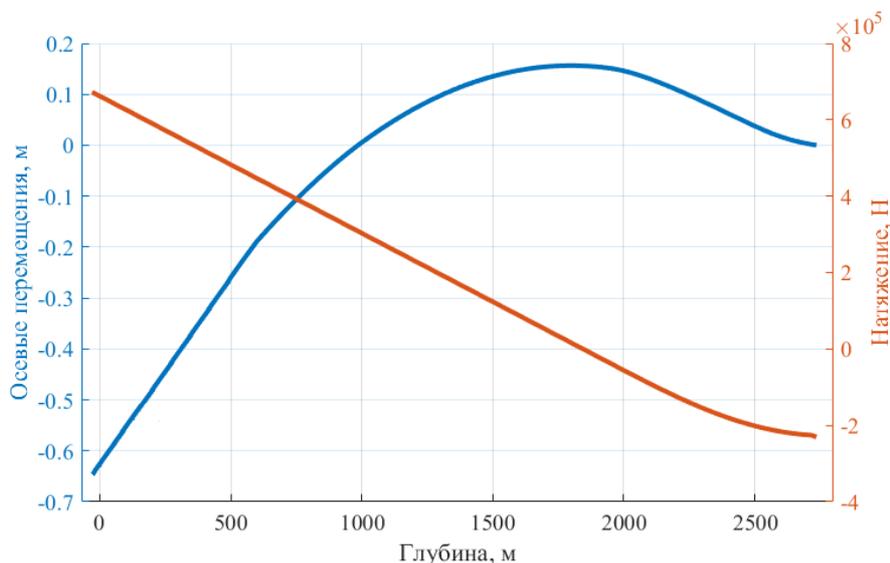


Рис. 3. Осевые перемещения БК. Натяжение

Таким образом, с помощью собственного кода в программном пакете MatLab реализован модуль бурильной колонны, входящий в состав модели подводного бурильного комплекса. Результаты, полученные в ходе расчетов, согласуются как с теоретическими фактами, так и с практическими зависимостями.

ЛИТЕРАТУРА:

1. Абатуров В.Г. Бурение в сложных геологических условиях. Часть 1. Аварии, их предупреждение и ликвидация: курс лекций. Тюмень: ТюмГНГУ. 1995. 60 с.
2. Gulyaev V.I. Quasistatic critical states of strings for deep drilling / V.I. Gulyaev, V.V. Gaidaichuk, I. L. Solov'ev, I.V. Gorbunovich // Strength of Materials. 2006. Vol. 38, No. 5. P. 527-534.
3. Fazaelizadeh, M. Application of new 3-D analytical model for directional wellbore friction / M. Fazaelizadeh, G. Hareland, B.S. Aadnoy // Modern Applied Science. 2010. Vol. 4, No. 2. P. 2-22.
4. Юдаков, А.А. Численные методы интегрирования уравнений движения многокомпонентных механических систем, основанные на методах прямого интегрирования уравнений динамики метода конечных элементов / А.А. Юдаков, В.В. Бойков // Вестн. Удмуртск. ун-та. Матем. Мех. Компьют. Науки. 2013. Вып. 1. С. 131- 144.
5. ГОСТ 26474-85 «Долота и головки бурильные алмазные и оснащенные сверхтвёрдыми композиционными материалами. Типы и основные размеры»

ОПТИМИЗАЦИЯ АЛГОРИТМА ВЫЧИСЛЕНИЯ ФУНКЦИИ ПРАВДОПОДОБИЯ В
ЗАДАЧЕ ОЦЕНИВАНИЯ ПАРАМЕТРОВ АДДИТИВНОЙ МОДЕЛИ ПРОЦЕССА ЛЕВИ

В данной работе предложена одна из реализаций алгоритма, понижающего вычислительную сложность по времени, процедуры оценивания МП-параметров стохастической аддитивной модели процесса Леви.

Слагаемые в рассматриваемой нами аддитивной модели принадлежат к классу случайных процессов Леви. Это достаточно представительное множество, которому принадлежат и такие классические стохастические модели, как винеровский и пуассоновский случайные процессы.

Аддитивная модель в нашем исследовании имела следующий вид:

$$Z(t) = X(t) + Y(t) \quad (1)$$

Первое слагаемое модели $X(t)$ определяет средний уровень ординаты наблюдаемого случайного процесса. Это стационарный в узком смысле процесс, ординаты которого распределены по нормальному закону с коэффициентом положения μ и коэффициентом масштаба σ .

$$f_x(x; t) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(\frac{-(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right) \quad (2)$$

Вклад выбросов в ординаты наблюдаемого процесса определяется вторым слагаемым модели $Y(t)$ – суммой процессов Леви со скачками и возвратом к начальному состоянию.

$$Y(t) = \sum_{i=1}^d P(i; a; k) I(t \geq t_i) e^{-\lambda(t-t_i)}, \quad (3)$$

где a – коэффициент масштаба распределения Парето, k – коэффициент формы распределения Парето $f_p(y) = \begin{cases} ka^k y^{-(k+1)}, & x \geq a, k > 0 \\ 0, & x < a \end{cases}$. Индекс скачка – i , d – случайное

количество скачков на промежутке времени $[0, t]$. Индикаторная функция $I(t \geq t_i)$ обеспечивает вклад на текущем шаге всех скачков, имевших место прежде.

Амплитуда выброса определяется случайной величиной по закону распределения Парето. Вероятность возникновения выброса p характеризуется пуассоновской случайной величиной. В настоящей работе пуассоновский поток событий рассматривается в его буквальном смысле, как поток достаточно редких событий, т.е. в каждой ординате $Z(t)$ (из (1)) учитывается вклад не более трех предшествующих выбросов.

Такая аддитивная модель случайного процесса может быть использована для построения моделей физических, биологических, экономических [1], [2] процессов различной природы.

Интервальные оценки, определяющие границы компакта параметров распределения полагаются построенными. В качестве начальных данных алгоритма оценивания параметров задается реализация выборочной функции и границы компактного множества в пространстве параметров модели (евклидово пространство соответствующей размерности).

Отправной точкой настоящего исследования послужила реализация алгоритма оценивания параметров рассматриваемой модели [3], выполненная выпускником ИПММ, магистром К.С. Кузнецовым под руководством А.А. Иванкова. В ней решение задачи

оценивания параметров $\bar{\theta} = (\mu, \sigma, k, a, \lambda, p)$ осуществляется методом максимального правдоподобия. Ищется максимум логарифмической функции правдоподобия $\ln L(\varepsilon(\omega) | \bar{\theta}) = \sum_{i=1}^K \ln f_Z(Z(t_i) | \bar{\theta})$. Где $\varepsilon(\omega) = (Z(t_1), Z(t_2), \dots, Z(t_K))$ – выборочная функция объема K , ω – элементарное событие, $\bar{\theta}$ – вектор оцениваемых параметров $Z(t)$, f_Z – плотность распределения $Z(t)$.

Максимизация реализована комбинированным методом: случайный поиск с последующим уточнением точки оптимума квазиньютоновским методом Дэвидона-Флетчера-Пауэла.

Предсказуемые недостатки МП-оценок параметров аддитивной модели – они будут только асимптотически несмещенными. При ограниченном размере реализации выборочной функции не удастся получить несмещенные МП-оценки. Для получения несмещенных оценок имеет смысл использовать, например, методы из семейства Монте-Карло. SMC/PF-алгоритмы оценивания параметров стохастической модели (1) были реализованы под руководством А.А. Иванкова уже целым рядом выпускников кафедры "Прикладная математика".

Отметим, что оценки параметров, которые позволяет построить метод фильтра частиц, тоже не лишены недостатков. Основной состоит в том, что получаемые по этому методу оценки могут обладать большой дисперсией, то есть быть неэффективными.

Таким образом, представляет интерес получение оценок модели (1) несколькими методами. Тогда их сравнение позволит построить более обоснованные выводы относительно природы тех системы, для моделирования которых и была построена аддитивная модель вида (1).

В настоящей работе была поставлена задача снижения затрат по времени на вычисления в существующей реализации алгоритма получения МП-оценок методом максимального правдоподобия.

Недостаток существующей реализации – большая вычислительная сложность, большие затраты по времени. Основная причина – необходимость многократного вычисления интегралов методом из семейства методов Монте-Карло. Такие интегралы входят в выражение для свертки плотностей распределений после трех скачков:

$$(f_x * f_Y(\Delta t_3) * f_Y(\Delta t_2) * f_Y(\Delta t_1))(x) = \int_a^{+\infty} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp \frac{-\left(x - m - \sum_{i=1}^3 y_i \exp(-\lambda\Delta t_i)\right)^2}{2\sigma^2} \prod_{i=1}^3 \frac{ka^k}{y_i^{k+1}} dy_3, \quad ,$$

где Δt_i – количество единиц времени, прошедшего с i -го скачка.

Были предложены изменения в архитектуре существующей программной реализации алгоритма оценивания параметров.

В существующей реализации многократно вычисляется логарифмическая функция правдоподобия и её производная при разных значениях параметров свертки распределений. Возможно оптимизировать первоначальную реализацию алгоритма получения МП-оценок путем кэширования вычисленных значений логарифмической функции правдоподобия.

Для оптимизации комбинированного алгоритма получения точечной МП-оценки была разработана и внедрена в существующую реализацию библиотека, которая обеспечивает вычисление функции правдоподобия и её логарифма с кэшированием результатов вычислений. Кэширование осуществляется в базу данных средствами СУБД MySQL. Вычисление производной логарифмической функции правдоподобия было заменено аппроксимацией с использованием закэшированных значений.

Написанный код протестирован на модельных и реальных данных.

Получены оценки среднего амортизированного времени работы кода прежней и новой программных реализаций алгоритма получения МП-оценок параметров модели (1). На рис. 1 представлена разница по среднему амортизированному времени выполнения работы кода наиболее трудоёмких функций программы между исходной реализацией программы и реализацией с кэшированием.

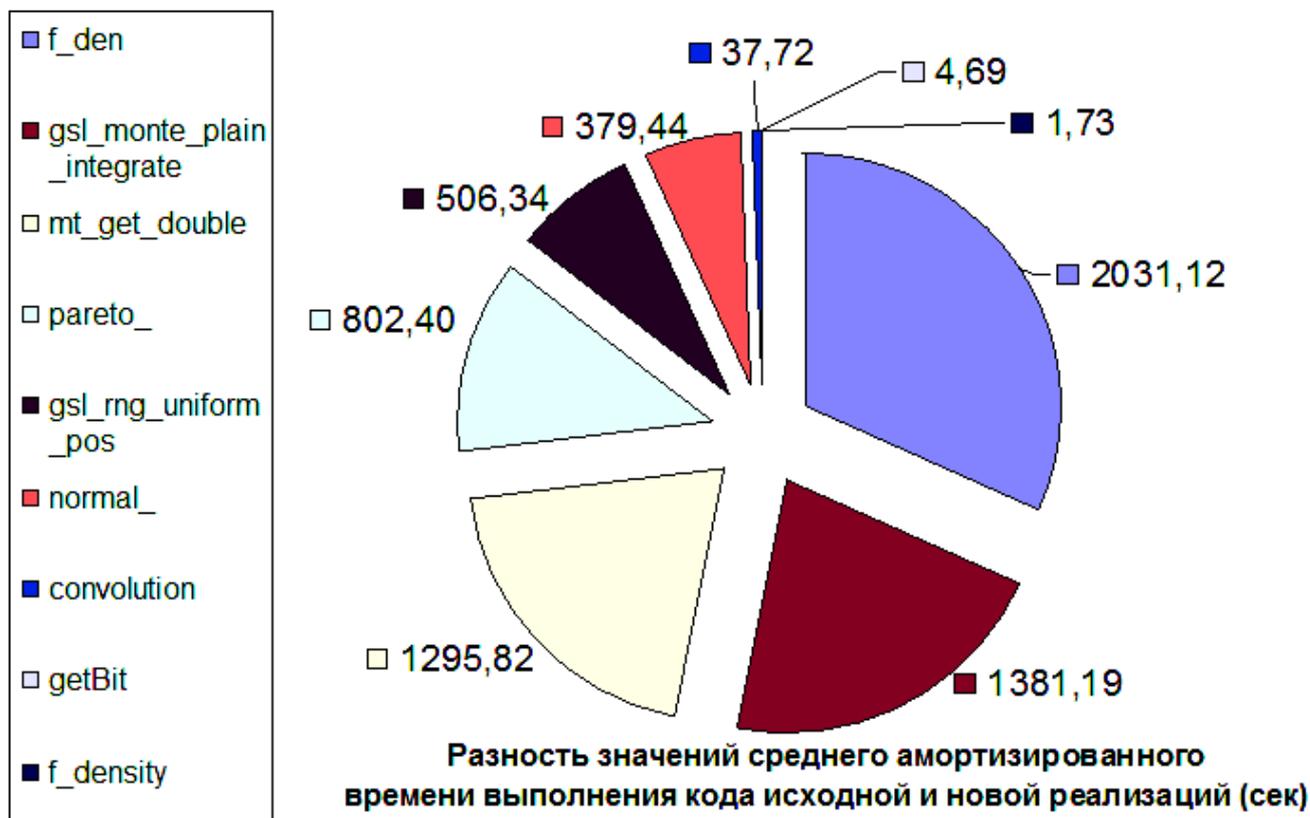


Рис. 1. Разница по среднему амортизированному времени выполнения работы кода между исходной реализацией программы и реализацией с кэшированием

Результаты тестирования демонстрируют значимое снижение временных затрат на вычисления в реализации алгоритма с кэшированием.

Вся разработка велась при помощи свободного программного обеспечения с открытым исходным кодом. На данный момент неизвестны программные реализации решения подобных задач с открытым исходным кодом.

Разработанная архитектура является универсальной. Она может послужить основой для построения процедуры оценивания параметров других стохастических моделей случайных процессов различной природы.

ЛИТЕРАТУРА:

1. Cont R., Tankov P. Financial modelling with jump processes. Chapman & Hall/CRC Financial Mathematics Series, 2004.
2. Ait-Sahalia Y. Nonparametric functional estimation with applications to financial models. PhD dissertation. Massachusetts Institute of Technology, Dept. of Economics, 1993.
3. Кузнецов К. С. Сравнительный анализ двух моделей спотовой цены: модели в форме суммы процессов Леви и модели с переключением режимов: дис. ... магистра мат. наук. СПб: СПбПУ, 2015.

ДВУХПРОХОДНЫЙ АЛГОРИТМ ВИЗУАЛИЗАЦИИ ИЗОПОВЕРХНОСТИ МЕТОДОМ
ТРАССИРОВКИ ЛУЧА ДЛЯ ОБЪЕМНЫХ ДАННЫХ В РЕАЛЬНОМ ВРЕМЕНИ

Актуальность. Визуализация объемных медицинских данных в реальном времени является нетривиальной вычислительной задачей, для низко производительных мобильных устройств и устройств виртуальной реальности, таких, как HTC Vive, по причине необходимости визуализировать каждый кадр дважды (для каждого глаза). Предлагаемый в данной работе алгоритм описывает подход позволяющий визуализировать в реальном времени объемные медицинские данные, без потери качества, не требуя больших вычислительных ресурсов. Основная идея метода заключается в двухпроходной схеме алгоритма, где на первом шаге рассчитываются данные необходимые для детальной трассировки всей сцены. Поскольку алгоритм не требует предобработки и оба прохода выполняются на каждом кадре визуализации, то алгоритм позволяет динамически менять уровень отображаемых изоповерхностей, что является одним из основных преимуществ предлагаемого подхода.

Существующие подходы. Рассматривая устройства VR, такие, как HTC Vive, Oculus Rift и другие, для визуализации объемных медицинских данных КТ и МРТ стоит отметить, что вопрос производительности крайне важен, так как на каждом кадре визуализации необходимо отрисовывать сцену дважды для получения бинокулярного смещения, необходимого для создания объемного эффекта. Это часто является причиной невозможности использовать те, или иные алгоритмы визуализации для подобных устройств. В статье [1] был реализован плагин для MeVisLab, позволяющий визуализировать КТ и МРТ данные в HTC Vive при помощи встроенных средств визуализации MeVisLab, однако в схеме подхода, представленном в упомянутой работе присутствует шаг построения изоповерхности, который занимает время, несопоставимое с рендерингом в реальном времени, что является следствием невозможности изменять уровень изоповерхности в процессе визуализации.

Глобально существует два подхода к визуализации изоповерхностей объемных медицинских данных: первый метод подразумевает триангуляцию объемных данных на этапе предобработки, а затем использование геометрического рендеринга. На этапе предобработки для такого рода алгоритмов могут использоваться, например Marching Cubes [2]. Более подробный анализ и сравнение алгоритмов можно найти в [3]. Стоит отметить, что основное преимущество данного подхода заключается в возможности быстрой визуализации полигональной сетки, а недостаток - этап предобработки, занимающий значимое время. Второй подход – прямая объемная визуализация изоповерхности. Первая реализация этого подхода на GPU описана в [4]. Данный подход основывается на построении кубоидной оболочки исходных объемных данных, для определения позиций начала и конца прохода лучей трассировки. Для того, чтобы увеличить скорость работы алгоритма визуализации многие авторы используют препроцессинг для того, чтобы избавиться от лучей, которые никогда не пересекут изоповерхность.

Предлагаемый в данной статье подход позволяет решить целый ряд проблем, таких, как отказ от препроцессинга, увеличение скорости визуализации в сравнении существующими методами, одновременная визуализация нескольких изоповерхностей разного уровня с разными коэффициентами прозрачности, динамическое изменение уровня визуализируемых изоповерхностей.

Предлагаемый подход. На первом проходе рендеринг выполняется в текстуру T, которая имеет разрешение в s раз меньше, чем разрешение экрана по каждой из сторон. В текстуре сохраняются

цвета текстелей и расстояния r от камеры до изоповерхности. Пиксели экрана располагаются между текстелями, как показано на рис. 1 для случая $s = 2,33$.

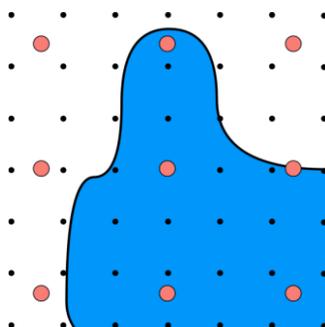


Рис. 1. Красный – текстели, черный – воксели, синий – объект. $s = 2,33$

На втором проходе вычисляются цвета пикселей. Если цвета соседних 4-х текстелей близки по значению цвета, то цвета пикселей расположенных между ними могут быть получены путем линейной интерполяции упомянутых текстелей. В противном случае используются сохраненные в текстелях значения r с целью ускорения поиска пресечения с изоповерхностью, для проходящих через эти пиксели лучей. На рис. 2 рассмотрены различные варианты расстояния от соседних текстелей до изоповерхности заданного уровня

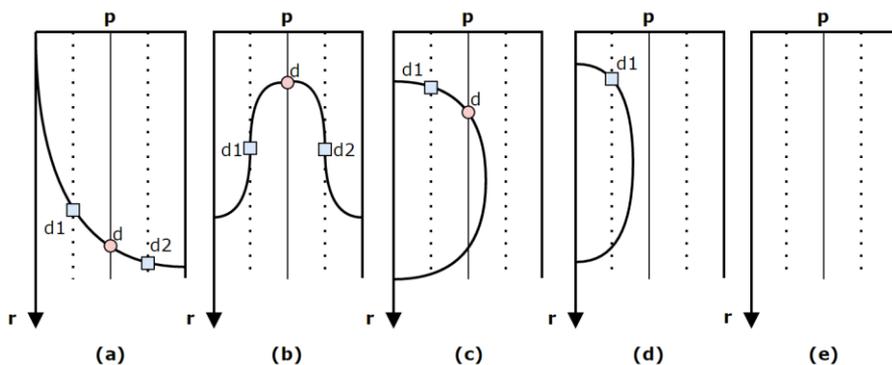


Рис. 2. Уровень изоповерхности (2D срез). d – величина r в исходной текстуре T , p – исходный пиксель экрана, квадраты – точки пересечения для текстелей, круги – точки пересечения для пикселей

Рассматривая значения r из текстуры T , алгоритм определяет точку старта трассировки луча как можно ближе к изоповерхности. Очевидно, что для случая рис. 2(a), в котором изоповерхность является вогнутой, трассировку луча, соответствующего пикселю p можно начинать с глубины, равной $\min(d1, d2)$.

Однако, в случае выпуклой изоповерхности рис. 2(b), старт трассировки луча из этой точки приведет к пропуску изоповерхности, в случае движения луча в том же направлении. Для решения данной проблемы в момент старта трассировки луча направление трассировки выбирается исходя из значения передаточной функции.

Упомянутый ранее параметр алгоритма s - напрямую влияет на ускорение рендеринга. Чем больше s - тем быстрее осуществляется первый проход алгоритма. Однако при больших значениях этого параметра при визуализации появляются артефакты из-за потери информации в текстуре T . Этих артефактов можно избежать, если параметр s устанавливать динамически так, чтобы один текстель текстуры покрывал один-два вокселя массива исходных данных. В этом случае значение s будет тем больше, чем больше масштаб объекта на экране.

Результаты. Для тестирования алгоритма использовались наборы данных в разных исходных форматах, полученные из собственных и открытых источников [5-9]. Тестовые данные представляют собой объемные текстуры, разрешение которых варьируется от 256x256x256 до 1024x1024x512. (рис. 3).

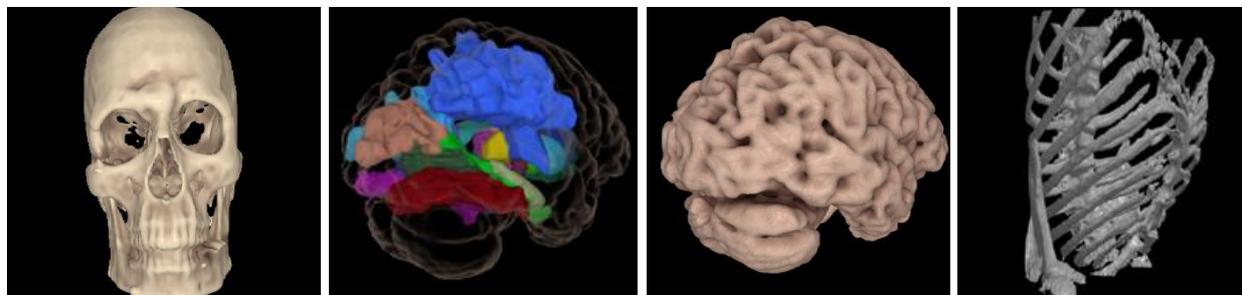


Рис. 3. Примеры визуализации

Табл. 1. Отношение между параметром s и множителем ускорения рендеринга

Model	$s=2$	$s=3$
1. Skull	3.5	5.4
2. Brain	3.2	5.1
3. Transparent brain	3.9	6.0
4. Chest	3.4	5.2

Сравнение времени работы стандартного подхода [4] и предложенного в данной статье проводилось при условии, когда выбранные объекты при визуализации располагались так, чтобы они занимали всю высоту экрана. По результатам проведенного исследования, в среднем, удалось достичь ускорения в 5 раз.

ЛИТЕРАТУРА:

1. Jan Egger; Markus Gall; Jürgen Wallner; Pedro de Almeida Germano Boechat; Alexander Hann; Xing Li; Xiaojun Chen and Dieter Schmalstieg "Integration of the HTC Vive into the medical platform MeVisLab ", Proc. SPIE 10138, Medical Imaging 2017: Imaging Informatics for Healthcare, Research, and Applications, 1013817 (March 13, 2017); doi:10.1117/12.2263234;
2. Lorensen W.E., Cline HE.: Marching cubes: a high resolution 3D surface construction algorithm. In Proc.of SIGGRAPH' 87 (1987), pp. 163-169.
3. Araujo B.R., Lopes D.S., Jepp P., Jorge J., Wyvill B.: A Survey on implicit surface polygonization. ACM Computing Surveys (2015).
4. Kruger J., Westermann R.: Acceleration techniques for GPU-based volume rendering. In Proc.of IEEE Visualization 2003 (2003), pp. 287–292.
5. Epperson, et al., "Creation of Fully Sampled MR Data Repository for Compressed Sensing of the Knee," SMRT Conference, Salt Lake City, UT, 2013.
6. <https://www.kaggle.com/c/data-science-bowl-2017/data>
7. <https://www.opengl.org/>
8. <http://www.mevislab.de/>
9. Pieper S, Lorensen B, Schroeder W, Kikinis R. The NA-MIC Kit: ITK, VTK, Pipelines, Grids and 3D Slicer as an Open Platform for the Medical Image Computing Community. Proceedings of the 3rd IEEE International Symposium on Biomedical Imaging: From Nano to Macro 2006; 1:698-701.

КАЧЕСТВО ИНТЕРВАЛЬНЫХ ОЦЕНОК ПАРАМЕТРОВ АДДИТИВНОЙ МОДЕЛИ
ПРОЦЕССА ЛЕВИ. ПОДХОД, ОСНОВАННЫЙ НА РЕЗУЛЬТАТАХ АППРОКСИМАЦИИ
ПЕРВЫХ РАЗНОСТЕЙ ОТРАЖЕННЫМ НОРМАЛЬНЫМ РАСПРЕДЕЛЕНИЕМ

Введение. В исследованиях различного рода процессов, динамических систем возникают моменты, когда требуется переход к качественно иным или более общим математическим моделям. Так произошло, например, с изучением сетевого трафика, движениями обменных курсов на валютных рынках, динамикой цен на товарных рынках. От привычных, ставших уже классическими, процессов Пуассона, броуновского движения намечился переход к более общему описанию, в форме процессов Леви.

Цель работы: построить интервальные оценки параметров аддитивной модели Леви следующего вида:

$$X(t) = Y(t) + Z(t), \quad (1)$$

$Y(t)$ – винеровский процесс, $Z(t)$ – модель процесса со скачками и возвращением к среднему, где скачки определяются пуассоновским потоком событий, а амплитуда скачка определяется случайной величиной из субэкспоненциального распределения (распределения Парето). Аналитические оценки параметров таких моделей нам не известны. Численно получить оценки параметров модели (1) можно методом максимального правдоподобия или методами из семейства Монте-Карло. Возможность построения таких точечных оценок сводится к вопросу о возможности построения множества допустимых решений (компакта из параметрического пространства модели (1)).

Одно из основных свойств процесса Леви – стационарность приращений ординаты [1], – чаще всего используется для построения оценок параметров его модели. В настоящем исследовании для построения интервальных оценок модели (1) предложена аппроксимация ряда первых разностей этого процесса:

$$\Delta X(t) = N_t + (C - 1) \cdot \sum_{t_i < t} Par_{t_i} \cdot C^{K_i t_i}, \quad (2)$$

где N_t – наблюдение из нормального распределения, Par_{t_i} – наблюдение из двухпараметрического распределения Парето, $C = e^{-\lambda_{mr} \Delta t}$, $K_i = \frac{t-t_i}{\Delta t}$, t – текущий момент времени, t_i – момент появления i -ого выброса, Δt – шаг, с которым выполняются наблюдения. В строгой постановке задачи в каждом сечении этой модели будем иметь свертку нормального распределения и суммы случайных величин из субэкспоненциального распределения (распределения Парето) со случайными сомножителями. Все возможные наблюдения из совокупности случайных процессов аппроксимируем моделью отраженного нормального распределения (half-normal distribution) [2].

Для получения интервальных оценок использовалась суперпозиция стохастических операторов G_i . Каждый стохастический оператор G_i имеет собственную программную реализацию, которую далее будем называть эстиматором. Каждый из эстиматоров доставляет оценки параметров некоторой стохастической модели. Модели могут быть как параметрические, так и непараметрические, а оценки представляют собой векторы, принадлежащие параметрическому пространству модели соответствующей размерности.

Последовательность преобразований представляет собой следующую цепочку [3]:

$$\begin{aligned} G_{gauss}(\{\Delta X(t)\}) &\rightarrow G_{pareto}(\{G_{gauss}\}) \rightarrow G_{wiener} \sigma(\{\Delta X(t_i)\}) \rightarrow G_{\lambda_{poisson}}(\{G_{gauss}\}) \\ &\rightarrow G_{\lambda_{mr}}(G_{PWR}(\{\Delta X(t_i)\}; \{G_{gauss}\})) \rightarrow G_{W_0}(\{\Delta X(t_i)\}, \{G_{gauss}\}) \end{aligned}$$

Оператор G_{gauss} получает на вход ряд первых разностей, а возвращает оценки моментов времени, в которых наблюдались выбросы $\{t_i\}$, вместе с соответствующими первыми разностями $\{\Delta X(t_i)\}$; G_{pareto} принимает $\{\Delta X(t_i)\}$, возвращает интервальные оценки параметров распределения Парето $\{X_{min}^L, X_{min}^R\}$, $\{K^L, K^R\}$; $G_{wiener \sigma}$ использует $\{\Delta X(t_i)\}$, а возвращает интервальные оценки стандартного отклонения винеровского процесса. $G_{\lambda_{poisson}}$ получает на вход результаты работы G_{gauss} , возвращает интервальные оценки $\{\lambda_{poisson}^L, \lambda_{poisson}^R\}$. $G_{\lambda_{mr}}$ использует результаты работы $G_{PWr}(X; G_{gauss})$, а возвращает интервальные оценки $\{\lambda_{mr}^L, \lambda_{mr}^R\}$. G_{W_0} принимает $\{\Delta X(t_i)\}$ и результаты работы $\{G_{gauss}\}$, возвращает интервальные оценки начального условия винеровского процесса.

Результаты. На всех ниже приведенных рисунках представлены оценки вероятностей следующего события: истинная точечная оценка попадает в доверительный интервал, порождаемый интервальной оценкой.

Из рис. 1 следует, что $\{W_0^L, W_0^R\}$ с вероятностью не ниже 0.8 покрывает истинную точечную оценку начального условия винеровского процесса, когда интенсивность возврата к среднему на порядок и более превосходит интенсивность пуассоновского потока выбросов.

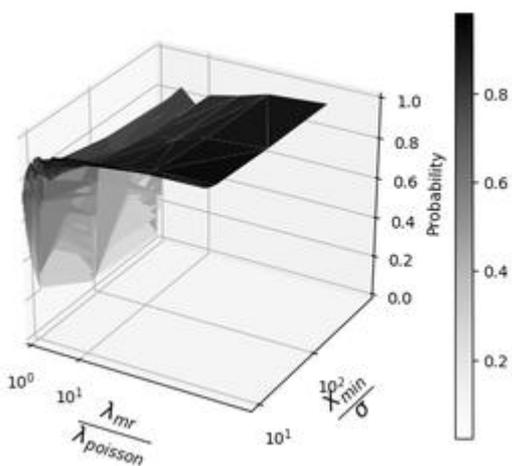


Рис. 1. Начальное условие винеровского процесса W_0

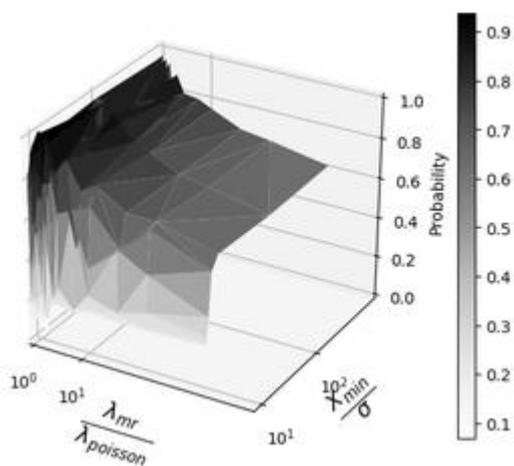


Рис. 2. Стандартное отклонение винеровского процесса σ

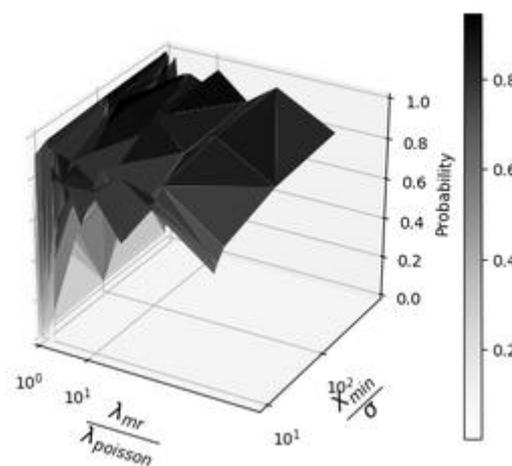


Рис. 3. Интенсивность потока выбросов $\lambda_{poisson}$

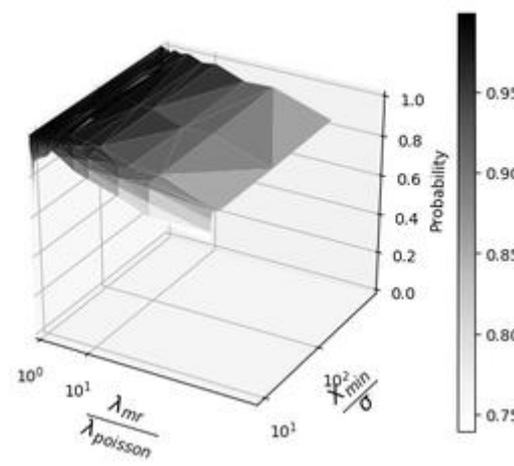


Рис. 4. Интенсивность скорости возврата к среднему λ_{mr}

Согласно результатам, представленным на рис. 2, при $\frac{\lambda_{mr}}{\lambda_{poisson}} > 10^1$ и $\frac{X_{min}}{\sigma} > 10^2$ интервальная оценка стандартного отклонения винеровского процесса $\{\sigma^L, \sigma^R\}$ покрывает точечную с вероятностью не ниже 0.4.

Из рис. 3 следует, что полученные интервальные оценки неустойчивы. Интервальная оценка интенсивности потока выбросов $\{\lambda_{poisson}^L, \lambda_{poisson}^R\}$ с вероятностью не ниже 0.6 покрывает точечную оценку только при $\frac{\lambda_{mr}}{\lambda_{poisson}} \geq 10^1$.

Согласно результатам, представленным на рис. 4, интервальные оценки скорости возврата к среднему $\{\lambda_{mr}^L, \lambda_{mr}^R\}$ покрывают точечную оценку с вероятностью не ниже 0.75.

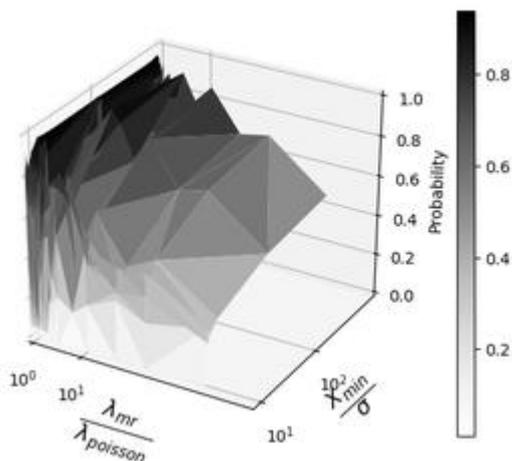


Рис. 5. Параметры распределения Парето X_{min}

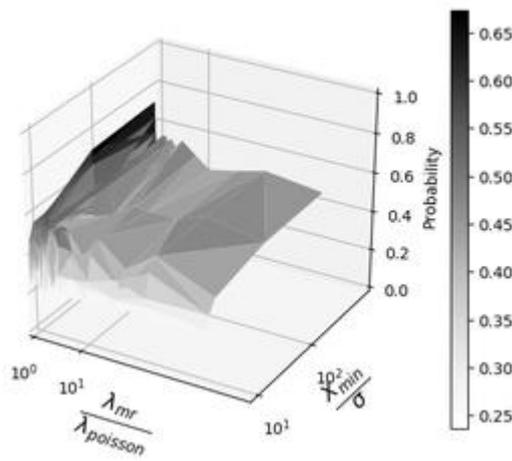


Рис. 6. Параметры распределения Парето K

Из рис. 5 следует, что полученные интервальные оценки неустойчивы. Интервальные оценки параметра распределения Парето $\{X_{min}^L, X_{min}^R\}$ покрывают точечную оценку с вероятностью не ниже 0.2 при $\frac{X_{min}}{\sigma} > 10^2$.

Согласно результатам, представленным на рис. 6, интервальные оценки параметра распределения Парето $\{K^L, K^R\}$ покрывают точечную оценку с вероятностью не ниже 0.25.

Вывод. Проведенное исследование качества интервальных оценок параметров модели Леви, когда в основу алгоритма идентификации выбросов положена аппроксимация ряда первых разностей (2) моделью отраженного нормального распределения, позволяет сделать следующие выводы.

Качество интервальных оценок параметров моделей $\{\lambda_{mr}^L, \lambda_{mr}^R\}$, $\{W_0^L, W_0^R\}$, удовлетворительно. Интервальные оценки с вероятностью не ниже 0.8 покрывают истинные точечные оценки этих параметров.

Полученные интервальные оценки $\{\sigma^L, \sigma^R\}$, $\{\lambda_{poisson}^L, \lambda_{poisson}^R\}$, $\{X_{min}^L, X_{min}^R\}$, $\{K^L, K^R\}$ неустойчивы. Это объясняется крайне малым объемом выборки, на основе которой получаем оценки.

Представляется возможность улучшить интервальные оценки $\{\sigma^L, \sigma^R\}$, $\{\lambda_{poisson}^L, \lambda_{poisson}^R\}$, $\{X_{min}^L, X_{min}^R\}$, реализовав приведенный алгоритм как рекурсивный.

ЛИТЕРАТУРА:

1. Булинский А.В., Ширяев А.Н. Теория случайных процессов. М.: Физматлит, 2005. — 408 с.
2. Вадзинский Р. Н. Справочник по вероятностным распределениям. СПб.: Наука, 2001. — 295 с.
3. Сидоровская А.А. Реализация алгоритма фильтра частиц для оценивания параметров модели в форме суммы процессов Леви. — СПб.: СПбПУ Петра Великого, 2015.

АНАЛИЗ ЭВОЛЮЦИИ ПОВЕРХНОСТИ НАГРУЖЕНИЯ ПОЛИКРИСТАЛЛИЧЕСКИХ МАТЕРИАЛОВ НА ОСНОВЕ КОНЕЧНО-ЭЛЕМЕНТНОЙ ГОМОГЕНИЗАЦИИ

Прогнозирование неупругого деформирования и разрушения при сложном переменном непропорциональном нагружении является актуальной для практики задачей. Неспособность корректного описания данного класса воздействий классическими феноменологическими моделями теории пластичности приводит к необходимости разработки альтернативных подходов, одним из которых является микромеханический подход. Целью данного исследования является анализ эволюции поверхности нагружения поликристаллического материала на основе конечно-элементной (КЭ) гомогенизации представительного объема, состоящего из монокристаллов, поведение которых описывается микромеханической моделью.

При использовании микромеханических (физических, кристаллографических) моделей материала [1-3] предполагается, что пластическое течение осуществляется как результат возможного скольжения в N системах скольжения, характеризующихся нормалью к α плоскости скольжения \mathbf{n}^α и направлением скольжения \mathbf{l}^α ($\alpha=1,\dots,N$). Для рассматриваемого случая монокристаллов с кубической гранцентрированной решеткой при учете только октаэдрических систем скольжения $N = 12$. Скорость пластической деформации определяется равенством:

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p = \sum_{\alpha=1}^N \dot{\gamma}^\alpha (\mathbf{l}^\alpha \mathbf{n}^\alpha)^{\otimes s}. \quad (1)$$

Для вычисления скорости сдвиговых деформаций $\dot{\gamma}^\alpha$ в α системе скольжения используются выражения:

$$\dot{\gamma}^\alpha = \sum_{\beta=1}^N \left[\frac{\partial R^\beta}{\partial \gamma^\alpha} + \frac{\partial X^\beta}{\partial \gamma^\alpha} \text{sign}(\tau^\beta - X^\beta) \right]^{-1} \text{sign}(\tau^\beta - X^\beta) \dot{\tau}^\beta, \quad (2)$$

где $\tau^\beta = \boldsymbol{\sigma} \cdot (\mathbf{l}^\beta \mathbf{n}^\beta)^{\otimes s}$ - касательные напряжения, приведенные к β системе скольжения. При суммировании по β в (2) учитываются только активные системы скольжения, то есть удовлетворяющие условию пластичности $|\tau^\beta - X^\beta| - R^\beta - \tau_0 = 0$.

Переменные, характеризующие нелинейное изотропное и кинематическое упрочнение, определяются равенствами:

$$R^\alpha = bQ \sum_{\beta} h^{\alpha\beta} r^\beta, \quad \dot{r}^\alpha = (1 - br^\alpha) \dot{\gamma}^\alpha, \quad (3)$$

$$X^\alpha = Cx^\alpha, \quad \dot{x}^\alpha = [\text{sign}(\tau^\alpha - X^\alpha) - Dx^\alpha] \dot{\gamma}^\alpha. \quad (4)$$

В уравнениях (1)-(4) τ_0, b, Q, C, D - константы материала, $h^{\alpha\beta} = H[q + (1-q)\delta_{\alpha\beta}]$.

При проведении расчетов в качестве элементарного представительного объема (ЭПО) поликристалла рассматривался куб (рис. 1) с регулярным разбиением на конечные элементы, каждая Гауссова точка которых рассматривалась как отдельный монокристалл. Ориентация монокристаллов генерировалась случайным образом (нормальное распределение в пределах полного телесного угла) путем задания трех углов Эйлера [4] $\varphi = 2\pi Z_1$, $\theta = \arccos(1 - 2Z_2)$, $\psi = 2\pi Z_3$.

При проведении вычислительных экспериментов использовался КЭ комплекс PANTOCRATOR [5]. Исследовалось поведение различных вариантов поликристаллов с разбиениями ЭПО от $1 \times 1 \times 1$ до $10 \times 10 \times 10$ элементов, содержащих от 8 до 8 000 монокристаллов.

На рис. 1 представлены характерные результаты КЭ вычислительных экспериментов с ЭПО поликристалла. Полученные в результате расчетов поля обладают ярко выраженной неоднородностью. Целью расчетов является определение эффективных значений полей тензоров

$$\bar{\boldsymbol{\varepsilon}} = \frac{1}{V} \int_V \boldsymbol{\varepsilon} dV, \quad \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}^p = \frac{1}{V} \int_V \boldsymbol{\varepsilon}^p dV, \quad \bar{\boldsymbol{\sigma}} = \frac{1}{V} \int_V \boldsymbol{\sigma} dV. \quad (5)$$

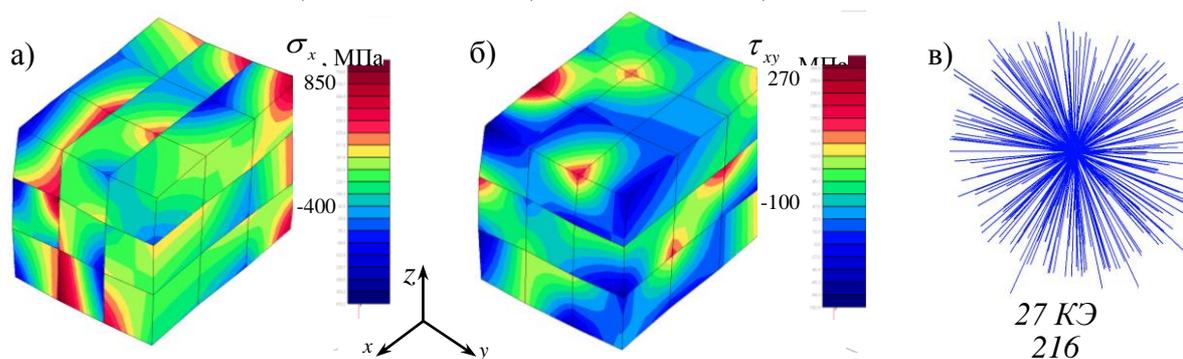


Рис. 1. Распределение локальных полей осевой σ_x (а) и касательной τ_{xy} (б) компонент тензора напряжений в ЭПО $3 \times 3 \times 3$; (в) векторы начальной ориентации $\langle 001 \rangle$ для всех монокристаллов ЭПО

В расчетах использовались свойства материала: $\tau_0 = 100 \text{ МПа}$, $b = Q = 0$, $C = 3000 \text{ МПа}$, $D = 20$. Полученные в КЭ расчетах характерные кривые деформирования поликристалла и монокристаллов с ориентациями $\langle 001 \rangle$, $\langle 011 \rangle$, $\langle 111 \rangle$ при осевом нагружении показаны на рис. 2. Направление монокристалла $\langle 001 \rangle$ является наиболее податливым, $\langle 111 \rangle$ - наиболее жестким. Кривые для поликристалла занимают промежуточное положение. Предел текучести поликристалла σ_{02} оказался на 20% выше предела текучести монокристалла $\langle 001 \rangle$ τ_0 .

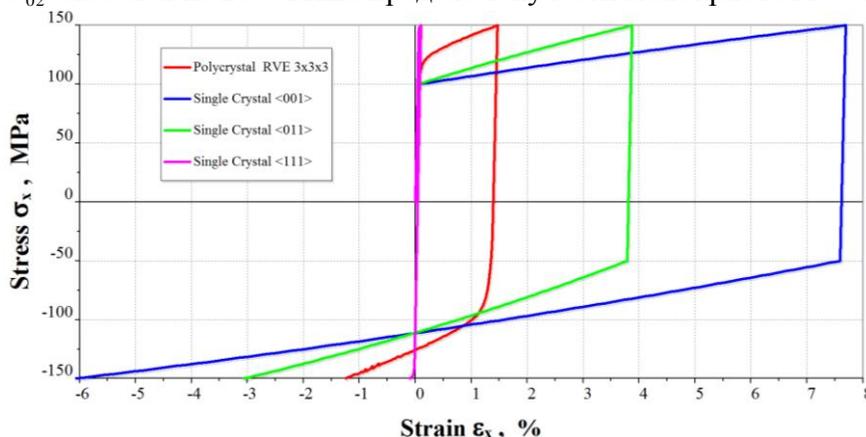


Рис. 2. Сравнение кривых деформирования поликристалла и монокристаллов с ориентациями $\langle 001 \rangle$, $\langle 011 \rangle$, $\langle 111 \rangle$ при осевом нагружении до 150 МПа с последующей разгрузкой до -150 МПа

При построении поверхности нагружения в двумерном пространстве $\sigma_x - \tau_{xy}$ из точки предварительного нагружения (осевое нагружение до уровня σ_{x0}) рассматривались различные лучевые нагружения ($(\sigma_x - \sigma_{x0})/\tau_{xy} = const_1$) до определения для каждого направления луча момента перехода из упругого состояния в пластическое в соответствии с условием заданного приращения пластической деформации $\|\Delta \boldsymbol{\varepsilon}^p\| = const_2$. Автоматическая генерация путей

нагружения, данных для КЭ расчета ЭПО и построение поверхностей осуществлялась в программе CES v4.2 (Constitutive equation studio) [6].

Для анализа эволюции местоположения и формы поверхности нагружения рассматривалась серия различных уровней предварительного осевого нагружения σ_{x0} : 0, 150, 200, 250 МПа (рис. 3). Для каждого режима нагружения поверхность определялась на основе 72 направлений лучевых нагружений. В результате проведенных вычислительных экспериментов установлено, что с ростом уровня предварительного напряжения σ_{x0} поверхность смещается в направлении предварительного нагружения и изменяет свою форму (рис. 3). Доминирующими являются кинематическое (трансляционное) и дисторсионное упрочнение. Проведенные исследования позволяют определить уравнения эволюции внутренних переменных феноменологических моделей пластичности.

Следует отметить, что размеры и форма поверхности нагружения оказались чувствительными к выбору допуска на остаточную деформацию. На рис. 4 показаны поверхности нагружения для $\|\Delta \epsilon^p\|$ 0.002%, 0.02% и 0.2%. Широко используемое на практике значение $\|\Delta \epsilon^p\| = 0.2\%$ оказывается много менее чувствительным к влиянию микроструктуры.

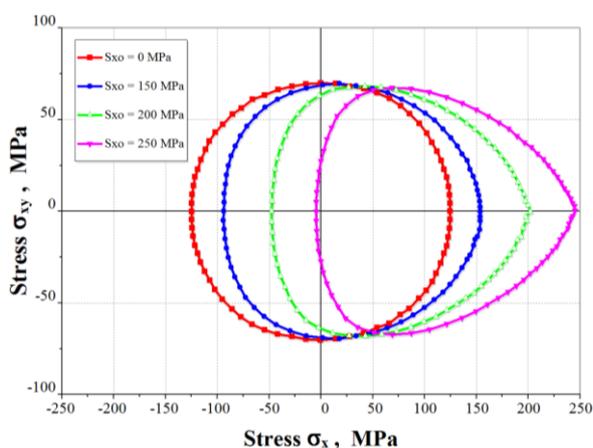


Рис. 3. Эволюция поверхности нагружения при осевом растяжении (ЭПО 3×3×3)

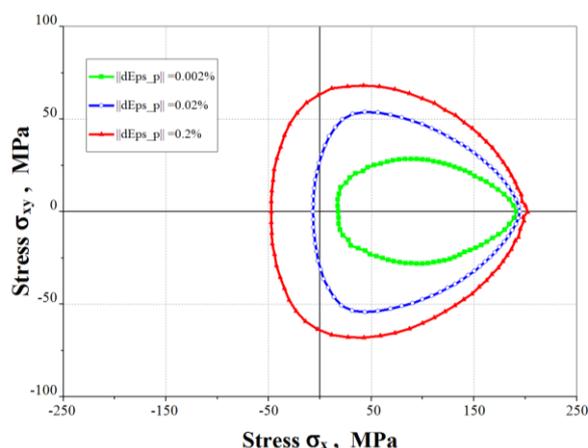


Рис. 4. Влияние допуска на остаточную деформацию на размер поверхности нагружения

Исследование выполнено при финансовой поддержке гранта РФФИ № 16-08-00845.

ЛИТЕРАТУРА:

1. Бессон Ж., Каето Ж., Шабош Ж.Л., Форест С. Нелинейная механика материалов; пер. с франц. А.С. Кравчука. – СПб.: Изд-во Политехн. ун-та, 2010. – 397 с.
2. Трусов П.В., Волегов П.С., Кондратьев Н.С. Физические теории пластичности. – Пермь, 2013. – 244 с.
3. Семенов А.С. Идентификация параметров анизотропии феноменологического критерия пластичности для монокристаллов на основе микромеханической модели // Научно-технические ведомости С.-Петербургского государственного политехнического университета. Физ.-мат. науки. – 2014. – № 2 (194). – С. 15-29.
4. Семенов А.С., Бальке Х., Мельников Б.Е. Моделирование поликристаллической пьезокерамики методом конечно-элементной гомогенизации // Морские Интеллектуальные Технологии. 2011, №3. С. 109-115.
5. Семенов А.С. PANTOCRATOR – конечно-элементный программный комплекс, ориентированный на решение нелинейных задач механики // Труды V Межд. Конф. «Научно-технические проблемы прогнозирования надежности и долговечности констр. и методы их решения». – СПб: Изд-во СПбГПУ, 2003. – С. 466-480.
6. Семенов А.С. [Вычислительные методы в теории пластичности](#). – СПб: Изд-во СПбГПУ. 2008. – 211 с.

АНАЛИЗ ТРЕЩИНОСТОЙКОСТИ КОЛЕС ЦЕНТРОБЕЖНЫХ КОМПРЕССОРОВ

Одной из основных причин снижения ресурса центробежных компрессоров различных конструкций является возникновение и развитие повреждений колес в процессе эксплуатации, а также при изготовлении. Механизмы и места появления повреждений весьма разнообразны [1].

Объектом данного исследования являются колеса компрессора после эксплуатации в течение 2000–3000 тысяч часов. В процессе эксплуатации нескольких центробежных газовых компрессоров единого конструкторского исполнения в составе дожимной компрессорной станции были выявлены многочисленные повреждения рабочих колес, изготовленных из стали 07X16H6 (рис. 1). Были высказаны различные предположения о происхождении образующихся трещин, и был проведен цикл экспериментальных и расчетных работ по установлению причин образования трещин в колесах этих компрессоров.

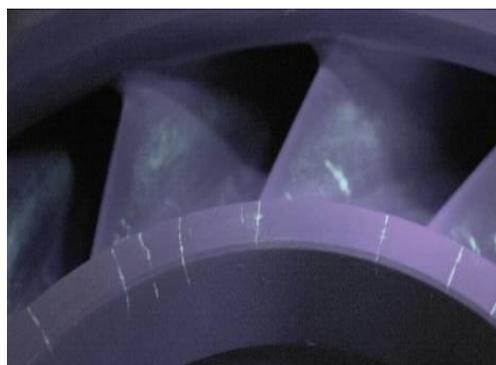


Рис. 1. Повреждения колес 1-ой - 4-ой ступеней компрессора

На рис. 1 приведены фотографии повреждений рассматриваемых колес компрессора. Из фотографий видно, что повреждения колес наблюдаются как в виде полного их разрушения по радиусу, так и в виде трещин на ступице и на кромках лопаток. Диапазон частот вращения при эксплуатации составляет 5500-8500 об/мин.

Для определения причин, вызвавших выявленные повреждения колес компрессоров были проведены многовариантные конечно-элементные расчеты НДС и прочности. Целью этих расчетов являлась проверка методами механики деформируемого твердого тела и механики разрушения валидности основных гипотез причин зарождения и распространения макротрещин, очагом разрушения которой являлась торцевая поверхность ступицы основного диска со стороны входа газа.

Для выполнения поставленных целей были получены решения для следующих задач:

- Анализ НДС колеса при посадке на вал на основе прямого моделирования процессов нагрева/охлаждения и решения контактной задачи;
- Анализ НДС колеса при различных частотах вращения в упругой и упруго-пластической постановках [2] с учетом и без учета скругления соединения дисков с лопатками;

- Анализ трещиностойкости колеса при различном местоположении и размерах трещинообразных дефектов (определение коэффициентов интенсивности напряжений).

Краевые задачи решались в трехмерной постановке с учетом циклической симметрии. В расчетах использовались двадцатиузловые изопараметрические квадратичные конечные элементы. Их количество и сгущение определялись наличием и формой концентраторов – потенциальных мест высоких градиентов напряжений.

Напряженно-деформированное состояние в колесе преимущественно определяется влиянием двух основных факторов внешнего воздействия: центробежной силой, возникающей при вращении, и начальным натягом.

Методами линейной механики разрушения [3-5] производится анализ условий распространения трещинообразных дефектов, возникших в различных потенциально опасных местах:

- радиальная трещина на торцевой поверхности ступицы основного диска;
- радиальная сквозная трещина на внешнем ободе основного диска;
- радиальная трещина на торцевой поверхности ступицы основного диска.

В качестве примера на рис. 2 показана радиальная трещина на торцевой поверхности ступицы основного диска. Трещина имела форму четверти окружности.

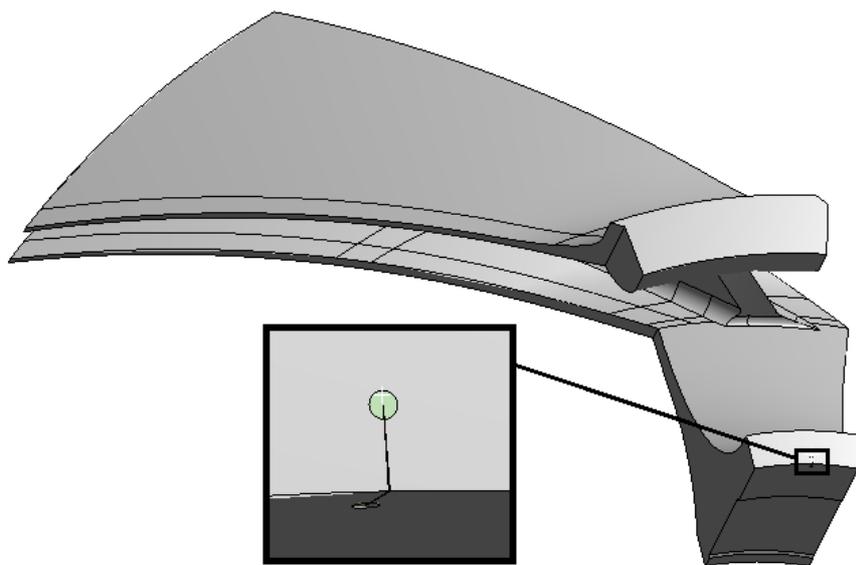


Рис. 2. Трещина на торцевой поверхности ступицы компрессорного колеса

Начальный размер трещины составил 3 мм. В расчетах трещиностойкости определялись распределения значений КИНов (KI, KII, KIII) вдоль фронта трещины. Максимальное по фронту трещины значение эквивалентного КИН, вычисленного в соответствии с выражением скорости освобождения энергии сравнивалось с $K_{IC} = 69 \text{ МПа м}^{1/2}$.

Распределение значений КИНов вдоль фронта трещины показано на рис. 3. Максимальное значение K_I реализуется в точке 1 на торцевой поверхности ступицы со стороны входа газа и достигает значения $23,7 \text{ МПа м}^{1/2}$. Минимальное значение K_I реализуется в точке 2 на поверхности ступицы, контактирующей с валом, и достигает значения $10,9 \text{ МПа м}^{1/2}$. Возможный рост трещины будет происходить преимущественно в радиальном направлении.

Полученные результаты расчетов позволяют сделать следующие выводы:

1. Для радиальной трещины, возникшей на торцевой поверхности ступицы основного диска со стороны входа газа, доминирующей является I мода разрушения (нормального отрыва). Максимальное значение K_I превосходит K_{II} и K_{III} более чем в 50 раз.
2. Рассматриваемая макротрещина на ступице длиной 3 мм при условии отсутствия коррозии не будет распространяться при заданных условиях нагружения, так как

$$K_I = 23,7 \text{ МПа м}^{1/2} < K_{IC} = 69 \text{ МПа м}^{1/2}.$$
3. Если условия зарождения и роста трещины соответствует трещине коррозионного растрескивания, то нельзя исключить возможность ее распространения при заданных условиях нагружения.
4. Макротрещина на ступице длиной 45 мм будет распространяться при заданных условиях нагружения, даже в условиях отсутствия коррозии, так как

$$K_I = 117 \text{ МПа м}^{1/2} > K_{IC} = 69 \text{ МПа м}^{1/2}.$$
5. Радиальная сквозная трещина на внешнем ободе основного диска с начальным размером 6 мм не будет распространяться при заданных условиях нагружения.
6. Радиальная полуэллиптическая трещина в основном диске в зоне соединения лопатки с диском (место, где наблюдается зона пластичности) с начальным размером 6×3 мм не будет распространяться при заданных условиях нагружения.
7. Внутренний эллиптический дефект, имитирующий непровар в зоне соединения лопатки с диском, не будет увеличиваться в размерах при заданных условиях нагружения.

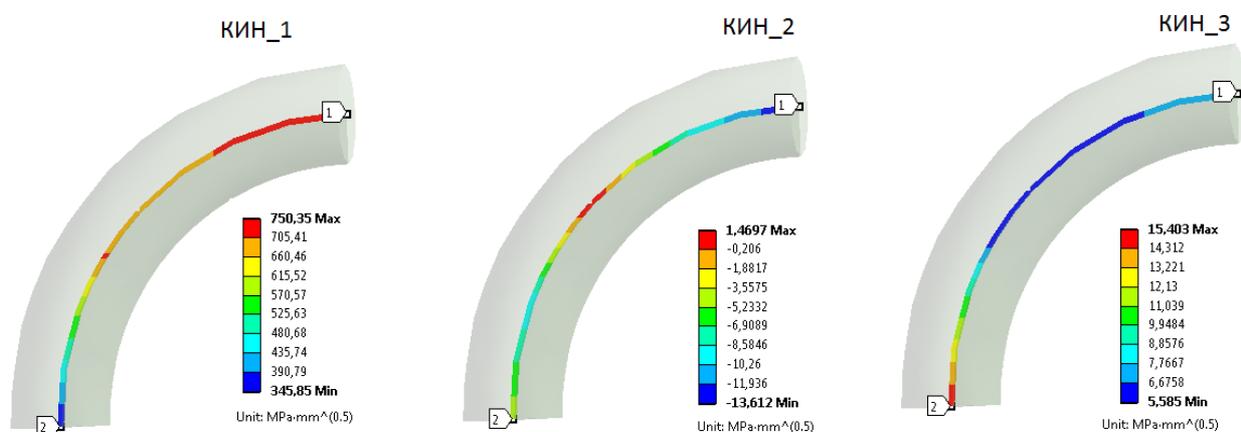


Рис. 3. Распределение коэффициентов интенсивности напряжений [МПа мм^{1/2}] по фронту трещины на ступице во вращающемся колесе с частотой 8500 об/мин

Резюмируя полученные результаты можно утверждать, что описанные выше разрушения в условиях отсутствия гидроударов от попадания в компрессор значительных количеств конденсата и отсутствия коррозионно-активной среды не могли иметь места.

Исследование выполнено при финансовой поддержке гранта РФФИ № 15-08-08779 и стипендиальной программы Siemens.

ЛИТЕРАТУРА:

1. Гецов Л.Б. Материалы и прочность деталей газовых турбин. -М.: Недра, 1996. -С. 189-193.
2. Семенов А.С. [Вычислительные методы в теории пластичности](#). – СПб: Изд-во СПбГПУ. 2008. – 211 с.
3. Семенов А.С., Семенов С.Г., Гецов Л.Б. Методы расчетного определения скорости роста трещин усталости, ползучести и термоусталости в поли- и монокристаллических лопатках ГТУ // Проблемы прочности. 2015. № 2. С. 61-87.
4. Гецов Л.Б., Семенов А.С., Семенов С.Г., Игнатович И.А. Современные методы расчета термоусталостной прочности дисков газовых турбин // Газотурбинные технологии. 2016. № 1 (136). С. 30-38.
5. Getsov L.B., Semenov A.S., Ignatovich I.A. Thermal fatigue analysis of turbine discs on the base of deformation criterion // International Journal of Fatigue. 2017. Vol. 97. С. 88-97.

УДК 681.51

Т.А. Байдина, С.Ф. Бурдаков

Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого

УПРАВЛЕНИЕ РОБОТОМ ПРИ КОНТАКТНЫХ ОПЕРАЦИЯХ С ПОВЕРХНОСТЬЮ НЕОПРЕДЕЛЕННОГО ПРОФИЛЯ В УСЛОВИЯХ ТРЕНИЯ

При построении закона управления роботом, совершающего реверсивное движение вдоль контактной поверхности, был установлен факт возникновения фрикционных автоколебаний. Учитывая, что движение должно происходить на ползучих скоростях, из-за трения в системе могут происходить заклинивания. В настоящей работе показывается, когда этот эффект возможен, а также способы борьбы с ним.

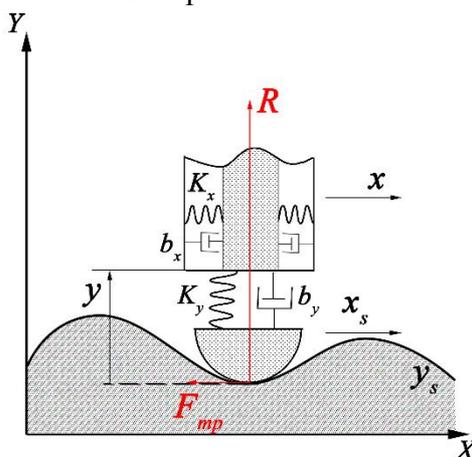


Рис. 1. Расчетная схема объекта управления

На рис. 1 приведена расчётная схема объекта управления, в качестве которого рассматривается рука робота с упругими датчиками силы. Математические модели робота в режиме контактного взаимодействия с поверхностью имеют следующий вид [1,2]

$$\begin{aligned}
 M_y \ddot{y} + b_y \dot{y} + K_y (y - y_s) &= F_y - M_y g \\
 R_y &= K_y (y_s - y) \\
 M_x \ddot{x} + b_x \dot{x} + K_x (x - x_s) &= F_x \\
 m''_{sx} \ddot{x}_s + b_{sx} \dot{x}_s + K_x (x_s - x) &= -F_{тр}
 \end{aligned} \tag{1}$$

Исследование проводилось для трех случаев: с вязким трением, с сухим (кулоновым) трением и с использованием модели трения, учитывающей Штрибек-эффект.

Выход робота на контактную поверхность и обеспечение необходимой силы прижатия осуществляется за счет позиционно-силового управления с датчиком положения и с силовым

датчиком обратной связи. Управление вдоль плоскости поверхности контакта осуществляется за счет обратной связи по скорости руки робота [3,4]

$$F_y = (k_p + k_i \frac{1}{p} + k_d \frac{N}{1+N\frac{1}{p}})(\widetilde{y}^d - y)$$

$$\widetilde{y}^d = (\theta_p + \theta_i \frac{1}{p} + \theta_d \frac{N}{1+N\frac{1}{p}})(F_s^d - F_s) \quad (2)$$

$$F_x = (\xi_p + \xi_i \frac{1}{p} + \xi_d \frac{N}{1+N\frac{1}{p}})(\dot{x}^d - \dot{x})$$

После выбора значений параметров математической модели объекта управления (1) и всех настроек регуляторов (2) было проведено компьютерное моделирование в среде Matlab и получены следующие результаты. На рис. 2,а приведены графики переходных процессов координаты упругого сенсора X_s и его скорости V_{xs} в случае вязкого трения в системе, на рис. 2,б – в случае сухого (кулонового) трения, на рис.2,в – в случае трения с эффектом Штрибека.

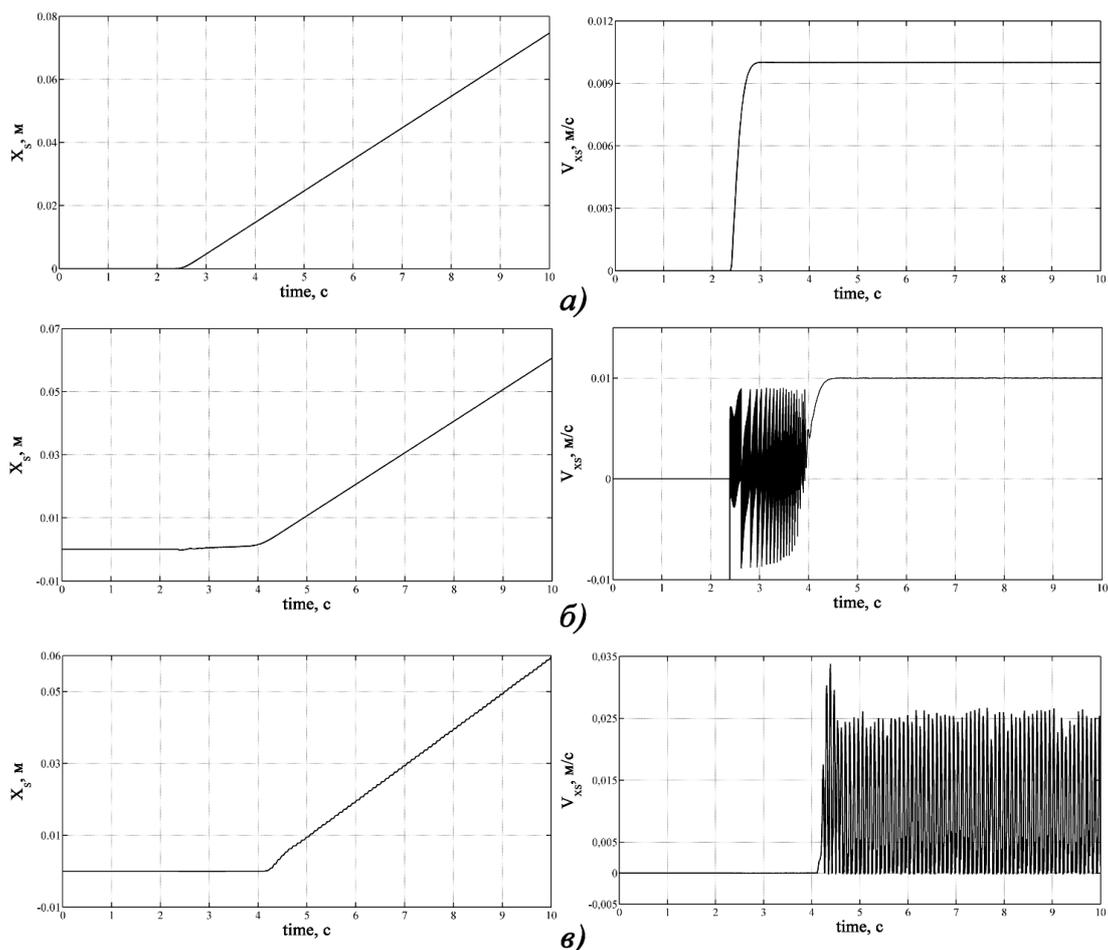


Рис. 2. Результаты моделирования при разных моделях трения

Движение вдоль контактной поверхности при этом начинается в момент времени 2.3 с, когда обеспечивается необходимая сила прижатия руки робота к поверхности. Видно, что при наличии только вязкого трения в системе нежелательных эффектов не наблюдается, движение происходит равномерно. При учете сухого трения на графиках переходных процессов отчетливо виден участок преодоления упругой силой силы трения, после чего реализуется равномерное движение. Применение более точной модели трения, учитывающей Штрибек-эффект, характеризующийся наличием падающего участка в функции $F_{Tp}(\dot{x}^d)$, позволяет увидеть, что сенсор совершает фрикционные автоколебания. На графике

переходного процесса координаты X_s этот эффект реализуется в виде участков заклинивания продолжительностью 0.025 секунды, а также пересечением нулевого уровня на графике переходного процесса скорости V_{xs} .

Участки заклинивания, возникающие при движении сенсора на ползучей скорости $V_{xs} = 0.01$ м/с в условиях трения с эффектом Штрибека, приводят к неравномерному движению. Для обеспечения плавного движения необходимо реализовать в системе дополнительное внешнее воздействие, которое будет компенсировать нежелательные нелинейные эффекты. В качестве такой внешней силы в настоящей работе было выбрано высокочастотное импульсное воздействие $F_{BH}(t) = \begin{cases} A \sin(\omega t), & F_{BH} > 0 \\ 0, & F_{BH} < 0 \end{cases}$. На основе данных, полученных в результате эксперимента с применением модели трения, учитывающей Штрибек-эффект, были подобраны следующие значения параметров внешнего воздействия: $A = 0.025$ Н, $\omega = 300$ рад/с. Сравнение результатов моделирования движения координаты сенсора X_s без сглаживания и при дополнительном импульсном воздействии приведены на рис. 3. Видим, что на рис. 3,б несмотря на то, что движение происходит на ползучей скорости в условиях трения с эффектом Штрибека, система ведет себя аналогично случаю наличия лишь вязкого трения. Таким образом, подобранное для данного случая дополнительное высокочастотное импульсное воздействие обеспечивает эффект вибрационного сглаживания нежелательной нелинейности и реализуется плавное движение без заклиниваний.

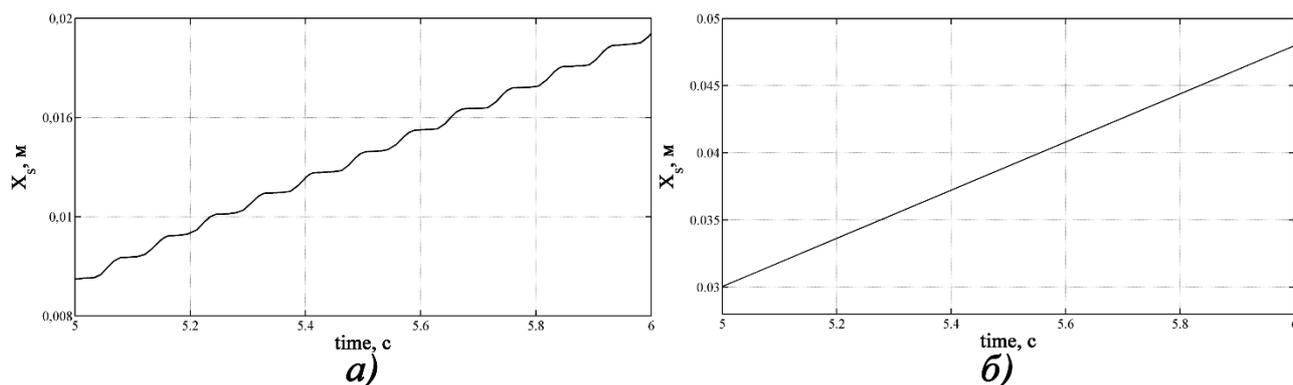


Рис. 3. Графики координаты X_s при возникновении автоколебаний без сглаживания (а) и при дополнительном импульсном воздействии (б)

Направление дальнейших исследований будет связано с обеспечением адаптивного сглаживания неравномерного движения при ползучих скоростях в условиях трения с Штрибек-эффектом.

ЛИТЕРАТУРА:

1. Бурдаков С.Ф., Шагннев О.Б. Модели механики в задаче управления силовым взаимодействием робота с поверхностью неопределенного профиля// НТВ СПбПУ. 2015. №4. С. 68-79.
2. Бурдаков С.Ф., Шагннев О.Б. Использование многокомпонентного датчика в задаче управления силовым взаимодействием робота с поверхностью неопределенного профиля// Неделя науки СПбПУ: материалы научной конференции с международным участием. 2015.
3. Бурдаков С.Ф., Байдина Т.А., Шагннев О.Б., Контактное взаимодействие робота с поверхностью неопределенного профиля при активном креплении силового сенсора// Неделя науки СПбПУ: материалы научной конференции с международным участием. 2016.
4. Бурдаков С.Ф., Байдина Т.А., Шагннев О.Б., Управление вибрационным состоянием робота при силовом взаимодействии с шероховатой поверхностью неопределенного профиля// НТВ СПбПУ. 2016. №4.

местоположение. Начальная форма границы соответствовала четверти окружности. В процессе интегрирования определялись радиус шейки x и полурасстояние между центрами частиц (усадка) h как функции времени.

Поток зернограничной диффузии определялся на основе уравнения $\mathbf{j}_{gb} = -\frac{\delta_{gb} D_{gb}}{kT} \nabla_{gb} \sigma_{nn}$ с граничными условиями $\sigma_{nn}|_{r=x} = \gamma_s \kappa$; $\left. \frac{\partial \sigma_{nn}}{\partial r} \right|_{r=0} = 0$; $2\pi \int_0^x \sigma_{nn} r dr = 2\pi x \gamma_s \sin \frac{\psi}{2} + 2\pi \frac{x^2}{2} \sigma_{eff}$, что позволяет получить аналитическое выражение для радиальной компоненты [2]:

$$j_{gb}(r) = \frac{4D_{gb}r}{kTx^2} \left(-\gamma_s \kappa + \sigma_{eff} + \frac{2\gamma_s}{x} \sin \frac{\psi}{2} \right), \quad (1)$$

где D_{gb} - коэффициент зернограничной диффузии; k - постоянная Больцмана; T - абсолютная температура, σ_{eff} - среднее нормальное сжимающее напряжение по поверхности контакта в шейке, γ_s представляет собой энергию поверхностного натяжения свободной поверхности, $\kappa = 1/R_1 + 1/R_2$ - сумма главных кривизн в точке на внешнем радиусе шейки.

Вектор потока поверхностной диффузии определялся на основе уравнений:

$$\begin{cases} \mathbf{j}_s = -\frac{\delta_s D_s \gamma_s}{kT} \nabla_s \kappa \\ \mathbf{v}_s = -\mathbf{n} \Omega \nabla_s \cdot \mathbf{j}_s \end{cases} \Rightarrow \frac{\partial u_n}{\partial t} = \frac{B}{r} \frac{\partial}{\partial s} \left(r \frac{\partial \kappa}{\partial s} \right), \quad (2)$$

где $\mathbf{v}_s = \mathbf{n} \frac{\partial u_n}{\partial t}$ - скорость движения границы по нормали \mathbf{n} , Ω - объем атома, $B = \frac{\delta_s D_s \gamma_s \Omega}{kT}$.

В качестве одного из граничных условий к (2) в точке А (см. рис. 1) использовались результаты вычисления зернограничной диффузии (1). Расчеты поверхностной диффузии, позволяющие определить изменения формы частиц с течением времени производились для никелевых шариков диаметром 40 мкм при 1000°C. При интегрировании по времени уравнения (2) использовался явный метод Эйлера. Исследовалось влияние давления и диффузионного коэффициента

$$\xi = \frac{\delta_{gb} D_{gb}}{\delta_s D_s} \quad (3)$$

на радиус шейки и эволюцию свободной поверхности при спекании.

На рис. 3 показано расчетное изменение формы шейки с течением времени при свободном спекании ($\sigma_{eff} = 0$) и $\xi = 1$. На рис. 4 показано изменение формы при спекании с разной силой поджатия в один и тот же момент времени $t = 3\,843\,440$ с.

На рис. 5 показана зависимость радиуса шейки от времени для различных напряжений поджатия частиц σ_{eff} . На рис. 6 представлена зависимость радиуса образовавшейся шейки от времени для различных значений диффузионного коэффициента ξ .

Как видно из рисунков 4 и 5, увеличение давления при спекании линейно увеличивает скорость спекания. Также, исходя из рис. 6, видно, что увеличение коэффициента диффузии ξ увеличивает скорость образования шейки. Это указывает на значительное влияние зернограничной диффузии на рост шейки.

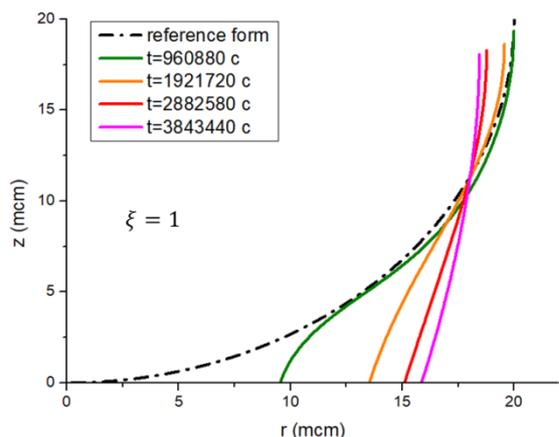


Рис. 3. Результаты расчета эволюции внешней свободной границы частицы при спекании

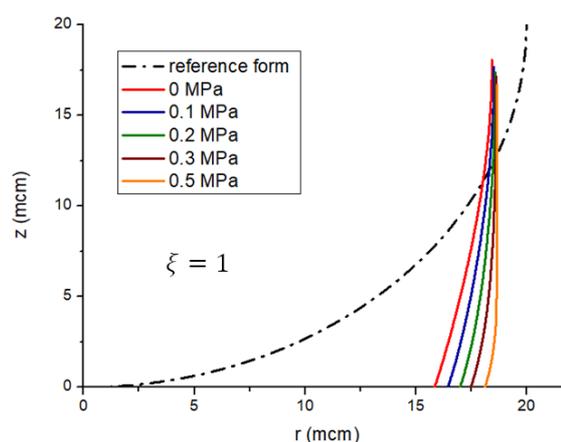


Рис. 4. Влияние механических напряжений на форму границы частицы при $t = 3\,843\,440$ с

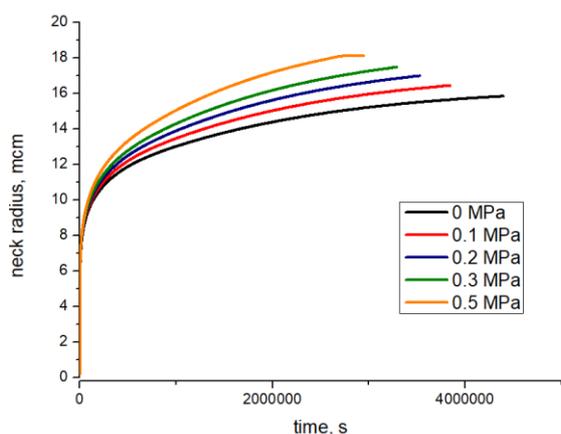


Рис. 5. Изменение радиуса шейки с течением времени для различных напряжений поджатия σ_{eff} .

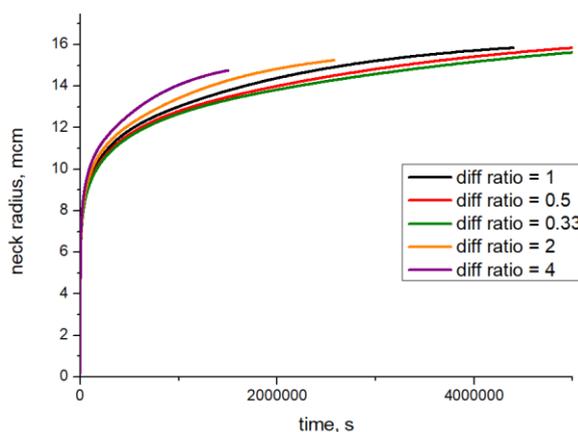


Рис. 6. Изменение радиуса шейки с течением времени для различных коэффициентов диффузии ζ .

В данном исследовании ограничились анализом бесконечного прямолинейного ряда частиц. В дальнейшем будет рассмотрена задача спекания двух сферических частиц, а также частиц других форм, размеров и взаимных расположений.

ЛИТЕРАТУРА:

1. Kang S-J.L., Sintering. Densification, grain growth and microstructure, 2005.
2. Bouvard D., McMeeking R.M. Deformation of interparticle necks by diffusion control creep, 1996, JACS, 79: 666–672.
3. Swinkels F.B., Ashby M.F. A Second Report on Sintering Diagrams, Acta Metall., 1987, 259.
4. German R.M., Lathrop J.F. Simulation of Spherical Powder Sintering by Surface Diffusion, J. Mater. Sci., 1978.
5. Exner V.H.E. Principles of Single Phase Sintering, Rev, Powder Metall. Phys. Ceram., 1979.
6. Semenov A.S., Trapp J., Nöthe M., Eberhardt O., Wallmersperger T., Kieback B. Experimental and numerical analysis of the initial stage of field-assisted sintering of metals, Journal of Materials Science. 2017. Vol. 52. № 3. P. 1486-1500.
7. Борисенко В.А., Семенов А.С. Моделирование искрового плазменного спекания никелевых шариков на основе решения термо-электро-механической задачи / Неделя науки СПбПУ. Сборник докладов научного форума с международным участием. Институт прикладной математики и механики. Санкт-Петербург, 2016. С. 50-52.

АНАЛИЗ ВЛИЯНИЯ ВИДА УПРОЧНЕНИЯ НА НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННОЕ СОСТОЯНИЕ ЦИЛИНДРИЧЕСКОГО ОБРАЗЦА ДЛЯ ТЕРМОУСТАЛОСТНЫХ ИСПЫТАНИЙ

Рабочие лопатки современных газотурбинных двигателей работают при высоких переменных температурах и напряжениях, когда материал испытывает существенные знакопеременные циклические упругопластические деформации, что приводит к необходимости тщательного исследования его свойств сопротивления термической усталости [1-4]. Неоднородность распределения пластических деформаций в образцах для испытаний на термическую усталость приводит к неточностям в определении параметров материала, используемых для расчета долговечности элементов конструкций. Детальный анализ распределения температуры, напряжения и деформации в образцах позволяет адекватно оценить локальные характеристики термической усталости, а также проанализировать особенности различных типов образцов для испытаний на термическую усталость.

Высокая стоимость и сложность проведения экспериментальных исследований термоусталостных свойств применительно к эксплуатационным условиям работы лопаток привели к необходимости моделирования термоусталостных испытаний образцов. Одной из ключевых задач является подбор адекватного закона упрочнения материала [5,6] при анализе процессов упруго-пластического деформирования.

На практике наиболее распространены два метода термоусталостных испытаний. Первый основывается на методике, предложенной Коффиным [7] и модернизированной в работе [8], заключающаяся в циклическом нагреве заземленного образца с разной степенью термического стеснения (рис. 1). Вариативность термического стеснения достигается путем введения дополнительного податливого элемента (2 на рис. 1). Наибольшее распространение получили три вида образцов (рис. 2) [6]. В данной работе рассматривается образец, представленный на рис. 2в.

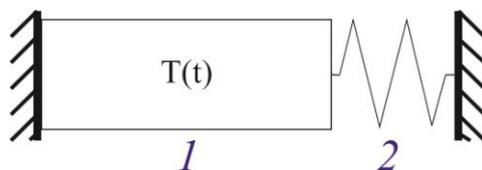


Рис. 1. Принципиальная схема закрепления цилиндрического образца.
1 – экспериментальный образец; 2 – дополнительный податливый элемент

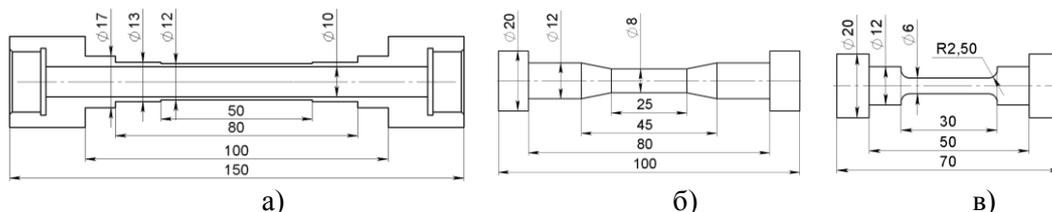


Рис. 2. Геометрические параметры образца для термоусталостных испытаний

Проведено прямое конечно-элементное (КЭ) моделирование термоусталостных испытаний цилиндрического образца (рис. 2в). Рассматривалась его четверть в осесимметричной постановке. Податливый элемент моделировался путем добавления

фиктивного материала заданной жесткости. С целью нивелирования осевых температурных деформаций фиктивного материала (это диктуется условием его постоянной жесткости) вдоль оси образца коэффициент температурного расширения задавался анизотропным - равным нулю в продольном направлении и равным коэффициенту температурного расширения основного материала в радиальном. КЭ модель образца представлена на рис. 3а. Распределение температур вдоль образца представлено на рис. 3б. Фиксация цилиндрического образца происходила при температуре $T_{защ} = \frac{T_{макс} - T_{мин}}{2} \frac{\sigma_{02}(T_{макс})}{\sigma_{02}(T_{мин})}$. Свойства материала задавались соответствующими поликристаллическому жаропрочному сплаву ЖС6Ф.

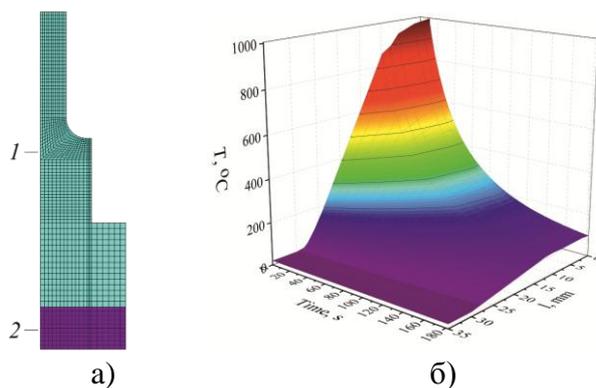


Рис. 3. КЭ модель образца (а), зависимость температуры образца от времени и удаления от центра (б)

Рассматривалось изотропное и кинематическое упрочнение материала. Кривые эволюции осевого напряжения и пластической деформации во времени при максимальной температуре первого цикла для обоих типов упрочнения представлены на рис. 4 и 5.

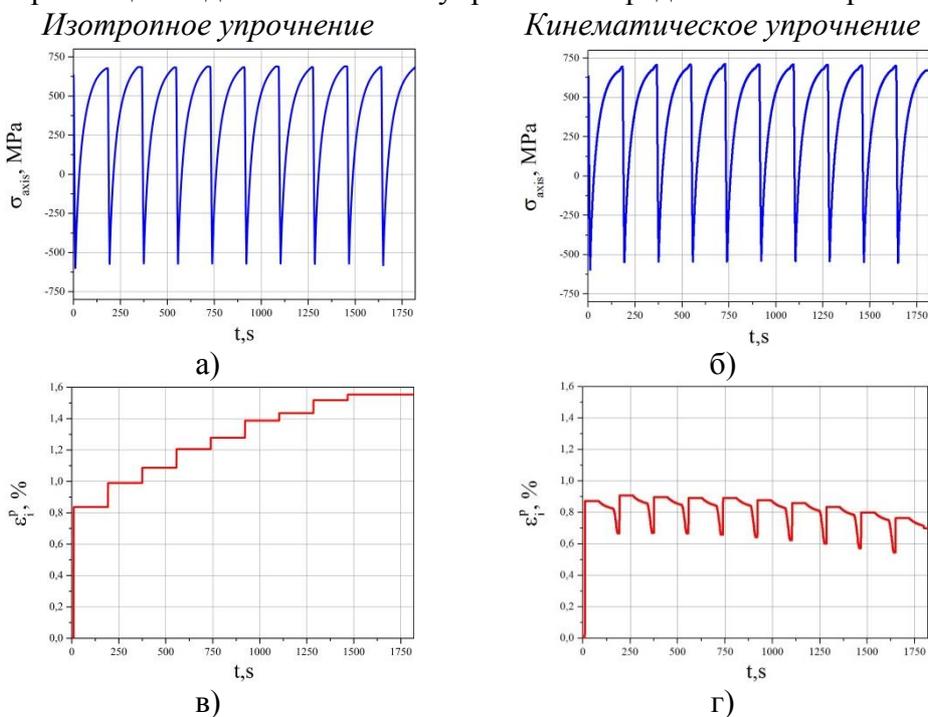


Рис. 4. Эволюция распределения а)-б) осевых напряжений; в)-г) интенсивности пластических деформаций для центральной точки образца при различных видах упрочнения

Видно, что выбор закона упрочнения оказывает существенное влияние на накопление пластической деформации. В случае изотропного упрочнения за десять циклов процесс деформирования практически выходит на установившийся режим, в то же время, при кинематическом упрочнении для достижения установившегося режима необходимо рассматривать существенно большее число циклов. При кинематическом упрочнении наблюдается больший размах петель гистерезиса, нежели чем при изотропном. Это оказывает существенное влияние на прогноз числа циклов до разрушения, определяемого по критериям [4].

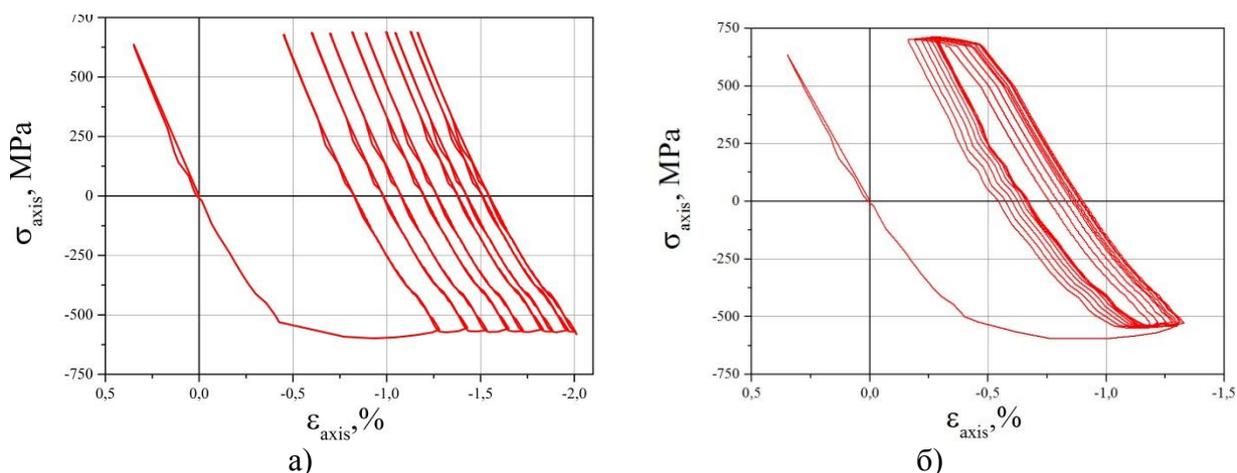


Рис. 5. Кривые упруго-пластического деформирования в центральной точке образца: а) модель изотропного упрочнения; б) модель кинематического упрочнения

Полученные результаты расчетов указывают на необходимость проведения тщательных экспериментальных исследований пластических свойств материала при знакопеременном нагружении в широком диапазоне температур.

Исследование выполнено при поддержке стипендиальной программы Siemens.

ЛИТЕРАТУРА:

1. Гецов Л.Б. Материалы и прочность деталей газовых турбин.-М.:Недра, 1996.- с.189-193.
2. Getsov L.B., Semenov A.S., Staroselsky A. A failure criterion for single-crystal superalloys during thermocyclic loading // Materials and technology. 2008. Vol. 42, P. 3–12.
3. Гецов Л.Б., Семенов А.С. Критерии разрушения поликристаллических и монокристаллических материалов при термоциклическом нагружении // Труды ЦКТИ. Вып. 296, 2009, С. 83-91.
4. Семенов А.С., Гецов Л.Б. Критерии термоусталостного разрушения монокристаллических жаропрочных сплавов и методы определения их параметров // Проблемы прочности. 2014, № 1. С. 50-62.
5. Семенов А.С. [Вычислительные методы в теории пластичности](#). – СПб: Изд-во СПбГПУ. 2008. – 211 с.
6. Гецов Л.Б., Мельников Б.Е., Семенов А.С. К вопросу выбора моделей для расчетов напряженно деформированного состояния элементов машиностроительных конструкций // В сборнике: Физика процессов деформации и разрушения и прогнозирование механического поведения материалов Труды XXXVI Межд/ семинара. 2000. С. 40-47.
7. Coffin L.F. A Study of Cyclic-thermal Stress in Ductile Metal // Journal of Pressure Vessel Technology, Transaction of the ASME. 1954. V. 76. P. 931-950.
8. Дульнев Р.А., Котов П.И. Термическая усталость металлов – М. Машиностроение, 1980.

РОБАСТНО-АДАПТИВНАЯ НАСТРОЙКА ПИД-РЕГУЛЯТОРОВ

Данная работа продолжает исследования в области управления классом динамических объектов, характеристики которых могут неконтролируемым образом изменяться в широком диапазоне, что эквивалентно изменению параметров их динамических моделей [1]. Рассматривается новый подход, нацеленный на преодоление существенных недостатков двух известных методов: робастного управления и базирующегося на идентификации актуальной модели объекта адаптивного управления. Постоянно применяемые робастные настройки регулятора, предотвращая аварийные ситуации, в среднем обеспечивают невысокие показатели качества управления. Идентификационный подход к адаптации, требующий активного вмешательства в режим нормальной эксплуатации управляемого процесса, также чреват серьезными отклонениями от расчетного режима на стадии идентификации параметров динамической модели объекта управления [2]. Суть предложенной в [1] робастно-адаптивной методики состоит в том, что настройки регулятора рассчитываются в зависимости от данных блока обнаружения разладки системы автоматического управления. При этом направление изменения коэффициентов регулятора определяется типом разладки. Самонастройка регулятора осуществляется таким образом, что «слабые» робастные настройки используются лишь в случае угрозы потери устойчивости, а переход к более «сильным» настройкам осуществляется без использования процедуры идентификации в духе методов прямой адаптации. Новизна данной работы в отличие от [1] заключается в том, что изложение ведется применительно к инерционным объектам с запаздыванием, управляемым посредством пропорционально-интегрально-дифференциального (ПИД) регулятора (рис. 1). Основным инструментом исследования является имитационное моделирование в программной среде MATLAB – SIMULINK.

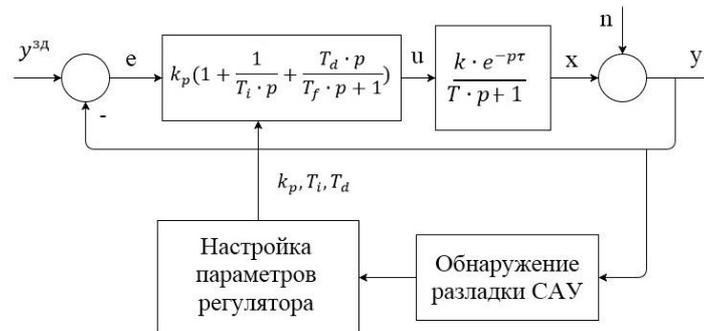


Рис. 1. Схема робастно-адаптивного управления (РАУ) с ПИД-регулятором

Введем вектор параметров «истинной» модели объекта управления $Z = [k, T, \tau]^T$ и вектор варьируемых параметров ПИД-регулятора $A = [k_p, T_i, T_d]^T$ (малая постоянная времени T_f находится в заданном отношении к T_d). В рамках той или иной методики параметры регулятора определяются в зависимости от параметров расчетной модели управляемого объекта $Z_r = [k_r, T_r, \tau_r]^T$, то есть $A = F(Z_r)$, причем в условиях неопределенности модель Z_r может отличаться от Z . Согласно данному в [1] описанию робастно-адаптивного метода для определения направления поиска настроек регулятора в пространстве возможных значений параметров модели объекта управления Z необходимо

знать две точки: Z_{nom} , для которой рассчитываются номинальные настройки регулятора в отсутствие неопределенности, и Z_{rob} , для которой рассчитываются робастные настройки регулятора, призванные обеспечить работоспособность системы при всех возможных значениях параметров объекта управления. В условиях интервальной неопределенности, когда параметры объекта управления заданы с помощью интервалов их возможных значений $\underline{k} \leq k \leq \bar{k}, \underline{T} \leq T \leq \bar{T}, \underline{\tau} \leq \tau \leq \bar{\tau}$, номинальные параметры регулятора определяются по правилу $A_{nom} = F(Z_r)$, где $Z_r = Z_{nom} = [\frac{k+\bar{k}}{2}, \frac{T+\bar{T}}{2}, \frac{\tau+\bar{\tau}}{2}]^T$. Что касается робастных настроек, то было рассмотрено два альтернативных варианта. В первом случае при использовании расчетной методики так называемого «компенсационного» метода применительно к реальным ПИД-регуляторам [3] робастные настройки определялись исходя из принципа наибольшей осторожности по правилу $A_{rob} = F(Z_r)$, где $Z_r = Z_{rob} = [\bar{k}, \underline{T}, \bar{\tau}]^T$ [4]. Для второго способа вначале определялись N наиболее чувствительных точек $Z_{r_m}, m = \overline{1, N}$, для которых расстройка влечет неустойчивость при номинальных параметрах регулятора A_{nom} . Для найденных точек «компенсационным методом» были подсчитаны соответствующие им настройки регулятора $A_m = F(Z_{r_m}), m = \overline{1, N}$. Далее полученные параметры регулятора проверялись на робастность. Показателем качества управления считалось среднеквадратичное отклонение (СКО) выходной переменной y от задания $y^{зд}$ при случайных возмущениях n . Для всех кандидатов на робастность рассчитывалось среднее СКО по 27 точкам области возможных значений параметров модели (рис. 2). В качестве точки для формирования робастных настроек выбирается та, для которой среднее СКО минимально.

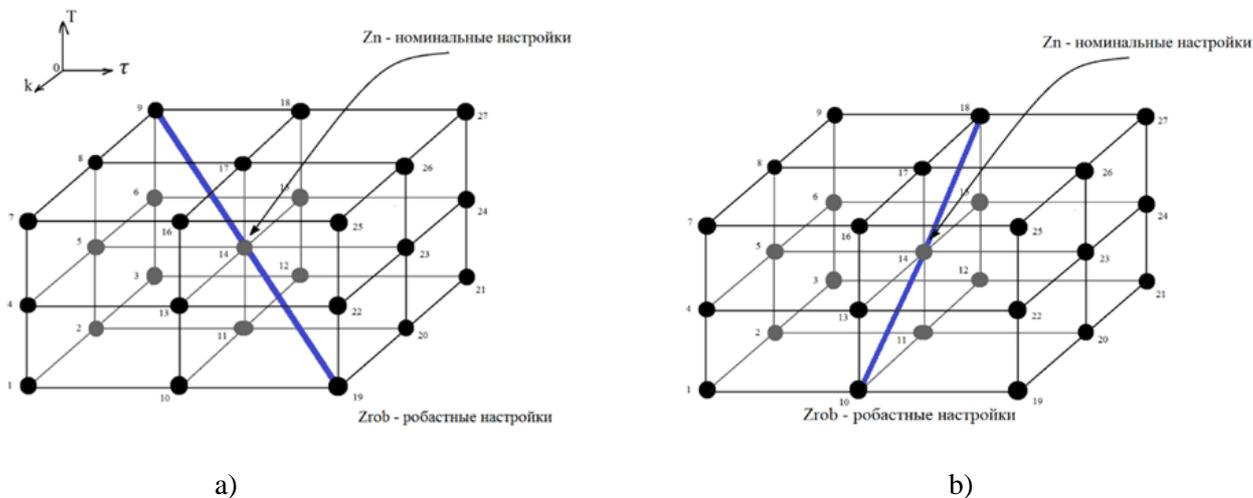


Рис. 2. Область возможных значений параметров модели и направления поиска робастно-адаптивных настроек ПИД-регулятора:

а) направление поиска $Z_{19} - Z_{nom} - Z_9$, б) направление поиска $Z_{10} - Z_{nom} - Z_{18}$.

Для проверки потенциальной эффективности робастно-адаптивного управления была выполнена большая серия численных экспериментов, имитирующих работу замкнутой САУ применительно к объекту с интервальной неопределенностью $1 \leq k \leq 4, 5 \leq T \leq 20, 2 \leq \tau \leq 10$, функционирующему при случайных возмущениях с нормированной корреляционной функцией $r(\vartheta) = \exp(-|\vartheta|/30)$. По рассмотренной выше методике было определено два варианта «робастных» точек Z_{19} и Z_{10} . Для каждого из этих вариантов были опробованы четыре способа настройки параметров: «традиционный» ($A = A_{nom}$), «робастный» ($A = A_{rob}$), «адаптивный» ($A = A_{ad}$) и «робастно-адаптивный». В двух вариантах «робастно-адаптивного» управления расчетный объект находился либо на

диагонали параллелепипеда, проходящей через точки $Z_{19} - Z_{nom}$ (рис. 2а), либо – через точки $Z_{10} - Z_{nom}$ (рис. 2б). На рис. 3 представлены графики, позволяющие сравнить относительную эффективность разных способов настройки ПИД-регулятора.

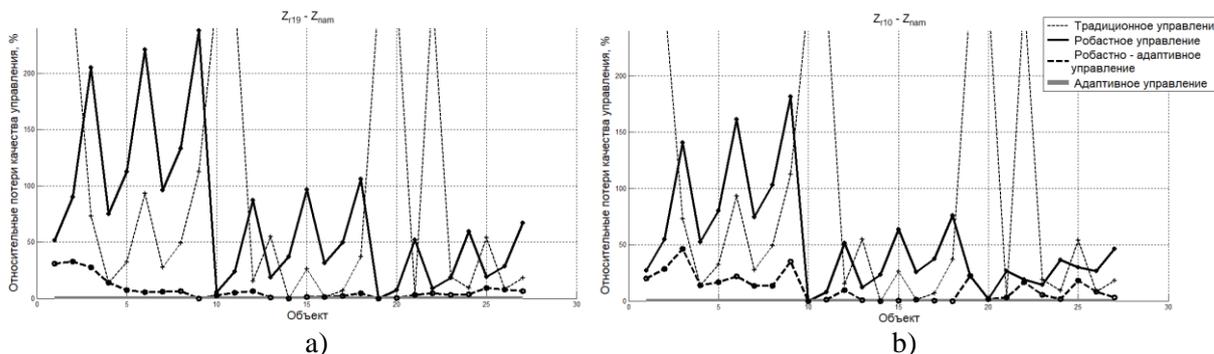


Рис. 3. Относительные потери качества управления для разных методов настройки параметров регулятора: а) робастная точка Z_{19} , б) робастная точка Z_{10} .

Как видно из результатов моделирования, «номинальные» настройки в расчете на середину интервалов неопределенности недопустимы, так как при неблагоприятной ситуации (рис. 3, точки 1, 2, 10, 11, 19, 20, 22) система теряет устойчивость. Поскольку наименьшее СКО достигается при адаптивном управлении благодаря использованию при настройке регулятора «истинной» модели управляемого объекта, то естественным показателем эффективности способов робастного и робастно-адаптивного управления служит относительное увеличение СКО по сравнению с адаптивным управлением. На рис. 3 значения этого показателя приведено для всех 27 вариантов параметров объекта управления применительно к двум изложенным выше способам определения робастных настроек. Обработка представленных графиков показывает, что при $Z_{rob} = Z_{19}$ (рис. 3а) робастное управление уступает адаптивному в среднем на 71%, в то время как робастно-адаптивное – всего на 7%. В случае $Z_{rob} = Z_{10}$ (рис. 3б) робастное управление хуже адаптивного на 52 %, а робастно-адаптивное уступает адаптивному на 11%. Таким образом, при общей эффективности робастно-адаптивного управления в сравнении с робастным первый способ выбора робастного ПИД-регулятора дает несколько лучшие результаты при использовании его для формирования робастно-адаптивных настроек. Он, однако, менее универсален, так как при переходе к многомерным объектам первый способ выбора робастных настроек не применим, а второй возможен.

ЛИТЕРАТУРА:

1. Доронина Н.А., Яковис Л.М. Робастно-адаптивное управление инерционными объектами с запаздыванием // Неделя науки СПбПУ : материалы научной конференции с международным участием. Институт прикладной математики и механики – СПб.: Изд-во Политехн. ун-та, 2016, с. 62 – 64.
2. Ротач В.Я. Теория автоматического управления: Учебник для вузов. // М., Издательство МЭИ, 2004, 400 с.
3. Вербенко П.С., Яковис Л.М. Метод настройки реальных ПИД-регуляторов для инерционных объектов с запаздыванием // XXXIX Неделя науки СПбГПУ. Материалы международной научно-технической конференции. Ч. V. СПб.: Изд-во СПбГПУ, 2010, с. 61 – 62.
4. Матвейчев И.В., Яковис Л.М. Робастная настройка типовых регуляторов при управлении инерционными объектами с запаздыванием // XXXVI Неделя науки СПбГПУ. Материалы Всероссийской межвузовской научно-технической конференции студентов и аспирантов. Ч. IV. СПб.: Изд-во СПбГПУ, 2008, с. 90 – 91.

ИССЛЕДОВАНИЕ НЕЛИНЕЙНОГО ДЕФОРМИРОВАНИЯ ОПТИМИЗИРОВАННОЙ
СЕТЧАТОЙ КОМПОЗИТНОЙ КОНСТРУКЦИИ

Введение. Сетчатые оболочки имеют более чем вековую историю; они были впервые использованы в строительстве еще в конце XIX века. В настоящее время сетчатые конструкции нашли широкое применение во многих областях, начиная от промышленного строительства и прогрессивной архитектуры и заканчивая авиакосмической отраслью. Одним из важнейших преимуществ композиционных материалов перед металлами является их легкость. Кроме того, некоторые современные углепластики, используемые в авиационном и космическом проектировании, в несколько раз превосходят алюминиевые сплавы по удельной прочности и удельной жесткости.

Однако для наиболее эффективного использования свойств композитов необходимо, чтобы направление приложенной нагрузки совпадало с направлением волокон композита; в противном случае эффективность от применения композиционного материала снижается во много раз. Сетчатая конструкция позволяет реализовать нагружение композиционного материала вдоль направления волокон, что позволяет сохранить в конструкции исключительные прочностные свойства композитов. Именно поэтому сетчатые композитные конструкции в настоящее время широко внедряются в авиакосмической отрасли [1].

Цели и задачи работы. Целью данной работы являлось исследование нелинейного деформирования ранее оптимизированной сетчатой композитной конструкции типа «плита» с учетом потери устойчивости, а также сравнение полученных результатов с экспериментальными данными.

Конструкция типа «плита» представляет собой решетку из ребер различного направления, количество, размеры и расположение которых должны быть определены в процессе проектирования. Плита опирается по контуру на опоры; в центре закреплена стальная накладка, к которой приложена распределенная нагрузка. Материал конструкции – однонаправленный трехкомпонентный углепластик, формируемый в процессе 3D-печати. Этот материал, разработанный в Сколковском институте науки и технологий, состоит из углеродного волокна и двух типов связующего, терморективного и термопластичного. Одновременное использование двух видов связующего позволяет добиться хорошей адгезии компонентов (в основном за счет низкой вязкости терморективного материала) при сохранении эластичности и ремонтпригодности термопластичного материала [2].

С использованием изложенных в [3] подходов к многоуровневому моделированию трехкомпонентного материала, в рамках работы [4] была выполнена многопараметрическая оптимизация сетчатой конструкции в среде оптимизации modeFrontier. В результате была найдена оптимальная конфигурация конструкции типа «плита» при заданном закреплении и способе нагружения. Полученная в результате оптимизации конфигурация плиты характеризуется двумя проходящими через центр ребрами, горизонтальным и вертикальным, а также рассчитанным количеством симметрично расположенных диагональных ребер (рис. 1а).

Полученная конструкция была изготовлена методом 3D печати из трехкомпонентного волокнистого композиционного материала с помощью экспериментального технологического оборудования «макет Z-принтера» в НПО «Техномаш». Изготовленная конструкция представлена на рис. 1б.

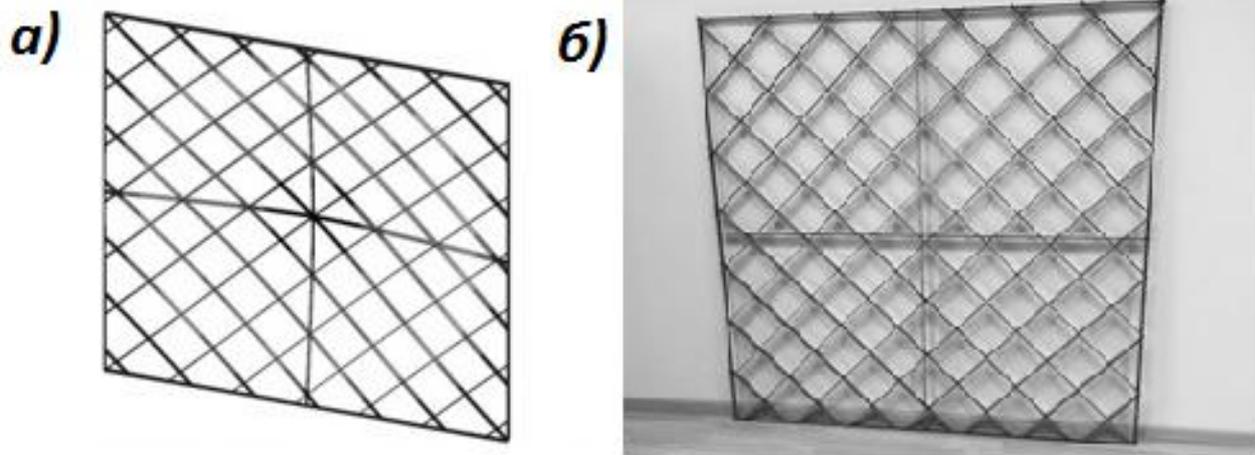


Рис. 1. Вид оптимальной конфигурации конструкции типа «плита»:
а) конечно-элементная модель, б) изготовленная конструкция

На изготовленной конструкции был проведен натурный эксперимент. В процессе испытаний было установлено, что под воздействием прикладываемой нагрузки ребра плиты теряют устойчивость и изгибаются (рис. 2а), что оказывает влияние на величину общего прогиба конструкции. Для получения картины распределения перемещений в плите с учетом потери устойчивости отдельных ребер был проведен конечно-элементный (КЭ) анализ форм потери устойчивости конструкции; далее модель была деформирована в соответствии с полученными формами потери устойчивости, и на деформированной модели был проведен нелинейный расчет.

Данный расчет был проведен в системе конечно-элементного анализа ANSYS; полученные результаты представлены на рис. 2б (для наглядности перемещения в модели увеличены в 5 раз). Как видно, характер распределения перемещений, полученный с помощью конечно-элементного моделирования, практически идентичен тому, что наблюдался в ходе эксперимента.

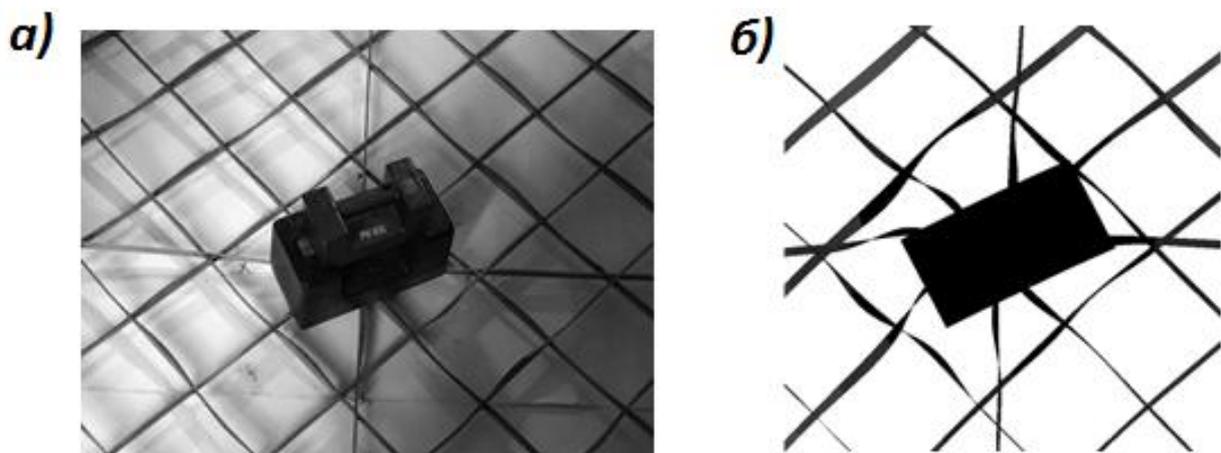


Рис. 2. Вид деформированной конструкции типа «плита»: а) фото из эксперимента, б) увеличенный фрагмент КЭ модели вблизи накладки

Тем не менее, вычисленное в результате расчета значение максимального прогиба (27.03 мм) существенно меньше полученного экспериментально (35.50 мм). Одной из возможных причин такого расхождения является то, что в расчете накладка считалась скрепленной с ребрами плиты, в то время как в эксперименте скрепления между накладкой и плитой не было; это могло повлиять на характер деформирования плиты в области вблизи

накладки. Также имелось отличие в условиях закрепления плиты: в КЭ модели линии контура плиты были полностью закреплены в направлении, перпендикулярном плоскости плиты; в эксперименте плита опиралась на опоры, и края плиты могли подниматься по мере ее деформирования.

Для большего соответствия условиям проведенного эксперимента была создана новая КЭ модель, в которой конструкция опиралась по контуру на жесткие опоры, которые по своим свойствам и геометрическим размерам были аналогичны использованным при проведении эксперимента; между узлами плиты и поверхностью опор был задан контакт. На новой модели был проведен аналогичный нелинейный расчет, результаты которого представлены на рис. 3.

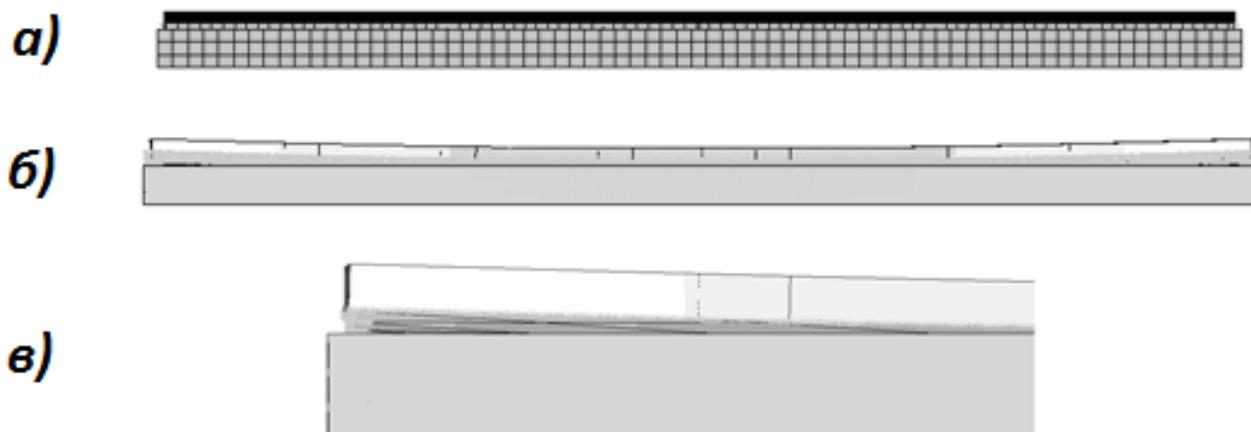


Рис. 3. Вид конструкции типа «плита» с опорами, вид сбоку: а) исходная КЭ модель, б) деформированная модель, в) увеличенный фрагмент модели вблизи угла конструкции

Как видно из полученных результатов, характер деформирования модели соответствует характеру деформирования реальной конструкции: углы плиты отрываются от опор и поднимаются вверх. При этом величина прогиба, вычисленная на данной модели, увеличилась по сравнению с ранее полученным значением и составила 31.28 мм, что довольно близко к значению, полученному экспериментально (35.50 мм).

Вывод. В данной работе было проведено исследование нелинейного деформирования сетчатой композитной конструкции типа «плита», для которой ранее была определена оптимальная конфигурация. При проведении расчета была учтена потеря устойчивости ребер конструкции; для большего соответствия условиям проведенного натурального эксперимента закрепление модели по контуру было заменено на контакт с жесткими опорами.

В результате нелинейного расчета, учитывающего потерю устойчивости ребер при изгибе и контактное взаимодействие ребер пластины с опорами, удалось получить довольно точное совпадение характера деформирования модели с характером деформирования реальной конструкции. Отличие вычисленной величины максимального прогиба конструкции от полученной в эксперименте составляет около 12%, что в первую очередь объясняется неоднородностями в характеристиках материала изготовленной конструкции типа «плита».

Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства образования и науки РФ (ФЦП «Исследования и разработки по приоритетным направлениям развития научно-технологического комплекса России на 2014–2020 годы», уникальный идентификатор ПНИЭР RFMEFI58114X0005).

ЛИТЕРАТУРА:

1. Васильев В.В., Барынин В.А., Разин А.Ф., Петроковский С.А., Халиманович В.И. Анизотридные композитные сетчатые конструкции — разработка и применение в космической технике. Композиты и наноструктуры, 2009, № 3, с. 38–50.
2. Азаров А.А., Антонов Ф.К., Васильев В.В., Голубев М.В., Красовский Д.С. и др. Разработка двухматричного композитного материала, изготовленного методом 3D-печати. Все материалы. Энциклопедический справочник, 2016, №7, с. 12–16.
3. Zobacheva A.U., Nemov A.S., Borovkov A.I. Multiscale Simulations Of Novel Additive Manufactured Continuous Fiber-Reinforced Three-Component Composite Material // Materials Physics and Mechanics 32 (2017) 74-82.
4. Ермоленко Н.А., Немов А.С. Параметрическая оптимизация сетчатых композитных конструкций // Неделя науки СПбПУ: материалы научной конференции с международным участием. Институт прикладной математики и механики. – СПб: Изд-во Политехнического университета, 2016. – 65-67.

УДК 531:539.4

И.А. Керестень, Ф.С. Плотников, И.Б. Войнов, А.А. Михайлов, А.И. Боровков
Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого

ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ЗАЦЕПЛЕНИЯ ЦЕВОЧНОЙ ПЕРЕДАЧИ РОТОРНОГО МЕХАНИЗМА И ИССЛЕДОВАНИЕ ЧУВСТВИТЕЛЬНОСТИ ФАКТОРОВ ЗАЦЕПЛЕНИЯ К ИЗМЕНЕНИЮ МЕЖОСЕВОГО РАССТОЯНИЯ

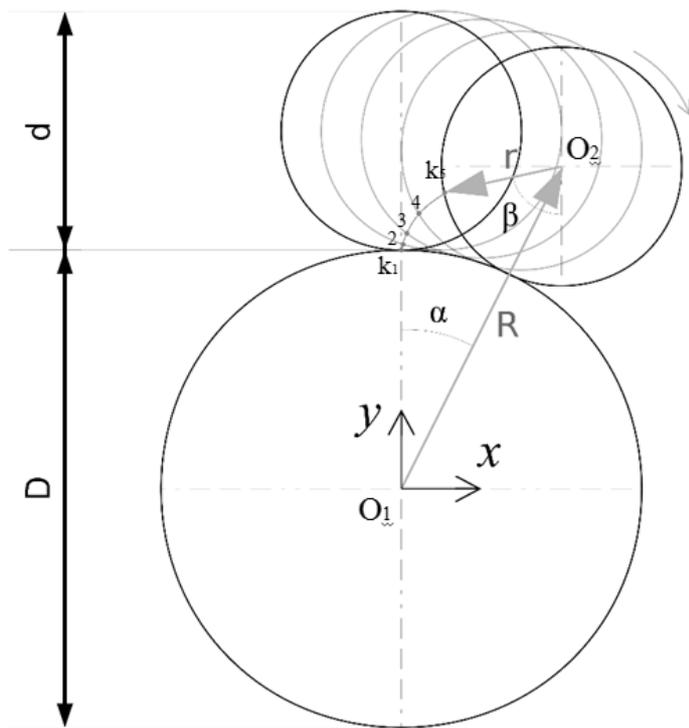
Введение. Статья посвящена исследованию и анализу факторов зацепления цевочной передачи роторного механизма, представляющего собой барабан, опирающийся на подвижные ролики. Передача движения от вала электродвигателя осуществляется с помощью цевочного зацепления. Основная особенность механизма заключается в специфической установке привода вращения барабана, допускающей изменение межосевого расстояния [1]. Профиль цевочного зацепления, представленный на рис. 1, является частным случаем циклоидального зацепления и описывается уравнением эпициклоиды [2, 3]:

$$\begin{cases} x = R \sin \alpha - r \sin \left[\left(1 + \frac{D}{d} \right) \alpha \right], \\ y = R \cos \alpha - r \cos \left[\left(1 + \frac{D}{d} \right) \alpha \right], \end{cases} \quad (1)$$

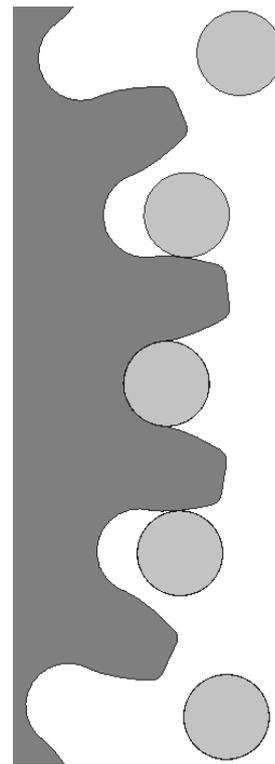
где R, r, α, β, D и d – геометрические параметры, представленные на рис. 1.

Задачи работы. Основными задачами работы являются: определение пределов работоспособности цевочной передачи и исследование чувствительности факторов зацепления к изменению межосевого расстояния. В качестве методов исследования рассматриваются: Impact-метод контактного взаимодействия программной системы ADAMS [4,5] и прямое конечно-элементное моделирование с использованием программной системы ANSYS.

Моделирование зацепления для абсолютно жестких недеформируемых тел. На рис. 2 представлена МВД модель цевочной передачи, разработанная в ADAMS и результаты многовариантного исследования нестационарного механизма зацепления для различных межосевых расстояний. В качестве критерия корректного зацепления выбрано соблюдение передаточного отношения от ведущей шестерни к ведомому цевочному колесу.

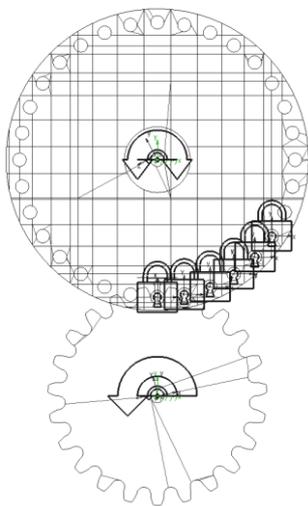


Процедура построения эпициклоиды

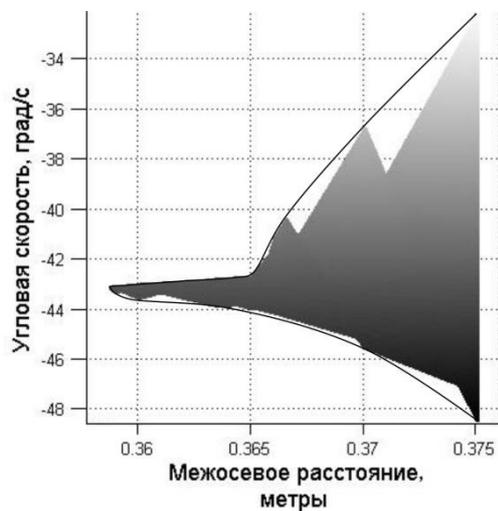


Профиль цевочного зацепления

Рис. 1. Геометрическая модель цевочной передачи



MBD модель цевочной передачи



Зависимость угловой скорости ведомого колеса для различных межосевых расстояний

Рис. 2. Модель цевочной передачи

Моделирование зацепления для деформируемых тел. На рис. 3 представлена CAE модель цевочного зацепления в Plain Strain постановке, разработанная в ANSYS. Общая идея детального моделирования особенностей контактного взаимодействия и связанного с ним напряженно-деформированного состояния состоит в использовании силовых нагрузок,

учитывающих общую динамику тел из ADAMS, в качестве начальных данных для анализа статической задачи контактного взаимодействия [6].

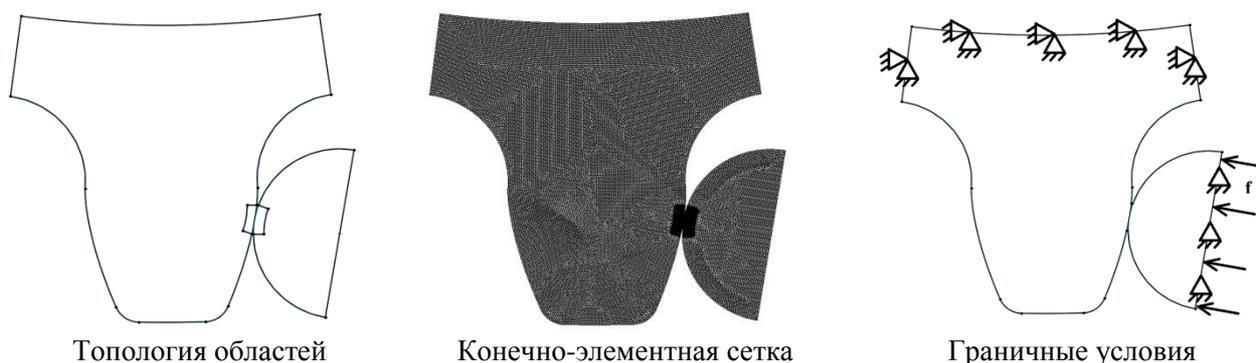


Рис. 3. CAE модель цевочного зацепления

На рис. 4 приведены результаты численного моделирования зацепления для деформируемых тел на примере межосевого расстояния, равного 0.363 м. Отметим, что CAE модель содержит около 150 000 КЭ. Также отметим, что площадка контакта составляет 2.61 мм².

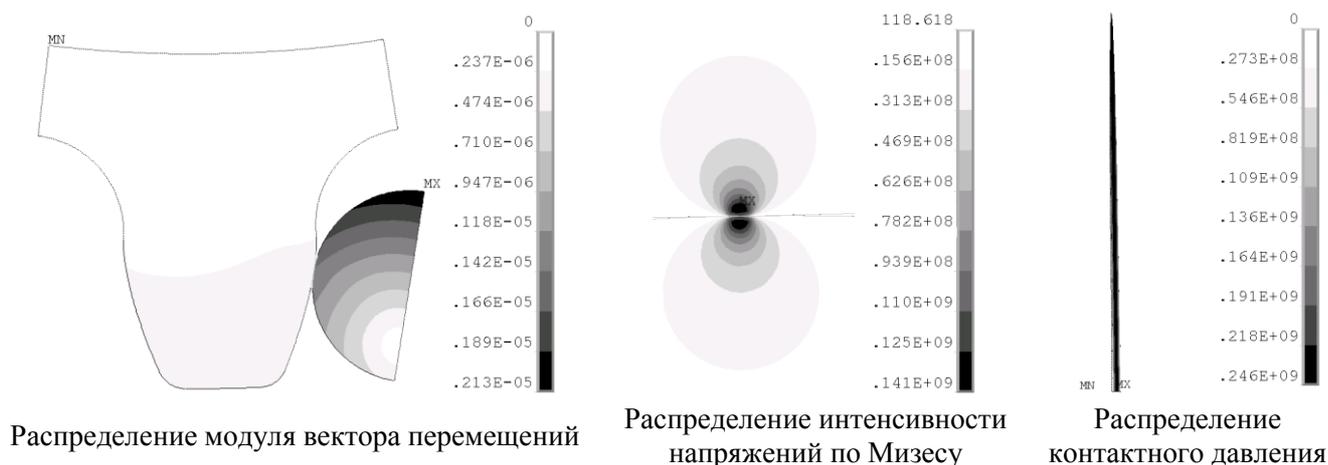


Рис. 4. Результаты численного моделирования зацепления для деформируемых тел

Выводы. Проведена численная оценка пределов работоспособности цевочной передачи роторного механизма и проведено исследование чувствительности факторов зацепления к изменению межосевого расстояния. По результатам моделирования для абсолютно жестких недеформируемых тел с использованием Impact-метода контактного взаимодействия ADAMS определен 2% диапазон изменения межосевого расстояния, в рамках которого цевочная передача не «чувствует» изменения и общий 5% диапазон работоспособности до потери зацепления. По результатам моделирования для деформируемых тел с использованием прямого конечно-элементного моделирования программной системы ANSYS, определены основные факторы зацепления: распределение модуля вектора перемещений, распределение интенсивности напряжений по Мизесу, распределение контактного давления и пятно контактной области.

ЛИТЕРАТУРА:

1. Численное моделирование, исследование и анализ процесса пуска и работы роторного механизма / И.А. Керестень, И.Б. Войнов, А.А. Михайлов, А.И. Боровков // Неделя науки СПбПУ : материалы научного форума с международным участием. Лучшие доклады. – СПб. : Изд-во Политехн. ун-та, 2016. – С.190-194.
2. Плоские кривые. Систематика, свойства, применение. Справочное руководство. А.А. Савелов под редакцией А.П. Нордена. Государственное издательство математической литературы, Москва, 1960 г., С. 109.
3. Проектирование механизмов и деталей приборов. Ф.Л. Литвин. Издательство «Машиностроение», 1973, Ленинград, С. 333-336.
4. MSC. Inc. Adams/Solver C++ Statements. – 2014. – 408 p.
5. Идентификация параметров контактной взаимосвязи Impact-метода MSC.ADAMS, исследование распределения реакций схемы крепления роторного механизма [электронный ресурс] : [сайт] / И.А. Керестень, И.Б. Войнов, А.А. Михайлов, А.И. Боровков. – Москва, 2016. – 6 с. – Режим доступа: http://docs.mssoftware.ru/conf/vuz2016/21_Keresten-tesis.pdf (13.10.2017).
6. Computational modelling of the natural hip: a review of finite element and multibody simulations / Adam Stops, Tuth Wilcox, Zhongmin Jin // Computer methods in Biomechanics and Biomedical Engineering, Vol. 15, No. 9, September 2012, pp. 963-979.

УДК 539.3

И.П. Кузнецов, А.Д. Новокшенов
Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого

ТОПОЛОГИЧЕСКАЯ ОПТИМИЗАЦИЯ СТЕРЖНЕВЫХ СТРУКТУР В СРЕДЕ ANSYS APDL

Актуальность. С развитием аддитивных технологий и появлением композитных 3D принтеров появилась возможность изготавливать стержневые композитные конструкции, соответственно, появилась необходимость в оптимизации таких конструкций с учетом особенностей технологии композитной 3D печати. Из-за того, что характерная толщина ребер таких конструкций составляет 0.5 – 2 мм, топологическая оптимизация для таких конструкций плохо применима. Альтернативным вариантом является стержневая оптимизация, впервые описанная в 1964 году [1], которая позволяет получать конструкции с бесконечно тонкими элементами.

Цель. Реализовать алгоритм топологической оптимизации для стержневых структур в программном комплексе ANSYS APDL.

Задача. Дана стержневая структура, в которой можно регулировать площадь поперечного сечения каждого стержня, и желаемый объем структуры. Необходимо минимизировать податливость системы при заданном объеме.

$$\min_{\mathbf{u}, \mathbf{t}} \mathbf{f}^T \mathbf{u}$$
$$\sum_{i=1}^m t_i \hat{\mathbf{K}}_i \mathbf{u} = \mathbf{f}, \quad \sum_{i=1}^m t_i = V, \quad t_i \geq 0, \quad i = 1, \dots, m$$

, где \mathbf{u} – вектор перемещений, t_i – объем i -ого стержня, $\hat{\mathbf{K}}$ – матрица жесткости, V – желаемый объем, m – количество элементов.

Для решения поставленной задачи воспользуемся методом оптимального критерия [2]. Этот итерационный метод распределяет материал пропорционально удельной энергии каждого стержня до достижения постоянного распределения энергии.

1. Для распределения объемов стержней t_i^{K-1} считаются перемещения и удельная энергия.

2.Находится коэффициент Λ^K так, чтобы выполнялось равенство

$$\sum_{i=1}^m \max \left\{ \frac{t_i^{K-1} \mathbf{u}_{K-1}^T \hat{\mathbf{K}}_i \mathbf{u}_{K-1}}{\Lambda^K}, t_{\min} \right\} = V$$

3.Обновляются объемы стержней для следующей итерации

$$t_i^K = \max \left\{ \frac{t_i^{K-1} \mathbf{u}_{K-1}^T \hat{\mathbf{K}}_i \mathbf{u}_{K-1}}{\Lambda^K}, t_{\min} \right\}$$

Реализация. Перед реализацией самого алгоритма оптимизации необходимо задать первоначальную геометрию, свойства материала и граничные условия. Вначале строится регулярная сетка узлов. После задаются свойства материала и тип конечного элемента. В рассматриваемых далее примерах тип конечного элемента был выбран LINK180. Далее узлы соединяются между собой посредством создания между ними линейных конечных элементов с заданными площадями поперечного сечения, при этом существует несколько вариантов их соединения. В данной работе рассмотрено два варианта, когда соединяются только соседние узлы и когда создаются все возможные соединения между узлами (кроме тех, которые накладываются на уже существующие). Затем задаются граничные условия.

Для самого алгоритма задается цикл, условием выхода из которого является совпадение матриц энергий элементов двух последних итераций с некоторой наперед заданной ошибкой. Матрица энергии выводится командами ETABLE,S,SENE и *VGET,,ELEM,1,ETAB,S. Также через команду *VGET получают матрицы длин и площадей поперечных сечений стержней. По формуле считается оптимальный критерий Λ , и обновляются площади поперечных сечений. После выхода из цикла удаляются самые тонкие стержни.

Результаты. Первой рассмотрим задачу, в которой плоская квадратная структура закреплена по всем степеням свободы в верхней и нижней точке с одной стороны, а с другой стороны по центру действует сила, направленная вниз. Если задать регулярную решетку с количеством узлов 441, в которой соединены только соседние узлы (1640 элементов), задача решается за 17 итераций. Полученная конструкция показана на рисунке 1 слева. Далее решим задачу с 49 узлами, но в которой заданы все возможные связи (748 элементов). Данная задача решается за 9 итераций. Результат показан на рис. 1 справа.

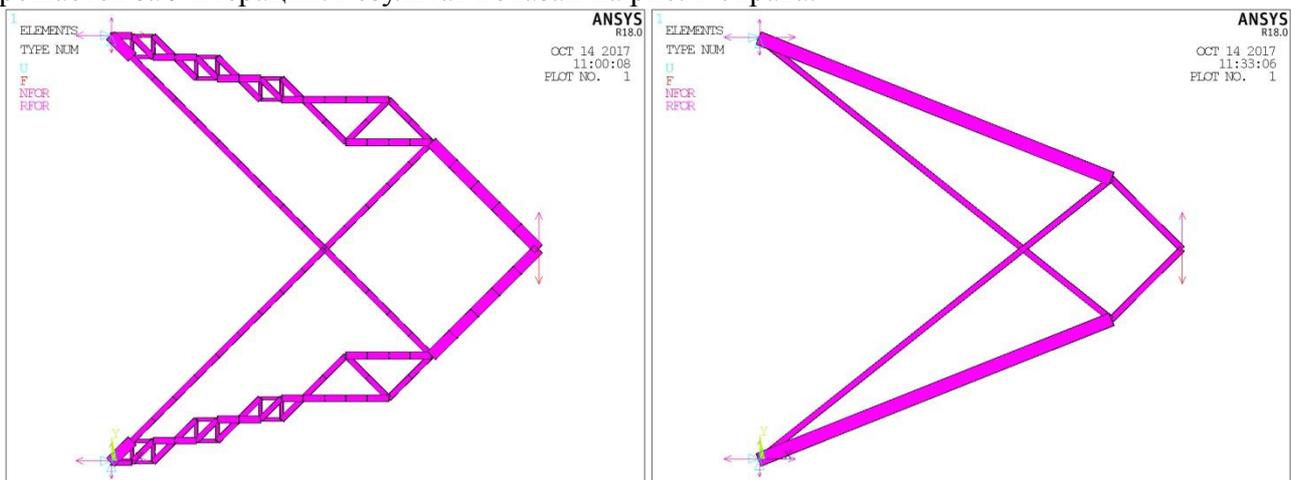


Рис. 1. Полученные конструкции для первой задачи

Рассмотрим вторую задачу. Плоская квадратная структура закреплена заделками с правого и левого нижних углов, сила действует по центру нижней стороны. Зададим решетки как в прошлой задаче. В первом случае задача решается за 12 итераций, во втором за 18 итераций. Результаты представлены на рис. 2.

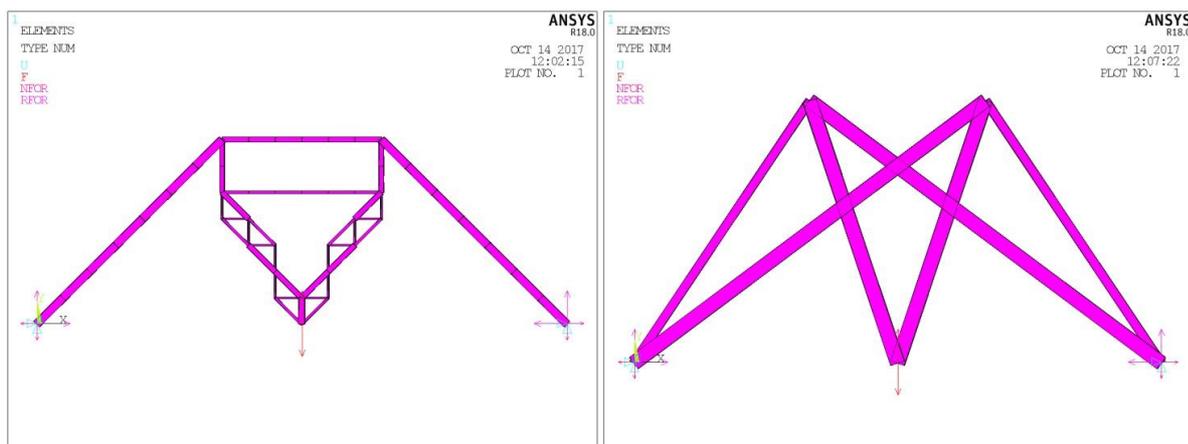


Рис. 2. Полученные конструкции для второй задачи

Третьей рассмотрим задачу, описанную в статье Ахтзигера и Столпа [3]. Центральная треть одной из сторон плоской структуры жестко закреплена, сила действует на центр другой стороны и направлена вниз. В этой задаче рассмотрим конструкцию, в которой соединены только соседние узлы (1640 элементов). Задача решается за 13 итераций. Результаты представлены на рис. 3.

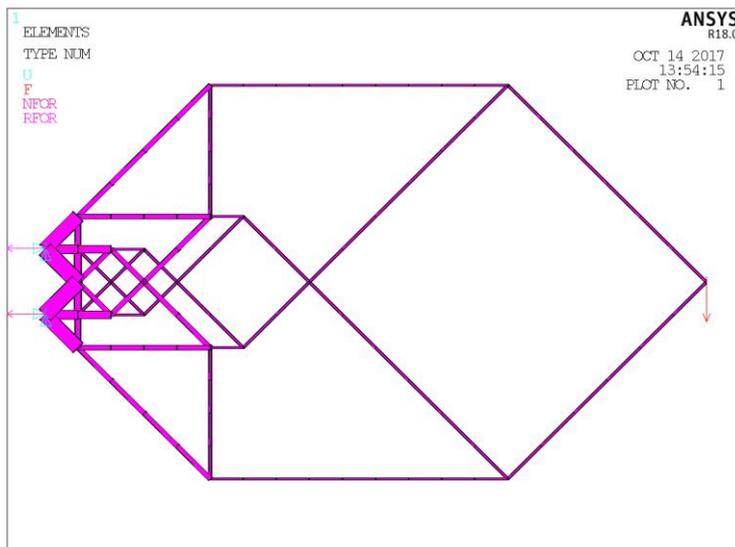


Рис. 3. Полученная конструкция для третьей задачи

Вывод. Полученные решения задач хорошо согласуются с приведенными в литературе, что говорит о работоспособности разработанной программы. Однако толщины полученных стержневых элементов меняются при переходе от одного элемента к другому (дискретно, в рамках диапазона $[t_{min}, t_{max}]$), что не технологично с точки зрения 3D печати на композитном принтере. В качестве дальнейшего направления исследований целесообразно рассмотреть модификации алгоритма для получения стержневых конструкций с неменяющейся толщиной.

ЛИТЕРАТУРА:

1. Dorn W, Gomory R, Greenberg H (1964) Automatic design of optimal structures. Journal de Mechanique
2. Bendsøe M, Sigmund O (2003) Topology Optimization: Theory, Methods and Applications. Springer
3. Achtziger W, Stolpe M (2006) Truss topology optimization with discrete design variables – Guaranteed global optimality and benchmark example. Springer

ОЦЕНКА ДОПУСТИМОЙ НАГРУЗКИ НА КОНСТРУКЦИЮ С ПРИМЕНЕНИЕМ
СОВРЕМЕННЫХ КРИТЕРИЕВ

Актуальность. При проведении расчетов на статическую прочность механических конструкций требуется определить нагрузки на основные конструктивные элементы, а также прогнозировать предельно допустимую нагрузку, которую они могут выдержать. На данный момент классическим решением данного вопроса является методика, основывающаяся на категоризации напряжений [1,2]. Такой подход неудобен тем, что напрямую зависит от выбранной области, на которой рассматривается и осредняется тензор напряжений. Также из-за использования идеально-упругой модели материала при расчетах не позволяет оценить возникающие пластические деформации в зонах наибольшей концентрации напряжений.

В зарубежных нормах [3,4] при использовании численного моделирования эффективно применяется метод предельных нагрузок. Он интересен своей инвариантностью касемо выбора рассматриваемой точки и тем, что включает в себя прямое моделирование работы конструкции в целом без внесения существенных упрощений с учетом фактического нагружения, а также позволяет эффективно использовать современные средства инженерного анализа.

Цели и задачи. Целью работы является рассмотрение современных методов оценки предельного состояния конструкции.

Будет произведен расчет предельно допустимой нагрузки в корпусе тепломеханического оборудования на основании различных современных нормативных методов, а затем будет проведено сравнение полученных результатов с данными, полученными по методике категоризации напряжений.

Решение. Рассматривается корпус и закрепленная в нем крышка. На рис. 1 представлена конечно-элементная модель четверти конструкции, так как она имеет две плоскости симметрии. При этом заданы соответствующие граничные условия: отсутствие перемещений по нормали к сечениям в плоскостях YOZ и XOY для обеих деталей конструкции, а также конструкция закреплена, чтобы запретить ее перемещение как твердого целого. Объект рассматривается при температуре 280°C. Корпус выполнен из стали 15ГС: $E = 196$ ГПа, $\nu = 0.28$, $\sigma_y = 233$ МПа. В качестве воздействия рассматривается внутреннее давление (рис. 1б.). Его предельное значение для конструкции и будем определять.

Суть метода предельного анализа состоит в прямом численном моделировании элемента конструкции с учетом упругопластических свойств материала и расчете его реакции на пропорционально меняющуюся внешнюю нагрузку, под действием которой он доводится до состояния, в котором теряет свою несущую способность. Имеется несколько критериев для оценки обобщенной предельной нагрузки на конструкцию, например, критерий двойного угла (Twice-elastic-slope method, TES) [3,5,6], метод двух касательных (Tangent-intersection method, TI) [3,4,5,6], критерий определения предельной нагрузки по пластической работе (Plastic-work criterion, PW) [3], метод двойной упругой деформации, 1%-plastic-strain method, 0.2%-offset-strain method [6] и т.п. Рассмотрим первые два из них и сравним полученные результаты с допустимыми значениями нагрузок, полученных аналитически согласно нормативным подходам [2].

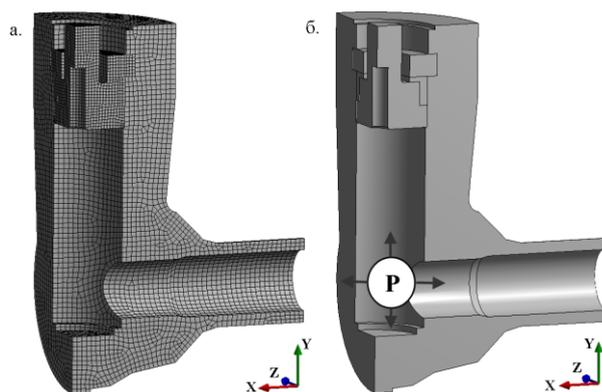


Рис. 1. Модель тройникового соединения:
 а. с учетом конечно-элементного разбиения, б. с учетом приложенной нагрузки

При использовании критерия двойного угла строится зависимость обобщенного перемещения от обобщенной нагрузки, из которой предельная нагрузка P_L определяется из пересечения графика с секущей, имеющий тангенс наклона в два раза больший, нежели линейный участок графика. При этом есть опасность, что данный метод даст некорректное решение в случае, если угол наклона лилейного участка будет большой.

Использование метода двух касательных состоит в построении графика обобщенного перемещения от обобщенной нагрузки и в определении обобщенной силы P_L по точке пересечения двух касательных, одна из которых касается начального (линейного) участка, а вторая — нелинейного участка, где наблюдается вполне установившийся процесс развития пластической деформации или же вторая касательная проводится в точке, где пластические деформации не превышают 5%.

При рассмотрении корпуса мы будем иметь в качестве обобщенной силы внутреннее давление. Далее в применении к рассматриваемому объекту на рис. 2 представлены оба метода.

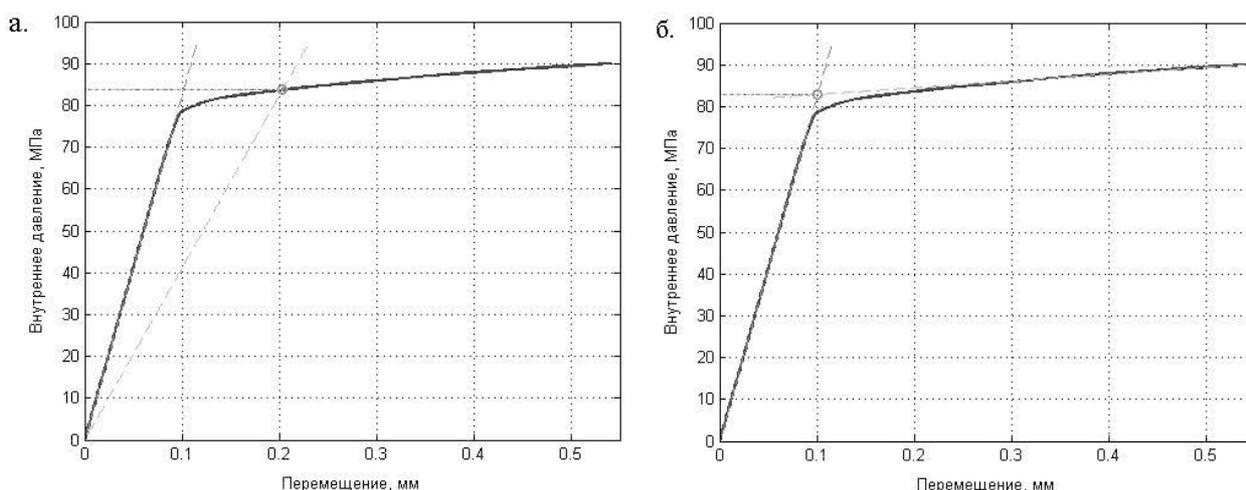


Рис. 2. Зависимость перемещения от внутреннего давления для определения предельной нагрузки с применением:
 а. критерия двойного угла, б. метода двух касательных

Из графиков на рис. 2 можно получить значения предельных нагрузок: для критерия двойного угла $P_{TES} = 83.721$ МПа , для метода двух касательных $P_{TI} = 82.878$ МПа .

Допустимая нагрузка P_A для обоих рассмотренных случаев определяется согласно [3] как $P_A = 1.5P_L$. Далее в табл. 1 получены коэффициенты запаса по предельной нагрузке в зависимости от используемого метода для случая нагружения тройникового соединения внутренним давлением величиной $P = 37.3$ МПа.

Табл. 1. Сравнение оценок несущей способности конструкции исходя из разных методик.

Критерий	Характер величины	Допустимое значение, МПа	Действующее (P)/ приведенное (σ) значение	Коэффициент запаса по предельной нагрузке
Критерий двойного угла	Нагрузка (P)	55.8	37.3	1.5
Метод двух касательных	Нагрузка (P)	55.3	37.3	1.5
РД 10-249-98	Напряжение (σ)	159.4	83.07	1.9

Выводы. Метод предельного анализа позволяет произвести оценку допустимого значения нагрузки на элементы конструкции, применяя прямое моделирование и учитывая упруго-пластические свойства элементов конструкции, независимо от выбора точки для фиксации изменения обобщенного перемещения и размеров самой конструкции, а также оценить прочность конструкции без заведомо известного значения предельной нагрузки. Кроме того, при заведомо проведенной полной верификации позволяет получить наглядные результаты по испытанию несущей способности конструкций. Все это позволяет убедиться в том, что данный метод очень удобен при оценке жизнеспособности конструкций.

ЛИТЕРАТУРА:

1. Нормы расчета на прочность оборудования и трубопроводов атомных энергетических установок ПНАЭ Г-7-002-86.
2. Нормы расчета на прочность стационарных котлов и трубопроводов пара и горячей воды РД 10-249-98.
3. Code ASME BPVC 2007. The American Society of Mechanical Engineers. Three Park Avenue, New York, NY 10016-5990.
4. CEN, prEN 13445-3: Part 3. Unfired pressure vessels. European Committee for Standardisation (CEN); 1999.
5. Martin Muscat, Donald Mackenzie, Robert Hamilton. «A work criterion for plastic collapse». International journal of pressure vessels and piping 80 (2003) p.49-58.
6. Hashem Mohamed Mourad «Elastic-plastic behavior and limit load analysis of pipe bends under of plane moment loading and internal pressure», 1999.

УДК 539.3, 537.226.4

С.М. Лобанов, А.С. Семенов
Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого

МОДЕЛИРОВАНИЕ ПОВЕДЕНИЯ ДОМЕННОЙ СТРУКТУРЫ БЕССВИНЦОВЫХ СЕГНЕТОЭЛЕКТРИКОВ ВЕЛИЗИ МОРФОТРОПНОЙ ФАЗОВОЙ ГРАНИЦЫ ПРИ ЭЛЕКТРИЧЕСКОМ НАГРУЖЕНИИ

Сегнетоэлектрические и сегнетоэластические материалы активно используются в качестве сенсоров и актуаторов в самых разных областях промышленности – от автомобилестроения до микроэлектроники. Бессвинцовые сегнетоэлектрики и керамики

входили в число первых материалов, открытых ещё в первой половине 20-го века при становлении знаний о сегнетоэлектрическом эффекте. Однако, позже керамики на основе титанат-цирконата свинца (ЦТС) в силу лучших пьезоэлектрических и диэлектрических качеств полностью вытеснили бессвинцовые материалы. В последнее время в связи с возрастающей важностью экологических проблем возобновился интерес к исследованию сегнетоэлектрических материалов, не содержащих свинца, т.к. использование ЦТС приводит к возникновению опасных свинцовосодержащих отходов [1]. Не так давно было обнаружено, что керамики на основе титаната бария и других бессвинцовых перовскитов вблизи морфотропной границы между сегнетоэлектрическими фазами могут показывать диэлектрические и пьезоэлектрические показатели на уровне близком к ЦТС.

В частности, в диссертации К.Сайферта [2] исследуются возможные составы BNT-BKT-KNN, состоящие из тетрагонального $(\text{Bi}_{0.5}\text{K}_{0.5})\text{TiO}_3$ (BKT), ромбоэдрического $(\text{Bi}_{0.5}\text{Na}_{0.5})\text{TiO}_3$ (BNT) и орторомбического $(\text{K}_{0.5}\text{Na}_{0.5})\text{NbO}_3$ (KNN), описываемые следующим выражением [2]:

$$\left(1 - \frac{y}{100}\right) \left[\left(1 - \frac{x}{100}\right) \text{BNT} + \frac{x}{100} \text{BKT} \right] + \frac{y}{100} [97\text{KNN} + 3\text{BKT}] \quad (1)$$

В соответствии с формулой (1) соединение может быть охарактеризовано парой чисел $x; y$.

Сегнетоэлектрические фазы одного вещества различаются по форме кристаллической решетки и направлению спонтанной поляризации. Для тетрагональной фазы возможны 6 направлений спонтанной поляризации, совпадающие с ребрами исходной кубической решетки: $[1\ 0\ 0]$, $[0\ 1\ 0]$, $[0\ 0\ 1]$, $[-1\ 0\ 0]$, $[0\ -1\ 0]$, $[0\ 0\ -1]$. Для орторомбической фазы направления спонтанной поляризации совпадают с пространственными диагоналями куба, и их 8: $[1\ 1\ 1]$, $[1\ 1\ -1]$, $[1\ -1\ 1]$, $[1\ -1\ -1]$, $[-1\ 1\ 1]$, $[-1\ -1\ 1]$, $[-1\ 1\ -1]$, $[-1\ -1\ -1]$. Для орторомбической – 12 возможных направлений спонтанной поляризации, совпадающих с гранями куба: $[1\ 1\ 0]$, $[-1\ 1\ 0]$, $[1\ -1\ 0]$, $[-1\ -1\ 0]$, $[1\ 0\ 1]$, $[-1\ 0\ 1]$, $[0\ 1\ 1]$, $[0\ -1\ 1]$, $[1\ 0\ -1]$, $[-1\ 0\ -1]$, $[0\ 1\ -1]$, $[0\ -1\ -1]$. Если предположить, что все ядра, имеющие одинаковое направление спонтанной поляризации, объединены в один домен, трехфазный материал можно представить в виде 26 доменов. Под действием внешней нагрузки вследствие процессов переключения относительные доли доменов могут изменяться.

В программе CES 4.1 [3] реализована микромеханическая модель сегнетоэлектроупругого материала, учитывающая динамику роста доменов [4, 5].

Каждому домену I в кристаллите ставится в соответствие некоторая объемная доля c_I . Определяющие соотношения получаются на основе осреднения по объему кристаллита в предположении постоянства полей напряжений и электрического поля (гомогенизация по Фойгту):

$$\begin{Bmatrix} \boldsymbol{\varepsilon} \\ \mathbf{D} \end{Bmatrix} = \sum_{I=1}^M c_I \left(\begin{bmatrix} {}^4\mathbf{S}_I^E & {}^3\mathbf{d}_I^T \\ {}^3\mathbf{d}_I & \boldsymbol{\kappa}_I^\sigma \end{bmatrix} \circ \begin{Bmatrix} \boldsymbol{\sigma} \\ \mathbf{E} \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \boldsymbol{\varepsilon}_I^r \\ \mathbf{P}_I^r \end{Bmatrix} \right) = \left(\sum_{I=1}^M c_I \begin{bmatrix} {}^4\mathbf{S}_I^E & {}^3\mathbf{d}_I^T \\ {}^3\mathbf{d}_I & \boldsymbol{\kappa}_I^\sigma \end{bmatrix} \right) \circ \begin{Bmatrix} \boldsymbol{\sigma} \\ \mathbf{E} \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \boldsymbol{\varepsilon}^r \\ \mathbf{P}^r \end{Bmatrix}, \quad (2)$$

где $\boldsymbol{\varepsilon}, \mathbf{D}, \boldsymbol{\sigma}, \mathbf{E}$ - осредненные по объему кристаллита значения тензора деформаций, вектора диэлектрических смещений, тензора напряжений и вектора электрического поля; ${}^4\mathbf{S}_I^E, {}^3\mathbf{d}_I, \boldsymbol{\kappa}_I^\sigma$ - тензоры податливости, пьезоэлектрических коэффициентов, диэлектрической проницаемости, соответствующие I -му варианту доменов кристаллической решетки.

Уравнения эволюции для осредненных по объему кристаллита тензора остаточной деформации $\boldsymbol{\varepsilon}^r$ и вектора поляризации \mathbf{P}^r имеют вид:

$$\begin{Bmatrix} \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^r \\ \dot{\mathbf{P}}^r \end{Bmatrix} = \sum_{I=1}^M \dot{c}_I \begin{Bmatrix} \boldsymbol{\varepsilon}_I^r \\ \mathbf{P}_I^r \end{Bmatrix} = \sum_{\alpha=1}^N \dot{f}_\alpha \begin{Bmatrix} \boldsymbol{\mu}_\alpha \gamma_\alpha \\ \mathbf{s}_\alpha P_\alpha \end{Bmatrix}, \quad (3)$$

где N – количество возможных переходов α из I -ой системы в J -ую; $\boldsymbol{\mu}_\alpha$ и \mathbf{s}_α - тензор и вектор Шмидта для перехода α из I -ой системы в J -ую; γ_α, P_α - сдвиг и инкремент поляризации при

переходе из I -ой системы в J -ую; \dot{f}_α - функция, определяющая скорость перехода, зависящая от движущей силы G_α и объемной доли c_I , введена по аналогии с вязко-пластичностью [4]:

$$\dot{f}_\alpha = \dot{f}_0 \frac{G_\alpha}{G_c} \left| \frac{G_\alpha}{G_c} \right|^{n-1} \left(\frac{c_I}{c_0} \right)^m, \quad (4)$$

где $G_\alpha = \boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\mu}_\alpha \boldsymbol{\gamma}_\alpha + \mathbf{E} \cdot \mathbf{s}_\alpha P_\alpha + \boldsymbol{\sigma} \cdot \Delta^3 \mathbf{d} \cdot \mathbf{E}$ - движущая сила.

Количество параметров в модели может быть уменьшено до 4: G_c, P_α, n, m , причем их идентификация осуществляется на основе экспериментальных гистерезисных кривых [5].

На рис. 1 представлены результаты моделирования нагружения образца BNT-BKT-KNN 20;0.5 электрическим полем с амплитудами 4; 6; 8 МВ/м в сравнении с экспериментальными данными при параметрах модели взятых из табл. 1 и 2. Видно, что модель хорошо описывает исследуемый материал при различных нагрузках.

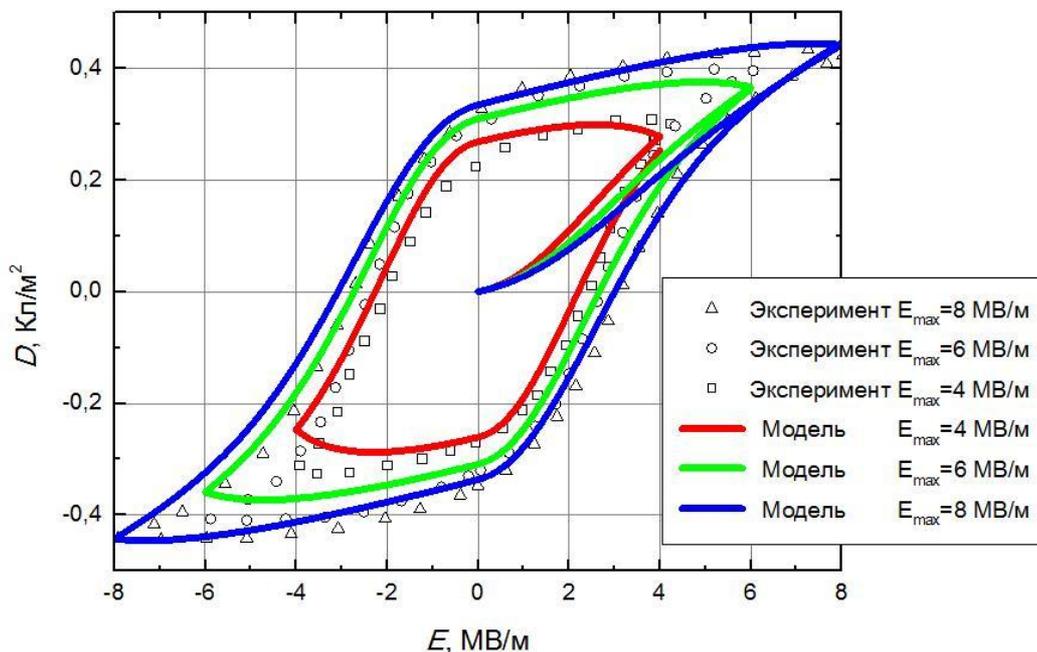


Рис. 1. Сравнение экспериментальных данных и результатов расчета при циклическом нагружении образца BNT-BKT-KNN 20;0.5 электрическим полем (амплитуды 4;6;8 МВ/м)

Табл. 1. Параметры материала (линейное поведение)

d_{33} , м/В	1.57e-010
d_{31} , м/В	8e-011
d_{15} , м/В	1.94e-010
k_{33} , Ф/м	2.51e-008
E_1 , Н/м²	9.26e+010
ν_{12}	0.304

Табл. 2. Параметры модели (нелинейное поведение)

G_c , МВ Кл/м³	7.5e7
P_ω , Кл/м²	0.21
n	1.2
m	1.0

На рис. 2 показаны графики изменения объемных концентраций 26 доменов, разбитые на три рисунка по фазам, при нагружении образца трехфазного BNT-BKT-KNN 20;0.5 электрическим полем в направлении [0 0 1]. В легендах к графикам домены описываются соответствующие им направлением спонтанной поляризации. Видно, что концентрации доменов, направленных в сторону внешней электрической нагрузки растут, а в обратную сторону убывают.

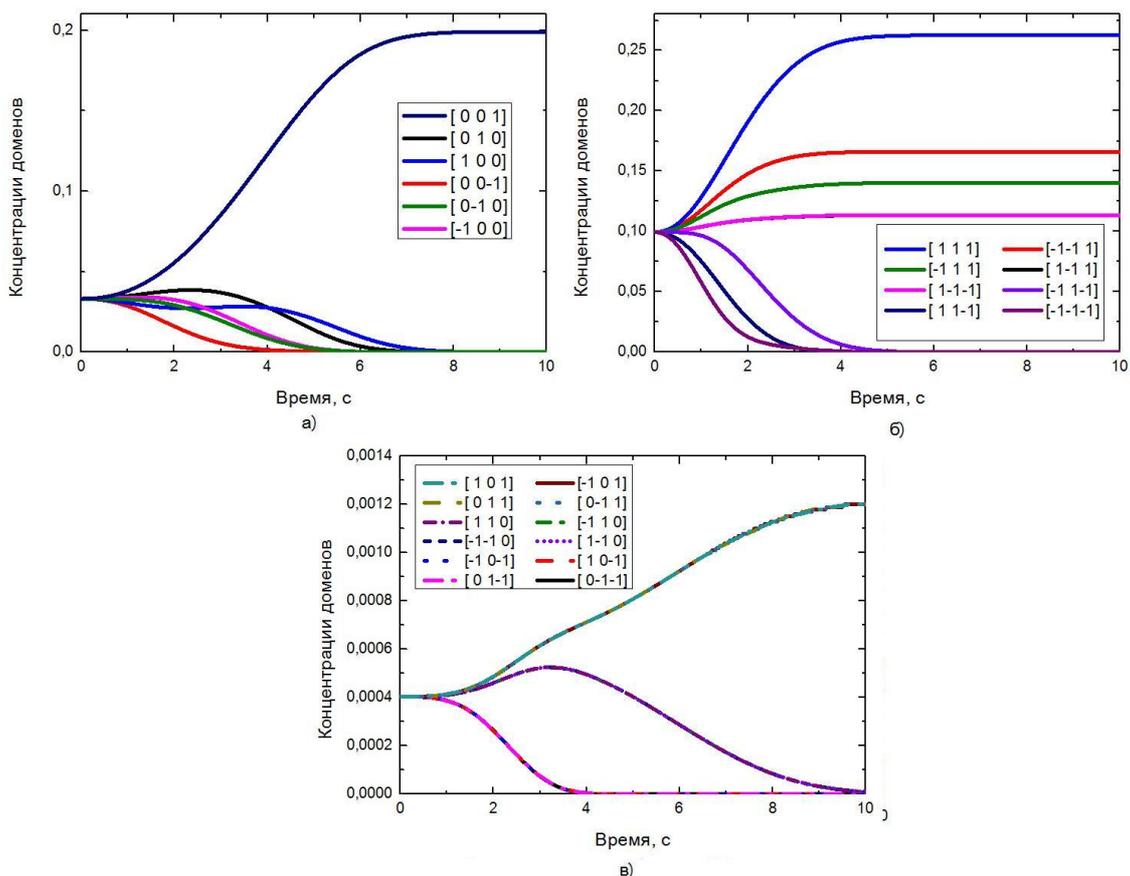


Рис. 2. Изменение объемных концентраций доменов а) тетрагональной, б) ромбоэдрической и в) орторомбической фаз при монотонном нагружении образца

Для повышения точности предсказаний модели и увеличения ее чувствительности к изменению фазового состава материала, ведется работа над внедрением ее в конечно-элементный программный комплекс PANTOCRATOR [6]. Модель для двухфазного сегнетоэлектрического материала уже была опробована и показала удовлетворительные результаты [7].

ЛИТЕРАТУРА:

1. Rödel J., Jo W., Seifert K., Anton E., Granzow T. Perspective on the Development of Lead-free Piezoceramics // J. Am. Ceram. Soc. 2009. V. 92. N. 6. P. 1153–1177.
2. Seifert K. Lead-Free Piezoelectric Ceramics // TU Darmstadt, 2010.
3. Семенов А.С. Вычислительные методы в теории пластичности // Изд-во СПбГПУ. 2008. 211 с.
4. Huber J.E., Fleck N.A. Multi-axial electrical switching of a ferroelectric: theory versus experiment // J. Mech. Phys. Solids. 2001. V. 49. P. 785–811.
5. Lobanov S., Semenov A. Modeling of nonlinear behavior of polycrystalline lead-free piezoceramics with a content of tetragonal, rhombohedral and orthorhombic phases under cyclic loading // Procedia Structural Integrity, 2017.
6. Семенов А.С. PANTOCRATOR - конечноэлементный программный комплекс, ориентированный на решение нелинейных задач механики // Труды V-ой Межд. конф. "Научно-технические проблемы прогнозирования надежности и долговечности конструкций и методы их решения". 2003. С. 466–480.
7. Лобанов С.М., Семенов А.С. Конечно-элементное моделирование нелинейного поведения бессвинцовых сегнетопьезоактивных материалов с различным содержанием ромбоэдрической и тетрагональной фаз // Неделя науки СПбПУ. Институт прикладной математики и механики: Изд-во Политехн. ун-та, 2016. – 89-91 с.

АВТОМАТИЗИРОВАННАЯ НАСТРОЙКА ТИПОВЫХ РЕГУЛЯТОРОВ ДЛЯ
МНОГОСВЯЗНЫХ ОБЪЕКТОВ УПРАВЛЕНИЯ

Работа посвящена исследованию способов автоматизированного определения параметров типовых законов регулирования применительно к широкому классу многомерных динамических объектов с запаздыванием по каналам передачи управляющих воздействий. Речь идет о задаче настройки многомерных типовых регуляторов в системе, где каждое управляющее воздействие вырабатывается с учетом отклонений от задания каждой из выходных переменных. Задача сводится к разработке методов расчета матриц A , B и C , определяющих параметры передаточной матрицы многомерного ПИ- или ПИД-регулятора $W(p) = A + B/p + Cp$ (для ПИ-регулятора $C = 0$) [1]. Для решения этой задачи был разработан так называемый комбинированный метод. Его суть заключается в том, что управляющие воздействия формируются как линейная комбинация выходов двух вспомогательных типовых регуляторов [2]. Для реализации комбинированного метода был разработан программный комплекс (ПК) «MIMO Master» [3]. ПК создан на основе универсальной программной системы MATLAB & Simulink и сочетает аналитические расчеты с компьютерным имитационным моделированием. Положительные особенности ПК заключаются в возможности расчета систем произвольной размерности, оптимизируемых по различным критериям, принятым в инженерной практике. ПК позволяет также учитывать ограничения на управляющие воздействия и исследовать чувствительность к неточностям модели объекта управления. Удобный интерфейс не требует от пользователя умения работать с программной системой MATLAB. ПК «MIMO Master» накладывает, однако, определенные ограничения на класс объектов управления, а именно: каждый элемент передаточной матрицы должен представлять собой последовательное соединение дробно-рациональной передаточной функции комплексной переменной p со звеном запаздывания $e^{-p\tau}$. Непосредственной целью данной работы является демонстрация возможностей расширения области применения ПК «MIMO Master» на более широкий класс многомерных динамических объектов, не удовлетворяющих данному ограничению. В частности, речь идет о технологических объектах с запаздывающим рециклом, где элементы передаточной матрицы не являются отношением полиномов от p .

В качестве примера, рассмотрим задачу расчета двумерного ПИ-регулятора для двухступенчатого химического реактора с запаздывающим рециклом (рис. 1). Поддержание заданных концентраций веществ на выходе из реакторов 1 и 2 в условиях возмущений, вызванных добавочным входным потоком, производится путем управления концентрациями на входе в реакторы.

Передаточная матрица исследуемого объекта управления имеет вид [4]:

$$H(p) = [h_{ij}(p)] = \begin{bmatrix} \frac{0.4(p+2)e^{-3p}}{(p+2)^2 - 0.25e^{-p}} & \frac{0.25e^{-4p}}{(p+2)^2 - 0.25e^{-p}} \\ \frac{0.2e^{-2p}}{(p+2)^2 - 0.25e^{-p}} & \frac{0.5(p+2)e^{-2p}}{(p+2)^2 - 0.25e^{-p}} \end{bmatrix}.$$

Чтобы воспользоваться ПК «MIMO Master», на первом этапе необходимо привести передаточную матрицу объекта управления $H(p)$ к стандартному «дробно-рациональному» виду. Это можно сделать различным образом. Наиболее универсальный способ состоит в

применении метода настраиваемой модели для аппроксимации элементов передаточной матрицы исходного объекта $h_{ij}(p)$ теми или иными дробно-рациональными передаточными функциями [5]. Для этого средствами Simulink моделируются динамические звенья, соответствующие передаточным функциям $h_{ij}(p)$ и аппроксимирующим их передаточным функциям $\hat{h}_{ij}(p)$. Далее посредством имитации переходных процессов, возникающих при подаче одного и того же (например, «ступенчатого») воздействия на вход обеих моделей, ищутся (например, методом наименьших квадратов) параметры $\hat{h}_{ij}(p)$, обеспечивающие минимальные отличия указанных переходных процессов. Могут, однако, (как это будет показано ниже) использоваться и иные приемы аппроксимации, учитывающие специфику конкретных объектов.

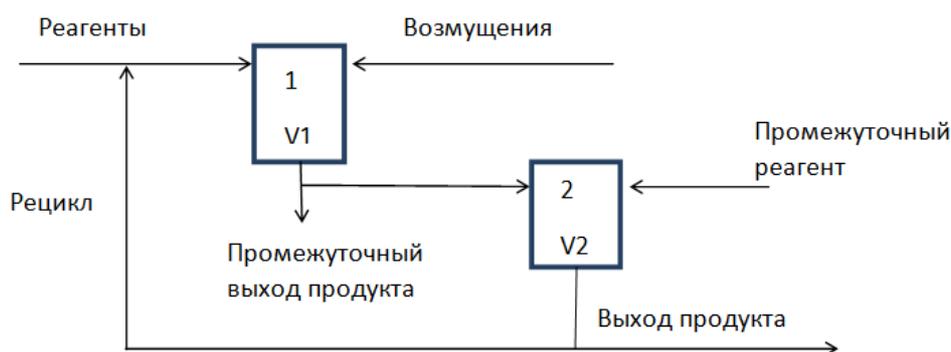


Рис. 1. Модель системы химических реакторов с рециклом

В рассматриваемом примере для аппроксимации передаточных функций $h_{11}(p)$ и $h_{22}(p)$ применен метод настраиваемой модели. При этом получены приближения

$$\hat{h}_{11}(p) = \frac{0.213}{0.7p+1} e^{-4p}, \quad \hat{h}_{22}(p) = \frac{0.267}{0.7p+1} e^{-2p}.$$

Для нахождения аппроксимирующих передаточных функций для $h_{12}(p)$ и $h_{21}(p)$ использован другой способ. Экспонента в знаменателе передаточных функций приближенно заменена линейной зависимостью $e^{-p\tau} \approx 1 - p\tau$, в результате чего получены аппроксимации

$$\hat{h}_{12}(p) = \frac{0.25}{p^4 + 4.25p + 3.75} e^{-4p}, \quad \hat{h}_{21}(p) = \frac{0.2}{p^4 + 4.25p + 3.75} e^{-2p}$$

с полиномиальной функцией в знаменателе.

На втором этапе передаточная матрица $\hat{\mathbf{H}}(p) = [\hat{h}_{ij}(p)]$ вводится в ПК «MIMO Master» в качестве исходного объекта, после чего автоматически производится новая аппроксимация элементов передаточной матрицы $\tilde{\mathbf{H}}(p)$ инерционными звеньями первого порядка с запаздыванием. Полученная передаточная матрица имеет вид

$$\tilde{\mathbf{H}}(p) = [\tilde{h}_{ij}(p)] = \begin{bmatrix} \frac{0.213}{0.7p+1} e^{-3p} & \frac{0.067}{0.836p+1} e^{-4.343p} \\ \frac{0.053}{0.836p+1} e^{-2.343p} & \frac{0.267}{0.7p+1} e^{-2p} \end{bmatrix}.$$

С использованием $\tilde{\mathbf{H}}(p)$ автоматически выполняется аналитический расчет двумерного ПИ-регулятора комбинированным методом. В результате получены матрицы коэффициентов

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0.797 & -0.0088 \\ -0.00696 & 0.94 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1.14 & -0.0126 \\ -0.00994 & 1.34 \end{bmatrix}.$$

Рассчитанные значения параметров регулятора используются в качестве начального приближения при поиске улучшенных решений. Такой поиск производится в автоматическом режиме путем многовариантного имитационного моделирования работы замкнутой системы управления объектом $\hat{H}(p)$ в условиях ступенчатых возмущений. В результате найдены новые матричные коэффициенты регулятора

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2.83 & -0.468 \\ -0.37 & 2.35 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1.21 & -0.207 \\ -0.164 & 1.1 \end{bmatrix}, \quad (1)$$

причем значение интегрального квадратичного критерия (ИКК) качества управления снизилось с 0.141 до 0.112, то есть на 20%.

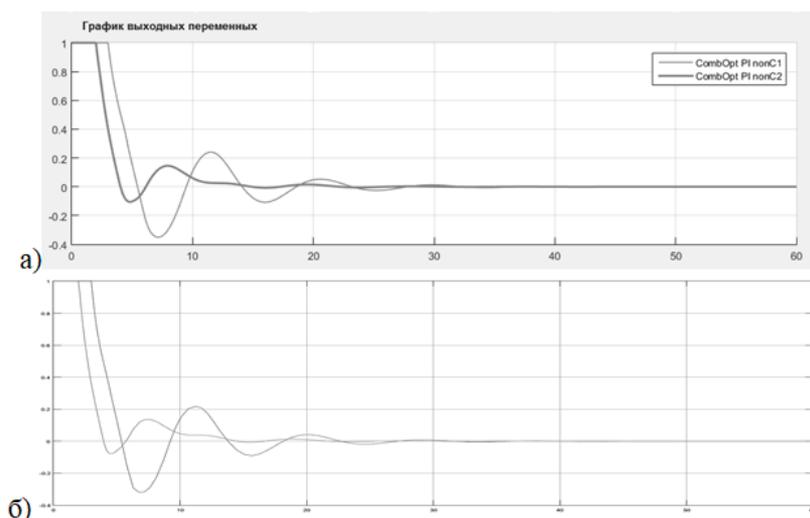


Рис. 2. Переходные процессы в замкнутой системе управления
а – приближенная модель $\hat{H}(p)$, б – исходная модель $H(p)$

На заключительном этапе производится тестирование рассчитанного регулятора путем имитационного моделирования работы замкнутой системы управления исходным объектом $H(p)$. Данная процедура выполняется вне ПК «ММО Master» и требует формирования модели замкнутой системы средствами Simulink. На рис. 2 представлены переходные процессы, показывающие изменение во времени выходных переменных при отработке приведенных к выходу ступенчатых возмущений в системе управления с регулятором (1). Рис. 2а показывает результаты моделирования с использованием приближенной модели $\hat{H}(p)$, а рис. 2б – с использованием исходной модели $H(p)$. В первом варианте, как уже говорилось, было получено значение ИКК 0.112. Во втором варианте ИКК составило 0.108. Поскольку относительная разница между значениями показателя качества управления ИКК не превышает 4%, а переходные процессы практически совпадают, то следует сделать вывод о возможности использования ПК «ММО-Master» для расчета параметров регулятора применительно к рассмотренному объекту с рециклом. Есть основания полагать, что в рамках рассмотренной методики такая возможность имеется для широкого класса объектов управления со слабо нелинейными или отличающимися от «стандартных» линейными динамическими моделями.

ЛИТЕРАТУРА:

1. Яковис Л.М. Простые способы расчета типовых регуляторов для сложных объектов промышленной автоматизации // Автоматизация в промышленности. №6, 2007, с. 51 – 56.

2. Яковис Л.М., Спорягин К.В. Настройка типовых регуляторов для многосвязных объектов управления // Мехатроника, Автоматизация, Управление. №6, 2009, с. 55 – 64.
3. Sporyagin K., Yakovis L. Software Package “MIMO Master” for Approximate Optimization of Multivariable Control Systems with Time Delay // Университетский научный журнал (Humanities & Science University Journal), № 15, 2015, Pages 58 – 68.
4. Рей У. Методы управления технологическими процессами // М. – Мир. – 1983. – 368 с.
5. Гурецкий Х. Анализ и синтез систем управления с запаздыванием // М. – Машиностроение. – 1974. – 327 с.

УДК 531/534

В.С. Модестов, А.В. Лукин, Р.В. Федоренко, А.А. Кудрявцев, И.Р. Муртазин
Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого

АНАЛИЗ ПРОЧНОСТИ АТОМНОЙ ЭЛЕКТРОСТАНЦИИ С УЧЕТОМ ПОДАТЛИВОСТИ ГРУНТОВОГО ОСНОВАНИЯ

Введение. Одна из ключевых проблем анализа прочности атомных электростанций (АЭС) - расчет падения самолета. Важными аспектами здесь являются рассмотрение вязкоупругих свойств грунта и проведение настройки параметров схемы численного интегрирования. Данный вопрос был рассмотрен на верификационных задачах для балки Бернулли-Эйлера в различных постановках [1], [2], [3], [4]. Нагрузка от падения самолета задается как динамический профиль давления на пятно контакта, определяемая по известной технике Риеры [5].

Цель работы: оценить напряженно-деформированного состояния корпуса реактора при различных способах моделирования основания.

Вынужденные колебания балки Бернулли-Эйлера с различными граничными условиями. Схематизация граничных условий представлена на рис. 1.

Аналитическое решение для задачи а) представлено в формуле 1.

$$w(x,t) = \frac{4P}{\rho Fl} \sum_{p=1}^{\infty} \frac{1}{(k_p^2 - \omega_p^2)} \left(K_3(a_p x) - \frac{K_1(a_p l)}{K_2(a_p l)} K_4(a_p x) \right) \left(K_3(a_p l) - \frac{K_1(a_p l)}{K_2(a_p l)} K_4(a_p l) \right) \left[\sin \omega t - \frac{\omega}{k_p} \sin k_p t \right] \quad (1)$$

Аналитическое решение для задачи б) представлено в формуле 2.

$$w(x,t) = \frac{4P}{\rho Fl} \sum_{p=1}^{\infty} \frac{1}{k_p^2} \left(K_3(a_p x) - \frac{K_1(a_p l)}{K_2(a_p l)} K_4(a_p x) \right) \left(K_3(a_p l) - \frac{K_1(a_p l)}{K_2(a_p l)} K_4(a_p l) \right) \sin k_p t \quad (2)$$

Аналитическое решение для задачи в) представлено в формуле 3 [6].

$$w(x,t) = \frac{P}{\rho Fl} \sum_{p=1}^{\infty} \frac{X_p(x) X_p(l)}{(k_p^2 - \omega_p^2)} \left[\sin \omega t - \frac{\omega}{k_p} \sin k_p t \right], \text{ где} \quad (3)$$

$$X_p(x) = C(a_p) \left(a_p \frac{EJ}{\chi} \left(K_2(a_p x) - \frac{K_4(a_p l)}{K_2(a_p l)} K_4(a_p x) \right) + K_3(a_p x) - \frac{K_1(a_p l)}{K_2(a_p l)} K_4(a_p x) \right), a_p^4 = \frac{\rho F}{EJ} k_p^2 \quad (4)$$

где K_1, K_2, K_3, K_4 - функции Крылова [4], k_p - собственные частоты, p - номер формы колебаний, F - площадь поперечного сечения, J - момент инерции сечения.

Аналитическое решение для задачи г) представлено в формуле 5.

$$w(x,t) = \sum_{p=1}^{\infty} \frac{2}{\sqrt{l}} \left(K_3(a_p x) - \frac{K_1(a_p l)}{K_2(a_p l)} K_4(a_p x) \right) \left[A \sin(\omega t - \varphi) + B \exp(-\xi_p k_p t) \sin(\sqrt{1 - \xi_p^2} k_p t - \beta) \right] \quad (5)$$

Выражения для параметров A, B, β, φ можно найти в [7].

Данные задачи также были решены численно в программном комплексе ANSYS прямым динамическим методом и методом модальной суперпозиции. Случай д) также был

рассмотрен в ABAQUS и ANSYS/LS-DYNA. Рассматривалось 4 способа задания демпфирования: модальное демпфирование, глобальное и зависящее от материала рэлеевское демпфирование, глобальное однопараметрическое демпфирование. Сравнение результатов по перемещениям представлены на рис. 2 и 3.

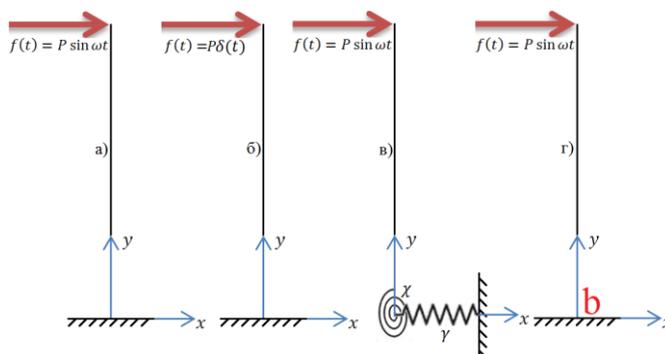


Рис. 1. а), б) балка Бернулли-Эйлера на абсолютно жестком основании под действием гармонической нагрузки и дельта-функции Дирака; в) на упругом основании под действием гармонической нагрузки; г) с учетом внутреннего демпфирования

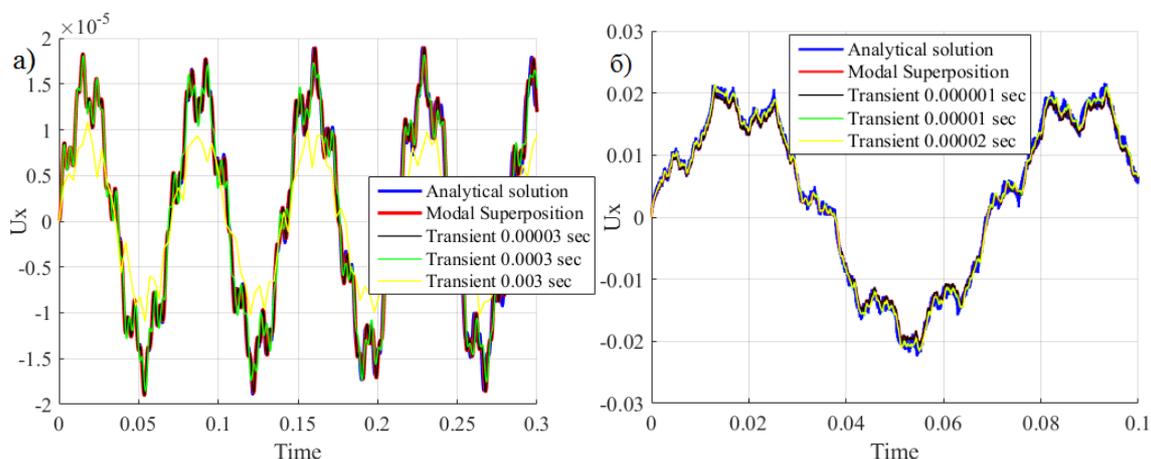


Рис. 2. Балка под действием высокочастотной гармонической нагрузки а) и дельта-функции Дирака б)

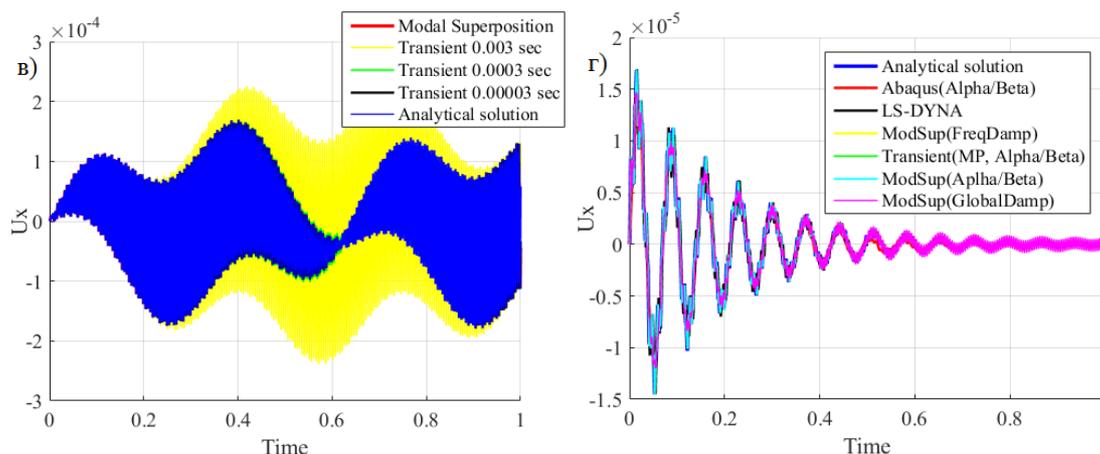


Рис. 3. Балка под действием высокочастотной гармонической нагрузки на упругом основании в) и с учетом внутреннего демпфирования г)

Разработка методологии учета податливости основания. Рассматриваются три метода моделирования основания. Схематизация моделей представлена на рис. 4, физико-механические свойства грунта представлены в табл. 1.

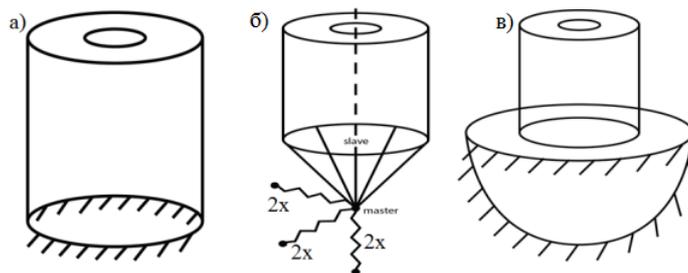


Рис. 4. Объект исследования: а) абсолютно жесткое основание; б) модель с набором упругих элементов; в) прямое моделирование грунта

Табл. 1. Физико-механические свойства грунта

	Параметры	Значения	Обозначения
Линейно-упругая постановка	Плотность, kg/m^3	2000	ρ
	Модуль упругости, МПа	182	E
	Коэффициент Пуассона	0.47	ν
Нелинейная постановка (Drucker-Prager)	Сцепление, кПа	93	c
	Угол внутреннего трения, град.	39	φ

Для модели основания с пружинами были определены эквивалентные жесткости упругих элементов. В силу большой погрешности были рассмотрены оба набора параметров. На рис. 5 представлено сравнение результатов по напряжениям в ключевых точках для метода прямого динамического анализа. Метод модальной суперпозиции требует учета большого количества собственных частот (сотая частота $k_{100} = 23\text{Гц}$), что требует значительных вычислительных затрат.

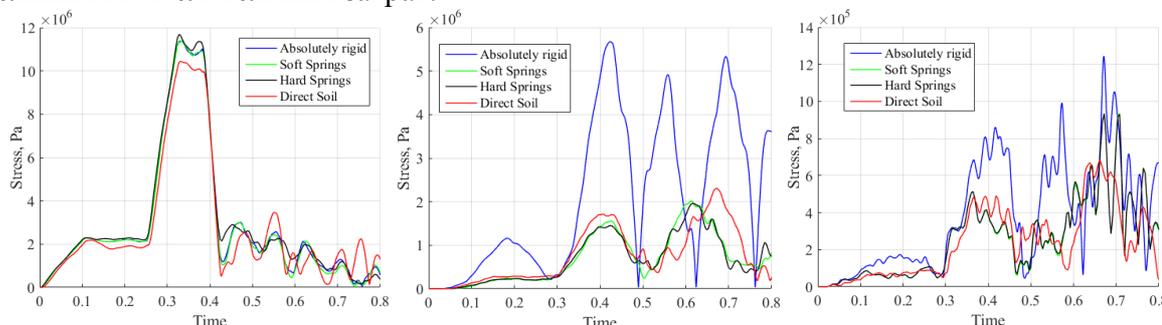


Рис. 5. Эквивалентные напряжения в линейном расчете: а) вблизи пятна удара; б) вблизи основания; в) на противоположной от удара стороне

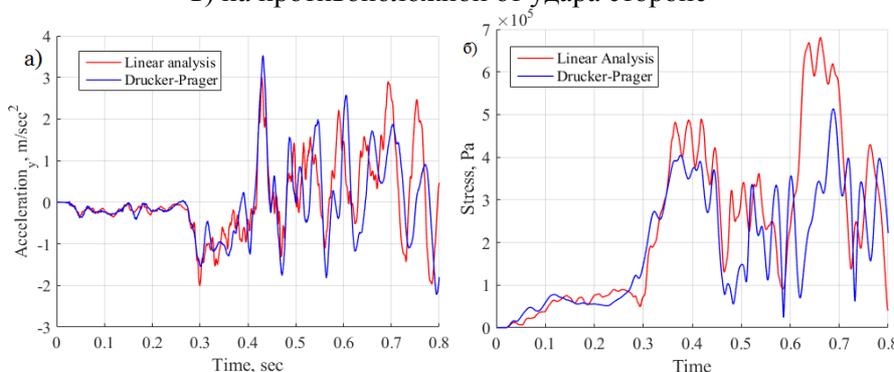


Рис. 6. а) вертикальные ускорения и б) эквивалентные напряжения на противоположной от удара стороне

На рис. 6 представлено сравнение по ускорениям и напряжениям для прямого моделирования грунта линейной и нелинейной постановок, то есть с учетом модели пластичности Drucker-Prager.

Выводы.

1. Определен минимальный шаг интегрирования для высокочастотных воздействий, а также верифицированы методы задания внутреннего демпфирования.
2. Отсутствуют вычислительные преимущества метода модальной суперпозиции.
3. Абсолютно жесткое основание дает лишь консервативную оценку.

ЛИТЕРАТУРА:

1. Вибрация в технике под ред. Болотина В. В. Том 1. «Машиностроение», Москва, 1978, 352 с.)
2. Тимошенко С.П., Янг Д.Х., Уивер У. Колебания в инженерном деле. «Машиностроение», Москва, 1985, 472 р.
3. Бабаков И.М. Теория колебаний. «Дрофа», Москва, 2004, 592с.
4. Бидерман В.Л. Теория механических колебаний. «Высшая школа», Москва, 1980, 408с.
5. Бирбраер А.Н., Роледер А.Ю. Экстремальные воздействия на сооружения. Издательство Политехнического университета, Санкт-Петербург, 2009, 593с.
6. Деч Г. Руководство к практическому применению преобразования лапласа и z-преобразования. «Наука», Москва, 1971, 288с.
7. Nayfe A.H., Frank P. P. Linear and nonlinear structural mechanics. WILEY-VCH, 2004, 746р.
8. American Society of Civil Engineers. Seismic Analysis of Safety-Related Nuclear Structures and Commentary (ASCE 4-98).
9. Бирбраер А.Н. Расчет конструкций на сейсмостойкость. «Наука», Санкт-Петербург, 1998, 253с.

УДК 539.3

А.Д. Новокшенов, А.С. Немов, Д.В. Мамчиц, А.Ю. Зобачева
Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого

ТОПОЛОГИЧЕСКАЯ ОПТИМИЗАЦИЯ КОНСТРУКЦИЙ НА ОСНОВЕ МЕТОДА ДВИЖУЩИХСЯ АСИМПТОТ

Сегодня в мировой практике к проектированию конструкций широко применяется подход, опирающийся на математическое моделирование и методы оптимизации, вплоть до того, что даже эскиз конструкции для заданных условий эксплуатации получается с помощью компьютерного моделирования. Именно этот подход на сегодняшний день применяется ведущими западными промышленными компаниями при разработке новых летательных аппаратов, наземных средств передвижения и т.д. Ключевую роль в данном подходе выполняет топологическая оптимизация, позволяющая для заданных нагрузок предсказать наиболее эффективное конструкционное решение. Данная работа посвящена разработке модуля топологической оптимизации в среде ANSYS APDL.

На данный момент на рынке инженерного программного обеспечения (ПО) существует несколько решений для топологической оптимизации: Optistruct (Altair Engineering), Tosca Structure (Dassault Systems), ANSYS Topology Optimization и др. Однако, зачастую, эти решения, во-первых, в силу разных причин, оказываются недоступными для наших отечественных предприятий, а во-вторых, не позволяют вносить изменения в схему алгоритма оптимизации для удовлетворения различного рода технологическим ограничениям. С этой целью и разрабатывается собственный программный модуль.

Задача топологической оптимизации, в классической постановке - задача нахождения оптимального с точки зрения жесткости распределения материала в заданной области. В конечном счете, для каждой точки тела, мы должны ответить на вопрос, есть в данной точке материал или нет. Для сведения этой, изначально дискретной, проблемы к непрерывной используется метод SIMP (Solid Isotropic Material with Penalization), который позволяет связать упругие свойства материала с вспомогательным параметром «фиктивной плотности материала» [1]. В ANSYS APDL это было реализовано с помощью присвоения каждому конечному элементу своего собственного материала. Далее задача нахождения оптимальной жесткости сводится к задаче минимизации функционала работы внешних сил, при удовлетворении условию равновесия системы. Для минимизации этого функционала используется метод нелинейного программирования Method Moving Asymptotes (ММА, Метод движущихся асимптот) [2]. Для применения этого метода необходимо определение частных производных целевой функции по переменным проектирования. В случае минимизации податливости системы при ограничении на объём, эти производные связаны с потенциальной энергией деформации в каждой точке. В ANSYS APDL процедура нахождения частных производных свелась к проведению конечно-элементного расчета и определению энергии деформации в каждом конечном элементе. На основании найденных производных, аналитически строится выпуклая аппроксимация целевой функции с точностью до первого порядка дифференцирования, минимум которой достаточно легко находится путем разделения переменных и применения метода бисекций, что и было сделано. Найденные точки минимума являются следующей точкой вычисления производных. Итерационный процесс повторяется до достижения сходимости результатов.

Отображение результатов оптимизации было выполнено с помощью исключения конечных элементов, имеющих значение параметра плотности меньше, чем заданный порог. Для обеспечения возможности работы конструктора с полученной формой, ступенчатой за счет конечно-элементной дискретизации, к результатам применяется алгоритм Laplacian Smoothing. Автором работы в ANSYS APDL данный алгоритм был реализован через триангуляцию поверхности оптимизированной формы, и дальнейшего итерационного процесса осреднения координат вершин соседних конечных элементов (рис. 1).

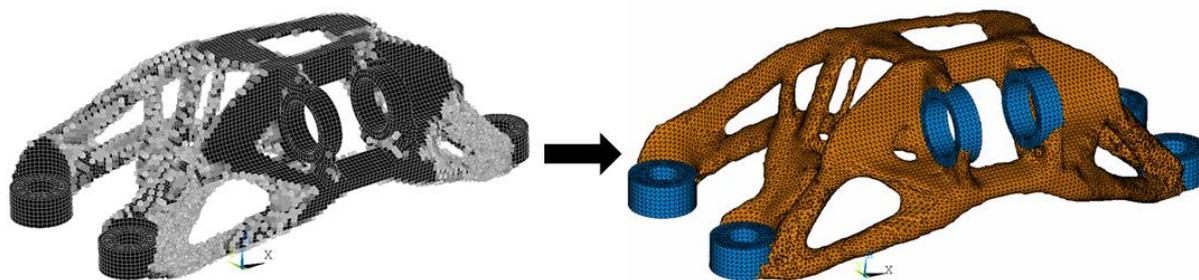


Рис. 1. Применение алгоритма Laplacian Smoothing

Разработанный программный модуль был протестирован на задачах, приведенных в зарубежной научной литературе [3], а также на задачах, решение которых было выполнено ранее с использованием коммерческого программного обеспечения, в частности – для задачи оптимизации авиационного кронштейна. Полученные результаты хорошо согласуются с приведенными в литературе (рис. 2).

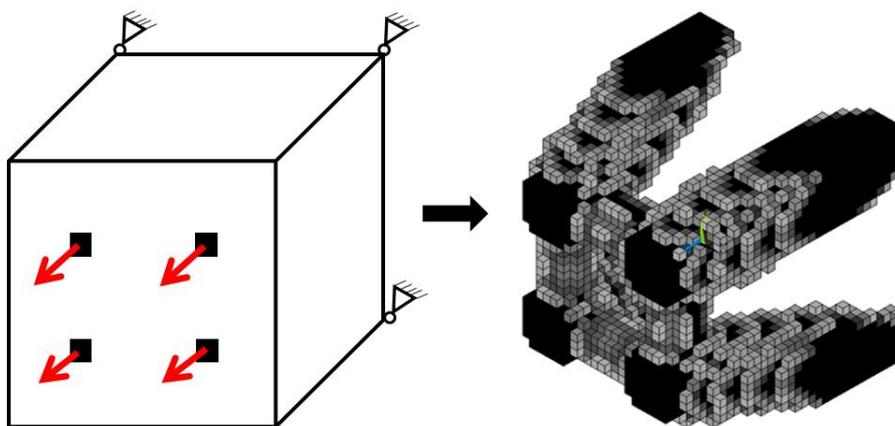


Рис. 2. Результаты оптимизации параллелепипеда, подверженного растягивающим нагрузкам

Данный программный модуль предполагается использовать в составе интегрированной системы компьютерного проектирования и инжиниринга (ИСКПИ), разработанной при финансовой поддержке Министерства образования и науки РФ (ФЦП «Исследования и разработки по приоритетным направлениям развития научно-технологического комплекса России на 2014–2020 годы», уникальный идентификатор ПНИЭР RFMEFI58114X0005).

ЛИТЕРАТУРА:

1. Bendsoe M.P., Sigmund O. Topology Optimization. Theory, Methods and Applications.- Springer, 2003.
2. Svanberg K. The method of moving asymptotes – a new method of structural optimization. –International journal for numerical methods in engineering, vol. 24, 359-3731987.
3. Eschenauer H., Olhoff N. Topology optimization of continuum structures: A review. – ASME, Applied Mechanics Reviews, vol. 54, no 4, July 2001.

УДК 539.374, 548.55

А.В. Савиковский¹, А.С. Семенов¹, Л.Б. Гецов²

¹ Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого,

² ОАО «НПО ЦКТИ»

АНАЛИЗ ВЛИЯНИЯ ВЫДЕРЖКИ НА ТЕРМОУСТАЛОСТНУЮ ПРОЧНОСТЬ МОНОКРИСТАЛЛИЧЕСКИХ СПЛАВОВ НА ОСНОВЕ КОНЕЧНО-ЭЛЕМЕНТНОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ НАТУРНЫХ ЭКСПЕРИМЕНТОВ

Жаропрочные монокристаллические сплавы на никелевой основе [1] применяются для изготовления рабочих и направляющих лопаток современных авиационных и стационарных газотурбинных установок (ГТУ). Термоусталостная прочность подобных материалов с ярко выраженной анизотропией и чувствительностью механических свойств к температуре является в настоящее время не до конца изученной. Целью данной работы является исследование влияние выдержки при максимальной температуре на основе деформационного критерия [2,3] термоусталостного разрушения монокристаллов с использованием результатов конечно-элементного (КЭ) моделирования натуральных экспериментов.

Для исследования числа циклов до разрушения при переменных температурах с выдержкой проводятся эксперименты на различных видах образцов, в том числе и на

корсетных (плоских) на установке, разработанной в НПО ЦКТИ (рис. 1) [4]. Зафиксированный двумя болтами в массивной оснастке корсетный образец (рис. 2) периодически нагревается путем пропускания через него электрического тока. Температурный режим от цикла к циклу автоматически поддерживается постоянным.



Рис. 1. Установка для проведения экспериментов на термическую усталость

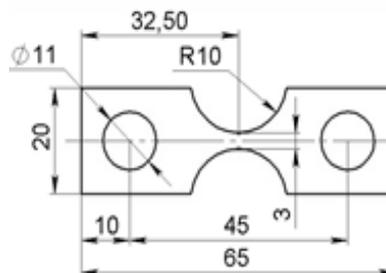


Рис. 2. Геометрия корсетного образца для термоусталостных испытаний

Моделирование процессов неупругого циклического деформирования корсетных образцов выполнялось с использованием КЭ программного комплекса PANTOCRATOR [5] на основе применения микромеханических (физических) моделей пластичности и ползучести монокристаллов [6, 7]. КЭ расчеты проводились для части корсетного образца (расчетная длина образца составляла 40 мм, рис. 3) без учета контакта с оснасткой и фиксирующими болтами. Задачи решались в квазистатической трехмерной постановке.

Исследовалось влияние выдержки от 1 до 5 мин. на число циклов до образования макротрещины в цикле с максимальной температурой 1050°C и размахом температур 350°C (рис. 4). Время нагрева в цикле составляло 24 с, время охлаждения – 15 с. Механические свойства у образца соответствовали сплаву ВЖМ4 [8].

В качестве граничных условий задавались нулевые перемещения в направлении оси x на двух боковых гранях образца с нормалью вдоль оси x . Для исключения твердотельных движений также фиксировался ряд точек на этих гранях в направлении осей y и z .

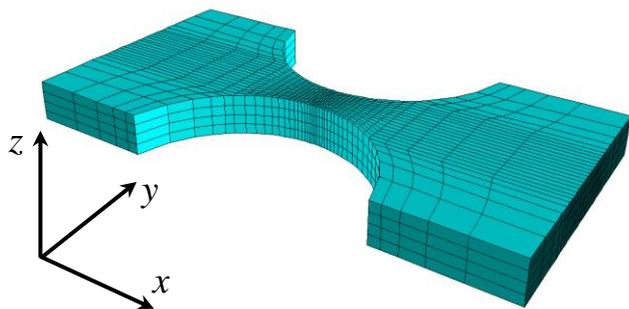


Рис. 3. КЭ-модель корсетного образца для термоусталостных испытаний

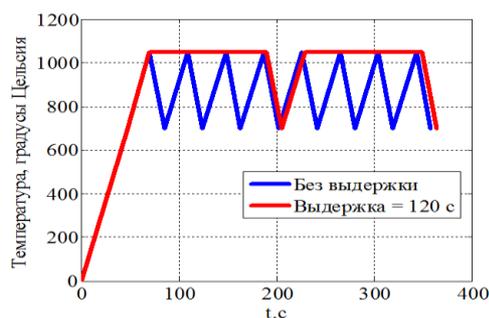


Рис. 4. Максимальная и минимальная температура цикла в центральной точке образца

Полученные в КЭ расчетах распределения полей интенсивностей деформации ползучести, пластической деформации и интенсивности напряжений по Мизесу после 25го цикла при 1050°C в задаче с использованием модели ползучести по Нортону с упрочнением в случаях, когда время выдержки равно 0, представлены на рис. 5, 6, 7 соответственно.

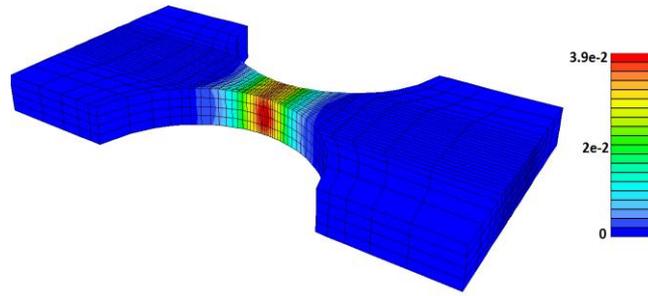


Рис. 5. Интенсивность деформации ползучести после 25го цикла без выдержки

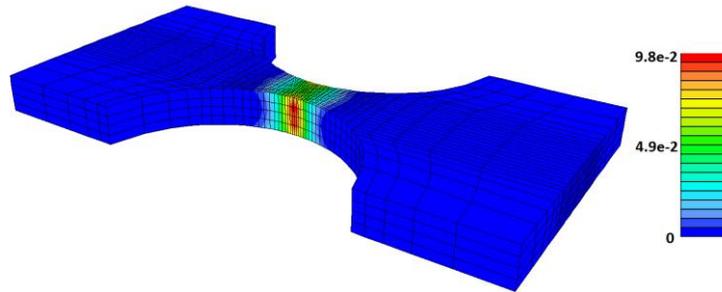


Рис. 6. Интенсивность пластических деформаций после 25го цикла без выдержки

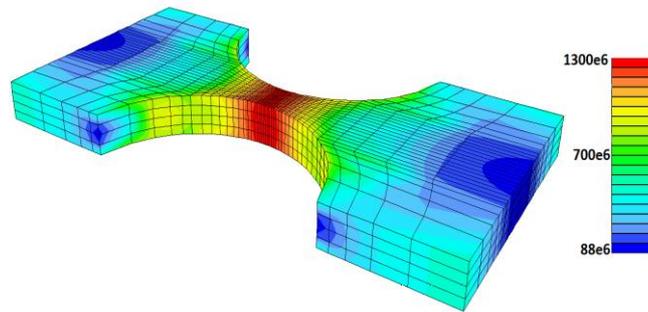


Рис. 7. Поле эквивалентных напряжений по Мизесу после 25го цикла, Па, без выдержки

Расчет поврежденности и оценка числа циклов до образования макротрещины производился на основе деформационного четырехчленного критерия [2, 3, 9]:

$$D = \sum_{i=1}^N \frac{(\Delta \varepsilon_{eq_i}^p)^k}{C_1(T)} + \sum_{i=1}^N \frac{(\Delta \varepsilon_{eq_i}^c)^m}{C_2(T)} + \max_{0 \leq t \leq t_{\max}} \frac{\varepsilon_{eq}^p}{\varepsilon_r^p(T)} + \max_{0 \leq t \leq t_{\max}} \frac{\varepsilon_{eq}^c}{\varepsilon_r^c(T)}, \quad (1)$$

где первый член учитывает изменение пластической деформации в пределах цикла, второй член – изменение деформации ползучести в пределах цикла, третий член – односторонне накопленную пластическую деформацию (рэтчеттинг), четвертый член – односторонне накопленную деформацию ползучести. Число циклов до образования макротрещины N определяется из условия $D = 1$. В качестве эквивалентной деформации рассматривается максимальная сдвиговая деформация $\varepsilon_{eq} = \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\varepsilon} \cdot \mathbf{l}$ в системе скольжения с нормалью к плоскости скольжения \mathbf{n} и направлением скольжения \mathbf{l} .

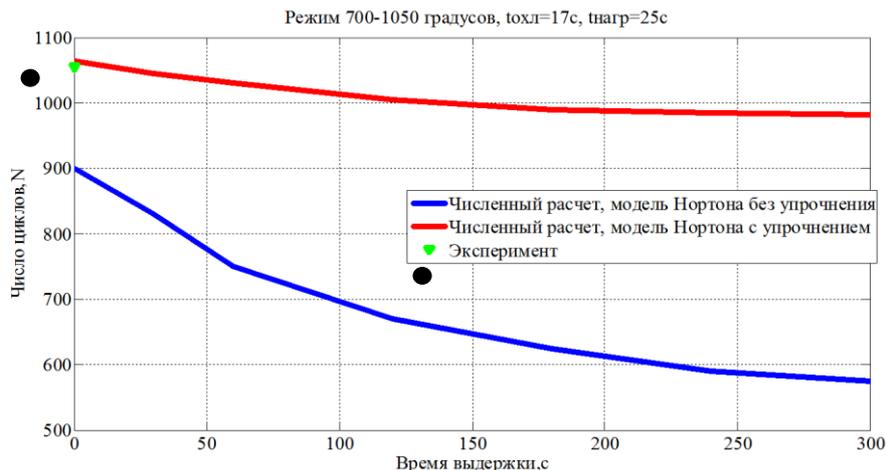


Рис. 8. Сравнение расчета с использованием 2 моделей ползучести с экспериментом

Результаты расчета показали качественное сходство с данными опытов, однако более слабое влияние выдержки на долговечность, наблюдаемое в расчетах, по сравнению с экспериментом указывает на необходимость уточнения свойств материала.

Исследование выполнено при поддержке стипендиальной программы Siemens.

ЛИТЕРАТУРА:

1. Шалин Р.Е., Светлов И.Л., Качалов Е.Б. и др. Монокристаллы никелевых жаропрочных сплавов – М.: Машиностроение, 1997. – 336 с.
2. Гецов Л.Б., Семенов А.С. Критерии разрушения поликристаллических и монокристаллических материалов при термоциклическом нагружении // Труды ЦКТИ. Вып. 296, 2009, С. 83-91.
3. Семенов А.С., Гецов Л.Б. Критерии термоусталостного разрушения монокристаллических жаропрочных сплавов и методы определения их параметров // Проблемы прочности. 2014, № 1. С. 50-62.
4. Гецов Л.Б. Материалы и прочность деталей газовых турбин.-М.:Недра, 1996.- с.189-193
5. Семёнов А.С. PANTOCRATOR - конечно-элементный программный комплекс, ориентированный на решение нелинейных задач механики / Труды V-ой Межд. конф. "Научно-технические проблемы прогнозирования надежности и долговечности конструкций". СПб.: Изд-во СПбГПУ, 2003. С. 466-480.
6. Cailletaud G.A. Micromechanical approach to inelastic behaviour of metals // Int. J. Plast., 1991, 8, P. 55-73.
7. Семенов А.С. Идентификация параметров анизотропии феноменологического критерия пластичности для монокристаллов на основе микромеханической модели // Научно-технические ведомости СПбГПУ. Физико-математические науки. 2014. № 2 (194). С. 15-29.
8. Каблов Е.Н., Петрушин Н.В., Светлов И.Л., Демонис И.М. Никелевые литейные жаропрочные сплавы нового поколения. Юбилейный науч.-техн. сб. Авиационные материалы и технологии. М:Труды ВИАМ 2012, С.36-52.
9. Getsov L.B., Semenov A.S., Staroselsky A. A failure criterion for single-crystal superalloys during thermocyclic loading // Materials and technology. 2008. Vol. 42, P. 3–12.

КОНЕЧНО-ЭЛЕМЕНТНОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРОЦЕССОВ НЕУПРУГОГО ДЕФОРМИРОВАНИЯ КОРСЕТНОГО ОБРАЗЦА ДЛЯ ТЕРМОУСТАЛОСТНЫХ ИСПЫТАНИЙ ПРИ РАЗЛИЧНОЙ СТЕПЕНИ ДЕТАЛИЗАЦИИ ЕГО ЗАКРЕПЛЕНИЯ

Прогнозирование ресурса элементов газотурбинных установок (ГТУ) является актуальной для практики задачей. Рабочие температуры элементов ГТУ могут достигать высоких значений и циклически изменяться во времени. В связи с этим становятся актуальными задачи исследования усталостной и термоусталостной прочности [1,2] материалов и элементов ГТУ, например, рабочих и направляющих лопаток [3] в авиационных двигателях.

В последнее время для изготовления лопаток ГТУ используются жаропрочные моно- и поликристаллические сплавы, состоящие из раствора никеля (γ -фазы) и упрочняющей γ' -фазы на основе интерметаллида Ni_3Al , такие как ВЖМ4, ЖС32, ЖС36, ВИНЗ, ЖС6Ф и т.д. Для исследования термоусталостной прочности указанных материалов проводятся эксперименты на плоских корсетных образцах на установке, разработанной в НПО ЦКТИ (рис. 1) [4].



Рис. 1. Установка для проведения экспериментов на термическую усталость

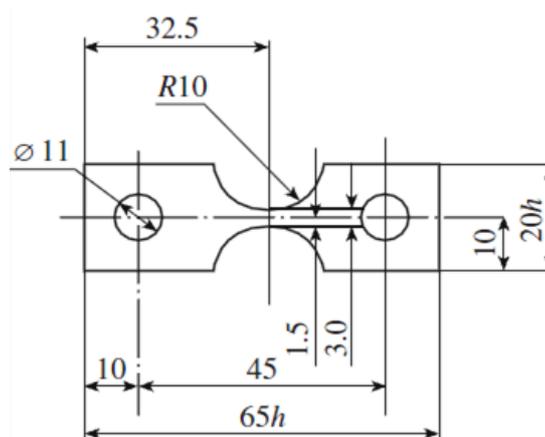


Рис. 2. Геометрия корсетного образца для термоусталостных испытаний

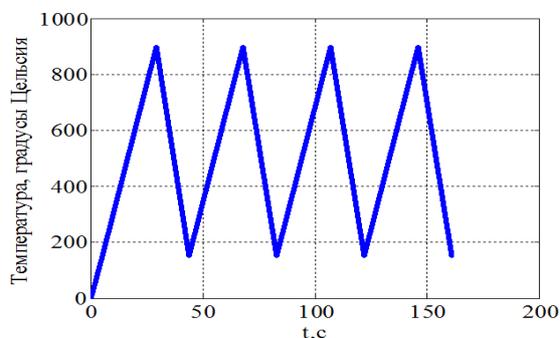


Рис. 3. Схематическое представление изменения температуры в центральной точке образца

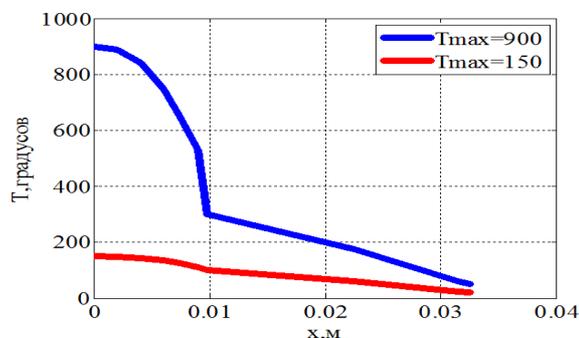


Рис. 4. Экспериментально определенное распределение температуры вдоль оси образца

Зафиксированные при помощи двух болтов корсетные образцы (рис. 2) периодически нагреваются пропусканием электрического тока. Форма корсетных образцов обеспечивает условие отсутствия потери устойчивости при сжатии. Максимальная и минимальная температуры цикла поддерживаются постоянными (рис. 3).

Экспериментально определенное при помощи 7 термодатчиков распределение температуры вдоль оси образца, отсчитываемое от его центральной точки, показано на рис. 4.

При проведении конечно-элементных (КЭ) расчетов рассматривались образцы из различных моно- и поликристаллических материалов. Результаты представленные ниже соответствуют поликристаллическому сплаву ЖС6У [3]. Болты и оснастка выполнены из стали. При моделировании процессов неупругого деформирования и разрушения корсетного образца, наблюдаемых в экспериментах, учитывалось неоднородное нестационарное изменение температуры образца, контакты между болтами и образцом, между болтами и оснасткой, трение между поверхностями контакта, температурная зависимость всех параметров материала, температурное расширение в образце и возможность пластического деформирования образца.

Задача решалась в дух постановок: с учетом оснастки и без учета оснастки (упрощенная формулировка [5]). Использование последней привлекательно при проведении многовариантных серийных расчетов для различных режимов нагружения и кристаллографической ориентаций в целях существенной экономии времени счета. Целью работы являлся подбор расчетной длины образца в упрощенной постановке. Валидность использования упрощенной формулировки основана на сравнении с результатами моделирования напряженно-деформированного состояния с учетом оснастки, а также на сравнении с измеряемыми в экспериментах относительных перемещений двух маркеров.

При решении задачи с учетом оснастки рассматривалась четверть конструкции в силу симметрии по плоскостям xz и yz (рис. 5). Оснастка и болты моделировались линейно-упругим материалом (сталь), а для образца использовалась упруго-пластическая модель материала, все свойства которой зависят от температуры. Задача решалась в трехмерной, квазистатической постановке. В качестве граничных условий задавались условия симметрии: нулевые перемещения по оси y на плоскости xz и по оси x на плоскости yz . На нижней стороне оснастки задавались нулевые перемещения по осям x и z . На шляпку болта задавалось давление 50 МПа, эквивалентное усилию затяжки болта.

В упрощенной постановке (рис. 6) рассматривается только образец без оснастки, в котором задавались нулевые перемещения на плоскостях симметрии xz и yz , внешняя грань образца параллельная плоскости симметрии xz была зафиксирована в направлении оси x . Для исключения твердотельных движений также фиксировался ряд точек на этой грани в направлении осей y и z .

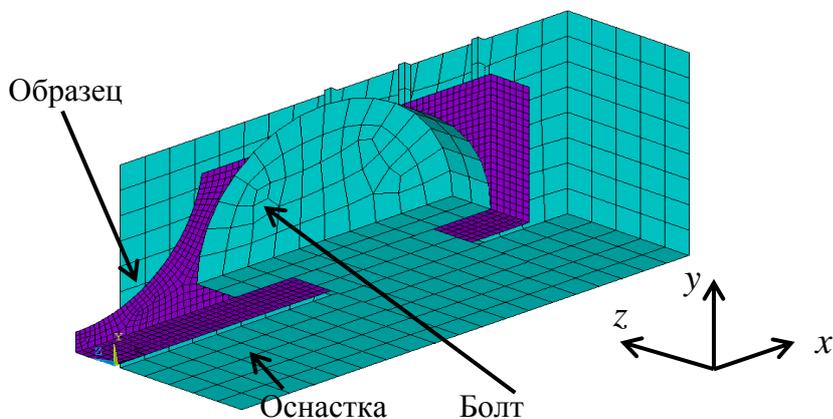


Рис. 5. КЭ модель с учетом оснастки

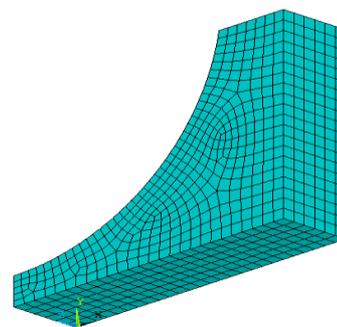


Рис. 6. КЭ модель без учета оснастки (в упрощенной постановке)

В ходе проведения многовариантных вычислительных экспериментов с различными длинами упрощенных моделей образцов было установлено, что наилучшего совпадения удается достичь при длине 26 мм. Результаты сравнения прогнозов двух моделей для нагрева до 900°C представлены на рис. 7-9. Наблюдается удовлетворительное совпадение.

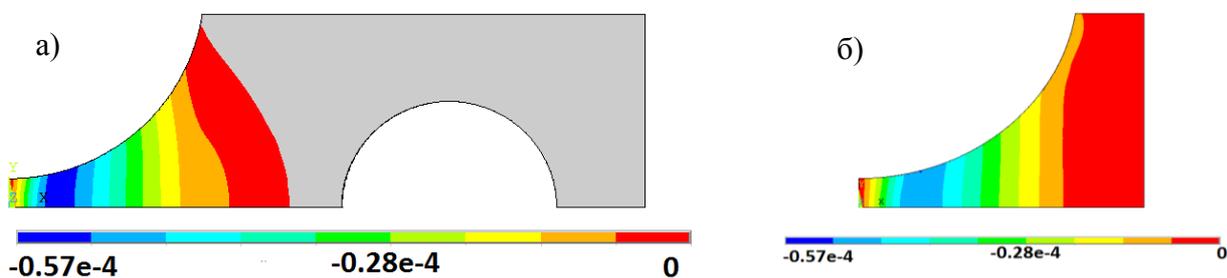


Рис. 7. Осевые перемещения [м] в образце при 900°C для моделей: а) с оснасткой, б) без оснастки

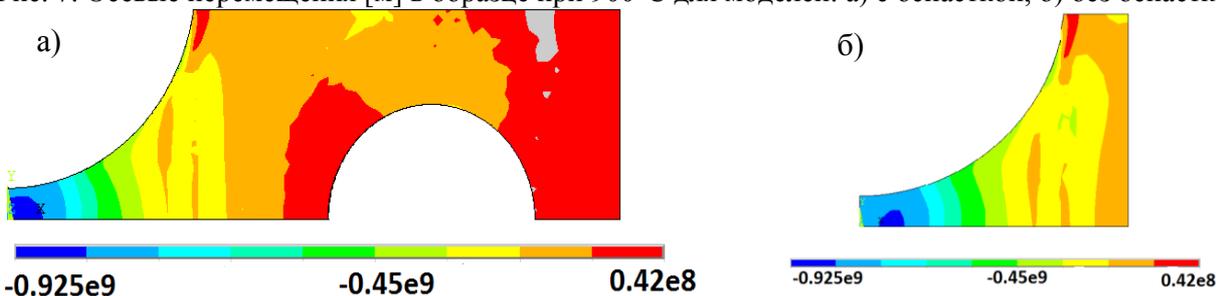


Рис. 8. Осевые напряжения [МПа] в образце при 900°C для моделей: а) с оснасткой, б) без оснастки

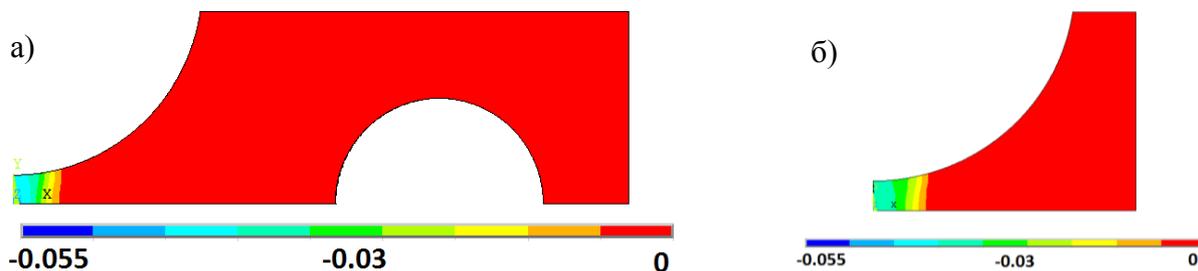


Рис. 9. Осевые пластические деформации в образце при 900°C для моделей:
а) с оснасткой, б) без оснастки

В дальнейшем планируется произвести проверку полученной эффективной длины упрощенной модели образца для других температурных режимов, материалов, в том числе и для монокристаллов различной кристаллографической ориентации.

Исследование выполнено при финансовой поддержке гранта РФФИ № 15-08-08779 и стипендиальной программы Siemens.

ЛИТЕРАТУРА:

1. Гецов Л.Б., Семенов А.С. Критерии разрушения поликристаллических и монокристаллических материалов при термоциклическом нагружении // Труды НПО ЦКТИ. 2009. Вып. 296. С. 83-91.
2. Getsov L.B., Semenov A.S., Ignatovich I.A. Thermal fatigue analysis of turbine discs on the base of deformation criterion // International Journal of Fatigue. 2017. Vol. 97. С. 88-97.
3. Гецов Л.Б., Михайлов В.Е., Семенов А.С., Кривоносова В.В., Ножницкий Ю.А., Блинник Б.С., Магеррамова Л.А. Расчетное определение ресурса рабочих и направляющих лопаток ГТУ. Часть 2. Монокристаллические материалы // Газотурбинные технологии. 2011. № 8. С. 18-25.
4. Гецов Л.Б. Материалы и прочность деталей газовых турбин. -М.: Недра, 1996. -С. 189-193.
5. Май Ш., Семенов А.С. Моделирование процессов неупругого циклического деформирования монокристаллических образцов // Материалы XXXIX Недели науки СПбГПУ. 2010. Ч. V. С. 73-74.

О СООТВЕТСТВИИ ЭВОЛЮЦИОННОЙ И КЛАССИЧЕСКОЙ
МОДЕЛЕЙ ВНУТРЕННЕЙ ДИССИПАЦИИ

В литературе широко изучены диссипативные эффекты, порождаемые силами сухого, вязкого или квадратичного трения [1, 2]. Однако помимо них в реальных телах существует и внутренняя диссипация энергии, обусловленная переменными внутренними деформациями и изученная к настоящему времени достаточно слабо [3]. Поэтому построение адекватных моделей внутреннего трения представляет как теоретический, так и практический интерес.

С этой целью обратимся к рассмотрению влияния внутреннего трения на колебания простейшей механической системы – математического маятника. Разумеется, для учета внутреннего трения маятника можно снабдить его дополнительной внутренней степенью свободы, т.е. ввести в систему диссипативный осциллятор жесткости c и с коэффициентом диссипации β [4]. Фактически мы приходим к модели гравитационного маятника на вязко-упругом стержне. Считая угол отклонения φ и длину l обобщенными координатами, концевую массу равной m , а длину маятника в недеформированном состоянии равной l_0 , выпишем кинетическую, потенциальную энергию и диссипативную функцию [5]

$$T = \frac{1}{2}m(\dot{l}^2 + l^2\dot{\varphi}^2), \quad \Pi = \frac{1}{2}c(l - l_0)^2 + mg(l_0 - l \cos\varphi), \quad S = \frac{1}{2}\beta\dot{l}^2 \quad (1)$$

Подставляя (1) в уравнения Лагранжа второго рода

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} - \frac{\partial T}{\partial \varphi} = -\frac{\partial \Pi}{\partial \varphi} - \frac{\partial S}{\partial \dot{\varphi}}, \quad \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{l}} - \frac{\partial T}{\partial l} = -\frac{\partial \Pi}{\partial l} - \frac{\partial S}{\partial \dot{l}}, \quad (2)$$

приходим к уравнениям движения рассматриваемой системы:

$$l\ddot{\varphi} + 2\dot{l}\dot{\varphi} + g \sin \varphi = 0, \quad m\ddot{l} - ml\dot{\varphi}^2 - mg \cos \varphi + c(l - l_0) + \beta\dot{l} = 0 \quad (3)$$

Домножая первое уравнение на $\dot{\varphi}$, а второе – на \dot{l} , приходим к соотношению

$$\dot{E} = -2S, \quad E = T + \Pi, \quad (4)$$

показывающему, что диссипативная функция S характеризует мощность диссипации. Ясно, что система (3) имеет нижнее положение равновесия, определяемое выражениями

$$\varphi_{равн.} = 0, \quad l_{равн.} = l_0 + \frac{mg}{c}, \quad (5)$$

из которых видно, что в равновесном положении стержневой элемент удлинится на некоторую величину вследствие нагружения его концевой массой. Вводя относительную микродеформацию стержня $\varepsilon = (l - l_0)/l_0$, перепишем уравнения (3) в виде

$$(1 + \varepsilon)\ddot{\varphi} + 2\dot{\varphi}\dot{\varepsilon} + k_1^2 \sin \varphi = 0, \quad \ddot{\varepsilon} + 2n\dot{\varepsilon} + k_2^2\varepsilon - (1 + \varepsilon)\dot{\varphi}^2 - k_1^2 \cos \varphi = 0, \quad (6)$$

более удобном для численного интегрирования, где введены следующие обозначения:

$$k_1^2 = \frac{g}{l_0}, \quad k_2^2 = \frac{c}{m}, \quad 2n = \frac{\beta}{m} \quad (7)$$

Эти величины имеют простой физический смысл: k_1 есть частота малых колебаний маятника длины l_0 , k_2 – частота колебаний массы m на пружине жесткости c , n – фактор затухания этих колебаний с диссипативным коэффициентом β . Ясно, что $k_1 \ll k_2$. Таким

образом, решение (6) зависит от трех параметров – частот k_1 и k_2 и величины n . Из (6) следует, что в положении равновесия относительная деформация стержневого элемента равна

$$\varepsilon_{\text{равн.}} = \left(\frac{k_1}{k_2} \right)^2 = \frac{mg}{cl_0} \ll 1 \quad (8)$$

Представленная модель, хотя и является наиболее естественной, но приводит к математическим трудностям – при этом возрастает размерность задачи и существенно усложняется ее математическая модель. Более того, этот путь не учитывает микромасштабной специфики дополнительной степени свободы, состоящей в том, что микродвижения груза маятника по этой степени свободы фактически не вносят никакого вклада в баланс инерционно-гравитационных сил, но вместе с тем непрерывно рассеивают энергию его макроскопических колебаний [6]. Поэтому обратимся к построению более простой, эволюционной модели внутренней диссипации. Она состоит в том, чтобы выразить мощность диссипации в виде квадратичной функции его микроскорости \dot{l} , которая, в свою очередь пропорциональна $\dot{N} = c\dot{l}$, а кинетическую и потенциальную энергию системы принимать такими же, как и для обычного маятника. Ясно, что

$$N = m(l_0\dot{\varphi}^2 + g \cos \varphi), \quad \dot{N} = ml_0\dot{\varphi}(2\ddot{\varphi} - k_1^2 \sin \varphi) = 3k_1^2 ml_0\dot{\varphi} \sin \varphi, \quad (9)$$

где \dot{N} будем вычислять на невозмущенном движении, т.е. на консервативном движении маятника $\ddot{\varphi} + k_1^2 \sin \varphi = 0$. Тогда имеем

$$T = \frac{1}{2} ml_0^2 \dot{\varphi}^2, \quad \Pi = mgl_0(1 - \cos \varphi), \quad S = \frac{1}{2} bl_0 \dot{N}^2, \quad (10)$$

где b – диссипативный коэффициент. С учетом (9) диссипативная функция принимает вид:

$$S = \frac{1}{2} B ml^2 \dot{\varphi}^2 \sin^2 \varphi, \quad B = 9ml_0 b k_1^2 \quad (11)$$

Подставляя (10) и (11) в первое уравнение (2), приходим к уравнению:

$$\ddot{\varphi} + B \sin^2 \varphi \dot{\varphi} + k_1^2 \sin \varphi = 0 \quad (12)$$

Уравнение (12) описывает процесс затухания колебаний маятника без введения дополнительной степени свободы. Нетрудно показать выполнимость соотношения (4) и в этом случае. Переходя теперь к решению уравнения (11), положим при малых отклонениях приближенно $\sin \varphi \approx \varphi$:

$$\ddot{\varphi} + B\varphi^2 \dot{\varphi} + k_1^2 \varphi = 0 \quad (13)$$

Пользуясь методом усреднения, легко построить его приближенное решение. Будем искать решение в виде $\varphi = a \cos \psi$, где a и ψ – неизвестные функции времени. Здесь удобно записать фазовый угол в виде $\psi = k_1 t + \tilde{\psi}$. Поскольку вместо одной переменной φ мы ввели две, то можно связать их дополнительной зависимостью:

$$\dot{a} \cos \psi - a \sin \psi \dot{\tilde{\psi}} = 0 \quad (14)$$

Тогда $\dot{\varphi} = -ak_1 \sin \psi$, $\ddot{\varphi} = -\dot{a}k_1 \sin \psi - ak_1 \cos \psi \dot{\tilde{\psi}}$. Подставляя эти соотношения в уравнение (13), получим совместно с (14) систему уравнений:

$$\dot{a} \cos \psi - a \sin \psi \dot{\tilde{\psi}} = 0, \quad \dot{a} \sin \psi + a \cos \psi \dot{\tilde{\psi}} = -Ba^3 \sin \psi \cos^2 \psi \quad (15)$$

Разрешая (14) относительно производных, получим:

$$\dot{a} = -Ba^3 \sin^2 \psi \cos^2 \psi, \quad \dot{\tilde{\psi}} = -Ba^2 \sin \psi \cos^3 \psi \quad (16)$$

Усредняя уравнения (15) по периоду фазы ψ , приходим к системе

$$\dot{a} = -\frac{B}{8}a^3, \quad \dot{\psi} = 0, \quad (17)$$

откуда после интегрирования находим:

$$a(t) = \frac{1}{\sqrt{a_0^{-2} + B/4t}}, \quad \psi = k_1 t + \psi_0 \quad (18)$$

Установим соответствие между коэффициентами n и B из уравнений (6) и (12). Вполне естественно осуществлять это сравнение из сопоставления диссипативных функций, т.к. именно они характеризуют мощность диссипации. Учитывая, что в эволюционной модели $\dot{N} = c\dot{l}$ и сопоставляя (1) с (10), принимая во внимание выражения (7) и (11), находим

$$bl_0c^2 = \beta, \quad B = 18n \left(\frac{k_1}{k_2} \right)^4 \quad (19)$$

Сравним теперь результаты, полученные по классической и по эволюционной модели. Следует отметить, что в реальных телах затухание колебаний под действием внутренней диссипации происходит очень медленно и становится заметным лишь по истечению времени, сравнимого с сотней, а то и тысячей периодов колебаний. Для численного же эксперимента из соображений наглядности можно взять такие параметры, чтобы наблюдать на графике это затухание по истечению десятка периодов, при этом сохраняя допущение о малости деформаций стержня. Примем в качестве параметров значения $k_1 = 5$ рад/с,

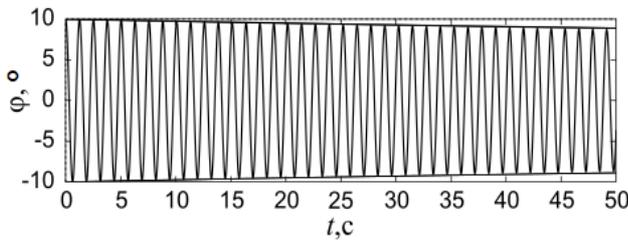


Рис. 1. Классическая модель

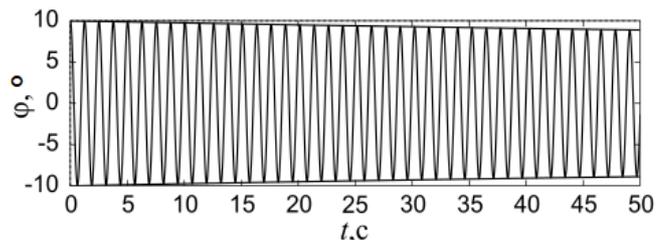


Рис. 2. Эволюционная модель

$k_2 = 20$ рад/с, $n = 10$ рад/с.

Результаты представлены на рис. 1 и 2. На каждом из графиков также изображена огибающая, построенная по приближенной формуле (18). Видно, что результаты, полученные по обеим моделям, очень хорошо соответствуют друг другу. Таким образом, можно сделать вывод о том, что эволюционная модель, являющаяся наиболее простой, дает возможность осуществить качественный анализ затухающих колебаний системы и адекватно соотносится с классической моделью внутреннего трения.

ЛИТЕРАТУРА:

1. Бидерман В.Л. Теория механических колебаний. – М.: изд-во «Высшая школа», 1980. – 408 стр.
2. Стокер Д. Нелинейные колебания в механических и электрических системах. М.: изд-во иностранной литературы. 1952. – 264 с.
3. Смольников Б.А. Эволюционная теория колебаний маятников // СПб: Научно-технические ведомости СПбГПУ. №63. 2008. С. 77-83
4. Черноусько Ф.Л. Движение твердого тела с полостями, содержащими вязкую жидкость. М.: ВЦ АН СССР, 1968. – 230 с.
5. Чечурин С.Л., Чечурин Л.С. Физические основы теории колебаний. СПб: изд-во Политехнического университета. 2005. – 256 с.
6. Смольников Б.А. Эволюционная динамика маятниковых систем // СПб: Теория механизмов и машин, СПбГПУ, 2008, №1 (11). Т. 6. С. 41-47.

АНАЛИЗ ПРОЧНОСТИ СТРОИТЕЛЬНЫХ КОНСТРУКЦИЙ АЭС ПРИ ПАДЕНИИ
ТЯЖЕЛОГО КОММЕРЧЕСКОГО САМОЛЕТА

Введение. Одной из задач проектирования строительных конструкций АЭС является определение прочности и несущей способности (в частности - внешней защитной оболочки реакторного здания) при падении тяжелого коммерческого самолета, а также определение динамических нагрузок на оборудование и трубопроводы, важные для безопасности АЭС.

Цель работы. В настоящей работе представлены результаты разработки и практического применения методики анализа прочности строительных конструкций АЭС при падении самолета с использованием современных программных систем конечно-элементного анализа.

Нагрузки и воздействия при падении самолета. При падении на АЭС самолета рассматривают следующие три вида нагрузок и воздействий [1]: нагрузка на строительные конструкции, возникающая за счет разрушения фюзеляжа; нагрузка, создаваемая ударом твердого обломка самолета (чаще всего предполагают удар турбины двигателя, иногда – тележки шасси); воздействие авиационного топлива. Первые два вида нагрузок представляют собой механические воздействия, при которых необходимо обеспечить прочность строительных конструкций зданий АЭС и работоспособность оборудования. В отношении третьего вида нагрузок обычно ставится задача предотвращения возможности проникновения авиационного топлива или его паров внутрь станции через вентиляционные и технологические отверстия, что может привести к пожару или к отказу оборудования. В настоящее время нагрузку на преграду чаще всего определяют по формуле, предложенной Дж. Риерой [2]. Считают, что удар нанесен по нормали к недеформируемой преграде. Фюзеляж схематизируют как жесткопластический стержень с погонной массой $\mu(\xi)$ и предельной нагрузкой разрушения $P(\xi)$, которые распределены по длине ξ . Динамические нагрузки были определены путем численной реализации методики Риеры на основе весогабаритных характеристик самолетов Boeing 720 [3], Boeing 747-400 [4] и Airbus A380 [5]. Наряду с вышеописанным приближенным подходом, проводились расчеты с полномасштабным моделированием крупнофюзеляжного пассажирского самолета. За основу геометрической модели приняты имеющиеся в открытом доступе в сети Интернет чертежи и САД-модели самолета Airbus A380. На рис. 1. показана созданная конечно-элементная модель самолета.



Рис. 1. КЭ модель самолета Airbus A380

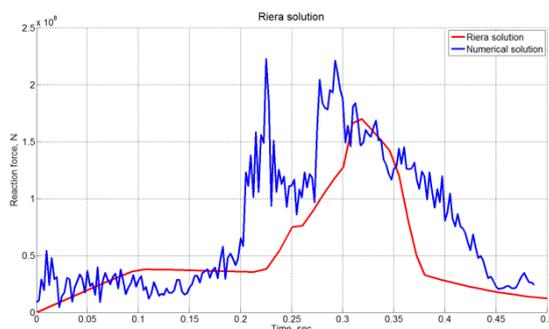


Рис. 2. Сравнение КЭ расчета с методикой Риеры

В расчетах принято, что фюзеляж самолета выполнен из авиационного алюминия сплава ALCOA 7075, валы турбин двигателей – из стали. С целью достижения требуемых массово-инерционных характеристик в КЭ модель самолета внесена добавочная распределенная масса с помощью технологии «*Non-structural mass*» программной системы ABAQUS [6]. Выполнено сравнительное исследование процесса столкновения самолета с недеформируемой преградой с применением упрощенного аналитического метода Дж. Риеры и прямого численного динамического расчета методом конечных элементов. Скорость самолета при столкновении с преградой принята равной 110 м/с. Столкновение происходит при нулевом значении угла отклонения направления движения самолета от нормали к преграде. В процессе расчета выполнялось вычисление силы реакции связи недеформируемой преграды. Произведено сравнение полученной зависимости с решением по методу Дж. Риеры. На Рис. показано сравнение численного и аналитического решений.

Как видно из рисунка, массово-инерционные характеристики созданной КЭ модели самолета, в целом, обеспечивают соответствие вычисленной реакции преграды приближенному решению Риеры. При этом наблюдаются некоторые различия в форме зависимости силы реакции от времени. Первый экстремум на графике численной кривой соответствует моменту контакта крыльев самолета с преградой, второй – моменту удара двигателей.

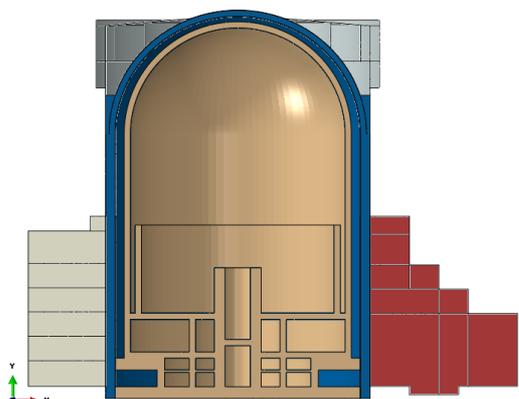


Рис. 3. Геометрическая модель вид в разрезе

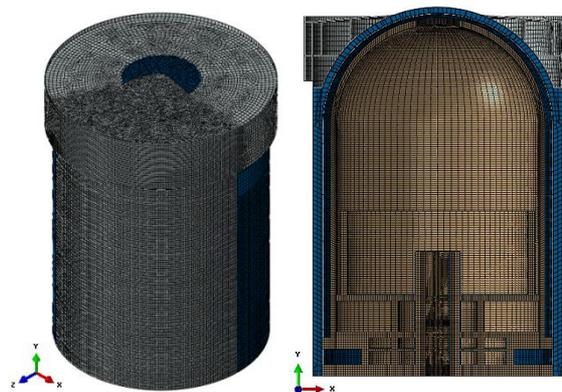


Рис. 4. КЭ модель реакторного здания

Конечно-элементная модель реакторного здания АЭС. Для анализа разработаны геометрическая и КЭ модели комплекса, состоящего из реакторного здания АЭС и близлежащих зданий. Геометрическая модель комплекса в разрезе показана на рис. 3. КЭ модель комплекса состоит из трех зданий – модель здания реактора, модель здания безопасности, модель паровой камеры. Модели здания безопасности и паровой камеры выполнены из оболочечных элементов с применением линейно-упругой модели материала, с заданными свойствами, эквивалентными нормативным свойствам бетона В40. КЭ модель реакторного здания состоит из трех частей, связанных между собой посредством условий жесткого контактного взаимодействия (Рис.рис. 4).

Расчетная модель содержит линейную и нелинейную (CDP или Drucker-Prager) модели бетона, применяемые соответственно для грубой и детальной частей реакторного здания. Для конечных элементов внешней защитной оболочки в явном виде моделировались слои армирования с помощью технологии «встроенные элементы» («*embedded elements*») программной системы ABAQUS Для арматуры использовалась упруго-пластическая модель материала с заданными свойствами, эквивалентными нормативным свойствам арматурной стали А400.

Расчет процесса столкновения самолета с реакторным зданием. В расчетах принято, что основание строительных сооружений АЭС жестко закреплено. Начальная скорость самолета составляет 110 м/с. В самолетных осях угол тангажа равен 15° от горизонтальной плоскости, углы крена и рыскания приняты равными нулю. Варьируемым параметром является толщина T внешней защитной оболочки. При проведении расчетов отслеживались зависимости ускорений от времени (акселерограммы) в трех направлениях в расчетных точках на нескольких высотных уровнях. В соответствии с принципами расчета вторичных систем зданий АЭС (оборудования, трубопроводов и др.), как правило, расчет данных систем на динамические нагрузки производится линейно-спектральным методом. На рис. 5 показан пример спектра ответа по ускорениям для одной из расчетных точек реакторного здания для двух значений относительного коэффициента затухания. На рис. 6 показано распределение параметра поврежденности бетона (а) и распределение эквивалентных по Мизесу напряжений во внутреннем арматурном слое внешней защитной оболочки (б) при применении модели бетона CDP (толщина оболочки $T=1,5$ м). Анализ результатов расчета напряженно-деформированного состояния сооружений АЭС при ударе крупнофюзеляжного самолета в реакторное здание проведен на основе критериев прочности и живучести железобетонных конструкций [7], [8], [9].

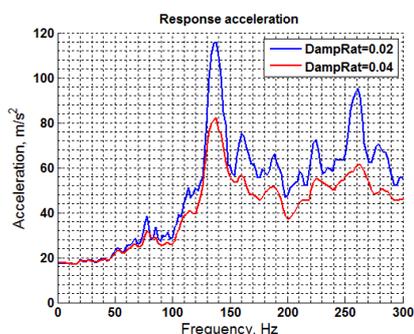


Рис. 5. Спектр ответа по ускорениям в направлении OX

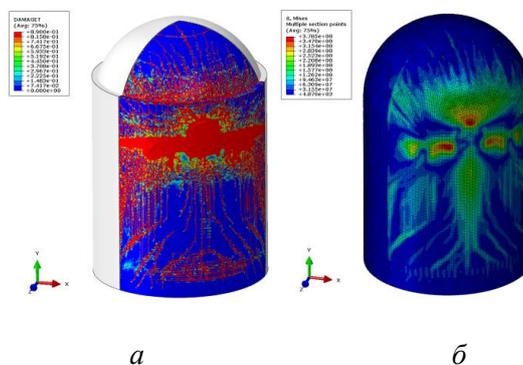


Рис.6. Результаты расчетов

Выводы. Установлено, что динамические нагрузки на вторичные системы, расположенные внутри реакторного здания, существенно зависят от положения и высотного уровня точки крепления данного оборудования. Величины ускорений могут достигать нескольких десятков g . При этом увеличение толщины внешней защитной оболочки не имеет однозначного влияния на максимальные значения акселерограмм. Таким образом, при проектировании зданий АЭС необходимо решать задачу обеспечения прочности и надежности вторичных систем согласованно с решением задачи обеспечения общей прочности.

ЛИТЕРАТУРА:

1. Экстремальные воздействия на сооружения [Текст]: А.Н. Бирбраер, А.Ю. Роледер. – СПб. : Изд-во Политехн. ун-та, 2009 – 594 с.
2. Riera J. D. On the Stress Analysis of Structures Subjected to Aircraft Impact Forces // Nucl. Engng. and Des. 1968. Vol. 8. P. 415–426.
3. 720 Airplane Characteristics for Airport Planning [Электронный ресурс]. The Boeing company commercial airplane division. D6-58323. March 1969. Режим доступа: <http://www.boeing.com/commercial/airports/acaps/720.pdf>
4. 747-400 Airplane Characteristics for Airport Planning [Электронный ресурс]. Boeing Commercial Airplanes. D6-58326-1. December 2002. Режим доступа: http://www.boeing.com/commercial/airports/acaps/747_4.pdf

5. Airbus A380 Aircraft Characteristics, Airport And Maintenance Planning [Электронный ресурс]. – Airbus S.A.S. December 13. – Режим доступа: http://www.airbus.com/fileadmin/media_gallery/files/tech_data/AC/Airbus-AC-A380-20131201.pdf
6. ABAQUS Theory Guide. Dassault Systems, <http://www.3ds.com/support/documentation/users-guide>, 2016
7. Karpenko N.I. General mechanical models of reinforced concrete. Moscow: Stroyizdat, 1996, 416 p.
8. Качанов Л.М. Основы механики разрушения. М.: Наука, 1974
9. Работнов Ю.М. Механизм длительного разрушения. В кн. «Вопросы прочности материалов и конструкций». Изд-во АН СССР, 1959

УДК 539.3

Н.А. Харалдин, А.И. Боровков, О.И. Клявин, С.М. Бобровников
Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого

МЕТОДИКА ВЫБОРА ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ ПАРАМЕТРОВ ДОРОЖНОГО ОГРАЖДЕНИЯ С ПОМОЩЬЮ КОНЕЧНО-ЭЛЕМЕНТНОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ С ПОМОЩЬЮ ПРОГРАММНЫХ КОМПЛЕКСОВ NASTRAN/LS-DYNA

В наши дни компьютерное моделирование является универсальным инструментом для решения инженерных задач. Оно находит применение во всех областях науки и ни одно производство не обходится без компьютерного моделирования. Прочностные расчеты активно используются в строительной и транспортной отрасли промышленности, но они необходимы и в элементарных конструкторских задачах.

Статистические данные о количестве ДТП в России за последние годы, указывают на сокращение количества ДТП в России. Повсеместное внедрение дорожных ограждений в эксплуатацию сокращает количество проникновений пешеходов, детей и животных на дорожное полотно, тем самым обеспечивает более безопасные условия дорожного движения.

Рассмотрим задачу оптимальности конструкции дорожного ограждения. Ввиду большой протяженности дорожной сети и, соответственно, необходимого дорожного ограждения, даже небольшое изменение конструкции повлечет за собой значительные изменения в объемах производства. Компьютерное моделирование позволяет получить оптимальные параметры конструкции, что не только обеспечит выполнение поставленной задачи, но и позволит сократить производственные и логистические издержки.

Обратимся к существующей модификации ограничивающего дорожного ограждения. Основными частями рассматриваемого ограждения являются опоры, откосные опоры, сетка сварная, хомуты, крепления откосных опор (рис. 1, левая часть)). Опоры выполнены из оцинкованной листовой стали толщиной 1.5 мм с профилем 60x60 мм, прутья сварной сетки выполнены из оцинкованной проволоки толщиной 1.8 мм.

Расчетными случаями для проверки оптимальности конструкции являются реакция на природные воздействия и реакция на воздействия человека и животного. К природным воздействиям относятся ветровые нагрузки (принят ураганный ветер – 12 баллов по шкале Бофорта) и воздействие на ограждения избыточного веса от обледенения сетки сварной. К воздействиям человека и животного относятся попытка человеком перелезть ограждение, случайный удар человека об ограждение при падении, попытка крупного животного (олень) вырвать ограждение рогами, попытка крупного животного (олень) пробить ограждение с разбега.

Твердотельная модель дорожного ограждения была создана в программном комплексе CATIA V5, для проведения расчетных испытаний на соответствие конструкции целевым показателям, была создана конечно-элементная модель в программном комплексе ANSA, статические нагрузки моделировались в программном комплексе NASTRAN, динамические

в LS-DYNA. При выборе количества пролетов ограждения учитывалось влияние друг на друга соседних пролетов и частота установки откосных опор. Откосные опоры присутствуют при каждой пятой опоре, поэтому количество пролетов было выбрано равным семи. Полученная конечно-элементная модель содержит 130148 узлов, 102494 оболочечных элементов, 33312 балочных элементов, 82 ограничений на степени свободы. Для лучшего качества сетки конечно-элементной модели, трехузловые элементы допускаются в количестве не более 5% от общего числа оболочечных элементов. Критерии качества для конечно-элементной модели представлены в табл. 1.

Табл. 1. Критерий качества конечно-элементной модели

Критерий	Длина элемента		Соотношение сторон	Угол закрутки	Skew	Taper	Crash time step	Внутренние углы четырехузловых элементов		Внутренние углы трехузловых элементов
	min	max						min	max	
Метод расчета			NASTRAN	IDEAS	PATRAN	PATRAN	LS-DYNA	IDEAS		IDEAS
Критическое значение	4 - сталь 2 - алюминий	5	3	10	45	0,5	9E-7	40	140	30
Целевое значение	8		1	0	0	0	1E-6	90		60

Свойства материала задавались кусочно-линейно, исходя из существующих стандартов ГОСТ [2; 3], представленных в табл. 2. Разрушение сетки сварной в модели инициируется при 2% пластической деформации.

Табл. 2. Свойства материалов (Н/мм²)

	Листовая сталь	Проволока 1.8 мм	Проволока 3.0 мм
Предел текучести	400	1056	839
Предел прочности	543	1117	881

Кроме задания свойств материалов и конечно-элементной сетки, необходимо описание контактов и связей, присутствующих между частями модели. В программных комплексах LS-Dyna существуют различные типы связей, обеспечивающие корректные определения контактов между различными объектами. Так, контакт типа `node_to_surface` использовался между опорами и сеткой сварной, хомутами и сеткой сварной. Контакт типа `beam_to_surface` использовался между моделью оленя и сеткой сварной. Для определения связи между хомутами и опорами использовалась жесткая связь `tied_shell_edge_to_surface`.

Перейдем к результатам компьютерного моделирования реакции модели ограждения на природные воздействия и реакции на воздействия человека и животного. Рассматривается ветровая нагрузка соответствующая 12 баллам по шкале Бофорта (35м/с). С учетом коэффициента аэродинамичности 0.07, максимальное напряжение возникающие в опорах составляют 50 МПа, в сетке сварной 925.5 МПа, что меньше предела текучести материалов

(табл. 2). Для моделирования наледи использовалась дополнительная масса ко всем элементам сетки сварной. Предположив, что сетка сварная покрыта полимером, препятствующем образованию наледи, допустим существование слоя льда, составляющего 25% толщины проволоки (0.45 мм). Максимальное напряжение в опорах составило 2.5 МПа, в сетке сварной 79.5 МПа, что меньше предела текучести материалов (табл. 2).

При моделировании попытки перелезть ограждение человеком масса человека принята равной 100 кг. Стопы жестко закреплены с нижней частью сетки сварной, кисти человека жестко закреплены с верхней частью сетки сварной. Максимальное напряжение в опорах составило 150 МПа, в сетке сварной 945 МПа, что меньше предела текучести материалов (табл. 2).

Расчетный случай случайного удара человека об ограждение рассматривается с теми же связями человека и сетки. Дополнительно добавляется начальная скорость для всех узлов манекена в направлении ограждения равная 20 км/ч. Максимальное напряжение в опорах составило 159 МПа, в сетке сварной 980 МПа, что меньше предела текучести материалов (табл. 2).

Переходя к расчетным случаям взаимодействия моделей крупного животного (олени) и ограждения, необходимо указать на особенности создания модели животного. Масса оленя принята 170 кг, скорость при попытке пробить ограждение 50 км/ч. Для получения адекватных результатов компьютерного моделирования столкновения, в модель животного были включены упругая кожа животного, непосредственно с которой идет контакт с ограждением, мышцы, обеспечивающие сопротивление, и деформируемый скелет. Для моделирования суставов животного были использованы сферические шарниры, допускающие только вращательное движение тел, участвующих в шарнирной паре, друг относительно друга. Максимальное напряжение при попытке вырвать ограждение рогами составило в опорах 268 МПа, в сетке сварной 803 МПа, что меньше предела текучести материалов (табл. 2). Максимальные напряжения при попытке пробить ограждение с разбега превышают предел прочности, что влечет за собой разрушение ограждения.

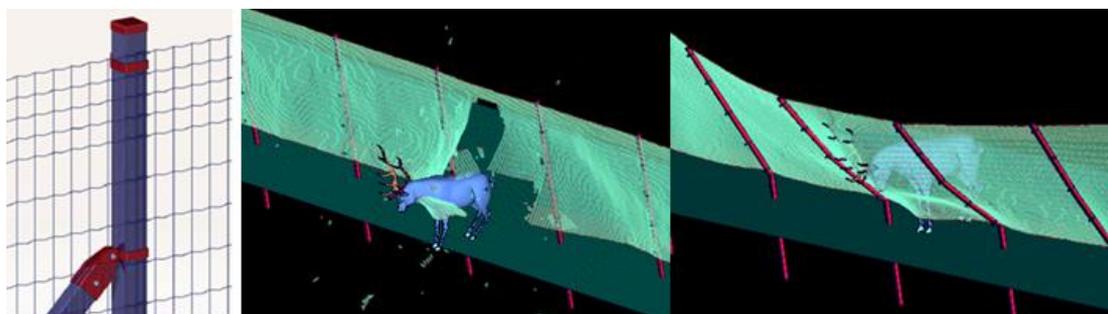


Рис. 1. Конструкция ограждения, попытка пробить исходное (на скорости 20 км/ч) и модифицированное (на скорости 50 км/ч) ограждение животным

Видим, что существующая конструкция ограждения не справляется с задачей удержания крупных животных за пределами дорожного полотна (рис. 1, центр). Можно предложить некоторые модификации ограждения, позволяющие удовлетворить поставленной матрице целей. Если допустить упругую деформацию опор, для поглощения части энергии удара, то сетка сварная сможет удерживать животное на скорости 50 км/ч. Предлагается увеличить толщину сетки сварной с 1.8 мм до 3.0 мм и уменьшить толщину листовой стали опор с 1,5 мм до 0.5 мм. Были рассмотрены случаи реакции ограждения с откосными опорами и без них. Результаты компьютерного моделирования показывают, если убрать откосные опоры, то при новом способе работы ограждения (упругая деформация

опор), ограждение удержит животное даже при значительно большей скорости животного (рис. 1, правая часть).

Многовариантная оптимизация позволила найти лучшее решение поставленной задачи. Минимальные изменения конструкции позволяют предотвратить нежелательное попадание крупных животных на дорожное полотно. Ограждение удерживает животное со скоростью 50 км/ч, но при этой скорости напряжения в опорах превышают предел прочности. Сетка сварная сохраняет целостность ограждения, поэтому ограничивающие свойства ограждения сохраняются, несмотря на повреждения части опор.

ЛИТЕРАТУРА:

1. Информационное интернет агентство www.1gai.ru - Раздел "Статистика ДТП" www.1gai.ru/news/504902-statistika-dtp-za-yanvar-aprel-2012-goda.html
2. ГОСТ 52246-2004 Прокат листовой горячеоцинкованный
3. ГОСТ 3282-74 Проволока стальная низкоуглеродистая общего назначения

УДК 621.313.322-81

Р.Э. Шевчук¹, А.В. Гаев²

¹Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого
²ОАО «НПО ЦКТИ»

ПРИБЛИЖЕННОЕ РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ О КОЛЕБАНИЯХ СЕРДЕЧНИКОВ СТАТОРОВ

Введение. В настоящее время, область проектирования и разработки турбогенераторов характеризуется появлением все более мощных генераторов. Одной из основных проблем, связанной с тенденцией к увеличению мощности, является повышение нагрузок на основные конструктивные элементы. Ввиду циклического характера электродинамических нагрузок, происходит увеличение амплитуд вибрации, что напрямую влияет на усталостную прочность статора, при этом снижается его вибробезопасность. Для обеспечения надежной эксплуатации турбоагрегата, возрастают требования к точности анализа вибрационного состояния ответственных элементов. Несмотря на большое количество работ, выполненных за прошедшие десятилетия, вопросы дальнейшего развития методов расчета и разработки более совершенных конструкций турбогенераторов не теряют своей важности.

Актуальность. Тема статьи является актуальной, поскольку разработка и использование новых методов расчетов, позволяющих получить более точную, по сравнению со стандартными подходами, расчетную оценку вибрационного состояния ответственных элементов статоров, даст возможность повысить надежность эксплуатации турбоагрегата.

Объект исследования. Рассматривается сердечник статора, который ввиду своих конструктивных особенностей, а именно большой жесткости и массы, во многом определяет динамические свойства статора как системы, а, поэтому, является одним из основных его элементов.

Методы исследования. В работе использованы методы теоретической механики, теории колебаний и теории упругости. Численное моделирование выполнено с помощью метода конечных элементов в системе ANSYS, позволяющей проводить модальный анализ с определением собственных частот и форм колебаний.

Цели и задачи работы. Основной целью работы является совершенствование и разработка методов исследования вибрационного состояния ответственных элементов статоров турбогенераторов, к которым, в первую очередь, относится сердечник.

Для достижения поставленной цели были решены следующие задачи: 1. Для возможности упрощенной оценки собственных частот и форм колебаний сердечников

статоров, проанализировать существующие аналитические методы расчета, выделить основные преимущества и недостатки; 2. Разработать метод расчета собственных частот сердечника статора, основанный на его представлении в виде толстостенного цилиндра.

Основная часть. Основными формами свободных колебаний сердечника являются его колебания как твердого тела (поступательные и крутильные) и изгибные эллиптические колебания (первая изгибная мода для двухполюсных турбогенераторов) [1]. Аналитически, собственные частоты колебаний сердечника зачастую определяются исходя из предположения, что он представляет собой тонкое кольцо, т.е. его радиальная ширина мала по сравнению со средним радиусом спинки. Широко представленные в литературе [1,2 и др.] формулы справедливы для сердечников с небольшой высотой спинки h ($h/R_c \ll 1$), в то время как для турбогенераторов отношение h/R_c обычно составляет 0.4 – 0.6.

Следует отметить, в литературе, в том числе и отечественной, встречаются и более корректные модели колебаний сердечника, в которых он геометрически представляет собой диск, однако в инженерной практике указанные подходы не получили широкого распространения.

Так, полученное в статье [3] уравнение дает представление о квазистатическом прогибе сердечника. Но при этом вибрационные характеристики, такие как собственные частоты и формы колебаний здесь не определены. В [4] проведена оценка первой изгибной собственной частоты сердечника энергетическим методом. Определение только первой собственной частоты сердечника при проектировании турбогенератора может быть недостаточным, поскольку в отстраиваемый диапазон могут попасть и более высокие частоты. Кроме того, получаемая в результате оценка эллиптической собственной частоты применима только для двухполюсных генераторов; для генераторов с иным количеством полюсов основная форма и частота колебаний будет отличаться. В [5] приведен более комплексный подход на основе решения системы дифференциальных уравнений плоских колебаний цилиндра. Данный подход позволил автору получить трансцендентное уравнение для определения собственных частот изгибных колебаний, чьим несомненным преимуществом является учет в математической модели влияния пазовой части. Но, в то же время, он не дает представления о радиальных частотах, также являющихся важными при проведении процедуры вибрационной отстройки сердечника.

В настоящей статье разработана математическая модель, позволяющая определять как изгибные, так и радиальные собственные частоты колебаний сердечника статора во всем спектре. Выкладки опущены, ниже представлены конечные соотношения. Из уравнения равновесия диска, при условии свободных от закрепления границ, может быть получено трансцендентное уравнение, представленное в матричном виде (указаны первые две строки матрицы S (4×4) для условий на внутренней поверхности цилиндра):

$$\begin{aligned}
 S_{1,1} &= -\lambda \left(\frac{a_1}{R_i} \right)^2 J_m(a_1) + 2\mu J_m''(a_1) & S_{1,2} &= -\lambda \left(\frac{a_1}{R_i} \right)^2 Y_m(a_1) + 2\mu Y_m''(a_1) \\
 S_{1,3} &= \frac{2\mu m}{R_i} \left[J_m'(a_2) - \frac{1}{R_i} J_m(a_2) \right] & S_{1,4} &= \frac{2\mu m}{R_i} \left[Y_m'(a_2) - \frac{1}{R_i} Y_m(a_2) \right] \\
 S_{2,1} &= \frac{2\mu m}{R_i} \left[-J_m'(a_1) + \frac{1}{R_i} J_m(a_1) \right] & S_{2,2} &= \frac{2\mu m}{R_i} \left[-Y_m'(a_1) + \frac{1}{R_i} Y_m(a_1) \right] \\
 S_{2,3} &= \mu \left[-J_m''(a_2) - \frac{n^2}{R_i^2} J_m(a_2) + \frac{1}{R_i} J_m'(a_2) \right] & S_{2,4} &= \mu \left[-Y_m''(a_2) - \frac{n^2}{R_i^2} Y_m(a_2) + \frac{1}{R_i} Y_m'(a_2) \right]
 \end{aligned}$$

где λ и μ – параметры Ламе (Па), $\lambda = \nu E / [(1 + \nu)(1 - 2\nu)]$, $\mu = E / [2(1 + \nu)]$, R_i – внутренний радиус полого цилиндра (м), $a_1 = \omega_n R_i / c_1$, $a_2 = \omega_n R_i / c_2$, J_m , Y_m – функции Бесселя порядка m , ω_n – собственная круговая частота (рад/с), c_1 , c_2 – скорости распространения продольных и

сдвиговых волн (м/с), $c_1^2 = E/[\rho(1 - \nu)^2]$, $c_2^2 = \mu/\rho$, ' – дифференцирование по r . Третью и четвертую строки матрицы для граничных условий на внешней поверхности цилиндра ($r = R_0$) заполняются аналогично.

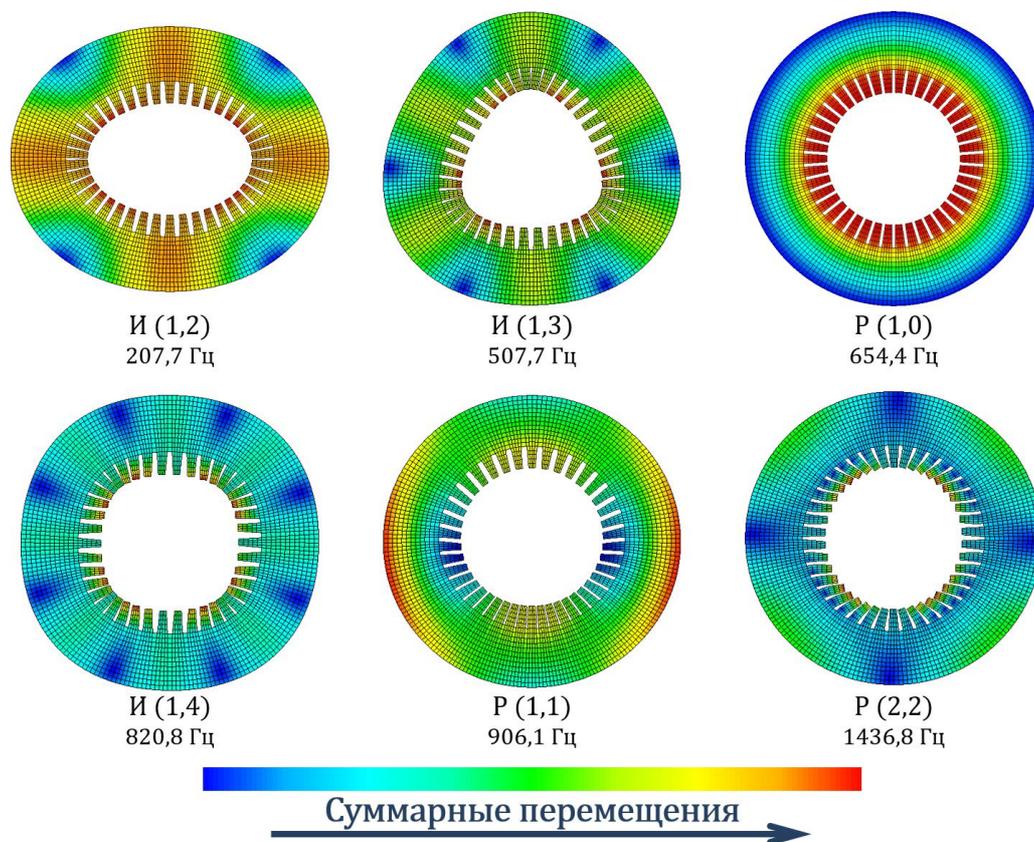


Рис. 1. Собственные формы плоских колебаний сердечника

В целях учета влияния инерционной нагрузки от зубцов, распределим приходящуюся на них массу по спинке сердечника, произведя в S следующую замену $\rho \rightarrow \rho M/M_0$, где M – масса сердечника (кг), M_0 – масса сердечника без пазовой части (кг). Найдем собственные частоты сердечника приравниванием нулю определителя преобразованной матрицы S .

Результаты. Разработан метод расчета собственных частот плоских колебаний сердечников статоров. Его преимуществами являются одновременный учет в математической модели толстостенности сердечника и инерции от наличия пазовой части, что позволяет проводить уточненную оценку спектра собственных частот колебаний.

Достоверность метода подтверждена сопоставлением с результатами конечно-элементного моделирования задачи о свободных колебаниях сердечника (рис. 1). Показано, что первая изгибная частота имеет отклонение в 1.5% от данных численного моделирования, в то время как стандартные подходы могут давать отклонение вплоть до 15% [6].

Выводы. Результаты данного исследования могут быть рекомендованы к использованию производственными объединениями при проектировании и вибрационной отстройке ответственных элементов мощных турбогенераторов.

ЛИТЕРАТУРА:

1. Титов В.В., Хуторецкий Г.М., Загородная Г.А., Вартамян Г.П., Заславский Д.И., Смотров И.А. Турбогенераторы. Расчет и конструкция. Л.: Энергия, 1967. 896 с.
2. Детинко Ф.М., Загородная Г.А., Фастовский В.М. Прочность и колебания электрических машин. Л.: Энергия, 1969. 440 с.

3. Рабинович В.М. Об оптимальном положении упругих элементов подвески сердечника статора турбогенератора. М.: Электротехника. №12. 1965. С. 56-57.
4. Станиславский Л.Я., Гаврилов Л.Г., Остерник Э.С. Вибрационная надежность мощных турбогенераторов. М.: Энергия. 1975. 239 с.
5. Школьник В.Э. Колебания статоров мощных турбогенераторов в стационарном и переходном режимах : дис. ... канд. техн. наук. Л. Электросила, 1978. 187 с.
6. Шевчук Р.Э., Гаев А.В. Метод приближенного решения задачи о колебаниях сердечников статоров // Научно-технические ведомости СПбГПУ. 2017. Т. 23. № 1. С.98–106. DOI: 10.18721/JEST.230110.

УДК 620.179.162

Д.А. Третьяков, А.И. Грищенко, А.С. Семенов, В.А. Полянский, Л.В. Штукин
Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого

ИДЕНТИФИКАЦИЯ УРАВНЕНИЙ ЭВОЛЮЦИИ ПОВРЕЖДЕННОСТИ И АКУСТИЧЕСКОЙ АНИЗОТРОПИИ ПРИ УПРУГО-ПЛАСТИЧЕСКОМ ДЕФОРМИРОВАНИИ

Одним из перспективных методов ультразвуковой диагностики является метод акустоупругости. Данный метод основан на измерении акустической анизотропии (АА), определяемой как относительная разность скоростей v_1 , v_2 поперечных ультразвуковых волн взаимно перпендикулярной поляризации:

$$\Delta a = 2(v_1 - v_2)/(v_1 + v_2) \quad (1)$$

Эффективность данного метода была неоднократно подтверждена теоретическими и экспериментальными исследованиями для различных классов материалов при упругом [1,2] и неупругом [3,4] деформировании. Однако вопрос применимости данного метода в области пластических деформаций до конца не решен.

Разработанные уравнения анизотропной упруго-поврежденной среды [5] позволяют связать скорости продольной и двух поперечных волн с главными значениями D_1 и D_2 тензора поврежденности:

$$\begin{cases} D_3 = 1 - (\bar{v}_3/v_3)^2 \\ D_2 = 1 - [2(\bar{v}_2/v_2)^{-2} - (\bar{v}_3/v_3)^{-2}]^{-1} \\ D_1 = 1 - [2(\bar{v}_1/v_1)^{-2} - (\bar{v}_3/v_3)^{-2}]^{-1} \end{cases} \quad (2)$$

где v_i – скорости в неповрежденном, а \bar{v}_i – скорости в поврежденном материале.

Целью данной работы являлась разработка и идентификация параметров модели упругоповрежденности, связывающей значения компонент тензора поврежденности материала с компонентами тензора деформаций. В данной работе рассмотрен случай одноосного растяжения.

Механические испытания на одноосное жесткое нагружение корсетных алюминиевых образцов, изготовленных из сплава АМц (рис. 1) производились на разрывной гидравлической машине INSTRON-8801. Измерения АА производилось в центральной точке рабочей части образцов при помощи ультразвукового прибора ИН-5101А. Измерение локальных деформаций выполнялось в области измерения акустической анизотропии с помощью высокоточного датчика с базой измерения 10 мм и точностью 10^{-4} мм.

Рассмотрены линейная, параболическая и экспоненциальная аппроксимации зависимостей компонент тензора поврежденности D_1 , D_2 и абсолютного значения акустической анизотропии от деформации (рис. 2).

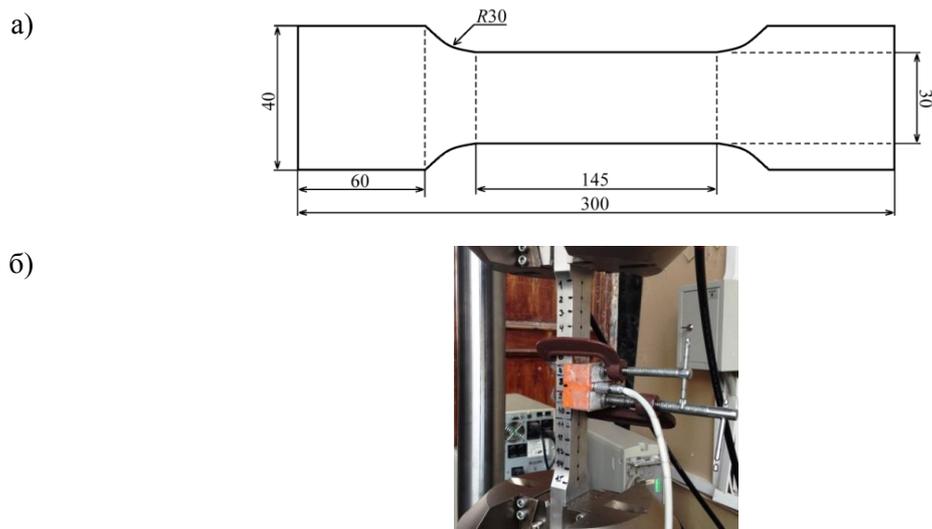


Рис. 1. Геометрия исследуемого образца (а); установка для испытаний (б)

В табл. 1 представлены значения среднеквадратического отклонения (СКО) и коэффициента корреляции R для рассматриваемых аппроксимаций.

Табл. 1. Сравнение аппроксимаций компонент тензора поврежденности и АА

	Аппроксимация	СКО, %	R
D_1	$y = A\varepsilon + B$	$5.61 \cdot 10^{-4}$	0.97
	$y = A\varepsilon^2 + B\varepsilon + C$	$2.47 \cdot 10^{-4}$	0.99
	$y = y_0 + Ae^{B\varepsilon}$	$2.64 \cdot 10^{-4}$	0.99
D_2	$y = A\varepsilon + B$	$1.21 \cdot 10^{-4}$	0.78
	$y = A\varepsilon^2 + B\varepsilon + C$	$1.62 \cdot 10^{-5}$	0.97
	$y = y_0 + Ae^{B\varepsilon}$	$2.81 \cdot 10^{-5}$	0.95
a	$y = A\varepsilon + B$	$6.46 \cdot 10^{-5}$	0.94
	$y = A\varepsilon^2 + B\varepsilon + C$	$1.24 \cdot 10^{-5}$	0.98
	$y = y_0 + Ae^{B\varepsilon}$	$1.60 \cdot 10^{-5}$	0.98

Видно, что наименьшее СКО дает параболическая аппроксимация, что подтверждает гипотезу, выдвинутую ранее в [6]. Несколько хуже данные зависимости описывает экспоненциальная зависимость, однако, ввиду простоты уравнений ее эволюции $dD/d\varepsilon = B(D - D_0)$, ее использование удобней для практического применения.

В табл. 2 представлены значения коэффициентов квадратичной и экспоненциальной аппроксимаций для всех рассмотренных кривых.

Табл. 2. Коэффициенты квадратичной и экспоненциальной аппроксимаций

	$y = A\varepsilon^2 + B\varepsilon + C$			$y = y_0 + Ae^{B\varepsilon}$		
	A	B	C	y_0	A	B
D_1	0,047	0,090	0,209	0,010	0,036	2,742
D_2	0,014	0,053	-0,113	0,021	-0,007	-9,429
a	0,008	0,009	0,080	0,004	0,003	4,854

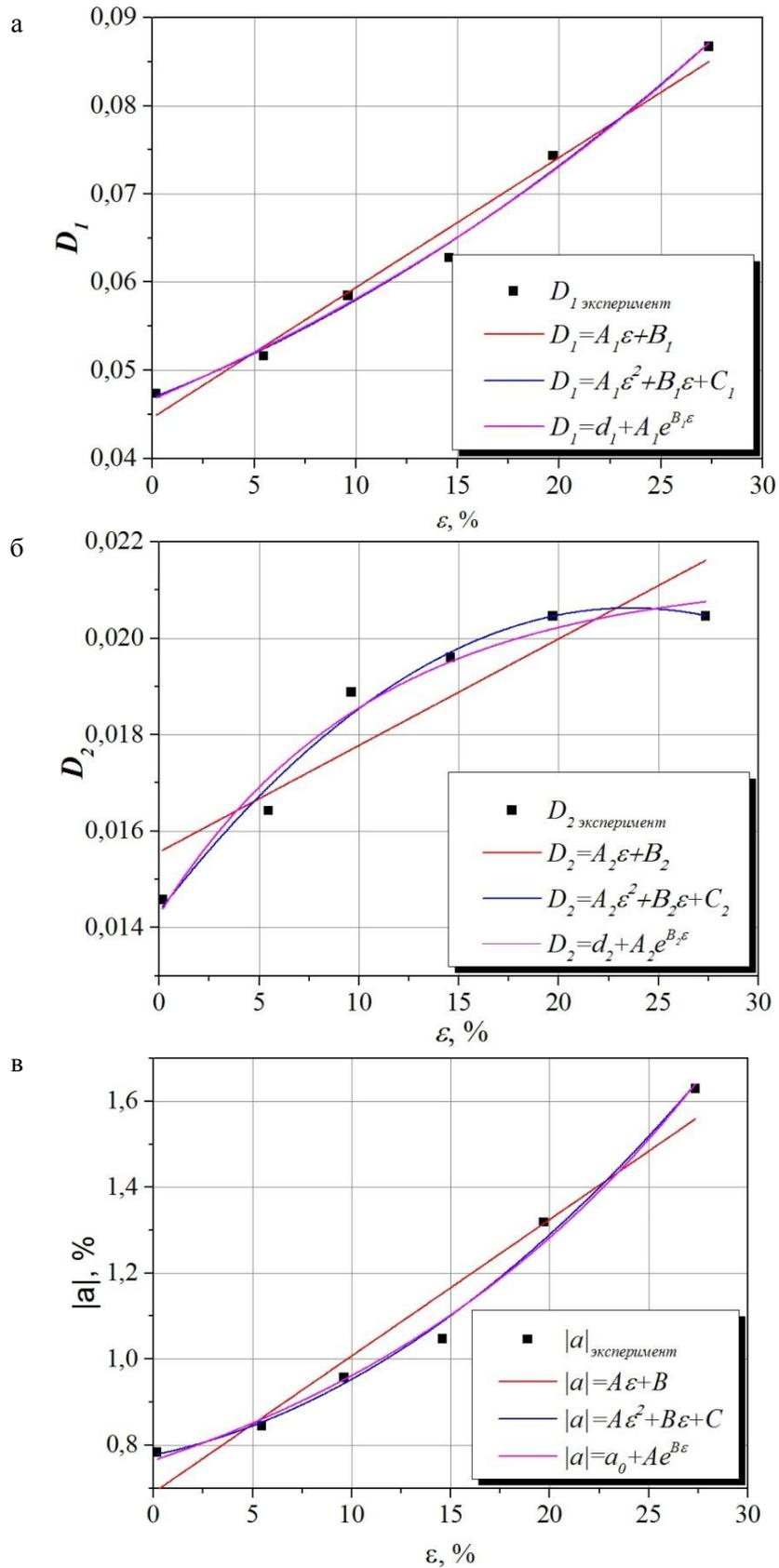


Рис. 2. Зависимость компонент тензора поврежденности D_1 (а), D_2 (б) и абсолютного значения АА (в) от деформации и их аппроксимации

Таким образом, в работе был предложен ряд аналитических аппроксимаций компонент тензора поврежденности и АА от деформации при одноосном растяжении. Подход может быть распространен на широкий класс конструкционных материалов и видов нагружений.

Исследование выполнено при финансовой поддержке Российского Научного Фонда (грант №15-19-00091).

ЛИТЕРАТУРА:

1. Hughes D. S., Kelly J. L. Second-order elastic deformation of solids // Physical review. – 1953. – Vol. 92. – No. 5. – P. 1145.
2. Hirao M., Pao Y. H. Dependence of acoustoelastic birefringence on plastic strains in a beam // The Journal of the Acoustical society of America. – 1985. – Vol. 77. – No. 5. – P. 1659-1664.
3. Belyaev A. K., Polyanskiy V. A., Lobachev A. M., Modestov V. S., Semenov A. S., Grishchenko A. I., Yakovlev Y. A., Shtukin L. V., Tretyakov D. A. Propagation of sound waves in stressed elasto-plastic material // Days on Diffraction (DD), 2016. – IEEE, 2016. – P. 56-61.
4. Беляев А.К., Лобачев А.М., Модестов В.С., Пивков А.В., Полянский В.А., Семенов А.С., Третьяков Д.А., Штукин Л.В. Оценка величины пластических деформаций с использованием акустической анизотропии // Известия Российской академии наук. Механика твердого тела.–2016.–№. 5.– С.124-131.
5. Семенов А.С. Симметризация тензора эффективных напряжений для сред с анизотропной поврежденностью // Научно-технические ведомости СПбГПУ. Физико-математические науки. – 2017. – Т. 10. – №. 2.С. – 82–98.
6. Grishchenko A.I., Semenov A.S., Tretyakov D.A., Shtukin L.V. Relationship between the acoustic anisotropy parameter and measures of the stress-strain state for a specimen with a stress concentrator // Days on Diffraction (DD), 2017. – IEEE, 2017. – P. 154-159.

УДК 539.3:539.214

Д.А. Третьяков, А.С. Семенов
Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого

МОДЕЛИРОВАНИЕ УПРУГО-ПЛАСТИЧЕСКОГО ДЕФОРМИРОВАНИЯ ПОЛИКРИСТАЛЛИЧЕСКОГО НИКЕЛЯ ПРИ СЛОЖНОМ НЕПРОПОРЦИОНАЛЬНОМ ПАССИВНОМ НАГРУЖЕНИИ

Повышение точности прогнозирования прочности и долговечности ответственных элементов промышленных конструкций и обеспечение их безопасной эксплуатации является актуальной проблемой механики деформируемого твердого тела. Процесс накопления пластических деформаций в условиях пассивного нагружения (внутри поверхности нагружения) не описывается в рамках классической теории пластического течения. Возможностью подобного описания обладают: теория упруго-пластических процессов А.А. Ильюшина [1], эндохронная теория пластичности [2] и обобщенная модель Прандтля [3], однако идентификация параметров этих моделей осуществляется на основе активных процессов, что приводит к снижению точности их прогноза для пассивных путей нагружения.

Уточненное описание рассматриваемых процессов, основанное на тщательном экспериментальном и теоретическом изучении свойств пластических податливостей [4], производится в рамках многоповерхностной теории пластичности с одной активной поверхностью равных пластических податливостей [5,6]. Однако ряд положений рассматриваемой модели требует дополнительной проверки.

Целью данной работы является исследование возможности описания процессов пассивного нагружения на основе применения микромеханических (физических,

кристаллографических) моделей материала путем прямого моделирования процессов неупругого деформирования поликристаллического материала с учетом наличия в его представительном объеме различно ориентированных индивидуальных монокристаллов, а также проверка точности выдвинутых в рамках многоповерхностной теории уравнений эволюции. Определение отклика представительного объема поликристаллического материала производится на основе метода конечно-элементной гомогенизации.

Экспериментальные исследования, на основе которых производится верификация прогнозов моделей, описаны в работе [7]. Сравнение расчетных с экспериментальными кривыми отклика материала в пространстве деформаций продемонстрировало эффективность применения многоповерхностной теории к описанию сложного пассивного нагружения (рис. 1 и 2).

В качестве материала в эксперименте использовался технически чистый поликристаллический никель (примеси: Si-0,068%; Fe-0,025%; Cu-0,02%), выбор которого был обусловлен его высоким модулем упругости $E = 2,07 \cdot 10^5$ МПа, большой величиной отношения временного сопротивления к пределу текучести, а также малой ползучестью при комнатной температуре. Образцы были изготовлены из холоднотянутых труб длиной $l = 1$ м с наружными диаметрами 8,06 – 8,10 мм и толщиной стенки 0,18 – 0,20 мм. Модуль сдвига образцов составлял $G = 0,75 \cdot 10^5$ МПа, предел текучести образцов составил $\sigma_T = 140$ МПа.

Моделирование осуществлялось в конечно-элементном пакете PANTOCRATOR [8,9]. В качестве элементарного представительного объема рассматривался куб с регулярным разбиением на конечные элементы. Каждый конечный элемент содержал в себе восемь гауссовых точек, каждая из которых, в свою очередь, представляла собой монокристалл. Отсутствие явно выраженной текстуры у исследуемых образцов была учтена в моделировании путем генерирования случайной ориентации каждого монокристалла.

В работе были проанализированы различные случаи регулярного разбиения элементарного объема от $1 \times 1 \times 1$ до $7 \times 7 \times 7$ элементов. Таким образом, рассмотренные конечно-элементные модели содержали от 8 до 2744 монокристаллов.

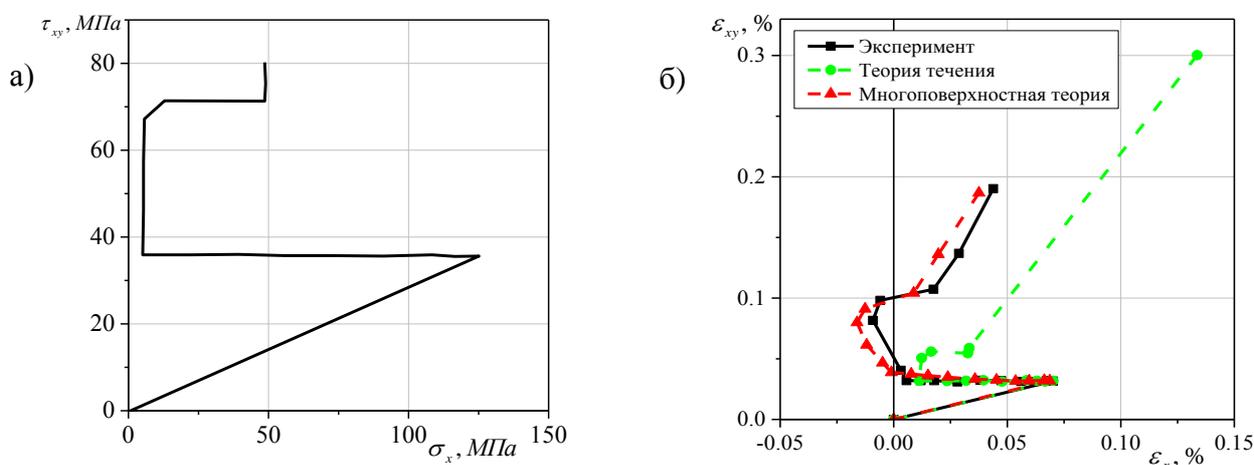


Рис. 1. а) заданный путь нагружения в пространстве напряжений; б) отклик материала в пространстве деформаций (экспер. - черная линия, многопов. теор. - красная линия, теор. теч. - зеленая линия)

На рис. 2а и б приведены распределения полей осевых и касательных напряжений в деформированном поликристаллическом материале с разбиением $7 \times 7 \times 7$ на последнем этапе нагружения. Путь нагружения элементарного объема соответствует экспериментальному (рис. 1а).

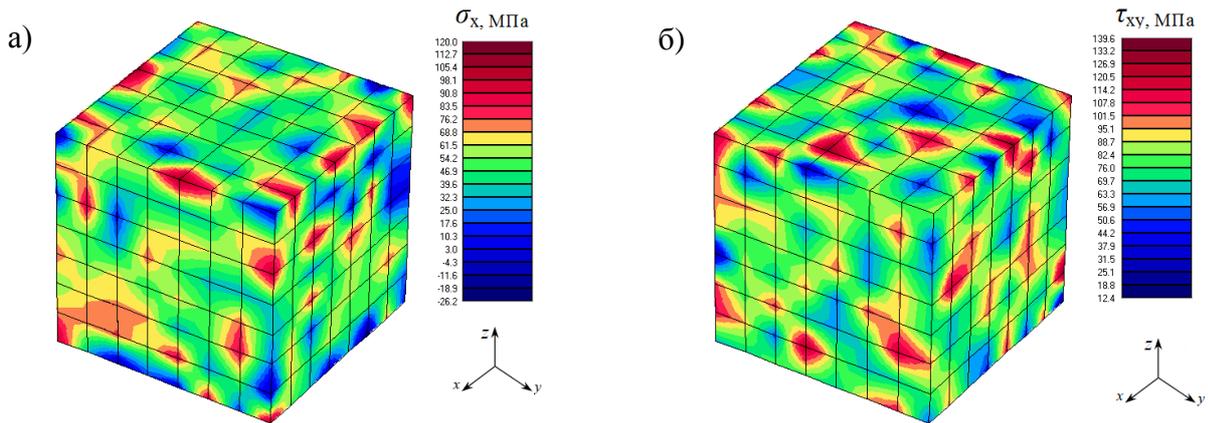


Рис. 2. Распределение полей осевой σ_x , МПа (а) и касательной τ_{xy} , МПа (б) компонент тензора напряжений в элементарном представительном объеме в случае разбиения $7 \times 7 \times 7$

Сравнение расчетных путей деформирования для всех рассмотренных разбиений представлено на рис. 3. На графике видно, что оптимальным с точки зрения сходимости результатов расчета и затрат вычислительных мощностей является разбиение $4 \times 4 \times 4$. Дальнейшее увеличение числа конечных элементов и не влечет за собой качественного изменения зависимости при данных параметрах нагружения элементарного объема.

На рис. 4 показана диаграмма деформирования для представительного объема с разбиением $4 \times 4 \times 4$ из которой видно, что рассматриваемая микромеханическая модель поликристалла позволяет описать развитие пластических деформаций при пассивном нагружении.

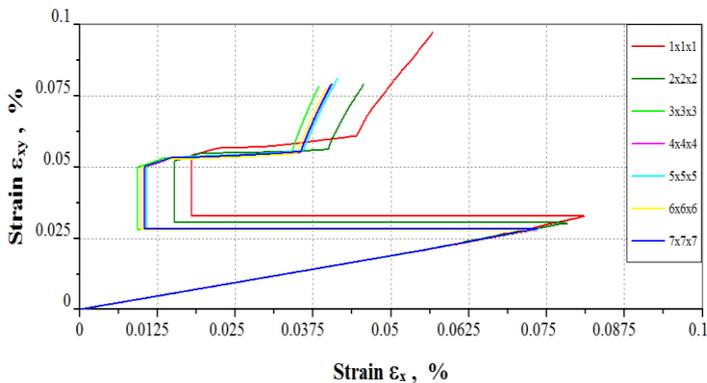


Рис. 3. Влияние числа монокристаллов на результаты расчетов

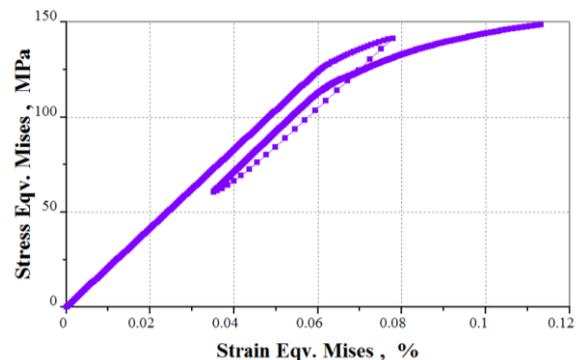


Рис. 4. Расчетная диаграмма деформирования при сложном непропорциональном нагружении

Следует также отметить, что все полученные расчетные пути деформирования (см. рис. 3) качественно совпадают с экспериментальными (см. рис. 1б). Повышения точности расчетов можно добиться путем более точного учета микромеханических констант материала, а также учетом влияния начальных микронапряжений.

Полученные результаты указывают на возможность оценки напряженно-деформированного состояния поликристаллического материала, подверженного сложному непропорциональному пассивному нагружению, на основе применения микромеханической модели упруго-пластического деформирования. В этом случае при расчете сложных конструкций может быть использован КЭ² подход двухуровневого моделирования.

Исследование выполнено при финансовой поддержке стипендиальной программы Siemens.

ЛИТЕРАТУРА:

1. Ильюшин А.А. Пластичность. Основы общей математической теории. М.: Изд-во АН СССР, 1963. 271 с.
2. Кадашевич Ю.И., Мосолов А.Б. Эндохронные теории пластичности: основные положения, перспективы развития // Изв. АН СССР. МТТ. 1989. №1. С. 161-168.
3. Пальмов В.А. Колебания упруго-пластических тел. Л.: Наука, 1976. 328 с.
4. Изотов И.Н., Ягн Ю.И. Изучение пластического деформирования металла с деформационной анизотропией, созданной в процессе предварительного нагружения // ДАН СССР.-1961.-Т. 139.-№3.-С.576-579.
5. Мельников Б.Е., Семенов А.С. Описание эволюции поверхностей равной податливости в многоповерхностной теории пластичности // Труды Санкт-Петербургского политехнического университета Петра Великого. 1996. № 556. С. 52-61.
6. Мельников Б.Е., Семенов А.С. Концепция многоповерхностной пластичности с одной активной поверхностью: теория, эксперимент и приложения // Материалы XXVII сессии Российского акустического общества, посвященной памяти ученых-акустиков ФГУП «Крыловский государственный научный центр» А.В. Смольякова и В.И. Попкова. – 2014. -С. 1-18.
7. Мельников Б.Е., Семенов А.С. Исследование поля пластических податливостей при сложных пассивных путях нагружения // Научно-технические ведомости СПбПУ. Естественные и инженерные науки. – 2016. – №. 4 (254). -С. 151-163.
8. Семенов А.С. PANTOCRATOR – конечно-элементный программный комплекс, ориентированный на решение нелинейных задач механики // Труды V Межд. Конф. «Научно-технические проблемы прогнозирования надежности и долговечности констр. и методы их решения». – СПб: Изд-во СПбГПУ, 2003. –С. 466-480.
9. Семенов А.С. Вычислительные методы в теории пластичности. –СПб: Изд-во СПбГПУ. 2008. – 211 с.

ИССЛЕДОВАНИЕ КРИТИЧЕСКОЙ СКОРОСТИ ФЛАТТЕРА КРЫЛА CLARK YH 8%

Введение. При движении самолета на определенной скорости возникает флаттер, который характеризуется нарастающими автоколебаниями различных упругих частей самолета: крыльев, элеронов, закрылок, рулей поворота, рулей высоты и др. Флаттер приводит к быстрому разрушению всего самолета в целом. Одним из решений этой проблемы, является расчет критической скорости (скорость флаттера), которую самолет не должен превысить.

В рамках данной работы была поставлена *цель* – написание программы для расчёта критической скорости флаттера в зависимости от параметров крыла и набегающего потока и для визуализации данного процесса. В процессе работы были выделены следующие *задачи*:

- Изучить задачу о крутильно-изгибном флаттере крыла при дозвуковых скоростях, пренебрегая некоторыми аэродинамическими параметрами
- Создать интерактивную модель данного процесса на JavaScript с помощью библиотеки three.js

В данной работе выполнен расчет критической скорости крыла Clark YH 8%, при этом есть возможность изменять характеристики крыла и угол атаки для исследования критической скорости и наблюдением за колебаниями системы.

Физическая модель. При флаттере крыло совершает сложные гармонические колебания. Ограничимся в первом приближении рассмотрением плоских колебания крыла в потоке воздуха. Так как конструкция реального крыла, состоящая из разного рода элементов (закрылки, элероны и т.д.), достаточно сложная, то рассмотрим его в виде жесткой модели крыла [1] с упругими связями (рис. 1).

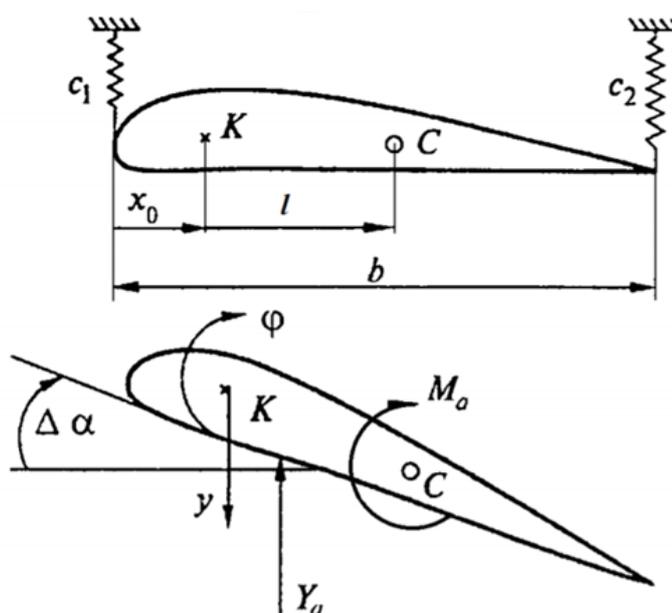


Рис. 1. Схема крыла с пружинами (упругими связями) и его степени свободы

Предположим, что система имеет две степени свободы, причем пружины (упругие связи) обеспечивают только вертикальные движения точек крепления крыла.

Здесь K — центр жесткости, C — центр тяжести крыла, c_1 и c_2 — коэффициенты жесткости крыла. За обобщенные координаты примем: y — линейную координату отклонения центра жесткости крыла при изгибе, φ — угловую.

При расчетах для крыла Clark-YH-8% геометрические и аэродинамические характеристики были взяты из справочника авиационных профилей [2].

Составим систему из двух дифференциальных уравнений колебаний крыла, применив для этого уравнения Лагранжа II рода, где обобщенными силами будут потенциальные силы упругой связи и аэродинамические силы, тогда получим:

$$\begin{aligned} \ddot{y} + b_{11}\dot{y} + c_{11}y + a_{12}\ddot{\varphi} + c_{12}\dot{\varphi} &= 0 \\ \ddot{\varphi} + b_{21}\dot{y} + a_{22}\ddot{\varphi} + c_{22}\dot{\varphi} &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a_{12} &= l, & b_{11} &= \frac{1}{m} \frac{\rho v^2}{2} S c_y^a \frac{1}{v}, & c_{11} &= \frac{1}{m} (c_1 + c_2), \\ a_{22} &= \frac{J}{ml}, & b_{21} &= -\frac{1}{ml} \frac{\rho v^2}{2} S c_m^a \frac{1}{v}, & c_{12} &= \frac{1}{m} \frac{\rho v^2}{2} S c_y^a, & c_{22} &= -\frac{1}{ml} \left(c - \frac{\rho v^2}{2} S c_m^a \right) \end{aligned}$$

Решение полученной системы уравнений будем разыскивать в виде $y = Ae^{\lambda t}$, $\varphi = Be^{\lambda t}$

$$A(\lambda^2 + \lambda b_{11} + c_{11}) + B(\lambda^2 a_{12} + c_{12}) = 0$$

$$A(\lambda^2 + \lambda b_{21}) + B(\lambda^2 a_{22} + c_{22}) = 0$$

Для ненулевого решения определитель системы уравнений должен быть равен нулю: $a_0 \lambda^4 + a_1 \lambda^3 + a_2 \lambda^2 + a_3 \lambda + a_4 = 0$ — характеристическое уравнение.

$$a_0 = a_{22} - a_{12}, \quad a_1 = b_{11} a_{22} - b_{21} a_{12}, \quad a_2 = c_{22} + c_{11} a_{22} - c_{12},$$

$$a_3 = b_{11} c_{22} - b_{21} c_{12}, \quad a_4 = c_{11} c_{22}$$

Заклучение об устойчивости или неустойчивости системы можно сделать, применив критерий устойчивости Гурвица. Для устойчивости уравнения четвертого порядка необходимо, что бы определитель Δ_3 был больше нуля и все коэффициенты характеристического уравнения также были больше нуля:

$$\Delta_3 = a_1 a_2 a_3 - a_0 a_3^2 - a_1^2 a_4 > 0,$$

$$a_0 > 0, a_1 > 0, a_2 > 0, a_3 > 0, a_4 > 0$$

$$a_0 = a_{22} - a_{12} = \frac{J - l^2 m}{ml} = \frac{J^c}{ml}, \quad a_1 = b_{11} a_{22} - b_{21} a_{12} = \frac{1}{mv} \frac{\rho v^2}{2} S \left(c_y^a \frac{J}{ml} + c_m^a \right)$$

$$a_2 = c_{22} + c_{11} a_{22} - c_{12} = \frac{1}{ml} \left[c + l \frac{c_1 + c_2}{m} J - \frac{\rho v^2}{2} S (c_m^a + l c_y^a) \right]$$

$$a_3 = b_{11} c_{22} - b_{21} c_{12} = \frac{c}{m^2 l v} \frac{\rho v^2}{2} S c_y^a, \quad a_4 = c_{11} c_{22} = \frac{1}{m^2 l} \left[(c_1 + c_2) \left(c - \frac{\rho v^2}{2} S c_m^a \right) \right]$$

Из полученных выражений ясно, что при постоянном значении величины l , знаки коэффициентов a_0 , a_1 , a_3 не зависят от скорости полета v , знаки коэффициентов a_2 , a_4 , наоборот, зависят от скорости v .

Расчеты показывают, что условие положительности коэффициентов выполняются автоматически, а критическая скорость определяется из численного решения неравенства.

Визуализация флаттера крыла. Визуализация осуществляется посредством программы, написанной на языке JavaScript с использованием графической библиотеки three.js [3]. В файле constants.js массивом задаются координаты точек профиля крыла при значении хорды крыла l . В этом же файле массивом задаются безразмерные константы, используемые при

расчёте подъёмной силы и закручивающего момента, действующего на крыло, для разных значений углов атаки [4].

В файле physics.js рассчитываются координаты центра жёсткости и центра масс крыла, определяется момент инерции относительно оси z и рассчитывается критическая скорость флаттера.

В файле flutter.html на страницу с проектом добавляются управляющие элементы, управление камерой и происходит отрисовка крыла. Крыло инициализируется массивом точек, количество которых можно изменять, с помощью параметра numZ. Этот параметр отвечает за количество разбиений крыла на отдельные профили по оси Z . Так как каждый профиль задаётся программно и отрисовывается отдельно, данная визуализация позволяет в будущем имитировать колебания и распределение нагрузок на отдельных срезах крыла, число которых можно менять. Этот факт, а также возможность изменения профилей крыла и их аэродинамических характеристик в совокупности с автоматическим перерасчётом других необходимых физических параметров задаваемого профиля делает программу удобным стартом для дальнейших проектов по изучению сил и моментов, действующих на крыло при более точном моделировании физики жёсткости крыла и набегающих потоков.

Выводы. В результате была создана модель флаттера крыла на JavaScript, в которой можно изменяя внутренние и внешние параметры системы, узнать критическую скорость. Разумеется, эта модель не является полностью реальной, для ее построения был принят ряд допущений, не приняты во внимания некоторые аэродинамические параметры и силы.

В перспективе развития проекта планируется более тщательно проработать физическую сторону задачи, чтобы сделать модель более точной.

ЛИТЕРАТУРА:

1. А. А. Кузнецов, А. А. Матросов «Условия возникновения флаттера крыла самолета АН-124-100» (№1(1) 2016 «Молодой исследователь Дона»)
2. Справочник авиационных профилей, Казанский Национальный Исследовательский Технический Университет им. А.Н. ТУПОЛЕВА
3. Jos Dirksen «Learning Three.js. The JavaScript 3D Library for WebGL»
4. В.А. Бернс, Е.Г. Подружин, Б.К. Смирнов «Конструкция и расчёт элементов планера самолёта на прочность. Крыло.» Новосибирский государственный технический университет, 2000 г.

УДК 539.3

В.Е. Величко

Институт проблем машиноведения РАН

РАСЧЕТ КОЛЬЦЕВЫХ ПЛАСТИН ПЕРЕМЕННОЙ ТОЛЩИНЫ ПОД ДЕЙСТВИЕМ СОСРЕДОТОЧЕННЫХ НАГРУЗОК ПО ТЕОРИИ ОБОЛОЧЕК СРЕДНЕЙ ТОЛЩИНЫ

Рассматривается задача о деформации кольцевой толстой ортотропной пластины переменной толщины под собственным весом, расположенной на точечных опорах. Задача разрабатывается для больших зеркал телескопов. Пластина находится в горизонтальном положении (рис. 1). Внутренний и внешний контур пластины свободен от нагрузок. Сосредоточенные усилия F_i распределены по кольцу радиусом R_1 с центром в центре пластины и расположены в углах φ_i . Внешняя нагрузка $q(r, \varphi)$, действующая на кольцевую пластину, разгруженную на систему точек, равна

$$q(r, \varphi) = -\gamma(r) + \sum_{i=1}^m \frac{F_i}{R_1} \delta(r - R_1, \varphi - \varphi_i), \quad (1)$$

здесь $\gamma = \rho gh(r)$ – равномерно распределенная нагрузка, (ρ – плотность материала пластины, g – ускорение свободного падения, $h(r)$ – толщина пластины), $\delta(\dots)$ – дельта функция двух аргументов, m – количество опор.

Нагрузка, действующая на пластину всегда должна быть самоуравновешенной:

$$\iint_S q(r, \varphi) r dr d\varphi = \iint_S r^2 q(r, \varphi) \cos \varphi dr d\varphi = \iint_S r^2 q(r, \varphi) \sin \varphi dr d\varphi = 0. \quad (2)$$

Сведем задачу к осесимметричной и циклично-симметричной деформации. Для этого разделим внешнюю нагрузку $q(r, \varphi)$ на два компонента. Добавим и вычтем нагрузку, распределенную по кольцу $p_1 = \frac{P}{2\pi R_1}$ (здесь P – вес пластины). Получим:

$$q_1(r) = -\gamma + p_1 \delta(r - R_1); \quad (3)$$

$$q_2(r, \varphi) = -p_1 \delta(r - R_1) + \sum_{i=1}^m \frac{F_i}{r} \delta(r - R_1, \varphi - \varphi_i). \quad (4)$$

Задача с (3) решается как осесимметричная (номер гармоники $n = 0$). Разложим (4) в ряд Фурье $q_2(r, \varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} (q_n^{(1)}(r) \cos n\varphi + q_n^{(2)}(r) \sin n\varphi)$, где коэффициенты ряда вычисляются по формулам ($n = 1, 2, 3, \dots$):

$$q_n^{(1)} = \left(\frac{1}{\pi} \sum_{i=1}^m \frac{F_i}{R_1} \cos n\varphi_i \right) \delta(r - R_1); \quad q_n^{(2)} = \left(\frac{1}{\pi} \sum_{i=1}^m \frac{F_i}{R_1} \sin n\varphi_i \right) \delta(r - R_1). \quad (5)$$

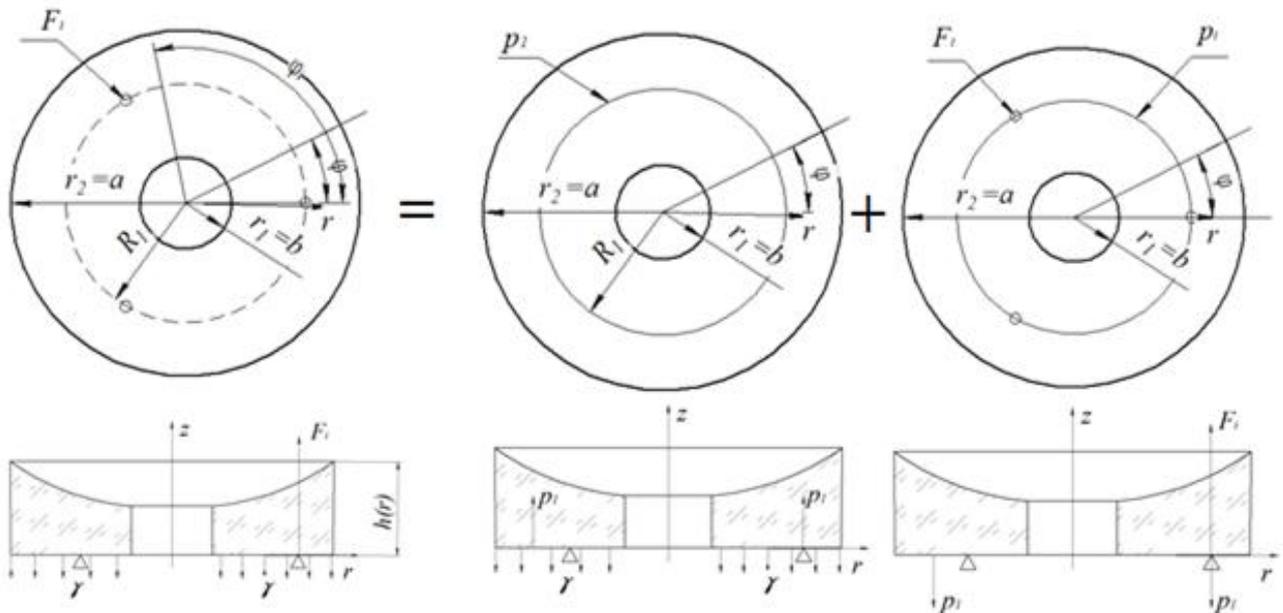


Рис. 1. Кольцевая пластина переменной толщины и применяемые внешние нагрузки

На необходимость исследования деформации прогиба зеркала с учетом сдвига ссылаются в работе [1]. В работе [2] приводится расчет изгиба изотропной пластины постоянной толщины под нагрузками (3) и (4). Перемещения внешней поверхности пластины представлялись согласно концепции Тимошенко-Рейснера [3] в виде суммы двух слагаемых – прогиба, обусловленных изгибом пластины и сдвигом.

Обобщим учет влияния сдвига на пластину с переменной толщины. Воспользуемся теорией анизотропных пластин переменной толщины Паляя-Спиро [4]. Эта теория учитывает влияние сдвига, а также позволяет рассчитывать пластины и оболочки с переменной толщиной. В дальнейшем рассматриваются цилиндрические координаты r, φ, z ,

где начало координат расположено в центре кольцевой пластины. Введено обозначение индексов $r, \varphi, z \rightarrow 1, 2, 3$. Формулировку гипотез Паляя-Спиро можно представить в виде:

$$u_1^* = u_1 + z\vartheta_1; \quad u_2^* = u_2 + z\vartheta_2; \quad u_3^* = u_3 + F(z); \quad \vartheta_1 = \vartheta_{10} + \gamma_1; \quad \vartheta_2 = \vartheta_{20} + \gamma_2. \quad (6)$$

Здесь приняты следующие обозначения: u_1^*, u_2^*, u_3^* - перемещения (функция от r, φ, z); u_1, u_2, u_3 - перемещения срединной поверхности (функция от r и φ); ϑ_1, ϑ_2 - углы поворота прямолинейных волокон оболочки (функция от r и φ); $\vartheta_{10}, \vartheta_{20}, \gamma_1, \gamma_2$ - углы поворота нормали к срединной поверхности и углы сдвига в тех же плоскостях (функция от r и φ); $F(z)$ - функция от z , удовлетворяющая условию $F(0) = 0$.

Для решения задачи используется принцип циклической симметрии: $\Phi(r, \varphi) = \Phi(r, \varphi + 2\pi)$. Это дает возможность разложить и внешнюю нагрузку, и все элементы деформации в ряд Фурье по окружной координате. Будем представлять внешнюю нагрузку q , нормальные силы T_1, T_2 , поперечная сила N_1 , изгибающие моменты M_1, M_2 , перемещения u_1, u_3 , угол ϑ_1 , деформации и кривизны $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \kappa_1, \kappa_2$ в форме:

$$Q(r, \varphi) = \sum_n [Q_n^{(1)}(r) \sin n\varphi + Q_n^{(2)}(r) \cos n\varphi], \quad (7)$$

в то время как сдвигающие силы T_{12}, T_{21} , поперечная сила N_2 крутящие моменты M_{12}, M_{21} , перемещение u_2 , угол ϑ_2 , деформации и кривизны $\omega_1, \omega_2, \tau_1, \tau_2$ в форме:

$$Q(r, \varphi) = \sum_n [Q_n^{(1)}(r) \cos n\varphi - Q_n^{(2)}(r) \sin n\varphi]. \quad (8)$$

В дальнейшем получаем решение для каждого из верхних индексов (1), (2) и каждого номера гармоники n отдельно. Полное решение получается с помощью формул (7) и (8). Ниже индексы (1) и (2) и n опущены. Применяя принцип циклической симметрии к теории Паляя-Спиро, задача сводится к решению системы линейных обыкновенных дифференциальных уравнений 10-го порядка для каждой гармоники:

$$\begin{cases} \frac{dQ_i}{dr} = \sum_{f=1}^5 a_{if} u_f + \sum_{g=1}^5 b_{ig}^* Q_g + a_{i0} & i = 1, 2, 3, 4, 5 \\ \frac{du_j}{dr} = \sum_{f=1}^5 a_{jf}^* u_f + \sum_{g=1}^5 b_{jg} Q_g + b_{j0} & j = 1, 2, 3, 4, 5 \end{cases} \quad (9)$$

со следующими граничными условиями на внутреннем и внешнем кольце пластины:

$$r = a \quad Q_1(a) = Q_2(a) = Q_3(a) = Q_4(a) = Q_5(a) = 0; \quad (10)$$

$$r = b \quad Q_1(b) = Q_2(b) = Q_3(b) = Q_4(b) = Q_5(b) = 0. \quad (11)$$

Используемые обозначения описаны в табл.1.

Табл.1. Список неизвестных, используемых в системе уравнений (9)

Q_1	Q_2	Q_3	Q_4	Q_5	u_1	u_2	u_3	u_4	u_5
$T_1 r$	$T_{12} r$	$N_1 r$	$M_1 r$	$M_{12} r$	u	v	w	ϑ	ψ

Значения коэффициентов $a_{if}, b_{ig}^*, a_{i0}, a_{jf}^*, b_{jg}, b_{j0}$ $i, j, f, g = 1, 2, 3, 4, 5$ сведены в табл. 2.

Остальные силы, моменты, деформации и функция $F(z)$ вычисляются по формулам:

$$\begin{aligned} T_2 &= \frac{E_{12}}{E_{11}} h T_1 + \left(-\frac{1}{r} v n + \frac{1}{r} u\right) \left(E_{22} - \frac{E_{12}^2}{E_{11}}\right) h + \frac{q h}{2} \left(\mu_1 \frac{E_{12}}{E_{11}} - \mu_2\right); \quad T_{21} = T_{12}; \quad M_{21} = M_{12}; \\ M_2 &= \frac{E_{12}}{E_{11}} \mu_1 + \left(-\frac{1}{r} \Psi n + \frac{1}{r} \vartheta\right) \left(E_{22} - \frac{E_{12}^2}{E_{11}}\right) \frac{h^3}{12} + \frac{q h^2}{8} \left(\mu_2 - \mu_1 \frac{E_{12}}{E_{11}}\right); \quad N_2 = G_{23} h \left(\psi - \frac{1}{r} W n\right) \end{aligned} \quad (12)$$

$$\varepsilon_1 = \frac{du}{dr}; \quad \varepsilon_2 = -\frac{1}{r} v n + \frac{1}{r} u; \quad \kappa_1 = \frac{dv}{dr}; \quad \kappa_2 = -\frac{1}{r} \psi n + \frac{1}{r} v; \quad (13)$$

$$F(z) = \int_0^z \left(-\frac{1}{2} + \frac{z}{h}\right) \frac{E_3}{1 - \mu_1 \nu_{13} - \mu_2 \nu_{23}} q dz - (\mu_1 \varepsilon_1 + \mu_2 \varepsilon_2) - (\mu_1 \kappa_1 + \mu_2 \kappa_2) \frac{z^2}{2} \quad (14)$$

Табл. 2. Значение коэффициентов системы уравнений (9) с $i, j = 1, 2, 3, 4, 5$

a_{if}						b_{ig}^*					a_{io}
i	f					g					
	1	2	3	4	5	1	2	3	4	5	
1	$\frac{A}{r}$	$\frac{n}{r}$	0	0	0	$-B\frac{h}{r}$	$B\frac{hn}{r}$	0	0	0	$-C\frac{h}{2}q_n$
2	$-A\frac{n}{r}$	$-\frac{1}{r}$	0	0	0	$-B\frac{hn}{r}$	$B\frac{hn^2}{r}$	0	0	0	$C\frac{hn}{2}q_n$
3	0	0	0	0	0	0	0	$\frac{1}{r}G_{23}hn^2$	0	$G_{23}hn$	rq_n
4	0	0	1	$A\frac{1}{r}$	$\frac{n}{r}$	0	0	0	$B\frac{h^3}{12r}$	$-B\frac{h^3n}{12r}$	$-C\frac{h^2}{8}q_n$
5	0	0	0	$-A\frac{n}{r}$	$\frac{1}{r}$	0	0	$G_{23}hn$	$-B\frac{h^3n}{12r}$	$rG_{23}h + B\frac{h^3n^2}{12r}$	$C\frac{h^2}{8}nq_n$
a_{jf}^*						b_{jg}					b_{jo}
j	f					g					
	1	2	3	4	5	1	2	3	4	5	
1	$\frac{1}{E_{11}hr}$	0	0	0	0	$-A\frac{1}{r}$	$A\frac{n}{r}$	0	0	0	$\frac{\mu_1}{2}\frac{1}{E_{11}}q_n$
2	0	$\frac{1}{G_{12}hr}$	0	0	0	$-\frac{n}{r}$	$\frac{1}{r}$	0	0	0	0
3	0	0	$\frac{1}{G_{13}hr}$	0	0	0	0	0	-1	0	0
4	0	0	0	$\frac{1}{E_{11}h^3r}$	$\frac{12}{r}$	0	0	0	$-A\frac{1}{r}$	$A\frac{n}{r}$	$-\frac{\mu_1}{2}\frac{3}{E_{11}h}q_n$
5	0	0	0	0	$\frac{1}{G_{21}h^3r}$	$\frac{12}{r}$	0	0	$-\frac{n}{r}$	$\frac{1}{r}$	0

Комментарии: $A = \frac{E_{12}}{E_{11}}$; $B = E_{22} - \frac{E_{12}^2}{E_{11}}$; $C = \mu_1 \frac{E_{12}}{E_{11}} - \mu_2$; $E_{11} = \frac{E_1}{1 - \nu_{12}\nu_{21}}$;
 $E_{22} = \frac{E_2}{1 - \nu_{12}\nu_{21}}$; $E_{12} = \frac{\nu_{12}E_1}{1 - \nu_{12}\nu_{21}} = \frac{\nu_{21}E_2}{1 - \nu_{12}\nu_{21}}$; $\mu_1 = \frac{\nu_{31} + \nu_{21}\nu_{32}}{1 - \nu_{12}\nu_{21}}$; $\mu_2 = \frac{\nu_{32} + \nu_{12}\nu_{31}}{1 - \nu_{12}\nu_{21}}$;

В настоящее время продолжают исследования данной задачи.

ЛИТЕРАТУРА:

1. Yoder P., Vucobratovich D. Opto-mechanical system design Vol.2, CRC Press, 2015. 528 p.
2. Бауэр С.М., Ковалев А.М. и др. Расчет и оптимизация металлических зеркал телескопов. Спб: Издательство С.-Петербургского университета, 1997. 228 с.
3. Тимошенко С.П., Гудьер Дж. Теория упругости. Москва: Наука, 1975. 576 с.
4. Палий О.М., Спиро В.Е. Анизотропные оболочки в судостроении. Теория и расчет. Л.: Судостроение, 1977. 386 с.

ВЛИЯНИЕ ХИМИЧЕСКОГО СРОДСТВА И ДИФФУЗИИ ПОД НАПРЯЖЕНИЕМ НА КИНЕТИКУ ХИМИЧЕСКОЙ РЕАКЦИИ ПРИ МЕХАНИЧЕСКИХ НАГРУЗКАХ

Проблема термического окисления кремния в настоящее время является одной из наиболее важных проблем в химии из-за важности и широкого использования кремниевых технологий. Поскольку объем молекулы диоксида кремния больше, чем у атома кремния, окисление кремния сопровождается увеличением объема, что вызывает внутренние деформации и напряжения. Кроме того, химические реакции в деформируемых твердых веществах часто протекают под внешними механическими нагрузками.

В работе рассматривается химическая реакция между твердым телом и газом, в результате которой образуется новый твердый материал. Дальнейшая реакция продолжается за счет диффузии газа через образовавшийся твердый материал к фронту химической реакции. Образование диоксида кремния и является примером такой реакции. Таким образом, химическая реакция вызывает два процесса: диффузию через каркас твердого тела и саму химическую реакцию. Оба процесса могут зависеть от механических нагрузок. Их влияние на скорость химической реакции и на диффузию может быть учтено различными способами, однако в большинстве работ зависимости химического сродства, кинетической константы реакции или коэффициента диффузии определяются эмпирически, и нет определенности в том, какая скалярная функция тензора напряжений должна войти в эти зависимости. В случае диффузии под напряжением зависимость диффузии может также учитываться через дополнительные члены в законе Фика, однако в большинстве случаев эти дополнительные слагаемые не подходят для описываемой диффузии через твердое тело.

Один из теоретически обоснованных подходов учета влияния напряженно-деформированного состояния на фронте химической реакции на скорость распространения фронта, был представлен в работах [1], [2] в рамках теории рациональной механики сплошных сред. Он основан на тензорном выражении химического сродства, который, с одной стороны, позволяет учитывать влияние механических нагрузок в классической парадигме физической химии. С другой стороны, тензорное химическое сродство демонстрирует, что в твердых телах скорость реакции в ориентированном элементе поверхности зависит от ориентации площадки по отношению к напряжениям. В этой работе мы сравниваем влияние зависимости от напряжений для химического сродства и зависимости от напряжений диффузии на кинетику фронта химической реакции. В рамках первого подхода напряжения влияют на распространение фронта химической реакции, так как они появляются в выражении для химического сродства и в соответствующем кинетическом уравнении, которое связывает химическое сродство с скоростью реакции. Второй подход сводит проблему распространения фронта химической реакции к задаче диффузии с правильным выбором диффузионной модели и зависимыми от напряжений параметрами модели. Поскольку выражение для тензора химического сродства было получено в рамках так называемого твердого скелетного подхода, где считается, что трансформированный материал выступает в качестве скелета для диффундирующей газовой компоненты, и дополнительными деформациями скелета, возникающими за счет диффузии, мы пренебрегаем, мы не рассматриваем дополнительные члены в уравнении диффузии и сосредотачиваемся только на зависимости коэффициента диффузии от напряжений. Обычно в моделях диффузии под напряжением используется скалярная характеристика тензора

напряжений. Эта характеристика может быть определена по-разному, например, как давление, как нормальное напряжение, как интенсивность сдвиговых напряжений; выбор между этими характеристиками делается интуитивно. В этой работе мы также пытаемся связать коэффициент диффузии с тензором напряжений или тензоров физически разумным образом, а именно с деформациями сплошного скелета, что приводит к модели тензорной диффузии. В этой работе мы рассматриваем подход тензорного химического сродства и используем три модели диффузии: с постоянным коэффициентом диффузии, с эмпирически введенной зависимостью [3] и с предложенным коэффициентом тензорной диффузии.

В этой работе мы рассматриваем простейшие краевые задачи распространения фронта химической реакции. Принимая параметры материалов за параметры, соответствующие кремнию, мы исследуем модель химического сродства, предложенную в [1], с тремя различными моделями коэффициента диффузии. Для простейших краевых задач распространения фронта химической реакции исследуется влияние зависимости коэффициента диффузии от механических нагрузок на скорость распространения фронта химической реакции. Конкретно, мы исследуем следующие краевые задачи: прямоугольный блок в плоско-напряженном состоянии с распространяющимся плоским фронтом вдоль направления, свободного от механических нагрузок; и шаровое тело с распространяющимся в нем сферическом фронте химической реакции. Обе краевые задачи исследуются при различных механических нагрузках: на поверхности тела задаются внешние напряжения и перемещения.

Исходя из полученных в работе результатов, можно сделать вывод, что в случае планарного фронта химической реакции в трехмерном прямоугольном теле зависимости коэффициента диффузии от механических напряжений почти не влияют на распространение химического взаимодействия реакции. Это позволяет пренебречь влиянием напряжений на диффузионный процесс и упростить дальнейшие расчеты, поскольку использование постоянного коэффициента диффузии уменьшает количество необходимых параметров модели и, соответственно, количество экспериментов и вычислений, необходимых для нахождения этих параметров.

В случае сферического фронта реакции влияние учета диффузии под механическими нагрузками сильно зависит от рассматриваемой модели диффузии. Широко используемая эмпирическая зависимость коэффициента диффузии от давления оказывает значительное влияние на кинетику фронта химической реакции, особенно в случае заданных перемещений. Это происходит потому, что в результате химической реакции возникает дополнительная деформация химического превращения. Поскольку для заданных (то есть фиксированных) перемещений на границе сферическое тело вообще не может расширяться, деформации, возникающие в результате химической трансформации, вызывают большие сжимающие напряжения внутри трансформированного материала, что, в свою очередь, значительно уменьшает коэффициент диффузии и замедляет распространение фронта химической реакции.

Предложенный в работе тензорный коэффициент диффузии почти не влияет на распространение фронта химической реакции. Это происходит потому, что в этом коэффициенте компонента напряжения, которая действует в направлении диффузионного потока, слабо влияет на скорость распространения потока диффузии, поскольку она не деформирует скелет твердого тела достаточно, чтобы значительно изменить расстояние между ячейками материала и, соответственно, изменить проницаемость материала. Таким образом, в этом случае разность между кинетикой достаточно мала, чтобы ею пренебречь.

ЛИТЕРАТУРА:

1. Vilchevskaya, E., Freidin, A.: On kinetics of chemical reaction fronts in elastic solids. *Surface Effects in Solid Mechanics* pp. 105–117 (2013)

2. Freidin, A.B., Korolev, I.K., Aleshchenko, S.P., Vilchevskaya, E.N.: Chemical affinity tensor and chemical reaction front propagation: theory and fe-simulations. International Journal of Fracture pp. 1–15 (2016)
3. Sutardja, P., Oldham, W.: Modeling of stress effects in silicon oxidation. IEEE Transactions on Electron Device 36(11), 2415–2421 (1989)

УДК 539.3, 62, 620.9

А.В. Калюжнюк^{1,2}, Д.С. Михалюк², А.В. Соклаков², А.Ю. Роледер³, Л.Ю. Феоктистова³
¹Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого
²ЗАО «КАДФЕМ Си-Ай-Эс»
³ОАО «Атомпроект»

РАСЧЕТ ПРЕДЕЛЬНОЙ НЕСУЩЕЙ СПОСОБНОСТИ ОБОЛОЧКИ КОНТАЙНМЕНТА АЭС

Введение. На сегодняшний день перспективы энергообеспечения не могут быть связаны с углеводородным топливом, как основным источником: это топливо не возобновляемо, ресурсы ограничены, стоимость добычи и транспортировки постоянно растёт, а энерготехнологии на его основе, в большинстве своём, не могут удовлетворять энергетическим требованиям [1].

Для успеха широкомасштабного развертывания атомной энергетики в XXI веке необходимо решить четыре ключевые проблемы: стоимость, безопасность, отходы, нераспространение ядерного оружия [1, 2].

В работе рассмотрена одна из этих проблем – безопасность – на примере определения предельной несущей способности преднапряжённой оболочки контейнмента реактора атомной электростанции (АЭС).

Предельная несущая способность (отказ) конструкций, в которых используется ядерное топливо, определяется по потере конструкцией структурной целостности в той степени, в которой не может быть гарантирована функция локализации и удержания топлива в этой конструкции. В случае железобетонных и предварительно напряженных железобетонных контейнментов их внутренняя герметичная стальная облицовка должна быть спроектирована таким образом, чтобы выдерживать воздействие приложенных нагрузок и выдерживать деформацию бетонной защитной оболочки, сохраняя её герметичность [3].

Согласно [4], наиболее неблагоприятное сочетание воздействий в особом режиме, включающем проектную аварию, определяется сопоставлением вариантов воздействия температуры и избыточного давления в течение аварии и послеаварийный период.

Согласно [5], на сегодняшний день наилучший подход для надежного определения поведения контейнмента под действием нагрузок – нелинейный расчёт методом конечных элементов с помощью современных программных комплексов.

Цель работы – определение предельной несущей способности внутренней преднапряженной защитной оболочки здания реактора АЭС под действием аварийных нагрузок выше проектных с учетом нелинейной работы конструкции. Расчет проведен для действия внутренних нагрузок – сочетания нагрузок при аварии с потерей теплоносителя.

Методы исследования. Для проведения расчёта в работе создана конечно-элементная (КЭ) модель оболочки контейнмента в программной системе ANSYS (рис. 1).

КЭ модель, используемая для расчетов предельной несущей способности контейнмента, имеет следующие характеристики:

- изотропные элементы оболочки (shell elements), моделирующие железобетонное сечение являются многослойными, выделены слои для бетона, арматуры и облицовки;

- учтены нелинейные свойства всех материалов.

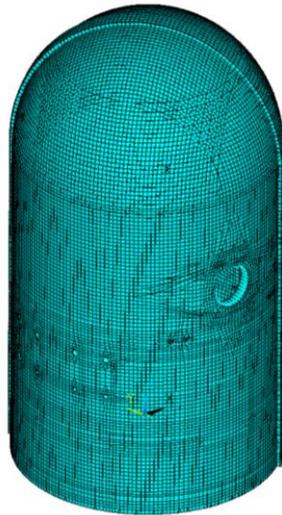


Рис. 1. Конечно-элементная модель оболочки контейнмента

Система преднапряжения защитной оболочки предназначена для обжатия внутренней оболочки здания реактора с целью компенсации растягивающих усилий, возникающих при действии внутреннего избыточного давления. Таким образом, обеспечивается прочность и трещиностойкость оболочки при малых процентах армирования железобетона.

Для моделирования преднапряженных пучков использованы основанные на теории балок Тимошенко элементы (beam188).

Моделирование бетона, армирования и облицовки проведено с использованием многослойных элементов (shell181). Слои расположены в следующем порядке от внутренней поверхности: облицовка, бетон, арматура, бетон, арматура, бетон.

Локальное усиление армирования в областях транспортного шлюза и шлюзов для персонала произведено согласно чертежам соответствующих областей.

В модели использован нелинейный материал бетона с критерием прочности Друкера-Прагера, позволяющий учесть отличие пределов прочности бетона при одноосном растяжении и сжатии. Данная модель материала (Drucker-Prager Concrete) однозначно определяется, исходя из диаграммы напряжение-деформация для бетона, а также обеспечивает лучшую сходимость по сравнению с моделями Extended Drucker-Prager, Willam-Warnke и Microplane.

Поверхность текучести (разрушения) в модели Друкера-Прагера однозначно определяется тремя параметрами материала:

- σ_c – предел прочности при одноосном сжатии;
- σ_t – предел прочности при одноосном растяжении;
- σ_b – предел прочности при двухосном сжатии.

Моделирование неупругого поведения материала бетона проведено с помощью модели линейного разупрочнения, обеспечивающей лучшую сходимость по сравнению с моделями экспоненциального и кусочно-линейного разупрочнения бетона. Шесть необходимых для однозначного определения параметров модели соответствуют экспериментальным диаграммам напряжение-деформация для бетона. Они нормируются так, чтобы относительные напряжения, при которых происходит разупрочнение бетона при растяжении и сжатии, были равны 1 (рис. 2).

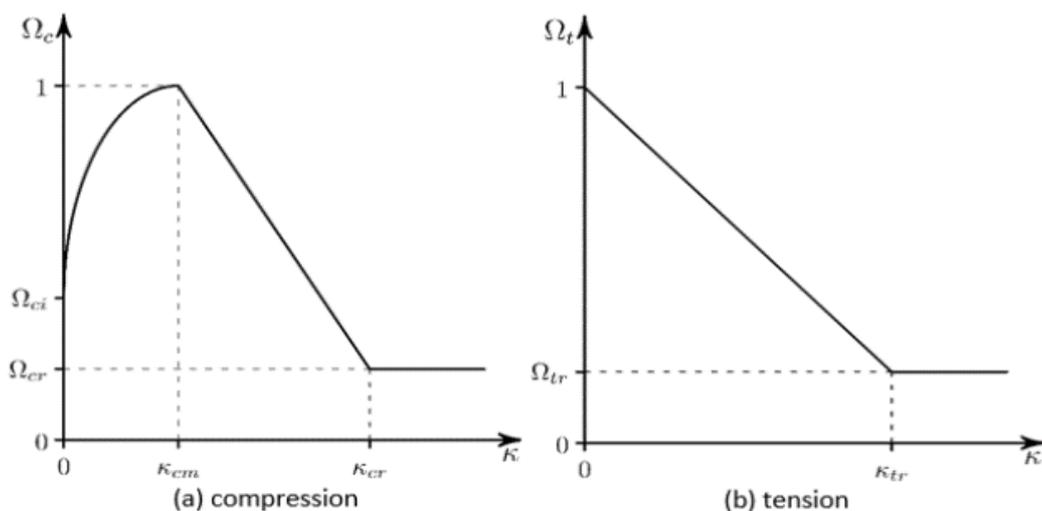


Рис. 2. Зависимость напряжений от полных деформаций бетона

Для арматуры, облицовки и канатов преднапряжения использованы нелинейные материалы стали – билинейные модели неупругого поведения с изотропным упрочнением. Такие модели (bilinear isotropic hardening) однозначно определяется из экспериментальных диаграмм напряжение-деформация для сталей. Модель обеспечивает лучшую сходимость по сравнению с многолинейной моделью. Кинематическая модель (bilinear kinematic hardening) не используется вследствие отсутствия циклических нагрузок.

Данный расчет выполнен только для внутренней оболочки: принято жесткое закрепление оболочки в месте заделки в фундаментную плиту.

В расчете учтены следующие нагрузки:

- преднапряжение пучков путём задания фиктивной температуры;
- собственный вес конструкции
- внутреннее избыточное давление;
- аварийная температурная нагрузка в элементах оболочки и канатов преднапряжения;

то есть сочетание нагрузок при аварии с потерей теплоносителя.

Результаты. В результате расчёта получены значения предельных нагрузок внутренней преднапряженной защитной оболочки здания реактора АЭС под действием аварийных нагрузок выше проектных с учетом нелинейной работы конструкции.

Проведена верификация приближенной аналитической оценкой моментов потери герметичности и несущей способности различными элементами контейнента [6].

Выводы. На основании результатов расчёта сделан вывод о том, что потеря герметичности и несущей способности оболочки без учёта и с учётом аварийных температурных нагрузок наступает при давлениях, значительно превышающих проектное избыточное давление.

ЛИТЕРАТУРА:

1. Физический расчёт ядерного реактора на тепловых нейтронах: Ф50 учебное пособие. – Томск: Изд-во Томского политехнического университета, 2009. – 504 с.
2. Бэкфорд. Э. Будущее атомной энергетики // Междисциплинарное исследование Массачусетского технологического института [Электронный ресурс]. – Режим доступа: <http://www.seu.ru/programs/atomsafe/books/FAE1.pdf>.
3. ASME Boiler & Pressure Vessel Code, Section III.

4. Demonstrating Structural Adequacy of Nuclear Power Plant Containment Structures for Beyond Design-Basis Pressure Loadings. Proceedings of the ASME 2010 Pressure Vessels & Piping Division/K-PVP Conference PVP2010 July 18-22, 2010, Bellevue, Washington, USA
5. NUREG/CR-6906 (SAND2006-2274P). Containment Integrity Research at Sandia National Laboratories. An Overview. U.S. Nuclear Regulatory Commission. July 2006
6. OECD-NEA CSNI Research Report, "Bonded or Un-bonded Technologies for Nuclear Reactor Prestressed Concrete Containments", (Draft November 2014), editors. Etienne Gallitre and Pentti Varpasuo, Paris, 2014

УДК 539.5

Д.А. Китаева

Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого

ИССЛЕДОВАНИЕ ОПТИМАЛЬНЫХ ТЕМПЕРАТУРНО-СКОРОСТНЫХ ПАРАМЕТРОВ ПРОДОЛЬНОЙ ПРОКАТКИ ЛИСТА ИЗ АЛЮМИНИЕВОЙ ЗАГОТОВКИ

Использование эффекта сверхпластичности является одним из наиболее перспективных технологических процессов обработки металлических материалов [1]. Целью таких процессов, как и вообще операций горячего формоизменения, можно считать получение полуфабрикатов с требуемыми формой, размерами и свойствами. Проектированию подобных технологий предшествует глубокая научная проработка, которая, в свою очередь, способствует развитию математических теорий горячего формообразования сплавов [2, 3].

Многочисленные теоретические и экспериментальные исследования позволяют определить сверхпластичность как особое состояние поликристаллических материалов, пластически деформируемых при пониженном напряжении с сохранением в продеформированном металле мелкой исходной структуры (структурная сверхпластичность) или с ее формированием в процессе нагрева и деформации (динамическая сверхпластичность) [4]. Динамическая сверхпластичность алюминиевых сплавов развивается в температурно-скоростных условиях структурного превращения – динамической рекристаллизации. В этих режимах происходит формирование мелкозернистой структуры и создаются условия для осуществления механизма зернограничного проскальзывания, характерного для сверхпластичности. Эффект обусловлен согласованной суперпозицией скоростей деформаций и структурных (фазовых) переходов эволюционного типа в открытых неравновесных системах.

С использованием модели [4], устанавливающей связь между напряжениями, температурой и скоростями деформаций, разработанной с привлечением теории бифуркаций и соотношений упругопластических процессов малой кривизны [2], сформулирована и аналитически решена [5-7] двумерная изотермическая (в температурном режиме сверхпластичности) задача тонколистовой продольной прокатки полосы из алюминиевых сплавов.

Считаем, что операция прокатки осуществляется в валках одинакового радиуса R , вращающихся с одинаковыми угловыми скоростями (рис. 1), а очаг деформации находится в изотермических условиях в диапазоне температур сверхпластичности [5].

В качестве управляющей переменной принимаем технологический параметр μ , учитывающий, кроме средней скорости v_1 перемещения металла при толщине h_1 на входе в очаг деформации, геометрические и контактные условия (рис. 1) [5-7]:

$$\mu = v_1 \left[\frac{\bar{\Psi}}{h_1 (1 - \Lambda)} \right]^2. \quad (1)$$

Здесь $\Lambda = (h_1 - h_2) / h_1$ – обжатие полосы; h_2 – толщина заготовки на выходе из валков;

$$\bar{\Psi} = \frac{\alpha_1}{\psi \alpha_1 - \sin \alpha_1}, \quad (2)$$

причем $\psi(\alpha_1, \chi) = \frac{\sqrt{1 - \chi^2}}{\chi} \sin \alpha_1 - \cos \alpha_1$ [12]; α_1 – угол захвата; χ – экспериментальный коэффициент [5], устанавливающий условия контакта валков и деформируемой полосы.

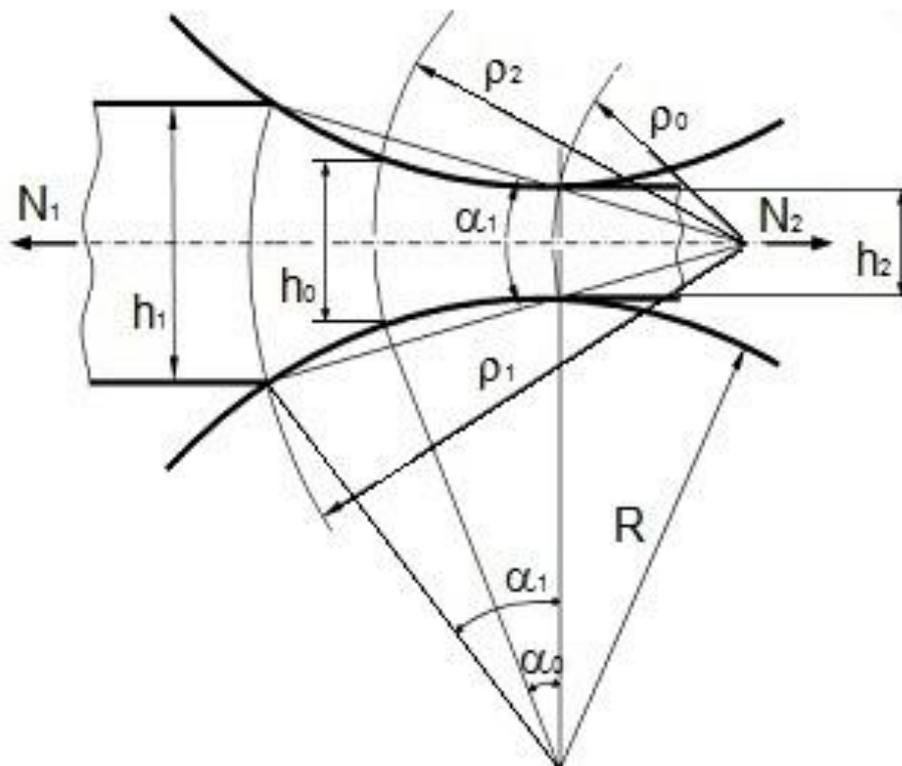


Рис.1. Геометрия процесса прокатки

В ходе решения [5-7] краевой задачи получено, что величина давления на валки зависит от термомеханических параметров деформируемого материала, скорости подачи заготовки в валки, условий на контакте полосы и валков и резко снижается при температурах из интервала сверхпластичности. Обоснована необходимость выделения в очаге деформации области сверхпластичности с оптимизацией ее объема и расположения с целью получения мелкозернистой структуры полуфабриката.

В рамках синергетических представлений [4] очаг деформации при прокатке рассматривается как сложный объект [8], в процессе формоизменения которого в зависимости от температурно-скоростных условий возникают области сверхпластичности и пограничные ей зоны высокотемпературной ползучести и термопластичности. Иными словами, в очаге деформации создается сложная структурная ситуация, при которой в некоторой части указанного очага формируется мелкозернистый структурный анклав, связанный с пограничными эффектами метастабильными состояниями. Сказанное привело к формулировке задачи разработки технологической стратегии процесса путем критериальности оптимизации с целью получения полуфабриката с мелкозернистой структурой и экономии энергоресурсов [9]. Поэтому на основании решения краевой задачи [5-7] сформулирована задача вариационного исчисления [10], в которой целевая функция

выбрана в виде объема области сверхпластичности в очаге деформации, который при оптимальном сочетании силовых, кинематических и температурных показателей достигает максимума.

Целевую функцию выбираем в виде объема области сверхпластичности в очаге деформации W^{sp} , который при оптимальном сочетании силовых, кинематических и температурных показателей достигает максимума:

$$W^{sp} = \iiint_W dW \rightarrow \max. \quad (3)$$

В результате решения оптимизационной задачи установлено ограничение на угол захвата в радиальном направлении области сверхпластичности.

Вторая часть оптимизационной задачи состоит в выборе оптимального расположения области сверхпластичности в очаге деформации. Учитывая, что в процессе прокатки ставится задача изготовления полосы с мелкозернистой структурой, область сверхпластичности располагаем так, чтобы обеспечить на выходе из валков скоростные условия из сверхпластического диапазона [4]. В частности, для параметра μ_{omn} получено выражение:

$$\mu_{omn} = \frac{\sqrt{3}}{8} \frac{(\alpha_1 \psi - \sin \alpha_1)^2 \left[\frac{2R}{h_1} (1 - \cos \alpha_1) \right]^2}{(1 + \psi^2 - 2\psi \cos \alpha_1)^{1/2} \sin^2(\alpha_1 / 2)} \cdot \frac{h_1}{\Psi} \left[1 + \left(-\frac{\beta}{3m_0} \right)^{1/2} \right], \quad (4)$$

где m_0 – постоянная материала; β – управляющий параметр, зависящий от температуры (в изотермических условиях – постоянная величина, причем при сверхпластичности $\beta < 0$) [4].

В ходе проведенного исследования установлено, что температурные условия вне сверхпластического диапазона приводят к значительному возрастанию давления на валки (примерно в 5–7 раз), сравнительно с режимами сверхпластичности. При оптимальных значениях параметра $\mu = \mu_{omn}$ и рациональном расположении зоны сверхпластичности давление на валки снижается еще примерно в 2 раза. Расчеты показали, что увеличение угла захвата α_1 приводит к резкому возрастанию давления на валки. Подобное объясняется снижением параметра μ при росте α_1 и, как следствие, повышением давления.

Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ в рамках научного проекта №15-08-06531 а.

ЛИТЕРАТУРА:

1. Langdon T.G. Forty-five Years of Superplastic Research: Recent Developments and Future Prospects // Materials Science Forum. 2016. Vol. 838-839. P. 3–12.
2. Рудаев Я.И., Китаева Д.А., Коджаспиров Г.Е. Сверхпластичность в процессах объемного формообразования // Сборник докладов XI Всероссийского съезда по фундаментальным проблемам теоретической и прикладной механики. Казань: Изд-во Казанского университета, 2015. С. 3252–3254.
3. Генкин А.Л. Моделирование и оптимизация горячей прокатки полос. М.: URSS: Ленанд, 2016. 168 с.
4. Kitaeva D., Kodzhaspirov G., Rudaev Y. On the dynamic superplasticity // Materials Science Forum. 2017. Vol. 879. P. 960-965.
5. Китаева Д.А., Коджаспиров Г.Е., Рудаев Я.И., Субботина Е.А. Решение задачи продольной прокатки алюминиевого листа в условиях сверхпластичности // Современные проблемы теории машин. 2015. № 3. С. 191–199.
6. Rudaev Ya., Kodzhaspirov G., Kitaeva D., Subbotina E. Modelling of longitudinal rolling procedure of aluminum sheet under superplasticity conditions // Proceeding of the 24th International Conference on Metallurgy and Materials METAL-2015. June 3-5, 2015. Brno, Czech Republic. Ostrava: TANGER, 2015.

P. 389–394.

7. Коджаспиров Г.Е., Китаева Д.А., Рудаев Я.И., Субботина Е.А. Задача продольной прокатки листа из алюминиевой заготовки в режимах сверхпластичности // *Materials Physics and Mechanics*. 2016. Т. 25. № 1. С. 49–55.

8. Рудской А.И., Коджаспиров Г.Е., Китаева Д.А., Рудаев Я.И., Субботина Е.А. К теории изотермической горячей прокатки полосы из алюминиевых сплавов // *Деформация и разрушение материалов*. 2017. №9. С. 16-23.

9. Китаева Д.А., Рудаев Я.И., Субботина Е.А. Сверхпластичность алюминиевых сплавов при продольной прокатке. Saarbrücken: LAP LAMBERT, 2017. 120 с.

10. Китаева Д.А., Куприев Р.Н., Субботина Е.А. К вопросу оптимизации процесса продольной прокатки листа из алюминиевой заготовки при высокотемпературной деформации // *Вестник Кыргызско-Российского Славянского университета*. 2017. Т. 17. № 1. С. 17-21.

УДК 539.3

Р.Л. Лапин¹, В.А. Кузькин¹, М.Л. Качанов²

¹ Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого,

² Нижегородский государственный технический университет им. Р.Е. Алексева

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ЭФФЕКТИВНЫХ УПРУГИХ ХАРАКТЕРИСТИК МАТЕРИАЛА С ТРЕЩИНАМИ

Разрывы в материале (трещины, поры) могут значительно влиять на эффективные упругие свойства. Задачи о влиянии трещин на упругие свойства материала рассматриваются во многих областях науки – механика твердого тела ([1], [2]), геофизика ([3]), в областях газа и нефти добычи ([4]) и во многих других.

Для описания влияния трещин на упругие свойства материала существует несколько известных методов. Простейшим из них является подход невзаимодействия, главное преимущество которого – простота. Однако, результаты, полученные данным методом могут значительно отличаться от методов, в которых учитывается взаимодействие трещин – например, дифференциальная схема [5], Мори-Танака схема [6].

При высоких плотностях трещин эффективные упругие свойства материала с трещинами могут в несколько раз отличаться от материала без трещин [7]. При таких плотностях влияние взаимодействия трещин на свойства материала могут быть значительными. В приближении невзаимодействия материал с трещинами обладает ортотропной симметрией при любом распределении трещин в материале [2]. В данной работе исследуется влияние взаимодействия трещин на ортотропные свойства материала с трещинами. Для данной цели в этой работе численно моделируются представительные объемы материала с трещинами с различно ориентированными массивами трещин (в том числе те, где отсутствует геометрическая симметрия) при высоких плотностях, вычисляются эффективные упругие свойства материала и исследуются ортотропные свойства материала

Для определения эффективных упругих характеристик материала и учета взаимного влияния трещин используется метод разрывных смещений (The Displacement Discontinuity Method) ([8]).

В данной работе задача рассматривается в плоско-деформированной постановке. Также предполагаются, что все трещины прямолинейны и имеют одинаковую длину.

Для исследования влияния взаимодействия трещин на ортотропные свойства рассматривается несколько распределений трещин в материале (рис. 1):

- 1) Семейство параллельных трещин.
- 2) Два семейства параллельных трещин, наклоненных к друг другу под определенным углом. Рассматривается несколько различных углов.

3) Три семейства параллельных трещин, наклоненных под различными углами.

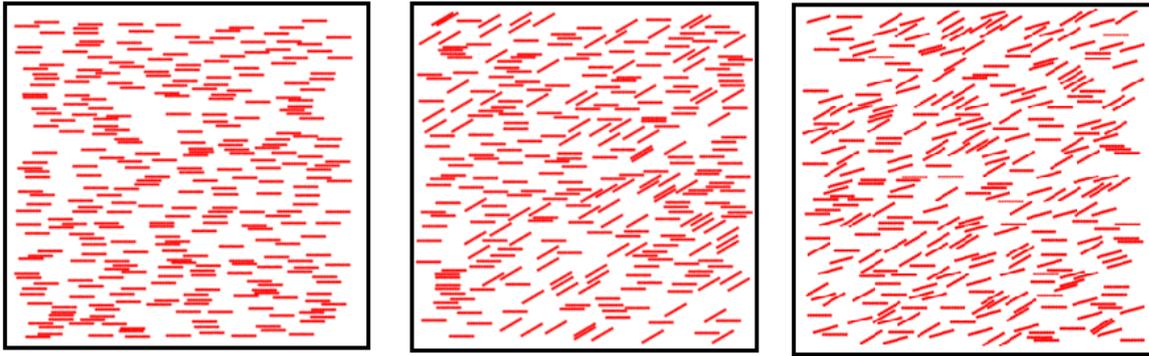


Рис.1. Примеры конфигураций, всех рассматриваемых постановок распределения трещин

В качестве параметра трещин используется плотность трещин:

$$\rho = \frac{Nl^2}{4A},$$

где N - количество трещин в материале, l - половина длины трещины, A - площадь рассматриваемого представительного материала.

Для всех рассматриваемых постановок плотность трещин рассматривается в интервале $0.01 \leq \rho \leq 0.8$. Центры трещин произвольно расположены в рассматриваемом материале. Для каждой постановки используется усреднение по реализациям.

Для верификации численного метода используется сравнение компонент эффективного тензора жесткости для семейства параллельных трещин с результатами, полученными другим численным методом [7] (рис. 2).

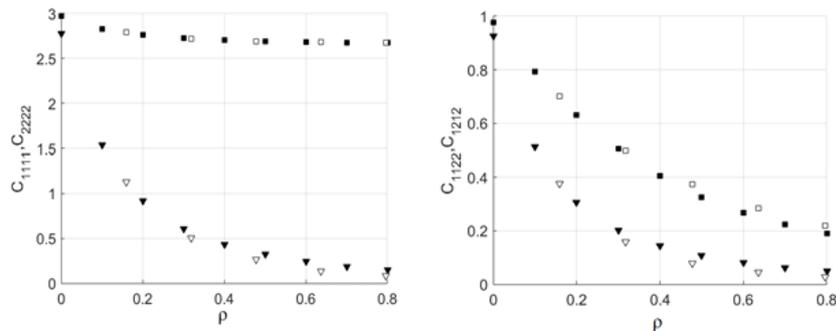


Рис. 2. Компоненты эффективного тензора жесткости для семейства параллельных трещин: сравнение наших вычислений (черные квадраты и треугольники) с результатами, полученными другим методом [9] (белые квадраты и треугольники)

Для исследования влияния взаимодействия трещины на ортотропные свойства используется отклонение от ортотропной симметрии [9].

$$\delta = \frac{\sqrt{S_{1112} + S_{2212} + S_{1211} + S_{1222}}}{\|S\|}$$

где S - эффективный тензор податливости, S_{ijkl} - неортотропные компоненты тензора податливости.

В ходе исследований получено, что для всех постановок отклонение от ортотропии не превышает 5% (рис. 3.).

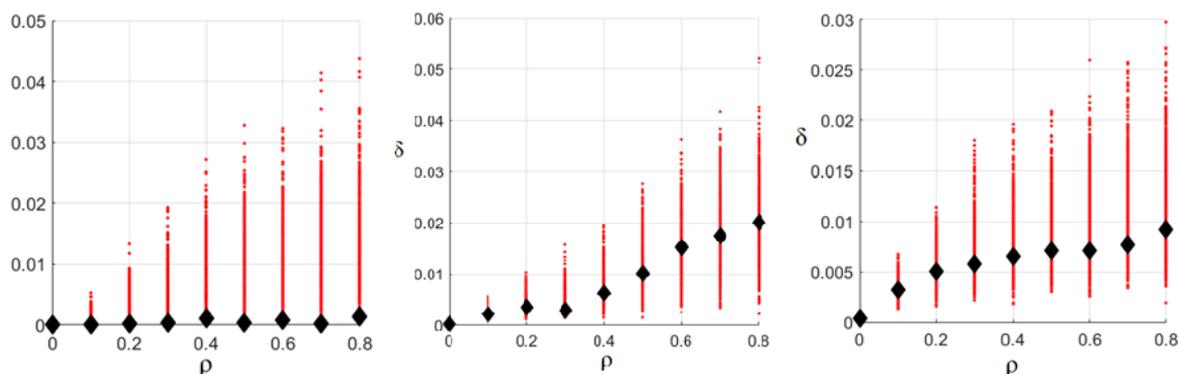


Рис. 3. Отклонение от ортотропии для различных постановок (семейство параллельных трещин, два семейства параллельных трещин, три семейства параллельных трещин). Линии показывают разброс отклонения для всех реализаций, ромбы - отклонение от ортотропии для среднего эффективного тензора податливости

Результаты для отклонения от ортотропии для всех рассмотренных постановок (в том числе и не обладающих геометрической симметрией) позволяют сделать вывод о том, что взаимодействие трещин незначительно влияет на ортотропные свойства материала. Таким образом, при исследовании этих свойств достаточно ограничиваться приближением невзаимодействия, что значительно упрощает расчеты.

ЛИТЕРАТУРА:

1. Bernam Budiansky, Richard J. O'Connell, «Elastic moduli of a cracked solid,» International journal of Solids and structures, № 12, pp. 81-97, 1976.
2. M. Kachanov, «Elastic solids with many cracks and related problems» ADVANCES IN APPLIED MECHANIC, vol.30, pp. 260-438, 1993.
3. Vladimir Grechka, Mark Kachanov, «Effective elasticity of rocks with closely spaced and intersecting cracks,» GEOPHYSICS, т. 71, № 3, pp. D85-D91, 2006.
4. И. Баяк, «Основные принципы математического моделирования макроскопических физических свойств коллекторов углеводородов,» Seismic Technology, № 10, pp. 5-18, 2011.
5. Z. Hashin, «The differential scheme and its application to cracked materials,» J. Mech. Phys. Solids, № 36, pp. 719-734, 1988.
6. Y. Benveniste, «A new approach to the application of Mori-Tanaka's theory in composite materials,» Mechanics of Materials, № 6, pp. 147-157, 1987.
7. VI Kushch, I Sevostianov, L Mishnaevsky, «Effect of crack orientation statistics on effective stiffness of microcracked solid,» International Journal of Solids and Structures, т. vol.46, pp. 1574-1588, 2009.
8. Crouch S.L., Starfield A.M, «Boundary Element Methods in Solid Mechanics: with Applications in Rock Mechanics and Geological Engineering,» George Allen and Union, p. 322, 1983.
9. Igor Sevostianov, Mark Kachanov, «On approximate symmetries of the elastic properties and elliptic orthotropy,» International Journal of Engineering Science, № 46, pp. 211-223, 2008.

УДК 531

А. А. Логинов

Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого

СРАВНЕНИЕ РАЗЛИЧНЫХ КОНФИГУРАЦИЙ СИСТЕМЫ ПОЗИЦИОНИРОВАНИЯ TAUT WIRE

Taut Wire (от англ. «Натянутый трос») – система определения относительного местоположения судна. Несмотря на широкое применение DGNS, гидроакустических, лазерных и радарных систем определения местоположения и осуществления позиционирования судов на глубокой воде, taut wire остается востребованным компонентом

DP систем ввиду простой (сравнительно с более современными системами) конструкции и относительной дешевизне. Конструкционно представляет собой кран-балку, установленную на судне, через которую перекинут трос, закрепленный на дне. Измеряя угол отклонения троса у конца кран-балки от вертикали, система определяет смещение судна от заданной позиции (рис. 1).

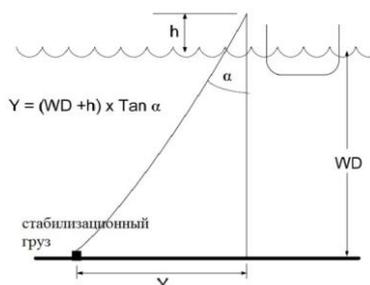


Рис. 1. Измерение отклонения судна от позиции

Точность системы растет с уменьшением глубины и, соответственно, длины троса. Это связано с провисанием троса под действием силы тяжести, чем больше прогиб троса, тем менее точно система определяет позицию. Одной из важных составляющих адекватной работы системы является поддержание постоянного натяжения троса в условиях качки судна. Для этого применяется ряд решений: компенсация качки при помощи контргруза, поддержание постоянной силы при помощи пневмоцилиндра или установка электродвигателей с возможностью автоматически подтягивать или стравливать трос в зависимости от силы тока в обмотках двигателя. Каждый из способов имеет ряд преимуществ и недостатков [1]. В данной работе сравниваются 2 модельные конфигурации:

1) Модель компенсации качки при помощи контргруза. На дальний от точки закрепления троса конец кран-балки устанавливается массивный груз. Кран-балка моделируется в виде жесткого стержня, длины плеч соотносятся как $\frac{L2}{L1} = 6$. Масса моделируется как точечная, $M = 1800\text{кг}$, Массы частей стержня соотносятся так же, как и длины. Численные значения: $m1 = 30\text{кг}$; $m2 = 180\text{кг}$. Качка судна имитируется движением шарнира вдоль оси OY по заданному закону (рис. 2).

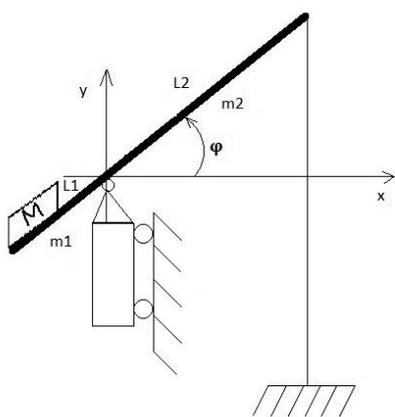


Рис. 2. Модель компенсации качки с контргрузом

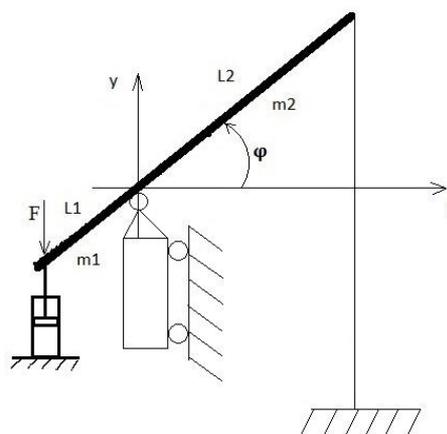


Рис. 3. Модель компенсации качки с пневмоцилиндром

2) Модель с постоянной силой, обеспечиваемой пневмоцилиндром. Все параметры предыдущей задачи сохранены, но вместо точечной массы на конце левого плеча находится цилиндр, обеспечивающий постоянную силу $F = 18000\text{Н}$. Инертностью частей цилиндра в данной задаче пренебрегаем (рис. 3).

Задача - рассчитать усилия в тросе на конце стержня с целью проверки среднего отклонения при качке судна. Движение шарнира моделируется как синусоида с заданной амплитудой $A = 0,5$ метра и периодом $T = 12$ секунд, что соответствует реальной качке судна на волнах. Трос моделируется как нить с высокой жесткостью. Для описания движения системы была введена неподвижная декартова система координат, обобщенная координата – угол поворота стержня φ . Расписав законы движения каждой из частей системы, получили уравнение движения через уравнение Лагранжа 2 рода. Также для решения дополнительно было введено демпфирование для погашения собственных частот. Сила, возникающая в тросе при растяжении: $F = C * Y_{fin} + B * Y_{fin}'$, [2] где C – жесткость троса. B – коэффициент демпфирования, Y_{fin} - закон движения точки прикрепления троса. Второе слагаемое в данном выражении входит в правую часть уравнения Лагранжа в виде момента обобщенной силы и отвечает за демпфирование системы. Таким образом, уравнение Лагранжа имеет вид $\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right) - \frac{\partial L}{\partial q} = -L2 * B * Y_{fin}'$, [3] где L – Лагранжиан (разность потенциальной и кинетической энергий), q – обобщенная координата. Дифференцирование и линеаризация проводились в Wolfram Mathematica, дальнейшее интегрирование полученного дифференциального уравнения 2 порядка проводилось в Matlab с использованием встроенной функции ODE45. Нелинеаризованное уравнение имеет бесконечно близкое решение к решению линеаризованного в силу малости перемещений точки прикрепления троса к стержню. Изначально движение системы под действием волны описывалось также с учетом смещения по горизонтальной оси OX , что влияло на результат незначительно, поэтому при решении считаем, что судно смещается под действием волны исключительно вертикально, без раскачки.

В результате моделирования получили две зависимости, отображенные на графиках: зависимость величины силы натяжения в точке крепления троса от времени, Ньютонов (рис. 4) и зависимость угла поворота конца стержня от времени, градусов (рис. 5).

Поворот конца стержня находится в пределах $[-5; 5]$ градусов и совпадает для обеих задач. Среднее значение силы для первой задачи составляет $2082,5\text{Н}$, пределы отклонения $[2038\text{Н}; 2127\text{Н}]$. Полученное решение позволяет полагать, что при заданном режиме качки судна, натяжение в тросе остается близким к необходимым 2000Н , отклонение от среднего в размере 3% существенно на точность определения местоположения не влияет.

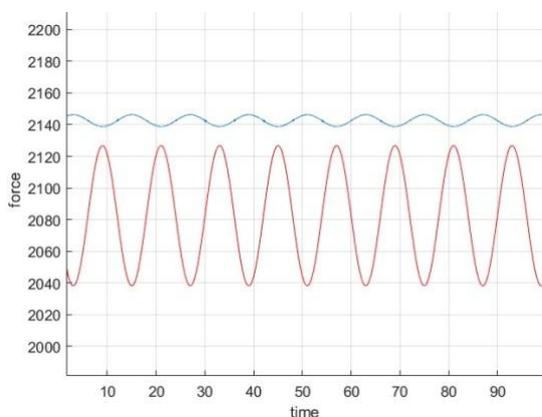


Рис. 4. Зависимость величины силы натяжения в точке крепления троса от времени

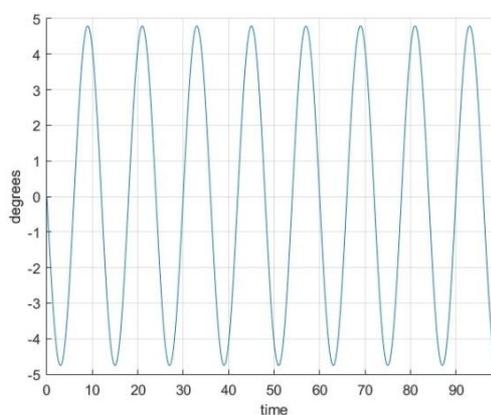


Рис. 5. Зависимость угла поворота конца стержня от времени

Для второй задачи среднее значение – 2142,5Н, пределы - [2139Н; 2146Н]. При наличии постоянной силы на левом конце отклонение от среднего значения составляет менее 1%, что позволяет сделать вывод о том, что при отсутствии инертного компонента (точечной массы из задачи 1) и без того высокая точность позиционирования повышается еще больше.

ЛИТЕРАТУРА:

1. Doug Phillips and Brian Haycock. Taut Wire. DP conference, October 14-15, 2014.
2. П.А. Жилин. Теоретическая механика. СПб. : Изд-во СПбГТУ, 2001.
3. Я. Г. Пановко. Введение в теорию механических колебаний. Москва, 1980г.

УДК 531

С.Д. Ляжков

Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого

БИОНИЧЕСКОЕ ПРОТЕЗИРОВАНИЕ НИЖНИХ КОНЕЧНОСТЕЙ ЧЕЛОВЕКА

Решение проблем современных медицинских технологий и информационного обеспечения для задач здравоохранения состоит в техническом и программном обеспечении методов воздействия и оценке влияния на человека лечебного воздействия. Последнее десятилетие характеризуется стремительным развитием биомеханики [1;с.3-4]. Биомеханика – раздел механики, изучающий на основе математических моделей механические свойства биологических структур. Протез-это аппарат или приспособление, служащее для восполнения и замещения отсутствующей или недееспособной части какого-либо органа. Введение в медицинскую практику новых методов протезирования связано с необходимостью значительного углубления информации о данном объекте. Без нее при выполнении протезирования возникают определенные трудности и невозможность планировать успех и предсказать исход технически правильно выполненных манипуляций. Важнейший этап моделирования объектов протезирования – построение содержательной математической модели – неотъемлемой части во всех принципиальных направлениях медицинской практики.

С развитием медицины и современных технологий человека становится проще реабилитировать к полноценной жизни, а для людей с ограниченными возможностями протезирование играет в этом решающую роль. Для того чтобы разработать протез, оптимальный для нужд конкретного человека, необходима его математическая модель. В связи с вышеизложенным, актуальность работы не вызывает сомнений.

Метод исследования – аналитический.

Цель исследования – разработать математическую модель оптимального пружинного протеза ноги для бега и ходьбы.

Задачи исследования:

1. Составить и решить уравнение движения нижней конечности как материальной точки в протезе.

2. Оптимизируя решение данного уравнения, подобрать такую жесткость пружины в протезе, чтобы не было ее «раскачивания». Для этого колебания материальной точки под действием пружины должны быть сведены к минимуму.

Некоторые обозначения в данной работе:

M –масса человека

m –масса пружины в протезе

γ –отношение масс человека и пружины соответственно

μ – коэффициент трения в пружине
 β – коэффициент затухания
 A – амплитуда колебаний
 c – искомая жесткость пружины в протезе
 $g = 9,8$ – ускорение свободного падения на планете Земля.
 T – период импульсов периодической вынуждающей силы
 ω – частота периодической вынуждающей силы
 φ_i – фазы колебаний
 Система единиц физических величин - СИ.

Рассмотрим колебания материальной точки под действием линейной силы упругости пружины с трением. Сила тяжести, действующая на человека во время бега равна $2Mg$ [2; с.324-325] и также является периодической вынуждающей силой, под действием которой происходят колебания пружины в протезе. Разложив эту силу в ряд Фурье, а также учтя трение в пружине, запишем второй закон Ньютона для ее движения:

$$m\ddot{x} + \mu\dot{x} + cx = \frac{8Mg}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin \frac{n\pi}{2} \cos \left(\frac{n\pi}{2} - n\omega t \right)}{n}$$

или после упрощений и новых обозначений:

$$\ddot{x} + 2\beta\dot{x} + k^2x = \frac{8\gamma g}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sin(2n+1)\omega t}{2n+1},$$

Ограничившись двумя гармониками правой части ряда, получаем:

$$\ddot{x} + 2\beta\dot{x} + k^2x = \frac{8\gamma g}{\pi} \left(\sin \omega t + \frac{1}{3} \sin 3\omega t \right) \quad (1)$$

Решение уравнения (1):

$$x = e^{-\beta t} \left(C_1 \cos \sqrt{k^2 - \beta^2} t + C_2 \sin \sqrt{k^2 - \beta^2} t \right) + \frac{8\gamma g}{\pi \sqrt{(k^2 - \omega^2)^2 + 4\beta^2 \omega^2}} \sin(\omega t + \varphi_1) + \frac{8\gamma g}{3\pi \sqrt{(k^2 - 9\omega^2)^2 + 36\beta^2 \omega^2}} \sin(\omega t + \varphi_2) \quad [3; \text{с.100-110}],$$

$$\text{где } \operatorname{tg} \varphi_1 = \frac{2\beta\omega}{k^2 - \omega^2}, \quad \operatorname{tg} \varphi_2 = \frac{6\beta\omega}{k^2 - 9\omega^2}.$$

Амплитуды устоявшихся колебаний соответственно равны:

$$A_1 = \frac{8\gamma g}{\pi \sqrt{(k^2 - \omega^2)^2 + 4\beta^2 \omega^2}}, \quad A_2 = \frac{8\gamma g}{3\pi \sqrt{(k^2 - 9\omega^2)^2 + 36\beta^2 \omega^2}}$$

$$\text{Рассмотрим } A = \frac{8\gamma g}{\pi \sqrt{(k^2 - \omega^2)^2 + 4\beta^2 \omega^2}} = \frac{8\gamma g}{\pi \sqrt{\left(k^2 - \frac{4\pi^2}{T^2}\right)^2 + \frac{16\beta^2 \pi^2}{T^2}}},$$

$$\text{отсюда } c = \frac{4\pi^2 m}{T^2} + 4m \sqrt{\frac{4\gamma^2 g^2}{\pi^2 A^2} - \frac{\beta^2 \pi^2}{T^2}}$$

Так, для человека массой $M=80$ пружины массой 2,5 при периоде импульсов вынуждающей силы при беге человека, равном $\frac{1}{3}$, подошел бы протез с пружиной жесткости $\approx 9,85 * 10^4$ (при $\beta \approx 230$).

Заключение. В представленной работе разработана математическая модель оптимального пружинного протеза ноги для бега и ходьбы. Составлено и решено уравнение движения нижней конечности как материальной точки в протезе, а также подобрана такая жесткость пружины в протезе, чтобы не было ее «раскачивания». Разработанная математическая модель данного протеза является базой для создания моделей более сложных и реалистичных протезов. Я надеюсь, что информация, представленная в данном проекте, будет полезна тому, кто начнет знакомство с таким чудом медицинской техники.

ЛИТЕРАТУРА:

1. П.И. Бегун «Биомеханическое моделирование объектов протезирования» (Издательство «Политехника», Санкт-Петербург, 2011, 464с.)
2. В.И. Дубровский, В.Н.Федорова «Биомеханика» (Москва, «ВЛАДОС ПРЕСС», 2003, 672с.)
3. Я.Г. Пановко «Введение в теорию механических колебаний» (Ленинград, 1989, 252с.)

УДК 539.3

Н.С. Марков

Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого

ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ МЕХАНИКИ СПЛОШНОЙ СРЕДЫ ДЛЯ СЛОИСТЫХ СРЕД С НЕОДНОРОДНОСТЯМИ

Решение задач для слоистых структур, содержащих неоднородности, имеет важное значение для механики материалов, теории упругости, механики материалов, теории поля и механики грунтов. Например, учет слоистости горной породы имеет особое значение при моделировании гидроразрыва пласта, активно используемого в современной промышленности для добычи нефти и газа.

Существует два основных подхода к решению задач для слоистых структур, подробное сравнение которых представлено в работе [1]. Особый интерес представляет исследование слоистой среды, содержащей неоднородности. Решение такой задачи можно получить с использованием метода граничных элементов (МГЭ), или метода конечных элементов (МКЭ). Использование МКЭ приводит к ряду сложностей, таких как высокий порядок конечной алгебраической системы, учет точек сингулярности и разрывов. Применение МКЭ приводит также к трудностям при рассмотрении очень тонких слоев, так как необходимое сгущение сетки приводит к заметному увеличению порядка конечной алгебраической системы

Наиболее оптимальным методом решения линейных задач для слоистых структур с неоднородностями является метод граничных элементов, включающий в себя нахождение функции Грина для слоистой структуры без неоднородностей. Такой подход позволяет свести решение исходной задачи к решению интегральных уравнений с сингулярными и гиперсингулярными ядрами, заданных только на границах неоднородностей. В результате, порядок конечной алгебраической системы равен суммарному числу узлов на границах неоднородностей. Для решения конечной алгебраической системы используются геометрическая особенность слоистой структуры: слои представляют собой систему типа цепочки.

Алгоритм решения задач для слоистых сред с неоднородностями подробно описан в работе [2]. Для трехмерной упругой среды представлены все необходимые соотношения, позволяющие решить исходную задачу с использованием метода прогонки и метода граничных элементов. Несмотря на детальный анализ представленного алгоритма решения, работа [2] не содержит информацию об особенностях его численной реализации.

Цель данной работы состоит в эффективной численной реализации алгоритма решения задач для слоистых структур с неоднородностями, описанного в работе [2], и исследовании его ключевых особенностей. Эффективность численного алгоритма достигается благодаря двум важнейшим факторам:

- Геометрическая особенность слоистой структуры позволяет применять эффективный метод прогонки для нахождения решения. Использование метода прогонки приводит к существенному уменьшению количества операций, необходимых для получения решения ($O(n)$ вместо $O(n^3)$ для метода Гаусса.)

- Рассматриваемые уравнения линейные, а границы слоев плоские и параллельные. Эти два условия позволяют применять преобразование Фурье. В численной реализации использование быстрого преобразования Фурье приводит к уменьшению количества операций и времени расчета (вместо $O(n^2)$ проводится только $O(n \ln(n))$ операций).

Большой практический интерес также представляют:

- Точность численного нахождения функции Грина слоистой среды
- Особенности использования дискретного преобразования Фурье
- Исследование логарифмической особенности функции Грина

Для достижения поставленной цели рассматривается двумерная слоистая структура, равновесное состояние которой описывается оператором Лапласа. Выбор оператора Лапласа обусловлен тем, что фундаментальное решение уравнения Лапласа для бесконечной однородной изотропной среды имеет логарифмическую особенность, исследование которой является одной из целей данной работы. В результате показано, что наличие логарифма в фундаментальном решении для бесконечной однородной изотропной среды добавляет к функции Грина слоистой среды константу, значение которой может быть получено численно.

На примере решения краевой задачи для круговой полости показано, что применение метода прогонки и быстрого преобразования Фурье позволяет значительно увеличить эффективность нахождения функции Грина для слоистой среды. Для решения краевых задач используется теория комплексных граничных интегральных уравнений, детально разработанная в работе [3]. Использование дискретного преобразования Фурье приводит к тому, что функция Грина для слоистой среды ищется с точностью до константы, значение которой может быть найдено аналитически. Это происходит из-за того, что частота s преобразования Фурье в некоторых формулах представлена в виде множителя $\frac{1}{s}$. Для того, чтобы исключить возможность деления на 0, вместо нулевой частоты используется целое число, что и приводит к появлению известной константы.

Для определения точности нахождения функции Грина для слоистой среды представлены три тестовые задачи, для которых известно аналитическое решение:

Задача 1. Пусть имеются два однородных слоя с бесконечной толщиной, между которыми находится пачка, состоящая из n однородных слоев. Все слои обладают одинаковой проводимостью и идеальными контактами на границах. Такую структуру можно рассматривать как бесконечную однородную изотропную среду. Решение такой задачи необходимо для контроля того, что численный алгоритм нахождения функции Грина для заданного линейного дифференциального оператора работает корректно. Одним из критериев корректной работы является то, что точность нахождения функции Грина не зависит от числа слоев в рассматриваемой структуре.

Задача 2. Рассматривается система из n слоев, находящаяся между двумя слоями с бесконечной толщиной. Проводимость (упругие свойства, если рассматривается задача теории упругости) нижней пачки слоев $i \leq k$ одинакова. Для слоев из верхней пачки $i > k$ проводимость устремляется к нулю. Такую структуру можно рассматривать как полупространство с непроницаемой границей. Решение такой задачи ищется методом изображений и служит нижней оценкой точности нахождения функции Грина.

Задача 3. Рассматривается система из n слоев, находящаяся между двумя слоями с бесконечной толщиной. Проводимость нижней пачки слоев $i \leq k$ одинакова. Для слоев из верхней пачки $i > k$ проводимость устремляется к бесконечности. Такую структуру можно рассматривать как полупространство с сильно проводящей границей. Решение такой задачи служит верхней оценкой точности нахождения функции Грина.

Основной результат работы состоит в численной реализации эффективной расчетной схемы решения краевых задач для слоистых сред и исследованию ее ключевых особенностей. Эффективность численной схемы продемонстрирована на примере решения краевых задач.

ЛИТЕРАТУРА:

1. A.M. Linkov, N.A. Filippov, *Difference Equations Approach to the Analysis of Layered Systems*, 1991
2. A.M. Linkov, A.A. Linkova, A.A. Savitski, *An Effective Method for Multi-Layered Media with Cracks and Cavities*, *International Journal of Damage Mechanics*, 3 (1994).
3. A.A. Dobroskok, A.M. Linkov, *Complex variable equations and the numerical solution of harmonic problems for piecewise-homogeneous media*, *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*, 73 (2009) 313-325

УДК 539.3

Н.Д. Мушак¹, Е.А. Подольская^{1,2}, А.Ю. Панченко^{1,2}

¹ Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого,
² Институт проблем машиноведения РАН

ПОСТРОЕНИЕ ПАРНОГО СИЛОВОГО ПОТЕНЦИАЛА ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ ДЛЯ МОДЕЛИРОВАНИЯ СТРУКТУРНОГО ПЕРЕХОДА ГЦК-ОЦК

В настоящее время приобретают актуальность задачи, связанные с расчетами прочностных характеристик объектов, которые могут, в силу некоторых допущений, обладать бездефектной кристаллической структурой. Прочностные характеристики объектов тесно связаны с устойчивостью структуры материала. Внутренняя структура тел при потере устойчивости может претерпевать изменения. Процесс изменения внутренней упорядоченности может являться структурным переходом и зачастую связан с потерей устойчивости, поэтому изучение процессов потери устойчивости и структурных переходов очень важно в современной механике в силу необходимости оптимизации конструкций, так как многие инженерные задачи связаны с прочностными расчетами.

Использование простейших силовых потенциалов (например, Леннард-Джонса, Морзе или Ми) позволяют моделировать пластичность, образование трещин, разрушение, температурное изменение свойств материала и структурные переходы [1]. Такая универсальность ведет к обширному использованию парных силовых потенциалов, но существуют недостатки, которые не позволяют их применять при описании неплотноупакованных структур и в частности структурного перехода ГЦК-ОЦК.

Целью данной работы является описание структурного перехода ГЦК-ОЦК, для этого построен парный силовой потенциал особого вида. Такое задание потенциала обеспечивает устойчивое ненапряженное состояние для обеих структур, более точный подбор параметров, позволяющий моделировать широкий спектр материалов.

Подобно алгоритму, представленному в работе [2], построение потенциала будем производить в несколько этапов. Сначала строятся две силы взаимодействия на базе потенциала Морзе, обеспечивающие выполнение условий ненапряженности для ГЦК и ОЦК структур. Таким образом, сразу определяются координаты двух локальных минимумов потенциальной энергии a_1 и a_2 . Эти параметры соответствуют расстояниям до первых координационных сфер ГЦК и ОЦК.

Последующие построения подразумевают сшивание двух кривых посредством кубического сплайна [2] для обеспечения непрерывной дифференцируемости силы взаимодействия. Чтобы определить величину экстремумов для закона взаимодействия, необходимо руководствоваться физическим смыслом параметров для потенциала Морзе, в

котором D – энергия связи, определяемая из условий сшивания кривых. Потенциал взаимодействия быстро убывает с расстоянием, поэтому можно пренебречь влиянием на атомы, находящиеся дальше второй координационной сферы. На последнем этапе построения применяется укорачивание взаимодействия [3] до второй сферы ГЦК решетки. Полученная силовая функция взаимодействия атомов (1), подходит как для ГЦК, так и для ОЦК решеток.

$$F(r) = \begin{cases} -\frac{2\alpha_1 D_1}{a_1} \left(e^{-\frac{\alpha_1(r-a_1)}{a_1}} - e^{-2\frac{\alpha_1(r-a_1)}{a_1}} \right), & r \leq b_1 \\ A_1 r^3 + A_2 r^2 + A_3 r + A_4, & b_1 < r \leq a_2 \\ -\frac{2\alpha_2 D_2}{a_2} \left(e^{-\frac{\alpha_2(r-a_2)}{a_2}} - e^{-2\frac{\alpha_2(r-a_2)}{a_2}} \right), & a_2 < r \leq b_2 \\ -\frac{2\alpha_2 D_2}{a_2} \left(e^{-\frac{\alpha_2(r-a_2)}{a_2}} - e^{-2\frac{\alpha_2(r-a_2)}{a_2}} \right) \left(1 - \left(\frac{r^2 - b_2^2}{a_{cut}^2 - b_2^2} \right)^2 \right)^2, & b_2 < r \leq a_{cut} \\ 0, & r \geq a_{cut} \end{cases} \quad (1)$$

В (1) определим параметры $b_{1,2} = a_{1,2} + \frac{\ln 2}{\alpha_{1,2}}$, которые имеют смысл критической длины связи, параметр a_{cut} определяет радиус обрезания, т.е. расстояние, на котором взаимодействием частиц можно пренебречь; для данного случая этот параметр брался чуть меньше $\sqrt{2}$.

Для закона взаимодействия (1) были получены следующие безразмерные параметры: $\alpha_1 = 21.1$, $D_1 = 1$, $a_1 = 1$, $b_1 = 1.03$, $A_1 = 32947.2$, $A_2 = 106809.8$, $A_3 = 115194.1$, $A_4 = 41327.2$, $\alpha_2 = 26.6$, $D_2 = 0.2$, $a_2 = \frac{2}{\sqrt{3}}$, $b_2 = 1.18$, $a_{cut} = 1.41$.

Подобно работе [4] запишем волновое уравнение для первой вариации поля перемещений $\mathbf{v} = \delta \mathbf{u}$:

$$\ddot{\mathbf{v}} = {}^4\mathbf{Q} \cdot \nabla \nabla \mathbf{v}, \quad (2)$$

где ${}^4\mathbf{Q}$ – тензор 4-ого ранга, содержащий первую и вторую производную от потенциала взаимодействия, и который описывает характеристики материала на микроскопическом уровне, а также зависит только от деформационного градиента. Решение уравнения имеет вид

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_0 e^{i\omega t} e^{i\mathbf{K} \cdot \mathbf{r}} \quad (3)$$

где \mathbf{K} – волновой вектор, а ω – частота. Акустический тензор \mathbf{D} определяется формулой

$$\mathbf{D} = {}^4\mathbf{Q} \cdot \mathbf{K} \mathbf{K} \quad (4)$$

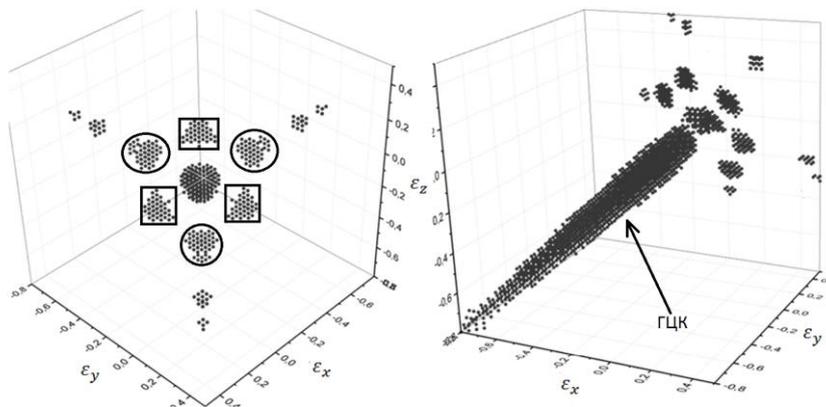


Рис. 1. Зоны устойчивости в пространстве деформаций $\epsilon_x, \epsilon_y, \epsilon_z$

Система (4) имеет нетривиальное решение, если ее определитель не равен нулю. Критерием устойчивости [4, 5] является положительная определенность акустического тензора \mathbf{D} для любого ненулевого волнового вектора \mathbf{K} : $\mathbf{D}(\mathbf{K}) > 0, \forall \mathbf{K} \neq 0$.

В данной работе получены зоны устойчивости в пространстве $\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z$, сонаправленные с осями кубической симметрии ГЦК решетке, полученные посредством проверки устойчивости континуума.

В процессе исследований областей устойчивости были получены кристаллические решетки, которым соответствует та или иная область устойчивости (рис. 1). Получены три вида кристаллических решеток: ГЦК, ромбическая гранецентрированная (на рис.1 выделены прямоугольниками), а также ОЦК (на рис.1 выделены овалами).

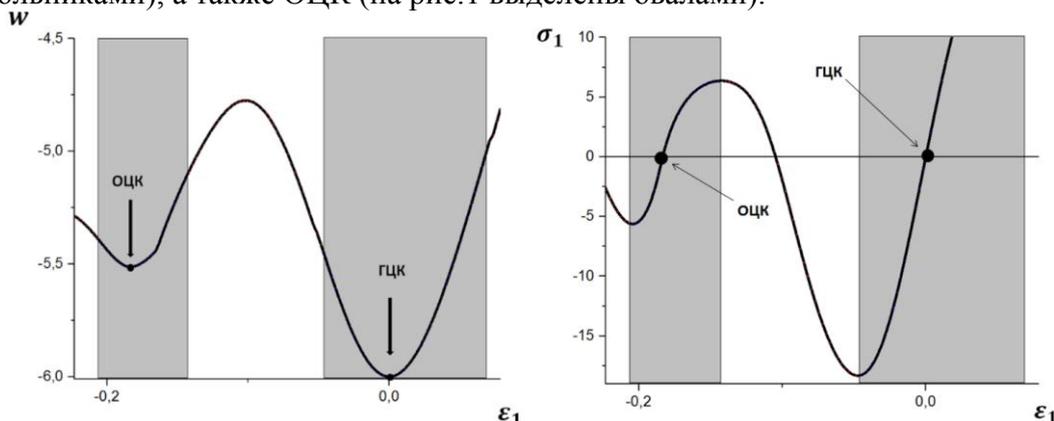


Рис. 2. Профили потенциальной энергии деформации (слева) и напряжений (справа) на кривой одноосного нагружения $\sigma_{2,3} = 0$

Сравнивая кривые для одноосного нагружения (рис.2 справа) и профиля потенциальной энергии деформации (рис.2 слева) с результатами, полученными в работе [4], видим, что кусочно-заданный потенциал позволяет получить ярковыраженный локальный минимум для ОЦК.

В данной работе построен парный силовой потенциал для математического моделирования структурного перехода ГЦК–ОЦК. Данный закон взаимодействия можно применять для описания структурных переходов, где фигурируют неплотнупакованные структуры, при этом надо учитывать геометрию решеток. Преимуществами данного потенциала являются универсальность, возможность описания широкого спектра материалов, в силу достаточного количества параметров, а также вычислительная простота.

Далее будет проведена апробация полученного потенциала с помощью метода молекулярной динамики и исследования двухфазных состояний вдоль линии одноосного сжатия ГЦК-ОЦК.

ЛИТЕРАТУРА:

1. Кривцов А. М., Кривцова Н. В. Метод частиц и его использование в механике деформируемого твердого тела // Дальневосточный математический журнал. – 2002. – V. 3. – №. 2. – P. 254-276.
2. Воропаев С.А., Днестровский А.Ю., Подольская Е.А., Душенко Н.В. N-алмаз: механика связей // Межвузовский сборник трудов. – 2014. – V.6. – №. 6. –P.74-81.
3. Krivtsov A.M., Pavlovskaja E. E., Wiercigroch M. Impact fracture of rock materials due to percussive drilling action // CD-ROM Proceedings of 21st International Congress of Theoretical and Applied Mechanics. – 2004. – Warsaw, Poland. – P. 275.
4. Podolskaya E. A. et al. Loss of ellipticity and structural transformations in planar simple crystal lattices // Acta Mechanica. – 2016. – V. 227. – №. 1. – P. 185.5.
5. Подольская Е.А. Равновесие и устойчивость кристаллических твердых тел при малых и конечных деформациях: дис. ... канд. физ.-мат. наук. Санкт-Петербургский Политехнический университет Петра Великого, Санкт-Петербург, 2013.

РАСЧЕТ ВИБРАЦИЙ БУМАГОДЕЛАТЕЛЬНОЙ МАШИНЫ НА ФУНДАМЕНТЕ

Рассматривается методика анализа фундамента крупногабаритных промышленных машин под действием динамических нагрузок. В качестве примера рассматривается бумагоделательная машина на фундаменте.

В процессе непрерывной работы вращающиеся элементы машины могут вызывать механические вибрации. Фундамент машины под действием динамических нагрузок должен удовлетворять требованиям расчета колебаний, а именно перемещения фундамента не должны превышать критические значения. [1] В случае, если требование не выполняется, нарушается технологический процесс и происходит обрыв бумаги. Частый обрыв бумаги сопровождается большими денежными потерями, поэтому производители бумаги стараются избежать обрывов, проектируя качественный фундамент.

Целью работы является анализ спроектированного фундамента под действием динамических нагрузок. Методом исследования является моделирование процесса колебаний бумагоделательной машины на фундаменте под действием динамических нагрузок в конечно-элементном пакете Ansys. В процессе работы решены следующие задачи: построена конечно-элементная модель машины на фундаменте, найдены собственные частоты и формы колебаний в рабочем диапазоне машины, выполнен гармонический анализ, в результате которого найдены перемещения фундамента, произведено сравнение перемещений с критическими значениями.

Объект исследования представляет собой бумагоделательную машину на фундаменте. Конечно-элементная модель состоит из шести частей: формирующая секция, пресс, предварительная сушка, клеильный пресс, окончательная сушка и накат. Каждая секция представляет собой совокупность валов, между которыми проходит бумага и балочных конструкций, на которых закреплены валы. Типом конечного элемента балочных стальных конструкций является BEAM188. [2] Валы смоделированы как полые, абсолютно твердые цилиндры; тип конечных элементов MASS21. Валы закреплены на балочных конструкциях таким образом, что на приводной стороне зафиксированы все степени свободы, а на лицевой стороне зафиксированы все степени свободы кроме перемещений вдоль направления движения бумаги. На рис. 1 и 2 изображены конечно-элементные модели двух секций машины: формирующей секции и пресса.

Конечно-элементная модель фундамента представляет собой два ряда колонн, расположенных на приводной и рабочей стороне, и лежащие поверх колонн балки. Материал фундамента – железобетон. Бумагоделательная машина закрепляется на фундаменте таким образом, что все степени свободы в зафиксированы. Нижние точки фундамента также закреплены по всем степеням свободы.

Исследование проведено в три этапа. На первом этапе найдены собственные частоты и формы машины. Всего найдено двести пятьдесят четыре собственные частоты в рабочем диапазоне. Форма с наименьшей собственной частотой соответствует собственной форме поперечных колебаний пресса с частотой 3.1 Гц (рис. 3).

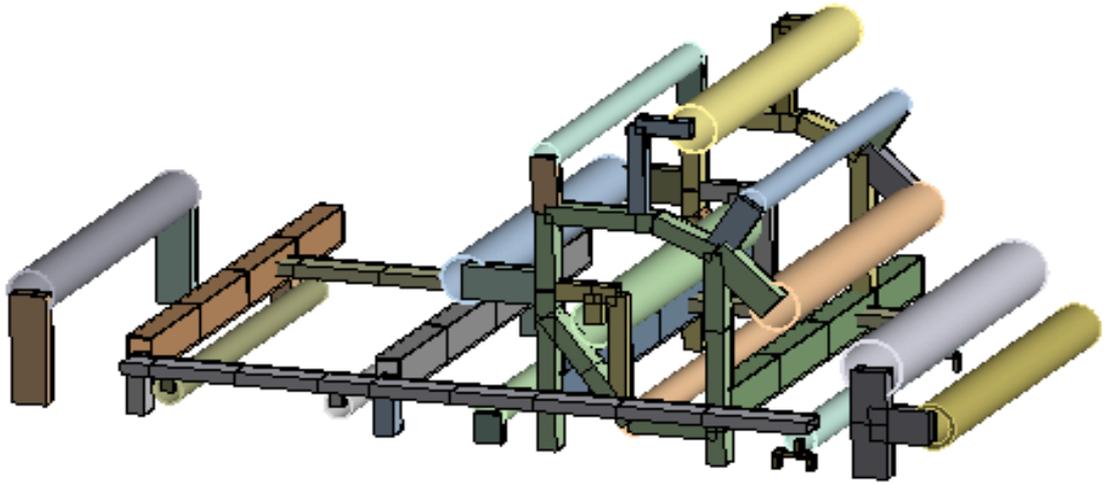


Рис. 1. Конечно-элементная модель формирующей секции



Рис. 2. Конечно-элементная модель секции предварительной сушки

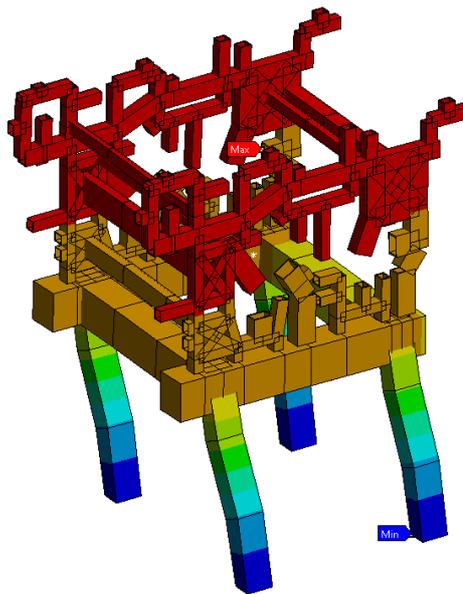


Рис. 3. Собственная форма прессы, соответствующая частоте 3.1 Гц

На втором этапе для тех собственных частот, которые совпадают или недалеко от частот возбуждения, выполнен гармонический анализ. Внешние нагрузки приложены к точкам, в которых валы крепятся к балочным конструкциям. Значения амплитуд сил и возбуждающих частот взяты у производителя машин [3].

Гармонический анализ выполнен методом суперпозиции форм колебаний, найдены перемещения во всех общих точках фундамента и машины. Суммарная амплитуда колебаний вычислена таким образом, что амплитуды колебаний с одинаковой частотой возбуждения складываются линейно, а с разными частотами возбуждения - квадратично. Это правило демонстрирует формула 1.

Формула 1 – Формула вычисления суммарной амплитуды колебаний

$$u = \sqrt{(u'_{f_1} + u''_{f_1} + \dots)^2 + (u'_{f_2} + u''_{f_2} + \dots)^2 + \dots}$$

На третьем этапе проведен анализ спроектированного фундамента. На рис. 4 изображен график амплитуд колебаний для всех интересующих нас точек формирующей секции машины. Вычисленные амплитуды колебаний не превышают критический уровень. Аналогичный анализ проведен для остальных секций, где амплитуды колебаний также меньше критических значений.

Уровень вибраций

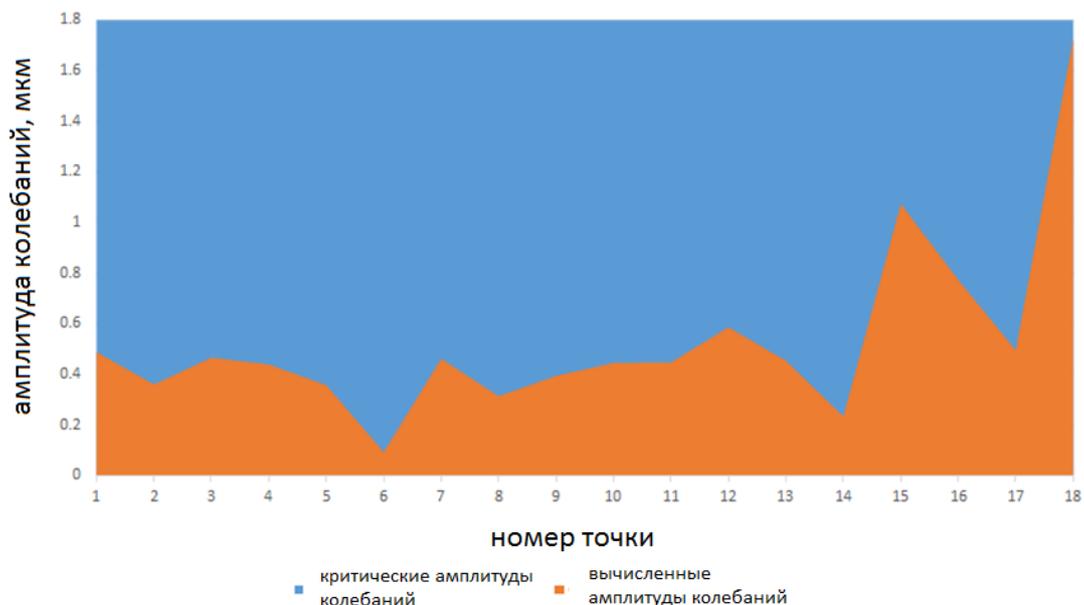


Рис. 4. Уровень вибраций формирующей секции

По итогам проделанной работы можно сделать вывод, что спроектированный фундамент удовлетворяет требованиям расчета колебаний и обеспечивает необходимый режим работы. Данная методика анализа фундамента может быть распространена на другие промышленные машины на фундаменте под действием динамических нагрузок.

ЛИТЕРАТУРА:

1. СНиП 2.02.05-87 Фундаменты машин с динамическими нагрузками.
2. Ansys Manual
3. VOITH directive for load calculation.

ПРЕОБРАЗОВАНИЕ МЕХАНИЧЕСКОЙ ЭНЕРГИИ В ТЕПЛОВУЮ В ОДНОМЕРНОМ КРИСТАЛЛЕ

Современные нанотехнологии позволяют получать практически идеальные (бездефектные) материалы [1, 2], отличающиеся по своим свойствам от материалов с дефектами [3]. В частности, тепловые процессы в таких наноструктурах протекают по иным, более сложным законам, чем для тел макроуровня. Знание этих законов и особенностей поведения наносистем имеет большое практическое значение при разработке новых устройств [4, 5] и расширении области применения наноматериалов, в том числе на промышленном уровне.

При этом даже при описании простых систем может быть недостаточно стандартных физических моделей. Яркий пример – «парадокс Ферми-Паста-Улама-Цингоу» [6]. Группа учёных во главе с Энрико Ферми занимались численным решением задачи Коши для системы дифференциальных уравнений, описывающей одномерный кристалл с нелинейным взаимодействием между частицами. С помощью синусоидальной волны задавалось начальное возмущение, ожидалось, что с течением времени энергия волны равномерно распределится по всем частицам. Оказалось, что сначала волна действительно теряет свою форму и энергию, но по прошествии достаточного времени почти точно возвращается к исходному состоянию.

В данной работе рассматривается одна из нелинейных моделей кристалла, описанных Энрико Ферми. Ключевым отличием является введение начальной тепловой энергии через задание дисперсии начальных скоростей. Можно показать, что в таком случае переход механической энергии в тепловую становится необратимым.

Рассмотрим одномерный кристалл: цепочку одинаковых частиц массы m , соединённых одинаковыми нелинейными пружинами. Уравнения цепочки имеют следующий вид:

$$\dot{u}_k = (u_{k+1} - 2u_k + u_{k-1})(\omega_0^2 + \alpha_0^2(u_{k+1} - u_{k-1})), \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{C_1}{m}}, \quad \alpha_0 = \sqrt{\frac{C_2}{m}}, \quad (1)$$

где u_k – перемещение k -той частицы, k – целочисленный индекс, C_1 и C_2 – коэффициенты соответственно при линейном и квадратичном членах в разложении силы взаимодействия частицы с двумя ближайшими соседями. Будем считать, что выполнены периодические граничные условия Борна-Кармана: $u_{k+N} = u_k$, где $N \gg 1$ – число независимых частиц в кристалле.

Механическую энергию кристалла в начальный момент времени зададим с помощью механической волны. Из-за теплового движения частиц волна будет терять свою форму, а ее энергия перейдет в тепловую энергию системы.

Для рассмотрения двух видов движения в кристалле (движения механической волны и теплового движения), определим начальные скорости как сумму скоростей синусоидальной стоячей волны и случайных скоростей теплового движения. Начальные перемещения положим равными нулю, длину волны выберем равной длине кристалла. Тогда начальные условия могут быть записаны в виде:

$$\dot{u}_k|_{\tau=0} = A \left(\sin\left(\frac{2\pi k}{N}\right) + \sqrt{3\sigma_v^2} \rho_k \right), \quad u_k|_{\tau=0} = 0, \quad (2)$$

где A – амплитуда волны, σ_v^2 – величина дисперсии скоростей, ρ_k – случайное число в диапазоне $[0; 1]$ (распределение равномерное), τ – безразмерное время. Дисперсия σ_v^2 показывает, во сколько раз тепловая энергия превосходит механическую.

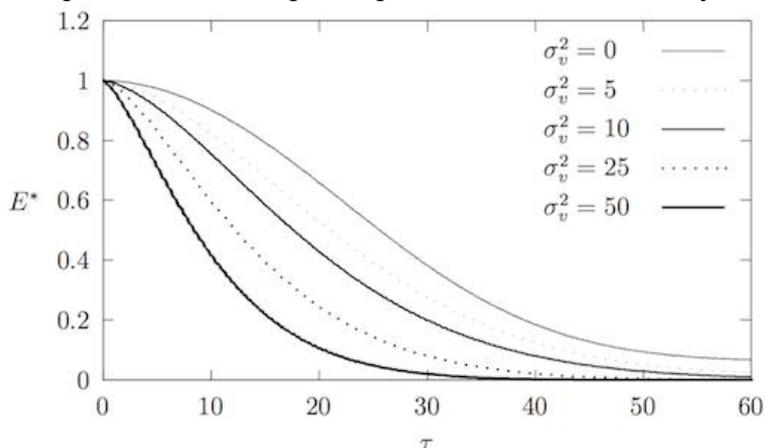


Рис. 1. Изменение нормированной механической энергии стоячей волны при разных значениях дисперсии

Чтобы определить закон, по которому происходит переход механической энергии в тепловую, введём безразмерный параметр $E^*(x)$ – нормированное значение механической энергии цепочки:

$$E^*(x) = \left(\frac{\int_0^L \dot{u}(x) \sin\left(\frac{2\pi x}{L}\right) dx}{A \int_0^L \sin^2\left(\frac{2\pi x}{L}\right) dx} \right)^2 + \omega_0^2 \left(\frac{\int_0^L \varepsilon(x) \cos\left(\frac{2\pi x}{L}\right) dx}{A \int_0^L \sin^2\left(\frac{2\pi x}{L}\right) dx} \right)^2, \quad (3)$$

где $\varepsilon(x)$ – деформация связей.

Результаты расчёта E^* для некоторых значений σ_v^2 приведены на рис. 1. Численное решение уравнения (1) проводилось для цепочки из 1000 частиц методом центральных разностей. Начальные скорости задавались с помощью генератора случайных чисел.

Переход механической энергии в тепловую описывается с помощью следующего экспоненциального закона:

$$E^*(\tau) = e^{-\alpha\tau^\beta}, \quad (4)$$

где α и β – некоторые функции от σ_v^2 .

Построение E^* в логарифмических осях позволяет определить значения α и β для разных значений дисперсии (рис. 2). Обе функции были успешно аппроксимированы:

$$\beta = 1 + \frac{1.08}{\sqrt[4]{\sigma_v^2}} = 1 + \frac{1.08}{\sqrt{\sigma_v}}, \quad (5)$$

$$\ln(\alpha) = \ln(0.14) - \frac{50}{5 + \sqrt{\sigma_v}} = \ln(0.14) - \frac{50}{5 + \sigma_v}. \quad (6)$$

В реальных материалах энергия теплового движения на многие порядки превосходит механическую, поэтому для реальных материалов α и β можно заменить их предельными значениями:

$$\lim_{\sigma_v^2 \rightarrow \infty} \alpha = 0.14, \lim_{\sigma_v^2 \rightarrow \infty} \beta = 1. \quad (7)$$

Уже при $\sigma_v = 12 \cdot 10^3$ ошибка в определении β предельным значением составит менее процента, α – примерно 0.2%. Подстановка этих значений в (4) дает:

$$E^*(\tau) = e^{-0.14k_*^2\tau}, \quad (8)$$

где $k_* = \frac{k}{k_{1000}}$, k – волновое число, k_{1000} – значение волнового числа для кристалла из 1000 частиц.

Рассмотрим уравнение продольных колебаний стержня с внутренним трением:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \tau^2} = \frac{ET_0^2}{\rho a^2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2\gamma \frac{\partial^3 u}{\partial \tau \partial x^2}, \quad (9)$$

где E – модуль Юнга, ρ – плотность, 2γ – безразмерный коэффициент при диссипативном члене, a – равновесное расстояние между частицами, x – безразмерная переменная расстояния.

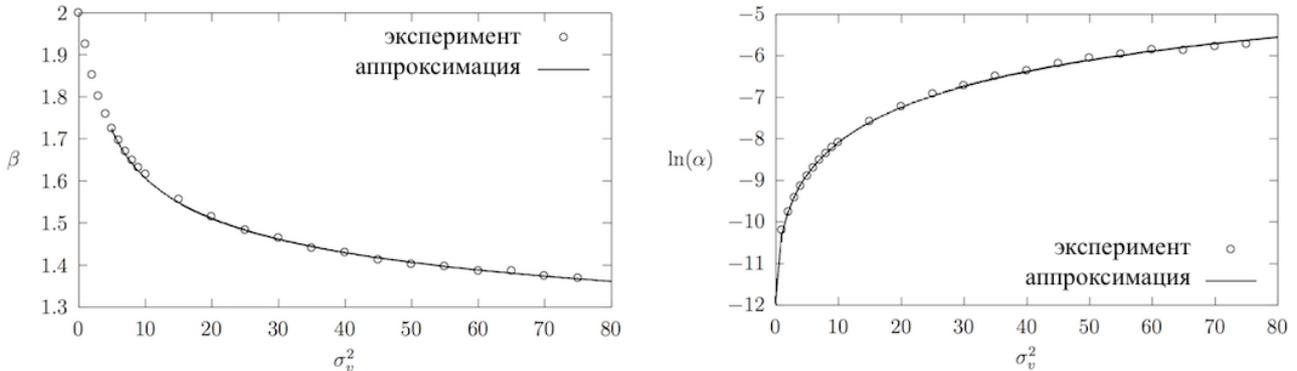


Рис. 2. Значения β (слева) и $\ln(\alpha)$ (справа) при разных значениях дисперсии

Решение этого уравнения, приведённого в работе [7], качественно согласуется с функцией перемещений частиц кристалла u при $\gamma = 0.14 \left(\frac{2k_*}{ak}\right)^2 \approx 3550$. То есть, развитие реальной системы может быть описано решением уравнения (9).

Таким образом, переход механической энергии одномерного кристалла в тепловую может быть описан с помощью модифицированного экспоненциального закона вида $E^*(\tau) = e^{-\alpha\tau^\beta}$. Предложенная аппроксимация функции $\beta(\sigma_v^2)$ позволяет сделать вывод, что в реальных материалах $\alpha = 0.14$ и $\beta = 1$, то есть наблюдается предсказуемое экспоненциальное затухание. В таком случае эволюция системы может быть описана решением уравнения продольных колебаний стержня с определённым ранее коэффициентом при диссипативной части уравнения, зависящим от волнового числа и равновесного расстояния между частицами.

Результаты работы были получены с использованием вычислительных ресурсов суперкомпьютерного центра Санкт-Петербургского политехнического университета Петра Великого.

ЛИТЕРАТУРА:

1. Yenny et al. Hernandez. High-yield production of graphene by liquid-phase exfoliation of graphite. *Nature Nanotechnology*, 3:563–568, 2008.
2. Xiaolin et al. Li. Highly conducting graphene sheets and langmuir-blodgett films. *Nature Nanotechnology*, 3:538-542, 2008.
3. L. Shi et al. Evaluating broader impacts of nanoscale thermal transport research. *Nanoscale and Microscale Thermophysical Engineering*, 19:127–165, 2015.
4. Kostya S. Novoselov, Andre K. Geim, Sergei V. Morozov, D. Jiang, Y. Zhang, Sergey V. Dubonos, Irina V. Grigorieva, and Alexandr A. Firsov. Electric field effect in atomically thin carbon films. *Science*, 306(5696):666–669, 2004.
5. Z. Xu, G. Tai, Y. Zhou, F. Gao, and K. H. Wong. Self-charged graphene battery harvests electricity from thermal energy of the environment. *ArXiv e-prints*, 2012.
6. Enrico Fermi, J. Pasta, and S. Ulam. Studies of nonlinear problems. Los Alamos Report LA-1940, 978, 1965.
7. К. Ю. Аристович. Зависимость макроскопических параметров колебаний кристаллического стержня от микроструктуры. Труды XXI международной конференции «Математическое моделирование в механике сплошных сред. Методы граничных и конечных элементов», 2:23–35, 2006.

ИССЛЕДОВАНИЕ КОЭФФИЦИЕНТА СДВИГА В ЗАВИСИМОСТИ ОТ ПАРАМЕТРОВ СЕЧЕНИЯ СТЕРЖНЯ

В данной работе рассматриваются коэффициенты сдвига тонкостенных стержней. Тонкостенные стержни — элементы конструкций и сооружений цилиндрической или призматической формы, у которых все три характерных измерения (толщина, наибольший размер поперечного сечения и длина) выражаются величинами различных порядков, то есть первая значит меньше второй, а вторая — меньше третьей [1]. Тонкостенные стержни находят широкое применение в строительных конструкциях, а также в машиностроении, самолетостроении и т. д. Различают тонкостенные стержни открытого профиля швеллер, двутавр и др. и закрытого профиля (например, коробчатого).

В отличие от обычных (сплошных) стержней, тонкостенные стержни обычно рассматриваются при расчете как пространственные конструкции; специфика их работы связана с деформацией контура поперечного сечения. С точки зрения расчета тонкостенные стержни представляют собой оболочки.

Методы расчета теории стержней основаны на предположении о недеформируемости контура поперечного сечения, которое и будет использоваться в данной работе.

Стоит заметить, что модули жёсткости на растяжение, изгиб и кручение хорошо известны и приведены во всех справочниках [2]. Интерес представляет модуль жёсткости на поперечный сдвиг. Существует формула для коэффициента сдвига $A = kGS$. Зависимость от G — модуль сдвига и S — площадь поперечного сечения вопроса не вызывает, интерес представляет значение k и его нахождение, что и стало целью данной работы. Также проведено исследование влияния формы сечения стержня на коэффициент сдвига.

В данной работе используется метод, основанный на решении статических задач для определения упругих модулей. При этом сравниваются величины, характеризующие напряженно-деформируемое состояние. Далее будем сравнивать кинематические характеристики. В результате решения трехмерной задачи получаем распределение перемещений по сечению стержня. Существуют различные подходы к определению соотношений между перемещениями трехмерного тела и перемещением и поворотом сечения стержня. Далее будет использоваться подход, принятый в работе [3], основанный на совпадении количества движения и кинетического момента у модели и у трехмерного тела.

$$\rho_0 \mathbf{u} = \int_S \rho \mathbf{u}^{(3)} dx dy, \quad \rho_0 \Theta_2 \cdot \psi = \int_S \rho \mathbf{a} \times \mathbf{u}^{(3)} dx dy, \quad (1)$$

где ρ — объемная плотность массы материала стержня, $\mathbf{u}^{(3)}$ — вектор смещений точек трехмерной среды, \mathbf{a} — вектор положения точек поперечного сечения, S — площадь поперечного сечения.

Для определения коэффициента сдвига рассматривается задача изгиба стержня длиной l (Рис. 1). Один конец жестко закреплен, на втором конце действует поперечная сила $\mathbf{N} = N_0 \mathbf{i}$. Решение будем искать в виде: $\mathbf{u} = -u \mathbf{i}$, $\psi = \psi \mathbf{j}$. Имеем:

$$\psi_1 = \frac{N_0}{C_y} z \left(l - \frac{z}{2} \right), \quad u_1 = \frac{N_0}{A_x} z + \frac{N_0}{2C_y} \left(z^2 l - \frac{z^3}{3} \right) \quad (2)$$

Здесь u_1 — перемещение стержня со свободным концом, ψ_1 — угол поворота сечения стержня со свободным концом, A_x — модуль жесткости на поперечный сдвиг, C_y — модуль жесткости на изгиб [4].

Решение (1) содержит два неизвестных модуля упругости. Чтобы избежать проблему погрешностей при вычислении, нужно решить две задачи: изгиб стержня со свободным концом и с заделкой, как показано на рис. 1.

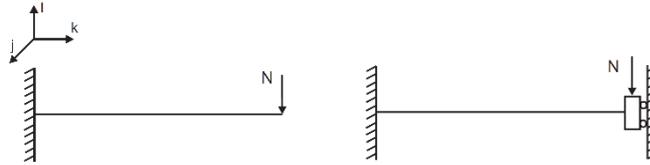


Рис. 1: Постановка задачи для изгиба стержня

Угол поворота сечения и перемещение для стержня с двумя заделками:

$$\psi_2 = \frac{N_0 z}{2C_y} (z - l), \quad u_2 = \frac{N_0}{A_x} z + \frac{N_0}{2C_y} \left(\frac{z^2 l}{2} - \frac{z^3}{3} \right), \quad (3)$$

где u_2 — перемещение стержня с заделкой с двух сторон, ψ_2 — угол закручивания стержня с заделкой с двух сторон. Переходим к относительной координате сечения, делая замену $\xi = z/l$. Получаем итоговую формулу для модуля жесткости на поперечный сдвиг:

$$A_x = \frac{3\xi l N_0}{2u_2(3 - \xi) - u_1(3 - 2\xi)} \quad (4)$$

Перейдем от найденного модуля жесткости на поперечный сдвиг к коэффициенту сдвига:

$$k = \frac{A_x}{GS} \quad (5)$$

Здесь G — модуль сдвига, S — площадь поперечного сечения.

В ходе проведения экспериментов использовалось два типа элементов: квадратные четырехугольные элементы типа S8R для моделирования тонкостенного стержня и балочные элементы типа B31. Элементы типа B31 использовались на краю стержня, к которому была приложена поперечная сила $N = 10^6$ Н. В случае если не использовать это дополнение, то конструкция начинает деформироваться как оболочка и теория стержней дает большую ошибку. Для линейных элементов модуль Юнга $E = 1,14 \cdot 10^{15}$ Па.

Рассматриваются стержни длины $l = 1$ м с одинаковой площадью сечения для большинства форм равной 0,02858. Общее количество элементов, когда рассматривается П – образный профиль (швеллер): $n = 14300$, когда прямоугольники и квадраты: $n = 19190$, когда прямоугольники с одинаковыми моментами инерции $n = \{15400; 20200\}$ (площадь в этом случае $S \sim 0,043$). Введём в рассмотрение следующие величины: k — коэффициент сдвига, J_x, J_y — моменты инерции.

Рассматривались следующие поперечные сечения стержня с характерными размерами a, b, c , где a — толщина: П – образный профиль (швеллер) (рис. 2), швеллер с сохранением одного из моментов инерции постоянным ($J_x = const$ (рис. 3), $J_y = const$ (рис. 4)), прямоугольник с разным, а также одинаковым произведением моментов инерции (рис. 5), квадрат (рис. 6).

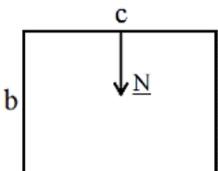


Рис. 2. П – образный профиль (швеллер)

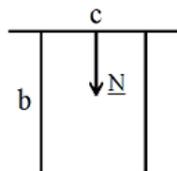


Рис. 3. Швеллер, где $J_x = const$

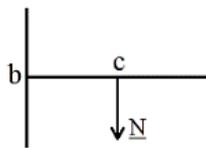


Рис. 4. Швеллер, где $J_y = const$

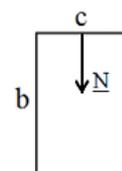


Рис. 5. Прямоугольное сечение

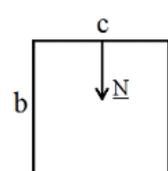


Рис. 6. Квадратное сечение

В рамках данного исследования была получена большая серия результатов, после систематизации которой, был построен график (рис. 7) зависимости $k \sqrt{\frac{J_x}{J_y}}$ от корня отношения моментов (J_x и J_y).

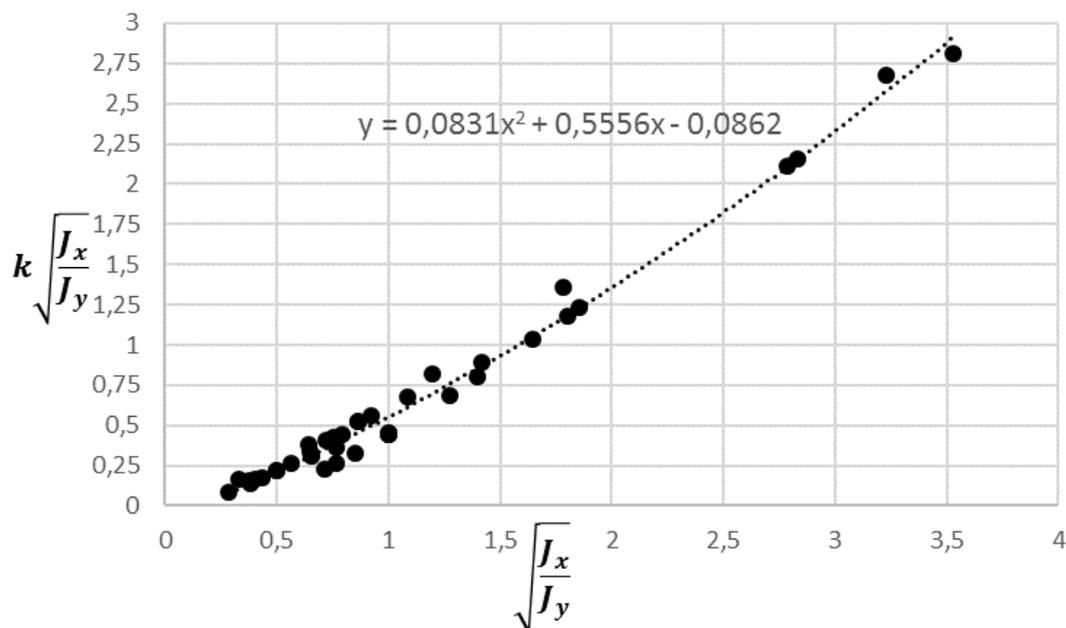


Рис. 7: График зависимости $k \sqrt{\frac{J_x}{J_y}}$ от корня отношения моментов (J_x и J_y) с квадратичной аппроксимирующей кривой

Выпишем уравнение аппроксимирующей кривой

$$y = 0.0831x^2 + 0.5556x - 0.0862, \quad (6)$$

где $y = k \sqrt{\frac{J_x}{J_y}}$, $x = \sqrt{\frac{J_x}{J_y}}$, k — коэффициент сдвига.

$$k = 0.0831 \sqrt{\frac{J_y}{J_x}} + 0.5556 - 0.0862 \sqrt{\frac{J_x}{J_y}} \quad (7)$$

Основным результатом данной работы стало полученное выражение (7), с помощью которого можно вычислить коэффициент сдвига, зная только моменты инерции.

Также в рамках данной работы был проведен анализ влияния различных форм поперечного сечения стержня на коэффициент сдвига и получен вывод, что при увеличении длин сторон сечения и уменьшении его ширины, коэффициент сдвига будет значительно увеличиваться, стремясь к 1, коэффициент сдвига не зависит от положения сечения.

ЛИТЕРАТУРА:

1. Власов В. З., Тонкостенные упругие стержни, 2 изд., М., 1959.
2. В. И. Водопьянов, А. Н. Савкин, О. В. Кондратьев. Курс сопротивления материалов с примерами и задачами. Учебное пособие, 2012.
3. П. А. Жилин. Прикладная механика. Теория тонких упругих стержней. Издательство Политехнического университета, 2007
4. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Теоретическая физика. В 10-ти т. Т. VII. Теория упругости: Учеб. пособие. — 4-е изд., испр. и доп. — М.; Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1987. — 248 с.

ВЛИЯНИЕ НЕЛИНЕЙНОСТИ НА ПЕРЕРАСПРЕДЕЛЕНИЕ ЭНЕРГИИ
ПО ПРОСТРАНСТВЕННЫМ НАПРАВЛЕНИЯМ В ТРЕУГОЛЬНОЙ РЕШЕТКЕ

Количественное описание неравновесных тепловых процессов в кристаллах является одной из актуальных проблем современной механики и физики твердого тела. В частности, большой интерес представляют процессы, происходящие при переходе к состоянию термодинамического равновесия. Неравновесное состояние может быть вызвано, например, прохождением ударных волн или быстрым лазерным воздействием. При этом кинетические энергии теплового движения атомов в разных направлениях могут значительно различаться, а кинетическая температура проявляет тензорные свойства [1]. При переходе к равновесному состоянию в кристалле реализуется два процесса: выравнивание кинетической и потенциальной энергий и перераспределение кинетической энергии по пространственным направлениям. Аналитическое описание данных процессов в гармоническом приближении приведено в работе [2]. В настоящей работе численно исследуется влияние малой нелинейности на перераспределение кинетической энергии по пространственным направлениям.

Рассматривается двумерная треугольная решетка. Ближайшие частицы в решетке взаимодействуют посредством потенциала Леннарда-Джонса:

$$\Pi(r) = D \left[\left(\frac{a}{r} \right)^{12} - 2 \left(\frac{a}{r} \right)^6 \right], \quad (1)$$

где D – энергия связи, a – равновесное расстояние, r – расстояние между частицами. Используются периодические граничные условия. Ячейка периодичности содержит 10^6 частиц.

Начальные перемещения частиц равны нулю. Начальные скорости частиц – независимые случайные векторы с нулевым математическим ожиданием, направленные вдоль одной из связей решетки (ось x). Значения компоненты v_x вектора скорости равномерно распределены в интервале $[-v_{max}; v_{max}]$.

Уравнения движения частиц интегрируются с использованием метода Верле [3]. В ходе моделирования вычисляется следующая величина, характеризующая распределение кинетической энергии (температуры) по пространственным направлениям:

$$\theta = \frac{T_{xx} - T_{yy}}{T_{xx}^0 - T_{yy}^0}, \quad k_B T_{xx} = m \langle v_x^2 \rangle, \quad k_B T_{yy} = m \langle v_y^2 \rangle, \quad (2)$$

где T_{xx}^0 , T_{yy}^0 – начальные значения компонент тензора температуры (в рассматриваемом случае $T_{yy}^0 = 0$), k_B – постоянная Больцмана. Угловыми скобками обозначено математическое ожидание. В расчетах математическое ожидание заменяется на среднее по реализациям с различными начальными условиями. Приведенные ниже результаты получены осреднением по 100 реализациям.

Для исследования влияния нелинейности на процесс перераспределения кинетической энергии по направлениям проводится серия расчетов с различными значениями амплитуды начальных скоростей частиц v_{max} , соответствующими различным начальным температурам системы. Результаты расчетов показывают, что на малых временах, величина θ совершает высокочастотные колебания, описываемые гармонической моделью [2]. На больших временах, на высокочастотные колебания накладывается медленный процесс, связанный с

наличием нелинейности. Данный процесс приводит к тому, что система стремится к равному распределению энергии по пространственным направлениям (θ стремится к нулю).

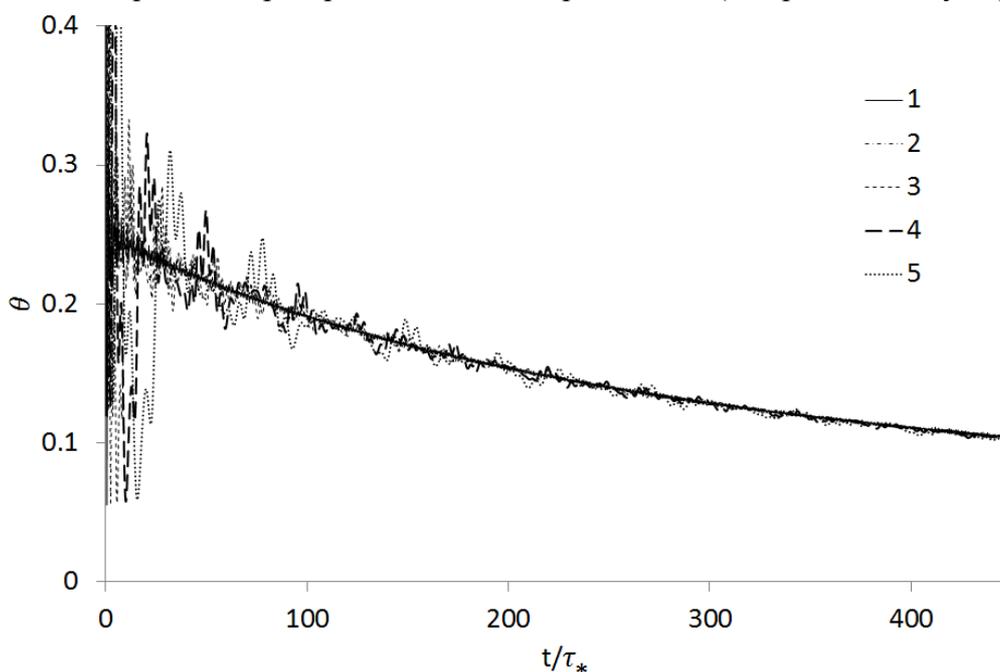


Рис. 1. Перераспределение кинетической энергии (температуры) по пространственным направлениям при разных амплитудах начальных скоростей v_{max} (1 – $0.01v_*$, 2 – $0.02v_*$, 3 – $0.03v_*$, 4 – $0.04v_*$, 5 – $0.05v_*$). Здесь $v_* = 2\pi a/\tau_*$, $\tau_* = 2\pi\sqrt{m/C}$, C – жесткость связи, m – масса частицы. Все кривые кроме первой отмасштабированы (растянуты) с использованием формулы (3)

Анализ результатов моделирования показывает, что скорость процесса перераспределения энергии по пространственным направлениям зависит от величины начальной температуры. При этом функция $\theta(t)$, описывающая данный процесс, на больших временах удовлетворяет следующему закону подобия:

$$\theta|_{T_{xx}^0=T_1}(t) = \theta|_{T_{xx}^0=T_2}\left(\frac{T_1}{T_2}t\right), \quad (3)$$

где T_1 и T_2 – значения начальной температуры системы.

Результаты расчетов, подтверждающие справедливость эмпирической формулы (3) приведены на рис. 1. Видно, что кривые, соответствующие различным начальным температурам, при использовании масштабирования (3) совпадают.

Таким образом, с течением времени система стремится к состоянию, соответствующему равному распределению кинетической энергии по пространственным направлениям. Скорость данного переходного процесса зависит от начальной температуры системы, определяющей степень влияния нелинейности. Зависимость функции, описывающей переходный процесс, от начальной температуры удовлетворяет соотношению подобия (3). Иными словами, влияние нелинейности приводит к изменению масштаба времени в системе.

Вычисления проводились с использованием вычислительных ресурсов суперкомпьютерного центра “Политехнический” Санкт-Петербургского политехнического университета Петра Великого. Работа выполнена при поддержке Российского научного фонда (грант № 17-71-10213).

ЛИТЕРАТУРА:

1. B.L. Holian, W.G. Hoover, B. Moran, G.K. Straub, Shock-wave structure via nonequilibrium molecular dynamics and Navier-Stokes continuum mechanics. Phys. Rev. A, 22, 2798 (1980).
2. В.А. Кузькин, А.М. Кривцов. Аналитическое описание переходных тепловых процессов в гармонических кристаллах. Физика твердого тела, том 59, вып. 5, 1023-1034 (2017).
3. L. Verlet, Computer experiments on classical fluids. I. Thermodynamical properties of Lennard-Jones Molecules. Physical Review, 159, 98-103 (1967).

УДК 51-76

А.В. Смирнов

Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого

МЕТОД ВЕЙВЛЕТ-ПРЕОБРАЗОВАНИЙ ДЛЯ ИССЛЕДОВАНИЙ БИМЕДИЦИНСКИХ ПРОЦЕССОВ

Введение. Биомедицинские сигналы представляют собой проявление физиологических процессов живого организма, которые могут быть зарегистрированы с помощью различных измерительных приборов и представлены в виде удобном для дальнейшей обработки. Примерами таких сигналов служат: сердечный ритм, дыхательные процессы, температура тела, активность мозга, кровяное давление, режим сна, питания и многие другие. Обработка медицинских сигналов проводится с целью выделения информативных с точки зрения медицинской диагностики признаков заболевания или с целью определения количественных показателей жизнедеятельности организма.

Медицинская диагностика во многом опирается на субъективный опыт врача, проводящего осмотр и многочисленные данные лабораторных исследований такие как: анализ крови, давление, ЭКГ, ЭЭГ и другие. Развитие медицины в настоящее время предполагает диагностику по записям множества количественных характеристик состояния пациента, полученных онлайн, с применением математических методов классификации состояния пациента.

Записи медицинских сигналов имеют существенно нестационарный характер, например, ритмы мозга и сердца, и показывают выраженные изменения в случае патологии. Нестационарность биологических ритмов (зависимость от времени спектральных характеристик) ограничивает возможности применения стандартных методов спектрального анализа для обработки записей биомедицинских сигналов [1]. Применение вейвлет-преобразования и использования массива характеристик ритма [2,3], выявляющих временные особенности поведения частот, дает дополнительные возможности для изучения этих сигналов.

Цель работы состоит в анализе физиологического состояния пациентов по записям нестационарной ритмограммы сердца с помощью вейвлет-преобразования и методов классификации данных.

В работе проведено сравнение эффективности преобразования Фурье и вейвлет-преобразования при обработке нестационарных сигналов. Для элементарного сигнала с частотой, линейно зависящей от времени, получено и проанализировано аналитическое выражение для вейвлет-преобразования. Все расчеты массива диагностических параметров проводились с использованием записей ритма сердца беременных женщин, полученных при проведении глюкозотолерантного теста в ВМА им. С.М.Кирова. Проведена процедура разделения всех испытуемых на классы по степени напряженности физиологического состояния организма.

Методы

Обработка данных глюкозотолерантного теста включила в себя:

1. получение массивов характеристических параметров (признаков) с помощью непрерывного вейвлет-преобразования сигналов ритмограмм сердца [2-3] и вычисления спектральных интегралов в различных частотных диапазонах полученных сигналов LF {0.04-0.15 Гц}, HF : {0.15-0.4 Гц};

2. проверку выборок для различных диагностических параметров на нормальность распределения, с последующим применением непараметрического критерия Манна-Уитни;

3. применение метода опорных векторов (SVM -support vector machine) [4] для классификации пациенток по двум диагностическим параметрам

$$K_M(LF) = \frac{\langle E_{LF}(B) \rangle}{\langle E_{LF}(A) \rangle}, \quad K_{LF/HF}(B) = \frac{\langle E_{LF}(B) \rangle}{\langle E_{HF}(B) \rangle},$$

выбранным при первичной статистической обработке сигналов, где

$$\langle E_\mu(S) \rangle = \frac{1}{t_2(S) - t_1(S)} \int_{t_1(S)}^{t_2(S)} \frac{1}{\Delta v} \int_{v-\Delta v/2}^{v+\Delta v/2} \frac{2}{c_\psi} \frac{|V(v,t)|^2}{v} dv dt,$$

A - подготовительный этап, B - этап приема глюкозы, $\mu = \{LF, HF\}$, $S = \{A, B\}$, $V(v, t)$ - вейвлет-преобразование сигнала ритмограммы.

Результаты

1. Применена новая процедура исследования изменения частотных свойств нестационарных сигналов с помощью непрерывного вейвлет-преобразования, предложенная в работах [2-3].

2. Проиллюстрирована эффективность вейвлет-преобразования на примере элементарного нестационарного сигнала с линейно меняющейся частотой

$$z(t) = \frac{b}{2\tau\sqrt{\pi}} e^{-\frac{(t-t_0)^2}{4\tau^2}} \cos\left(\frac{\omega f_0}{T}(t-t_0)^2 + \omega f_0(t-t_0) + \varphi\right),$$

для которого оказалось возможным получить аналитическое выражение (графики мощностей вейвлет-спектра сигнала $z(t)$ представлены на рис. 1 и 2).

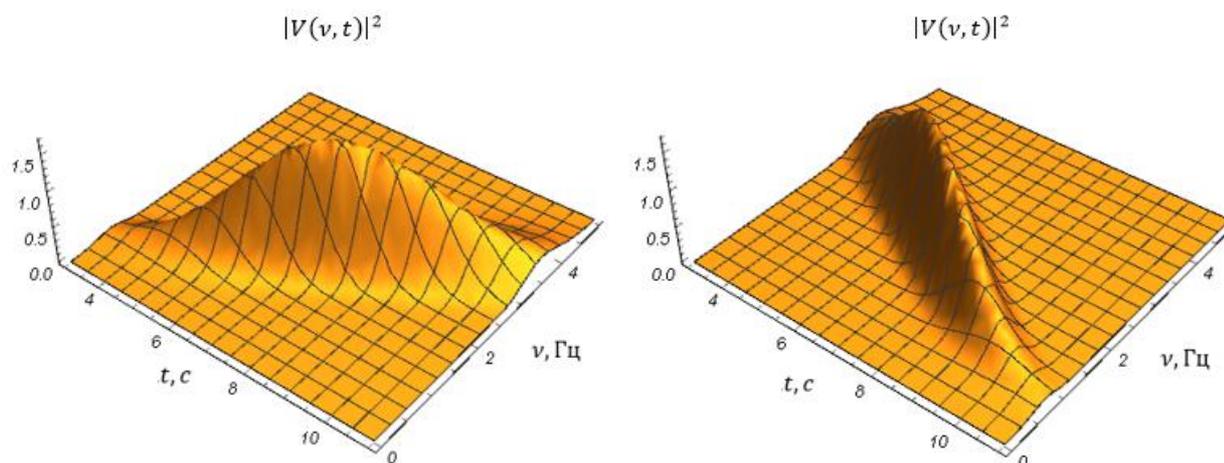


Рис. 1, 2 Мощность вейвлет-спектра сигнала $z(t)$ при $T > 0$ (1) $T < 0$ (2)

3. Произведена классификация пациенток методом опорных векторов и выделена группа из 9 человек, физиологическое состояние которых можно характеризовать как вызывающее опасение (второй класс на рис. 3). Отметим, что по лабораторным медицинским показателям вся эта группа также находилась в зоне риска.

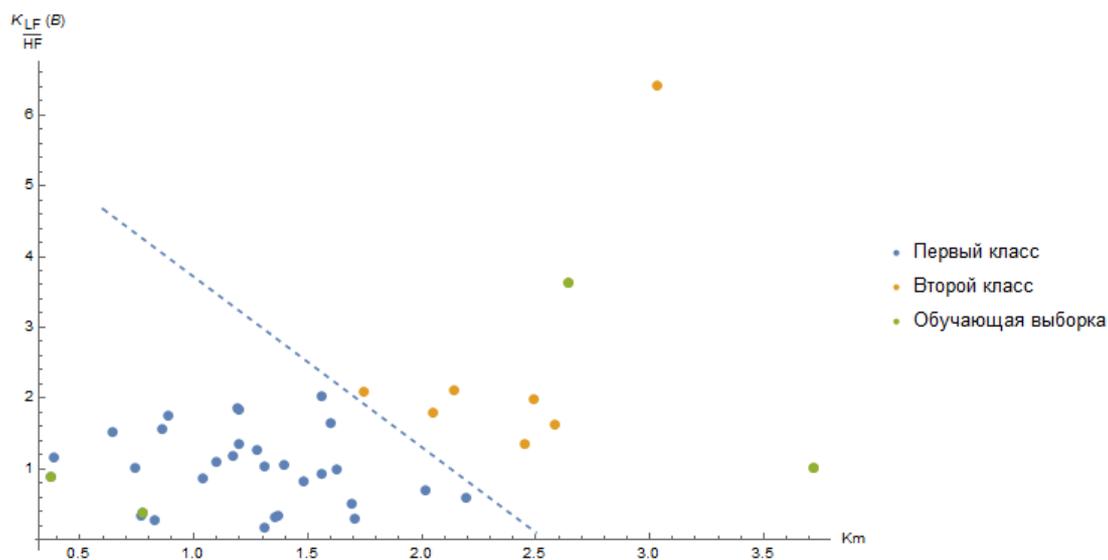


Рис. 3. Диаграмма классифицированной выборки

Выводы

1. Применение вейвлет-преобразования позволяет вычислить массив диагностических параметров, характеризующих нестационарные вариации сердечного ритма при проведении диагностических тестов.
2. Использование модели сердечного ритма, как суперпозиции элементарных позволяет получить аналитическое выражение для вейвлет-преобразования ритмограммы. Это, в свою очередь, дает возможность выявить влияние всех параметров нестационарного сигнала на вариабельность сердечного ритма.
3. Классификация, проведенная в данной работе, на основе диагностических параметров, вычисленных с помощью вейвлет-преобразования сигнала, дала результаты, которые подтверждаются данными медицинских исследований и анамнезом пациенток.
4. Существуют некоторые расхождения результатов по сравнению с работой [2], которые могут быть связаны с особенностью применяемых методов, в частности, результаты SVM существенно зависят от качества обучающей выборки, выбор которой составляет отдельную задачу.
5. Совместное использование вейвлет-преобразования и методов классификации дает возможность применения данного подхода в медицинской диагностике.

ЛИТЕРАТУРА:

1. Божокин С.В., Сулова И.Б., Основы теории обработки биомедицинских сигналов. Изд-во Политехнического университета, 2016. 151 с.
2. S. V. Bozhokin, I. B. Suslova, Wavelet-based technique to detect gestational complications by analyzing non-stationary heart rate variability, Indian Journal of Fundamental and Applied Life Sciences, V. 5(4), (2015) pp.55-68.
3. S. V. Bozhokin, I. M. Suslova. Double wavelet transform of frequency-modulated nonstationary signal, Technical Physics, V. 58(12) (2013) pp.1730-1736
<http://link.springer.com/article/10.1134/S1063784213120074>
4. Bartlett P., Shawe-Taylor J. Generalization performance of support vector machines and other pattern classifiers // Advances in Kernel Methods. MIT Press, Cambridge, USA, 1998.

МОДЕЛИРОВАНИЕ СПЛАВА С ЭФФЕКТОМ ПАМЯТИ ФОРМЫ КАК МАТЕРИАЛА ДЛЯ
ВЖИВЛЯЕМОГО УСТРОЙСТВА, УСТРАНЯЮЩЕГО ПРОЛАПС МИТРАЛЬНОГО
КЛАПАНА

В последнее время в науке, технике и медицине все большее применение находят многофункциональные материалы с заданными свойствами – материалы, которые под действием внешних факторов и условий эксплуатации (температуры, механической нагрузки и т.д.) могут управляемо изменять свои свойства. Безусловно, к таким материалам относятся сплавы с уникальными и совсем недавно неизвестными физико-механическими свойствами – эффектом памяти формы (ЭПФ). Эффект заключается в способности ненагруженного материала под воздействием внешнего напряжения и изменения температуры накапливать деформацию до 10–15%, обратимую при нагреве за счет фазовых превращений (мартенситных). В процессе мартенситных превращений атомы не мигрируют далеко по кристаллу, а перемещаются на расстояния, не превышающие межатомные. При этом смещения атомов в новые позиции происходят скоординировано в большом ансамбле частиц и сопровождаются деформационными явлениями. Совмещая силовые и деформационные свойства элементов из металла с ЭПФ, удается проектировать исключительно простые и эффективные исполнительные устройства роботов, разнообразные приводы в конвейерных производствах, кольцевые мышцы [1] и т.д. Также сплавы с ЭПФ обладают биологической совместимостью с тканями человеческого организма, что позволяет успешно применять их в медицине уже много лет в качестве материала для изготовления различных медицинских инструментов и имплантатов стержней и аппаратов для исправления деформации позвоночника, челюстно-лицевых имплантатов, искусственных клапанов сердца, протезов сосудов и т.д. [2, 3].

Данная работа тоже связана с медициной. Целью было моделирование поведения проволоки из сплава с ЭПФ при одноосном растяжении, а также при работе устройства, устраняющего пролапс митрального клапана. Численное моделирование проводилось при помощи программного пакета конечно-элементного анализа ANSYS, а аналитический расчет с использованием математической модели Мовчана.

Пролапс митрального клапана (ПМК) – это провисание створок митрального клапана в полость левого предсердия во время систолы, что приводит к обратному току крови через клапан и может вызвать такие осложнения, как эндокардит, разрыв хорд и тромбоэмболия. Распространенность ПМК среди населения по одним данным оценена в 2–3% [4], по другим в 5–10% (у взрослой популяции). В большинстве случаев хирургическое вмешательство не требуется, но при высокой степени провисания створки необходима дорогостоящая операция с большим риском для жизни, так как для ее проведения требуется остановка сердца. LPS (Leaflet Plication Clip) [5] был разработан в Бостонской детской больнице и представляет из себя специально изогнутую проволоку. Установка LPS является альтернативой хирургическому методу лечения пролапса митрального клапана и может быть выполнена без остановки сердца. В качестве материала для создания LPS был выбран сплав никелида титана NiTi марки TN-1, так как он обладает подходящими характеристиками: биосовместимостью, стойкостью к коррозии и сверхупругостью [6]. Сверхупругость — это способность материала с ЭПФ пластически деформироваться под воздействием механической нагрузки при определенных условиях и полностью восстанавливать деформацию при ее снятии.

Микромеханический подход Мовчана для моделирования поведения материала с ЭПФ заключается в рассмотрении зарождения и развития кристаллов мартенсита, которые дают определенный вклад в скорость изменения фазовой деформации в сплаве с памятью формы. Макроскопическая деформация является суммой вклада микродеформаций ρ , вычисленных по параметру q (доля мартенсита). Предполагается, что скорость роста кристаллов мартенсита пропорциональна накопленной фазовой деформации и уровню напряжений. В модели учитываются различные упругие свойства аустенита и мартенсита. Общая схема подхода изложена в [7]. Система определяющих соотношений формулируется следующим образом:

$$\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ij}^e + \varepsilon_{ij}^p, \quad (1)$$

где ε^e , ε^p – тензоры упругой и фазовой деформации. Для упругой деформации справедливы следующие уравнения:

$$\varepsilon_{ij}^{e'} = \frac{\sigma'_{ij}}{2G}, \quad \varepsilon_{kk}^e = \frac{\sigma_{kk}}{K}, \quad (2)$$

где G , K – модули сдвига и объемного сжатия, соответственно. Штрих обозначает дивергенс соответствующего тензора. Для фазовой деформации используются уравнения:

$$d\varepsilon_{ij}^p = (c_0 \sigma'_{ij} + a_0 \varepsilon_{ij}^p) dq \text{ при } dq > 0, \quad (3)$$

$$d\varepsilon_{ij}^e = \left(\frac{a_0 \varepsilon_{ij}^{(0)}}{\exp(a_0) - 1} + a_0 \varepsilon_{ij}^p \right) dq \text{ при } dq < 0, \quad (4)$$

$$q_1 = \cos \left[\frac{\pi}{2} \left(\frac{T - k \sqrt{\sigma_{ij} \sigma_{ij}} - M_f}{M_s - M_f} \right) \right] \text{ при } dq > 0, \quad (5)$$

$$q_2 = \cos \left[\frac{\pi}{2} \left(\frac{T - k \sqrt{\sigma_{ij} \sigma_{ij}} - A_s}{A_f - A_s} \right) \right] \text{ при } dq < 0, \quad (6)$$

$$\frac{1}{E(q)} = \frac{q}{E_1} + \frac{1-q}{E_2}. \quad (7)$$

Здесь E_1 , E_2 – значения модуля Юнга для мартенситного и аустенитного состояния; a_0 , k , c_0 – коэффициенты материала, которые можно найти из опыта на прямое превращение. Уравнения (3) и (5) соответствуют прямому превращению, а (4) и (6) – обратному. M_s , M_f , A_s , A_f – температуры начала и завершения прямого и обратного мартенситного превращения.

Модель материала с ЭПФ для сверхупругости реализована в ANSYS Mechanical согласно [8]. Константы для моделей взяты из экспериментальных данных [8].

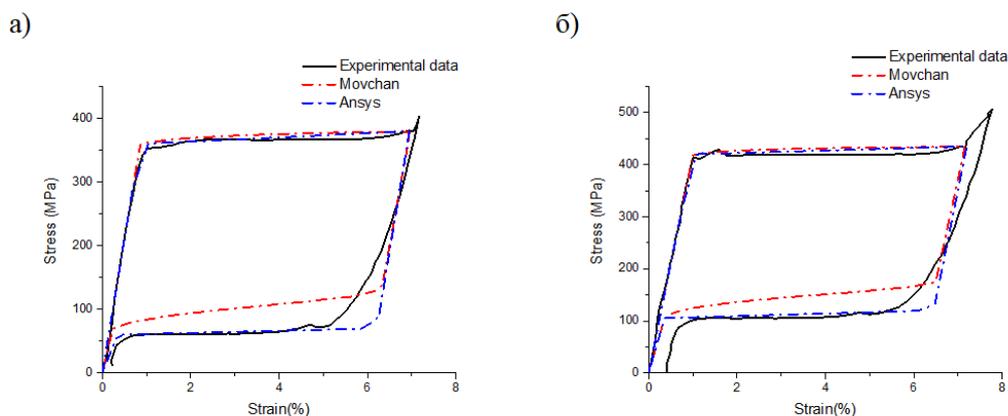


Рис. 1. Диаграммы деформирования образцов из сплава Ti-50.84 ат. %Ni диаметром 0.5 мм при температуре 37°C (а) и 42°C (б) после 1 часа отжига при 500°C

Результаты. Сравним результаты аналитического решения, посчитанные в Wolfram Mathematica, с решением в ANSYS и экспериментальными данными. Рассчитывались только те варианты, в которых у проволоочных образцов проявилось свойство сверхупругости (рис. 1). Но стоит отметить, что данные методы решения не учитывают остаточную деформацию, поэтому параметры для математических моделей брались с условием, что остаточные деформации минимальны, если снимать нагрузку во время площадки текучести. Полученные результаты качественно сходятся с экспериментальными данными.

Также был проведен расчет в ANSYS на предел скручивания дужки LPC без появления остаточных деформаций. На рисунке 2 видно, что при скручивании дужки LPC из сплава Ti-50.81 ат.%Ni при температуре 22⁰C после 1 часа отжига при 500⁰C на 132⁰ деформации не выходят за пределы площадки текучести и остаточных деформаций нет.

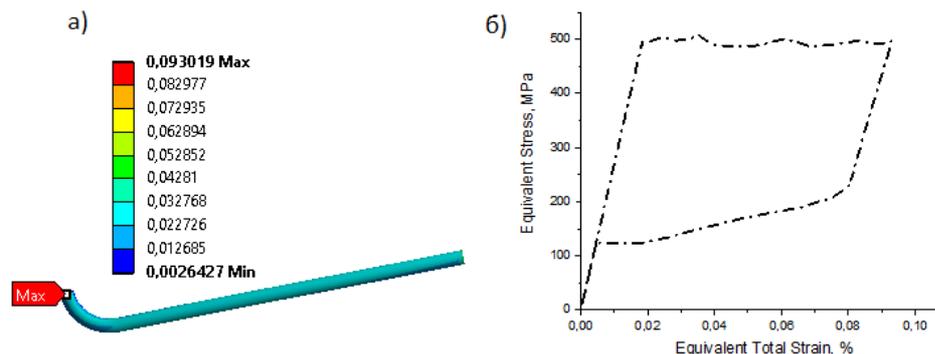


Рис. 2. Распределение относительной деформации (а) и диаграмма деформирования (б) дужки LPC из сплава Ti-50.81 ат. %Ni при температуре 22⁰C после 1 часа отжига при 500⁰C при скручивании на 132⁰

Выводы. В ходе работы по данным эксперимента были проведены расчеты одноосного растяжения двумя методами: микромеханическим подходом Мовчана для сплавов с ЭПФ и методом конечных элементов в программной системе ANSYS Mechanical. Оба метода показали качественную сходимость с экспериментальными данными. Но стоит отметить, что данные методы решения не учитывают остаточную деформацию, поэтому параметры для математических моделей брались с условием, что остаточные деформации минимальны, если снимать нагрузку во время площадки текучести.

Создана 3D модель LPC в ANSYS для определения его параметров при изготовлении, а также для прогнозирования его поведения при различных манипуляциях с ним.

ЛИТЕРАТУРА:

1. E. Khlopkov, G. Volkov, Y. Vyunenکو. Specific features of the behavior of TiNi force elements in thermocycling / Materials Today: Proceedings. Vol. 4, Is. 3, Part B, Pages 4879-4883 (2017)
2. Муслов С.А., Стюрева Г.М. История и перспективы применения сплавов с памятью формы в науке, технике и медицине. // Фундаментальные исследования. 2007. № 10. С. 119-120.
3. Лихачев В.А., Кузьмин С.Л., Каменцева З.П. Эффект памяти формы. // Л.: Изд-во ЛГУ, 1987. 218 с.
4. E. Hayek, C.N. Gring, B.P. Griffin. Lancet. 365 (2005) 507-518.
5. E.N. Feins, H. Yamauchi, G.R. Marx, F.P. Freudenthal, H. Liu, P.J. del Nido, N.V. Vasilyev. J Thorac Cardiovasc Surg. 147 (2014) 783-791.
6. В.Э. Гюнтер, В.Н. Ходоренко, Ю.Ф. Ясенчук, Т.Л. Чекалкин, В.В. Овчаренко, А.А. Клопотов. Никелид титана. Медицинский материал нового поколения. / Томск: Изд-во МИЦ, 2006. – 296 с.
7. А.А. Мовчан. Микромеханические определяющие уравнения для сплавов с памятью формы/ Проблемы машиностроения и надежности машин. – 1994. – № 6. – С. 47–53.
8. F. Auricchio, E. Sacco. A temperature-dependent beam for shape-memory alloys: constitutive modelling, finite element implementation and numerical simulations // Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering. 1999. Vol. 174. P. 171–190.

УДК 532.5

Д.В. Борисов, А.Н. Воробьев
Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого

МОДЕЛИРОВАНИЕ МАССОПЕРЕНОСА ПРИМЕСЕЙ
ПРИ РОСТЕ КРИСТАЛЛА КАРБИДА КРЕМНИЯ ИЗ РАСПЛАВА

Карбид кремния (SiC) представляет собой широкозонный полупроводник, который широко применяется в устройствах с низким сопротивлением из-за его высокого напряжения пробоя [1]. Как правило монокристаллы карбида кремния получают методом физического транспорта паров (Physical Vapor Transport – PVT). Поскольку PVT является высокотемпературным процессом (около 2500 К), расходы на эксплуатацию и высокая плотность дислокаций монокристаллов карбида кремния ограничивают его использование.

Выращивание из раствора является эффективным методом получения высококачественных кристаллов, поскольку рост протекает в условиях, близких к условиям теплового равновесия на ростовой поверхности. Выращивание карбида кремния из раствора обычно осуществляется методом TSSG (Top-Seeded Solution Growth), при котором затравочная пластина опускается в верхнюю часть раствора, загружаемого в графитовый тигель. Ранние исследования по выращиванию кристаллов из раствора были сосредоточены на жидкофазной эпитаксии с использованием растворителей на основе кремния, таких как Si-Ge и Si-Al. Скорости роста с использованием таких растворителей составляют не более 10 мкм/ч, что может быть вызвано низкой растворимостью углерода в расплавленном кремнии. Последнее время высокая скорость роста была достигнута путем добавления переходных металлов, таких как хром, титан и железо.

В работе проводится численное моделирование методов выращивания кристалла карбида кремния из раствора: метода TSSG с использованием растворителя Si-Cr и метода разницы температур с использованием растворителя Si-Fe. Исследуется влияние содержания металлической примеси в расплаве, а также температурного режима на скорость роста кристалла. Проведена настройка используемой химической модели путем сравнения расчетных значений скорости роста кристалла с экспериментальными данными.

Задачи решаются в осесимметричной стационарной постановке. Ввиду малого объема системы, а также малых скоростей течение в расплаве можно считать ламинарным. Все расчеты проводились в программном комплексе CGSim [2]. В задаче выращивания из раствора Si-Cr расчетная область представляет собой графитовый тигель, в котором находится расплав кремния с примесью хрома (см. рис. 1а). В верхней части расплава расположен затравочный кристалл. На графитовой стенке тигля и на затравочном кристалле карбида кремния массовая доля углерода удовлетворяет следующему условию:

$$\frac{\rho D_{\varphi_C}}{M_C} \frac{\partial \varphi_C}{\partial n} + \alpha (\varphi_C - \varphi_C^{crucible/seed}) = 0, \text{ где } \alpha = f(T, \varphi_C, \alpha_0). \text{ Здесь } \alpha \text{ – коэффициент прилипания,}$$

$\varphi_C^{crucible/seed}$ – равновесная массовая доля углерода на графите или карбиде кремния соответственно. Схема расчетной области в задаче выращивания из раствора Si-Fe представлена на рис. 1б. Между источником карбида кремния сверху и затравочным кристаллом карбида кремния внизу расположен расплав кремния с примесью железа. На

затравочном кристалле и на источнике карбида кремния массовая доля углерода удовлетворяет аналогичному условию: $\frac{\rho D_{\varphi_C}}{M_C} \frac{\partial \varphi_C}{\partial n} + \alpha(\varphi_C - \varphi_C^{seed}) = 0$.

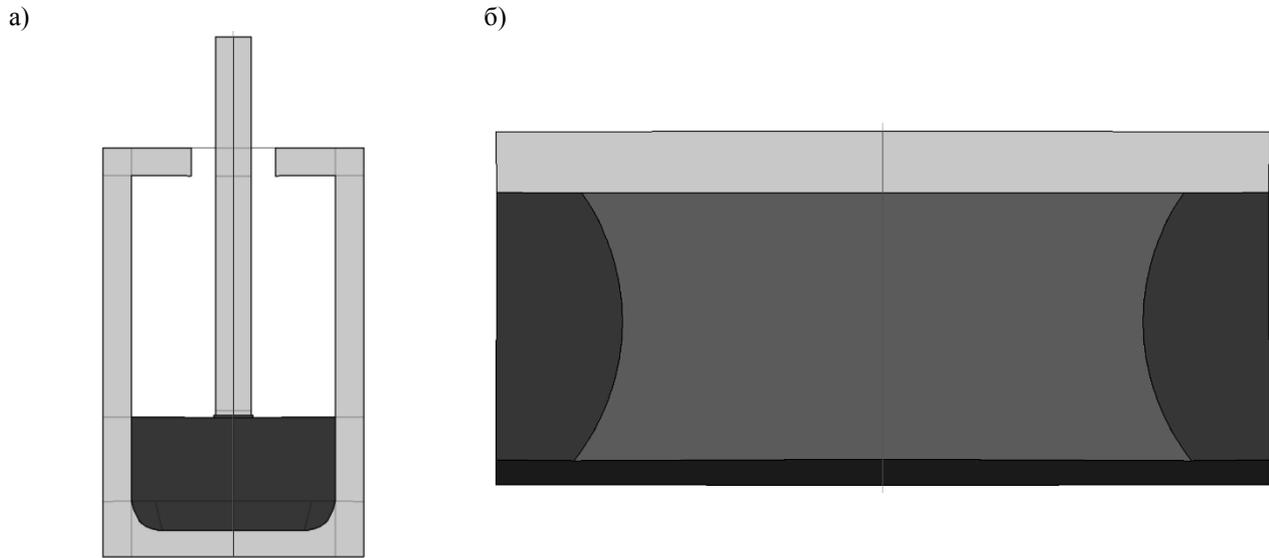


Рис. 1. Расчетная область для а) задачи выращивания из раствора Si-Cr и б) задачи выращивания из раствора Si-Fe

При настройке используемой химической модели необходимо подобрать параметр α_0 , который входит в граничное условие к уравнению переноса массовой доли углерода. Подбор параметра осуществлялся путем сравнения расчетных значений скорости роста кристалла карбида кремния с экспериментальными данными [3, 4]. Предполагается, что параметр α_0 может зависеть от температуры, но не зависит от содержания хрома в расплаве. Таким образом, выбранное значение данного параметра использовалось при расчете с другими составами.

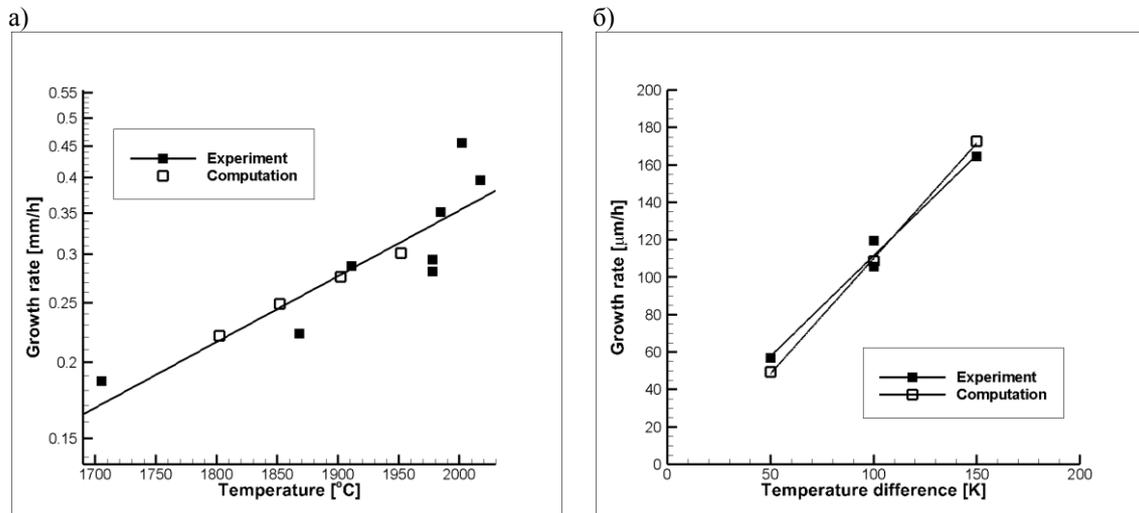


Рис. 2. Настройка химической модели для а) задачи выращивания из раствора Si-Cr и б) задачи выращивания из раствора Si-Fe

В задаче выращивания из раствора Si-Cr в результате подбора параметра α_0 показано, что в диапазоне от 1802 до 1952 °C он слабо зависит от температуры (рис. 2а). Таким образом, выбрано постоянное значение $\alpha_0 = 1.4 \cdot 10^{-8}$. Максимальная относительная погрешность не превышает 5%. В задаче выращивания из раствора Si-Fe в диапазоне

перепадов температуры от 50 до 150 К расчеты, проведенные при постоянном значении параметра $\alpha_0 = 6.6 \cdot 10^{-9}$, хорошо согласуются с экспериментальными данными (рис. 2б).

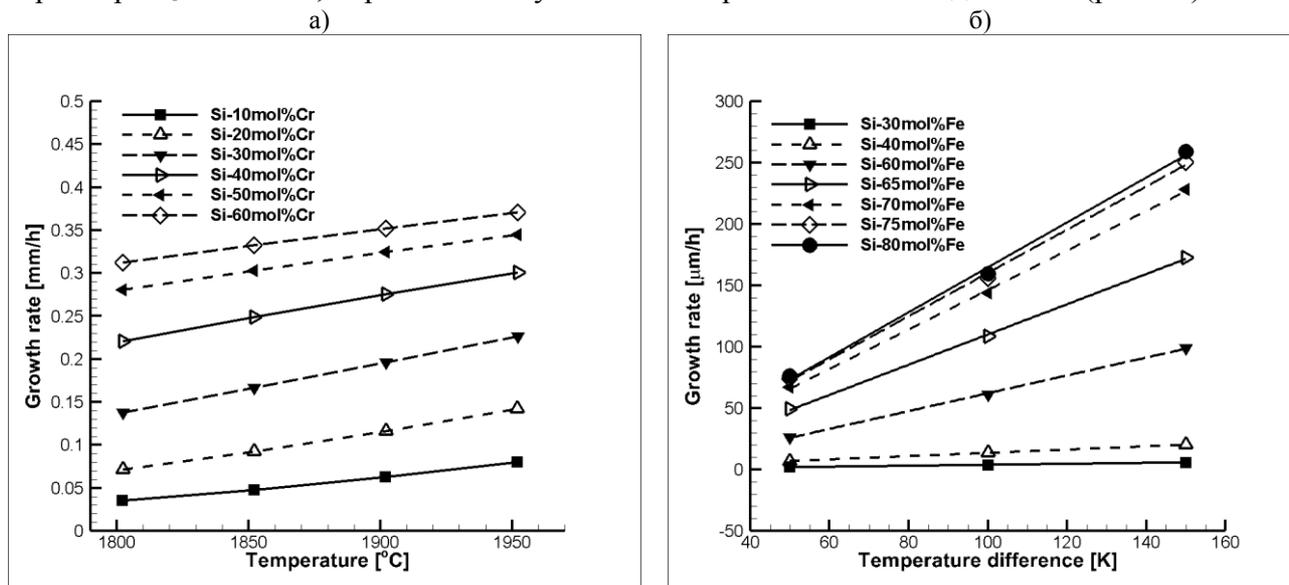


Рис. 3. Семейство кривых зависимости скорости роста кристалла карбида кремния
 а) от ростовой температуры при различном содержании хрома в расплаве и
 б) от перепада температур при различном содержании железа в расплаве

На рис. 3а представлено семейство кривых зависимости скорости роста кристалла карбида кремния от ростовой температуры, полученных при различном содержании хрома в расплаве. Как видно из полученных зависимостей, при повышении ростовой температуры скорость роста кристалла равномерно увеличивается для всех исследованных составов. При повышении содержания хрома в расплаве скорость роста кристалла сначала возрастает, а затем постепенно выходит на насыщение, что можно объяснить тем, что дальнейшее повышение мольной доли хрома не будет приводить к увеличению растворимости углерода в расплаве. На рис. 3б приведено семейство зависимостей скорости роста кристалла карбида кремния от перепада температуры между источником и затравкой при различном содержании железа в расплаве. При увеличении мольной доли железа в расплаве повышение перепада температуры приводит к большему изменению скорости роста кристалла, что следует из увеличения наклона аппроксимирующих прямых. Как и в задаче выращивания карбида кремния из раствора Si-Cr, с увеличением мольной доли железа в расплаве скорость роста кристалла сначала возрастает, а затем постепенно выходит на насыщение.

В результате данной работы показано, что при повышении содержания металлической добавки в расплаве скорость роста кристалла карбида кремния увеличивается и выходит на насыщение. Это коррелирует с выходом на насыщение растворимости углерода.

ЛИТЕРАТУРА:

1. Narumi T., Kawanishi S., Yoshikawa T., Kusunoki K., Kamei K., Daikoku H., Sakamoto H. Thermodynamic evaluation of the C-Cr-Si, C-Ti-Si, and C-Fe-Si systems for rapid solution growth of SiC // J. Crystal Growth. – 2014. – Vol. 408. – P. 25-31.
2. CGSim package for analysis and optimization // URL: <http://www.str-soft.com/products/CGSim/>
3. Kado M., Daikoku H., Sakamoto H., Suzuki H., Bessho T., Yashiro N., Kusunoki K., Okada N., Moriguchi K., Kamei K. High-Speed Growth of 4H-SiC Single Crystal Using Si-Cr Based Melt // Materials Science Forum. – 2013. – Vols. 740-742. – P. 73-76.
4. Kawanishi S., Yoshikawa T., Morita K., Okada N., Kusunoki K., Kamei K. Solution growth behavior of SiC by a temperature difference method using Fe-Si solvent // J. Crystal Growth. – 2013. – Vol. 381– P. 121-126.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ РАСХОДНЫХ ХАРАКТЕРИСТИК
ГАЗОВЫХ ГОРЕЛОЧНЫХ УСТРОЙСТВ

Основной характеристикой горелок для трубчатых печей нефтепереработки является мощность [1]. Зависимость мощности от давления в газовой магистрали может быть определена в ходе экспериментов или на основе численного моделирования. В случае использования на нефтеперерабатывающем заводе газа, отличающегося по составу от того, под который проектировали горелочное устройство, потребуется провести коррекцию исходной расходной характеристики.

Мощность горелки можно вычислить из низшей теплотворной способности газа, не зависящей от давления, и расхода, поэтому цель настоящей работы – определение расходных характеристик горелки, геометрия которой изображена на рис. 1, для газов разных составов. В газовом коллекторе горелочного устройства, показанном на рис. 1, дополнительно установлено гидравлическое сопротивление в виде диафрагмы.

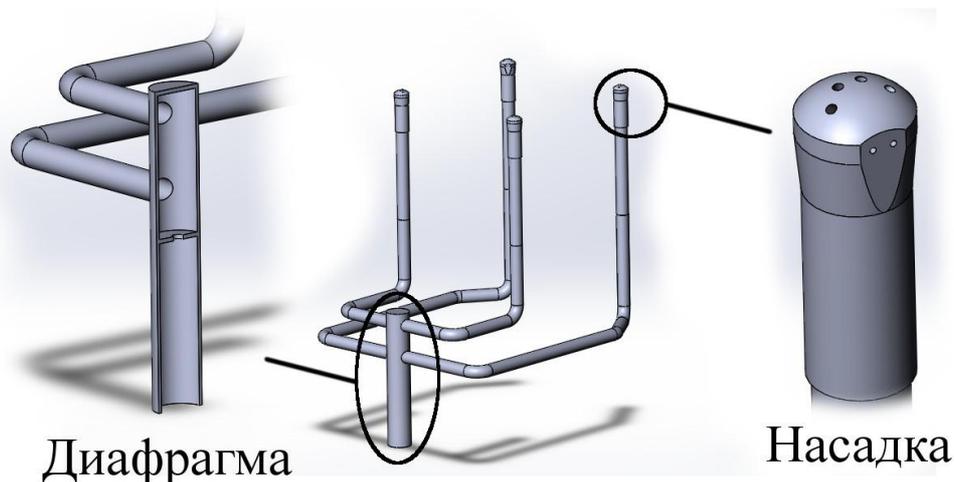


Рис. 1. Геометрия газового коллектора

Трехмерные расчеты проводились в программном пакете ANSYS Fluent [2]. Использовалась расчетная сетка со следующими характеристиками: 1.919 млн ячеек, 1.117 млн узлов. Рассматривалось турбулентное течение совершенного сжимаемого газа, процессы горения не моделируются. Для моделирования турбулентности применялась дифференциальная модель $k-\omega$ SST [3]. Граничные условия на входе и выходе заданы через давления. Давление на выходе из насадок полагается равным атмосферному.

Серия расчетов в ANSYS Fluent была проведена для разных газов (воздух, метан, водород) при разных значениях давления на входе (от 0 до 2 ати). По результатам расчетов оказалось, что при разных давлениях на входе, давление у насадок будет описываться линейным законом (1), независимо от состава газа:

$$p_2 = 0.4738p_1, \quad (1)$$

где p_1 – давление на входе в коллектор, а p_2 – давление перед насадками. Формула (1) позволяет учесть гидравлические потери на участке до насадок. По результатам расчетов, приведенным на рис. 2, видно, что расход газа зависит от его состава.

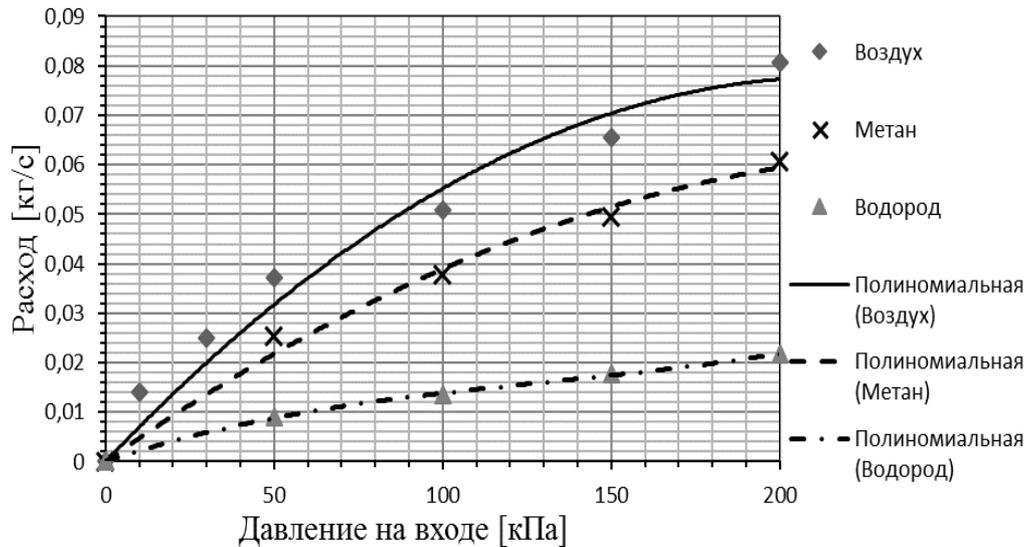


Рис. 2. Расходные характеристики для разных газов

Это также подтверждается уравнением (2), описывающим истечение идеального газа через малое отверстие [3]:

$$G = \mu F_0 \sqrt{2 \frac{k}{k-1} \frac{p_0 M}{RT} \left(\beta^{\frac{2}{k}} - \beta^{\frac{k+1}{k}} \right)}, \quad (2)$$

где G – расход газа [кг/с], p_0 – давление перед отверстием [Па], k – показатель адиабаты (для большинства газов $k = 1.4$), R – универсальная газовая постоянная [Дж/моль·К], T – температура газа [К], M – молярная масса газа [кг/моль], F_0 – площадь отверстия [м²], μ – поправочный коэффициент формы отверстия, β – отношение давления на выходе к давлению на входе в отверстие. Все константы и параметры, не зависящие от состава, температуры и давления газа, можно вынести в отдельный поправочный коэффициент μ_{Π} :

$$G = \sqrt{\frac{p_0 M}{RT} \left(\beta^{\frac{2}{k}} - \beta^{\frac{k+1}{k}} \right)} \left\{ \mu F_0 \sqrt{2 \frac{k}{k-1}} \right\} = \mu_{\Pi} \sqrt{\frac{p_0 M}{RT} \left(\beta^{\frac{2}{k}} - \beta^{\frac{k+1}{k}} \right)}. \quad (3)$$

Из формулы (3) через давление перед насадками и расход из результатов трехмерных расчетов (ANSYS Fluent) можно вычислить поправочный коэффициент. На рис. 3 показаны точки, полученные в ходе трехмерных расчетов (точки «Метан»), и результаты расчетов по формуле (3). По рисунку видно, что расчет поправочного коэффициента по одной точке имеет большую погрешность (график «По одной точке»), но вычисление поправки по большему числу данных приводит к хорошему совпадению (график «по множеству точек»).

Зависимость поправочного коэффициента линейная, поэтому можно её можно определить, используя две точки, полученные из трехмерных расчетов: при низком давлении и при высоком. На рис. 3 видно, что характеристика, вычисленная по двум точкам, практически не отличается от расчета по множеству точек.

Теперь сведем полученные результаты в следующий алгоритм:

- 1) Проводятся два трехмерных расчета: при высоком и при низком давлении на входе;
- 2) Определяется зависимость потерь давления до насадок от давления на входе;
- 3) Определяется зависимость поправочного коэффициента от давления перед насадками и вносится в уравнение (3);
- 4) Зависимости, полученные в пунктах 2 и 3, объединяются; в результате возможно определить зависимость расхода от давления для произвольного газа.

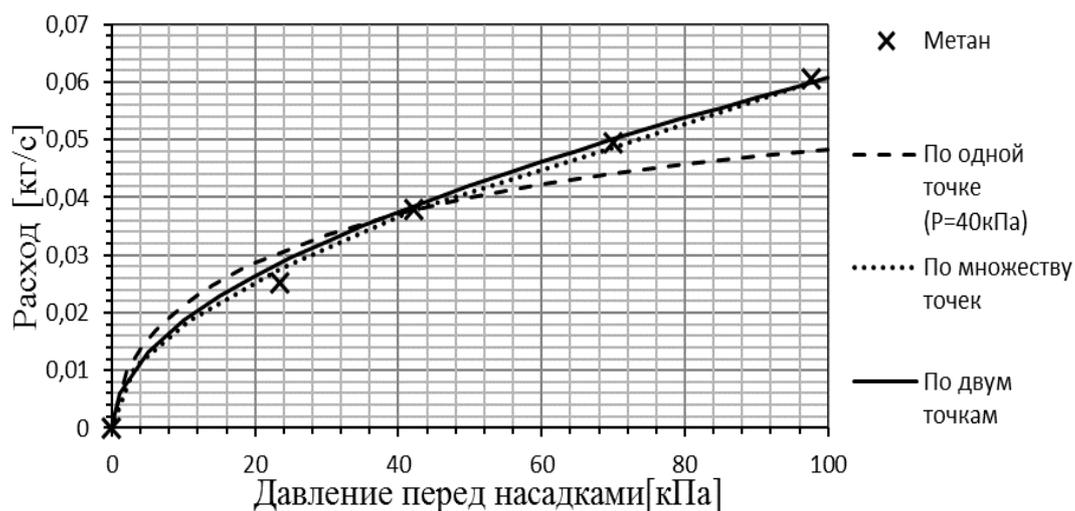


Рис. 3. Сравнение расчетов через поправочный коэффициент с данными трехмерных расчетов

Проверим работу алгоритма с экспериментальными данными для исследуемой горелки. Газ эксперимента имеет следующие характеристики: температура 393 К, молярная масса 14.33 г/моль, состав: CH_4 – 46%, C_2H_6 – 8%, C_3H_8 – 6%, C_4H_{10} – 6%, H_2 – 33%, N_2 – 0.5, H_2O – 0.5%. На рис. 4 видно хорошее совпадение расчета по алгоритму с экспериментом.

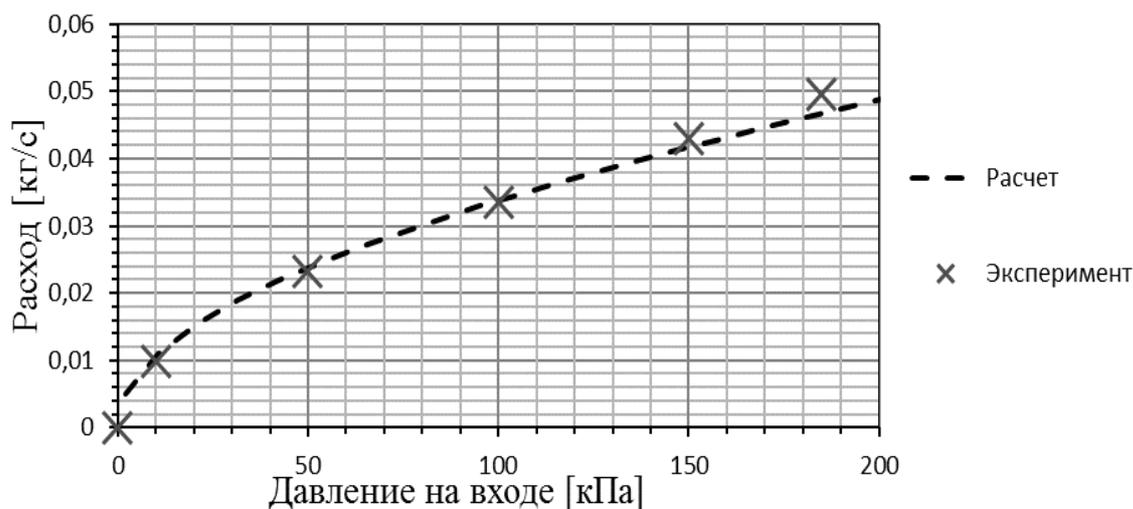


Рис. 4. Сравнение расчета по разработанному алгоритму с экспериментальными данными

В результате проделанной работы получен алгоритм для расчета расходных характеристик газовых горелочных устройств для произвольного состава, температуры и давления газа на основе двух трехмерных расчетов: при малом давлении и при максимальном.

ЛИТЕРАТУРА:

1. Жидков А.Б., Герасимов Д.П., Денисов Д.Е., Кравченко С.А., Масько А.В., Чистяков К.В., Хухрин Е.А. Трубчатые нагревательные печи нефтепереработки и нефтехимии. СПб.: АртПроект, 2015. 104 с.
2. ANSYS FLUENT 16.0 Theory Guide, ANSYS Inc., 2015.
3. Menter F.R. Two-Equation Eddy-Viscosity Turbulence Models for Engineering Applications // AIAA Journal. – 1994. – Vol. 32 (8). – P. 1598–1605.
4. Лойцянский Л.Г. Механика жидкости и газа. 7-е изд. М.: Дрофа, 2003. 840 с.

ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ СЖИМАЕМОГО ТУРБУЛЕНТНОГО ТЕЧЕНИЯ
В ОСЕРАДИАЛЬНОМ ДИФFUЗОРЕ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ RANS-ПОДХОДА

Осерадальный диффузор – один из элементов проточной части паровых и газовых турбин, конструкция которого значительно влияет на эффективность и эксплуатационные характеристики установок [1]. На современном этапе развития вычислительной гидродинамики существуют разные подходы к численному моделированию течений в подобных конструкциях, в том числе и активно развивающиеся в последнее время вихререзающие подходы. Однако сложность совокупной конструкции турбомшины обосновывает интерес к применению экономичной в вычислительном плане методики расчетов на основе осредненных по Рейнольдсу уравнений Навье-Стокса (RANS) конкретно к данному элементу турбины.

Рассматриваемый диффузор представляет из себя кольцевой канал с криволинейными образующими в выходном тракте осевой турбомшины, предназначенный для торможения потока, выходящего из последней ступени. Поток на входе в такой диффузор направлен вдоль оси турбомшины, а затем разворачивается в радиальном направлении. Резкий поворот приводит к образованию обширных зон рециркуляции потока и сложной структуры течения за поворотом, и от корректности воспроизведения отрыва и течения после него при использовании той или иной модели турбулентности будет зависеть уровень потерь энергии в диффузоре. Перечисленные сложности делают актуальным представляемое исследование.

В литературе имеется информация об экспериментальных исследованиях течения в осерадиальных диффузорах ([1] и другие работы), в то время как расчетные работы именно о течениях в диффузорах весьма малочисленны, чаще анализируются более сложные случаи взаимодействия различных элементов турбомшины (см, например, [2]). Ранее в СПбПУ проводились расчеты течения в рассматриваемом диффузоре, тогда в результате применения академического расчетного кода было получено [3] заметное завышение уровня потерь относительно экспериментальных значений.

В данной работе рассматриваются осесимметричные задачи о турбулентном течении совершенного газа в канале, геометрия которого соответствует экспериментально исследованному в [1] диффузору. Цель работы – проанализировать влияние особенностей постановки расчетов (выбор модели турбулентности, детализация расчетной сетки и т.д.) на получаемый уровень потерь.

Уравнения Рейнольдса и энергии замыкались полуэмпирическими моделями турбулентности Спаларта-Аллмараса (далее S-A, [4]) и SST Менгера (далее SST, [5]). Расчетная область, показанная на рис. 1, представляла из себя участок конфузорного течения, собственно диффузор, входное сечение которого расположено перед поворотом потока, и дополнительный участок для выравнивания радиального потока после диффузора. На рисунке отмечены начало и конец диффузора, а также показаны граничные условия. Течение в модели диффузора обеспечивалось перепадом давления между входом в расчетную область, где задавалось избыточное полное давление, и выходной границей, на которой фиксировалось среднее значение статического давления. Твердые стенки (втулка и обечайка) с условием прилипания считались адиабатическими. Температура на входе в расчетную область соответствовала нормальным условиям. Интенсивность турбулентности на входе – 0.5%, отношение турбулентной вязкости к молекулярной также было равно 0.5.

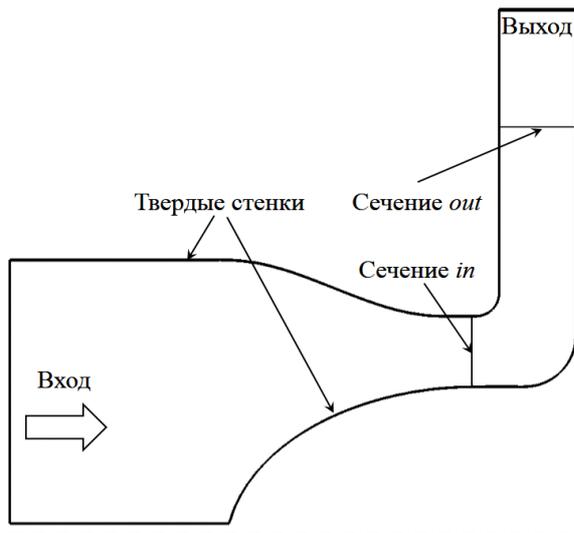


Рис. 1. Расчетная область и граничные условия

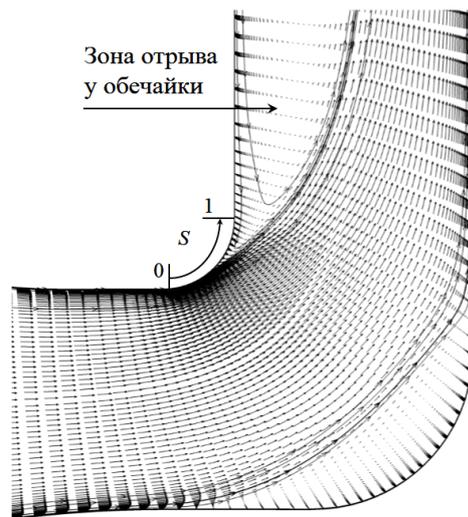


Рис. 2. Поле скорости ($Re_{in} = 1.8 \times 10^5$, $M_{in} = 0.5$)

Течение в диффузоре определяется числами Рейнольдса Re_{in} и Маха M_{in} . Число Рейнольдса определено как $Re_{in} = \rho_{in} v_{in} b / \mu$, где ρ_{in} и v_{in} – среднерасходные значения плотности и скорости газа, определяемые на входе в диффузор (сечение in), b – высота диффузора здесь же (расстояние от втулки до обечайки), μ – динамический коэффициент вязкости, считающийся постоянным по области течения. В представленных расчетах варьирование величины Re_{in} от 1.8×10^5 до 1×10^6 обеспечивалось варьированием величины μ . Число Маха M_{in} при этом изменялось в пределах 0.44-0.49, такое его изменение, согласно литературным данным, оказывает слабое влияние на потери. Коэффициент полных потерь в диффузоре определяются следующим образом:

$$\zeta = \frac{1 - (p_{out} / p_{0,in})^{(k-1)/k}}{1 - (p_{in} / p_{0,in})^{(k-1)/k}}.$$

Для расчетов использованы псевдоструктурированные сетки с ячейками в форме четырехугольников, согласованные с границами области течения, со сгущенными к твердым стенкам сеточными линиями. Плоские сетки меридионального сечения различной размерности поворотной трансляцией преобразовывались в секторные сетки толщиной 3 ячейки с углом раствора расчетной области по окружной координате 3° , а затем конвертировались в неструктурированный формат для загрузки в пакет ANSYS Fluent. Основные используемые сетки имели следующие параметры: сетка M1 размерности 107×135 , с максимальным значением $y^+_{max} = 0.65$ у обечайки при $Re_{in} = 10^6$ и отношением высоты диффузора к размеру наибольшей ячейки на входе в диффузор $\Delta_{in} = 25$. Измельченная сетка M2 содержала 214×270 узлов, $y^+_{max} = 0.33$, $\Delta_{in} = 50$. На обеих сетках отношение нормальных к стенке размеров соседних ячеек внутри пограничного слоя было равно $k = 1.15$. Кроме указанных, в процессе методического исследования расчеты проводились на ряде других сеток с размерностью от 70×70 до 107×135 и величиной k от 1.15 до 1.3. Общее число ячеек сетки M2 около 170 тысяч.

Расчеты выполнены на пакете ANSYS Fluent 16.0 [6]. Применялся совместный (coupled) метод решения уравнений, которые дискретизировались со вторым порядком точности.

На рис. 2 показано типичное поле скорости в диффузоре, полученное в расчетах. На входе в диффузор перед поворотом поток ускоряется у обечайки, и после изгиба канала

образуется обширная отрывная зона. Вторая зона отрыва наблюдается в угловой области вблизи втулки.

В табл. 2 указаны положения точки отрыва на обечайке s и среднерасходное значение отношения турбулентной вязкости к молекулярной на выходе из диффузора VR_{out} для разных вариантов расчетов. Относительная координата s отсчитывается от входа в диффузор до выхода на прямолинейный участок. Применение модели SST, приводящее к уменьшению турбулентной вязкости на 25%, дает решения с преждевременным отрывом. Измельчение сетки снижает величину VR_{out} на 5-10%.

Обобщение результатов расчетов по полным потерям ζ представлено на рис. 3. Разные уровни величины ζ согласуется с влиянием модели турбулентности на положение отрыва: ранний отрыв приводит к увеличению размеров рециркуляционной зоны и заметному росту потерь. Величина ζ напрямую связана с турбулентной вязкостью: если вязкость меньше за счет выбора модели турбулентности, неоднородности потока усиливаются, и это приводит к увеличению потерь. Для большинства расчетов, кроме выполненного по модели SST при $Re = 1 \times 10^6$, получено фактически сеточно независимое значение ζ . Отметим, что в экспериментах [1] при $Re = 1.8 \times 10^5$ получено $\zeta = 1.08$. Однако, в экспериментах давление p_{in} определялось приближенно, что может занижать потери на 20%. Представляется возможным снизить уровень потерь за счет вихререзающих методов моделирования турбулентности.

Табл. 1. Положение отрыва и турбулентная вязкость

Модель	Сетка	$Re_{in} = 1.8 \times 10^5$		$Re_{in} = 1 \times 10^6$	
		s	VR_{out}	s	VR_{out}
S-A	M1	0.394	881	0.528	4460
S-A	M2	0.407	832	0.568	4200
SST	M1	0.316	671	0.446	3480
SST	M2	0.333	607	0.448	3140

Примечание. Схема определения координаты точки отрыва показана на рис.2.

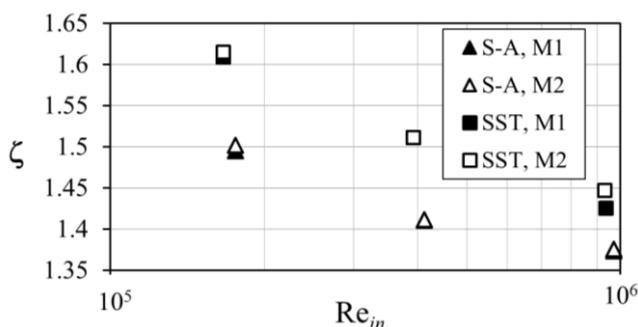


Рис. 3. Коэффициент полных потерь

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 17-08-00854).

ЛИТЕРАТУРА:

1. Мигай В.К., Гудков Э.И. Проектирование и расчет выходных диффузоров турбомашин, Л.: Машиностроение, 1981 г. – 266 с.
2. Liu, J.J., Hynes, T.P. The Investigation of Turbine and Exhaust Interactions in Asymmetric Flows. Part 2 – Turbine-Diffuser-Collector Interactions / In Proceedings of ASME TURBO EXPO, June 3-6, Amsterdam, the Netherlands, GT-2002-30343. – 2002. – 10 p.
3. Николаев М.А. Численное моделирование трансзвуковых пространственных течений вязкого газа в проточных частях турбомашин на основе CUSP схемы, Диссертация на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук, СПбГПУ, СПб., 2006 г. – 214 с.
4. Spalart P.R., Allmaras S.R. A one-equation $k-\omega$ turbulence model for aerodynamic flows // AIAA Paper, 1992. – 16 p.
5. Menter F. R., Kuntz M., and Langtry R. Ten Years of Industrial Experience with the SST Turbulence Model // Turbulence, Heat and Mass Transfer 4, ed: K. Hanjalic, Y. Nagano, and M. Tummers, Begell House, Inc. – 2003. – P. 625 - 632.
6. ANSYS FLUENT 16.0 Theory Guide, ANSYS Inc., 2015.

РЕЛАКСАЦИОННЫЕ ЯВЛЕНИЯ В ОДНОМЕРНОМ ПРИСТЕННОМ ТЕЧЕНИИ, ВОЗНИКАЮЩИЕ ПРИ ИЗМЕНЕНИИ СКОРОСТИ СПУТНОГО ПОТОКА

Задачи, связанные с релаксационными явлениями в одномерных пристенных течениях, представляют интерес как теоретический, так и практический, в частности, в задачах течения плёнки жидкости по поверхности при изменении внешних условий (например, скорости спутного потока). К известным теоретическим решениям подобных задач относятся первая задача Стокса, развитие течения Куэтта и др. [1]. С практической точки зрения особенности нестационарного процесса течения пленки конденсата по поверхности важны для корректного предсказания теплообмена, в случаях, например, конденсации движущегося насыщенного водяного пара или испарения движущейся плёнки жидкости в трубах. Подобные явления имеют место, в частности, при движении теплоносителя во втором контуре ядерного водо-водяного реактора атомной электростанции. При этом плёнка жидкости движется в основном под действием силы трения со стороны спутного потока пара, и при внезапном изменении скорости движения пара движение плёнки подстраивается с задержкой, время которой обусловлено релаксационными явлениями. Неучёт подобных явлений в численных расчётах может приводить к неправильному предсказанию характеристик теплообмена и даже к расходимости численного процесса. Особенно актуальна эта проблема при использовании одномерных теплогидравлических кодов, в которых движение плёнки жидкости и спутного потока пара анализируется на основе решения одномерных балансовых соотношений с введёнными корреляциями для коэффициента трения плёнки о стену. Примером является код КОРСАР [2], предназначенный в том числе для расчёта работы теплогидравлической системы в нештатных ситуациях, когда процесс теплообмена зачастую является существенно нестационарным.

Различают три режима течения пленки: ламинарное течение пленки с гладкой поверхностью раздела фаз, ламинарное течение с возникновением волн на поверхности и турбулентное течение. Переход от одного режима к другому зависит от числа Рейнольдса. При числе Рейнольдса, меньшем критического значения, течение в пленке является ламинарным. Случайные возмущения потока приводят к появлению волн на поверхности пленки, с ростом возмущений пленка может отрываться, течение переходит в турбулентное [3]. Задачи ламинарного течения пленки (без волнообразования) подобны таким имеющим аналитическое решение задачам, как нестационарное течение Куэтта, первая задача Стокса [4]. Решения нестационарных турбулентных задач (даже при использовании RANS моделей в пренебрежении эффектами волнообразования) значительно труднее. В работе [5] рассматривается турбулентное течение Куэтта и выводится простейшее аналитическое решение, в котором воспроизводится трёхслойная структура пристенного турбулентного течения.

Целью данной работы является численное исследование релаксационных явлений в ламинарном и турбулентном пристенном течении при внезапном изменении трения со стороны спутного потока в пренебрежении эффектами волнообразования. Для численного моделирования турбулентного режима течения (при помощи RANS подхода) используется открытый пакет OpenFOAM.

Как в случае ламинарного течения, так и в случае использования уравнений Рейнольдса с применением гипотезы Буссинеска для описания турбулентного переноса рассматривается одномерное нестационарное уравнение переноса:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial y} \left((v + v_t) \frac{\partial u}{\partial y} \right),$$

где v – кинематический коэффициент молекулярной вязкости, v_t – кинематический коэффициент турбулентной вязкости (в случае ламинарного течения $v_t \equiv 0$). Граничные условия на верхней и нижней границах записываются в виде:

$$(v + v_t) \frac{\partial u}{\partial y} \Big|_{y=\delta} = \frac{\tau_\delta}{\rho}, \quad u(y=0) = 0,$$

где τ_δ – значение напряжения трения со стороны спутного потока, δ – толщина слоя. Анализируется нестационарный процесс выхода на установившийся режим при задании начального поля скорости и других величин. В случае ламинарной задачи задаётся линейный профиль $u_0(y) = \beta u_\tau y / \delta$ ($\beta = 0$ соответствует изначально покоящейся среде), а для турбулентной постановки начальное поле скорости и других величин берётся из численного решения стационарной задачи, полученного в случае задания на верхней границе постоянного значения напряжения трения $\tau_0 < \tau_\delta$.

Для обезразмеривания представленной системы в качестве линейного масштаба выбирается толщина слоя δ , а в качестве масштаба скорости – динамическая скорость u_τ :

$$u_\tau = \sqrt{\tau_\delta / \rho}$$

Масштаб времени полагается равным δ / u_τ . Безразмерные переменные обозначены следующим образом: $u^+ = u / u_\tau$, $\bar{y} = y / \delta$, $t^+ = t u_\tau / \delta$.

Для ламинарной постановки получено следующее аналитическое решение (в безразмерной форме)

$$u^+(\bar{y}, t^+) = \text{Re}_\delta \bar{y} + \frac{8 \text{Re}_\delta (\beta - 1)}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(2n-1)^2} \sin(\pi(n-1/2)\bar{y}) \exp\left(-\frac{\pi^2(n-1/2)^2 t^+}{\text{Re}_\delta}\right)$$

Здесь $\text{Re}_\delta = \delta u_\tau / \nu$. Отметим, что представленное решение не зависит от Re_δ при выборе диффузионных масштабов: $\tau_{\text{diff}} = \delta^2 / \nu$, $u_{\text{diff}} = u_\tau^2 \delta / \nu$.

В численном моделировании для замыкания уравнений Рейнольдса использовалась модель Спаларта-Аллмараса. Было установлено, что процесс релаксации в первом приближении является автомодельным: профиль скорости, отнесённой к средней скорости течения в каждый момент времени, практически не меняется. Данный факт позволяет получить следующую зависимость напряжения трения на стенке τ_w от времени:

$$\bar{\tau}_w(t^+) = t h^2 \left(\frac{1}{2} \ln \frac{1 + \sqrt{\tau_0 / \tau_\delta}}{1 - \sqrt{\tau_0 / \tau_\delta}} + \frac{t^+}{u^+(\delta^+)} \right),$$

где $\bar{\tau}_w = \tau_w / \tau_\delta$, $\delta^+ = \delta u_\tau / \nu$, $u^+(\delta^+)$ – значение безразмерной скорости на верхней границе в установившемся течении.

Сравнение аналитической зависимости $\tau_w(t) / \tau_0$ с полученной в расчёте при разных числах Рейнольдса показано на рис. 1а. На рис. 1б представлена зависимость времени релаксации t^* в ламинарном и турбулентном режимах (время релаксации определяется по достижении τ_w значения $0.95 \tau_\delta$).

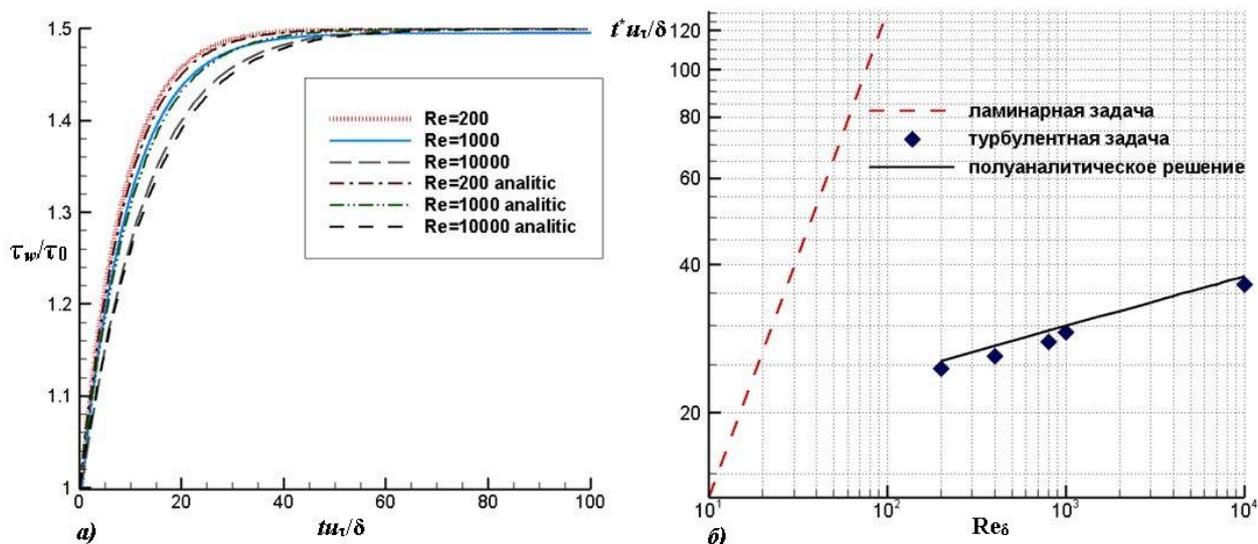


Рис. 1. а) Распределение коэффициента трения на стенке $\tau_w(t)$ при разных числах Рейнольдса в турбулентном режиме; б) безразмерное время релаксации $t^* u_v/\delta$ как функция числа Рейнольдса в ламинарном и турбулентном режимах

Таким образом, в работе проведено численное исследование релаксационных явлений в ламинарных и турбулентных пристенных течениях при изменении напряжения трения со стороны спутного потока. Получено аналитическое решение для ламинарного режима. В турбулентном режиме обнаружена некоторая автомодельность решения. Это позволяет получить полуаналитическую формулу зависимости напряжения трения на стенке от времени. Сравнение её с результатами расчётов показывает приемлемое согласие. Отметим, что в турбулентном режиме зависимость времени релаксации от числа Рейнольдса существенно более слабая.

Работа выполнена в рамках государственного задания Минобрнауки России (проект № 3.3314.2017/4.6).

ЛИТЕРАТУРА:

1. Шлихтинг Г. Теория пограничного слоя. М.: Наука, Гл. ред. физ-мат. лит., 1974. 712 с.
2. Василенко В.А., Мигров Ю.А., Волкова С.Н., Юдов Ю.В., Данилов И.Г., Кортаев В.Г., Кутьин В.В., Бондарчик Б.Р., Бенедиктов Д.В. Опыт создания и основные характеристики теплогидравлического расчётного кода нового поколения КОРСАР // Теплоэнергетика. – 2002. – № 11. – С.11-16.
3. Chang Hen-hong, Demekhin E.A. Complex Wave Dynamics on Thin Films. Volume 14. Elsevier, 2002. 412 p.
4. Langlois W.E., Deville M.O. Slow Viscous Flow. Springer, 2014. 324 p.
5. Trinh Kh. T. Turbulent Couette flow: an analytical solution / In: Chemeca 2012: Quality of life through chemical engineering, 23-26 September 2012, Wellington, New Zealand. 16 p.

ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ВОЗМУЩАЮЩЕГО ДЕЙСТВИЯ КРУГОВОГО ЦИЛИНДРА НА ПРИСТЕННЫЙ СВОБОДНОКОНВЕКТИВНЫЙ ТУРБУЛЕНТНЫЙ ПОГРАНИЧНЫЙ СЛОЙ

Введение. Для многих технических устройств характерны течения с подковообразными вихревыми структурами, формирующимися при взаимодействии пограничного слоя с трехмерным препятствием. Такого рода течения хорошо исследованы для случая вынужденной конвекции; типичными примерами являются области сочленения крыльев с фюзеляжем или торцевые области турбинных решеток [1]. Имеется успешный опыт применения различных расчетных методов к изучению структуры таких течений, в том числе осредненных по Рейнольдсу уравнений Навье-Стокса (RANS). В частности, в [2] при применении SST $k-\omega$ модели турбулентности было получено хорошее согласование с данными детальными экспериментами [3]. Наряду с течениями, особенности которых определяются внешним потоком, в ряде случаев определяющей становится роль динамических процессов в свободно-конвективных пограничных слоях. Базовой моделью в данном случае служит вертикальная нагретая поверхность. При взаимодействии свободно-конвективного пограничного слоя с трехмерным препятствием также создаются условия для формирования подковообразных вихрей. Цель настоящей работы – анализ особенностей такого течения.

Постановка задачи. Рассматривается стационарное турбулентное течение вязкой жидкости около кругового цилиндра диаметром d , закрепленного нормально к вертикальной изотермически нагретой относительно внешнего пространства стенке, при числе Прандтля $Pr = 0.7$. Для моделирования свободной конвекции используется приближение Буссинеска, сводящее задачу к расчету течения несжимаемой жидкости при наличии массовой силы, пропорциональной перепаду температур. Общий вид течения и геометрия расчетной области представлены на рис. 1.

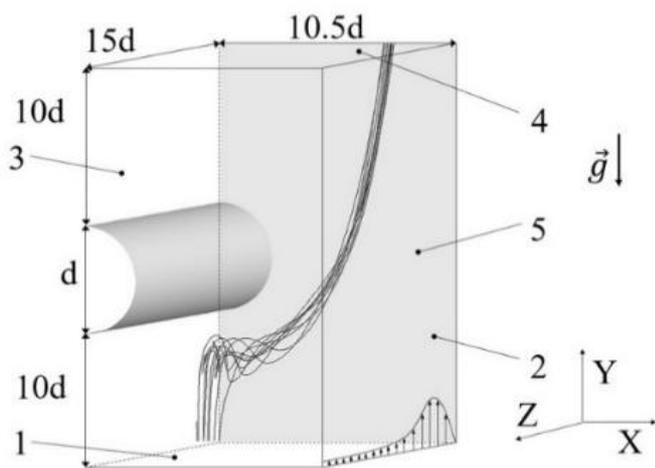


Рис. 1. Схема течения и расчетная область:
1 – входная граница; 2, 3 – плоскости симметрии;
4,5 – выходные границы

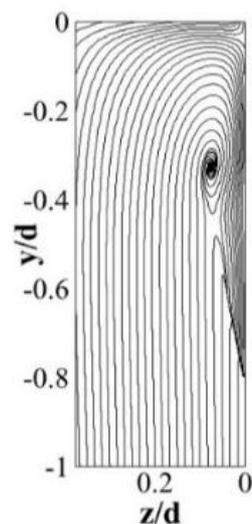


Рис. 2. Линии тока в плоскости симметрии в месте сочленения пластины с цилиндром

Течение полагается симметричным относительно срединной плоскости, перпендикулярной пластине. Расчетная область имеет форму прямоугольного параллелепипеда с ребрами, параллельными осям координат. Входная граница располагается на расстоянии $10.5d$ выше по потоку от передней кромки цилиндра, а выходная – симметрично ей относительно оси цилиндра. Расстояние от оси цилиндра до боковой границы $X = \text{const}$ выбрано равным $10.5d$. Граница $Z = \text{const}$ параллельна пластине и отнесена от нее на расстояние $15d$.

Во входном сечении задаются профили скорости, температуры и параметров турбулентности, полученные в результате расчетов развития двумерного свободно-конвективного пограничного слоя на нагретой пластине. Сечение пограничного слоя выбрано таким образом, чтобы число Грасгофа для невозмущенного пограничного слоя в сечении, соответствующем расположению оси цилиндра, было равно

$$Gr_{\delta} = \frac{g\beta\Delta T\delta^3}{\nu^2} = 1.46 \times 10^6. \text{ Здесь } \Delta T \text{ – разность температур пластины } T_w \text{ и внешнего}$$

пространства T_a , δ – интегральная толщина пограничного слоя, $\delta = \int_0^{\infty} \frac{u}{U_m} dz$. В настоящих расчетах $\delta/d = 3$.

На адиабатической поверхности цилиндра и изотермически нагретой пластине ставятся условия прилипания. На выходной границе и плоскости, параллельной пластине, ставятся мягкие граничные условия. Движение потока через эти проницаемые границы может осуществляться как в прямом, так и в обратном направлении. На случай втекания на этих границах задана постоянная температура T_a , а также интенсивность турбулентности 0.1% и отношение турбулентной вязкости к молекулярной $\mu_t/\mu = 0.1$. Турбулентное число Прандтля принято равным 0.85 .

Вычислительные аспекты. Расчеты на основе RANS-подхода выполнены с использованием SST $k-\omega$ модели турбулентности. Для проведения расчетов использовался коммерческий CFD пакет ANSYS Fluent 16.2. Для расчетов использовалась расчетная сетка с общим числом ячеек около 1.2 миллиона, состоящая из блоков O- и H- типа. Сгущение сетки к твердым поверхностям было выполнено таким образом, чтобы обеспечить форму ячеек вблизи оси подковообразного вихря, близкую к кубической, с характерным размером ячейки Δ^* таким, что $d/\Delta^* \approx 25$.

Расчеты пограничного слоя. Для получения профилей величин в развитом турбулентном свободно-конвективном пограничном слое были проведены предварительные расчеты развития слоя на длинной пластине. Область расчета включала участки под пластиной и над ней, последнее было сделано для устранения обширной зоны возвратного течения, образующейся над пластиной вблизи ее верхнего края. Расчетная сетка была сгущена к передней кромки пластины для корректного разрешения течения.

Целью вспомогательных расчетов было получение профилей величин в развитом турбулентном свободно-конвективном пограничном слое, соответствующем условиям экспериментов [4]. Анализ поля течения показал, что формальное применение определения δ приводит к сильной зависимости величины δ от ширины области интегрирования.

Интегральная толщина пограничного слоя – понятие, введенное для вязкого пограничного слоя, однако настоящие результаты были получены решением уравнений Навье – Стокса, а не системы уравнений пограничного слоя. В данном случае решение содержит две области: вязкий подслой и практически невязкое внешнее течение, вызванное подтоком жидкости к пограничному слою. Для снижения вклада внешней невязкой области в качестве верхнего предела интегрирования в формуле (1) разумно использовать толщину

температурного слоя, которая определяется по температуре, меняющейся на 1% от величины перепада между стенкой и внешним пространством.

Искомое значение $Gr_\delta = 1.46 \times 10^6$ достигается при определенном по расстоянию от передней кромки пластины $Gr_y = 2.28 \times 10^{11}$. Максимальное значение отношения турбулентной вязкости к молекулярной в этом сечении составило $\mu_T/\mu = 51$. Профили величин, заданные на входе в расчетную область основной задачи, соответствуют сечению, расположенному на $10.5d$ выше по потоку от данного.

Результаты трехмерных расчетов. Свободно-конвективное течение около кругового цилиндра, закрепленного по нормали к вертикальной пластине, происходит с образованием подковообразных вихрей в пограничном слое в угловой области сочленения цилиндра и пластины. Дело в том, что наличие цилиндра приводит к возникновению встречного перепада давлений, и на расстоянии $0.831d$ выше по потоку от цилиндра происходит отрыв пограничного слоя. В непосредственной близости от поверхности цилиндра возникает возвратное течение.

На рис. 2 приведена картина линий тока в плоскости симметрии перед цилиндром, на которой отчетливо видно наличие вихря. Его ось находится на расстоянии $0.321d$ от поверхности цилиндра. На картине донных линий тока (рис. 3а) видны линия отрыва и след вихря на поверхности пластины. На рис.3б здесь же показано распределение коэффициента трения C_f , трение нормировано на величину для невозмущенного пограничного слоя в сечении, соответствующем расположению оси цилиндра.

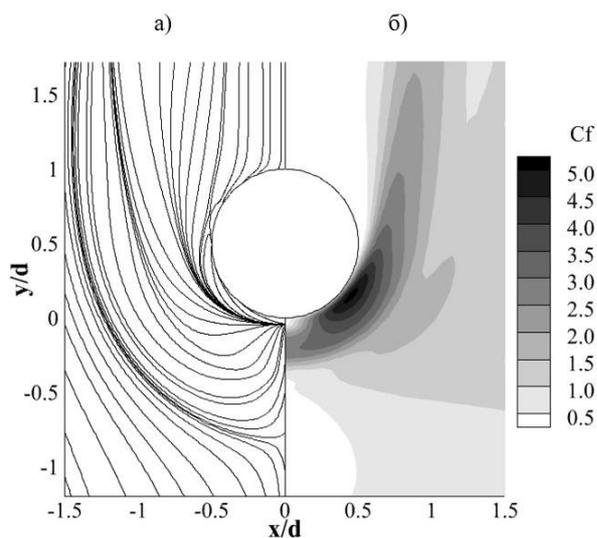


Рис. 3. (а) Донные линии тока и (б) распределение коэффициента трения на пластине вблизи поверхности цилиндра

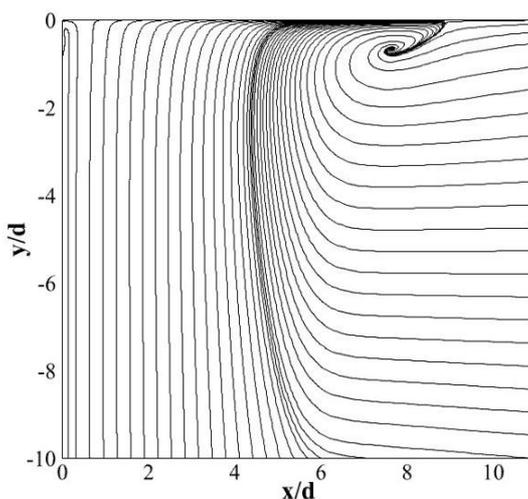


Рис. 4. Общая картина линий тока в плоскости симметрии

Вблизи проницаемой границы $Z = \text{const}$ располагается обширная зона медленного подтекания к пластине. Наличие зоны повышенного давления в угловой области приводит к развороту потока, подтекающего к пластине вдоль цилиндра, и образованию дополнительного подковообразного вихря, который хорошо виден на рис. 4.

Заключение. Выполнены тестовые расчеты трехмерного турбулентного течения в области сочленения кругового цилиндра с изотермически нагретой вертикальной пластиной, на поверхности которой развивается свободно-конвективный пограничный слой. Наличие препятствия создает условия для отрыва потока и формирования подковообразного вихря. Пристенное пространственное течение вблизи цилиндра имеет комплексную структуру. Выявлено наличие дополнительного, расположенного вне пограничного слоя подковообразного вихря. Его образование обусловлено медленным подтеканием жидкости к пластине вдоль цилиндра, продолжающегося до внешней границы расчетной области.

ЛИТЕРАТУРА:

1. Simpson R.L. Junction flows // Annual Review of Fluid Mechanics. – 2001. – Vol.33. – P.415–443.
2. Levchenya A.M., Smirnov E.M., Goryachev V.D. RANS-based numerical simulation and visualization of the horseshoe vortex system in the leading edge endwall region of a symmetric body // Int. J. Heat Fluid Flow. – 2010. – Vol.31, Iss.6. – P. 1107-1112.
3. Praisner T.J., Smith C.R. The Dynamics of the Horseshoe Vortex and Associate Endwall Heat Transfer – Part II: Time-Mean Results // ASME Journal of Turbomachinery. – 2005. – Vol. 128. – P. 755-762.
4. Tsuji, T., Nagano, Y. Characteristics of a turbulent natural convection boundary layer along a vertical flat plate // Int. J. Heat Mass Transfer. – 1988. – Vol. 31, No. 8. – P. 1723-1734.

УДК 532.517

М.А. Засимова, Н.Г. Иванов

Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого

ЧИСЛЕННОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ ВЕНТИЛЯЦИОННОГО ТЕЧЕНИЯ ПРИ БОКОВОЙ СТРУЙНОЙ ПОДАЧЕ НА ОСНОВЕ МЕТОДА МОДЕЛИРОВАНИЯ КРУПНЫХ ВИХРЕЙ

При проектировании и оптимизации систем вентиляции и кондиционирования воздуха в помещениях общественных и производственных сооружений необходимо правильно организовать воздухообмен. Широко используются расчетные методы воздухообмена, основанные на интегральных оценках и балансовых соотношениях, отвечающих различным условиям раздачи приточного воздуха [1]. Однако, такие методы могут дать лишь приблизительную информацию об осредненных параметрах течения, которая не всегда является достоверной (например, для помещений со сложной геометрией). Для задач гидродинамики в настоящее время наиболее популярны методы предсказания течения, основанные на численном решении осредненных по Рейнольдсу стационарных и нестационарных уравнений Навье-Стокса (RANS/URANS подходы), замыкающихся полуэмпирическими моделями турбулентности. Тем не менее, вопрос о качестве результатов, полученных с помощью таких подходов для задач, связанных с воздухообменом, остается открытым. Валидация результатов RANS расчетов может осуществляться либо при непосредственном сравнении получаемых данных с физическим экспериментом, либо с привлечением более точных вихреразрешающих подходов к моделированию турбулентного движения [2, 3]. Настоящее исследование посвящено определению границ применимости вихреразрешающего подхода WMLES для одной из тестовых задач вентиляции.

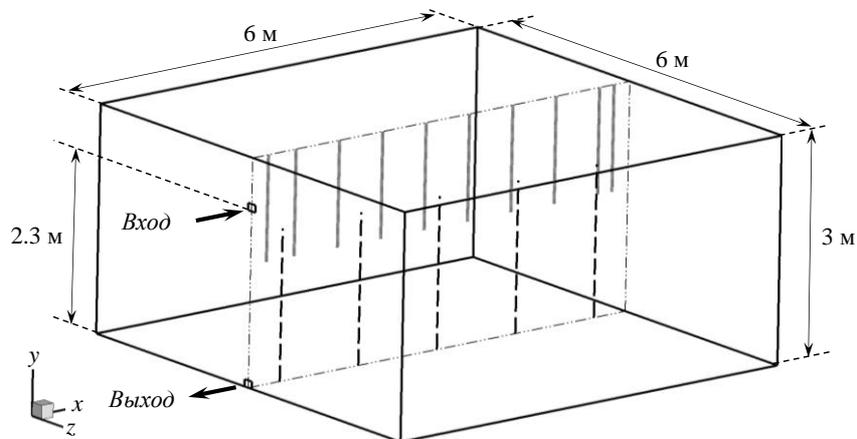


Рис. 1. Геометрия расчетной области; на схеме изображены линии, вдоль которых сопоставляются данные расчета и эксперимента [2] ($z = 3$ м)

Представляются результаты численного моделирования струи воздуха при температуре 15°C ($\rho = 1.2 \text{ кг/м}^3$, $\mu = 1.8 \times 10^{-5} \text{ кг/м}\cdot\text{с}$), истекающей в помещение, схематически изображенное на рис. 1. Ширина и длина помещения составляют 6 м, его высота – 3 м. На вертикальной стороне помещения располагаются прямоугольные входное и выходное отверстия с размерами $b \times h = 14.4 \times 9.6 \text{ см}$. Во входное отверстие воздух попадает через сужающееся сопло. Среднерасходная скорость в отверстии равна $U_{\text{bulk}} = 5.16 \text{ м/с}$. Число Рейнольдса, построенное по высоте входного отверстия, составляет $Re = h U_{\text{bulk}} / \nu = 48300$. Такая постановка задачи соответствует условиям эксперимента [4].

Моделирование турбулентного течения воздуха осуществлялось на основе вихререзающего подхода WMLES [5] – метода крупных вихрей с пристеночным моделированием, который основывается на решении отфильтрованных уравнений Навье-Стокса. Актуальные переменные, f , в уравнениях заменяются на сумму “отфильтрованных” и “подсеточных” переменных $f = \tilde{f} + f'$, к полученным уравнениям применяется процедура фильтрации. Величина \tilde{f} определяется выражением:

$$\tilde{f}(x, t) = \int_{\text{Vol}} G(x - x', \Delta) f(x', t) dx'^3 \quad (1)$$

где $G(x - x', \Delta)$ – функция фильтра, x – координата рассматриваемой точки, а Δ – характерный размер фильтра. Для несжимаемой жидкости с постоянными физическими свойствами отфильтрованные уравнения можно записать в виде:

$$\begin{cases} \nabla \cdot \vec{V} = 0 \\ \frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + \nabla \cdot (\vec{V}\vec{V}) = -\frac{1}{\rho} \nabla \cdot p + 2\nu(\nabla \cdot \underline{S}) - \nabla \cdot \underline{\tau}^{SGS} \end{cases} \quad (2)$$

где \vec{V} – вектор скорости с компонентами (u, v, w) , \underline{S} – тензор скоростей деформации, а $\underline{\tau}^{SGS}$ – слагаемое, получившееся в результате пространственной фильтрации уравнений. Для его определения используется обобщенная гипотеза Буссинеска:

$$\tau_{ij}^{SGS} - \frac{1}{3} \tau_{kk} \delta_{ij} = -2\nu_{SGS} S_{ij} \quad (3)$$

где ν_{SGS} – подсеточная турбулентная вязкость, определяющаяся модифицированной моделью Смагоринского:

$$\nu_{SGS} = \min \left\{ (\kappa d_w)^2, (C_S \Delta)^2 \right\} |S - \Omega| \left(1 - \exp \left\{ (-y^+ / 25)^3 \right\} \right) \quad (4)$$

где $C_S = 0.2$ – константа Смагоринского, S и Ω – модули тензора скоростей деформаций и завихренности, $\kappa = 0.41$ – постоянная Кармана, d_w – расстояние до ближайшей стенки, y^+ – нормированное расстояние от центра первой пристенной ячейки до стенки (для задачи не превышает 20). Величина Δ определяется по формуле:

$$\Delta = \min \left\{ \max (C_w d_w, C_w \Delta_{max}, \Delta_{wn}), \Delta_{max} \right\} \quad (5)$$

где Δ_{max} и Δ_{wn} – максимальный шаг сетки и шаг сетки в направлении нормали к обтекаемой поверхности в рассматриваемой точке, а $C_w = 0.15$ – эмпирическая константа.

В расчетах использовались квазиструктурированные сетки со сгущением ко входному и выходному отверстиям, и к стенкам. Общая размерность расчетных сеток составляет 16 и 35 млн ячеек. Показано, что при увеличении размерности сетки, осредненные по времени параметры течения практически не меняются.

Дополнительно, с целью корректного задания граничного условия на входе в помещение, решалась вспомогательная задача о стационарном течении воздуха в сужающемся сопле прямоугольного сечения. Длина сопла составляет 0.6 м, степень поджатия равна 3. Турбулентное течение моделировалось на основе RANS подхода, замыкающая модель – $k-\varepsilon$ в сочетании с пристенными функциями. Размерность расчетной

сетки для этой задачи составляет около 100 тыс. ячеек, параметры сетки аналогичны исходной задаче.

Численные расчеты выполнены с помощью программного комплекса ANSYS Fluent с использованием ресурсов суперкомпьютерного центра «Политехнический». Максимально одна задача распараллеливалась на 512 ядер. Дискретизация пространственных и временных производных была выполнена со вторыми порядками точности. Шаг по времени в расчетах брался равным 6×10^{-4} с (на расчетной сетке 16 млн ячеек) и 2.5×10^{-4} с (на расчетной сетке 35 млн ячеек), так, чтобы максимальное значение числа Куранта было меньше единицы. Продолжительность нестационарных выборок составила более 500 с (т.е. более 0.8 и 2 млн временных шагов соответственно на расчетных сетках размерностью 16 и 35 млн ячеек).

В результате проведенных расчетов показано, что вблизи входного отверстия формируется интенсивная круглая струя, натекающая на противоположную стенку (рис. 2). После разворота струи скорость потока заметно снижается (рис. 3), при этом формируется хаотичное, существенно трехмерное нестационарное течение. На графиках приведены сопоставления продольных значений осредненной по времени скорости в струе (рис. 2), а также профили полной скорости в области возвратного течения (рис. 3), полученные в результате численного расчета и эксперимента. Из графиков видно, что применение подхода WMLES позволяет получить достаточно точную картину течения в области струи – расчет правильно схватывает расширение струи вниз по течению, а также значение и положение максимума скорости в струе. В области пониженных скоростей согласование с экспериментом сохраняется, некоторые отличия наблюдаются вблизи нижней стенки помещения.

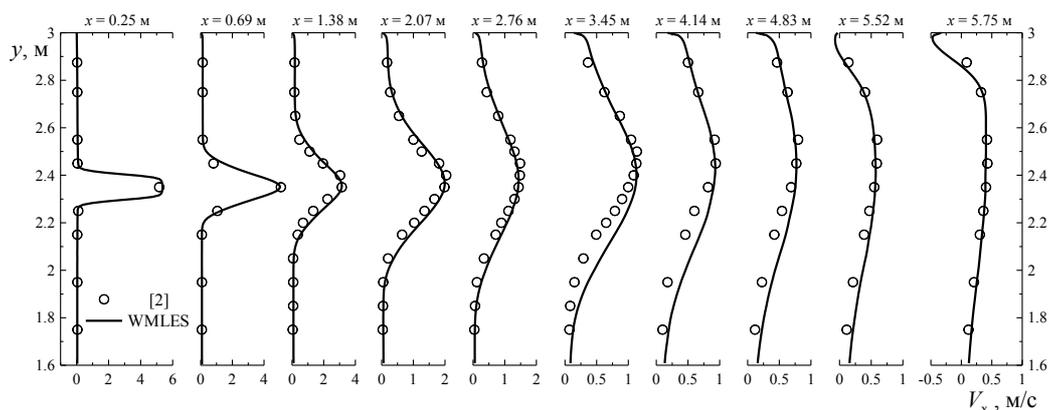


Рис. 2. Осредненные по времени профили x -компоненты скорости, построенные в области струи в срединном сечении помещения

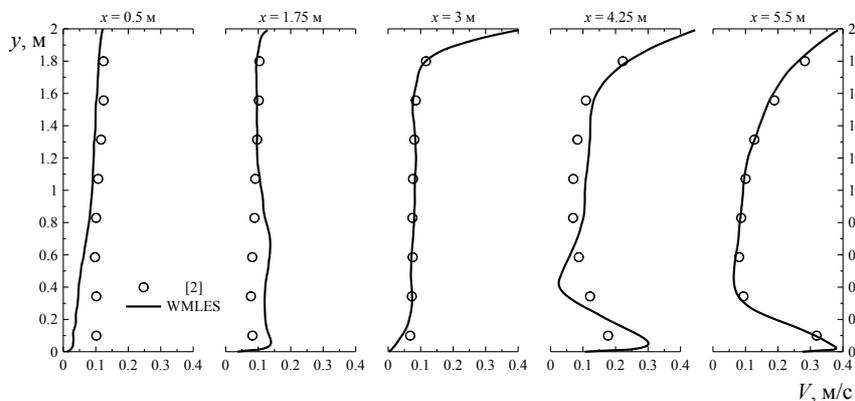


Рис. 3. Осредненные по времени профили полной скорости, построенные в области возвратного течения в срединном сечении помещения

ЛИТЕРАТУРА:

1. Гримитлин М.И. Распределение воздуха в помещениях. Изд. 3-е, доп. и испр. – СПб.: Авок Северо-Запад, 2004. – 320 с.
2. Jiang Y., Su M., Chen Q. Using Large Eddy Simulation to Study Airflows in and around Buildings // ASHRAE Transactions. – 2003. – Vol. 109 (2). – 16 p.
3. Smirnov E.M., Ivanov N.G., Telnov D.S., Son C.H. CFD modeling of cabin air ventilation in the International Space Station: a comparison of RANS and LES data with test measurements for the Columbus Module // Int. J. of Ventilation. - 2006. - Vol. 5, N 2. - P.219-228.
4. Hurnik M., Blaszcok M., Popiolek Z. Air distribution measurement in a room with a sidewall jet: a 3D benchmark test for CFD validation // Building and Environment. – 2015. – Vol. 93, part 2. – P. 319-330.
5. Shur M.L., Spalart P.R., Strelets M.K., and Travin A.K., A hybrid RANS LES approach with Delayed DES and Wall Modelled LES capabilities // International Journal of Heat and Fluid Flow. – 2008. – Vol. 29, Iss. 6. – P. 1638-1649.

УДК 536.7:544.341.2:519.6:661.487

А.Р. Зимин, Д.С. Пашкевич

Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого

ТЕРМОДИНАМИЧЕСКИ РАВНОВЕСНЫЙ СОСТАВ ВЕЩЕСТВ В СИСТЕМЕ ЭЛЕМЕНТОВ U-F-O-H

Введение. Гексафторид урана (ГФУ) UF_6 используют при изотопном обогащении урана в ядерном топливном цикле [1, 2]. В этом процессе в качестве побочного продукта образуется гексафторид урана, обеднённого по изотопу ^{235}U (ОГФУ). В настоящее время в России накоплено до 1 млн. тонн ОГФУ.

Одним из направлений переработки ОГФУ с целью получения коммерчески значимых соединений – безводного фторида водорода (БФВ) и диоксида урана (ДОУ) – может стать его восстановление в пламени водородсодержащего топлива и кислородсодержащего окислителя [3, 4].

Ранее авторами на основе термодинамических расчётов было показано, что в процессе

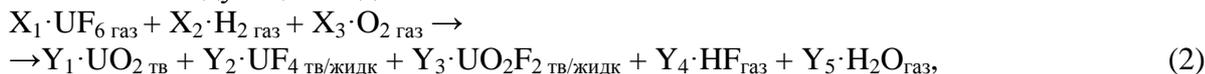
$$UF_{6\text{ газ}} + 3H_{2\text{ газ}} + O_{2\text{ газ}} \rightarrow UO_{2\text{ тв}} + 6HF_{\text{газ}} \quad (1)$$

температура продуктов превышает 1500 К и изменение энергии Гиббса отрицательно [3, 4]. Т.о. получение БФВ и ДОУ по схеме (1) термодинамически не запрещено.

В настоящей работе были проведены расчеты термодинамически равновесного состава веществ в системе элементов U-F-H-O в предположении, что наиболее термически стабильными соединениями в этой системе являются ДОУ, тетрафторидурана (ТФУ), диоксид-дифторидурана (ДОДФУ), вода и фторид водорода.

Расчеты проводили методом поиска минимума энергии Гиббса продуктов реакции по концентрации веществ для каждого значения температуры.

В общем виде процесс обработки ГФУ в кислород-водородном пламени можно записать в следующем виде:



где $X_1, X_2, X_3, Y_1, Y_2, Y_3, Y_4, Y_5$ – стехиометрические коэффициенты.

Соотношения между коэффициентами X_n и Y_n должны удовлетворять условию баланса атомов:

$$\text{для урана: } Y_1 + Y_2 + Y_3 = X_1, \quad (3)$$

$$\text{для фтора: } 4Y_2 + 2Y_3 + Y_4 = 6X_1, \quad (4)$$

$$\text{для водорода: } Y_4 + 2Y_5 = 2X_2, \quad (5)$$

$$\text{для кислорода: } 2Y_1 + 2Y_3 + Y_5 = 2X_3. \quad (6)$$

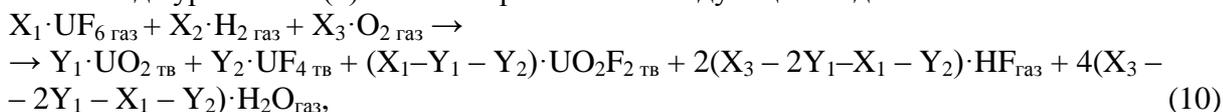
Выражая коэффициенты Y_3, Y_4, Y_5 через коэффициенты Y_1 и Y_2 получим:

$$Y_3 = X_1 - Y_1 - Y_2, \quad (7)$$

$$Y_4 = 2X_3 - 4Y_1 - 2X_1 - 2Y_2, \quad (8)$$

$$Y_5 = 4X_3 - 8Y_1 - 4X_1 - 4Y_2. \quad (9)$$

Тогда уравнение (2) можно переписать в следующем виде:



Для расчета равновесного состава продуктов процесса (10) при заданных X_n выбирали такое значение коэффициентов Y_1 и Y_2 , при котором значение энергии Гиббса продуктов было минимальным. Поиск минимума проводили с помощью программного пакета Mathcad 15. На входе программы задавали массив значений коэффициентов $Y_1, Y_2 = 0.001 n$, где $n = 0,1,2 \dots 1000$, при каждом выборе Y_1 и Y_2 строили столбец значений энергии Гиббса и методом сравнения определяли минимум.

Расчет энергии Гиббса осуществляли так же, как в [3, 4]. Значения теплоемкости выбирали на основании данных [5].

На рис. 1 и в табл. 1 приведены результаты расчета термодинамически равновесного состава веществ в зависимости от температуры по выше описанной методике для различных значений X_n .

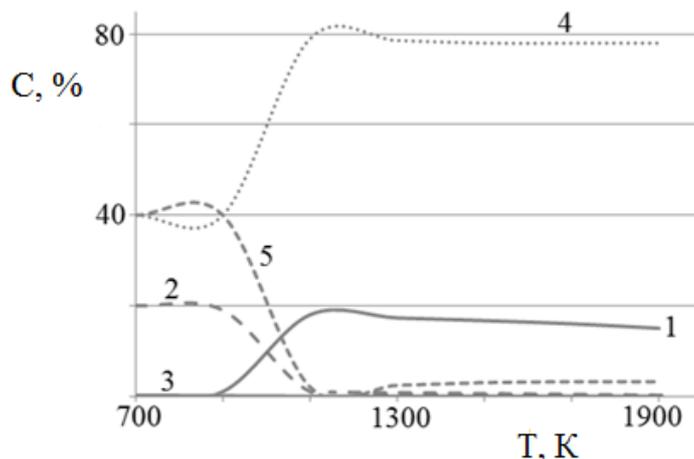


Рис. 1. Концентрации веществ C (мол.%) в термодинамически равновесной смеси соединений в системе элементов U-F-O-H при $X_1 = 1, X_2 = 3, X_3 = 1$ (уравнение (1)) в зависимости от температуры T (К). 1 – ДОУ, 2 – ТФУ, 3 – ДОДФУ, 4 – фторид водорода, 5 – вода

Табл. 1. Концентрации веществ C (мол.%) в термодинамически равновесной смеси соединений в системе элементов U-F-O-H в зависимости от температуры для различных значений X_n .

T, K	C, мол.%									
	UO ₂		UF ₄		UO ₂ F ₂		H ₂ O		HF	
	X ₁ =1 X ₂ =3 X ₃ =1	X ₁ =1 X ₂ =4 X ₃ =1,5	X ₁ =1 X ₂ =3 X ₃ =1	X ₁ =1 X ₂ =4 X ₃ =1,5	X ₁ =1 X ₂ =3 X ₃ =1	X ₁ =1 X ₂ =4 X ₃ =1,5	X ₁ =1 X ₂ =3 X ₃ =1	X ₁ =1 X ₂ =4 X ₃ =1,5	X ₁ =1 X ₂ =3 X ₃ =1	X ₁ =1 X ₂ =4 X ₃ =1,5
700	<0.1	<0.1	20.0	18.2	<0.1	<0.1	40.0	42.0	40.0	39.8
900	1.0	4.0	19.0	16.4	<0.1	<0.1	40.0	43.0	40.0	36.6
1100	17.0	15.3	0.9	3.2	<0.1	<0.1	1.5	13.9	80.6	67.6
1300	16.9	15.2	0.8	0.7	<0.1	<0.1	2.7	14.1	79.6	70.0
1500	16.7	14.8	0.3	0.2	<0.1	<0.1	3.5	14.7	79.5	70.3
1700	16.3	14.7	0.3	<0.1	<0.1	<0.1	3.9	15.2	79.5	70.1
1900	15.7	14.2	0.3	<0.1	<0.1	<0.1	4.2	15.4	79.9	70.4

Выводы.

На основе расчетов термодинамически равновесного состава веществ в системе элементов U-H-F-O показано, что при стехиометрическом соотношении компонентов по реакции (1) при температуре выше 1100 К практически единственным фторсодержащим веществом является фторид водорода, а практически единственным урансодержащим веществом – ДОУ. Содержание ТФУ в продуктах при этих условиях составляет десятые доли процента, содержание ДОДФУ – менее 0.1%.

При избытке в исходной смеси кислорода и водорода количество ТФУ менее 0.1% при температуре выше 1700 К.

Таким образом, обработка ОГФУ в пламени водородсодержащего топлива и кислородсодержащего окислителя может стать основой промышленного метода производства БФВ из ОГФУ.

ЛИТЕРАТУРА:

1. Тураев Н.С., Жерин И.И. Химия и технология урана. – М.: ЦНИИАТОМИНФОРМ, 2005. – 409 с.
2. Р.А.Крайденко. Технология гексафторида урана. Томский политехнический университет. URL: <http://tpu.ru/>.
3. Зимин А.Р., Пашкевич Д.С. Термодинамический анализ восстановления гексафторида урана в пламени водородсодержащего топлива и кислородсодержащего окислителя // Неделя науки СПбПУ: материалы научной конференции с межд. участием. Институт прикладной математики и механики. СПб.: Изд. Политехн. ун-та, 2016. – С. 149-151.
4. Зимин А.Р., Пашкевич Д.С. Термодинамические основы восстановления гексафторида урана в режиме горения // Тезисы докладов Юбилейной конференции Национального комитета РАН по тепло- и массообмену «Фундаментальные и прикладные проблемы теплообмена» и XXI Школы-семинара молодых учёных и специалистов под руководством академика РАН А.И.Леонтьева «Проблемы газодинамики и теплообмена в энергетических установках». 22-26 мая 2017 года, Санкт-Петербург. Том 2. – М.: Издательский дом МЭИ. 2017. – С. 25-26.
5. Глушко В.П. (ред.) Термодинамические свойства индивидуальных веществ. Справочное издание (3-е изд.). Т. 4. Кн. 1. – М.: Наука, 1979.

УДК 539.2

К.А. Иванов, А.Н. Воробьев

Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого

АНАЛИЗ ОБРАЗОВАНИЯ ДЕПОЗИТОВ В УСТАНОВКЕ ВЫРАЩИВАНИЯ КРИСТАЛЛОВ КРЕМНИЯ МЕТОДОМ ЧОХРАЛЬСКОГО

Для выращивания обладающих однородными физическими и химическими свойствами высококачественных объемных кристаллов с приемлемой плотностью дефектов решающее значение имеют процессы тепло- и массопереноса, связанные с химией расплава и газа. Экспериментальное исследование этих процессов затруднено из-за высокой температуры среды [1]. Численное моделирование роста кристаллов оказывается весьма полезным при разработке технологии и поиске эффективного способа управления тепло- и массообменом при росте кристаллов.

Метод Чохральского является наиболее распространенным методом выращивания объемных монокристаллов. По этому методу исходный материал (шихту) загружают в тугоплавкий тигель и при помощи СВЧ-излучения нагревают до расплавленного состояния. Затем затравочный кристалл в виде тонкого стержня диаметром в несколько миллиметров устанавливается в охлаждаемый кристаллодержатель и погружают в расплав. Столбик расплава, осуществляющий связь растущего кристалла с расплавом, поддерживается силой

поверхностного натяжения и формирует мениск между поверхностью расплава и растущим кристаллом. При этом граница расплав-кристалл (фронт кристаллизации), оказывается расположенной над поверхностью расплава. От формы границы расплав-кристалл зависит качество кристалла, т.е. совокупность его оптических, механических и электрических свойств. В процессе вытягивания кристалл и тигель вращают в противоположные стороны с целью перемешивания расплава и выравнивания температуры на фронте кристаллизации [2].

Одной из существенных проблем, возникающих при реализации метода Чохральского, является то, что, примеси, содержащиеся в кремниевом сырье и образующиеся в результате контакта расплава с тиглем, сильно влияют на эффективность моно- и поликристаллических кремниевых солнечных элементов. Кислород (O_2) и азот (N_2) в основном поступают из стенки кварцевого тигля и покрытия тигля, в то время как источниками углерода (C) являются главным образом элементы графитовой печи. Углерод, азот и кислород, растворенные в расплаве, могут взаимодействовать с кремнием (Si) и друг с другом, создавая такие преципитаты, как карбид кремния (SiC), нитрид кремния (Si_3N_4) [3, 4].

Кроме того, кислород в основном испаряется со свободной поверхности расплава и переносится в виде монооксида кремния (SiO) потоком аргона вниз по течению. При этом пары SiO химически реагируют с графитовыми элементами, генерируя такие побочные продукты, как монооксид углерода (CO) и Si в газовой фазе. В свою очередь, SiO , CO и Si становятся источниками SiC и Si паразитных отложений (депозитов) на горячих элементах печи, значительно сокращая срок службы нагревателя. Кварц (SiO_2) или SiO могут также осаждаться на низкотемпературные поверхности [5].

В данной работе проводится численное моделирование образования депозитов в лабораторной установке для выращивания кристалла кремния по методу Чохральского. Производится сопоставление результатов с экспериментальными данными.

На рис. 1 представлена расчетная область, которая включает графитовый нагреватель, графитовый тигель, находящийся на подставке, а также установленный внутри графитового тигля кварцевый тигель с шихтой. Тигли и нагреватель окружены изоляцией и размещены в стальном корпусе. Сверху в установку подавался аргон, который уносил образующийся на свободной поверхности расплава газ SiO . В верхней части печи, на держателях, установлен молибденовый экран конусообразной формы, который осуществляет поддержание температурного режима.

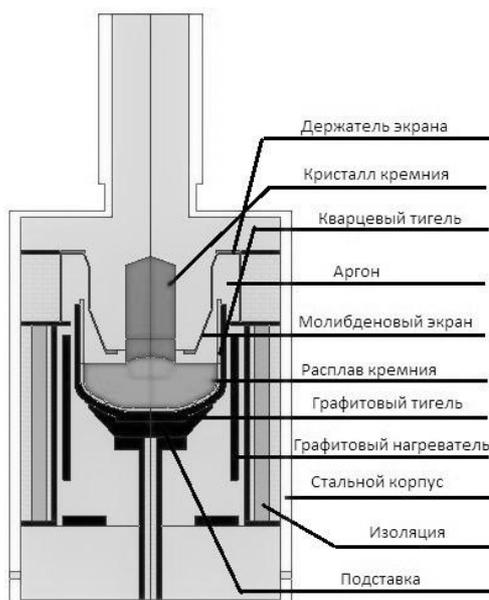


Рис. 1. Расчетная область

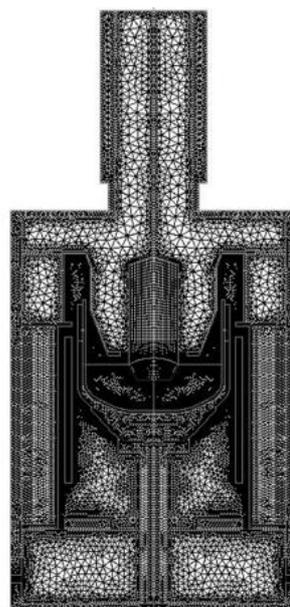


Рис. 2. Расчетная сетка

Расчеты проводились с использованием программного пакета CGSim (Crystal Growth Simulator), разработанного в STR Group и предназначенного для моделирования роста кристаллов. С помощью пакета можно получить информацию о наиболее важных с точки зрения процесса роста и качества кристалла физических процессах [6].

В работе решалась совместная задача теплообмена и массопереноса в газовых, твердых и жидких блоках, которая рассматривалась в осесимметричной стационарной постановке. Теплообмен учитывался как перенос за счет теплопроводности, так и теплового излучения. Массоперенос многокомпонентной газовой смеси возникал из-за неоднородности концентраций компонентов, при этом перенос вещества происходил из области с высокой концентрацией в область с низкой концентрацией. Смесь в целом переносилась за счет конвекции. В расплаве и газе рассчитывалось турбулентное течение.

Вся область разбивалась на ячейки, с помощью встроенного в программу CGSim генератора сеток Auto grid generator. На рис. 2 представлена расчетная сетка, состоящая из треугольных и четырехугольных элементов: в кристалле и затравке использовались четырехугольные элементы. Общее число ячеек составляет 18 тысяч.

На рис. 3 приведено сравнение фотографии экрана [7] (слева) и вычислительный прогноз скорости осаждения SiO_2 (справа). На рисунке стрелкой показано место, где депозит кварца появляется на экране (в виде яркого светлого кольца). Как видно из графика, расчет предсказывает образование депозита кварца в основном на держателе экрана, но проявление депозита непосредственно на экране также возможно.

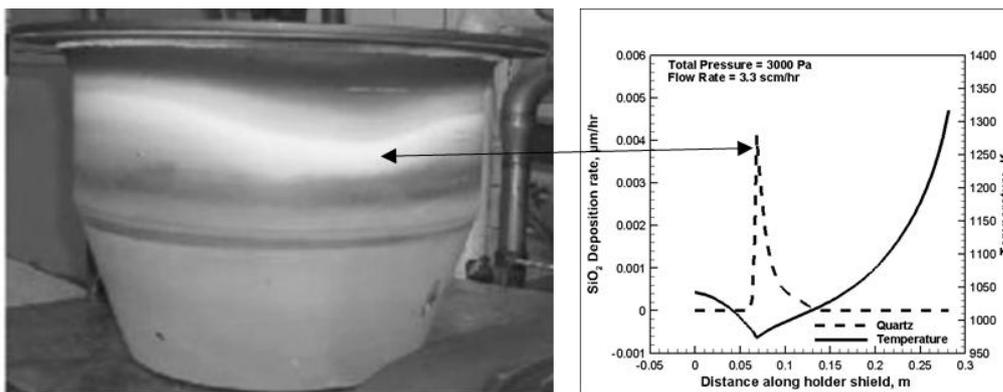


Рис. 3. Фотография [7] (слева) и вычислительный прогноз скорости осаждения SiO_2 (справа)

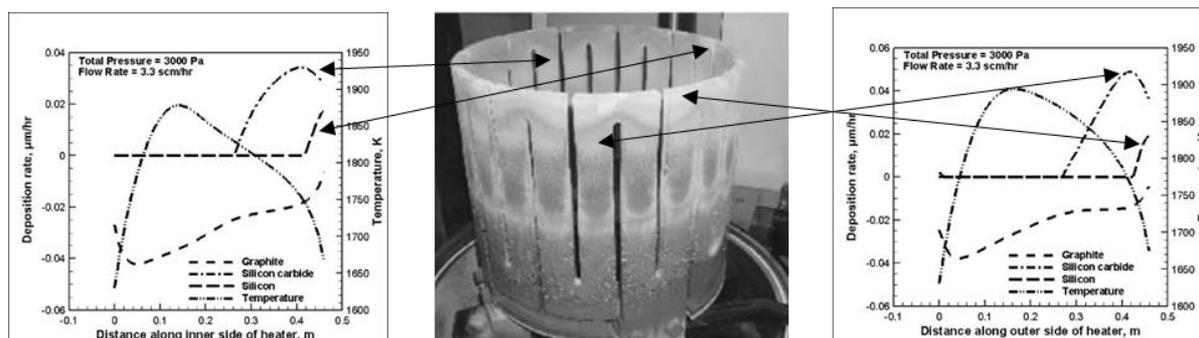


Рис. 4. Сравнение результатов расчета образования депозитов на внутренней (слева) и внешней (справа) стороне нагревателя с экспериментом [7] (в центре); на фотографии нагреватель перевернут относительно его расположения в ростовой установке

На рис. 4 представлено сопоставление численного предсказания скорости образования депозитов на внутренней (слева) и внешней (справа) стороне нагревателя с фотографией нагревателя, представленной в экспериментальной работе [7] (в центре). Депозит кремния

проявляется на экспериментальной фотографии в виде белых пятен в верхней части фотографии нагревателя (верхние стрелки). Проявляющиеся чуть ниже волнообразные серые пятна свидетельствуют о наличии паразитных отложений карбида кремния (нижние стрелки). Графики, полученные с помощью программного вычислительного пакета CGSiM, качественно согласуются с литературными экспериментальными данными.

ЛИТЕРАТУРА:

1. Vorob'ev A.N., Sid'ko A.P., Kalaev V.V. Advanced chemical model for analysis of Cz and DS Si-crystal growth // J Crystal Growth. – 2014. – Vol. 386. – P. 226-234.
2. Как выращивают кристаллы. Краткий обзор. [Электронный ресурс]
URL: http://ftfsite.ru/wp-content/files/medods_kristallov_5.2.pdf (дата обращения: 24.10.2017)
3. Liu L., Nakano S., Kakimoto K. // Carbon concentration and particle precipitation during directional solidification of multicrystalline silicon for solar cells // J Crystal Growth. – 2008 – Vol. 310. – P.2192-2197.
4. Hisamatsu S., Matsuo H., Nakano S., Kakimoto K. Numerical analysis of the formation of Si₃N₄ and Si₂N₂O during a directional solidification process in multicrystalline silicon for solar cells // J Crystal Growth. – 2009. – Vol. 311. – P. 2615-2620.
5. Smirnov A.D., Kalaev V.V. Development of oxygen transport model in Czochralski growth of silicon crystals // J Crystal Growth. – 2008. – Vol. 310. – P. 2970-2976.
6. CGSim – программный пакет для анализа и оптимизации роста полупроводниковых кристаллов по методам Чохральского и Бриджмена [Электронный ресурс]
URL: http://www.softimpact.ru/cgsim_rus.php (дата обращения: 24.10.2017)
7. Lan C.W. Recent progress of crystal growth modeling and growth control // Chemical Engineering Science. – 2004. – Vol. 59. – P. 1437-1457.

УДК 536.7: 544.341.2:519.6: 661.487.1

В.В. Капустин¹, Д.С. Пашкевич¹, Д.А. Мухортов², Ю.И. Алексеев², В.Б. Петров²

¹Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого

²Российский научный центр «Прикладная химия»

ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ СТАБИЛЬНОСТИ ФТОРИДА ВОДОРОДА В УСЛОВИЯХ ВЫСОКОТЕМПЕРАТУРНОГО ВОССТАНОВЛЕНИЯ ВОДЫ УГЛЕРОДОМ

Введение. Безводный фторид водорода (БФВ, содержание воды не более 0,06%) HF находит широкое применение в современной промышленности [1]. Его используют при производстве ядерного топлива, фторомономеров, озонобезопасных хладонов, электронных газов и др. Единственным промышленным методом получения БФВ является сернокислотное разложение природного минерала флюорита CaF₂, стоимость которого за последние три года увеличилась в два раза. Поэтому разработка альтернативных методов получения БФВ является весьма актуальной задачей.

В ряде отраслей промышленности в качестве побочного продукта образуется водный раствор фторида водорода, который при содержании HF 35-40% является азеотропным, и получить из него БФВ ректификацией невозможно. Например, при переработке гексафторида урана, обеднённого по изотопу 235, получают 40%-й азеотропный раствор фторида водорода, который не может быть использован в ядерном топливном цикле [2, 3].

В [4] описан способ дегидратации водного раствора фторида водорода серной кислотой, который реализуют при температуре до 200°C. В этом процессе образуется фторсульфоновая кислота, которая является суперкислотой [5], поэтому данный метод не получил широкого промышленного распространения.

В [6] было предложено получать фторид водорода из его водного раствора высокотемпературным восстановлением воды углеродом (реакция получения водяного газа):



Расчётами термодинамически равновесного состава веществ в системе элементов С-О-Н-Ф было показано, что при температуре выше 1000 К вода в этой смеси отсутствует, основным фторсодержащим веществом является фторид водорода, фториды и оксифториды углерода отсутствуют, т.е. фторид водорода в условиях проведения реакции (1) остаётся стабильным [6].

Целью настоящей работы являлось подтверждение результатов расчёта путём экспериментального определения состава газообразных, жидких и твёрдых продуктов взаимодействия газифицированной плавиковой кислоты (смеси фторида водорода и воды, в том числе азеотропной) с углеродом при температуре 1000-2000 К.

Лабораторное экспериментальное исследование. Для экспериментальной проверки стабильности фторида водорода в условиях высокотемпературного взаимодействия воды и углерода и отсутствия в продуктах фторидов и оксифторидов углерода была создана лабораторная установка, рис. 1.

Стальной цилиндрический реактор 1 объемом 20 литров с соотношением высоты и диаметра 1:0.6 был оборудован рубашкой охлаждения и системами подвода компонентов и отвода продуктов реакции. Подача в слой углерода плавиковой кислоты и кислорода осуществлялась с помощью двухкомпонентной толстостенной медной форсунки 2.

За распределением температуры в области выхода газа из форсунки наблюдали с помощью сканирующих и неподвижных хромель-алюмелевых термопар 3, установленных в никелевые трубки диаметром 6 мм. Предварительный разогрев слоя углерода осуществляли с помощью съёмного кварцевого электронагревателя 4. Температуру в слое углерода поддерживали на уровне 1000-1500 К, подавая в слой углерода вместе с плавиковой кислотой кислород.

В начале опыта в реактор загружали гранулированный графит с характерным размером частиц 500-2000 мкм. После этого включали съёмный электронагреватель. Когда температура в слое углерода достигала 900 К, нагревательный элемент извлекали из реактора и начинали подачу кислорода из баллона 5.

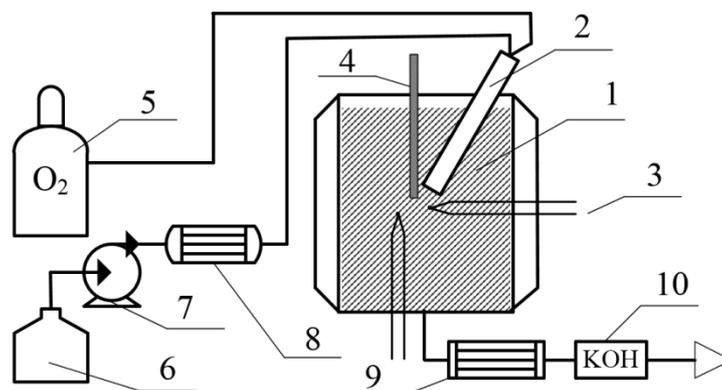


Рис. 1. Схема лабораторной установки

Затем из емкости 6 начинали подавать в высокотемпературную зону смесь воды и фторида водорода. Для этого использовали перистальтический насос 7, испаритель и перегреватель смеси фторида водорода и воды 8. Таким образом, в высокотемпературный слой углерода подавали газообразную смесь фторида водорода и воды.

На выходе газообразных продуктов из реактора был установлен конденсатор 9, в котором поддерживали температуру порядка -70°C . Сконденсированную жидкость

анализировали на содержание фторида водорода титрованием с использованием индикатора феноловый красный.

Газовый поток после конденсатора подвергали нейтрализации в щелочном абсорбере 10, затем отбирали пробы газа для хроматографического и спектрального анализа. Хроматографические анализы осуществляли с применением двух насадочных колонок и детектора по теплопроводности. Измерение объемной доли тетрафторметана, двуокиси углерода, азота и водорода проводили на колонке с сорбентом «ПорапакQ». Определение объемной доли окиси углерода - на колонке, заполненной молекулярным ситом 5А.

Концентрацию оксида-дифторида углерода определяли с помощью инфракрасной Фурье-спектроскопии с использованием прибора Shimadzu FTIR-8400S с разрешением 0.85 см^{-1} и размером кюветного отделения $200 \times 230 \times 170 \text{ мм}$.

После проведения опыта реактор продували инертным газом, углеродный материал охлаждали, перемешивали и отбирали пробу. Эту пробу помещали в герметичный сосуд и выдерживали при температуре $500\text{-}600^\circ\text{C}$ в течение 3 часов. Пробу взвешивали до и после нагревания и анализировали состав газовой фазы в сосуде после нагревания.

В опытах концентрацию фторида водорода в исходной смеси с водой меняли от 40 до 70 масс.%. Расход кислорода задавали на уровне $128 \text{ мг}\cdot\text{с}^{-1}$ и варьировали расход 40 %-й плавиковой кислоты в диапазоне от 16.3 до $52.0 \text{ мг}\cdot\text{с}^{-1}$. Расходы компонентов были выбраны так, чтобы тепловыделение экзотермической реакции окисления углерода кислородом было достаточным для разогрева компонентов до необходимой температуры и компенсации теплотеря в ходе эндотермической реакции получения водяного газа. Слой гранулированного графита при указанном расходе компонентов оставался неподвижным.

Было установлено, что при продолжительности опыта на уровне 3-4 часов максимальная регистрируемая термометрами температура достигала значения 1400°C , при этом можно предположить, что защитные чехлы термопар искажали поле температуры. Характерный размер зоны с температурой выше 1000°C по показаниям термопар составлял примерно 6 – 8 см. Распределение температуры в реакторе менялось мало, что, вероятно связано с лучистым потоком тепла от зоны реакции на форсунку.

В ёмкости 9 была собрана жидкость, которая представляла собой смесь воды и фторида водорода с содержанием последнего порядка 85-90%.

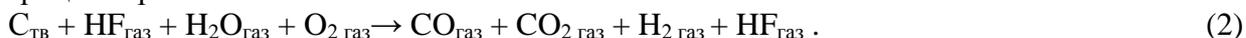
В составе газового потока после конденсатора 9 присутствовали метан, моно- и диоксид углерода, кислород, фторид водорода, вода и водород. Тетрафторид углерода и другие перфторуглероды, оксид-дифторид углерода и другие оксифториды углерода в газообразных продуктах процесса обнаружены не были с точностью до $10^{-2}\%$.

Исследованием образца углерода, извлечённого из реактора после опыта было показано, что фторид углерода $(\text{CF}_x)_n$ в нём отсутствует, а количество адсорбированного и интеркалированного углеродом фторида водорода не превышает 10% от поданного в реактор.

В жидких, газообразных и твёрдых продуктах процесса было обнаружено порядка 99% фторида водорода от поданного в реактор.

Таким образом, экспериментально подтверждено, что фторид водорода остаётся стабильным и не взаимодействует с углеродом и его оксидами в условиях восстановления воды углеродом при температуре порядка 1500 К .

Выводы. На основе проведенной экспериментальной работы можно утверждать, что фторид водорода остаётся стабильным при его контакте с углеродом в присутствии воды и кислорода при температуре $1000\text{-}2000 \text{ К}$, фториды и оксифториды углерода не образуются, т.е. процесс протекает по схеме:



Таким образом, способ (2) может быть рассмотрен в качестве основы промышленного обезвоживания водных растворов фторида водорода, в том числе азеотропных, с целью получения БФВ в режиме горения.

ЛИТЕРАТУРА:

1. Промышленные фторорганические продукты: Справ. изд. / Б. Н. Максимов, В. Г. Барабанов, И.Л. Серушкин и др. – Л.: Химия, 1990. – 464 с.
2. Местепи Д. Способ восстановления безводного фтористого водорода из обеднённого гексафторида урана. Патент РФ №2126362. Приоритет 21.01.1993.
3. Волоснёв А.В., Громов О.Б., Медведев М.В. и др. Способ получения безводного фтороводорода и плавиковой кислоты. Патент РФ №2447013. Приоритет 19.04.2010.
4. Eicher J., Rudolph W., Schulte B. Process for working up a hydrogen fluoride phase from a fluorination reaction mixture. United States Patent. 5,300,709, C07C 17/08, Apr.5, 1994.
5. Потехин В.М., Потехин В.В. Основы теории химических процессов технологии органических веществ и нефтепереработки. – Санкт-Петербург: Химиздат, 2007. – 944 с.
6. Капустин В.В., Пашкевич Д.С., Талалов В.А. Термодинамика равновесия веществ в системе элементов С-О-Н-F / Неделя науки СПбПУ: материалы научной конференции с межд. участием. Институт прикладной математики и механики. СПб.: Изд. Политехн. ун-та, 2016. – С. 152-154.

УДК 614.841

С.В. Козлов, В.В. Степанов

Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого

ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ ПИРОЛИЗА ПОЛИМЕРНЫХ МАТЕРИАЛОВ МЕТОДОМ КИСЛОРОДНОЙ СКАНИРУЮЩЕЙ МИКРОКАЛОРИМЕТРИИ

На протяжении последних нескольких лет нарастающими темпами увеличивается производство полимерных материалов, которые используются практически во всех сферах народного хозяйства. Это обусловлено особенностями конструкций этих материалов, обладающих легкостью, низкой теплопроводностью и высокой химической стойкостью [1]. Одной из важнейших характеристик материалов является их огнестойкость, то есть сопротивление воздействию пламени. Будучи органическими по своей природе, полимерные материалы представляют высокий потенциал для возникновения и распространения пожара, а также проявления опасных факторов пожара, приводящих к гибели людей и моральному ущербу. Ещё острее эта проблема стоит в транспорте, особенно в авиационном, где люди могут погибнуть только лишь из-за выделения дыма и ядовитых газов [2, 3].

В 2007 году в США была разработана новая экспериментальная методика МСС (Microscale Combustion Calorimetry) или РСFC (Pyrolysis Combustion Flow Calorimetry) [4], Русскоязычный вариант названия методики – кислородная сканирующая микрокалориметрия (КСМК). Изначально методика была разработана в Федеральном управлении гражданской авиации США (FAA) как инструмент термического анализа полимерных и композитных материалов, применяемых в авиационной промышленности [5]. Она позволяет оценить объективные индикаторы горючести и дает информацию для построения кинетической модели термического разложения. Важными преимуществами методики являются объективность, высокая воспроизводимость опытов, а также широкий диапазон управляемых входных данных.

Схема установки КСМК (РСF-калориметра) показана на рис. 1. Установка включает зону пиролиза и камеру сгорания, пространственно отделённые друг от друга. Принцип метода КСМК (рис. 2) заключается в разделении процесса горения исследуемого материала на пиролиз в потоке инертного газа (как правило, азота) и последующего окисления летучих

веществ, выделяющихся с горячей поверхности. Таким образом, создаётся имитация фундаментального процесса сгорания в малом масштабе: продукты разложения сгорают в кислороде.

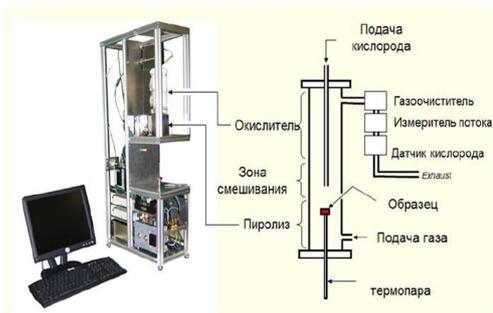


Рис. 1. Устройство установки КСМК (PCFC)

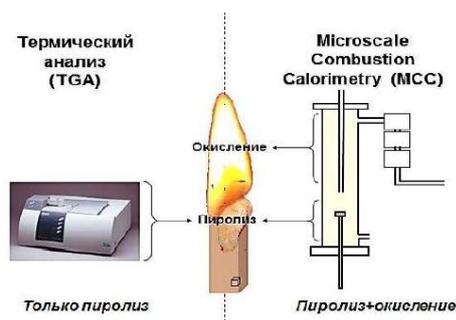


Рис. 2. Принцип КСМК в сравнении с ТГА

В данной работе с помощью метода КСМК, был исследован пиролиз полимерных материалов, таких как полипропилен и композитный материал; также, отдельно для полипропилена, на основании полученных данных, было произведено исследование в области формальной кинетики. Для реализации этих целей был проведен ряд опытов методом КСМК для образцов исследуемых полимерных материалов.

Создание кинетических моделей является одной из наиболее важных стадий в исследовании химических реакций [6]. Обычно модель формулируется на основе каких-либо соображений о механизме реакции исходя из доступной информации, после чего полная задача сводится к оцениванию параметров модели. Полученная модель может затем применяться для решения реальной практической задачи.

В основе кинетики лежит закон, который подчиняется фундаментальному выражению Аррениуса $r = A\phi(\alpha)\exp(-E_a/RT)$, где r – скорость реакции; T – абсолютная температура; R – универсальная газовая постоянная; E_a – энергия активации реакции; $\phi(\alpha)$ – кинетическая функция (зависит от типа реакции); α – конверсия.

Простейшей моделью служит одностадийная реакция $A \rightarrow B$; тогда имеем уравнение $d\alpha/dt = k_0 \cdot \phi(\alpha)\exp(-E_a/RT)$, где кинетическая функция $\phi(\alpha)$ в зависимости от типа реакций выражается как: $\phi(\alpha) = (1 - \alpha)^n$ – модель n -го порядка, $\phi(\alpha) = (1 - \alpha)^{n1}(\alpha^{n2} + z)$ – модель автокаталитической реакции (n – порядок реакции, z – константа автокатализа).

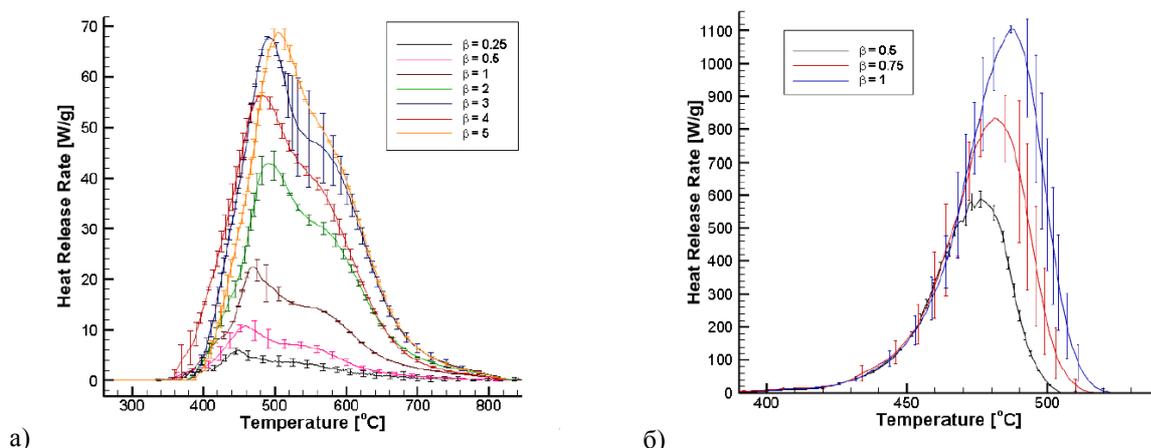


Рис. 3. Мощность тепловыделения при разных скоростях нагрева
а) композитного материала; б) полипропилена

Исследование проводилось в два этапа. Первоначально исследовалась мощность тепловыделения для композитного материала и полипропилена. Мощность тепловыделения (Heat Release Rate, W/g) является непосредственным выходным параметром. Опыты для композитного материала проводились при значениях скорости нагрева: 0.25, 0.5, 1, 2, 3, 4, 5 К/с; для полипропилена при значениях скорости нагрева: 0.5, 0.75, 1 К/с. Для статической достоверности, для каждой скорости нагрева было проведено несколько измерений, которые затем были усреднены. На рис.3 представлены графики зависимости мощности тепловыделения от температуры при разных скоростях нагрева для композитного материала и полипропилена. Полученные графики демонстрируют увеличение мощности тепловыделения с увеличением скорости нагрева. Это связано с тем, что с увеличением скорости нагрева увеличивается интенсивность пиролиза. Также из рис. 3. видно, что зависимость тепловыделения от температуры для композитного материала носит более сложный характер, в отличие от полипропилена. В связи с этим, исследование кинетики проводилось только для полипропилена.

Для вычисления кинетических параметров была использована программа FORK [6], в которой изначально необходимо задавать число и последовательность стадий реакции, и тип описывающих их кинетических уравнений, а также начальные приближения параметров модели и диапазон их значений. Для каждой кинетической модели было проведено три серии расчетов: 1) построение кинетической модели по всем трем скоростям нагрева; 2) построение кинетической модели отдельно для трех скоростей нагрева, где в качестве начального приближения берутся данные, полученные в п.1; 3) построение кинетической модели отдельно для трёх скоростей нагрева, где начальное приближение задаётся произвольно.

Табл. 1. Значения кинетических параметров, полученных для разных скоростей нагрева для модели автокаталитической реакции

Параметры	$\beta = 0.5$ К/с	$\beta = 0.5, 0.75$ К/с	$\beta = 0.5, 0.75, 1$ К/с
$\ln(k_0)$	29.43	43.52	41.36
E_a	202.78	293.35	279.16
n_1	0.93	1.06	1.08
n_2	0.65	0.68	0.69
z	0.09	0.71	0.57
Q	40632.96	40571.93	40586.76

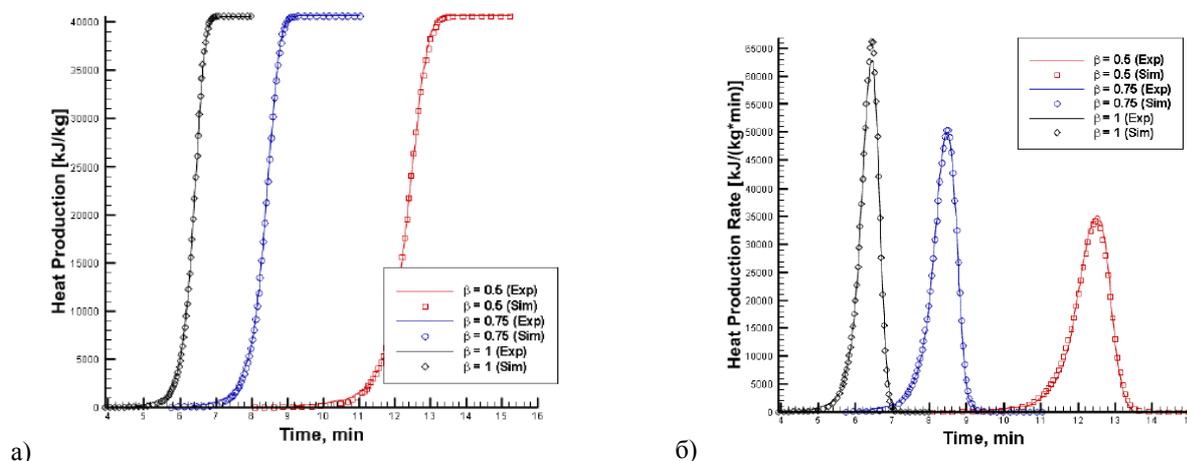


Рис. 4. Графики зависимости а) тепловыделения; б) мощности тепловыделения от времени для модели автокаталитической реакции

Результаты основных расчетов представлены в табл. 1. Рис. 4 демонстрирует совпадение экспериментальных кривых с кривыми, построенными с использованием констант, полученных в данной работе.

ЛИТЕРАТУРА:

1. Серебренников Е.А. Пожарная безопасность как составная часть национальной безопасности России: Специализированный каталог. Пожарная безопасность 2000. М.: Гротек. 2000. – С. 6-11.
2. Асеева Р.М., Заиков Г.Е. Горение полимерных материалов. М.: Наука, 1981.
3. СНиП 21-01-97* Пожарная безопасность зданий и сооружений
4. R.E. Lyon, R.N. Walters. A microscale combustion calorimeter. Report №.DOT/FAA/AR-01/117, 2002.
5. R.E. Lyon, R.N. Walters. Pyrolysis combustion flow calorimetry // J. Anal. Appl. Pyrolysis. – 2004. – Vol. 71. – P. 27-46.
6. Коссой А.А., Бенин А.И., Ахметшин Ю.Г. Методология создания кинетических моделей химических реакций. Учебно-методическое пособие по курсу «Исследование реакционных опасностей химических процессов и продуктов для снижения риска возникновения теплового взрыва». РНЦ «Прикладная химия», 2011.

УДК 519.6:533.6.011

Е.В. Колесник, А.А. Смирновский
Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого

ВЛИЯНИЕ ТИПА СЕТОЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ НА СВОЙСТВА СХЕМ ПОВЫШЕННОГО ПОРЯДКА ТОЧНОСТИ В РАСЧЕТАХ ГАЗОДИНАМИЧЕСКИХ ТЕЧЕНИЙ НА НЕСТРУКТУРИРОВАННЫХ СЕТКАХ

Необходимость моделирования высокоскоростных течений газа часто возникает не только при разработке аэрокосмической техники, но и для решения промышленных задач, например, для задач турбомашиностроения, которые, как правило, характеризуются сложной геометрией проточных частей. Одним из широко используемых методов для решения задач данного класса является метод контрольных объемов, позволяющий проводить расчеты на неструктурированных сетках, а, следовательно, в геометрии практически любой сложности.

При реализации метода контрольных объемов одним из способов достаточно точного разрешения газодинамических разрывов является использование численных схем, основанных на приближенном решении задачи Римана о распаде разрыва, для которой необходимо определять значения газодинамических переменных «слева» и «справа» от грани контрольного объема. При этом для достижения повышенного порядка точности применяется MUSCL подход [1], согласно которому проводится кусочно-полиномиальная реконструкция решения в каждом контрольном объеме и восстановление значений на грани с повышенным порядком. Однако, при использовании схем повышенного порядка встает проблема возникновения осцилляций в численном решении, как правило, в окрестности разрывов. Для устранения осцилляций вводятся специальные ограничители (limiters), которые на этапе реконструкции модифицируют наклоны распределений переменных в ячейках. В случае неструктурированных сеток выделяются два основных направления в конструировании неосциллирующих схем повышенного порядка. Одно из них, называемое также квазиодномерным подходом, связано с использованием схем, разработанных для одномерного скалярного уравнения переноса [2], с локальным выделением для каждой грани направления, пересекающего грань контрольного объема. Другое направление охватывает подходы, исходно предназначенные для многомерного случая, в которых, с использованием информации из соседних ячеек, рассчитывается единый для всех граней расчетной ячейки так называемый скалярный ограничитель.

Несмотря на большое количество публикаций, в литературе не сформировано единое мнение об эффективности работы квазиодномерных и скалярных ограничителей на неструктурированных сетках, в том числе очень ограничен объем данных о влиянии типа сеточных элементов на эффективность работы ограничителей. Цель данной работы – реализация и тестирование нескольких схем повышенного порядка точности с применением различных скалярных и квазиодномерных ограничителей; анализ работоспособности ограничителей при расчетах на сетках, состоящих из сеточных элементов различных типов.

Реконструкция и ограничители. При использовании квазиодномерного подхода помимо значений переменных в центрах ячеек слева и справа от грани, требуется, как минимум, еще две виртуальные точки слева и справа от центральных точек (точки P_L^+ , P_L^- и P_R^+ , P_R^- на рис. 1), в которых каким-то образом восстанавливаются значения переменных.

Наиболее простые методы восстановления в схемах второго порядка точности используют значение градиента в центре ячейки. Одним из них является метод, предложенный в [3] (далее метод DM), согласно которому значения в точках P_L^+ , P_L^- и P_R^+ , P_R^- вычисляются по формулам (рис. 1(a)): $u_L^- = u_L - (2(\nabla u)_L \cdot \mathbf{R}_{LR} - (u_R - u_L))$, $u_L^+ = u_R$, $u_R^+ = u_R + (2(\nabla u)_R \cdot \mathbf{R}_{LR} - (u_R - u_L))$, $u_R^- = u_L$, где u – любая из реконструируемых переменных, \mathbf{R}_{LR} – радиус вектор, соединяющий центры левой и правой ячейки.

Второй метод, предложенный в [4] (далее – ВК), не использует значение градиента. Вместо этого реализуется следующий алгоритм. Для каждой грани проводится две прямые, которые проходят через центр грани и центры прилегающих к грани ячеек (прямые реконструкции – l и r на рис. 1(b)). На каждой из этих прямых определяются по две точки, значения переменной в которых находятся путем интерполяции по известным значениям переменных в некоторых близлежащих центрах ячеек, алгоритм нахождения таких ячеек подробно описан в [4].

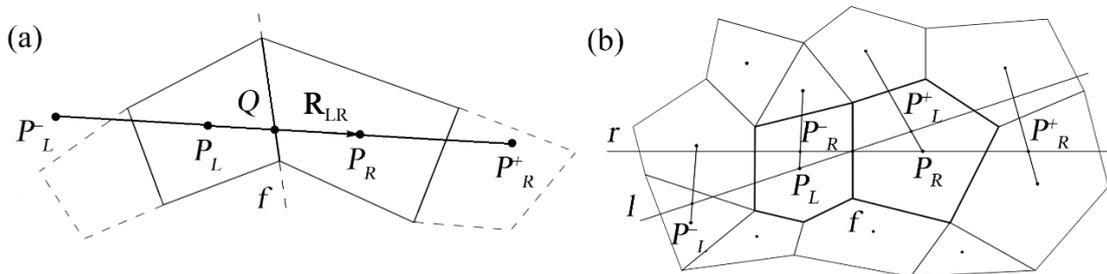


Рис. 1. Восстановление точек по методу DM (a) по методу ВК (b)

При использовании квазиодномерного подхода, значения переменных слева и справа на грани f вычисляются в соответствии с линейной односторонней экстраполяцией: $u_L^f = u_L + \psi_L \cdot (u_L - u_L^-) / 2$, $u_R^f = u_R - \psi_R \cdot (u_R^+ - u_R) / 2$, где $\psi(r)$ – ограничитель, введенный для контроля осцилляций, который вычисляется как функция отношения двух разностей: $\psi_L = \psi_L \cdot (u_L^+ - u_L) / (u_L - u_L^-)$, $\psi_R = \psi_R \cdot (u_R^- - u_R) / (u_R - u_R^+)$. В настоящей работе в качестве функции $\psi(r)$ был задействован TVD ограничитель [2] «van Albada» $\psi_{VA}(r) = ((r^2 + r) / (r^2 + 1))$.

При использовании скалярных ограничителей значение на грани вычисляется с использованием градиента в центре ячейки: $u_{LR}^f = u_{LR}^f + \phi_{LR} (\nabla u)_{LR} \cdot \mathbf{r}_{LR}$, где \mathbf{r}_{LR} – вектор соединяющий центр левой/правой ячейки и центр грани, ϕ_{LR} – значение скалярного ограничителя для ячейки слева/справа от грани. В настоящей работе использовались два скалярных ограничителя. Формулировка предложенного в работе [5] ограничителя (далее – ВJ-ограничитель) основывается на следующем критерии: реконструированные значения переменной для каждой грани контрольного объема не должны выходить за пределы максимального и минимального значения во всех соседних ячейках (имеющих общую грань с текущей ячейкой). Согласно другому подходу, предложенному в работе [6], при

вычислении ограничителя (далее – MLP-ограничитель) необходимо анализировать значения функции не на гранях, а в узлах сетки.

Результаты. Для выполнения расчетов использовался конечно-объемный «неструктурированный» программный код SINF/Flag-s, разработанный сотрудниками кафедры «Гидроаэродинамика, горение и теплообмен» СПбПУ. В рамках данной работы, код SINF/Flag-s был дополнен возможностью расчета сжимаемых течений. Конвективные потоки на грани вычисляются по схеме Роу [7] второго порядка точности. Реализованы квазиодномерные ограничители с различными способами восстановления точек (методы DM и BK) и скалярные ограничители (BJ и MLP). Расчеты проводились по неявной схеме метода установления (в приращениях) с дискретизацией стабилизирующего оператора по схеме со скалярной диссипацией первого порядка.

В работе представлены результаты двумерных расчетов трансзвукового обтекания крылового профиля *NACA-0012* невязким газом; рассматривался режим, при котором на верхней стороне профиля «садится» относительно сильный скачок уплотнения, а на нижней – слабый (рис. 2(a)). Используются расчетные сетки с различным видом сеточных элементов: четырехугольные, треугольные, многоугольные.

При использовании сеток, состоящих из четырехугольных элементов, влияние способа восстановления и типа ограничителя мало. Для сетки, состоящей из треугольных элементов, способ восстановления точек BK приводит к более гладкому решению, по сравнению с методом DM (рис. 2(d)). В случае скалярных ограничителей, MLP-ограничитель дает более точное положение скачка, при этом область, где ограничитель «включается» уже (рис. 2(c)), а в целом решение получается более гладкое (рис. 2(d)). В случае BJ-ограничителя наблюдается небольшие осцилляции около скачка, кроме того этот ограничитель «включается» и в области вдали от скачка (рис. 2(b)). Для многоугольных элементов явное преимущество имеют квазиодномерные ограничители, тогда как использование скалярных ограничителей может приводить к «включению» ограничителя в значительной части расчетной области вдали от скачка (рис. 2(f)), что приводит к ухудшению качества решения.

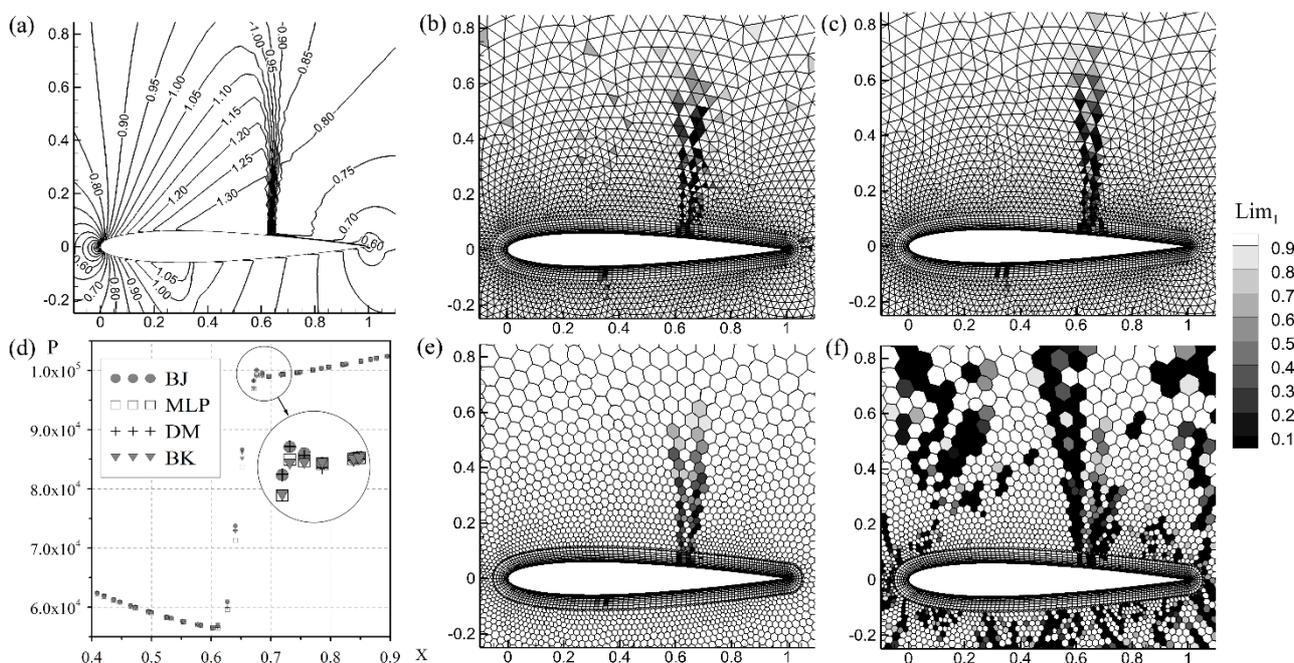


Рис. 2. Изолинии числа Маха, схема BK (a); поля ограничителя BJ (b), (c); поля MLP-ограничителя (e), (f); распределение давления вдоль линии $y = 0.3$, расчет на сетке из треугольных элементов (d)

ЛИТЕРАТУРА:

1. Van Leer B. Towards the ultimate conservative difference scheme. V. A second order sequel to Godunov's method // J. Comput. Phys. – 1979. – Vol. 32, No. 1. – P. 101-136.
2. Harten A. High resolution schemes for hyperbolic conservation laws // J. Comput. Phys. – 1983. – Vol.49, No. 3. – P. 357-393.
3. Darwish M., Moukalled F. TVD schemes for unstructured grids // Int. J. Heat Mass Transfer – 2003. – Vol.46. – P. 599–611.
4. Бахвалов П.А., Козубская Т.К. Схема с квазиодномерной реконструкцией переменных, определенных в центрах элементов трехмерной неструктурированной сетки // Матем. моделирование. – 2016. – Т. 28. № 3. – С. 79–95.
5. Barth T.J., Jaspersen D.C. The design and application of upwind schemes on unstructured meshes // AIAA Paper, 1989. No. 89-0366.
6. Park J.S., Yoon S.H., Kim C. Multi-dimensional limiting process for hyperbolic conservation laws on unstructured grids // J. Comput. Phys. – 2010. – Vol. 229. – P. 788-812.
7. Roe P.L. Approximate Riemann Solvers, parameter vectors, and difference schemes // J. Comput. Phys. – 1981. – Vol. 43, No. 2. – P. 357-372.

УДК 662.612

Е.А. Кузнецов, Е.С. Маркус, А.Ю. Снегирёв
Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого

УСОВЕРШЕНСТВОВАННЫЙ МЕТОД РАСЧЕТА ВРЕМЕНИ ЗАДЕРЖКИ ВОСПЛАМЕНЕНИЯ ТЕРМОПЛАСТИКОВ ПОД ДЕЙСТВИЕМ ВНЕШНЕГО ТЕПЛООВОГО ПОТОКА

Полимерные материалы широко используются и представляют значительную пожарную опасность. Можно утверждать, что основная часть пожарной нагрузки в жилых и производственных помещениях, салонах самолетов и автомобилей и т.п. соответствует именно полимерным материалам. Время задержки воспламенения полимерных материалов под действием внешнего теплового потока относится к основным количественным характеристикам их пожарной опасности. Классическая тепловая теория воспламенения, применяемая в инженерных расчетах [1, 2], предполагает, что воспламенение твердых горючих материалов происходит при достижении определённой температуры поверхности. Указанное значение температуры поверхности (называемой температурой воспламенения) предполагается постоянной величиной, характерной для данного материала. В данной работе классическая теория уточняется с учетом конечной скорости пиролиза горючего материала и определяется зависимость температуры воспламенения от величины внешнего теплового потока.

В работе рассматриваются термопластики – наиболее распространённые промышленные полимеры, примерами которых являются полиэтилен, полистирол, полиметилметакрилат, полипропилен и др. Особенностью термопластиков является их полная газификация при пиролизе (отсутствие углистого остатка). Усовершенствованная модель воспламенения термопластиков, предложенная в данной работе, состоит из трёх компонентов (обозначения см. в работе [3]):

1. Тепловой баланс на поверхности горючего материала, который устанавливает связь между внешним тепловым потоком и скоростью газификации материала в результате пиролиза:

$$q_{net}'' = \varepsilon q_{ext}'' - \varepsilon \sigma T_{ign}^4 - \Delta h_g m_{ign}'' - \frac{z}{\exp(z) - 1} h(T_{ign} - T_0) \quad (1)$$

2. Приближенная модель пиролиза горючего материала, позволяющая определить скорость его газификации в зависимости от температуры нагреваемой поверхности:

$$m'' = \rho \int_0^{\infty} A \exp\left(-\frac{E_a}{\mathcal{R}T}\right) dx \approx \rho A \exp\left(-\frac{E_a}{\mathcal{R}T_s}\right) \delta_r \quad (2)$$

где

$$\delta_r = \min\left(\frac{\mathcal{R}T_s^2/E_a}{T_s - T_0} \delta_r, \delta\right) \text{ и } \delta_T(t) = k \frac{T_s - T_0}{q_{net}''(t)} \quad (3)$$

3. Описание теплопередачи в слое материала, которое определяет зависимость температуры поверхности слоя материала в зависимости от внешнего теплового потока и с учётом лучистого и конвективного теплообмена с окружающей средой. С учётом малой скорости реакции пиролиза в течение начальной стадии прогрева материала используется аналитическое решение уравнения теплопроводности в слое, из которого получено следующее приближенное выражение для времени задержки воспламенения:

$$t_{ign,i} = \min\left(\frac{\pi}{4} k \rho c \left(\frac{T_{ign,i} - T_0}{\varepsilon q_{ext}''}\right)^2 \left(1 - C \frac{h_{eff,i}(T_{ign,i} - T_0)}{\varepsilon q_{ext}''}\right)^{-2}, \frac{\rho c \delta}{h_{eff,i}} \ln \frac{1}{1 - h_{eff,i}(T_{ign,i} - T_0)/\varepsilon q_{ext}''}\right) \quad (4)$$

где $h_{eff} = h z / (\exp(z) - 1) + (\varepsilon \sigma T_s^4 + \Delta h_g m'') / (T_s - T_0)$ – эффективный коэффициент теплоотдачи.

Равенство (4) комбинирует пределы термически толстого и термически тонкого слоя и содержит корректирующий множитель $\left(1 - C h_{eff,i}(T_{ign,i} - T_0)/\varepsilon q_{ext}''\right)^{-2}$, учитывающий теплотери с нагреваемой поверхности в окружающую среду. Кроме того, в отличие от классической тепловой теории в данной модели полагается, что воспламенение происходит в момент времени, когда скорость газификации достигает критического значения: $m'' = m_{ign}''$. Данное допущение отражает необходимость создания предельной концентрации летучих и применимо для описания воспламенения при наличии пилотного пламени или искры.

Применение соотношений (1) – (3) позволяет определить значение температуры поверхности материала в момент воспламенения и с помощью формулы (4) вычислить время задержки воспламенения.

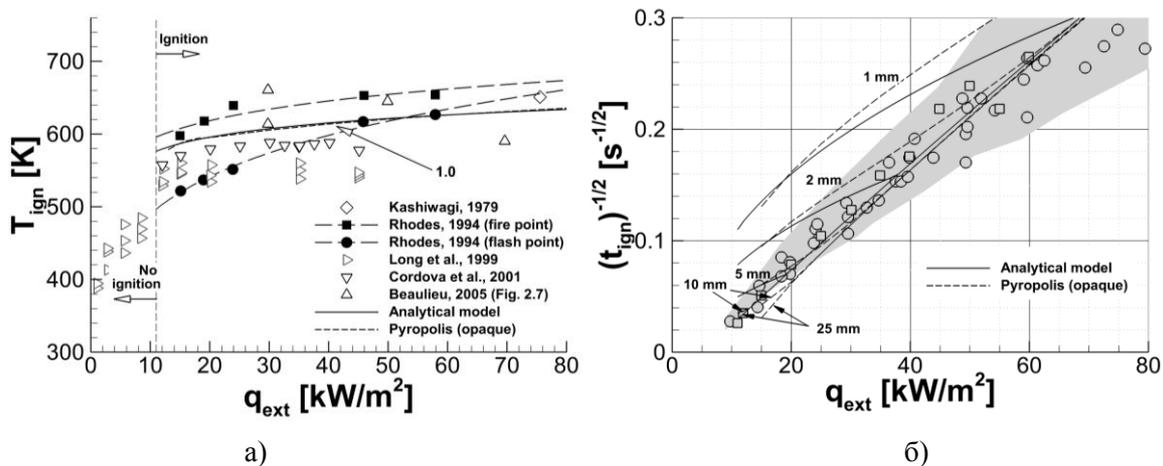


Рис. 1. Зависимость температуры воспламенения (а) и времени задержки воспламенения (б) от внешнего теплового потока. Полиметилметакрилат [3]

В данной работе описанный выше алгоритм применён для расчета пилотного воспламенения трех полимерных материалов: полиметилметакрилата, полиэтилена и

полипропилена. Результаты и экспериментальные данные представлены на рис. 1–3. Как и в экспериментах, расчетная температура воспламенения увеличивается с ростом внешнего теплового потока. Это объясняется тем, что при более быстром нагреве одной и той же температуре поверхности соответствует более тонкий прогретый слой, более тонкая зона реакции вблизи нагреваемой поверхности и, следовательно, меньшее значение скорости газификации m'' . В результате оказывается, что достижение критического значения m''_{ign} требует более высокой температуры поверхности.

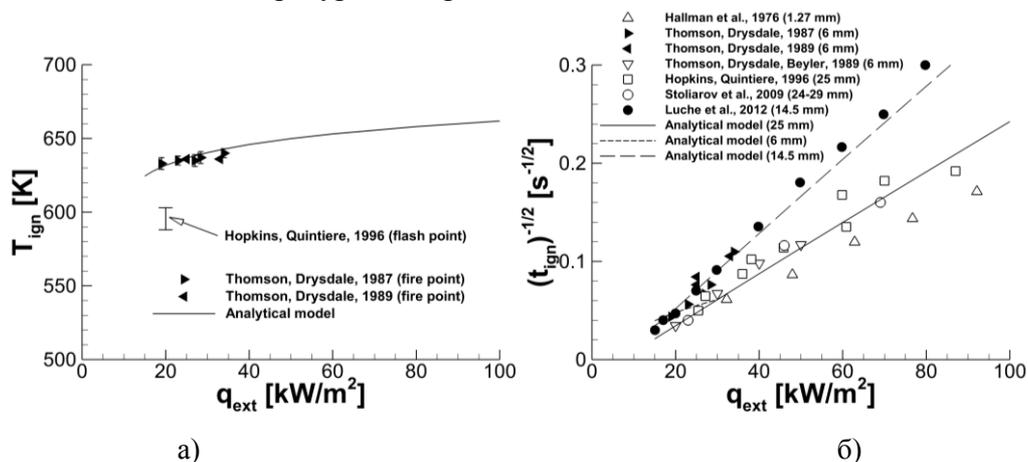


Рис. 2. Зависимость температуры воспламенения (а) и времени задержки воспламенения (б) от внешнего теплового потока. Полиэтилен [3]

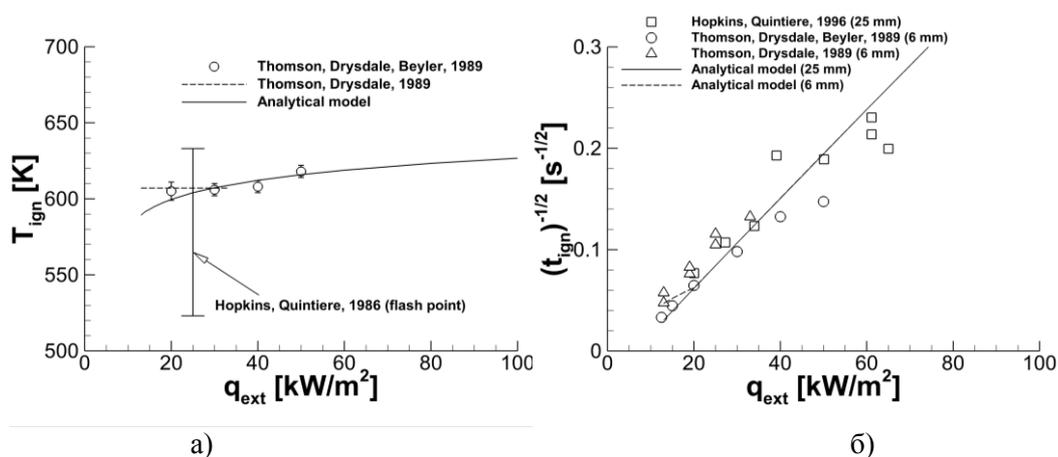


Рис. 3. Зависимость температуры воспламенения (а) и времени задержки воспламенения (б) от внешнего теплового потока. Полипропилен [3]

В работе показано, что результаты расчетов по предлагаемому методу согласуются с результатами численных расчётов с помощью модели PyroPolis [4].

Работа выполнена при частичной поддержке гранта РНФ (проект № 16-49-02017) с использованием ресурсов СКЦ «Политехнический».

ЛИТЕРАТУРА:

1. J. G. Quintiere. Fundamentals of Fire Phenomena, Wiley, Chichester, U.K., 2006.
2. J. Torero. Flaming Ignition of Solid Fuels. In: M. J. Hurley (Ed.) SFPE Handbook of Fire Protection Engineering, Springer, 2016, pp. 633–661.
3. A. Snegirev, E. Kuznetsov, E. Markus. Coupled analytical approach to predict piloted flaming ignition of non-charring polymers, Fire Safety J. 93 (2017) 74-83.
4. A. Snegirev, V. Talalov, V. Stepanov, J. Harris, A new model to predict pyrolysis, ignition and burning of flammable materials in fire tests, Fire Safety J. 59 (2013) 132–158.

РЕЖИМЫ РАСПРОСТРАНЕНИЯ ПЛАМЕНИ ПО ПОВЕРХНОСТИ ГОРЮЧЕГО
МАТЕРИАЛА: ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ И ТЕОРЕТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ

Распространение пламени по поверхности горючего материала – важный механизм развития пожара. Совокупность таких факторов как параметры источника-воспламенителя, ориентация поверхности горючего материала, направление внешнего потока воздуха, концентрация кислорода в нем, а также толщина и тип горючего материала приводит к реализации различных режимов распространения пламени. Цель данной работы – идентификация и анализ режимов распространения пламени, обусловленных свойствами источника-воспламенителя и газообменом с окружающей средой.

Для достижения указанной цели решаются три задачи.

1. В рамках первой задачи выполняется численное исследование естественно-конвективного турбулентного диффузионного пламени у вертикальной поверхности, на которой выделяется горючий газ. Рассматривается экспериментальный сценарий из работы [1], где измерены тепловые потоки из пламени пропилена на поверхности вертикальной пористой горелки, а также профили температуры и скорости газа в пограничном слое с горением вблизи вертикальной поверхности. Решение данной задачи позволяет оценить точность расчёта структуры пламени и теплового потока из пламени на стенку, определить требования к сеточному разрешению и выявить влияние пристеночных функций.

Применяется расчётный код FDS [3]. Расчет турбулентного течения выполняется методом крупных вихрей (LES), с использованием подсеточной модели Дидорфа. Предполагается бесконечно быстрая одностадийная необратимая реакция окисления горючего, а скорость выгорания определяется интенсивностью подсеточного смешения реагентов. Эмиссия теплового излучения полагается равной заданной доле мощности тепловыделения при горении. Данное допущение резко снижает требования к пространственному разрешению тонких высокотемпературных зон реакции в турбулентном пламени. Перенос энергии излучения рассчитывается с помощью метода конечных объемов. Учёт спектральных свойств продуктов сгорания производился на основе приближения серого газа с учетом осредненных по спектру вкладов CO_2 , H_2O и сажи.

В расчетах использовались декартовы сетки со сгущением вблизи поверхности горелки. Размер пристеночной ячейки варьировали от 2 до 15 мм при общем числе ячеек от 13.65 тыс. до 3.58 млн. Расчеты показали, что осреднённая структура пограничного слоя для пламени у вертикальной сетки разрешается с удовлетворительной точностью при условии использования расчётных сеток с размером ячеек по нормали к поверхности не более 3 мм. Получено хорошее согласие расчетных и измеренных значений суммарного (радиационного и конвективного) тепловых потоков на стенке. Использование двух рассмотренных модификаций пристеночных функций дало близкие результаты для конвективных потоков.

2. При решении второй задачи было рассмотрено распространение пламени по поверхности вертикальной пластины полиметилметакрилата в рамках крупномасштабного сценария [2] с учётом конечной скорости реакции пиролиза горючего материала. Высота пластины – 5 м, ширина – 0.6 м. Нижняя часть пластины воспламеняется в результате радиационного нагрева источником с заданной температурой излучающей поверхности. При решении данной задачи модель газовой фазы (идентичная представленной выше) дополняется моделью твердой фазы, в которой рассматривается одностадийная реакция пиролиза горючего материала с аррениусовской зависимостью от температуры и первым

порядком по концентрации исходного вещества. Сеточное разрешение в данном случае является более грубым: использовались сетки с размером пристеночных ячеек от 16 до 25 мм. Однако указанный размер ячеек достаточен для разрешения крупномасштабных пульсаций нестационарного турбулентного пламени и позволяет воспроизводить его высоту и соответствует инженерным рекомендациям (на длину теплового факела приходилось не менее 10 ячеек сетки). Изменяя температуру поверхности и размеры нагревателя, удалось воспроизвести экспериментально наблюдавшуюся динамику роста мощности тепловыделения (рис. 1а) и выявить три качественно различных режима распространения пламени (рис. 1б), особенности которых приводятся ниже.

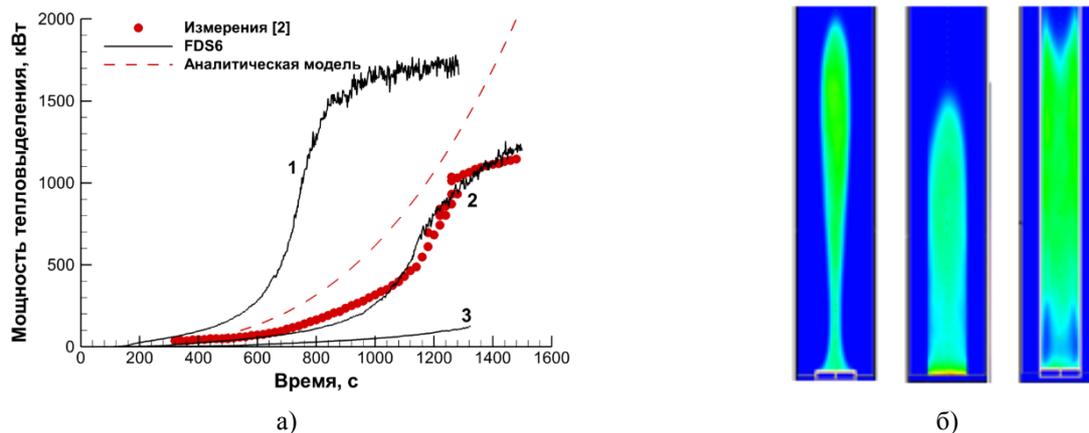


Рис. 1. Результаты расчетов распространения пламени вверх по вертикальной поверхности горючего материала: а) – зависимость мощность тепловыделения от времени (температура и ширина нагревателя: 1 – 900 °С, 1,2 м; 2 – 900 °С, 0,6 м; 3 – 850 °С, 0,6 м); б) – расчетная форма зоны пиролиза на поверхности материала (слева направо: осевой, первый и второй фронтальный режимы)

В осевом режиме имеет место проскок пламени вдоль вертикальной оси (центральной линии) с образованием сужения. Данный режим наблюдается в расчетах при наличии невысокого (менее 0,1 м) нагревателя малой мощности (температура излучающей поверхности ниже 1000 °С), что приводит к неравномерному нагреву нижней части пластины горючего материала. В отсутствие боковых стенок имеет место интенсивное боковое вовлечение холодного воздуха, которое приводит к сужению зоны пиролиза в нижней части пластины.

Первый фронтальный режим сопровождается формированием выпуклого фронта пиролиза по всей ширине пластины. Этот режим имеет место при более равномерном и интенсивном нагреве нижней части пластины и воспроизводится в расчётах при следующих параметрах нагревателя: высота 0,1–0,3 м, ширина 1,2 м, температура излучающей поверхности более 1000 °С. Данный режим достаточно часто наблюдался в экспериментах, например, в работе [4].

Второй фронтальный режим реализуется при наличии боковых вертикальных стенок, располагаемых по краям от пластины горючего материала. При этом также формируется фронт пиролиза на всей ширине пластины, но форма фронта является вогнутой. Такая форма фронта пиролиза обусловлена рециркуляцией горячего газа, возникающей при обтекании боковых стенок. Рециркуляция приводит к интенсификации прогрева горючего материала и увеличению скорости распространения пламени в окрестности боковых стенок. Фронтальный режим с вогнутым фронтом также наблюдался в экспериментах [4].

3. Для теоретического анализа полученных результатов была сформулирована приближенная аналитическая модель. В её основе лежит выделение двух пространственных зон: зоны прогрева, где происходит инертный нагрев материала от начальной температуры

до температуры воспламенения, и зоны пиролиза, в которой материал разлагается с выделением горючего газа. Высота зоны прогрева принимается равной высоте турбулентного пламени. Высота зоны пиролиза x_p определяется как граница области, в которой время прогрева превышает время задержки воспламенения, τ_{ign} , вычисляемое с помощью классической тепловой теории по заданной температуре воспламенения. Скорость распространения пламени, V_p , определяется как скорость расширения зоны пиролиза. С учётом эмпирических корреляций для высоты турбулентного пламени и мощности тепловыделения $L_f/W = CQ^{*2/3} = x_*^{1/3} x_p^{2/3}$ [5, 6], для скорости распространения пламени и высоты зоны пиролиза получено $V_p = (x_*/\tau_{ign})(t/3\tau_{ign})^2$, $x_p = x_*(t/3\tau_{ign})^3$, где W – ширина пластины, Q^* – безразмерная мощность тепловыделения, m'' – скорость газификации материала, $x_* = C^3(m''f_c\Delta h_c/\rho_0c_pT_0\sqrt{g})^2$, f_c и Δh_c – полнота и теплота сгорания, C – эмпирическая константа. Приближённая аналитическая модель с хорошей точностью воспроизводит экспериментальную зависимость координаты зоны пиролиза от времени. Однако мощность тепловыделения, вычисленная в предположении плоского фронта пиролиза, оказывается существенно завышенной относительно экспериментальных данных (рис. 1,а). Возможной причиной является то, что в эксперименте фронт пиролиза у граней пластины существенно отстает от фронта пиролиза на оси симметрии.

На основании выполненной работы можно сделать следующие выводы.

1. В рассматриваемых сценариях на поверхности материала доминирует лучистый тепловой поток, поэтому точность расчёта конвективного теплового потока на поверхности оказывает слабое влияние на значение суммарного потока. Радиационный тепловой поток из пламени достаточно слабо зависит от размера ячеек сетки, что объясняется способом расчёта эмиссии излучения, принятой пропорциональной мощности тепловыделения при горении.

2. Выявлено значительное влияние параметров нагревателя-воспламенителя на начальный период формирования и распространения пламени. Установлено, что незначительное изменение параметров нагревателя может привести как к затуханию, так и к переходу к развитому горению. Выявлено три режима распространения пламени (осевой, первый и второй фронтальный).

3. Сформулирована аналитическая модель, описывающая распространение пламени вверх по вертикальной поверхности горючего материала.

Работа выполнена при частичной поддержке компании Boeing и гранта РНФ (проект № 16-49-02017) с использованием ресурсов СКЦ «Политехнический».

ЛИТЕРАТУРА:

1. de Ris J. L., Markstein G. H., Orloff L., Beaulieu P. A. Flame heat transfer. Part I: pyrolysis zone. Technical Report J.I. 0D0J9.MT. – Factory Mutual Research Corporation, 1999.
2. Wu P. K., Orloff L., Tewarson A. Assessment of Material Flammability with the FSG Propagation Model and Laboratory Test Methods. – USA, NIST, Gaithersburg, MD, 1996.
3. Fire Dynamics Simulator (FDS) and Smokeview [Электронный ресурс]. – Режим доступа: <https://pages.nist.gov/fds-smv/>. – Заглавие с экрана. – (Дата обращения 13.10.2017).
4. Tsai K.-C. Influence of sidewalls on width effects of upward flame spread // Fire Safety Journal. – 2011. – V. 46. – P. 294 – 304.
5. Quintiere J. G., Cleary T. G. Heat flux from flames to vertical surfaces // Fire Technology. – 1994. – V. 30. – P. 209-231.
6. Quintiere J. G. Surface Flame Spread. In: SFPE Handbook of Fire Protection Engineering. Fifth Edition, Ed. by Morgan J. Hurley. – Springer. – 2016. – P. 705 – 723.

ЧИСЛЕННЫЙ ПРОГНОЗ РАЗВИТИЯ ПОЖАРА НА ВЫСОКОСТЕЛЛАЖНОМ СКЛАДЕ

Прогнозирование развития пожара на высокостеллажном складе имеет большое практическое значение при проектировании систем обнаружения очага загорания и систем пожаротушения. В самом деле, выход пожара из-под контроля означает исключительный ущерб, а эффективность современных систем пожаротушения (см., например, [1]) в значительной степени определяется ранним обнаружением очага. В то же время, традиционно применяемые упрощённые методы численного моделирования пожара в помещении, основанные на заранее заданной динамике мощности тепловыделения (концепция проектного пожара) в данном случае непригодны. Вместо этого необходимо рассчитывать распространение пламени по поверхностям горючих материалов с учётом теплового воздействия пламени (концепция совместного моделирования). Данная работа нацелена на применение именно такого подхода, опыт практического использования которого крайне ограничен.

В работе рассматривается пожар, который развивается под действием локального очага в складском помещении высотой 20 м. Системы пожаротушения и дымоудаления не активируются. Предполагается, что горизонтальные размеры помещения существенно больше его высоты, и рассматриваются три соседних стеллажа, в каждом из которых в 2 ряда расположено по 6 коробок, в высоту в каждом ряду – 10 коробок. Одна коробка имеет размеры: 0.8×1.2×1 м, расстояние между коробками – не менее 35 см, пролеты между стеллажами – 1.3 м.

Согласно рассматриваемому сценарию, в центральном стеллаже во втором ряду между 1 и 3 коробкой располагается очаг пожара, тепловыделение в котором растёт по закону $\dot{Q}_0 = \min(\alpha_0 t^2, \dot{Q}_{0,\max})$ таким образом, что за время $t = 300$ с оно достигает предельного значения $\dot{Q}_{0,\max} = 1$ МВт (по классификации стандарта NFPA 204M значение $\alpha_0 = 0.011$ кВт/с² соответствует границе между режимами роста пожара “medium” и “slow” [2]). Материал коробок – горючее вещество с модельными свойствами, близкими к свойствам реальных материалов (пластик, древесина, картон): теплоёмкость $c = 1$ кДж/кг, теплопроводность $\lambda = 0.35$ Вт/(м·К), плотность $\rho = 1530$ кг/м³, теплота газификации $\Delta h_g = 2850$ кДж/кг. Рассматривается упрощённая (тепловая) модель пиролиза данного материала, в рамках которой сначала происходит инертный нагрев материала до температуры зажигания $T_{\text{ign}} = 330$ °С, после чего температура поверхности материала перестает расти и начинается пиролиз материала с постоянной скоростью. Количество горючего газа, выделяющегося в результате пиролиза на площади 1 м², определяется из условия, что его сгорание приводит к мощности тепловыделения 250 кВт. Такой подход приближённо учитывает тепловую обратную связь между пиролизом материала и горением в газовой фазе. В самом деле, время нагрева поверхности материала до достижения температуры зажигания зависит от теплового потока из пламени, а тепловыделение в пламени зависит от размера зоны пиролиза. В то же время, не требуется моделирование кинетики пиролиза (используемое в [4]), что приводит к существенному сокращению вычислительных затрат, особенно важному для крупномасштабного объекта.

Для моделирования динамики пожара используется специализированный расчётный код FDS [3], в основе которого лежит решение уравнений Навье-Стокса для

многокомпонентной реагирующей газовой смеси. Расчет турбулентного течения выполняется методом крупных вихрей (LES). Предполагается бесконечно быстрая одностадийная необратимая реакция окисления горючего, а скорость выгорания определяется интенсивностью подсеточного смешения реагентов. Эмиссия теплового излучения полагается равной заданной доле мощности тепловыделения при горении. Перенос энергии излучения рассчитывается с помощью метода конечных объемов. Эффективный коэффициент поглощения продуктов сгорания вычисляется в рамках приближения серого газа с учетом осреднённых по спектру вкладов CO_2 , H_2O и сажи. Доля излученной энергии принята равной 0.2, выход сажи 0.015 кг на 1 кг горючего, выход CO – 0.01 кг на 1 кг горючего.

Расчетная область охватывает рассматриваемые стеллажи и имеет размер $20 \times 14 \times 20$ м. С учётом допущения о больших горизонтальных размерах помещения боковые границы полагаются открытыми для потоков газа и свежего воздуха. В расчётах использовалась равномерная кубическая сетка с размером грани 0.1 м. Общее число ячеек сетки 5.6 млн. В соответствии с практикой численного моделирования естественно-конвективного пламени [3] отношение характерного пространственного масштаба пламени $D^* = (\dot{Q} / \rho_0 c_p T_0 \sqrt{g})^{2/5}$ (\dot{Q} – мощность тепловыделения в пламени, ρ_0 , c_p , T_0 – плотность, теплоёмкость и температура окружающего воздуха) к характерному размеру ячейки сетки превышает 10, за исключением начального промежутка времени, в течение которого тепловая мощность очага ниже 1 МВт.

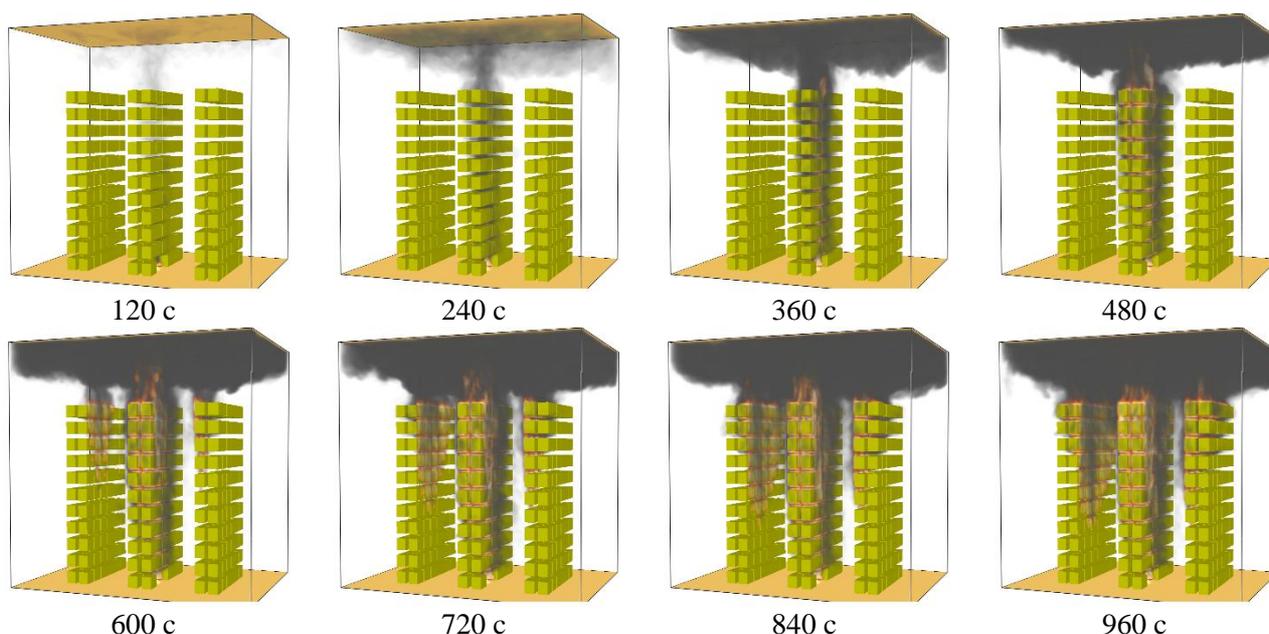


Рис. 1. Развитие пожара на высокостеллажном складе. Показаны поля концентрации сажи и изоповерхности мощности тепловыделения 200 кВт/м^3 , характеризующие форму пламени, в моменты времени с шагом 120 с

Расчеты показали, что в рассматриваемом сценарии имеет место быстрое распространение пламени вверх по центральному стеллажу (рис. 1). Этому способствует наличие горизонтальных зазоров и вертикальных каналов между ящиками. Вертикальные каналы создают восходящий поток, обусловленный эффектом дымовой трубы, а по горизонтальным зазорам в зону горения поступает свежий воздух.

На девятой минуте пожара в результате мощного теплового излучения воспламеняются верхние ярусы боковых стеллажей, после чего пламя распространяется вниз по боковым стеллажам. Поскольку боковые границы расчётной области открыты, толщина

припотолочного дымового слоя достигает установившегося значения и далее не растёт. Без активации системы пожаротушения за время 1000 с мощность пожара достигает катастрофического значения более 150 МВт.

Реалистичность полученного прогноза подтверждается крупномасштабными натурными испытаниями. Например, экспериментальные данные из работы [5] показывают, что при горении отдельного стеллажа (2 ряда по 4 коробки по 5 коробок в высоту) измеренная мощность тепловыделения в течение 300 с достигает 50 МВт.

Как показано на рис. 2а, мощность тепловыделения растёт быстрее, чем по квадратичному закону. Это связано с развитой поверхностью горючего материала. Попытка аппроксимировать расчётную зависимость мощности тепловыделения от времени квадратичной зависимостью приводит к темпам роста, существенно превышающим нормативные значения для категории “ultra fast” (рис. 2б).

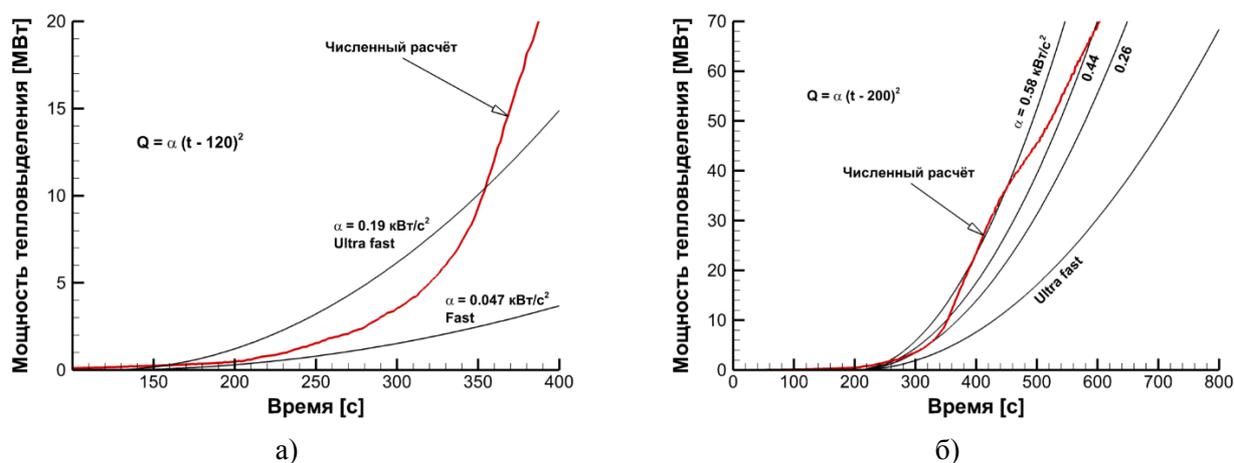


Рис. 2. Рост мощности тепловыделения: а) – промежуток времени до 400 с; б) – промежуток времени до 800 с. Приведены нормативные кривые t^2 , соответствующие скорости роста “fast” и “ultra fast” [2], а также кривые t^2 , аппроксимирующие результат численного расчёта

Полученные данные об ожидаемой динамике пожара необходимы для расчёта времени срабатывания систем обнаружения пожара и характеристик оросителей для его подавления.

Работа выполнена при частичной поддержке гранта РФФИ (проект № 16-49-02017) с использованием ресурсов СКЦ «Политехнический».

ЛИТЕРАТУРА:

1. Tanklevskiy L., Tsoy A., Snegirev A. Electrically controlled dynamic sprinkler activation: Computational assessment of potential efficiency // Fire Safety Journal. – 2017. – V. 91. – P. 614-623.
2. Karlsson B., Quintiere J. G. Enclosure Fire Dynamics. CRC Press, 2000, 316 p.
3. Fire Dynamics Simulator (FDS) and Smokeview (SMV) [Электронный ресурс]. – Режим доступа: <https://pages.nist.gov/fds-smv/>. – Заглавие с экрана. – (Дата обращения 13.10.2017).
4. Маркус Е.С., Кузнецов ЕА., Снегирёв А.Ю. Режимы распространения пламени по поверхности горючего материала: численное моделирование и теоретический анализ. В сб.: Неделя науки СПбПУ-2017, СПбПУ, 2017.
5. Ren N., de Vries J., Zhou X., Chaos M., Meredith K. V., Wang Y. Large-scale fire suppression modeling of corrugated boxes on wood pallets in rack-storage configurations // Fire Safety Journal. – 2017. – V. 91. – P. 695-704.

ТЕРМОДИНАМИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ ПРОЦЕССА ПОЛУЧЕНИЯ
ФТОРИДА ВОДОРОДА ИЗ ТЕТРАФТОРИДА КРЕМНИЯ
В ПЛАМЕНИ ВОДОРОДСОДЕРЖАЩЕГО ТОПЛИВА
И КИСЛОРОДСОДЕРЖАЩЕГО ОКИСЛИТЕЛЯ

Введение. Безводный фторид водорода (БФВ, содержание основного вещества не менее 99.9%, содержание воды не более 0.06%) является основным фторирующим агентом при производстве фторидов урана, хладонов, электронных газов и т.д. [1, 2].

Единственный освоенный современной промышленностью метод получения БФВ – сернокислотное разложение природного высококачественного CaF_2 [2]:



В РФ запасы CaF_2 истощены, и его приходится импортировать. Поэтому разработка альтернативных способов получения БФВ является актуальной задачей.

При производстве фосфатных удобрений из фторапатита образуется значительное количество тетрафторида кремния (ТФК), который гидролизуют и затем нейтрализуют, а твёрдые фторсодержащие отходы размещают на полигонах промышленных отходов [3]. Поэтому целесообразно рассмотреть возможность получения фторида водорода из ТФК.

Фторид водорода может быть получен при взаимодействии ТФК с водой:



Для реакции (2) изменение энергии Гиббса [4, 5]:

$$\Delta G_T = \Sigma G_j - \Sigma G_i, \quad G_{i,j} = H_{i,j} - TS_{i,j}, \quad (3)$$

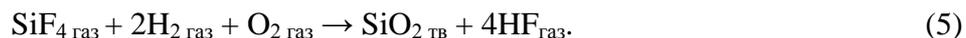
$$S_{i,j} = S_{f,i,j,298} + \int_{298}^{T_{\text{исх}}} \left(\frac{C_{p,i,j}}{T} \right) dT, \quad H_{i,j} = H_{f,i,j,298} + \int_{298}^{T_{\text{исх}}} (C_{p,i,j}) dT, \quad C_p(T) = a + bT, \quad (4)$$

где $G_{i,j}$, $H_{i,j}$, $S_{i,j}$ – энергия Гиббса, кДж; энтальпия, кДж·моль⁻¹; энтропия исходных и конечных веществ соответственно при заданной температуре, Дж·моль⁻¹·К⁻¹; $H_{f,i,j,298}$, $S_{f,i,j,298}$ – энтальпия, кДж·моль⁻¹; энтропия образования исходных и конечных веществ соответственно при нормальных условиях, Дж·моль⁻¹·К⁻¹; C_p – теплоёмкость, Дж·моль⁻¹·К⁻¹; а и b – коэффициенты полинома теплоёмкости. Значения необходимых для расчёта термодинамических величин выбирали на основе данных [5].

На рис. 1 приведены результаты расчёта зависимости изменения энергии Гиббса от температуры для реакции (2). Из полученных данных следует, что эта реакция является обратной, скорость прямой реакции равна скорости обратной реакции при $T_{\text{кр}} = 1085$ К.

Таким образом, для того, чтобы получить фторид водорода из ТФК нужно проводить его гидролиз при температуре выше $T_{\text{кр}}$ и быстро охлаждать продукты.

Для реализации высокотемпературного гидролиза предлагается проводить обработку ТФК в пламени водородсодержащего топлива и кислородсодержащего окислителя, например:



Для решения вопроса о возможности реализации такого процесса необходимо вычислить величины адиабатической температуры и температуры с учётом теплового излучения гетерогенного пламени, изменения энергии Гиббса в зависимости от температуры в реакциях взаимодействия ТФК с водородсодержащим топливом и кислородсодержащим окислителем.

В качестве водородсодержащего топлива предложено рассмотреть водород, метан и аммиак, а в качестве кислородсодержащего окислителя – кислород и воздух.

Анализ литературных данных позволил сделать вывод, что устойчивыми при температуре выше 1000 К соединениями в системе элементов Si-H-F-O являются диоксид кремния (ДОК), ТФК, вода и фторид водорода.

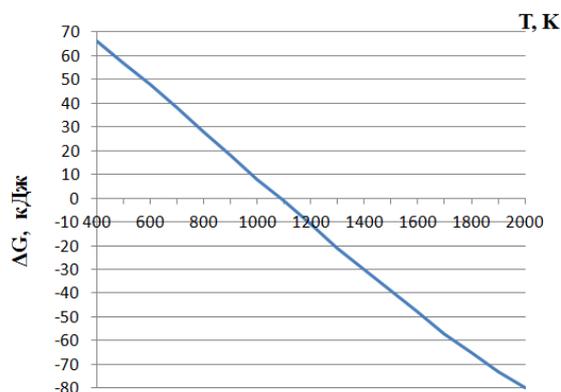


Рис. 1. Зависимость изменения энергии Гиббса от температуры для реакции гидролиза ТФК

При температуре выше 1000 К существуют три кристаллические модификации ДОК: β-кварц, β-тридимит и β-кristобалит. В обычных условиях переходы между различными формами ДОК затруднены; это позволяет провести расчёты для нескольких модификаций ДОК в широком интервале температур за пределами области их равновесных переходов [5].

Для расчёта адиабатической температуры конечных продуктов реакций применяли уравнение Кирхгофа для изобарного процесса [5]:

$$Q + \Delta H_j - \Delta H_i = 0, \quad \Delta H_j = \sum \left(\nu_j \cdot \int_{T_{исх}}^{T_{ад}} C_{pj} dT \right), \quad \Delta H_i = \sum \left(\nu_i \cdot \int_{298}^{T_{исх}} C_{pi} dT \right), \quad (6)$$

где ΔH_j – изменение энтальпии конечных продуктов реакции при нагреве от исходной температуры до адиабатической; ΔH_i – изменение энтальпии исходных веществ от температуры 298 К до исходной температуры; $\nu_{i,j}$ – стехиометрические коэффициенты.

Известно, что гетерогенный факел теряет до 40 % выделяющейся энергии за счет теплового излучения [6], тогда при расчёте температуры продуктов с учётом излучения:

$$Q - Q_{луч} + \Delta H_{прод} - \Delta H_{исх} = 0, \quad Q_{луч} = kQ, \quad (7)$$

где $k = 0.4$ – характеристика потерь энергии за счет теплового излучения.

Результаты расчета адиабатической температуры и температуры с учетом теплового излучения пламени для процесса (5) приведены в табл.1.

Табл. 1. Результаты расчёта адиабатической температуры $T_{ад}$ и температуры с учетом излучения гетерогенного пламени $T_{рад}$ для системы ТФК – водород – кислород (5) для различной начальной температуры $T_{нач}$.

$T_{нач}, K$	$T_{ад}, K$	$T_{рад}, K$	$T_{ад}, K$	$T_{рад}, K$	$T_{ад}, K$	$T_{рад}, K$
	β-кварц		β-тридимит		β-кristобалит	
400	–	–	2544	1760	–	–
600	–	–	2886	2120	2812	2055
800	–	–	3226	2476	3161	2415
1000	3547	2803	3563	2829	3508	2773

На основе данных результатов, можно сделать вывод, для исследуемой реакции адиабатическая температура продуктов составляет 2544-3563 К, температура с учётом теплового излучения гетерогенного пламени – 1760-2829 К. Кристаллическая форма ДОК мало влияет на значения температуры. Эти значения существенно выше температуры $T_{кр}$.

Результаты расчета зависимости изменения энергии Гиббса от температуры для реакции (5) приведены в табл.2.

Табл. 2. Результаты расчета зависимости изменения энергии Гиббса от температуры для системы ТФК – водород – кислород (5).

Т, К	–ΔG, кДж		
	β-кварц	β-тридимит	β-кристобалит
800	–	1283	1301
1000	1393	1372	1396
1200	1488	1463	1494
1400	1582	1554	1592
1600	1676	1646	1689

Значения изменения энергии Гиббса отрицательны и находятся в диапазоне 1283-1689 кДж. Выбор кристаллической формы ДОК не оказывает существенного влияния на полученные результаты.

Таким образом переработка ТФК в пламени водородсодержащего топлива и кислородсодержащего окислителя с получением фторида водорода термодинамически не запрещена. Аналогичные результаты были получены для метана и аммиака в качестве топлива и воздуха в качестве окислителя.

Выводы.

Термодинамическими расчётами показано, что реакция гидролиза ТФК с образованием ДОК и фторида водорода обратима. Скорость прямой реакции равна скорости обратной реакции при $T_{кр} = 1085$ К. Т. о., чтобы получить фторид водорода из ТФК нужно проводить его гидролиз при температуре выше указанной и затем быстро охлаждать продукты.

Адиабатическая температура продуктов переработки ТФК в пламени водородсодержащего топлива и кислородсодержащего окислителя для исследованных веществ меняется от 2544 К до 3563 К, а температура с учётом излучения гетерогенного факела – от 1760 К до 2829 К. Эти значения существенно выше $T_{кр}$. Изменения энергии Гиббса во всем исследованном диапазоне температуры для этих процессов отрицательны и находятся в диапазоне 1283-1689 кДж. Кристаллическая форма ДОК мало влияет на значения температуры и изменения энергии Гиббса.

Таким образом, переработка ТФК в пламени водородсодержащего топлива и кислородсодержащего окислителя может стать основой метода получения фторида водорода из ТФК.

ЛИТЕРАТУРА:

1. Тураев Н.С., Жерин И.И. Химия и технология урана: Учебное пособие для вузов. – М.: ЦНИИАТОМИНФОРМ, 2005. – 407 с.
2. Максимов Б.Н, Барабанов В.Г., Серушкин И.Л и др. Промышленные фторорганические продукты: Справ. изд. – Л.: Химия, 1990. – 464 с.
3. Галкин Н.П., Зайцев В.А., Серегин М.Б. Улавливание и переработка фторсодержащих газов. – М.: Атомиздат, 1975 – 240 с.
4. Карапетьянц М.Х., Дракин С.И. Общая и неорганическая химия. Учебное пособие для вузов. – М.: Химия, 1981. – 632 с.
5. Термодинамические свойства индивидуальных веществ. Справочное издание: В 4-х т. / Л.В. Гурвич, И.В. Вейц, В.А. Медведев и др. – 3-е изд., перераб. и расширен. – Т.1. Кн.1. – М.: Наука, 1978. – 496 с. – Т.1. Кн.2. – М.: Наука, 1978. – 328 с. – Т.2. Кн.2. – М.: Наука, 1979. – 344 с.
6. Souil J.M., Joulain P., Gengembre E. Experimental and Theoretical Study of Thermal Radiation from Turbulent Diffusion Flames to Vertical Target Surfaces // Combustion Science and Technology. – 1984. – Vol. 41. – P. 69-81.

ЧИСЛЕННОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ КАВИТАЦИОННЫХ ТЕЧЕНИЙ С УЧЕТОМ ДЕГАЗАЦИИ ЖИДКОСТИ

Кавитацией называется явление образования в жидкости полостей, заполненных газообразной средой, при падении давления. Развитие кавитации приводит к эрозионному разрушению материалов, а также к генерации шума, и поэтому становится очень актуальной проблемой при решении широкого круга прикладных задач. К таким прикладным задачам относятся проектирование различных гидравлических устройств, лопаток гидротурбин, гребных винтов, технология ультразвуковой очистки твердых поверхностей и многие другие, в основе которых лежит явление кавитации.

Во всех жидкостях, используемых в реальных технических устройствах, есть некоторое содержание растворенного газа. Известно, что концентрация растворенного воздуха в воде при нормальных условиях составляет от 8% до 14% [1]. Присутствие растворенного газа снижает способность жидкости выдерживать растяжения и, следовательно, увеличивает вероятность возникновения кавитации. Также в процессе роста кавитационного пузыря (или полости) растворенный газ переносится из жидкости в пузырь (или полость) за счет диффузии через межфазную поверхность. Поэтому, зачастую, помимо испарения жидкости, важным механизмом кавитации становится также процесс дегазации жидкости при падении давления. Целью настоящей работы является разработка модели кавитационных течений с учетом процесса дегазации.

Несмотря на то, что проблема кавитации уже давно является предметом многих исследований, в литературе представлено мало работ, в которых кавитация рассматривается как взаимодействие процесса испарения (фазового перехода) и процесса дегазации, т.е. диффузии растворенного газа через межфазную поверхность. В большинстве существующих и применяемых на практике моделей рассматривается только фазовый переход.

Из экспериментальных исследований по газовыделению можно отметить работы [2; 3]. В работе [2] экспериментально изучено выделение воздуха в жидкости при течении в канале с переменным сечением для разных перепадов давления. Из численных исследований по дегазации жидкости заслуживает внимания работа [4]. В этой работе в рамках лагранжево-эйлеровского описания исследуется дегазация жидкости при течении в трубе под действием силы тяжести при падении давления. Рассматривается вклад гетерогенной нуклеации газовых пузырей и диффузии растворенного газа в образовавшиеся пузыри. Важно, что получено удовлетворительное согласие с экспериментальными данными по объемной доле выделившегося газа.

В настоящей работе динамика двухфазной среды (смеси жидкости, пара и газа) описывается с помощью модели, основанной на предположении механического и термодинамического равновесия фаз и на введении общих параметров, представляющих сразу обе фазы. То есть кавитация описывается в приближении равновесного фазового перехода. Двухфазная среда рассматривается как квазигомогенная смесь с общими для обеих фаз полями плотности, скорости и давления. Для замыкания системы уравнений Навье-Стокса и описания возникновения кавитации при падении давления необходимо ввести уравнение состояния. Также в настоящей работе предполагается, что можно пренебречь изменениями температуры, и поэтому уравнение энергии в модель не входит.

Плотность смеси жидкости, пара и газа выражается через плотности и массовые доли отдельных компонент следующим образом:

$$\frac{1}{\rho} = \frac{x}{\rho_s} + \frac{m}{\rho''} + \frac{1-x-m}{\rho'}$$

Здесь ρ , ρ' , ρ'' и ρ_s - плотности смеси, жидкости, пара и растворенного газа соответственно; x и m - массовые доли растворенного газа и пара соответственно.

Если давление смеси больше давления насыщения (т.е. смесь представляет собой чистую жидкость), то используется следующее уравнение состояния:

$$\rho(p) = \rho_0 + \frac{1}{c_L^2}(p - p_v)$$

Здесь ρ_0 - плотность жидкости при давлении, равном давлению насыщения, c_L - скорость звука в чистой жидкости (считается постоянной), p_v - давление насыщения.

Таким образом, баротропное уравнение состояния для двухфазной смеси, учитывающее возможность фазового перехода и используемое в настоящей работе, имеет следующий вид:

$$\rho(p) = \begin{cases} \rho_0 + \frac{1}{c_L^2}(p - p_v), & p \geq p_v \\ \frac{1}{\frac{m(p)}{p} + \frac{1-m(p)-x}{\rho_0} + \frac{x}{\rho_s}}, & 0 < p < p_v \\ R_v T_0 \end{cases}$$

Здесь R_v - газовая постоянная для пара, T_0 - температура смеси (считается постоянной).

Для моделирования турбулентности в настоящей работе выбран метод IDDES на основе RANS модели Спаларта-Аллараса (SA-IDDES). Применение вихререзающих подходов является предпочтительным при расчете кавитационных течений, поскольку условия для возникновения кавитации (локальные зоны низкого давления) могут создаваться в самих турбулентных вихревых структурах.

Модель, используемая в настоящей работе для оценки газовой выделения, основана на аналитическом решении квазистационарного уравнения диффузии газа в сферической области вблизи пузыря. При этом для постановки граничного условия на поверхности пузыря используется закон Генри, а на внешней границе ячейки, приходящейся на один пузырь, используется исходное значение концентрации растворенного газа в жидкости. Аналитическое решение полученной краевой задачи дает выражение для градиента концентрации газа и позволяет определить массу газа, переходящего из растворенного состояния в пузырьки в единицу времени в единице объема.

В рамках настоящей работы проведены расчеты трехмерного нестационарного течения кавитирующей жидкости в канале, моделирующем экспериментальную установку, используемую в лаборатории научно-исследовательского центра фирмы Robert Bosch GmbH. Схема и размеры канала представлены на рис. 1. На левой границе давление P_{in} равно 300 бар, на правой границе давление P_{out} равно 114 бар, температура жидкости 80°C.

Все расчеты проведены с использованием открытой вычислительной системы OpenFOAM [5]. Главным преимуществом OpenFOAM является открытый доступ ко всему коду и, как следствие, возможность реализации собственных решателей и внедрения собственных моделей, что и было сделано в настоящей работе. Реализованная модель кавитационных течений протестирована на простых одномерных задачах двух типов: одномерная задача Римана о распаде разрыва и цилиндрический распад разрыва в одномерной постановке. Результаты тестовых расчетов показывают, что модель правильно воспроизводит скорости распространения возмущений, а численная схема при этом, с одной

стороны, не генерирует нефизичных осцилляций, с другой, не вносит большой схемной вязкости.

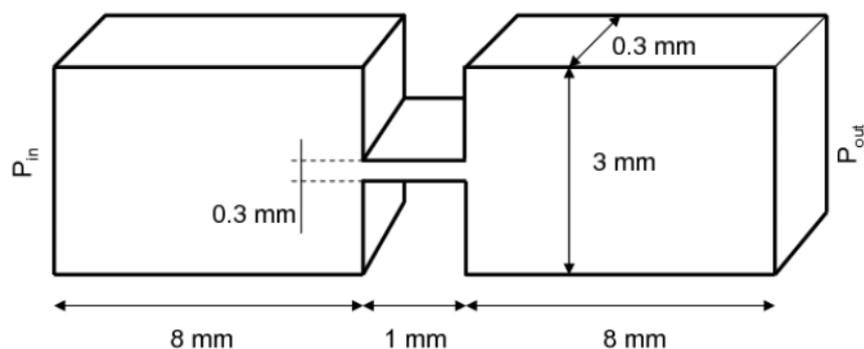


Рис. 1. Геометрия канала

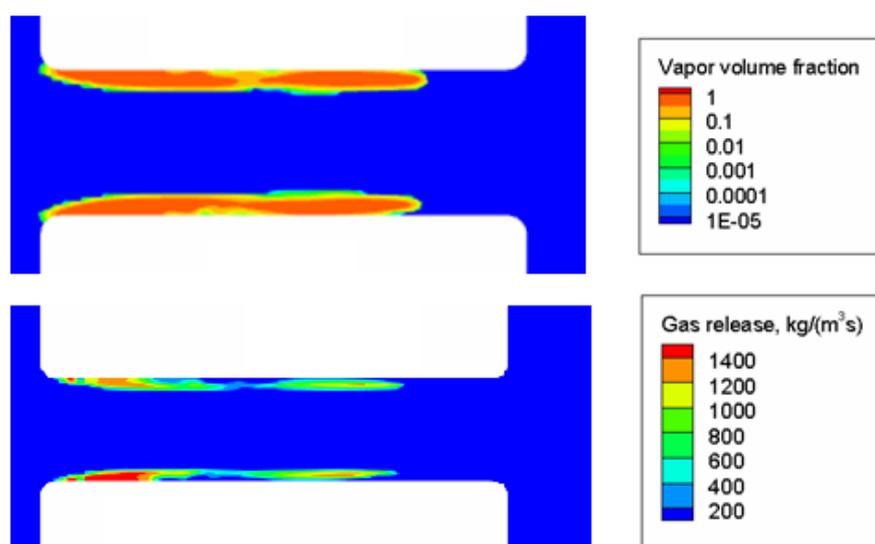


Рис. 2. Результат применения оценки для газовыделения; сверху – объемная доля пара, снизу – масса газа, выделяющегося в единице объема в единицу времени

На рис. 2 показан результат применения предложенной оценки газовыделения в условиях рассматриваемого кавитационного течения. Видно, что газовыделение происходит в тех же самых областях, в которых образуется пар. Интегрирование по всему объему канала и по характерному времени течения дает суммарную массу выделившегося газа порядка 10^{-13} кг. Аналогичная интегральная оценка, сделанная для суммарной массы пара в образующихся полостях, также дает величину порядка 10^{-13} кг. Таким образом, результаты расчетов свидетельствуют о том, что суммарный эффект от выделения растворенного газа в рассматриваемых условиях сопоставим с суммарным эффектом от испарения жидкости.

ЛИТЕРАТУРА:

1. Brennen, C. E. Cavitation and Bubble Dynamics. Oxford University Press, 1995.
2. Freudigmann H.A., Iben U., Pelz P.F. (2015) Air release measurements of V-oil 1404 downstream of a micro orifice at choked flow conditions // J Phys Conf Ser. – 2015. – Vol. 656(1):012113.
3. Iben U., Wolf F., Freudigmann H.A., Fröhlich J., Heller W. (2015) Optical measurements of gas bubbles in oil behind a cavitating micro-orifice flow // Exp Fluids. – 2015. – Vol. 56(6). – P. 1-10.
4. Китанин Э.Л., Кумзерова Е.Ю., Чернышев А.С., Шмидт А.А. Дегазация жидкости при течении в трубе в условиях падения давления // Письма в ЖТФ. – 2007. – Т. 33, вып. 16. – С. 65-71.
5. OpenFOAM: the open source CFD toolbox [Электронный ресурс] // URL: <https://www.openfoam.com/> (дата обращения: 24.10.2017)

ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ СВЕРХЗВУКОВОГО ОБТЕКАНИЯ ЗАКРУГЛЕННОГО СПЕРЕДИ ТЕЛА ПРИ НАЛИЧИИ ВНЕШНЕГО ЭНЕРГОПОДВОДА

В настоящее время в гиперзвуковой аэродинамике одной из актуальных задач является исследование возможности воздействия на течение в окрестности летящего тела с целью влияния на силу сопротивления или тепловой поток. Постановка экспериментов со сверхзвуковыми потоками очень трудоемка и требует специального оборудования, поэтому широкое применение находят численные методы решения таких задач. Расчет течений со сверхзвуковыми скоростями представляет определенную сложность, так как переход к дозвуковому течению обычно происходит с возникновением скачков уплотнения (ударных волн), где происходит резкое изменение параметров течения. Положение и форма ударной волны при обтекании тела сверхзвуковым потоком в значительной степени определяет характеристики газа вблизи тела, а, следовательно, и величину силы сопротивления.

Существуют различные способы управления течением при сверхзвуковом обтекании тела. В работах [1, 2] рассматривается управление положением ударных волн, аэродинамическим сопротивлением, а также подъемной силой при помощи магнитогидродинамического воздействия. К немеханическим способам воздействия также можно отнести плазменное и тепловое [3, 4].

В настоящей работе рассматривается тепловое воздействие на характеристики обтекания закругленного тела, причем зона энерговыведения находится у закругленной части тела за ударной волной (рис. 1). Численное моделирование течения производится путем решения системы уравнений Навье-Стокса, дополненной уравнением баланса энергии и замыкающим соотношением для совершенного газа (уравнением Клапейрона-Менделеева). Расчеты были выполнены в свободно распространяемом пакете OpenFOAM, который позволяет решать различные задачи гидрогазодинамики методом конечных объемов.

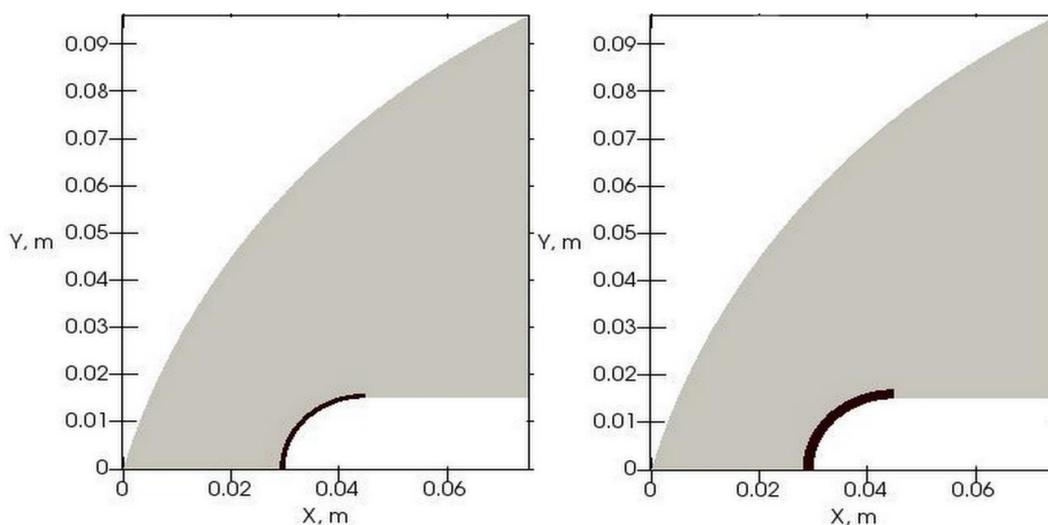


Рис. 1. Расчетная область и зоны энерговыведения

Для получения решения была построена сетка, содержащая 96000 ячеек, причем сгущение узлов сетки осуществлялось к поверхности тела. Характеристики газа (газ – ксенон, показатель адиабаты $\gamma=5/3$), используемые в расчетах: молярная масса 131.1 г/моль,

теплоемкость при постоянном давлении 158 Дж/(кг·К), число Прандтля 0.66, зависимость вязкости от температуры определяется по формуле Сазерленда:

$$\mu = \frac{As\sqrt{T}}{1 + \frac{T_s}{T}}; \quad As = 3 \cdot 10^{-6} \text{ Па} \cdot \text{с} / \text{К}^{1/2}, \quad T_s = 490 \text{ К}$$

Параметры набегающего потока $U_{\text{вх}} = 1726$ м/с, $V_{\text{вх}} = 0$ м/с, $T_{\text{вх}} = 657$ К, $p_{\text{вх}} = 1979$ Па, что соответствует числу Маха 6.5 (получены из вспомогательного расчета течения газа в расширяющемся сопле). На поверхности тела осуществляется условие прилипания и равенство нулю теплового потока.

Задача решалась в двух постановках: плоскосимметричной и осесимметричной, а также при двух различных размерах зон энерговыделения (расчетная область представлена на рис. 1, черным цветом показаны зоны, где происходит энерговыделение). Объемная плотность выделяемой энергии постоянна во всех расчетах и равна 9.95×10^6 Вт/м³, приток тепла происходит в течение времени 0.0001 с. В качестве значений параметров в нулевой момент времени берется сошедшее стационарное решение без энерговыделения.

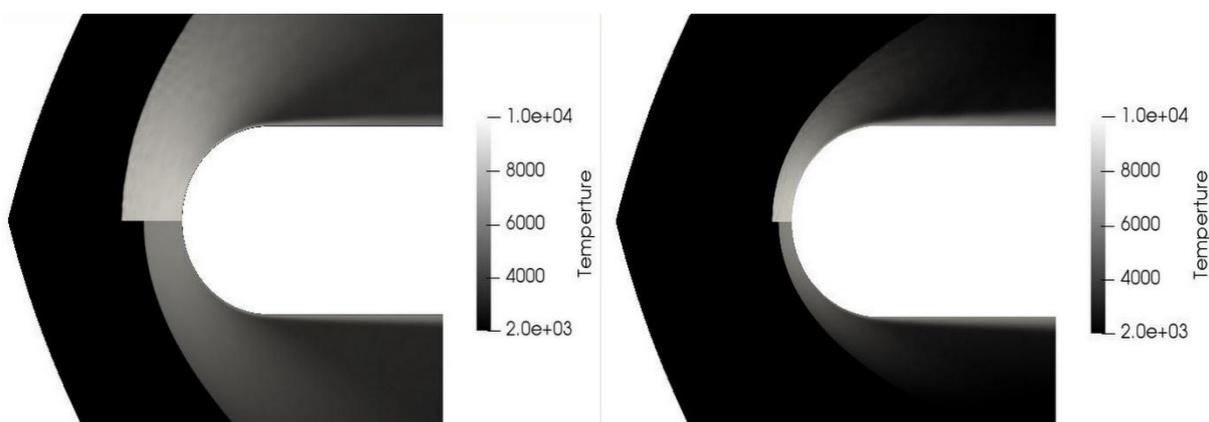


Рис. 2. Распределение температуры в Кельвинах для плоскосимметричной (слева) и осесимметричной (справа) задач

При наличии энергоподвода происходит перестройка течения вблизи тела, и ударная волна отходит дальше от поверхности тела (рис. 2, на нижней половине рисунка приведено решение без энерговыделения для сравнения расстояния, на которое отошла ударная волна от тела). Такой эффект наблюдается для обеих геометрий задачи: плоскосимметричной и осесимметричной.

Наибольшие значения температуры на поверхности тела в обоих случаях наблюдаются, как и ожидается, на закругленной части тела, у которой и происходит объемное выделение энергии. Была рассчитана сила давления как интеграл давления, которое вносит вклад в силу сопротивления, по поверхности закругленной части тела. Оказалось, что сила давления практически не изменилась по сравнению с расчетом без энерговыделения (отличия не превосходят 5%). На рис. 3 и 4 показано распределение давления по поверхности тела (координата s отсчитывается от передней критической точки по поверхности тела). Видно, что в задачах при отсутствии энерговыделения распределение давления по поверхности тела мало отличается от распределения давления в задачах с малой и большой зоной энерговыделения.

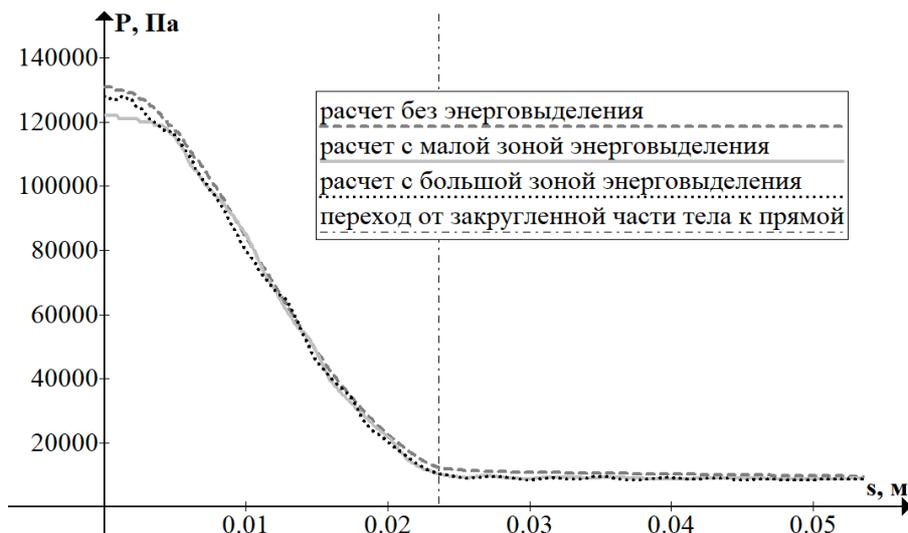


Рис. 3. Распределение давления вдоль поверхности тела для расчетов без энергосвечения, а также с малой и большой зонами энергосвечения для плоскосимметричной задачи

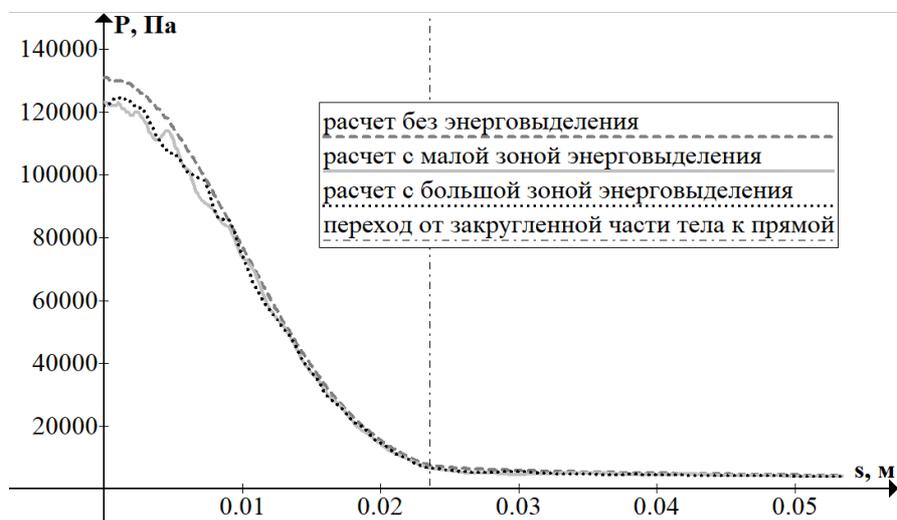


Рис. 4. Распределение давления вдоль поверхности тела для расчетов без энергосвечения, а также с малой и большой зонами энергосвечения для осесимметричной задачи

Из проведенного численного моделирования, можно сделать вывод, что в нашей задаче энергосвечение вблизи поверхности тела за ударной волной приводит к отходу ударной волны от поверхности тела и увеличению температуры вблизи поверхности тела, но не приводит к значительному изменению силы сопротивления. Более существенное влияние на распределение давления у поверхности тела и, как следствие, на силу сопротивления можно оказать, существенно увеличивая объемную плотность выделяемой энергии или время воздействия. В продолжение настоящей работы запланировано исследование такого сильного воздействия, при этом потребуются привлечения более сложной математической модели, так как сильный рост температуры может привести к ионизации газа.

ЛИТЕРАТУРА:

1. Лапушкина Т.А., Ерофеев А.В, Поняев С.А. Сверхзвуковое обтекание тела при воздействии электрического и магнитного полей // Журнал технической физики. – 2011. – Т. 81. Вып. 5. С. – 28-34.
2. Лапушкина Т.А., Ерофеев А.В, Поняев С.А. Изменение давления у поверхности обтекаемого сверхзвуковым потоком тела магнитогидродинамическим методом // Журнал технической физики. – 2014. – Т. 84. Вып. 7. – С. 24-29.

3. Azarova O.A., Knight D.D. An approach of drag force decrease for combined cylinder AD bodies under the action of microwave and laser energy deposition // Aerospace Science and Technology. – 2017. – V. 64. – P. 154–160.

4. Азарова О.А., Ерофеев А.В, Лапушкина Т.А. Сравнение плазменного и теплового воздействий на сверхзвуковое обтекание аэродинамического тела // Письма в ЖТФ. – 2017. – Т.43. Вып.8. – С.93-101.

УДК 546.215; 544.4

А.В. Суворов^{1,3}, А.И. Бенин², А.А. Коссой³

¹Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого

²Закрытое Акционерное Общество «Химинформ».

³ФГУП Российский научный центр «Прикладная химия»

ПРИМЕНЕНИЕ МАТЕМАТИЧЕСКОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ ДЛЯ ОЦЕНКИ ПАРАМЕТРОВ БЕЗОПАСНОСТИ ОБЪЕКТА С ВЫСОКОКОНЦЕНТРИРОВАННЫМ ПЕРОКСИДОМ ВОДОРОДА

Аннотация. Предложен новый метод количественного прогнозного расчета стабильности и безопасности ВПВ в любом реальном объекте, основанный на сочетании методик экспериментальной динамической манометрии и автоматизированного кинетического анализа данных (математическое моделирование).

Ключевые слова: термическое разложение, высококонцентрированный пероксид водорода, математическое моделирование, кинетические параметры, кинетическая модель.

Введение. Высококонтрированный пероксид водорода (ВПВ) – химический продукт большого практического значения, главная опасность которого – способность к экзотермическому разложению с выделением газа уже при малых степенях превращения. В настоящее время применяются следующие методы определения стабильности и безопасности ВПВ: показатель термостабильности (ПТ) [1], *AOL+Stability* [2], математическое моделирование. Наиболее адекватным и перспективным из них является именно математическое моделирование.

Постановка и описание цели. Цель данного исследования – расчет параметров безопасности объекта, содержащего ВПВ с помощью метода, сочетающего методики экспериментальной динамической манометрии и автоматизированного кинетического анализа (математического моделирования).

Методика исследования. При использовании метода математического моделирования исследование стабильности ВПВ и безопасности реального натурального объекта проводится на его математической модели. Кинетическая модель химической реакции – математическая модель, адекватно описывающая закономерности реакции. Основой кинетического моделирования является макрокинетическое описание процесса. В данной работе проводилось построение кинетической модели термического разложения ВПВ марки ПВ-85 в контакте с алюминием марки АД-1 с использованием экспериментальной термоманометрической установки УТМ-1 и программно-методического комплекса *TSS ADaExpert-DesKPro* [2].

На первом этапе (эксперимент) на установке УТМ-1 образец ВПВ помещался в герметичную фторопластовую ячейку и подвергался управляемому нагреву до 120°C с постоянной скоростью 0.5 °C/мин. После этого эксперимент повторялся в контакте с образцом АД-1, погруженным в ВПВ. При этом проводилось непрерывное измерение давления и температуры внутри ячейки.

Первичная обработка экспериментальных данных (программа *TSS ADaExpert*) заключалась в следующих последовательных операциях: определение давления кислорода, расчет газовой выделения.

Кинетический анализ экспериментальных данных проводился с помощью программы *TSS DesKPro* и включал в себя две составляющие.

Структурная идентификация т.е. нахождение модели, наиболее адекватной изучаемой реакции. В работе [3] сделано заключение, о том, что разложение ВПВ описывается двухфазной гомогенно-гетерогенной моделью первого порядка вида:

$$-\frac{dC}{dt} = \left(k_{01} * \exp\left(\frac{-E_{a1}}{R * T}\right) + \frac{S_c}{V} * k_{0C} * \exp\left(\frac{-E_{aC}}{R * T}\right) \right) * C \quad (1)$$

где C – концентрация ПВ в жидкой фазе, моль/л;

k_{01}, E_{a1} – кинетические параметры гомогенной жидкофазной стадии разложения ВПВ;

k_{0C}, E_{aC} – кинетические параметры гетерогенной стадии разложения ВПВ на поверхности реакционной ячейки (или бака);

S_c – внутренняя поверхность реакционной ячейки (геометрические размеры), см²;

V – объем ВПВ, см³.

Определение численных параметров модели (1) (параметрическая идентификация) проводилась в автоматизированном режиме посредством программы *TSS DesKPro*. Для этого нужно минимизировать целевую функцию SS (суммы квадратов невязок):

$$SS(\bar{U}) = \frac{1}{2} * \sum_i \left(\frac{Y_{\text{exp}}(t_i) - Y_{\text{sim}}(\bar{U}, t_i)}{\varepsilon_i} \right)^2 \longrightarrow \min = SS(\bar{U}_r) \quad (2)$$

где $SS(\bar{U})$ – взвешенная сумма квадратов невязок;

i – номер экспериментальной точки;

ε – экспериментальная погрешность в точке;

$Y_{\text{exp}}, Y_{\text{sim}}$ – экспериментальный и расчетный отклики, соответственно.

Результаты и их обсуждение. Вначале были определены кинетические параметры гомогенного разложения ПВ-85 в объеме и гетерогенного разложения на стенке реакционной ячейки (фторопласт-4): $E_a = 101.8$ кДж/моль, $k_0 = 2.45 \times 10^7$ 1/с и $E_a = 79.8$ кДж/моль, $k_0 = 4.17 \times 10^3$ см/с. Затем были определены кинетические параметры для разложения ВПВ в контакте с образцом алюминия АД-1: $E_a = 80.2$ кДж/моль, $k_0 = 2.34 \times 10^5$ см/с.

Для верификации модели проведено сопоставление экспериментально измеренного и рассчитанного по модели (1) газовыделения ВПВ четырех концентраций от 40 % до 70 % (рис. 1).

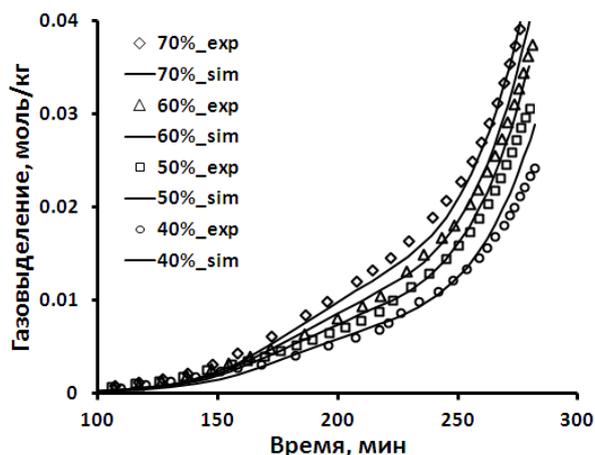


Рис. 1. Верификация модели (1): *exp* – эксперимент, *sim* – расчет по модели

Хорошее совпадение расчетных и экспериментальных результатов подтверждает высокую достоверность и работоспособность кинетической модели.

Используя предложенную модель, с помощью программ *TSS ConEx* и *BST* определены условия безопасной эксплуатации изделия (цилиндрический бак из алюминия АД-1 объемом 5 м³, максимально допустимое давление 45 атм.) с ВПВ марки ПВ-85. Гарантирована стабильность ВПВ и безопасность применения изделия в течение 30 суток при температуре до +40°С.

Выводы. Для точной оценки параметров безопасности ВПВ в реальном объекте целесообразнее использовать методику построения кинетической модели реакции термического разложения, основанной на методе математического моделирования, наиболее адекватно описывающую данный процесс. Такая методика реализована в программно-методическом комплексе *TSS ADaExpert-DesKPro*, разработанной ЗАО «Химинформ». Предложенный метод, основанный на сочетании экспериментальной динамической манометрии (УТМ-1) и математического моделирования (*TSS ADPro-DesKpro*) позволяет с высокой точностью провести полный расчет безопасности реального объекта с ВПВ без существенных затрат времени и средств.

ЛИТЕРАТУРА:

1. ГОСТ Р 50632-93. Водорода пероксид высококонцентрированный. Технические условия. Введ. 1993-12-30. – М.: Изд-во стандартов, 1994. 37 с. – С. 29, 5.
2. Бенин А.И., Косой А.А., Кочетов О.А., Подлевских Н.А., Суворов А.В. Система исследований термической безопасности высококонцентрированной перекиси водорода // Материалы бой Всероссийской конференции «Энергетические конденсированные системы» (к столетию академика Б.П. Жукова), Черногловка-Дзержинский, 14-17 ноября. – Черногловка, 2012. – С. 120-123.
3. Суворов А.В., Бенин А.И., Улыбин В.Б. Сравнительный анализ методов оценки термостабильности растворов высококонцентрированного пероксида водорода // Известия СПбГТИ (ТУ). – 2014. – № 27. – С. 28-32.
4. Ventura, M.C. Long Term Storability of Hydrogen Peroxide // 41st AIAA/ASME/SAE/ASEE Joint Propulsion Conference & Exhibit, Tucson, AZ, July 10-13, 2005. AIAA-2005-4551. – 8 p.

УДК 536.25

Е.Ф. Храпунов, И.В. Потехин, Ю.С. Чумаков
Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого

ТЕПЛООБМЕН В СВОБОДНОКОНВЕКТИВНОМ ФАКЕЛЕ ПРИ МАЛЫХ ЧИСЛАХ ГРАСГОФА

Свободная конвекция является определяющим типом движения во многих прикладных задачах, например, метеорологических, задачах охлаждения и вентилирования, задачах создания микроклимата. Анализ известных авторам работ показывает, что основные успехи были достигнуты при изучении течений в замкнутых объемах и вдоль вертикальных нагретых поверхностей. Нагрев поверхности приводит к появлению свободноконвективного движения, и, как следствие, к формированию свободноконвективного пограничного слоя на этой поверхности, закономерности развития которого схожи с закономерностями развития хорошо изученного вынужденно конвективного пограничного слоя. В частности, можно выделить участки ламинарного, переходного, и развитого турбулентного течения.

Иначе обстоит дело, когда нагреваемая поверхность перпендикулярна вектору ускорения свободного падения. Формирующееся в подобных конфигурациях пристенное течение разрушается, под действием силы Архимеда, возникает восходящая

свободноконвективная струя – свободноконвективный факел. Теплообмен в этом случае имеет сложный характер вследствие взаимодействия пристенного и восходящего течений.

Имеется большое количество работ (преимущественно экспериментальных, например, [1, 2]), в которых описаны характеристики свободноконвективного теплообмена, в частности получены зависимости теплового потока на поверхности, а также зависимости числа Нуссельта от числа Грасгофа – критерия, являющегося определяющим в задаче. Отдельно стоит отметить работу [3], в которой используется оптический метод для получения сведений не только о теплообмене, но и о структурном развитии потока в пространстве.

К настоящему времени методика диагностики описанных течений существенно изменилась. В физическом эксперименте измерение скорости потока часто осуществляется с помощью систем типа LDA и PIV [4], в ходе численного моделирования используются либо вихреразрешающие подходы типа LES [5], либо метод прямого численного моделирования DNS [6]. Использование современных подходов позволило выделить новые устойчивые режимы течения, теплообмен в которых носит сложный характер.

В настоящей работе представлены результаты экспериментального и численного исследования течения при малых числах Грасгофа над горизонтальным нагретым диском, а также влияние этого течения на характеристики теплообмена.

Для проведения экспериментальной части исследования, на кафедре «Гидроаэродинамика, горение и теплообмен» Санкт-Петербургского государственного политехнического университета Петра Великого разработан экспериментальный стенд, схема которого представлена на рис. 1. Подробно о каждом элементе экспериментального стенда можно найти, например, в [7]. Здесь лишь отметим, что основная особенность стенда – возможность беспрепятственного увлечения окружающего воздуха в поток. В ходе работы проведены подробные измерения поля температуры в пространстве над диском с использованием термометра сопротивления, чувствительный элемент которого обладает малой инерционностью. Используя значения средней температуры в точках над диском определены средние значения теплового потока. Для этого использовалась гипотеза о наличии в воздухе тонкого теплопроводного слоя.

Численное моделирование произведено с использованием кода ANSYS Fluent и заключается в решении уравнений Навье–Стокса в приближении Буссинеска и предположении о ламинарности течения в трехмерной области, размеры которой соответствуют размерам экспериментального стенда и близки к размерам расчетных областей, описанных в работах других авторов [5, 6]. Пример построенной квазиструктурированной сетки содержащей $N_{cell} \approx 10^6$ элементов и имеющей сгущение к ожидаемым границам факела и к твердым горизонтальным поверхностям представлен на рис. 2. На боковых и верхних поверхностях задаются граничные условия нулевого избыточного давления, а также условия существования только нормальной к границе компоненты скорости при затекании потока внутрь области. Нижняя горизонтальная поверхность – твердая стенка, поддерживаемая при комнатной температуре. На нижней поверхности диска задаются условия первого рода по температуре, соответствующие температуре в эксперименте. Температура верхней поверхности определяется условиями сопряженного теплообмена. Параметры воздуха задавались постоянными и равными: удельная теплоемкость $c_p = 1006.43$ Дж/кг·К, коэффициент теплопроводности $\lambda = 0.0242$ Вт/м·К, коэффициент температурного расширения $\beta = 3.6 \times 10^{-3}$ 1/К.

Как было отмечено, определяющим параметром в задаче является число Грасгофа, построенное по характерному перепаду между температурой нижней поверхностью диска (контролируемая температура в эксперименте и задаваемая как граничное условие при численном моделировании) и комнатной температурой. В качестве линейного масштаба выбирается радиус диска R :

$$Gr = \frac{g\beta(T_w - T_a)R^3}{\nu^2} \quad (1)$$

Исследуемый диапазон чисел Грасгофа $Gr = [1.35 \dots 9.45] \times 10^6$. В физическом эксперименте установлено, что критическое число Грасгофа, при котором осуществляется переход от стационарного течения к нестационарному, составляет $Gr = 8.10 \times 10^6$, а в численном эксперименте – $Gr = 9.45 \times 10^6$.

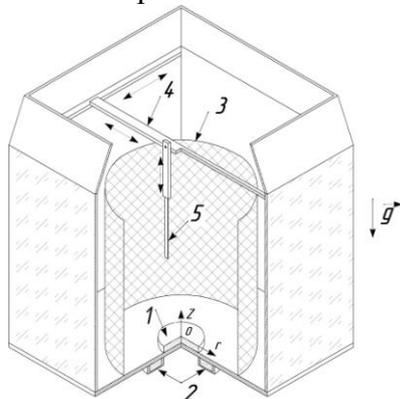


Рис. 1. Схема экспериментального стенда
1 – нагреваемый диск, 2 – элемент теплообменника, 3 – защитная сетка, 4 – координатное устройство, 5 – термометр сопротивления

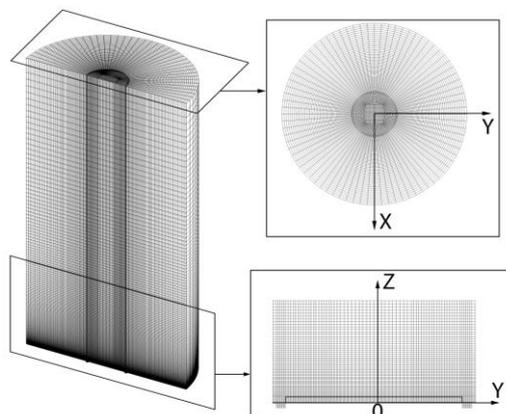


Рис. 2. Расчетная сетка для численного моделирования

Рассмотрим характеристики теплообмена, а именно коэффициенты теплоотдачи, локальные и интегральные числа Нуссельта:

$$Nu_r = \frac{\alpha r}{\lambda} = \frac{r}{(T_a - T_w)} \left(\frac{\partial T}{\partial n} \right) \Big|_w \quad (2)$$

$$\overline{Nu} = \frac{2\pi}{S} \int_0^R Nu_r r dr \quad (3)$$

На рис. 3 представлено сравнение коэффициентов теплоотдачи, определенных по результатам численного моделирования и экспериментально. Значения хорошо соответствуют друг другу. На рис. 4 представлено изменение локального числа Нуссельта по радиусу диска. Также можно сделать вывод о хорошем совпадении экспериментальных и численных данных.

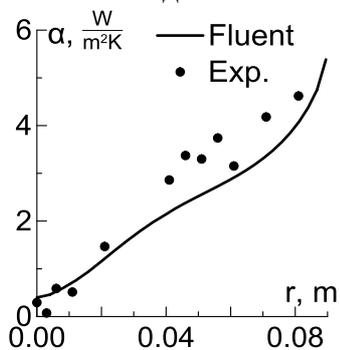


Рис. 3. Сравнение локального коэффициента теплоотдачи при $Gr = 5.40 \times 10^6$

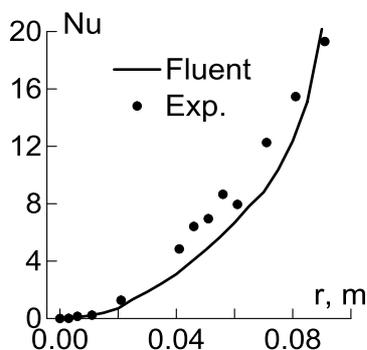


Рис. 4. Сравнение локального числа Нуссельта при $Gr = 5.40 \times 10^6$

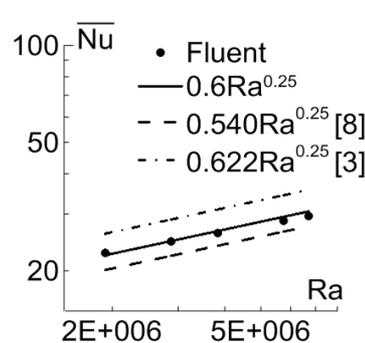


Рис. 5. Сравнение интегральных чисел Нуссельта с работами других авторов

Общеизвестно, что в случае описания теплообмена от горизонтальных поверхностей используется зависимость вида $Nu = C \cdot Ra^n$, где C и n – определяемые константы, а Ra – число Рэлея, которое можно определить из соотношения $Ra = Gr \cdot Pr$. Полученные в ходе численного моделирования средние числа Нуссельта также удовлетворительно согласуются с результатами известных работ (рис. 5).

ЛИТЕРАТУРА:

1. Rotem Z., Claassen L. Natural convection above unconfined horizontal surfaces // *J. Fluid Mechanics*. – 1969. – Vol. 39. – P. 173-192.
2. Hassan K.E., Mohamed S.A. Natural convection from isothermal flat surfaces // *Int. J. Heat Mass Transfer*. – 1970. – Vol. 13. – P. 1873-1886.
3. Yousef W.W., Tarasuk J.D., McKeen W.J. Free convection heat transfer from upward-facing isothermal horizontal surfaces // *J. Heat Transfer*. – 1982. – Vol. 104. – P. 493-500.
4. Pham M.V., Plourde F., Doan K.S. Three dimensional characterization of a pure thermal plume // *J. Heat Transfer*. – 2005. – Vol. 127. – P. 624-636.
5. Pham M.V., Plourde F., Doan K.S., Balachandar S. Large-eddy dimulation of a pure thermal plume under rotating conditions // *Phys. Fluids*. – 2006. – Vol. 18. – P. 1-18.
6. Plourde F., Pham M.V., Doan K.S., Balachandar S. Direct numerical simulations of a rapidly expanding thermal plume: structure and entrainment interaction // *J. Fluid Mechanics*. – 2008. – Vol. 604. – P. 99-103.
7. Храпунов Е.Ф., Чумаков Ю.С. Естественная конвекция над горизонтальным нагретым диском // *Тепловые процессы в технике*. – 2016. – №2. – С. 75-80.
8. Fishenden M. *An introduction to heat transfer*. Clarndon Press Oxford, 1957.

УДК 536.243

Н.Д. Якимов, М.Ю. Шалина

Казанский государственный энергетический университет

МЕТОД РЕГУЛЯРНОГО РЕЖИМА ПЕРВОГО РОДА ПРИ НЕПОСТОЯННОЙ ТЕМПЕРАТУРЕ ОКРУЖАЮЩЕЙ СРЕДЫ

Метод регулярного режима, в разнообразных вариантах, предназначен для экспериментального определения теплофизических характеристик веществ.

В классическом варианте метода образец из исследуемого материала охлаждается (или нагревается) в жидкой среде, и по температурным характеристикам процесса, на стадии регулярного режима, определяются теплофизические параметры материала образца. При этом в известных разработках по этому методу температура охлаждающей (нагревающей) среды предполагается постоянной в ходе процесса (с изменением «не более, чем на 0,1°C» [1], стр. 239). Для соблюдения этого условия приходится принимать специальные меры, в частности, использовать большие объёмы среды с организацией перемешивания или прокачки, воду со льдом и др. Напомним, что метод регулярного режима наиболее эффективен в варианте, когда процесс относится к, так называемой, «внутренней задаче» охлаждения (нагрева). Принято считать, что это имеет место при

$$Bi = \frac{\alpha r_0}{\lambda} \geq 100 \quad (1)$$

где α – коэффициент теплоотдачи на поверхности образца, λ – коэффициент теплопроводности материала образца, r_0 – определяющий размер образца. Видно, что, если $\lambda \sim 1$ Вт/(м·К), а за счет интенсивного перемешивания воды $\alpha \sim 1000$ Вт/м²·К, то должно быть $r_0 \sim 0.1$ м, т.е. поперечник образца должен быть не менее 20 см, и объем составит

несколько литров. Полагая объемную теплоемкость тела и жидкости величинами одного порядка, получаем, что для пренебрежимо малого изменения температуры воды, по крайней мере менее 1%, ее объем должен составлять сотни литров (при интенсивном перемешивании). Такую установку уже нельзя назвать настольной.

В настоящей работе рассматривается вариант метода регулярного режима, позволяющий отказаться от этого требования, используя ограниченный теплоизолированный объем среды, вследствие чего её температура в ходе процесса будет меняться из-за обмена теплотой с образцом. Использование ограниченного объема жидкости без термостатирования упрощает моделирование, позволяет использовать более компактную установку, а в определённых условиях повысить точность.

Теоретически наличие регулярного режима в такой системе с меняющейся температурой среды должно следовать из Первой теоремы Кондратьева в применении к теплоизолированной системе “тело + среда”. Но, во-первых, в применении к таким условиям доказательство этой теоремы не является математически строгим. Во-вторых, известно, что в ряде случаев регулярный режим может наступать настолько поздно, что из-за падения температур он оказывается малоприменимым для измерений. Поэтому важно провести моделирование такого рода процесса и убедиться, что регулярный режим действительно осуществляется и имеет характеристики, пригодные для эффективного проведения экспериментов.

Здесь, в качестве примера, рассматривается процесс охлаждения шара в среде ограниченного объема:

$$t_w = t_f, (\alpha \rightarrow \infty), \text{ но } t_f \neq \text{const},$$

$$\theta: \theta(r, \tau) = t(r, \tau) - t_\infty - \text{избыточная температура}, 0 \leq r \leq r_0.$$

Регулярный режим:

$$\theta(r, \tau) = DU(r)e^{-m\tau}, \quad (2)$$

$m = \text{const}$ – темп охлаждения, D – постоянный коэффициент, t_∞ – конечная температура системы.

Построим аналитическое решение на основе классического решения для задачи об охлаждении шара с учётом особенностей процесса.

Общий вид решения на регулярном режиме как в классической постановке,

$$\Theta(R, Fo) = D \frac{\sin(\mu R)}{\mu R} e^{-\mu^2 Fo} \quad (3)$$

в безразмерных переменных $\Theta = \frac{\theta}{\theta_0}$, $Fo = \frac{\alpha\tau}{r_0^2}$, $R = \frac{r}{r_0}$, $0 \leq R \leq 1$.

Для «классической» внутренней задачи $\mu = \pi$, а $\Theta(R, Fo) \geq 0$. Это будет соответствовать также нашему случаю, если считать теплоемкость среды бесконечной, $t_f = t_\infty = \text{const}$, t_f – температура среды.

При конечной теплоемкости среды t_f будет расти в ходе процесса, как и температура приповерхностного слоя тела, т.е. в этом слое будет $\theta < 0$ (и $\Theta < 0$). Выражение (3) должно по построению описывать регулярный режим внутри шара и в этом случае, но граничное условие здесь будет другим. Если теплоемкость среды на единицу поверхности шара равна C_F Дж/м²·К, теплопроводность шара λ , то баланс теплоты на границе дает

$$-\lambda \cdot \frac{\partial \theta}{\partial r} \Big|_{r=r_0} = C_F \cdot \frac{\partial \theta}{\partial \tau} \Big|_{r=r_0}, \quad (4)$$

откуда с учетом (3) получается иное характеристическое уравнение,

$$\mu \text{ctg} \mu = 1 + 2\mu^2 K_C \quad (5)$$

где $K_C = C_F / (c_{об} \cdot r_0)$, $c_{об}$ – объемная теплоемкость материала шара, Дж/м³·К, r_0 – радиус шара, $\mu = \mu_1$ – первое собственное число, нетривиальное решение которого должно лежать в интервале $\pi < \mu < 4.5$.

Тестирование решения проводилось путём численного моделирования процесса. Был разработан алгоритм построения аналитических решений – классического решения задачи об охлаждении шара в виде ряда и решения для регулярного режима охлаждения в среде с меняющейся температурой. При этом требовалось находить собственные числа как решения характеристических уравнений. Уравнения приводились к виду, удобному для применения метода деления отрезка пополам. Предварительно исследовалась знакоопределённость соответствующих функций.

Для изучения процесса охлаждения шара в среде с меняющейся температурой была создана численная модель на основе метода конечных разностей по явной схеме. Была проведена проверка работоспособности численной модели путём сопоставления результатов расчётов с аналитическим решением для классического случая с постоянной температурой среды, где результаты совпали с точностью выше 0,01%. Здесь представлены результаты для довольно небольшой теплоёмкости среды, лишь в 4 раза большей, чем у тела. Под теплоёмкостью среды понимается полная теплоёмкость охлаждающей среды, [Дж/К], которая равна $4\pi r_0^2 C_F$, (где $4\pi r_0^2$ – поверхность шара). Отличие распределения температуры от регулярного режима заметно лишь до момента времени $Fo = 0,1$. А уже при $Fo = 0,15$ температуры соответствуют регулярному режиму настолько, что кривые на графике не различимы (рис. 1). То есть возможность применения регулярного режима фактически не отличается от случая термостатированной среды.

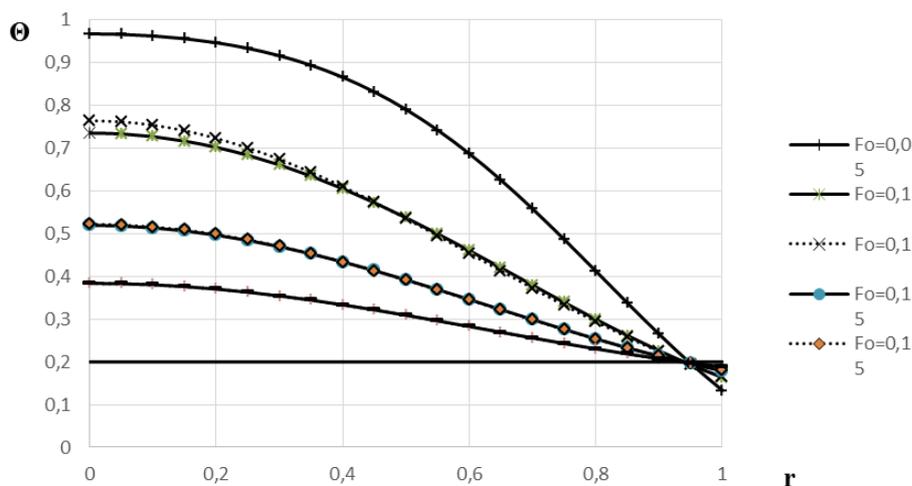


Рис. 1. Численный эксперимент охлаждения шара

Таким образом, проведённое тестирование на численной модели показало, что такой регулярный режим действительно осуществляется и имеет характеристики, пригодные для эффективного проведения экспериментов. Можно отметить, что обычно общая теплоёмкость среды, видимо, будет заметно больше, чем у образца. Тогда применение методики, основанной на рассматриваемых предложениях тем более оправданно.

ЛИТЕРАТУРА:

1. Кондратьев Г.М. Регулярный тепловой режим. М.: ГИТТЛ. – 1954. – 408 с.
2. Цветков Ф.Ф., Григорьев Б.А. Теплообмен. Учебник. М.: Изд-во МЭИ. – 2006. – 550 с.
3. Ковеня В.М., Чирков Д.В. Методы конечных разностей и конечных объемов для решения задач математической физики. Учебное пособие. Новосибирск. – 2013. – 87 с.

ДЕФОРМАЦИЯ ТРАНСВЕРСАЛЬНО-ИЗОТРОПНОЙ ЭЛЛИПСОИДНОЙ ОБОЛОЧКИ
ПОД ДЕЙСТВИЕМ НОРМАЛЬНОГО ДАВЛЕНИЯ

Введение. Из известных способов введения лекарственных веществ для доставки их к тканям глаза наибольшая концентрация создается при интравитреальной инъекции. При интравитреальной инъекции используются небольшие (до 0,2 мл) дозы лечебного препарата, что приводит к кратковременному увеличению внутриглазного давления. Однако даже кратковременное увеличение внутриглазного давления выше определенного индивидуального уровня может привести к нарушению кровообращения на сетчатке и в диске зрительного нерва [1], поэтому важно в каждом конкретном случае оценить возможный уровень изменения ВГД в результате инъекции. С точки зрения механики, это задача определения изменения внутреннего давления в оболочке, заполненной несжимаемой жидкостью, при введении дополнительного объема несжимаемой жидкости.

В работах [2, 3] рассмотрена задача трехмерной теории упругости о деформации трансверсально-изотропного сферического слоя, находящегося под действием внутреннего давления. Получено соотношение, характеризующее изменение внутреннего давления в оболочке глаза в зависимости от введенного объема несжимаемой жидкости, а также получено изменение толщины слоя склеры под действием повышенного давления.

В данной работе в рамках новой итерационной теории оболочек С.А. Амбарцумяна рассматривается модель трансверсально-изотропной симметрично нагруженной эллипсоидальной оболочки вращения, описывающей основную внешнюю, склеральную, оболочку глаза. В рамках этой модели исследуется изменение внутреннего давления в оболочке, заполненной несжимаемой жидкостью, при введении дополнительного объема такой жидкости.

Математическая модель. Рассматривается трансверсально-изотропная оболочка, срединная поверхность которой является поверхностью вращения с осью вращения z . Положение точек M срединной поверхности оболочки определяется гауссовыми координатами: углом φ , являющимся азимутом плоскости, проведенной через точку M и ось вращения z , и меридиональной дугой s , отсчитываемой вдоль меридиана от некоторой начальной точки M_0 .

Для главных кривизн срединной поверхности имеем:

$$k_1 = \frac{1}{R_1} = \frac{d\theta}{ds}, \quad k_2 = \frac{1}{R_2} = \frac{\cos \theta}{r},$$

где $R_1 = R_1(s)$ — радиус кривизны меридиана, $R_2 = R_2(s)$ — второй главный радиус кривизны поверхности вращения, $\theta = \theta(s)$ — угол между касательной к меридиану и осью вращения z , $r = r(s)$ — расстояние от точки M срединной поверхности до оси вращения z .

Для коэффициентов первой квадратичной формы имеем:

$$A = 1, \quad B = r = R_2 \cos \theta.$$

Также имеют место соотношения:

$$\frac{dr}{ds} = -\sin \theta, \quad \frac{dz}{ds} = \cos \theta.$$

Считается, что тангенциальные компоненты векторов интенсивности поверхностных нагрузок, приложенных к внешней и внутренней поверхностям оболочки равны 0, а нормальная компонента равна P . В этом случае оболочка при деформировании остается телом вращения, поэтому внутренние силы, моменты и перемещения будут функциями только координаты s , и в оболочке возникнут лишь напряжения σ_s , σ_φ , $\sigma_{s\gamma}$ и соответствующие им внутренние силы и моменты, где γ - нормальное к оболочке направление в рассматриваемой точке.

Новая итерационная теория С.А. Амбарцумяна базируется на следующих предположениях:

- а) при определении деформаций $\varepsilon_{s\gamma}$ и $\varepsilon_{\varphi\gamma}$ считается, что касательные напряжения $\sigma_{s\gamma}$ и $\sigma_{\varphi\gamma}$ не отличаются от соответствующих напряжений $\sigma_{s\gamma}^0$ и $\sigma_{\varphi\gamma}^0$, найденных по классической теории;
- б) деформация ε_γ и нормальное напряжение σ_γ не отличаются от соответствующих величин $(\varepsilon_\gamma^0, \sigma_\gamma^0)$ классической теории.

Согласно этим гипотезам:

$$\sigma_{s\gamma} = \sigma_{s\gamma}^0, \quad \sigma_{\varphi\gamma} = \sigma_{\varphi\gamma}^0, \quad \sigma_\gamma = \sigma_\gamma^0,$$

$$\varepsilon_{s\gamma} = \varepsilon_{s\gamma}^0, \quad \varepsilon_{\varphi\gamma} = \varepsilon_{\varphi\gamma}^0, \quad \varepsilon_\gamma = \varepsilon_\gamma^0,$$

где ε_{ik}^0 — соответствующие деформации классической теории.

Если классическую теорию трактовать как нулевое приближение решения трехмерной задачи, то новую итерационную теорию можно рассматривать как последующее, первое приближение, так как в этой теории делается попытка учесть влияние деформаций ε_γ на напряженно-деформированное состояние оболочки.

Рассматривая в рамках новой итерационной теории напряженно-деформированное состояние трансверсально-изотропной оболочки вращения, используя соотношения, полученные в монографии [4], получим следующие основные уравнения:

Уравнения равновесия:

$$\frac{d}{ds}(rT_1) + T_2 \sin \theta + \frac{r}{R_1} N_1 = 0,$$

$$\frac{d}{ds}(rM_1) + M_2 \sin \theta - rN_1 = 0,$$

$$\frac{d}{ds}(rN_1) - r\left(\frac{T_1}{R_1} + \frac{T_2}{R_2}\right) = -rP,$$

где T_1, T_2, N_1 — внутренние силы, M_1, M_2 — внутренние изгибающие моменты.

Геометрические соотношения:

$$\varepsilon_1 = \frac{du}{ds} + \frac{w}{R_1}, \quad \varepsilon_2 = \frac{1}{r}(w \cos \theta - u \sin \theta),$$

$$x_1^* = -\frac{dW}{ds} + \frac{T^*}{R_1} + \frac{dX^*}{ds}, \quad x_2^* = W \frac{\sin \theta}{r} + \frac{T^*}{R_2} - \frac{\sin \theta}{r} X^*,$$

$$W = \frac{dw}{ds} - \frac{u}{R_1}, \quad \varphi_0 \approx \frac{12}{h^3} N_1^0,$$

где N_1^0 получено по классической теории, u, w — перемещения по s и по γ соответственно.

Уравнение неразрывности деформаций имеет вид:

$$r \frac{d\varepsilon_2}{ds} - (\varepsilon_2 - \varepsilon_1) \sin \theta - W \cos \theta = 0.$$

Соотношения упругости:

$$T_1 = -\frac{h^2 E}{\nu} a_2, \quad T_2 = -\frac{hE}{\nu^2} a_2 - \frac{h^2 E}{\nu} a_1,$$

$$M_1 = -\frac{h^2 E}{12\nu} b_2, \quad M_2 = -\frac{hE}{12\nu^2} b_2 + -\frac{h^2 E}{12\nu} b_1,$$

где:

$$a_1 = \varepsilon_1 - \frac{\nu'}{E} \frac{3}{2h} K^0, \quad a_2 = \varepsilon_2,$$

$$b_1 = -\frac{dW}{ds} + \frac{T^*}{R_1} + \frac{dX^*}{ds} - \frac{\nu'}{E'} \frac{h^2}{24} Q^0,$$

$$b_2 = W \frac{\sin \theta}{r} + \frac{T^*}{R_2} - \frac{\sin \theta}{r} X^*,$$

здесь Q^0 -перерезывающая сила, полученная из решения по классической теории оболочек, E, E' - соответственно модули Юнга при растяжении – сжатии в поверхности изотропии и в направлении, перпендикулярном к ней, а ν, ν' - коэффициенты Пуассона.

Тогда можно получить следующие формулы для нормального и тангенциального перемещений:

$$w = \varepsilon_2 r \cos \theta + \left[\varepsilon_z^0 + \int_{s_0}^s (\varepsilon_1 \cos \theta + W \sin \theta) ds \right] \cos \theta,$$

$$u = -\varepsilon_2 r \cos \theta + \left[\varepsilon_z^0 + \int_{s_0}^s (\varepsilon_1 \cos \theta + W \sin \theta) ds \right] \sin \theta,$$

где ε_z^0 - постоянная, определяющая жесткое смещение оболочки вдоль оси z, которая должна быть определена из граничных условий.

Изменение объема исходного эллипсоида, находящей под действием давления P, можно определить по следующему соотношению ($w = w(r, \theta, P)$):

$$\Delta V = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot \left([R_{01} + w(R_{01}, 0, P)]^2 \cdot \left[R_{02} + w\left(0, \frac{\pi}{2}, P\right) \right] - R_{01}^2 \cdot R_{02} \right),$$

здесь обозначения R_{01} и R_{02} - радиусы кривизны меридиана в полюсе оболочки и параллели на экваторе эллипсоидной оболочки до введения дополнительного объема жидкости. Отсюда можно получить и обратную зависимость $p = f(\Delta V)$, характеризующую изменение внутреннего давления от дополнительно введенного объема жидкости.

Заключение. Полученные соотношения можно использовать для оценки ВГД после инъекций в гиперметропических (дальнозорких) и миопических (близоруких) глазах, где моделирование глаза сферической оболочкой не дает достаточной точности вычислений.

ЛИТЕРАТУРА:

1. Иомдина Е.Н., Бауэр С.М., Котляр К.Е.. Биомеханика глаза: теоретические аспекты и клинические приложения. – М.: Реал Тайм, 2015. – 208 с.
2. Bauer S.M., Smirnov A. L. Axisymmetric deformations of the orthotropic spherical layer under normal pressure // Vestnik St. Petersburg University: Mathematics. – 2015. – Vol.48, № 1. – P. 35–40.

3. Kotliar, K., Maier, M., Bauer, S., Feucht, N., Lohmann, C., Lanzl, I. Effect of intravitreal injections and volume changes on intraocular pressure: Clinical results and biomechanical model //Acta Ophthalmologica Scandinavica. – 2007. – Vol. 85, Is. 7. – P. 777–781.

4. Амбарцумян С.А. Общая теория анизотропных оболочек. М.: Наука, 1974. – 448 с.

УДК 612.766(075.8)

П.И. Бабчина

Санкт-Петербургский государственный электротехнический университет

БИОМЕХАНИЧЕСКИЙ МЕТОД ПРОГНОЗИРОВАНИЯ СОСТОЯНИЯ ДЕФОРМИРОВАННОГО ГРУДНОГО ОТДЕЛА ПОЗВОНОЧНИКА ПРИ РАЗЛИЧНЫХ НАГРУЗКАХ

Актуальность. По оценкам Всемирной Организации Здравоохранения (ВОЗ), различными заболеваниями опорно-двигательного аппарата во всем мире страдает около 80% трудоспособного населения в возрасте от 30 до 50 лет. Заболевания, встречающиеся наиболее часто, связаны с деформациями позвоночника. В России, по некоторым оценкам, распространенность проблем позвоночника с конца XX века увеличивается ежегодно примерно на 30% [1,2]. Кроме того, стремительно возрастает количество людей, страдающих от искривлений позвоночника [3]. В свою очередь, искривление позвоночника влечет за собой изменение организма в целом [4]. При искривлениях грудного отдела позвоночника вводятся ограничения физической активности. Для исключения неблагоприятных и низко результативных ограничений физической активности, связанных с деформациями грудного отдела позвоночника, необходимо разработать и внедрить в медицинскую практику метод прогнозирования состояния структур искривленного грудного отдела позвоночника.

Целью данной работы является разработка метода исследования состояния деформированного грудного отдела позвоночника при различных нагрузках для последующей персонализации ограничений физической активности.

Для достижения поставленной цели необходимо решить следующие задачи: провести анализ деформированного состояния грудного отдела позвоночника при искривлениях; разработать алгоритм исследования состояния структур грудного отдела позвоночника для определения оптимальных и максимально допустимых нагрузок.

Методы исследования. На основе результатов, полученных с помощью медицинских исследований, построена биомеханическая компьютерная модель, максимально приближенная к реальной структуре по форме. Модель наделена наиболее схожими с реальным позвоночником биомеханическими характеристиками.

Технология построения трехмерной биомеханической модели включает в себя несколько этапов: постановка задачи и выбор сегмента моделирования позвоночника в рамках поставленной задачи; создание содержательной модели; создание трехмерной геометрической модели сегмента в программе Mimics; обработка модели в программе AutoCAD путем перевода модели в вид поверхностей NURBS; импорт модели в программу SolidWorks; оценка погрешности результатов измерений; проведение вычислительных экспериментов по нагружению.

Использование комплекса программ позволяет создать модель на основе данных медицинских исследований МРТ, максимально сохранить геометрическое сходство модели с реальной структурой и наделить модель биомеханическими свойствами реальной структуры. Кроме того, модель имеет сглаженные формы и четкие контуры граней, что удобно для проведения экспериментов по нагружению. Проведена оценка погрешности измерений. Погрешность измерений не превышает 9,7%, что является приемлемым.

Для исследования работоспособности модели при имитации физической активности различного вида использовалась программа SolidWorks с приложением Simulation. Исследования были проведены для статических и динамических нагрузок. Оценка результатов проводилась путем анализа эпюр напряжений и деформации модели. Эпюры имеют числовую и цветовую градацию результатов.

Результаты. С использованием модели проведены исследования некоторых упражнений адаптивной физической культуры, направленных на улучшение состояния деформированного грудного отдела позвоночника. Упражнения были смоделированы для человека весом от 50 до 80 кг. Оценка степени влияния упражнений происходила по эпюрам напряжения, деформации и перемещения с цветовой и числовой градацией полученных результатов. Проводились динамические и статические эксперименты в зависимости от вида оказываемого воздействия. Введен ряд допущений. Материал модели принимается однородным, сплошным и изотропным. Межпозвоночные диски и позвонки выполнены из одного материала и являются составляющими модели. Наличие дисков необходимо для учета взаимодействия тел позвонков и межпозвоночных дисков в местах контакта при приложении нагрузки на сегмент позвоночника. Межпозвоночные диски принимаются за недеформированные структуры. Взаимодействия тел позвонков и межпозвоночных дисков определяется с помощью оценки цветовой градации эпюр напряженно-деформированного состояния в местах контактов.

Были рассмотрены следующие виды физической активности, относящиеся как к адаптивной физической культуре, так и к повседневной жизни:

- упражнение с валиком для увеличения подвижности и уменьшения искривления грудного отдела позвоночника;
- упражнение «Свеча» в промежуточном положении группировки с перекатом и конечном положении упражнения;
- игры с мячом.

В ходе исследований, проводимых на биомеханической модели, были получены следующие выводы для каждого из упражнений.

Безопасность выполнения упражнения зависит не только от точности соблюдения выполнения техники упражнения, но также и от веса человека. Так, при выполнении упражнения с валиком на развитие подвижности грудного отдела позвоночника значительную роль в определении безопасности и допустимости выполнения упражнения играют диаметр валика и вес человека. Упражнения с валиком являются безопасными при диаметре валика 7 см в диапазоне веса человека от 50 до 80 кг. Однако, при диаметре валика 10 см упражнение является безопасным только для человека весом от 50 до 70 кг. При большем весе валик окажет негативное воздействие на межпозвоночные диски, что может спровоцировать новые патологии.

Упражнение «Свеча» может считаться безопасным только в случае сильного мышечного корсета спины и пресса, а также при весе человека до 60 кг. Кроме того, при выполнении упражнения свеча следует свести к минимуму перекатывания на спине и выполнять их минимальное количество раз, необходимое для принятия конечного положения упражнения «Свеча». Несмотря на то, что смысл упражнения «Свеча» – принять конечное положение и удерживаться в нем некоторое время, неблагоприятным положением является промежуточное положение, в результате которого происходит группировка с перекатом. Здесь оказывается максимальное воздействие на деформированный сегмент позвоночника.

Также были рассмотрены последствия попадания футбольного и волейбольного мяча в переднюю и боковую поверхности тела человека. Было выявлено, что при попадании в переднюю поверхность тела человека мяч не оказывает негативного воздействия

непосредственно на позвоночник, однако, оно не исключено для внутренних органов. А при попадании мяча в боковую поверхность максимальному воздействию подвергнется наиболее искривленный сегмент грудного отдела позвоночника и, несмотря на то, что разрушающего воздействия на тела позвонков оказано не будет, боковое попадание может привести к деформации межпозвонковых дисков.

Таким образом, была подтверждена возможность проведения вычислительных экспериментов по нагружению на полученной биомеханической модели. Эти эксперименты могут носить статический характер, как в случае с упражнением с валиком, или динамический, как при попадании мяча. Возможность имитации различных по характеру и степени воздействия нагружений предоставляет возможность анализа большого объема различных видов физической активности, как в адаптивной физической культуре при поддержании состояния деформированного грудного отдела позвоночника и в период реабилитации, так и всевозможных видов физической активности в реальной жизни, а также при занятиях спортом. Анализ полученных результатов происходит по эпюрам напряжения и перемещения модели после воздействия с цветовой и, соответствующей ей, числовой градацией.

Выводы: Разработан метод прогнозирования состояния деформированного грудного отдела позвоночника при различных нагрузках. Метод основывается на комбинированном использовании медицинских и инженерных программных пакетов. В основе метода лежит создание биомеханической модели по данным компьютерной томографии пациента, что обеспечивает персональный подход с учетом индивидуальных особенностей. Показано, что на полученной модели можно проводить статические и динамические вычислительные эксперименты по нагружению, что позволяет имитировать различные виды физической активности. Разработана технология проведения биомеханического исследования для определения допустимых нагрузок при деформациях грудного отдела позвоночника и, соответственно, прогнозирования состояния грудного отдела позвоночника при нагрузках.

ЛИТЕРАТУРА:

1. Исмагилов М.Ф., Галиуллин Н.И., Мингалеев Д.Р. Издержки современной практической неврологии // Неврологический вестник. 2005, вып. №1–2. С.105–107.
2. Комплексное ортопедическое лечение пациентов с системными дисплазиями скелета / А.Г. Баиндурашвили, В.М. Кенис, Е.В. Мельченко и др. // Травматология и ортопедия России. 2014. вып. №1.– С. 34–43.
3. Казьмин А.И., Кон И.И., Беленький В.Е. Сколиоз. - М., 1981.
4. Тесаков Д. К. Особенности осанки при развитии деформации позвоночника у больных сколиозом // Журнал Гродненского государственного медицинского университета. 2008, Вып.№2. С.83–87.

УДК 612.76(07)

Г.Т. Башарова, Д.Т. Башарова
Санкт-Петербургский государственный электротехнический университет

ИССЛЕДОВАНИЕ ПОТОКА КРОВИ ПРИ АТЕРОСКЛЕРОТИЧЕСКОМ ПОРАЖЕНИИ ВНУТРЕННЕЙ СОННОЙ АРТЕРИИ

Актуальность. Снабжение головного мозга кровью обеспечивают несколько артерий: общая сонная артерия, брахиоцефальный ствол и ветка левой подключичной артерии, но именно поражение брахиоцефальных артерий ведет к серьезным последствиям. вышеперечисленные артерии образуют Виллизиев круг, который и обеспечивает равномерное кровоснабжение головного мозга. При нарушении кровотока в одной из

артерий, всей этой системе приходится перестраиваться. Заболевания брахиоцефальных артерий чаще всего связаны с плохой проходимостью сосудов. Причиной непроходимости может стать стеноз или окклюзия, обусловленные травмами сосудистых стенок, их воспалениями или новообразованиями, неправильным анатомическим строением сосудов. Самым частым фактором развития патологий брахиоцефальных артерий является атеросклероз [1]. Атеросклероз характеризуется стойким нарушением мозгового кровообращения разной степени интенсивности и часто ведет к тяжелым последствиям – обширному инсульту. По данным ВОЗ на январь 2017 года, из 56,4 млн. случаев смерти во всем мире более половины (54%) были вызваны болезнями дыхательных путей, инсультом, ишемической болезнью сердца и т.д. Ишемическая болезнь сердца и инсульт уносят больше всего человеческих жизней – в 2015 г. в общей сложности 15 миллионов. Последние 15 лет эти заболевания остаются ведущими причинами смерти в мире.

Цель работы. Построение геометрической модели брахиоцефальных артерий и проведение исследования потока крови в брахиоцефальных артериях при наличии атеросклеротической бляшки во внутренней сонной артерии.

Задачи. Разработать алгоритм построения геометрической модели брахиоцефальных артерий. Провести исследование влияния атеросклеротической бляшки в одной из внутренних сонных артерий на кровоток в передней соединительной артерии.

Методы исследования. Проводить исследование кровотока в сосудах, питающих мозг, позволяет симбиоз биомеханического компьютерного моделирования и анализа биологических структур по данным клинических исследований.

Допущения: 1) при моделировании крови предполагалось, что кровь – несжимаемая однородная вязкая ньютоновская жидкость, течение которой описывается системой уравнений Навье-Стокса; 2) динамическая вязкость крови при расчетах считалась равной $0.004 \text{ Па}\cdot\text{с}$, плотность – 1050 кг/м^3 ; 3) стенки кровеносных сосудов предполагались идеально-упругими с модулем Юнга 0.55 МПа [2], коэффициентом Пуассона 0.49 и плотностью 1400 кг/м^3 ; 4) бляшка предполагалась мягкой с модулем Юнга 0.275 МПа и коэффициентом Пуассона 0.4 ; 5) скорость потока на входе в сонную артерию равна 0.48 м/с [2], на выходе из передней соединительной артерии задавалось давление 15 кПа .; 6) число Рейнольдса в аорте более 3000 .

Геометрическая модель системы, включающей аорту, подающие артерии и Виллизиев круг, для конкретного пациента строится по срезам КТ, которые были сохранены в формате DICOM, и ангиограмме (рис. 1). Модель анатомической структуры брахиоцефальных артерий с Виллизиевым кругом создана в программе SolidWorks.

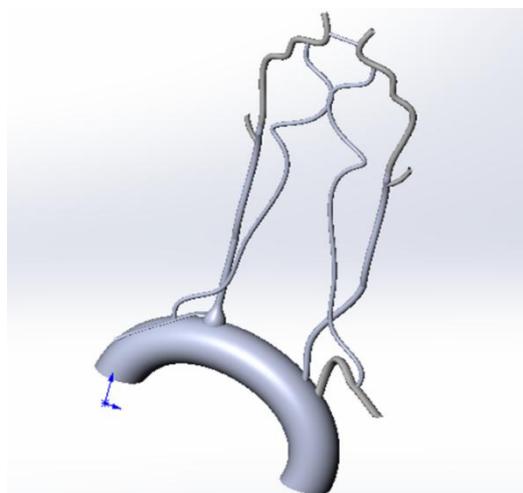


Рис. 1. Геометрическая модель анатомической структуры брахиоцефальных артерий

Исследование гидродинамики кровотока производилось в сонных артериях, через которые проходят две трети всего объема крови, притекающей к мозгу [3].

Результаты. На рис. 2 представлены линии тока, окрашенные по величине скорости потока крови в сонных артериях с бляшкой длиной $l=0.036$ м и диаметром $d=0.7 D$, $d=0.2 D$, где D – диаметр левой внутренней сонной артерии. На рис. 3 показаны линии тока, окрашенные по величине скорости, в области бляшки с перекрытием сосуда на 70% и 20% (по диаметру).

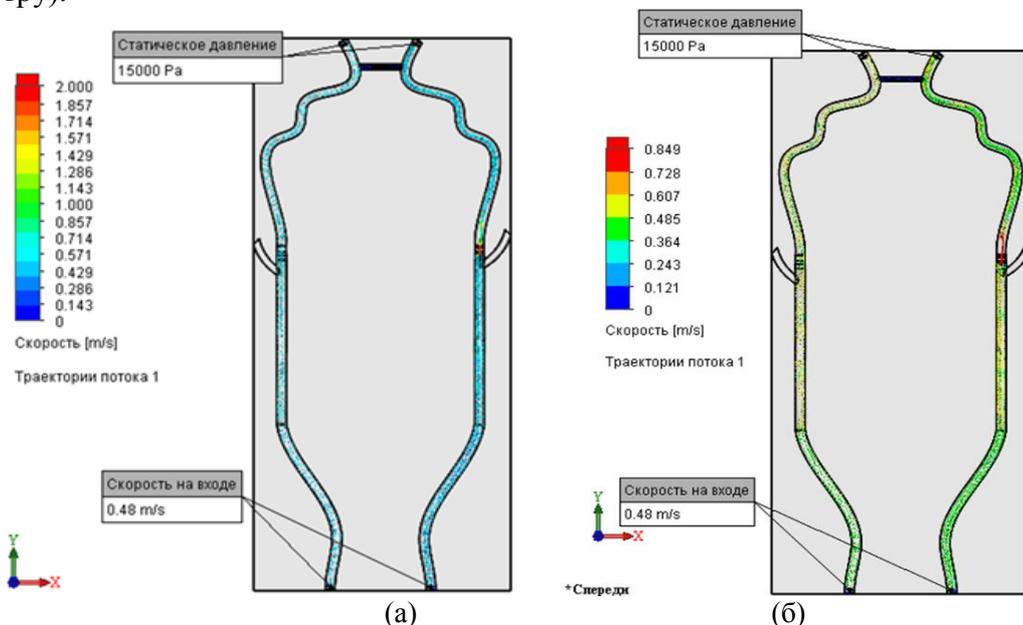


Рис. 2. Линии тока, окрашенные по величине скорости, в сонных артериях с бляшкой в левой внутренней сонной артерии, когда просвет артерии открыт на: а – 30%, б – 80%

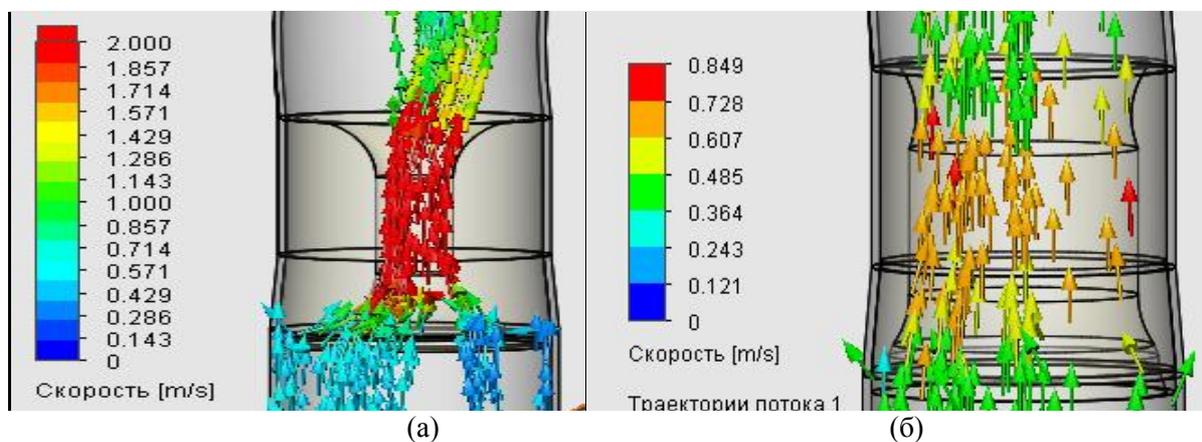


Рис. 3. Линии тока, окрашенные по величине скорости, в области бляшки с перекрытием сосуда на: а - 70%, б – 20%

На рис. 4а представлен график изменения скорости вдоль эскиза сонных артерий для случая, когда просвет открыт на 30%. По рисунку заметно, как увеличилась скорость в сужении сосуда до 7 м/с, а скорость в передней соединительной артерии уменьшилась. На рис. 4б скорость в сужении сосуда практически не изменилась. Линия в области 1 описывает изменение скорости вдоль правой общей сонной артерии, 2 – вдоль правой внутренней, 3 – вдоль передней соединительной артерии, 4 – вдоль левой внутренней сонной артерии, 5 – вдоль бляшки, 6 – вдоль левой общей сонной артерии.

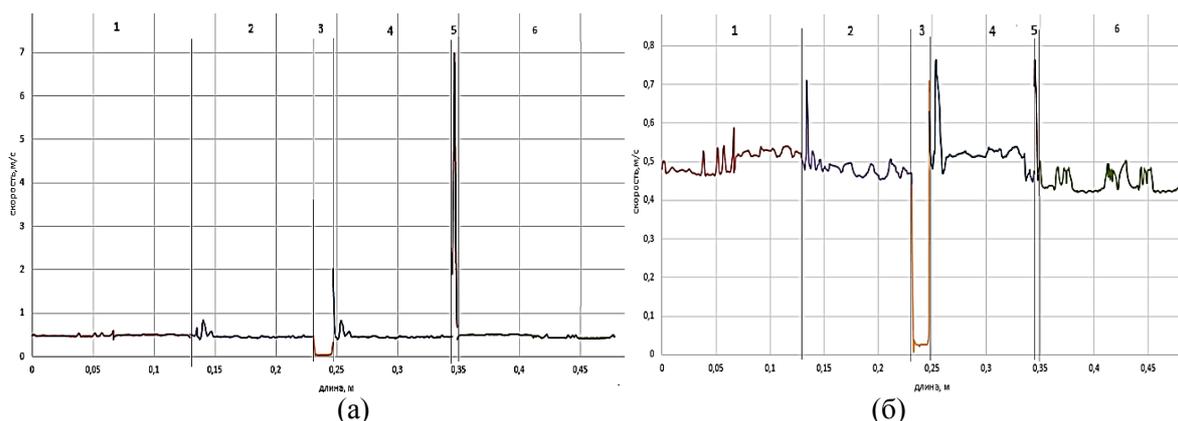


Рис. 4. График изменения скорости вдоль сонных артерий для случаев, когда просвет открыт на: а -30%, б - 80%

В ходе исследования было установлено также, что завихренность крови в передней соединительной артерии при переходе от сонной артерии, где содержится бляшка, к здоровой сонной артерии, резко увеличивается. На рис. 5 изображено распределение скорости в правой сонной, передней соединительной, левой сонной артериях при сужении просвета в области бляшки на 20%. На ней проведены точечные измерения завихренности. По этим данным можем сделать вывод о том, что завихренность увеличивается при большем сужении просвета сосуда, и, как следствие, нарушается нормальное кровообращение в этой артерии.

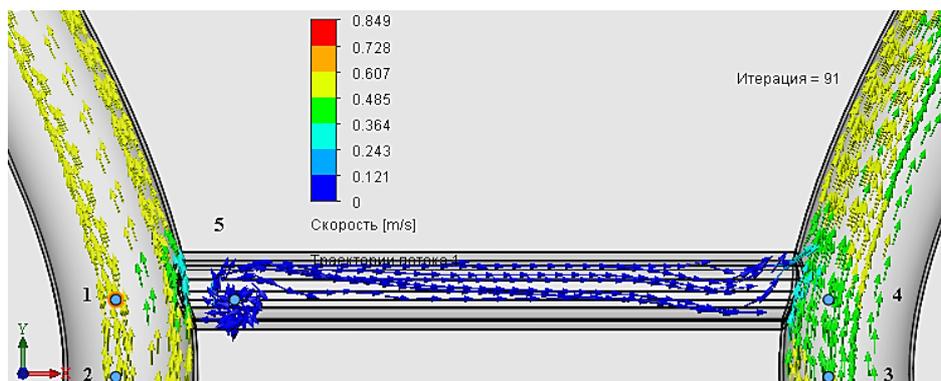


Рис. 5. Распределение скорости в правой сонной, передней соединительной, левой сонной артериях при сужении просвета в области бляшки на 20%

Выводы. В ходе данной работы построена геометрическая модель брахиоцефальных артерий, а также проведено исследование кровотока в сонных артериях и передней соединительной артерии при сужении просвета сосуда в области бляшки на 70% и 20% по диаметру.

ЛИТЕРАТУРА:

1. Атеросклероз брахиоцефальных артерий. [Электронный ресурс]. URL: http://www.ayzdorov.ru/lechenie_ateroskleroz_braciiofalnih.php (Дата посещения: 10.10.2017)
2. Бегун П. И. Моделирование в биомеханике: Учеб. пособие /П. И. Бегун, П. Н. Афонин,- М.:Высш. шк.,2004.-390 с.; ил. ISBN 5-06-004798-9
3. Шмидт Е. В., Лунев Д. К., Верещагин Н. В. Серия: Библиотека практического врача. М. Медицина 1976г. 284с

АНАЛИЗ ХАРАКТЕРНОГО ВРЕМЕНИ АДАПТАЦИИ ТРАБЕКУЛЯРНОЙ КОСТНОЙ
ТКАНИ В СООТВЕТСТВИИ С ЗАКОНОМ ВОЛЬФА

На протяжении столетий ученым-анатомам было известно, что организм человека адаптируется к внешним условиям среды. В частности, было замечено, что кость адаптирует свою форму и строение к нагрузке, которую она испытывает на протяжении достаточного времени. В середине XIX века данные наблюдения были обобщены в виде эмпирического закона Вольфа (*Wolff's law*). Данный закон говорит о том, что адаптационные процессы, протекающие в организме человека, подчиняются определенным закономерностям и связаны с испытываемыми организмом нагрузками [1].

Применительно к живой костной ткани закон Вольфа формулируется следующим образом: кость приспособливает свою внешнюю форму и внутреннюю структуру к тем нагрузкам, которые она должна выдержать [1]. Однако до сих пор не существует математической модели, которая бы полностью и достоверно описывала процесс адаптации на всех уровнях организации костной ткани.

В предыдущих работах [2-4] авторами была рассмотрена и описана перестройка трабекулярной костной ткани на мезоуровне. Описание адаптационных процессов базировалось на идеях, изложенных в работах [1, 5-9] и частично реализованных в [2-4, 7-10]. В основе использованной математической модели лежит идея описания адаптационных процессов с помощью величин, показывающих изменение ориентации трабекул (девиатора тензора структуры \tilde{K}) и пористости костной ткани (доли твердого объема кости e) во времени. Особенностью используемой модели являются эволюционные соотношения, представленные ниже:

$$\begin{cases} \dot{K} = (h_1 + h_3 e)(\varepsilon - \varepsilon^0) + h_4 \text{tr}(\varepsilon - \varepsilon^0) K + h_2 \left(\left(\text{tr}(K(\varepsilon - \varepsilon^0)) \right) E - \frac{3}{2} (K(\varepsilon - \varepsilon^0) + (\varepsilon - \varepsilon^0) K) \right) \\ \dot{e} = (f_1 + f_2 e)(\text{tr} \varepsilon - \text{tr} \varepsilon^0) + f_3 \left(\text{tr}(K(\varepsilon - \varepsilon^0)) \right) \end{cases}$$

где $f_1 - f_3, h_1 - h_4$ – константы, имеющие размерность сут^{-1} .

Кривые, получаемые в результате решения системы дифференциальных уравнений, представлены на рис. 1.

Совпадение численных результатов, полученных в ANSYS Mechanical и MATLAB с описанными в литературе [7-10] в случае применения алгоритма к простой задаче (рис. 1, а), говорит в пользу работоспособности написанной программы. Но в результате решения более сложной задачи (состоящей из нескольких элементов с разными свойствами) наблюдается расходимость кривых (рис. 1, б).

Проведенные эксперименты с изменением размерности модели, граничных условий, геометрии и коэффициентов эволюционного соотношения позволили сделать вывод, что анализируя только кривые $\tilde{K}(t)$ и $e(t)$, нельзя с уверенностью сказать, что перестройка завершится в тот момент, когда изменение в пористости или структуре за минимальный рассматриваемый промежуток времени приблизительно будет равняться нулю: $\Delta e \approx 0$ или $\Delta K_i \approx 0, i = \overline{1..5}$.

Вообще говоря, длительность перестройки зависит от многих факторов, но в среднем она составляет примерно 160 суток [1]. Ожидается, что к этому моменту адаптационные изменения в пористости и структуре завершатся. Характер адаптации наблюдаемый на рис.1б не физичен, хотя значения, получаемые функциями $\tilde{K}(t)$ и $e(t)$ в конце

рассматриваемого промежутка времени, могут быть реальны, потому что фактически наиболее подходящей математической интерпретацией закона Вольфа является соотношение, представленное в работах [1, 7]: $K \cdot \sigma = \sigma \cdot K$.

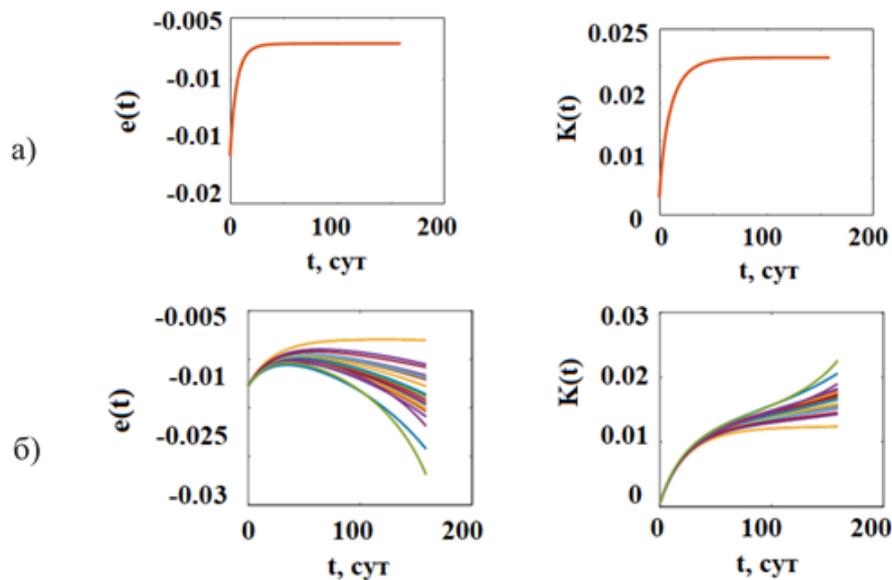


Рис. 1. Графики изменения величин $K_i(t)$, $i = \overline{1..2}$ и $e(t)$ в задаче: а) о всестороннем сжатии бесконечно-малого объема трабекулярной костной ткани б) об изгибе образца трабекулярной костной ткани в виде консольной балки, нагруженной изгибающим моментом на торце (каждая кривая соответствует изменению параметра в одном из конечных элементов).

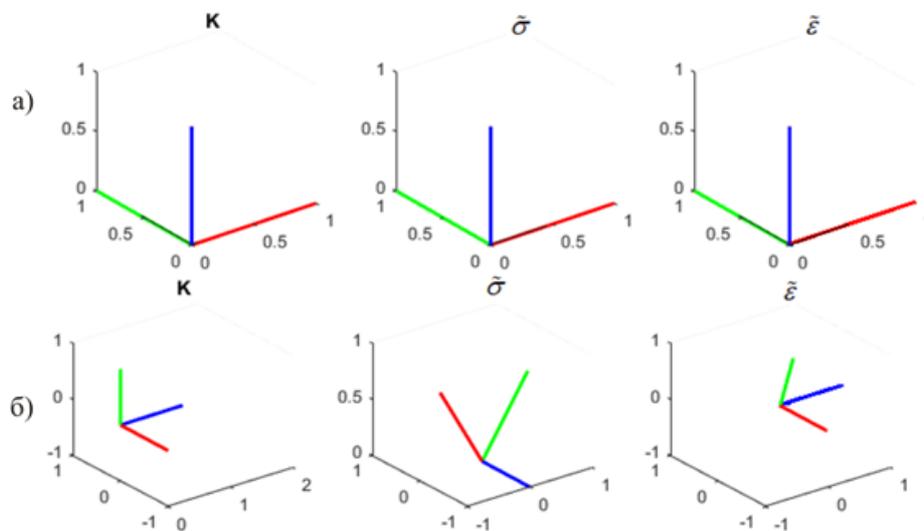


Рис. 2. Главные направления тензоров \tilde{K} , $\tilde{\sigma}$, $\tilde{\epsilon}$ в момент завершения перестройки в задаче: а) о всестороннем сжатии бесконечно-малого объема трабекулярной костной ткани б) об изгибе образца трабекулярной костной ткани в виде консольной балки, нагруженной изгибающим моментом на торце (показана реализация в одном из элементов)

В соответствии с этим выражением главные направления девиатора тензора структуры \tilde{K} должны совпадать с главными направлениями тензора напряжений $\tilde{\sigma}$ (и тензора деформаций $\tilde{\epsilon}$). Именно в момент достижения соосности между тензорами можно оценивать полученную структуру трабекулярной костной ткани.

Комплексный подход к оценке получаемых результатов позволяет сделать вывод не только о характере изменения внутренней структуры костной ткани с заданными свойствами, но также спрогнозировать конечное время перестройки и локализовать те участки, в которых адаптационных процессов не возникнет. Последнее соображение ранее не учитывалось и с большой вероятностью могло привести к расхождению кривых на рис. 1б и отсутствию соосности на рис. 2б по истечении 160 дней.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант 15-01-04884-а).

ЛИТЕРАТУРА:

1. Cowin S.C. Bone Mechanics Handbook. – Second edition. – New York: CRC Press, 2001. – 1136 p.
2. Гороженинова Т.Н., Киченко А.А. "Решение задачи о перестройки трабекулярной костной ткани в конечно-элементном пакете ANSYS". Материалы XXV Всероссийской школы-конференции молодых ученых и студентов "Математическое моделирование в естественных науках". Пермь 5-8 октября 2016 г., с.87-89.
3. Гороженинова Т.Н., Киченко А.А. "Моделирование поведения трабекулярной костной ткани под нагрузкой в ANSYS". Материалы научной конференции с международным участием "Неделя науки в СПбПУ". Санкт-Петербург 14-19 ноября 2016 г., с.208-210.
4. Cowin S.C. An evolutionary Wolff's law for trabecular architecture // J. Biomech. Engng. – 1992. – Vol. 114. – P. 129–136.
5. Tverier V., Kichenko A., Nyashin Y., Lokhov V. Experimental construction of the fabric tensor for trabecular bone tissue // Series on Biomechanics, 2015, Vol. 29, No. 4, P. 33–38.
6. Киченко А.А. Постановка начально-краевой задачи о перестройке трабекулярной костной ткани / А.А. Киченко, В.М. Тверье, Ю.И. Няшин, М.А. Осипенко, В.А. Лохов // Российский журнал биомеханики. – 2012. – Т.16, №4. – С.36-52
7. Киченко А.А. О приложении теории перестройки трабекулярной костной ткани / А.А. Киченко, В.М. Тверье, Ю.И. Няшин, М.А. Осипенко, В.А. Лохов // Российский журнал биомеханики. – 2012. – Т.16, №4. – С.53-72
8. Саченков О.А., Герасимов О.В., Хакова А.С., Садовникова Е.Н., Киченко А.А. Исследование механических свойств бедренных костей крыс при гипогравитации // Биомеханика-2016: тезисы докладов XII Всероссийской (с международным участием) конференции, г. Пермь, 5-8 декабря 2016 г. – Пермь: Изд-во Пермского национального исследовательского политехнического ун-та, 2016. – С. 31–32.
9. Киченко А.А. Математическое моделирование поведения трабекулярной костной ткани при изменении условия нагружения // В сборнике Математика и междисциплинарные исследования - 2016 Сборник докладов всероссийской научно-практической конференции молодых ученых с международным участием. гл. ред. Ю.А. Шарапов; Пермский государственный национальный исследовательский университет. 2016. С. 167-170.
10. Гороженинова Т.Н., Киченко А.А. Моделирование изгиба анизотропной консольной балки в Ansys Mechanical // Master's Journal. 2017. № 1. С. 225-229.

УДК 612.76.004.94

П.А. Квиндт, А.Л. Овсепьян
Санкт-Петербургский государственный электротехнический университет

БИОМЕХАНИЧЕСКОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ СОСТОЯНИЯ СТРУКТУР АОРТАЛЬНОГО КЛАПАНА ПРИ КОРРЕКЦИИ МЕТОДОМ БАЛЛОННОЙ ВАЛЬВУЛОПЛАСТИКИ

Введение. Одной из главных причин преждевременной смерти пациентов во всем мире являются пороки сердечных клапанов. Аортальный стеноз является наиболее распространенным пороком клапанного аппарата на сегодняшний день и занимает третье место среди всех сердечно-клапанных патологий. Согласно сведениям из литературных

источников, стеноз устья аорты выявляется у 3–7 % пациентов в общей популяции, и его распространенность увеличивается с возрастом до 15–20 % у лиц старше 80 лет [1].

На данный момент существует два основных метода хирургической коррекции данного порока:

Транскатетерная имплантация – довольно новый метод, первым этапом которого является баллонная вальвулопластика. При применении этого метода присутствует риск появления опасных осложнений, возникающих из-за особенностей конструкции протеза: гемодинамически значимая регургитация, атриовентрикулярная блокада, а кроме того осложнения, нуждающиеся в экстренном хирургическом вмешательстве. Помимо этого, нет единой стратегии по выбору модели биопротеза с бесшовным методом фиксации.

Баллонная вальвулопластика позволяет сохранить природный клапан сердца. Этой методике свойственна высокая степень выживаемости, независимости от операционной, а также малое количество осложнений. Однако на сегодняшний день не существует методики, позволяющей оптимально подбирать необходимую величину давления для разрыва комиссур. При избыточном давлении возможно разрушение фиброзного кольца или зоны синусов Вальсальва, а при недостаточном – возникает риск рецидива [2,3].

Исходя из всего вышесказанного, разработка и внедрение методики предоперационного прогнозирования реакции структур аортального клапана (АК) при коррекции во врачебную практику для исключения неблагоприятных и нерезультативных воздействий является актуальной задачей.

Цель работы: Биомеханическое исследование состояния структур АК при баллонной дилатации.

Для достижения поставленной цели были решены следующие задачи:

1. Построена содержательная модель баллонной дилатации АК;
2. Проведен анализ геометрических параметров и механических свойств структур по литературным источникам;
3. Построена компьютерная геометрическая модель стенозированного АК;
4. Построена конечно-элементная компьютерная модель АК;
5. Проведен биомеханический анализ.

Моделирование. В данном исследовании при построении содержательной модели использовались геометрические параметры и механические свойства структур, характерные для людей пожилой возрастной группы (61–74 года), полученные из литературных источников. В состав модели входят: фиброзное кольцо, синусы Вальсальва, створки клапана и восходящий отдел аорты [4,5].

При построении модели были введены следующие допущения:

1. Материалы структур АК и комиссур обладают свойствами сплошности, однородности и изотропности.
2. Начальные напряжения в структурах отсутствуют.
3. АК закреплен по фиброзному кольцу и восходящему отделу аорты.
4. Давление при баллонной дилатации равномерно распределено по створкам АК.

Для построения геометрической компьютерной модели стенозированного АК использовался программный комплекс SolidWorks 2016. Были построены отдельные элементы клапана, затем создана сборка с применением условий сопряжения (рис. 1). Затем была произведена фиксация модели по фиброзному кольцу и восходящему отделу аорты, а к элементам применены свойства материалов. Внешняя нагрузка (давление) приложена на нижние поверхности створок и комиссур АК.

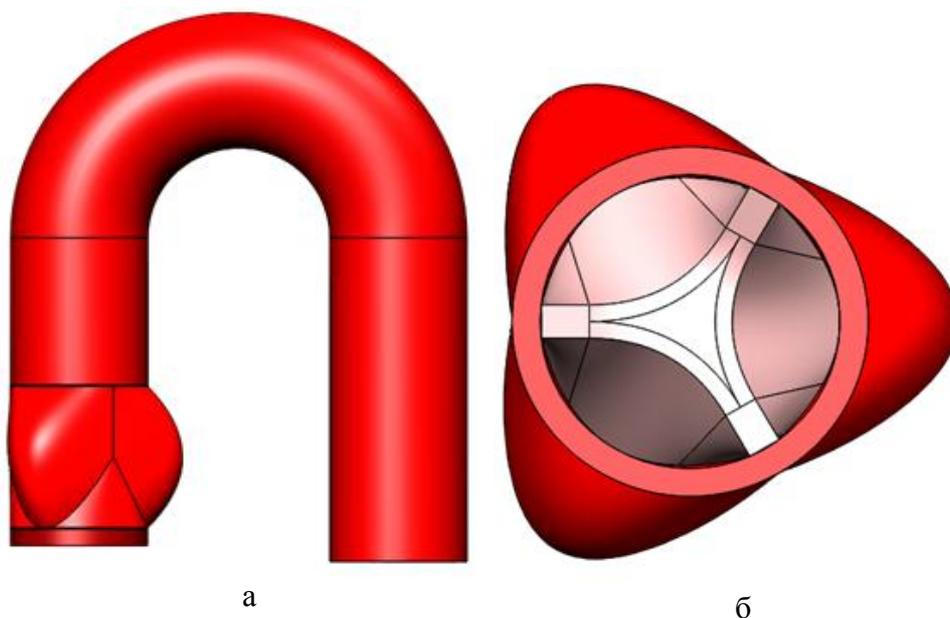


Рис. 1. Компьютерная геометрическая модель стенозированного АК:
а – вид спереди, б – вид сверху в разрезе

На следующем этапе была создана конечно-элементная модель для исследования напряженно-деформированного состояния АК.

Результаты. Исследование напряженно-деформированного состояния АК проводилось методом пошагового нагружения. Максимально допустимое напряжение в комиссурах, при котором происходит их разрыв, составляет 0,9 МПа. Длина комиссуры была разделена на 10 приблизительно равных частей, после чего последовательно разрушалась каждая из них. После проведения этапа исследования деформированная модель преобразовывалась в твердое тело, снова создавалась конечно-элементная модель уже деформированного твердого тела и проводился следующий этап анализа.

В итоге было достигнуто полное разрушение комиссур. Критическое значение давления составило 282 кПа. Также были получены значения дилатирующего давления баллона на каждом шаге нагружения, по которым была построена зависимость величины прикладываемого давления от порядкового номера нагружения (рис. 2). Зависимость представляет собой возрастающую экспоненту. Это объясняется тем, что с увеличением шага нагружения увеличивается площадь срастания комиссур, следовательно, возрастает и величина давления, необходимая для их дальнейшего разрушения.

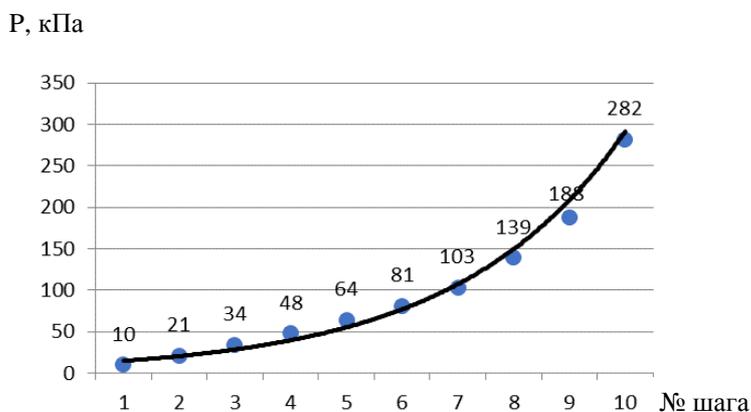


Рис. 2. Зависимость необходимой величины давления от шага нагружения

Результатирующая эпюра напряжений представлена на рис. 3.

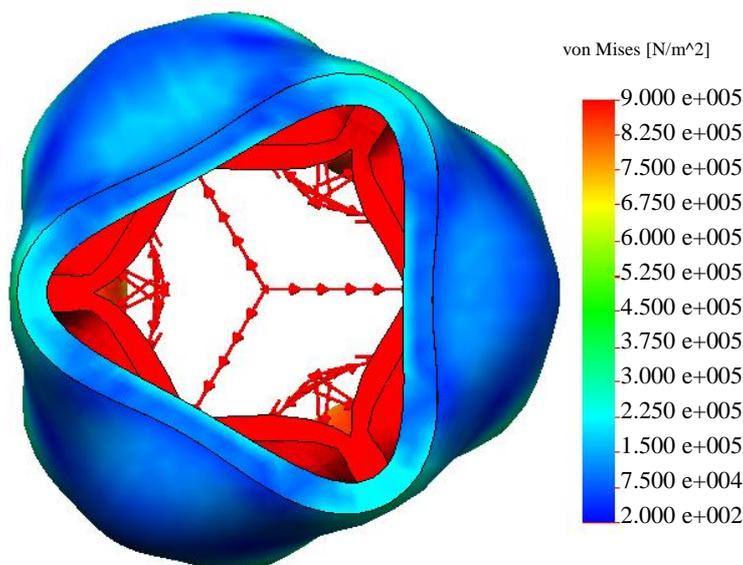


Рис. 3. Результатирующая эпюра напряжений

Выводы. В результате проведенного исследования поставленные задачи были выполнены. Реализована методика исследования состояния структур АК при его баллонной дилатации, которая позволит проводить предоперационную диагностику данной эндоваскулярной операции.

ЛИТЕРАТУРА:

1. Коваленко В. Н., Несукай Е. Г., Титов Е. Ю. Приобретенный аортальный стеноз: вопросы этиологии и патогенеза // Укр. кардіол. ж. – 2010. – №. 1. – С. 96–103.
2. Миллер О. и др. Лечение аортального стеноза у пожилых пациентов // Врач. – 2011. – №. 11. – С. 2–7.
3. Бегун, П. И., Биомеханическое моделирование объектов протезирования. – СПб.: Политехника, 2011. – 464 с.
4. Бегун П. И., Афонин П. Н. Моделирование в биомеханике. Учебное пособие // М.: Высшая школа. – 2004. – 391 с.
5. Овчаренко Е.А., Биомеханическая система бесшовной имплантации аортального клапана сердца: автореф. дисс. канд. техн. наук / МГТУ им. Н. Э. Баумана, Москва, 2016. – 184 с.

УДК 612.27

В.В. Макевнина
Санкт-Петербургский государственный университет

АНАЛИЗ НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННОГО СОСТОЯНИЯ МОДЕЛИ ЛЕГКИХ ЧЕЛОВЕКА ПОД ВЛИЯНИЕМ ДВИЖЕНИЯ ПОТОКА ГАЗОВОЙ СРЕДЫ

Актуальность.

Как известно, газообмен между атмосферным воздухом и альвеолярным пространством легких происходит в результате циклических изменений объема легких в течение фаз дыхательного цикла. В фазу вдоха объем легких увеличивается, воздух из внешней среды поступает в дыхательные пути и затем достигает альвеол. Напротив, в фазу выдоха происходит уменьшение объема легких, и воздух из альвеол через дыхательные пути

выходит во внешнюю среду. Увеличение и уменьшение объема легких обусловлены биомеханическими процессами изменения объема грудной полости при вдохе и выдохе. Если изучение легочных объемов, вентиляции и газообмена интенсивно ведется уже многие десятилетия и получило широкую разработку в физиологическом и клиническом аспектах в нашей стране и за рубежом, то вопросы биомеханики дыхания являются сравнительно новой областью клинической физиологии дыхания [1]. В биомеханике дыхания используются модели различного уровня сложности с точки зрения учета тех или иных механических процессов в зависимости от конкретных задач моделирования. При построении таких моделей используются результаты моделирования различных физических процессов, сопровождающих дыхание. С середины прошлого века до настоящего времени широко используются модели, в которых легкие представлены упругими оболочками, соединенными с атмосферой трубкой с некоторым гидравлическим сопротивлением [2]. При попытке расчета течения газа в системе воздухоносных путей легких с реальными геометрическими размерами возникают принципиальные трудности описания взаимодействия различных частей дыхательного тракта, поскольку изменение механических свойств дыхательных путей во времени и пространстве практически неизвестно. В связи с этим легкие пытаются моделировать в виде упругих «пузырей». Такой подход соответствует некоторому осреднению параметров по объему легких [3]. В наиболее распространенной однокомпонентной модели дыхательной системы предполагается, что альвеолярное давление распределено по объему легких однородно.

В простейшей модели (рис. 1) легкие и грудная клетка моделируются упругими оболочками (пузырями), а воздухоносное дерево — трубкой с некоторым гидравлическим сопротивлением R , соединяющей пузырь-легкие с атмосферой [2]. Данная модель позволяет получить простейшие связи между физическими параметрами, характеризующими легкие. Обычно предполагается, что сопротивление R воздухоносных путей постоянно в процессе дыхания и что материал оболочек легких и грудной клетки линейно упругий.

Цели и задачи работы.

Целью данной работы являлся анализ напряженно-деформированного состояния легких под влиянием движения потока газовой среды.

Для достижения указанной цели были поставлены задачи: построить простейшую биомеханическую модель легких человека; с использованием построенной конечно-элементной модели исследовать напряженно-деформированное состояние легких под влиянием движения потока газовой среды.

Методы исследования.

В настоящее время интенсивно развивающимся направлением изучения биомеханики дыхательной системы является численное моделирование с помощью пакетов компьютерных программ. Для реализации этого подхода необходим геометрический образ органа. В данной работе эта задача решена средствами компьютерного комплекса *ANSYS*, использующего метод конечных элементов.

При создании вычислительной модели легких человека были приняты следующие допущения: механические свойства легких однородно и изотропно распределены по их объему, материал оболочки модели легких линейно упругий; среда сплошная. Предполагалось, что в начальный момент течение воздуха отсутствует, все скорости равны 0 м/с; давление в легких равно атмосферному давлению (760 мм рт.ст.), температура равна 36,6° С. Были выбраны: метод теплообмена Total Energy, SST модель турбулентности, число Прандтля равное 0,702. Математическая модель построена в рамках механики трехмерного тела.

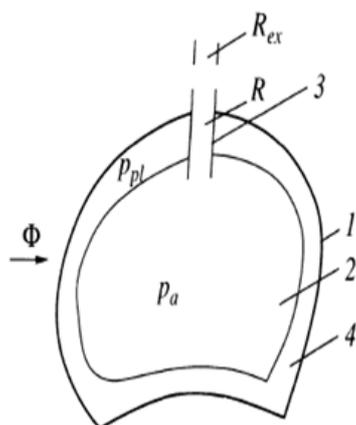


Рис. 1. Простейшая модель легких: 1 – грудная клетка; 2 – легкие; 3 – дыхательные пути; 4 – плевральная полость

Результаты.

С использованием компьютерного комплекса Ansys была построена простейшая биомеханическая модель легких человека. Модель легких включала два тела : трахею и упругий «пузырь». Отдельно моделировались оболочка модели легких и движение вдыхаемого/выдыхаемого воздуха.

С использованием построенной конечно-элементной модели исследовалось напряженно-деформированное состояние легких под влиянием движения потока газовой среды.

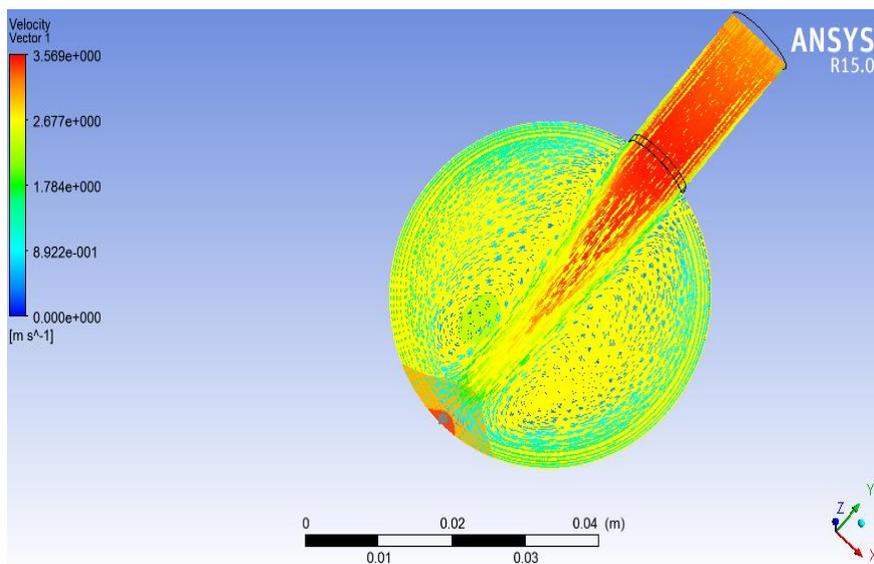


Рис. 2. Распределение вектора скорости при вдохе

Данное исследование позволило определить профиль скорости и траекторию движения газа. Векторное поле скорости внутри оболочки модели легких показано на рис.2. Так, например, на шаге в 1,5 с (рис. 2) видно, что максимальные значения на вдохе (до 3,6 м/с) сосредоточены в трахее, а на шаге в 5,1 с (рис. 3) наблюдается максимальная скорость выдоха, тоже сосредоточенная в области трахеи.

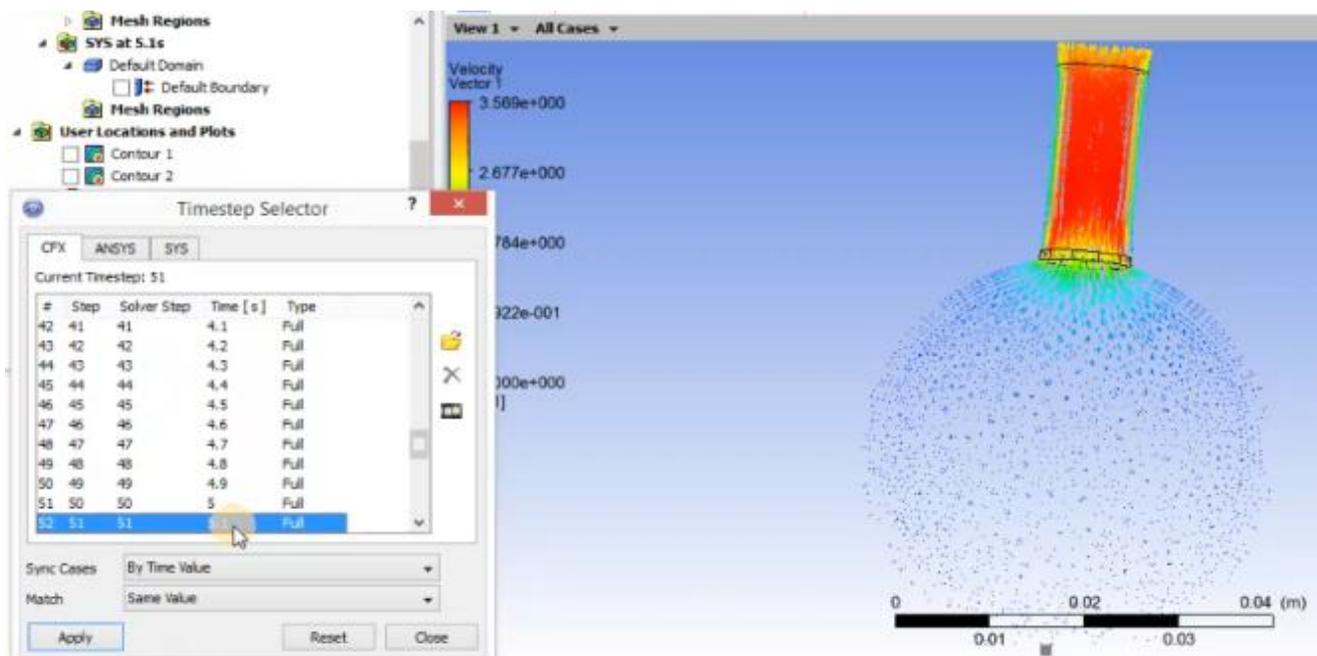


Рис. 3. Распределение вектора скорости при выдохе

На промежуточном этапе, например, на шаге в 3,2 с (рис. 4), скорость потока становится незначительной, практически нулевой.

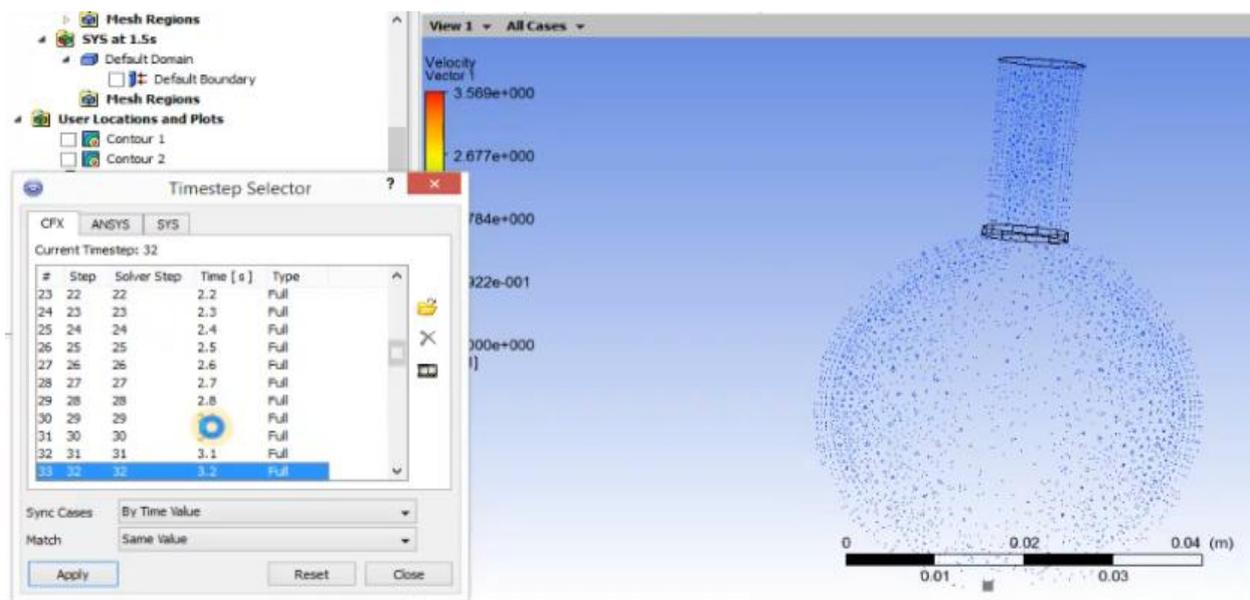


Рис. 4. Распределение вектора скорости при шаге в 3,2 с

Результаты расчетов показали также какие происходят изменения, когда упругий «пузырь» раздувается под воздействием поступающего в него потока воздуха.

Рис. 5 иллюстрирует то, как модель легких раздувается на шаге в 1,6 – 1,7 с, при этом нижняя часть оболочки прогибается примерно на 3,5 мм.

Выводы. Показано, что в результате построения конечно-элементной модели легких человека возможен анализ напряженно-деформированного состояния легких под влиянием движения потока газовой среды. Решение данной задачи показывает большие потенциальные возможности, реализовать которые можно при организации командной работы с медицинских специалистов и инженеров.

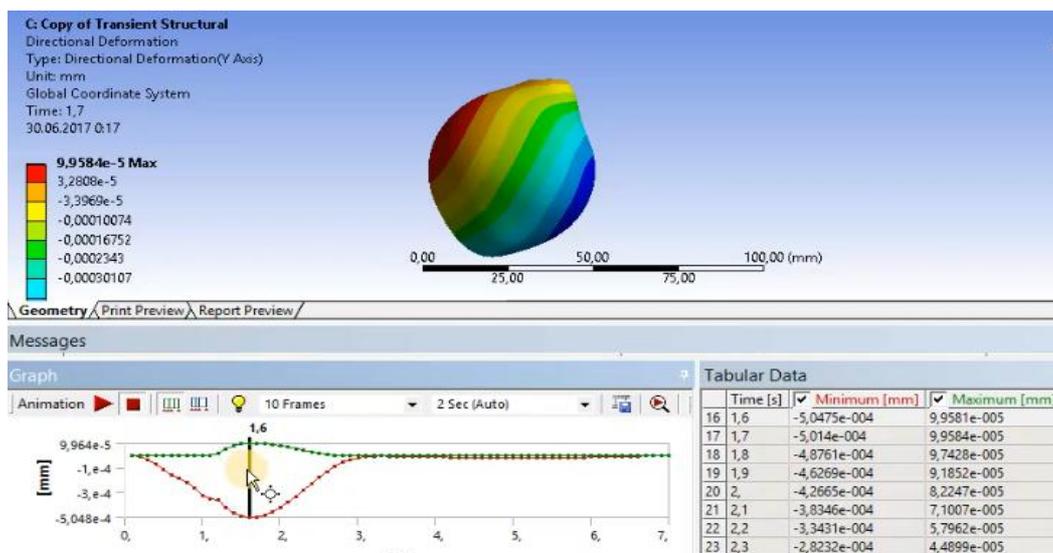


Рис. 5. Деформация оболочки модели легких при раздувании

ЛИТЕРАТУРА:

1. К.М. Лебединский, В.А. Мазурок, А.В. Нефедов «Основы респираторной поддержки». Краткое руководство для врачей. Санкт-Петербург, 2005.
2. Г.А.Любимов «Модели легких человека и исследование с их помощью механики дыхания», Труды математического института им.В.А.Стекова, т.223,с.196-206, 1998 г.
3. Сафронова М.А. Статистический анализ шумообразования свистящих звуков форсированного выдоха. ТОИ ДВО РАН. Диссертация. Владивосток, 2016 г.

УДК 004.942

М. Д. Степанов¹, О.С. Лобода¹, Ю.В. Новожилов²

¹ Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого,
² ЗАО «КАДФЕМ Си-Ай-Эс»

МОДЕЛИРОВАНИЕ МИТРАЛЬНОГО КЛАПАНА

В рамках данного исследования выполнено численное моделирование работы митрального клапана в сердце человека. По анатомическим атласам построена балочно-оболочечная геометрическая модель с учетом неоднородности распределения толщины клапана по поверхности створок. С помощью метода конечных элементов в программной системе конечно-элементного анализа ANSYS Mechanical проведено моделирование полного цикла работы митрального клапана. Реализован и отработан способ обработки данных с компьютерного томографа в твердотельную CAD модель.

Митральный клапан состоит из фиброзного кольца, двух створок, хорд и папиллярных мышц. Главная его задача – контроль потока крови от левого предсердия к левому желудочку. Во время систолы желудочков, митральный клапан закрывается, чтобы предотвратить обратный ток крови в левое предсердие.

Пролапс митрального клапана (ПМК) — это порок сердца, при котором происходит прогиб створок митрального клапана в левое предсердие во время сокращения левого желудочка. В норме во время сокращения предсердия клапан открыт и кровь поступает в желудочек. Затем клапан закрывается и происходит сокращение желудочка, за счет которого

кровь выбрасывается в аорту. При ПМК прогиб створок клапана во время сокращения левого желудочка приводит к тому, что часть крови поступает обратно в предсердие.

Научный сотрудник детского госпиталя предложил проведение операции на работающем сердце с исправлением пролапса митрального клапана за счет специального устройства “Клип”, закрепленного на створке клапана и тем самым предотвращающего провисание створок клапана в область левого желудочка (рис. 1). Одной из главных задач данной работы является изучение влияния устройства “Клип” на створки митрального клапана.

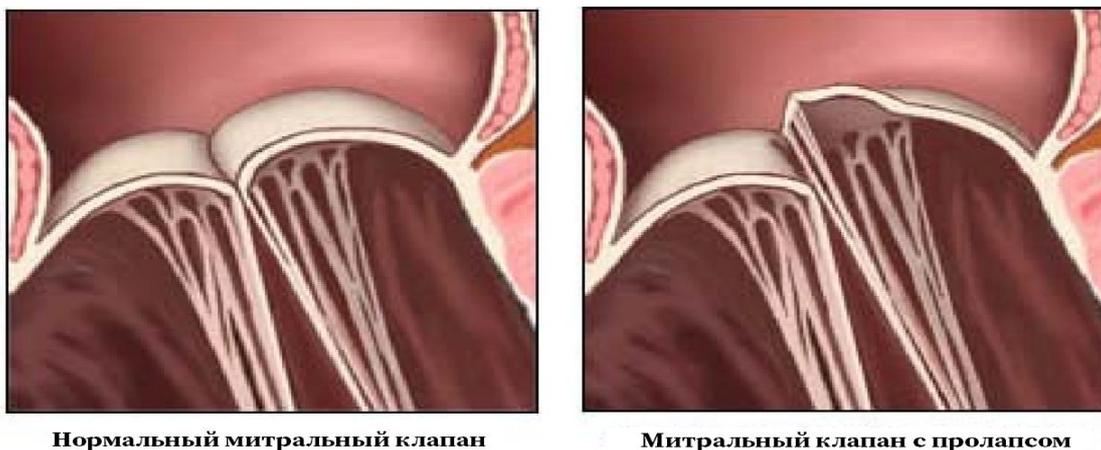


Рис. 1. Сравнение нормального митрального клапана и клапана с пролапсом

В данной работе геометрическая модель митрального клапана выполнена с использованием программы ANSYS SpaceClaim. Достоверные размеры клапана были взяты из статей, направленных на изучение анатомии клапанов сердца [0]. Неоднородное распределение толщины (рис. 2) было реализовано с помощью опции “External Data”, которая позволяет пользователям импортировать данные в текстовом формате из внешних источников или программ сторонних разработчиков в приложения ANSYS.

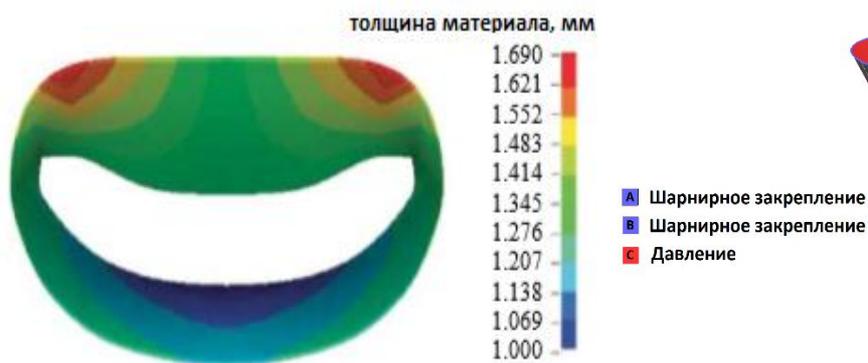


Рис. 2. Распределение толщины по поверхности митрального клапана

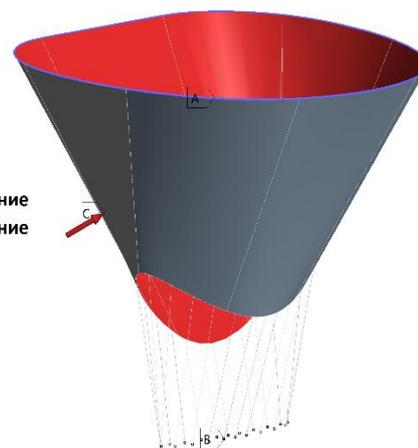


Рис. 3. Граничные силовые условия

Начальные и граничные условия задачи устанавливались исходя из реальных условий работы сердца. В начальный момент расчета клапан находится в ненапряженном состоянии, что соответствует переходу от этапа наполнения к этапу систолы предсердий. Граничные силовые условия схематично отображены на рисунке 3. Для митрального кольца ограничены

перемещения по трем трансляционным степеням свободы (А). Также ограничены перемещения (В) нижней части хорд, которой они крепятся к стенкам левого желудочка. По нормали приложено поверхностное давление (С), обеспечивающее смыкание створок (рис.3).

Как и многие биологические ткани, материал створок митрального клапана является гиперупругим и трансверсально изотропным. Однако для использования данного типа материала нужны данные ряда экспериментов с целью определения констант механических свойств материала створок митрального клапана. В данной работе используется линейная изотропная модель.

Результаты и выводы. Наибольшие напряжения наблюдаются во время перехода от фазы напряжения к фазе изгнания на 0,302 сек расчета, в этот момент на створки действует результирующее давление 16 кПа, именно этот момент считается полным закрытием клапана. Смыкание клапана подтверждено проверкой статуса контактных элементов (рис. 4) в момент пиковых напряжений. Также о плотном смыкании клапана можно судить по изображению срединного сечения (рис. 5).

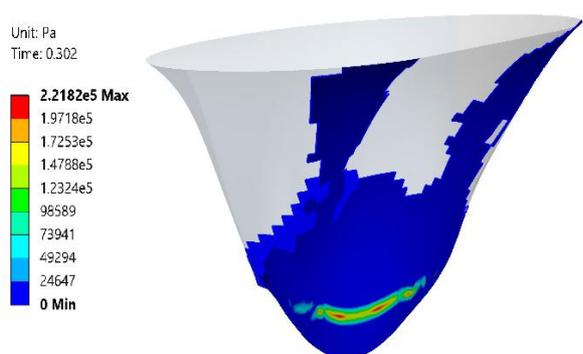


Рис. 4. Контактное давление в момент максимального смыкания клапана

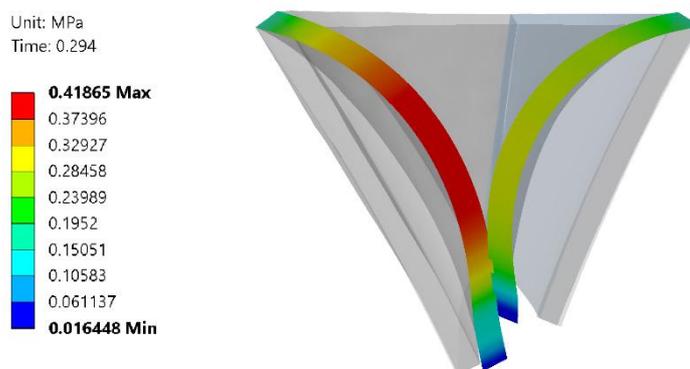


Рис. 5. Срединное сечение клапана в момент максимального смыкания клапана

Напряжения на передней створке всегда больше, чем напряжения, возникающие на задней. В целом, значения напряжений варьируются в пределах от 13 кПа в период наполнения желудочка до 637 кПа в период полного смыкания клапана. Таким образом, полученные результаты хорошо согласуются с данными, полученными в статьях [0-4], посвященных моделированию работы митрального клапана. Помимо этого, в результате численного моделирования было показано, что клапан плотно смыкается во время перехода от фазы напряжения к фазе изгнания на 0,302 сек расчета, это совпадает данными для цикла работы клапана.

Также в рамках данной задачи был проведен анализ влияния устройства “Клип” на створки митрального клапана при его нормальном функционировании. “Клип” моделировался в трех разных конфигурациях в виде точечной массы. Были проведены расчеты и сравнение полученных результатов со случаем, когда на створке не установлено данное устройство.

Анализ перемещений показал максимальное расхождение результатов в 0.18%, это позволяет заключить, что установка скрепки не оказывает значительного влияния на перемещения створки митрального клапана при его нормальном функционировании. При увеличении массы наблюдается расхождение результатов для значений напряжений в верхней области клапана. Максимальное значение расхождения в 5.11% обнаружено в случае, когда масса скрепки максимальна. В статье [0] приведено значение динамического предела прочности 0.9 МПа для материала створок митрального клапана. Таким образом, можно сделать вывод, что установка “Клипа” не повлечет за собой появление

дополнительных растягивающих напряжений, способных привести к появлению необратимой деформации на створках митрального клапана.

Также стоит отметить, что в рамках данной работы на примере части позвоночника человека реализован и отработан способ обработки данных с компьютерного томографа в твердотельную модель, которую в дальнейшем можно использовать при расчетах в программных системах конечно-элементного анализа. Данный способ позволит в будущем построить анатомически точную модель митрального клапана по данным обследования компьютерным томографом.

ЛИТЕРАТУРА:

1. Котович Д.С., И.Н. Стакан Анатомия митрального клапанного аппарата в норме и при дилатационной кардиомиопатии [Текст] / Д. С. Котович // Белорусский государственный медицинский университет УЗ «Минская областная клиническая больница». – С. 10.
2. Qian W. and Wei S. Finite Element Modeling of Mitral Valve Dynamic Deformation Using Patient-Specific Multi-Slices Computed Tomography Scans [Текст] / Qian W. // Annals of Biomedical Engineering, Vol. 41. - №1. – January 2013. – С. 142–153.
3. Sacks M.S., He Z., Baijens L., Wanant S., Shah P., Sugimoto H., and Yoganathan A.P. Surface Strains in the Anterior Leaflet of the Functioning Mitral Valve [Текст] / Sacks M.S. // Annals of Biomedical Engineering. – 2002. – С.30, С.1281-1290.
4. Stevanella, M., F. Maffessanti, C. A. Conti, E. Votta, A. Arnoldi, M. Lombardi, O. Parodi, E. G. Caiani, and A. Redaelli. Mitral valve patient-specific finite element modeling from cardiac MRI: application to an annuloplasty procedure [Текст] / Stevanella, M. // Cardiovascular Engineering and Technology, Vol. 2. - №2, - June 2011. – С.66–76.
5. Anwarul Hasan Biomechanical properties of native and tissue engineered heart valve constructs [Текст] / Anwarul Hasan // Journal of Biomechanics 47 (2014) 1949–1963. – С .15.

УДК 531/534:57

П.А. Дубровина

Санкт-Петербургский государственный электротехнический университет

РАЗРАБОТКА АЛГОРИТМА И ПОСТРОЕНИЕ МОДЕЛЕЙ ДЛЯ БИОМЕХАНИЧЕСКОГО АНАЛИЗА СОСТОЯНИЯ СТРУКТУР МОЗГА ЧЕЛОВЕКА ПРИ ТРАВМАХ

Введение. Черепно-мозговая травма относится к наиболее распространённым видам травм. Доступные научные публикации, касающиеся исследования механики черепно-мозговых травм, используют единственную существующую не параметрическую модель головы [1,2]. Травматическое повреждение мозга может произойти при внезапном приложении к голове внешних сил, при этом в головном мозге возникают напряжения и деформации, нарушающие его нормальные функции. Знания о критическом состоянии структур мозга при различных внешних механических воздействиях, улучшение диагностических средств и мер защиты могут помочь уменьшить частоту и тяжесть травматического поражения мозга.

Цель работы. Разработка алгоритма и параметрических моделей головы человека, позволяющих проводить анализ состояния структур головы конкретного человека при различных статических и динамических нагрузках.

Материалы и методы. Интегральный компьютерный метод, представляющий симбиоз биомеханического компьютерного моделирования и анализа биологических структур по данным клинических томографических исследований, позволяет анализировать состояние структур мозга при различных внешних воздействиях [3].

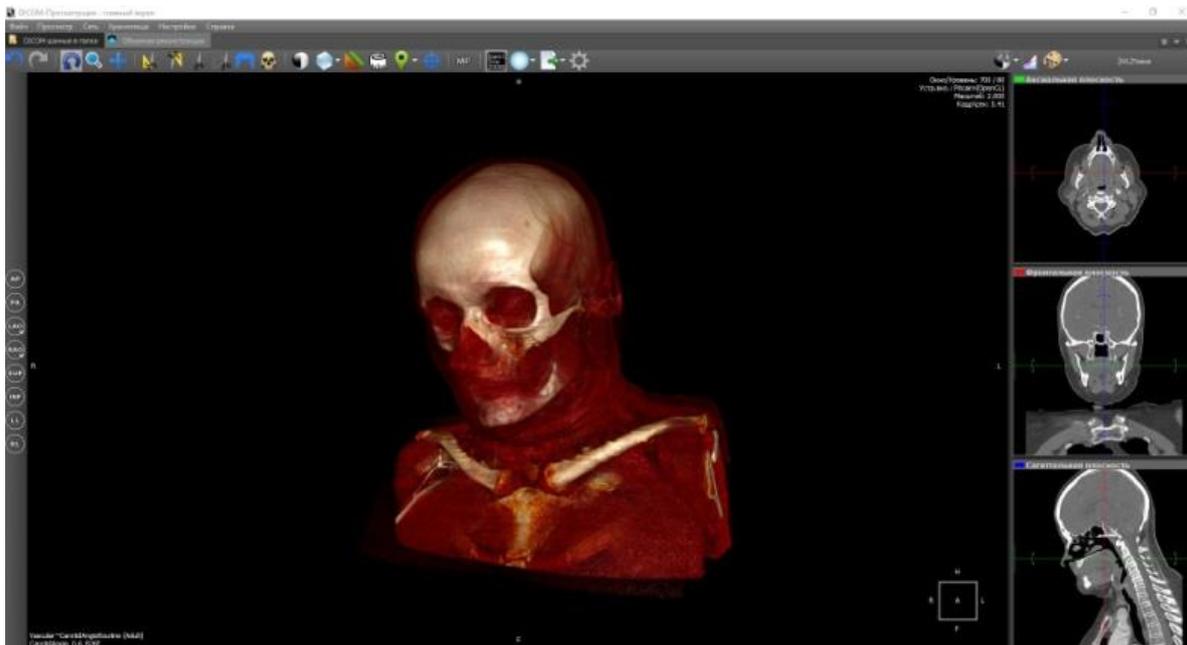


Рис. 1. 3D моделирование в Inobitec DICOMViewer1.8.9.

Обзор литературы по биомеханике черепно-мозговых травм показал, что на сегодняшний день большинство исследований используют единственную существующую модель головы, созданную на основе метода конечных элементов и представленную Королевским Технологическим институтом в 2002 году [1]. Однако эта модель не позволяет учесть индивидуальные особенности пациента.

Результаты и обсуждения. Была разработана новая методика построения модели строения головы человека, благодаря чему модель становится более индивидуальной и анатомически детализированной.

Разработанный алгоритм состоит из следующих этапов:

1. Просмотр серии снимков КТ и МРТ пациента в специализированной программе DICOMViewer1.8.9.
2. Программное 3D-моделирование по этим срезам (рис. 1).
3. Выделение одной из тканей путем выбора оптимальных параметров фильтра (по значениям плотности ткани).
4. Удаление структур, не используемых для дальнейшего исследования.
5. Экспорт поверхности в формате .stl, выбор оптимальных параметров (число итераций сглаживания и максимальное количество полигонов).
6. Проверка полученной поверхности и, в случае необходимости, исправление ошибок в полигонах в программе MeshLab.
7. Импорт в программу SolidWorks 2013, создание твердотельной модели элемента (рис. 2). Сборка элементов модели головы человека.
8. Анализ сборки в режиме статических и динамических нагрузок.

Разработанный алгоритм позволяет упростить построение модели и ускорить преобразование медицинского снимка в модель, готовую для анализа ее механических свойств с учетом индивидуальных особенностей пациента.



Рис. 2. Геометрическая модель черепа в программе SolidWorks 2013

Для проверки адекватности итоговой модели, основанной на медицинских снимках пациента, были построены содержательные модели головы человека различной упрощенной геометрии с местами закрепления и приложения нагрузок (рис. 3). Модель включает череп, мозг, мягкую мозговую оболочку, твердую мозговую оболочку, спинномозговую жидкость. Введены допущения: материал каждого элемента однородный и изотропный, начальные напряжения отсутствуют.

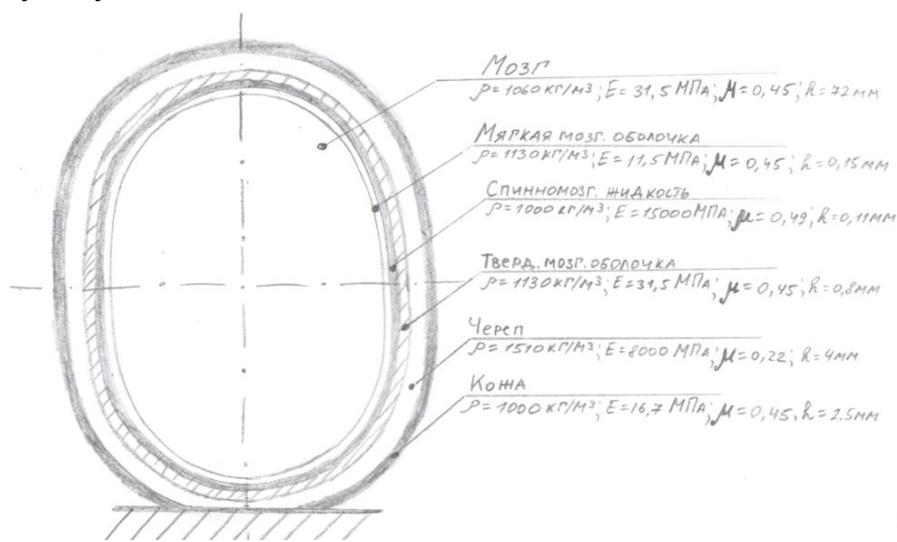


Рис.3. Пример содержательной модели головы

Механические свойства биологических объектов - модуль нормальной упругости в МПа, и (плотность в кг/м³) заданы соответственно: кожи головы 16,7 (1000), черепа 8000 (1510), твердой мозговой оболочки 31,5 (1130), мягкой мозговой оболочки 11,5 (1130), спинномозговой жидкости 15000 (1000), серпа мозга 31,5 (1140), тенториума 31,5 (1140). Модули упругости при сдвиге в кПа заданы следующие: у серого вещества 10, у белого вещества 12,5, у ствола мозга 22,5, у мозжечка 10. Плотность у последних четырех объектов 1060 кг/м³.

Исследованы напряжения и деформации в структурах мозга при различных линейных и угловых воздействиях на голову при разных законах нарастания нагрузки (внешние воздействия отличными массами, достигающие разного углового ускорения в начале удара или после некоторого временного промежутка).

При разных характерах нагрузки (угловых, линейных) возникают движения, которые в результате вычислений иллюстрируют разнообразные реакции в различных областях головного мозга. Каждая структура головы человека реагирует на внешнее воздействие отличным от других структур образом, это связано не только с геометрией структуры, а непосредственно с ее биомеханическими свойствами, такими как плотность, модуль нормальной упругости и пр. (табл. 1). При дальнейшем усложнении модели строения головы человека головной мозг рассматривается не как единый объект с заданными параметрами плотности и модуля нормальной упругости, а как комбинация нескольких структур с различными биомеханическими свойствами.

Табл.1. Максимальные значения напряжения, деформации и перемещения в четырех случаях

Ось вертикальная $e=6015 \text{ рад/с}^2$				Ось горизонтальная $e=6015 \text{ рад/с}^2$		
Структура	Напряжение, Н/м^2	Деформация, мм	Перемещение, мм	Напряжение, Н/м^2	Деформация, мм	Перемещение, мм
кожа	$4,87 \cdot 10^8$	0,396	18,5	$1,86 \cdot 10^8$	0,096	6,1
череп	$4,87 \cdot 10^8$	0,028	18,3	$1,86 \cdot 10^8$	0,014	6,04
тв.мозг.об	$1,66 \cdot 10^8$	0,166	18,0	$6,23 \cdot 10^7$	0,072	5,94
спин.жидк.	$2,59 \cdot 10^8$	0,017	17,9	$8,83 \cdot 10^7$	0,005	5,9
мяг.мозг.об.	$1,44 \cdot 10^8$	0,057	17,9	$6,18 \cdot 10^7$	0,025	5,9
мозг	$7,35 \cdot 10^7$	0,041	17,9	$2,91 \cdot 10^7$	0,015	5,9
$e=2215 \text{ рад/с}^2$				$e=2215 \text{ рад/с}^2$		
кожа	$1,79 \cdot 10^8$	0,146	6,83	$6,87 \cdot 10^7$	0,035	2,25
череп	$1,79 \cdot 10^8$	0,01	6,76	$6,87 \cdot 10^7$	0,005	2,22
тв.мозг.об	$6,09 \cdot 10^7$	0,061	6,64	$2,3 \cdot 10^7$	0,026	2,19
спин.жидк.	$9,53 \cdot 10^7$	0,006	6,6	$3,25 \cdot 10^7$	0,002	2,18
мяг.мозг.об.	$5,32 \cdot 10^7$	0,021	6,6	$2,28 \cdot 10^7$	0,009	2,18
мозг	$2,71 \cdot 10^7$	0,015	6,6	$1,07 \cdot 10^7$	0,005	2,18

При достижении угловым ускорением максимальных значений серое вещество вращается вокруг осей X и Z, а белое вещество - вокруг оси Y. При нагрузках вдоль осей X, Y и Z экстремальные значения напряжений возникают в области ствола мозга. Серое вещество менее чувствительно к направлению внешнего воздействия, так как оно состоит из ненаправленных тканей. Белое вещество более чувствительно - состоит из направленных определенным образом аксонов.

Выводы. Исследование соотношений между механической нагрузкой и возникшими в результате нее напряжениями и деформациями, возможно на моделях, адекватно отражающих геометрические параметры структур головы, их механические свойства и характер внешнего воздействия. Построенные модели и разработанные алгоритмы расчета могут быть использованы как дополнительный диагностический материал при анализе состояния структур мозга при внезапном приложении к голове внешних сил.

ЛИТЕРАТУРА:

1. Kleiven S. Finite Element Modeling of the Human Head – Stockholm: Department of Aeronautics Royal Institute of Technology, 2002. – 63 с.
2. Horgan, T.J., Gilchrist, M.D. Influence of FE model variability in predicting brain motion and intracranial pressure changes in head impact simulations// Inter. J. of Crashworthiness, 2004. V. 9 (4), P. 401–418.
3. Бегун П.И. Биомеханическое моделирование объектов протезирования: учебное пособие / П.И. Бегун. – СПб. : Политехника, 2011. -464 с.

БИОМЕХАНИЧЕСКОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ СОСТОЯНИЯ СТРУКТУР КОЛЕННОГО СУСТАВА ПРИ ТОТАЛЬНОМ ЭНДОПРОТЕЗИРОВАНИИ В ДИНАМИКЕ

Актуальность работы. Операция по замене коленного сустава – самая распространенная операция по эндопротезированию. Данные операции стали широко применяться в 1970х-1980х годах. Основным показанием для эндопротезирования коленного сустава является остеоартроз [1]. Риск возникновения остеоартроза зависит от многих факторов. Например: морфология кости, плотность костной ткани, нарушение функции мениска, гормональные сбои, перенесенные травмы. Основной группой риска, которая чаще всего страдает данным заболеванием, являются люди пожилого возраста и люди с избыточной массой тела [2,3]. Дистрофическое заболевание коленных суставов, обусловленное поражением хрящевой ткани, приводит к возникновению трещин и утрате эластичности в области колен, что в свою очередь отражается в контрактуре (паталогическое состояние, обусловленное уменьшением подвижности в суставе) коленного сустава и болях в коленном суставе при движении [4,5]. Цель эндопротезирования – устранение болевого синдрома и восстановление подвижности сустава.

Конструкция эндопротеза коленного сустава состоит из бедренного и большеберцового компонентов и пластикового вкладыша, предназначенного для уменьшения трения в протезе [6].

При индивидуальном подборе эндопротеза хирург основывается на снимках компьютерной томографии (КТ), которые не отражают биомеханические параметры коленного сустава (модуль упругости, состояние костной ткани)

Исследование на нагрузки костей с компонентами протеза, основанное на доказательной биомеханике, позволяет более точно выбрать тип, материал и размер эндопротеза.

Цель работы: Разработка алгоритма биомеханического исследования состояния коленного сустава с протезом при динамических нагрузках

Задачи исследования:

- создание модели коленного сустава;
- создание моделей компонентов эндопротеза;
- создание сборки из двух вышеперечисленных фрагментов;
- приложение динамических нагрузок к системе;
- анализ полученных результатов исследования.

Объект исследования: Компьютерные конечно-элементные модели бедренной и большеберцовой кости с протезом

Предмет исследования: Эпюры напряжения и перемещения и относительной деформации

Структура работы:

- 1) получение снимка КТ коленного сустава;
- 2) создание 3D оболочек костей коленного сустава с помощью программ Mimics, либо DISCOM Просмотрщик от компании Инобитек (рис.1а);
- 3) конвертация 3D оболочки костей коленного сустава в полигональные параметризованные твердые тела, с которыми можно работать в программном пакете SolidWorks, с помощью программы MeshLab (рис.1б);
- 4) достраивание длины кости в программном пакете SolidWorks;

- 5) подготовка моделей костей к протезированию в программной среде SolidWorks (резекция);
- 6) 3D-моделирование компонентов эндопротеза, основываясь на чертежах производителя, в SolidWorks;
- 7) сборка сустава с протезом (рис. 1в);
- 8) приложение динамических нагрузок, используя данные с портала OrthoLoad, к системам кость-эндопротез в приложении к SolidWorks Simulation;
- 9) анализ и обработка полученных результатов.

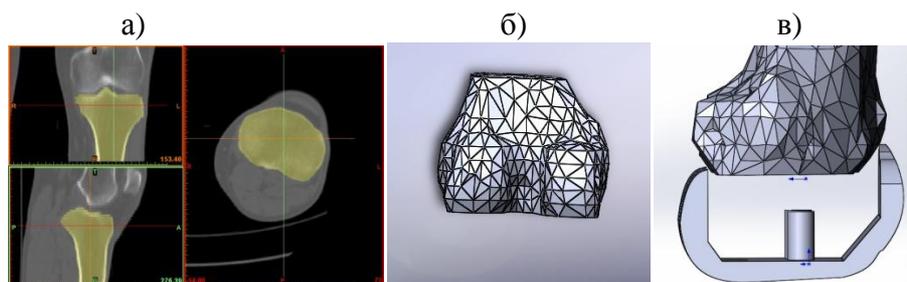


Рис. 1. Этапы проведения работы (а- построение первичной маски 3D оболочки в программе Mimics, б- модель бедренной кости в SolidWorks, в-сборка модели бедренной кости с моделью бедренного компонента эндопротеза)

В работе используются:

- 1) метод 3D моделирования (применяется при создании моделей компонентов эндопротеза);
- 2) метод параметрического моделирования, что позволяет к различным геометрическим характеристикам применять параметры (материал, толщина, характер закрепления) и выполнять анализ напряженно-деформированного состояния моделей;
- 3) метод конечно-элементного анализа, позволяющий рассчитать напряженно-деформированное состояние в модели.

Результаты:

Полученные результаты для упражнения «попеременная смена ног в прыжке»:

1. Эпюра напряжения;
2. Эпюра перемещения (рис. 2);

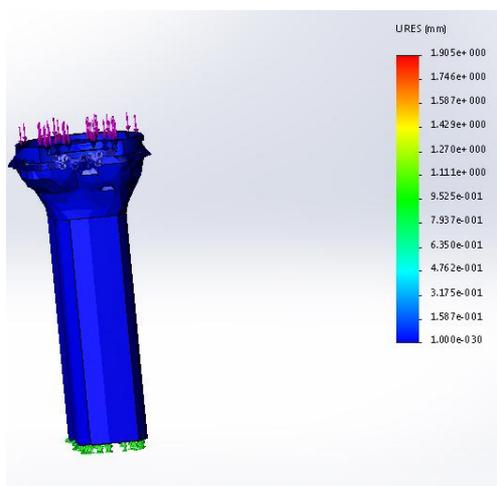


Рис. 2. Эпюра перемещения для модели большеберцовой кости с титановым протезом

Выводы: Данная технология дает возможность хирургу–ортопеду выбрать модель протеза, материалы и тип фиксации, опираясь не только на свой опыт, но и на состояние костной ткани, что немаловажно, т.к. биомеханические характеристики кости зависят от таких факторов как, например, возраст и род деятельности пациента, и разброс значений достаточно велик. Другое важное преимущество технологии в том, что пакеты прикладных программ позволяют провести анализ дооперационно лишь на основе компьютерных томограмм.

Визуализация трехмерной модели нижней конечности пациента в MIMICS, либо DICOM Viewer также может быть использована врачом при постановке диагноза.

Достоинства технологии: наглядность, неинвазивность, индивидуальный подход к каждому пациенту и удобство для визуального восприятия (цветная шкала на эпюрах). При наличии качественного компьютерного оборудования и уже готовой библиотеки моделей протезов и материалов обработка данных для одного пациента займет день.

ЛИТЕРАТУРА:

1. Травма <http://travmaorto.ru/46.html>
2. Анатомия колена, мышцы http://www.sportmedicine.ru/knee_norm.php
3. Медицинская библиотека. Ощупывание нормального коленного сустава http://www.medchitalka.ru/orthoped_diagnostics/knee/28132.html
4. Гонартроз, лечение, симптомы <http://www.vrach-travmatolog.ru/gonartroz.htm>
5. Гонартроз, <http://h-joint.ru/osteoartroz-2/gonartroz-osteoartroz-kolennogo-sustava/>
6. Повреждения и травмы колена <http://www.eurolab.ua/pain-management/3149/>

УДК 616.728.2

Г.С. Шалпегин¹, А.С. Алексашкин²

¹Санкт-Петербургский государственный университет

²Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого

ПРОЕКТИРОВАНИЕ И ПРОЧНОСТНОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ ИМПЛАНТАТА ТАЗОБЕДРЕННОГО СУСТАВА ЧЕЛОВЕКА

Введение. На данном этапе становления медицины одним из наиболее информативных методов является томография, которая дает гораздо больше информации о каждом элементарном объеме исследуемого объекта, по сравнению с другими известными диагностическими методами. Томография бывает различных видов, но суть всех видов томографии одинакова: по суммарной информации, которая была получена от некоторого сечения вещества, необходимо определить локальную информацию, а именно плотность вещества в каждой точке сечения. Достоверность и информативность каждого из них зависит от многих факторов, определяющих итоговый результат исследования, в том числе и от принципа действия устройства [1,2].

Томография является основным методом диагностики болезней тазобедренного сустава. Точность своевременной постановки верного диагноза во многом зависит как от качества полученных снимков, так и от программного обеспечения, которое используется для обработки полученных снимков. В некоторых случаях проблему пациента удается решить только при помощи тотального эндопротезирования тазобедренного сустава (то есть при помощи полной замены сустава на искусственный аналог). Подобные операции относятся к разряду серьезных хирургических вмешательств, а это значит, что к ним предъявляются повышенные требования по контролю качества. Еще на подготовительном этапе операции хирургу необходимо принять множество сложных решений на основании

томографических снимков: выбрать тип и форму имплантата (а возможно и смоделировать новый, анатомический), грамотно спланировать операцию (спланировать позиционирование имплантата внутри бедренной кости пациента).

Целью данной работы является создание модели тазобедренной кости, модели кости с имплантатом и модели с имплантатом с внутренней решетчатой структурой. Сравнение прочностных и массовых характеристик имплантата с внутренней решетчатой структурой с цельным имплантатом. Прочностной анализ производится в программных системах, основанных на методе конечных элементов [3].

Постановка задачи. Необходимо из имеющихся снимков тазобедренного отдела человека, полученных с помощью компьютерной томографии, построить 3D модель бедренной кости и подготовить полученную модель к экспорту в программную систему структурного анализа ANSYS, т.е. построить согласованную конечно-элементную сетку, с заданием необходимых свойств кости. В дальнейшем производится прочностной анализ бедренной кости человека для определения зон с наибольшими значениями напряжений.

Прочностные расчеты. Конечно-элементная модель бедренной кости человека, которая была использована в прочностном анализе в ANSYS, представлена на рис. 1а. КЭ модель бедренной кости с установленным имплантатом представлена слева на рис. 1в. Для проведения прочностных расчетов были заданы следующие граничные условия: условие жесткого закрепления на цилиндрическую часть кости (т.е. было жестко закреплено нижнее основание бедренной кости), и условие, согласно которому равномерно распределенная нагрузка, равная 1 МПа, прикладывается к сферической части головки бедренной кости (или к сферической части головки бедренного имплантата). КЭ модель бедренной кости с приложенной к ней равномерно распределенной нагрузкой изображена на рис. 1б. КЭ модель бедренной кости с имплантатом, с приложенной к ней равномерно распределенной нагрузкой изображена на рис. 1г.

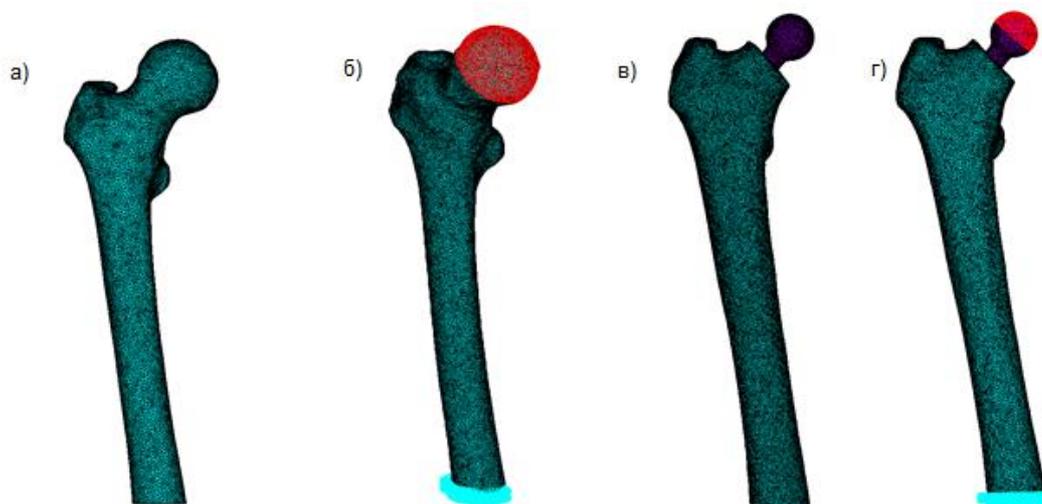


Рис. 1. КЭ модели бедренных костей в ANSYS

Слева на рис.2 представлены напряжения для бедренной кости без имплантата. Максимальные напряжения достигаются в зоне жесткого закрепления кости и составляют 173 МПа, но так как эта величина достигается локально в зоне заделки, то нужно рассматривать напряжения в некоторой окрестности от этой точки, где они достигают величины в 126,5 МПа. Справа на рис. 2 представлено распределение напряжений для бедренной кости с имплантатом. Для сравнения результатов с моделью без имплантата, измеряем величину напряжений в той же точке, что и ранее: величина напряжений в этой точке составила 33,5 МПа.

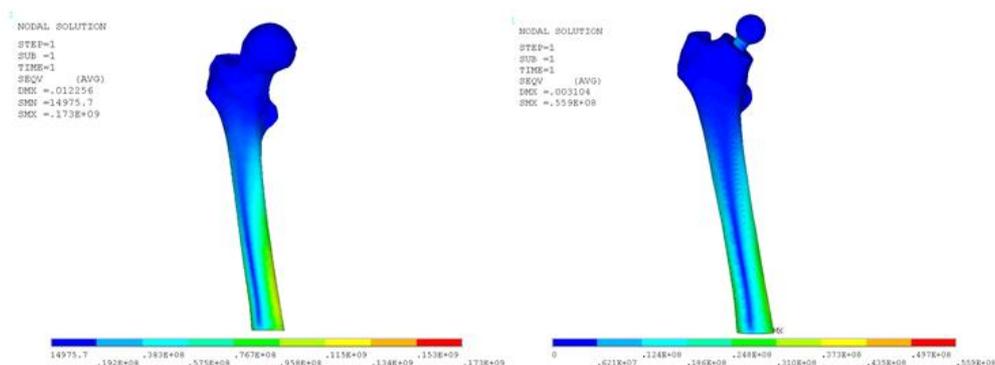


Рис. 2. Распределение напряжений по Мизесу, Па

Имплантаты с решетчатой внутренней структурой. До недавнего времени в медицине использовались цельные имплантаты, не имеющие никакой внутренней структуры. Это было связано с тем, что не существовало технологической возможности изготовить более сложные конструкции имплантата. Развитие аддитивных технологий привело к тому, что это стало возможным, и, значит, теперь нет необходимости использовать конструкции со слишком большим запасом прочности. За счет создания внутренней решетчатой структуры материала происходит уменьшение массы имплантата (что приводит к снижению нагрузок на имплантированный сустав), а также это приводит к уменьшению объема материала, которое затрачивается на производство имплантата. Пример внутренней структуры имплантата с решетчатой структурой показан на рис. 3.



Рис.3. Внутренняя структура имплантата с решетчатыми структурами

Для сравнения эффективности модели имплантата с внутренней структурой с моделями, полученными ранее, был проведен прочностной расчет модели бедренной кости со встроенной внутри нее моделью имплантата с решетчатыми структурами. Результаты прочностного расчета приведены на рис. 4. Прочностной расчет был проведен с граничными условиями, аналогичными условиям для модели с цельным имплантатом.

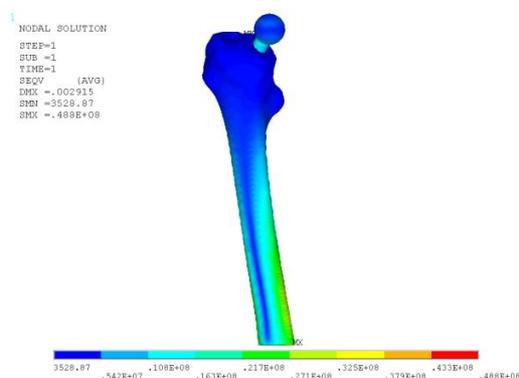


Рис. 4. Распределение напряжений по Мизесу, Па

Анализ результатов. Сравнение результатов прочностных расчетов в точке на цилиндрической части кости: модель без имплантата – 126 МПа; Модель с цельным имплантатом – 33,5 МПа; Модель имплантата с решетчатыми структурами – 34 МПа. Результаты сравнения массы полученных моделей представлены в табл. 1.

Табл. 1. Масса моделей

	Модель без имплантата	Модель с цельным имплантатом	Модель имплантата с решетчатыми структурами
Масса кости, г	606,6	465,9	465,9
Масса имплантата, г	-	121,6	68,8
Процентное отношение по массе имплантатов, %	-	43,4	
Масса модели, г	606,6	587,5	534,7

Заключение. Исходя из результатов прочностных расчетов, а также из результатов оценки массы полученных моделей, можно говорить о том, что модель имплантата с решетчатой внутренней структурой выполняет свои функции также корректно, как и цельный имплантат, но при этом обладает меньшей массой. Таким образом, можно сделать вывод о том, что использование решетчатых структур при производстве имплантатов, может стать дальнейшим перспективным направлением в развитии медицины будущего.

ЛИТЕРАТУРА:

1. Марусина М.Я., Казначеева А.О. Современные виды томографии. Учебное пособие. – СПб.: СПбГУ ИТМО, 2006.
2. Троицкий И.Н. Статистическая теория томографии. М.: Радио и связь, 1989.
3. Сегерлинд Л. Применение метода конечных элементов. Мир, 1979.

УДК 532.542

А.А. Котмакова, А.Д. Юхнев, Я.А. Гатаулин
Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого

ИССЛЕДОВАНИЕ ЗАКРУЧЕННОГО ТЕЧЕНИЯ В МОДЕЛИ БИФУРКАЦИИ СОННОЙ АРТЕРИИ

Сердечно-сосудистые заболевания являются одной из ведущих причин смертности и заболеваемости во всем мире. Среди этих заболеваний, атеросклероз - прогрессирующее сужение артериальной стенки, - является одним из самых тяжелых и может привести к инсульту или ишемическому инфаркту. Атеросклеротические бляшки чаще всего встречаются вблизи изгибов, соединений и бифуркаций крупных и средних артерий.

Ультразвуковым доплеровским методом зарегистрирован феномен винтового движения крови в общей сонной артерии (СА) у людей [1]. В целом же, роль закрутки кровотока в физиологии человека изучена недостаточно.

В течение последних трех десятилетий проводились численные и экспериментальные исследования образования атеросклероза в бифуркации сонной артерии. В частности, в работе [2] методом PIV исследован постоянный поток в модели бифуркации на основе осредненных клинических данных по геометрии сосуда при $Re = 290$ и 700 , описаны особенности структуры вторичного течения. Однако все исследования данной направленности проводились без учета физиологической закрутки кровотока.

Цель работы – исследовать закрученное течение в модели бифуркации сонной артерии с помощью ультразвукового доплеровского метода при различных соотношениях расходов на ветвях.

Задачи работы:

- спроектировать и изготовить модель бифуркации сонной артерии;
- провести измерения максимальной осевой и окружной скоростей;
- получить ультразвуковые изображения полей осевой и окружной скоростей;
- сопоставить результаты измерений с данными численного моделирования.

Модель бифуркации кровеносного сосуда. За геометрию сонной артерии была принята осредненная модель разветвления [3]. Модель бифуркации спроектирована в программе SolidWorks и изготовлена из фотополимера на 3D принтере (рис. 1). Входной внутренний диаметр - 6 мм, выходные внутренние диаметры - 4 мм, толщина стенки - 1 мм, общая длина - 56 мм.

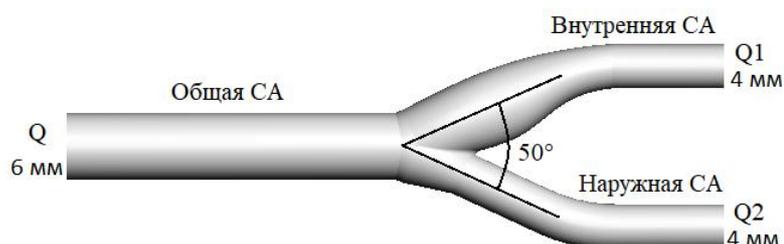


Рис. 1. Модель бифуркации сонной артерии

Экспериментальная установка. Для экспериментального исследования течения в бифуркации сонной артерии собрана установка (рис.2), которая состоит из замкнутого гидравлического контура (2) с кровеимитирующей жидкостью, движущейся с постоянной скоростью, центробежного насоса (3), акустической ванночки с исследуемой моделью (1), регуляторов расхода (6), ультразвукового сканера (7), электромагнитного расходомера (4). На входе исследуемой модели создается закрученное течение с помощью скрученной ленты (5). интенсивность закрутки, характеризуемая отношением максимальной окружной к максимальной осевой скорости, близка к физиологическому значению 0,3 [1]. Эксперименты проводились с использованием 36% водного раствора глицерина, имеющего динамическую вязкость $\mu = 4 \cdot 10^{-3}$ Па·с и плотность $\rho = 1000$ кг/м³ близкие к характеристикам крови. Исследованы случаи, когда соотношения расходов на ветвях $Q_1/Q_2 = 1$ и 2.

Методика измерений. Измерения максимальных по сечению осевой и окружной скоростей проводились ультразвуковым сканером LogicScan-64 в режимах цветного доплеровского картирования и импульсно-волновом. Расход жидкости измерялся с помощью электромагнитного расходомера Nihon-Konden-MF46. Измерения максимальных осевой и окружной скоростей проводились вдоль модели в 20-ти поперечных сечениях с шагом 5 мм.

Профиль осевой скорости измерялся в поперечном сечении на входе во внутреннюю сонную артерию с шагом 0,6 мм, с использованием минимального контрольного объема 1 мм. Для измерения максимальной осевой скорости $V_{z \max}$ ультразвуковой датчик устанавливался под углом 60° к оси сосуда, измерительный объем составлял 5 мм.

Для измерения максимальной окружной скорости $V_{\phi \max}$ ультразвуковой датчик устанавливался перпендикулярно оси сосуда, измерительный объем 5 мм поочередно устанавливался в областях отрицательных и положительных поперечных скоростей. Максимальная окружная скорость вычислялась как полусумма модулей положительной и отрицательной поперечных скоростей.

Результаты. Закрученное течение сдвигает максимум осевой скорости от стенки к середине сосуда внутренней сонной артерии и уменьшает зону рециркуляции (опасную для

развития атеросклероза), расположенную у внешней стенки внутренней сонной артерии (рис.3). Расчетные и экспериментальные кривые отличаются в пределах погрешности измерений. Расчет проводился в программном пакете ANSYS при тех же условиях, что и эксперимент (на входе задавался постоянный расход, $Re=450$).

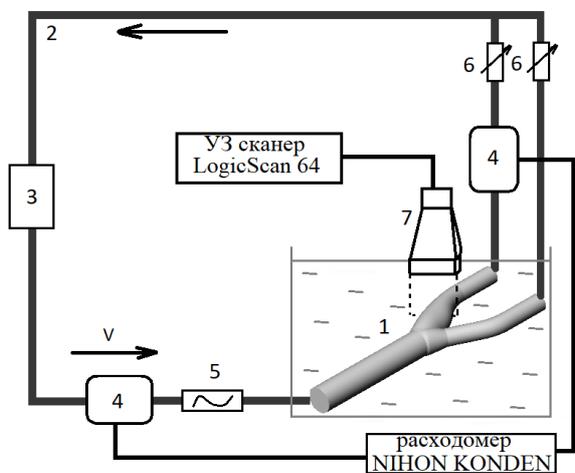


Рис. 2. Схема экспериментальной установки

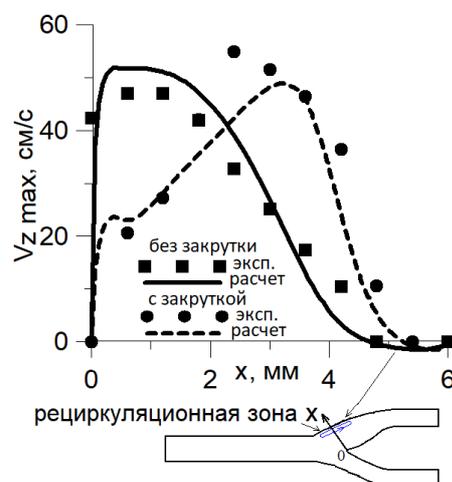


Рис. 3. Влияние закрутки на профиль осевой скорости

На рис.4 иллюстрируются изменения в структуре вторичного течения по длине модели бифуркации сонной артерии. На расчетных полях изображены линии тока. Двухцветные экспериментальные и расчетные поля поперечной скорости показывают схожие вихревые структуры. В поворотах сосуда за разветвлением формируется сложное многовихревое течение - с вихрями типа вихрей Дина в первом повороте и с четырьмя вихрями во втором.

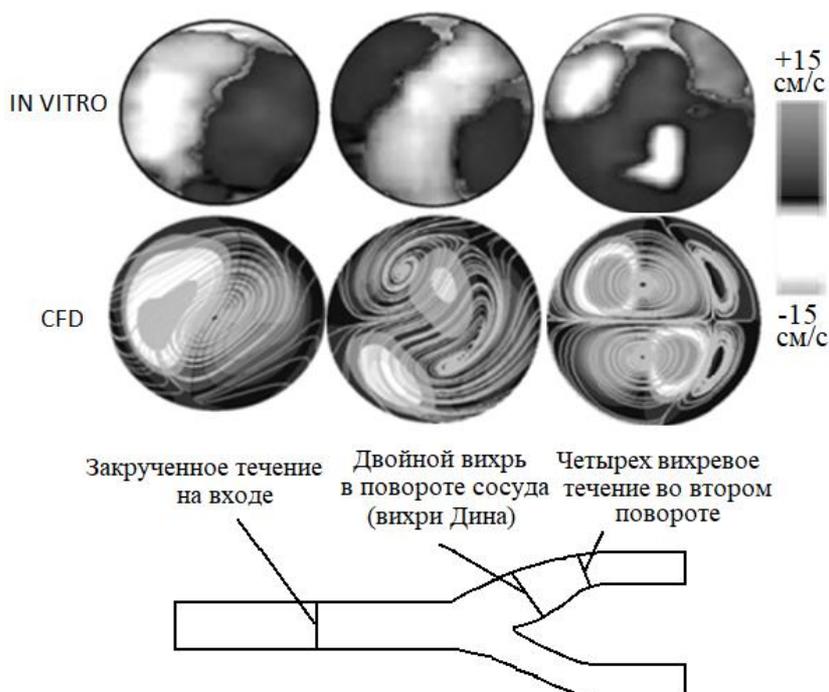


Рис. 4. Структура вторичных течений в модели бифуркации сонной артерии (по результатам ультразвуковых измерений и численных расчетов)

Выводы. Спроектирована и изготовлена, с использованием аддитивных технологий, модель бифуркации сонной артерии, основывающаяся на осредненных клинических данных по геометрии сосуда. Проведено экспериментальное исследование закрученного течения в данной модели. В поперечных сечениях бифуркации сосуда зарегистрированы течения с одним, двумя и четырьмя вихрями. Показано, что закрутка сдвигает максимум осевой скорости от стенки к середине внутренней сонной артерии и уменьшает область рециркуляции у ее наружной стенки.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 15-01-07923).

ЛИТЕРАТУРА:

1. Куликов В.П., Кирсанов Р.И., Засорин С.В. Доплерографическая регистрация феномена винтового движения крови в общих сонных артериях у людей // Ультразвуковая и функциональная диагностика, 2006, Том 44, №2, с. 96-100.
2. Buchmann N.A., Jermy M.C. Particle image velocimetry measurements of blood flow in a modeled carotid artery bifurcation // Proceeding of the 16th Australasian Fluid Mechanics Conference, Gold Coast, 2007, pp 60-67.
3. Ding Z., Wang K., Li J., Cong X. Flow field and oscillatory shear stress in a turning-fork-shaped model of the average human carotid bifurcation // Journal of Biomechanics, 2001, Vol. 34, №12, pp. 1555-1562.
4. Hoi Y., Wasserman B.A., Xie Y.J. et al. Characterization of volumetric flow rate waveforms at the carotid bifurcations of older adults // Physiological Measurements, 2010, Vol. 31, pp. 291-302.

УДК 616.12-089

Л.Г. Тихомолова, А.Д. Юхнев
Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого

ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ ДВИЖЕНИЯ СТВОРОК ИСКУССТВЕННЫХ КЛАПАНОВ СЕРДЦА (ИКС)

Болезни сердца являются одной из ведущих причин смерти. Лечение некоторых видов заболеваний происходит хирургически, путем имплантации протезов клапанов сердца. Проведено множество исследований ИКС, которые приводят к улучшению их конструкций и, как следствие, к уменьшению числа негативных послеоперационных последствий. В современной клинической практике используются механические и биологические протезы клапанов сердца [1].

Цель работы - получить экспериментальные данные о кинематических характеристиках искусственных клапанов сердца различных типов – дисковых (ЛИКС-2, Medtronic-Hall), двухстворчатых (St.Jude Medical, Carbomedics, МедИнж-2), двухстворчатого полнопоточного (МедИнж-СТ) и биологического (БиоЛаб-КС/ПТ).

Выполнялись следующие задачи:

1. Постановка физического эксперимента на гидродинамическом стенде для исследования искусственных клапанов сердца;
2. Проведение сравнительного исследования семи искусственных клапанов сердца.

Экспериментальная установка

Эксперимент проводился в лаборатории гидродинамики кровообращения кафедры «Гидроаэродинамика, горение и теплообмен» СПбПУ Петра Великого на пульсдубликаторе VivitroLabs (устройство для моделирования течения в клапанах сердцах), оснащенного

датчиками давления и расхода. На рис. 2 представлена установка, оснащенная высокоскоростной видеокамерой (1), тензометрическими датчиками аортального (2) и желудочкового (4) давления, электромагнитным датчиком расхода (3).

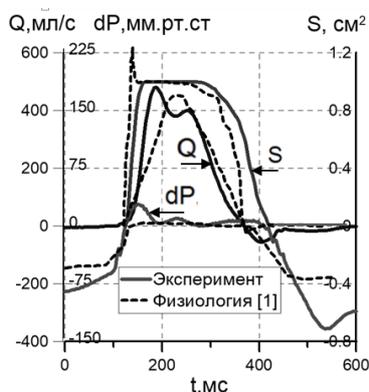


Рис. 1. Экспериментальные и физиологические кривые расхода и перепада давления

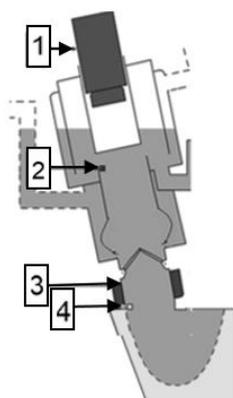


Рис. 2. Расположение ИКС и измерительного оборудования в камерах аорты и левого желудочка пульсдупликатора

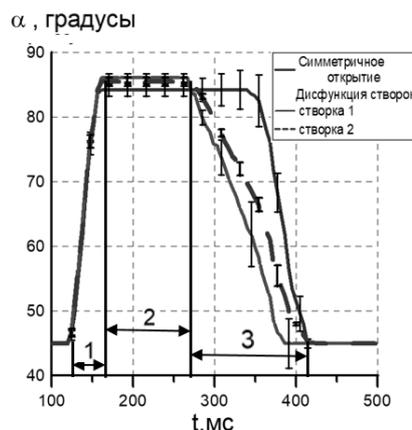


Рис. 3. Зависимость угла открытия створок двухстворчатого клапана МедИнж-СТ от времени (фазы: открытия (1), открытого состояния (2), закрытия (3))

В качестве рабочей жидкости использовался водный 36% раствор глицерина с 1% NaCl. Кривые расхода и трансортального перепада давления (рис. 1) выбраны близкими по форме к физиологическим [1]. Исследования проведены при ударном объеме 70 мл и частоте сокращений 70 уд/мин.

Для визуализации работы клапана использовалась высокоскоростная видеокамера Genie NM1400 с разрешением 640x480 пикселей и частотой съемки 217 кадр/с. Сигналы датчиков регистрировались и обрабатывались на компьютере при помощи программы VivitTest. При обработке данных проводилось осреднение по 5 циклам работы клапана.

Результаты

По обработанным изображениям построены зависимости угла, эффективной площади открытия и угловой скорости от времени цикла при симметрично работающих створках и при их дисфункции (рис.3). В литературе дисфункцией называют процесс несинхронной работы запирающих элементов двухстворчатых ИКС. Такой режим работы ИКС наблюдается в сердце, например, при тромботических отложениях на их створках [2].

На рис.4 приведены безразмерные времена открытия, закрытия и открытого состояния клапана для циклов с симметричной работой створок, t_0 - время от начала открытия до конца закрытия запирающего элемента. Среднестатистическая погрешность измерений не превышала 5% от времени цикла. По времени открытия и закрытия наиболее приближенными к естественному клапану являются биологический протез БиоЛаб и двухстворчатые клапаны МедИнж.

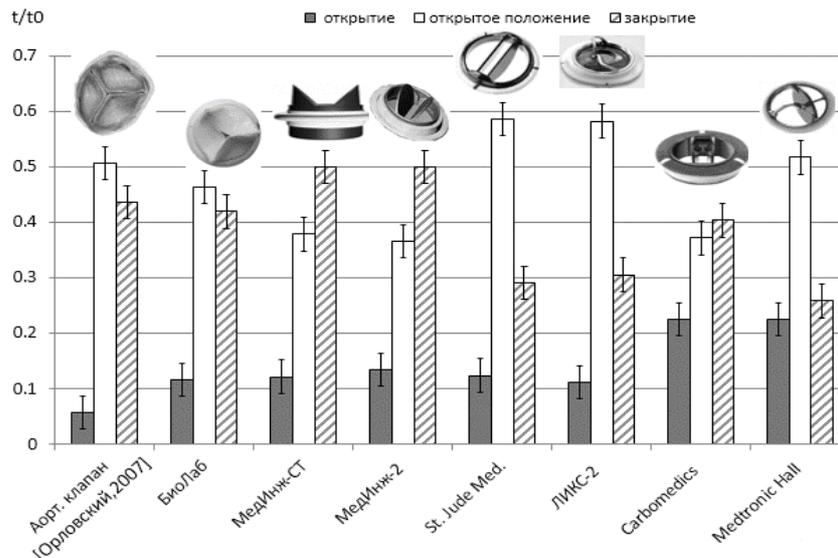


Рис.4. Относительные времена открытия и закрытия створок естественного и искусственных клапанов сердца

Для оценки вероятности возникновения кавитации в разных конструкциях клапанов измерена линейная скорость кромки их запирающего элемента перед закрытием (рис.5). Кавитация возникает в результате местного понижения давления: при закрытии между кромкой и корпусом образуются кратковременные высокоскоростные струи, способствующие образованию кавитационных пузырьков, которые приводят к повреждению поверхности створок. Скорость перед закрытием максимальна для дискового клапана Ликс-2 и составляет 4,5 м/с. Значение погрешности измерения скорости не превышает 0,4 м/с. Минимальная скорость перед закрытием у двухстворчатого полнопроточного клапана МедИнж-СТ, 1,7 м/с, позволяет рассчитывать на минимальные кавитационные разрушения.

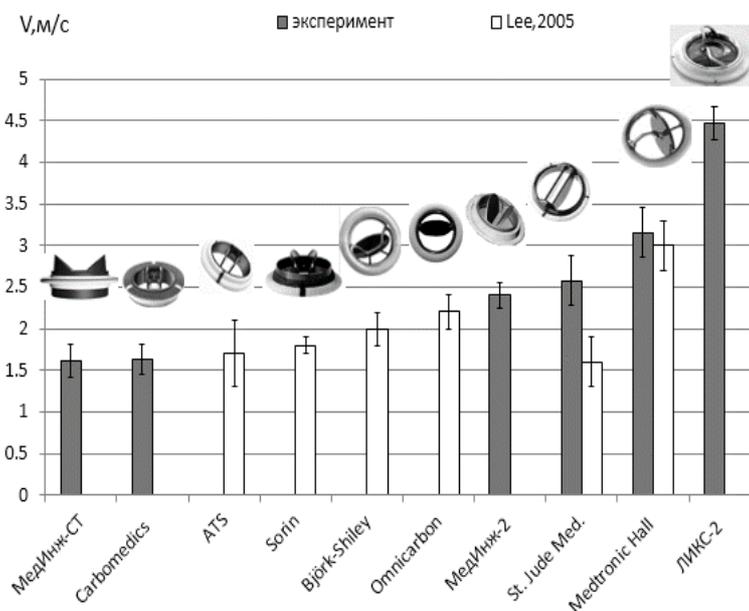


Рис. 5. Скорость створки искусственных клапанов сердца перед закрытием

Полученные экспериментальные данные о движении створок искусственных клапанов сердца могут быть использованы при проведении гидродинамических расчетов в качестве начальных и граничных условий.

Работа проведена в сотрудничестве с Национальным медицинским исследовательским центром имени В.А. Алмазова.

ЛИТЕРАТУРА:

1. В.И.Орловский, В.В.Гриценко, А.Д.Юхнев и др. Искусственные клапаны сердца / под ред. акад. РАМН, д.м.н., проф. Л.Ю.Шевченко СПб: ЗАО «ОЛМА Медиа Групп», 2007, с. 448.
2. C.Romata, F.Susin, A.Cambi et al. Comparative classification of thrombotic formations on bileaflet mechanical heart valves by phonographic analysis // J Artificial Organs 2011, Vol.14, pp. 100-111.
3. H.Lee, Y.Taenaka, S.Kitamura Mechanisms of mechanical heart valve cavitation in an electrohydraulic total artificial heart // ASAIO Journal 2005, Vol.51, pp. 208–213.

УДК 612.13

Я.Ф. Радченко, Я.А. Гатаулин

Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого

ЧИСЛЕННОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ ПУЛЬСИРУЮЩЕГО ЗАКРУЧЕННОГО ТЕЧЕНИЯ В МОДЕЛЯХ ПРОТЕЗОВ СОСУДОВ С ЗАКРУТКОЙ

Введение

Клинически установлено, что движение крови в организме имеет закрученный характер [1]. Закрутка кровотока оказывает положительное влияние на стенку кровеносного сосуда, препятствуя развитию гиперплазии интимы, вследствие чего уменьшается риск послеоперационных осложнений при протезировании сосуда и увеличивается срок службы протеза [2].

Цель работы – провести численное исследование течения в четырех моделях протезов сосуда: линейном (обычном) протезе и трех геометрически отличных моделях протеза, формирующих закрутку потока.

Геометрические модели протезов

Смоделированы четыре варианта протеза сосуда: линейный протез, протез со спиральной насечкой до разветвления, протез со спиральной насечкой после разветвления, протез со спиральной насечкой до и после разветвления. Протезы имеют внутренний диаметр 6 мм, угол соединения – 30°, шаг спиральной насечки – 30 мм, глубину насечки – 2 мм.

Математическая модель

Расчеты проведены на основе трехмерных нестационарных уравнений Навье-Стокса. На входе в расчетную область задавался однородный профиль скорости и ее изменение во времени цикла. Временная входная скорость была получена из кривой расхода бедренной артерии, которая отражает результат клинических измерений кровотока здоровых добровольцев методом фазо-контрастного МРТ [3]. На стенках ставилось условие прилипания, на выходах – соотношение расходов (80% и 20%). Динамический коэффициент вязкости и плотность жидкости аналогичны параметрам крови. Число Рейнольдса, построенное по средней скорости в момент максимального расхода и диаметру протеза, равно 1500.

Методика расчета

Расчеты по методу контрольных объемов проводились с использованием программного пакета ANSYS CFX 16.2 со вторым порядком точности пространственной и временной дискретизации, с шагом по времени 0.001 с. Для проведения расчетов была построена неструктурированная гексаэдрическая сетка с призматическим слоем у стенки.

Результаты

Для сравнения моделей выбраны наиболее важные гемодинамические и гидродинамические параметры, а именно: параметр закрутки S , осредненные по времени цикла сдвиговые напряжения на стенке $TAWSS$ (time-averaged wall shear stress) и параметр RRT (relative residence time), характеризующий время пребывания частиц на стенке.

Параметр закрутки определяется как отношение максимальных окружной и осевой скоростей (1), получаемых по методу виртуального доплера, суть которого заключается в обработке расчетного поля скорости по алгоритмам доплеровского прибора [4]. Данный параметр должен находиться в физиологическом диапазоне, который составляет 0.1 – 0.3 для бедренной артерии [5].

$$S = \frac{V_{\varphi \max}^*}{V_{z \max}^*} \quad (1)$$

где $V_{\varphi \max}^* = \frac{1}{2}(V_{n \max} + |V_{n \min}|)$ – максимальная доплеровская окружная скорость, V_n – поперечная скорость (проекция скорости на ось ультразвукового датчика, расположенного под углом 90° к оси сосуда), $V_{z \max}^* = (V_z + V_n \operatorname{tg} \theta)_{\max}$ – максимальная доплеровская осевая скорость, V_z – осевая скорость (проекция скорости на ось ультразвукового датчика, расположенного под доплеровским углом $\theta = 60^\circ$ к оси сосуда).

Сдвиговые напряжения на стенке определяются по формуле (2).

$$TAWSS = \frac{1}{T} \int_0^T |\vec{\tau}_w| dt, \quad (2)$$

где $\vec{\tau}_w$ – вектор сдвиговых напряжений на стенке, t – время, T – время цикла. Отметим, что наиболее опасные для развития гиперплазии интимы области, где сдвиговые напряжения на стенке менее 1 Па.

Время пребывания частиц на стенке пропорционально параметру RRT , который определяется по формуле (3) [6] (чем больше этот параметр, тем больше риск зарастания протеза)

$$RRT = \frac{1}{(1 - 2OSI)TAWSS}, \quad (3)$$

где $OSI = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{\int_0^T |\vec{\tau}_w| dt}{\int_0^T |\vec{\tau}_w| dt} \right)$ - индекс колебаний сдвиговых напряжений (OSI - oscillatory shear index).

На рис. 1 представлены поля параметра RRT на стенке для линейного протеза и протеза с насечкой после разветвления. Наиболее опасные области – области с высокими значениями RRT – наблюдаются в разветвлении протеза. В протезе с насечкой RRT меньше, чем в линейном.

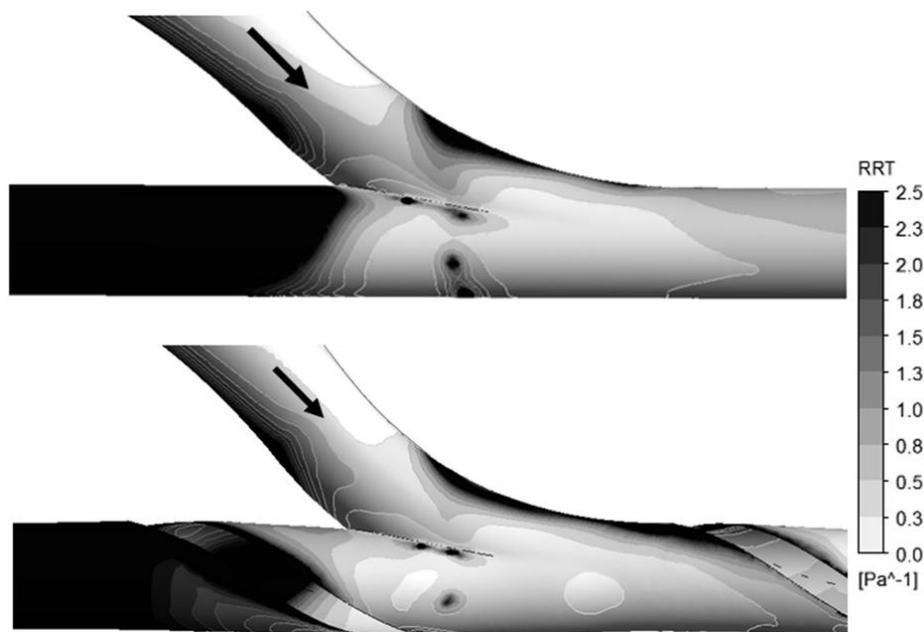


Рис. 1. Поле параметра RRT, характеризующего время пребывания частиц на стенке для линейного протеза (сверху) и протеза с насечкой после разветвления (снизу)

Для сравнения всех моделей протезов сосуда на рис. 2 построены графики распределения закрутки вдоль прямого участка протеза ($x = 0$ соответствует началу разветвления). В линейном протезе закрутки нет ($S = 0$). Видно, что дольше всего параметр закрутки находится в физиологическом диапазоне для протезов с насечкой после разветвления и с насечкой до и после разветвления.

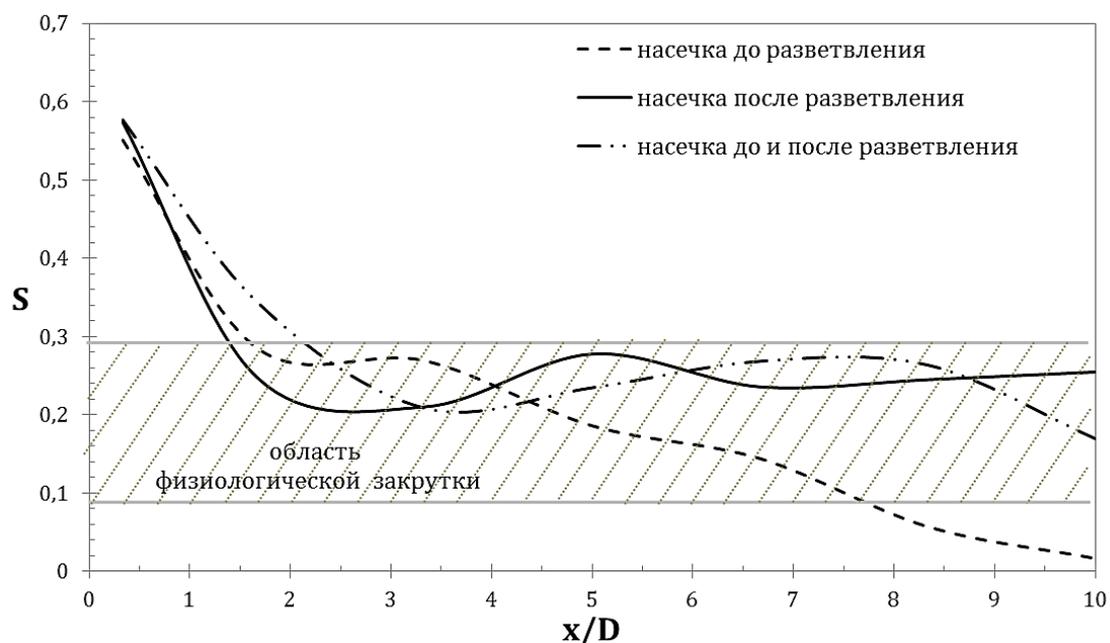


Рис. 2. Распределение параметра закрутки вдоль трех моделей протезов

Параметры $TAWSS$, RRT осреднены по всей поверхности стенки и их значения приведены для всех моделей в табл.1. По параметру RRT оптимальным является протез с насечкой после разветвления.

Табл. 1. Сравнение осредненных по поверхности стенки параметров для четырех моделей протезов

	Линейный протез	Спиральная насечка		
		до разветвления	после разветвления	до и после разветвления
<i>TAWSS</i> , Па	1.86	2.22	2.24	2.22
<i>RRT</i> , 1/Па	1.99	1.66	1.47	1.67

Выводы

Проведено численное исследование течения в четырех моделях протезов сосуда: линейном протезе, протезе со спиральной насечкой перед разветвлением, протезе со спиральной насечкой после разветвления, протезе со спиральной насечкой до и после разветвления. В протезах со спиральной насечкой формируется закрученное течение. По параметру закрутки и осредненным по стенке протеза сдвиговым напряжениям и относительному времени пребывания частиц оптимальным является протез, содержащий спиральную насечку только за разветвлением.

Работа выполнена при финансовой поддержке Фонда содействия инновациям, программа "УМНИК".

ЛИТЕРАТУРА:

1. Городков А.Ю., Николаев Д.А., Анализ динамических характеристик закрученного потока крови в аорте на основании измерения геометрических параметров проточного канала с помощью МР-томографии, Бюлл. НЦССХ им. А.Н. Бакулева РАМН, 4(9), 2003, с. 67-69;
2. Sun A.Q., Fan Y.B., Deng X.Y. Numerical Comparative Study on the Hemodynamic Performance of a New Helical Graft With Noncircular Cross Section and SwirlGraft // *Artif Organs*, Vol. 34, 2010, p.22-27;
3. Klein W.M., Bartels L.W., Bax L. et al., Magnetic resonance imaging measurement of blood volume flow in peripheral arteries in healthy subjects, *J Vasc Surg.*, 38, 2003, p. 1060–1066;
4. Zhang Q., Zhang Y., Zhou Y., Zhang K. et al. An Ultrasound Simulation Model for the Pulsatile Blood Flow Modulated by the Motion of Stenosed Vessel Wall // *BioMed Research International*, 2016, P.16
5. Stonebridge P.A. Suttie S.A., R. Ross et al., Spiral Laminar Flow: a Survey of a Three-Dimensional Arterial Flow Pattern in a Group of Volunteers, *Eur J Vasc Endovasc Surg*, 52, 2016, p. 674-680.
6. Himburg H.A., Grzybowski D.M., Hazel A.L. et al. Spatial comparison between wall shear stress measures and porcine arterial endothelial permeability // *Am J Physiol Heart Circ Physiol.*, 2004, vol.286, p.1916-1922

УДК 612.13

Я.А. Гатаулин¹, Д.А. Росуховский²

¹Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого

²ФГБНУ "Институт экспериментальной медицины"

ОПЫТ ЧИСЛЕННОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ ТЕЧЕНИЯ В ВЕНОЗНОМ КЛАПАНЕ

Введение

Венозная система изучена гораздо меньше, чем артериальная. В последнее время возник интерес к изучению венозной гемодинамики для совершенствования методов диагностики и лечения заболеваний вен и угрожающих жизни тромботических осложнений [1].

Основные отличия венозной гемодинамики от артериальной: слабопульсирующий характер течения, нелинейные упругие свойства стенок вен, которые способны к сильным сжатиям/растяжениям (в том числе коллапсу), наличие венозных клапанов (рис. 1), действие "мышечного насоса", заключающееся в участии окружающих вену мышц в движении венозной крови (рис. 2) [1,2,3]. Венозные клапаны располагаются вдоль вен и препятствуют

обратному течению крови. Они бывают одностворчатые, двустворчатые и трехстворчатые. Доля двустворчатых клапанов в организме человека: 80-90%, трехстворчатых – 10-15%, одностворчатых – 5% [4].

Большая часть численных исследований кровотока в венозном клапане – это одномерные [5, 6, 7] и двумерные [8, 9] расчеты, гораздо меньше в виду их сложности трехмерных расчетов [4, 10]. Из расчетов клапанов хочется выделить работы [8, 10], в которых проводится анализ работы венозного клапана в здоровом состоянии и при наличии патологических изменений, вызванных глубоким венозным тромбозом.



Рис. 1. Клапаны в венах ног [11]

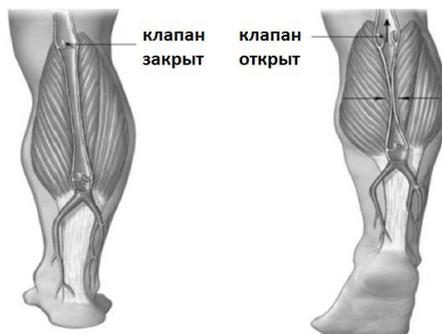


Рис. 2. Действие "мышечного насоса" [10]

Цель работы

Данная работа посвящена исследованию влияния мышечной нагрузки на стенку вены на течение в венозном клапане.

Геометрическая модель венозного клапана

В качестве модели была взята двумерная модель венозного клапана, соответствующая подколенной вене (рис. 3). Геометрическая модель венозного клапана построена в программе SolidWorks по собственным клиническим исследованиям в виде трех отдельных доменов – стенки вены, створки вены и области жидкости. Размеры представлены на рис. 3: $L_1 = 5$ мм, $L_2 = 0.9$ мм, $L_3 = 13$ мм, $L_4 = 9.5$ мм, $L_5 = 11$ мм, $L_6 = 0.45$ мм. Отношение толщины створки (L_6) к ее длине составляет примерно 0.09.

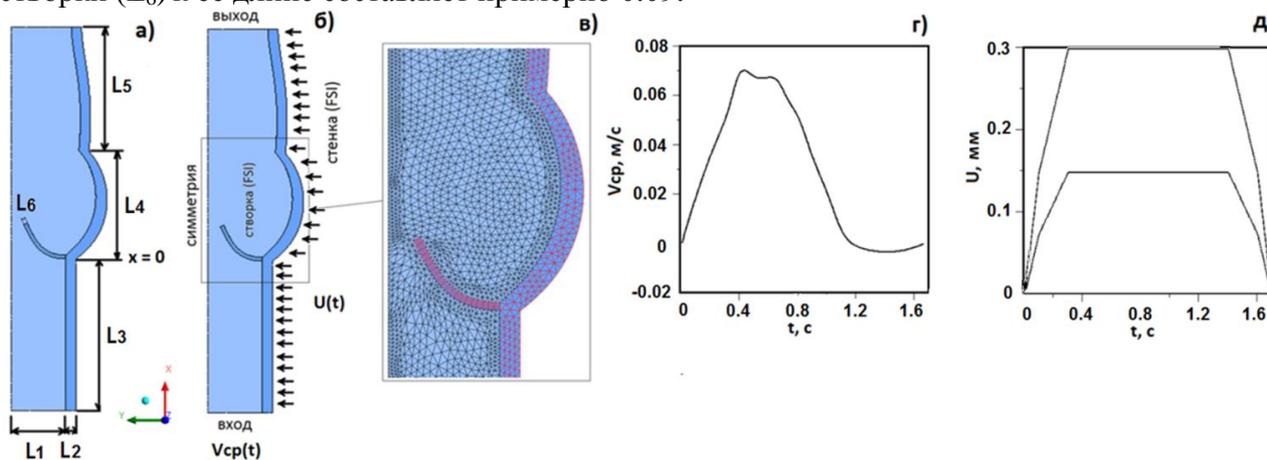


Рис.3. Геометрия расчетной области модели двустворчатого венозного клапана (а); граничные условия (б), расчетные сетки (в): механическая, гидродинамическая; кривая скорости на входе (г), кривая перемещений стенки (д)

Математическая модель

Построенная геометрическая модель экспортирована в среду Workbench, где проходили расчеты: гидродинамические – в Ansys Fluent, механические – в Ansys Mechanical.

Проведен расчет течения жидкости с помощью технологии fluid-structure interaction (FSI), которая реализована в виде совместного решения уравнений жидкости и твердого тела (створок клапана, стенки вены) с помощью лагранжево-эйлеровского подхода.

Уравнения течения жидкости (уравнения Навье-Стокса):

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + (u_i - \hat{u}) \nabla u_j = -\frac{1}{\rho_f} \frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{1}{\rho_f} \nabla^2 \mu_f u_i, \quad i, j = 1, 2$$

$$\nabla u_i = 0,$$

где u_i – скорость жидкости в точке, \hat{u} – скорость сетки в точке, ρ и μ – плотность и вязкость жидкости. Для жидкости выбрана ньютоновская модель: $\mu_f = 0.0035$ Па·с, $\rho_f = 1060$ кг/м³ [8]. Течение ламинарное. На входе задавалось условие по скорости $V_{cp}(t)$ (рис. 3г) [8], на выходе – постоянное давление $P = 0$. На левой границе использовалось условие симметрии. Время цикла равно $T = 1.7$ с (соответствует положению покоя). Характерное число Рейнольдса, построенное по диаметру вены и максимальной за цикл скорости, равно 200.

Уравнение движения твердой стенки/створки (уравнение эластодинамики):

$$\rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \nabla \times \zeta = 0,$$

где u – перемещение стенки/створки, $\zeta = J \sigma_s F^{-T}$ – первый тензор Пиолы-Кирхгофа,

$\sigma_s = \frac{1}{J} F (\lambda (tr E) I + 2\mu E) F^T$ – уравнение состояния для модели St.Venant-Kirchhoff, λ, μ –

константы Ламэ, E – модуль Юнга. Эти параметры удовлетворяют следующим

соотношениям: $\lambda = \frac{Ev}{(1+\nu)(1-2\nu)}$, $\mu = \frac{E}{2(1+\nu)}$, где ν – коэффициент Пуассона. Механические

свойства створки клапана: $E = 2$ МПа, $\nu = 0.3$, $\rho = 1200$ кг/м³.

Особенностью данного расчета является наличие мышечной нагрузки на стенку вены – заданных на стенке перемещений $U(t)$ (рис. 3д). Было проведено три расчета при разных $U_{max} = 0; 0.15; 0.3$ мм, что соответствует 0, 3 и 6% от радиуса вены (L_1). Было установлено, что в расчете при $U_{max} = 0.3$ мм происходит смыкание створок, для чего должна решаться специальная задача о контактном взаимодействии, что будет предметом будущих исследований авторов. Результаты, представленные ниже, затрагивают расчеты с $U_{max} = 0$ и 0.15 мм.

Вычислительные аспекты

Основная вычислительная трудность при решении данной задачи заключалась в настройке параметров динамической сетки. При неправильной настройке велика вероятность в процессе расчета появления отрицательных объемов ячеек сетки, которые приводят к остановке расчета. Для корректного расчета использовались два алгоритма динамической сетки – Smoothing и Remeshing. Первый из них осуществляет сглаживание сетки, второй – ее перестроение. Чтобы обмен данными на интерфейсе был устойчивым, коэффициент релаксации был уменьшен до 0.5. Уменьшение шага по времени также положительно сказывается на перестроении сетки, в расчетах он составлял 0.005 с.

Результаты

Линии тока течения в разные моменты цикла – максимального расхода и максимального открытия створок клапана – показаны на рис. 4 и 5. Область рециркуляции, в которой жидкость движется с относительно небольшой скоростью, наблюдается позади створок, в синусе (расширении за клапаном), причем центр этого вихря находится не в центре синуса, как можно предположить, а в его дальней части. В фазу закрытия клапана течение за клапаном становится существенно вихревым, характеризуется наличием множества вихрей (рис. 5).

Между створками формируется интенсивная струя. Чем больше мышечная нагрузка на стенку вены, тем интенсивнее струя: примерно в 1.2 раза для момента максимального открытия створок (рис. 6). Характерно появление двух максимумов скорости на оси струи: первый – между створками, второй – между вихрями.

С увеличением мышечной нагрузки растет амплитуда колебаний створок (примерно в 1.8 раза), кроме того, появляется новый эффект: на основное колебание накладывается серия малых колебаний (рис. 7).

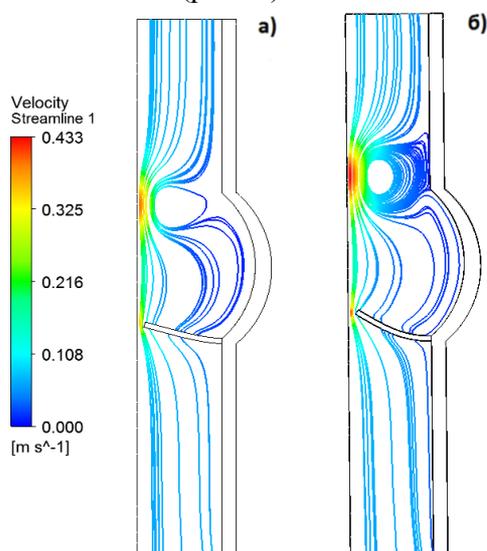


Рис. 4. Линии тока, окрашенные по величине скорости, в момент максимального расхода ($t = 0.41$ с) для $U_{\max} = 0$ (а), 0.15 мм (б)

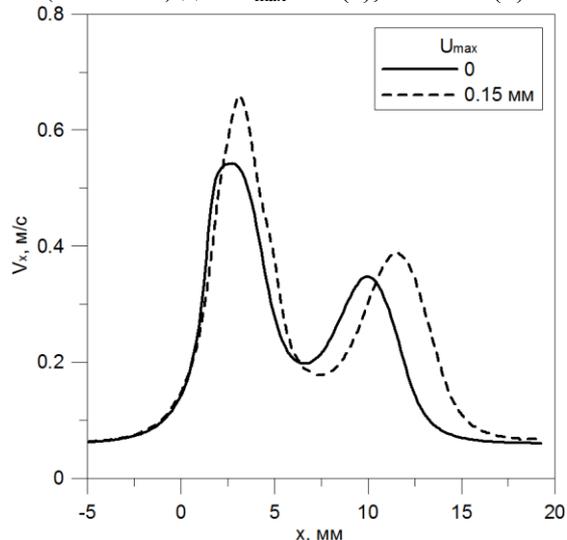


Рис. 6. Распределение осевой скорости вдоль оси вены в момент максимального открытия створок ($t = 0.8$ с) ($x = 0$ соответствует центральной точке соединения створки со стенкой вены)

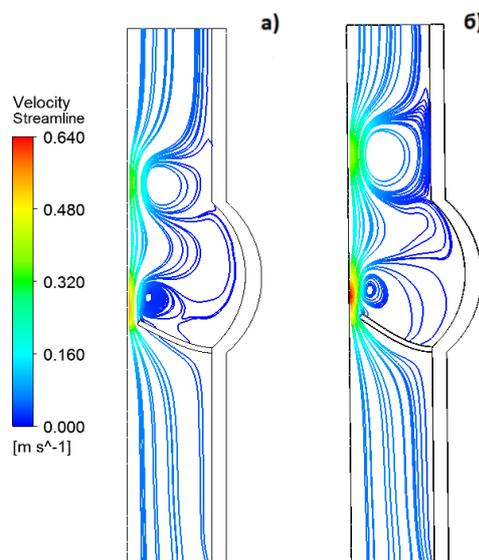


Рис. 5. Линии тока, окрашенные по величине скорости, в момент максимального открытия створок ($t = 0.8$ с) для $U_{\max} = 0$ (а), 0.15 мм (б)

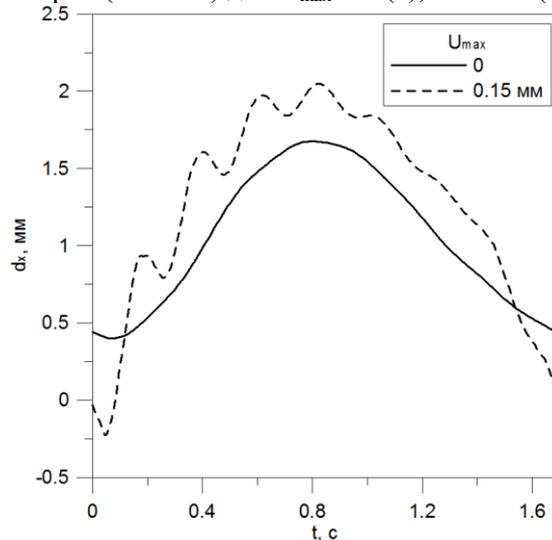


Рис. 7. Изменение положения конца створки от времени в осевом направлении ($d_x = 0$ соответствует перпендикулярному стенке вены положению створки)

Выводы

Разработана методика расчета течения в венозном клапане. Проведено исследование действия окружающих вену мышц на течение в ней. Обнаружены следующие эффекты, связанные с работой мышечной нагрузки на стенку вены: увеличение интенсивности струи за клапаном и возникновение малых колебаний, наложенных на основное колебание створки.

ЛИТЕРАТУРА:

1. Lurie F., Kistner R.L., Eklof B., Kessler D. Mechanism of venous valve closure and role of the valve in circulation: a new concept // *J Vasc Surg*. 2003. vol. 38. pp.955–961.
2. Zervides C., Giannoukas A.D. Computational phlebology: reviewing computer models of the venous system // *Phlebology*. 2013. vol. 28. pp. 209–218.
3. Buxton G., Clarke N. Computational phlebology: the simulation of a vein valve // *J Biol Phys*. 2006. vol.32. pp. 507–521.
4. Chen H., Berwick Z, Krieger J., Chambers S., Lurie F., Kassab G. Biomechanical comparison between mono-, bi-, and tricuspid valve architectures // *J Vasc Surg: Venous and Lym Dis*. 2014. vol. 2. pp. 188–193.
5. Brown S.M., Fennigkoh L., Gerrits R., Hietpas M., Tritt C. A model of venous return while utilizing vacuum assist during cardiopulmonary bypass // *J Extra-corpor Technol*. 2003. vol. 35. pp. 224.
6. Pittaccion S., Migliavacca F, Pennati G, Dubini G. A Lumped Parameter Model for the Study of the Venous Return in the Total Cavo-Pulmonary Connection. 2003. Summer Bioengineering Conference, Sonesta Beach Resort in Key Biscayne, FL.
7. Zervides C., Narracott A.J., Lawford P.V., Hose D.R. The role of venous valves in pressure shielding. *Biomed Eng Online*. 2008; 7:8.
8. Soifer E., Weiss D., Marom G., Einav S. The effect of pathologic venous valve on neighboring valves: fluid–structure interactions modeling // *Med Biol Eng Comput*. 2017, vol. 55, №6, pp. 991–999.
9. Wijeratne N.S., Hoo K.A. Numerical studies on the hemodynamics in the human vein and venous valve // 2008. In: American control conference, Washington.
10. Simão M., Ferreira J.M., Mora-Rodriguez J., Ramos H.M. Identification of DVT diseases using numerical simulations // *Med Biol Eng Comput*. 2016. vol. 54. pp. 1591–1609.
11. Gottlob R. Venous Valves. Morphology, Function, Radiology, Surgery. / R. Gottlob , R. May // Springer. Vienna. New York, 1986 – P. 320

СОДЕРЖАНИЕ

ИНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ ПЛЕНАРНЫЙ ДОКЛАД

Фролов М.Е., Чистякова О.И. Задачи об изгибе пластин Рейсснера-Миндлина: контроль точности решений, адаптивные алгоритмы и вычислительный эксперимент 3

СЕКЦИЯ «ФИЗИКА ПРОЧНОСТИ И ПЛАСТИЧНОСТИ МАТЕРИАЛОВ»

Смирнов А.М., Красницкий С.А., Гуткин М.Ю. Дислокации несоответствия в композитных нанопроволоках с ядром в виде длинного параллелепипеда 8

Мордасова Е.А., Колесникова А.Л., Гуткин М.Ю., Романов А.Е. Цилиндрическое включение конечной длины с одноосной собственной деформацией 11

Кравченко М.Ю., Красницкий С.А., М.Ю. Гуткин, Колесникова А.Л., Романов А.Е. Зарождение дислокационных петель в пентагональных частицах 14

Красницкий С.А., Трофимов А.С., Севастьянов И.Б., Ради Э. Эффективные упругие свойства матрицы с жестким тороидальным включением 17

Матвиенко А.Н., Золоторевский Н.Ю., Ушанова Э.А., Филиппов С.А. Распределение разориентировок на границах деформационного происхождения в поликристаллической меди 19

Голубков Н.А., Васильев А.А., Золоторевский Н.Ю. Моделирование ауستنитизации рекристаллизованных после холодной прокатки автомобильных сталей 22

Ржавцев Е.А., Гуткин М.Ю. Динамика проникающих дислокаций в пористых гетероэпитаксиальных пленках GAN 25

СЕКЦИЯ «ОБЛАЧНЫЕ ТЕХНОЛОГИИ УПРАВЛЕНИЯ МОБИЛЬНЫМИ РОБОТАМИ»

Шарагин М.П., Попов С.Г. Реализация алгоритмов выборки данных о локальных и глобальных беспроводных сетях из телематической карты 28

Рябинин М.А., Уткин Л.В. Модификация глубоких лесов для решения задачи перераспределения объектов в пространстве признаков 31

Тучков А.С., Попов С.Г. Имитационная модель распределения потоков данных между гетерогенными каналами связи транспортных средств 34

Кучуков Д.А., Лукашин А.А. Аспекты применения суперкомпьютеров в задачах машинного обучения 36

Попов М.В., Попов С.Г. Сравнение точности статических определений мультисистемного одночастотного приемника спутниковых систем 38

Лисенкова А.А., Попов С.Г. Механизм интерактивной визуализации многомерных данных OLAP-кубов 41

Глазунов В.В., Курочкин М.А., Андреева Т.А. Архитектура взаимодействия пользовательских приложений с облачным сервисом в мультпротокольных сетях с агрегацией каналов 44

СЕКЦИЯ «МАТЕМАТИКА»

Выборова Ю.А. Гексагональная тригонометрия 49

Бортковская М.Р., Васильев П.И., Семенова Д.А., Тархов Д.А., Удалов П.П., Шишкина И.А. Изучение прогиба мембраны с помощью многослойных полуэмпирических моделей (рассмотрение неоднородного уравнения) 52

Виноходов Т.В., Капицин Д.Р., Каверзнева Т.Т., Тархов Д.А., Терёшин В.А. Применение новых методов построения многослойных полуэмпирических моделей к задаче нелинейного изгиба консольного стержня 55

Варшавчик Е.А., Каспаров Ю.А., Седова Ю.С., Тархов Д.А., Фильчук Е.В. Установление зависимости механического поведения при растяжении упругого материала от температуры с помощью применения нейронных сетей 58

Васильев А.Н., Тархов Д.А., Сколис К.В., Боровская О.Д. Сравнительный анализ однослойного и многослойного решения задачи о пористом катализаторе 60

<i>Суббота А.Д., Суриков И.Ю., Тархов Д.А.</i> Применение приближенных многослойных методов решения дифференциальных уравнений к задаче стабилизации перевернутого маятника	63
<i>Берминова М.С., Васильев А.Н., Галяутдинова А.Р., Тархов Д.А., Терешин В.А.</i> Полуэмпирическая модель провисания верёвки	65

СЕКЦИЯ «ПРИКЛАДНАЯ МАТЕМАТИКА»

<i>Бойко М.С., Иванков А.А.</i> Оптимизация SMC-алгоритма в части правил обхода компакта из параметрического пространства модели случайного процесса	68
<i>Елисеев А.А., Григорьев Б.С.</i> Модификация смесевой модели течения многофазных жидкостей для учета газоводопроявлений при бурении	70
<i>Гаврилов А.О., Иванков А.А.</i> Сравнение кинетической и регрессионной моделей для прогноза обменного курса	73
<i>Вердина М.К., Коц М.В., Проворов П.Н., Чуканов В.С., Штурц И.В.</i> Алгоритмы поиска пути и разреза в графе для полуавтоматической сегментации медицинских изображений	76
<i>Вердина М.К., Константинов А.В., Позигун М.В., Чуканов В.С.</i> Алгоритмы фиксации уровня и быстрого распространения контура для полуавтоматической сегментации медицинских изображений	78
<i>Миневич О.Л., Хайлов Н.А., Викторов Е.Д.</i> Моделирование динамики бурильной колонны в составе подводного бурового комплекса	82
<i>Нкодиа С.-Р., Иванков А.А.</i> Оптимизация алгоритма вычисления функции правдоподобия в задаче оценивания параметров аддитивной модели процесса Леви	85
<i>Савчук Д.А., Беляев С.Ю.</i> Двухпроходный алгоритм визуализации изоповерхности методом трассировки луча для объемных данных в реальном времени	88
<i>Тетюхин А.С., Сидоровская А.А., Иванков А.А.</i> Качество интервальных оценок параметров аддитивной модели процесса Леви. Подход, основанный на результатах аппроксимации первых разностей отраженным нормальным распределением	91

СЕКЦИЯ «МЕХАНИКА И ПРОЦЕССЫ УПРАВЛЕНИЯ»

<i>Аитов Т.Р., Семенов А.С.</i> Анализ эволюции поверхности нагружения поликристаллических материалов на основе конечно-элементной гомогенизации	94
<i>Антипин А.Н., Семенов А.С., Гецов Л.Б.</i> Анализ трещиностойкости колес центробежных компрессоров	97
<i>Байдина Т.А., Бурдаков С.Ф.</i> Управление роботом при контактных операциях с поверхностью неопределенного профиля в условиях трения	100
<i>Борисенко В.А., Семенов А.С.</i> Исследование эволюции шейки между частицами при спекании порошка с учетом поверхностной и зернограницной диффузии	103
<i>Грищенко А.И., Семенов А.С., Гецов Л.Б.</i> Анализ влияния вида упрочнения на напряженно-деформированное состояние цилиндрического образца для термоусталостных испытаний	106
<i>Доронина Н.А., Яковис Л.М.</i> Робастно-адаптивная настройка ПИД-регуляторов	109
<i>Ермоленко Н.А., Немов А.С., Ховайко М.В.</i> Исследование нелинейного деформирования оптимизированной сетчатой композитной конструкции	112
<i>Керестень И.А., Плотников Ф.С., Войнов И.Б., Михайлов А.А., Боровков А.И.</i> Численное моделирование зацепления цевочной передачи роторного механизма и исследование чувствительности факторов зацепления к изменению межосевого расстояния ..	115
<i>Кузнецов И.П., Новокишенов А.Д.</i> Топологическая оптимизация стержневых структур в среде ANSYS APDL	118
<i>Лаврова В.А., Гаев А.В.</i> Оценка допустимой нагрузки на конструкцию с применением современных критериев	121
<i>Лобанов С.М., Семенов А.С.</i> Моделирование поведения доменной структуры бессвинцовых сегнетозлектриков вблизи морфотропной фазовой границы при электрическом нагружении .	123
<i>Мабхеш М., Яковис Л.М.</i> Автоматизированная настройка типовых регуляторов для многосвязных объектов управления	127

<i>Модестов В.С., Лукин А.В., Федоренко Р.В., Кудрявцев А.А., Муртазин И.Р.</i> Анализ прочности атомной электростанции с учетом податливости грунтового основания	130
<i>Новокшенов А.Д., Немов А.С., Мамчиц Д.В., Зобачева А.Ю.</i> Топологическая оптимизация конструкций на основе метода движущихся асимптот	133
<i>Савиковский А.В., Семенов А.С., Гецов Л.Б.</i> Анализ влияния выдержки на термоусталостную прочность монокристаллических сплавов на основе конечно-элементного моделирования натуральных экспериментов	135
<i>Савиковский А.В., Семенов А.С., Гецов Л.Б.</i> Конечно-элементное моделирование процессов неупругого деформирования корсетного образца для термоусталостных испытаний при различной степени детализации его закрепления	139
<i>Смирнов А.С., Смольников Б.А.</i> О соответствии эволюционной и классической моделей внутренней диссипации	142
<i>Федоренко Р.В., Кудрявцев А.А., Лукин А.В., Модестов В.С., Муртазин И.Р.</i> Анализ прочности строительных конструкций АЭС при падении тяжелого коммерческого самолета.	145
<i>Харалдин Н.А., Боровков А.И., Клявин О.И., Бобровников С.М.</i> Методика выбора геометрических параметров дорожного ограждения с помощью конечно-элементного с помощью программных комплексов NASTRAN/LS-DYNA	150
<i>Шевчук Р.Э., Гаев А.В.</i> Приближенное решение задачи о колебаниях сердечников статоров	151
<i>Третьяков Д.А., Грищенко А.И., Семенов А.С., Полянский В.А., Штукин Л.В.</i> Идентификация уравнений эволюции поврежденности и акустической анизотропии при упруго-пластическом деформировании	154
<i>Третьяков Д.А., Семенов А.С.</i> Моделирование упруго-пластического деформирования поликристаллического никеля при сложном непропорциональном пассивном нагружении	157

СЕКЦИЯ «МЕХАНИКА И МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ»

<i>Бальцер А.Н., Абрамов И.А.</i> Исследование критической скорости флаттера крыла Clark YH 8%	161
<i>Величко В.Е.</i> Расчет кольцевых пластин переменной толщины под действием сосредоточенных нагрузок по теории оболочек средней толщины	163
<i>Григорьева П.М., Вильчевская Е.Н.</i> Влияние химического сродства и диффузии под напряжением на кинетику химической реакции при механических нагрузках	167
<i>Калюжнюк А.В., Михалюк Д.С., Соклаков А.В., Роледер А.Ю., Феоктистова Л.Ю.</i> Расчет предельной несущей способности оболочки контейнента АЭС	169
<i>Китаева Д.А.</i> Исследование оптимальных температурно-скоростных параметров продольной прокатки листа из алюминиевой заготовки	172
<i>Латин Р.Л., Кузькин В.А., Качанов М.Л.</i> Определение эффективных упругих характеристик материала с трещинами	175
<i>Логинов А.А.</i> Сравнение различных конфигураций системы позиционирования TAUT WIRE	177
<i>Ляжков С.Д.</i> Бионическое протезирование нижних конечностей человека	180
<i>Марков Н.С.</i> численное решение задач механики сплошной среды для слоистых сред с неоднородностями	182
<i>Мушак Н.Д., Подольская Е.А., Панченко А.Ю.</i> Построение парного силового потенциала взаимодействия для моделирования структурного перехода ГЦК-ОЦК	184
<i>Погодина В.С., Михалюк Д.С.</i> Расчет вибраций бумагоделательной машины на фундаменте	187
<i>Старобинский Е.Б., Цветков Д.В., Кривцов А.М.</i> Преобразование механической энергии в тепловую в одномерном кристалле	190
<i>Филимонов А.С.</i> Исследование коэффициента сдвига в зависимости от параметров сечения стержня	193
<i>Шварёв Н.Г., Старобинский Е.Б., Кузькин В.А.</i> Влияние нелинейности на перераспределение энергии по пространственным направлениям в треугольной решетке	196
<i>Смирнов А.В.</i> Метод вейвлет-преобразований для исследований биомедицинских процессов	200
<i>Булдаков П.Ю., Лобода О.С.</i> Моделирование сплава с эффектом памяти формы как материала для вживляемого устройства, устраняющего пролапс митрального клапана	201

СЕКЦИЯ «ГИДРОАЭРОДИНАМИКА, ГОРЕНИЕ И ТЕПЛООБМЕН»

<i>Борисов Д.В., Воробьев А.Н.</i> Моделирование массопереноса примесей при росте кристалла карбида кремния из расплава	204
<i>Горенский Ф.С.</i> Определение расходных характеристик газовых горелочных устройств	207
<i>Егоров В.О., Левченя А.М.</i> Численное моделирование сжимаемого турбулентного течения в осерадиальном диффузоре с использованием RANS-подхода	210
<i>Елисеева В.О., Смирновский А.А., Погребная Л.И.</i> Релаксационные явления в одномерном пристенном течении, возникающие при изменении скорости спутного потока	213
<i>Жуковская В.Д., Левченя А.М.</i> Численное моделирование возмущающего действия кругового цилиндра на пристенный свободноконвективный турбулентный пограничный слой	216
<i>Засимова М.А., Иванов Н.Г.</i> Численное исследование вентиляционного течения при боковой струйной подаче на основе метода моделирования крупных вихрей	218
<i>Зимин А.Р., Пашкевич Д.С.</i> Термодинамически равновесный состав веществ в системе элементов U-F-O-H	222
<i>Иванов К.А., Воробьев А.Н.</i> Анализ образования депозитов в установке выращивания кристаллов кремния методом Чохральского	224
<i>Капустин В.В., Пашкевич Д.С., Мухортов Д.А., Алексеев Ю.И., Петров В.Б.</i> Экспериментальное исследование стабильности фторида водорода в условиях высокотемпературного восстановления воды углеродом	227
<i>Козлов С.В., Степанов В.В.</i> Экспериментальное исследование пиролиза полимерных материалов методом кислородной сканирующей микрокалориметрии	230
<i>Колесник Е.В., Смирновский А.А.</i> Влияние типа сеточных элементов на свойства схем повышенного порядка точности в расчетах газодинамических течений на неструктурированных сетках	233
<i>Кузнецов Е.А., Маркус Е.С., Снегирёв А.Ю.</i> Усовершенствованный метод расчета времени задержки воспламенения термопластиков под действием внешнего теплового потока	236
<i>Маркус Е.С., Кузнецов Е.А., Снегирёв А.Ю.</i> Режимы распространения пламени по поверхности горючего материала: численное моделирование и теоретический анализ	239
<i>Маркус Е.С., Снегирёв А.Ю., Кузнецов Е.А., Танклевский Л.Т., Аракчеев А.В.</i> Численный прогноз развития пожара на высокостеллажном складе	242
<i>Маслова А.С., Пашкевич Д.С.</i> Термодинамический анализ процесса получения фторида водорода из тетрафторида кремния в пламени водородсодержащего топлива и кислородсодержащего окислителя	245
<i>Махнов А.В.</i> Численное исследование кавитационных течений с учетом дегазации жидкости	248
<i>Мисюрин В.А., Поняев С.А.</i> Численное моделирование сверхзвукового обтекания закругленного спереди тела при наличии внешнего энергоподвода	251
<i>Суворов А.В., Бенин А.И., Коссой А.А.</i> Применение математического моделирования для оценки параметров безопасности объекта с высококонцентрированным пероксидом водорода	254
<i>Храпунов Е.Ф., Потехин И.В., Чумаков Ю.С.</i> Теплообмен в свободноконвективном факеле при малых числах Грасгофа	256
<i>Якимов Н.Д., Шалина М.Ю.</i> Метод регулярного режима первого рода при непостоянной температуре окружающей среды	259

СЕКЦИЯ «БИОМЕХАНИКА»

<i>Афонин Г.Д., Бауэр С.М.</i> Деформация трансверсально-изотропной эллипсоидной оболочки под действием нормального давления	262
<i>Бабчина П.И.</i> Биомеханический метод прогнозирования состояния деформированного грудного отдела позвоночника при различных нагрузках	265
<i>Башарова Г.Т., Башарова Д.Т.</i> Исследование потока крови при атеросклеротическом поражении внутренней сонной артерии	267
<i>Гороженинова Т.Н., Киченко А.А.</i> Анализ характерного времени адаптации трабекулярной костной ткани в соответствии с законом Вольфа	271

<i>Квиндт П.А., Овсепьян А.Л.</i> Биомеханическое исследование состояния структур аортального клапана при коррекции методом баллонной вальвулопластики	273
<i>Макевнина В.В.</i> Анализ напряженно-деформированного состояния модели легких человека под влиянием движения потока газовой среды	276
<i>Степанов М.Д., Лобода О.С., Новожилов Ю.В.</i> Моделирование митрального клапана	280
<i>Дубровина П.А.</i> Разработка алгоритма и построение моделей для биомеханического анализа состояния структур мозга человека при травмах	283
<i>Петрова Е.М., Дмитриева Е.И.</i> Биомеханическое исследование состояния структур коленного сустава при тотальном эндопротезировании в динамике	287
<i>Шалтегин Г.С., Алексаикин А.С.</i> Проектирование и прочностное исследование имплантата тазобедренного сустава человека	289
<i>Котмакова А.А., Юхнев А.Д., Гатаулин Я.А.</i> Исследование закрученного течения в модели бифуркации сонной артерии	292
<i>Тихомолова Л.Г., Юхнев А.Д.</i> Экспериментальное исследование движения створок искусственных клапанов сердца (ИКС)	295
<i>Радченко Я.Ф., Гатаулин Я.А.</i> Численное исследование пульсирующего закрученного течения в моделях протезов сосудов с закруткой	298
<i>Гатаулин Я.А., Росуховский Д.А.</i> Опыт численного моделирования течения в венозном клапане	301

НЕДЕЛЯ НАУКИ СПбПУ

Материалы научной конференции
с международным участием

13–19 ноября 2017 года

ИНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ

Налоговая льгота – Общероссийский классификатор продукции
ОК 005-93, т. 2; 95 3004 – научная и производственная литература

Подписано в печать 12.12.2017. Формат 60×84/16. Печать цифровая.

Усл. печ. л. 19,5. Тираж 40 экз. Заказ 16213б.

Отпечатано с готового оригинал-макета,
предоставленного организационным комитетом конференции,
в Издательско-полиграфическом центре Политехнического университета.
195251, Санкт-Петербург, Политехническая ул., 29.
Тел.: (812) 552-77-17; 550-40-14.