

Министерство образования и науки Российской Федерации  
Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого

## НЕДЕЛЯ НАУКИ СПбПУ



**МАТЕРИАЛЫ**

**НАУЧНОГО ФОРУМА**

**С МЕЖДУНАРОДНЫМ УЧАСТИЕМ**

**30 НОЯБРЯ – 5 ДЕКАБРЯ 2015 ГОДА**

**ИНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ  
И МЕХАНИКИ**

**POLYTECH  ПОЛИТЕХ**

Санкт-Петербург•2015

УДК 51;531  
ББК 22.1;22.2  
Н42

Неделя науки СПбПУ : материалы научного форума с международным участием. Институт прикладной математики и механики. — СПб. : Изд-во Политехн. ун-та, 2015. — 243 с.

В сборнике публикуются статьи студентов, аспирантов, молодых ученых и сотрудников Санкт-Петербургского политехнического университета Петра Великого, вузов Санкт-Петербурга и России по материалам докладов, представленных на секционных заседаниях Института прикладной математики и механики в рамках научного форума с международным участием «Неделя науки СПбПУ». Статьи отражают современный уровень научно-исследовательской работы участников конференции в области прикладной математики и механики.

Представляет интерес для специалистов в различных областях знаний, учащихся и работников системы высшего образования и Российской академии наук.

Форум проведен при финансовой поддержке Комитета по науке и высшей школе Правительства Санкт-Петербурга.

Редакционная коллегия

Института прикладной математики и механики СПбПУ:

*А.К. Беляев (директор института), Я.А. Гатаулин (зам. директора по НИРС — отв. ред.), Н.Г. Иванов (зам. директора по НИРС), А.В. Востров, В.С. Заборовский, Н.Ю. Золоторевский, Д.А. Индейцев, А.М. Кривцов, А.С. Мурачев, А.С. Немов, А.С. Семенов, Е.М. Смирнов, М.Е. Фролов*

Печатается по решению

Совета по издательской деятельности Ученого совета Санкт-Петербургского политехнического университета Петра Великого.

ISBN 978-5-7422-5078-4

© Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого, 2015

УДК 532.517

Е.К. Гусева, А.В. Гарбарук

Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого

РАСЧЕТ ОТРЫВНЫХ ТЕЧЕНИЙ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ МЕТОДОВ DDES И IDDES  
В СОЧЕТАНИИ С ПОДСЕТОЧНЫМ МАСШТАБОМ,  
АДАПТИРОВАННЫМ К СЛОЯМ СМЕШЕНИЯ

В настоящее время гибридные RANS-LES подходы к моделированию турбулентности, сочетающие в себе экономичность RANS в пристенной области течения и высокую точность LES вне ее, находят все большее применение. Среди таких подходов наиболее популярным является метод моделирования отсоединенных вихрей (Detached Eddy Simulation, DES, [1]) и его модификации. Однако при применении этих методов зачастую наблюдается затягивание развития неустойчивости Кельвина-Гельмгольца в оторвавшихся слоях смешения и перехода в них к развитому турбулентному течению, что может приводить к значительному снижению точности расчета. Для устранения этого недостатка в работе [2] была предложена модификация методов DES и DDES (Delayed DES, [3]), заключающаяся в замене традиционного подсеточного масштаба  $\Delta_{\max}$  (максимальный шаг сетки) на новый масштаб  $\Delta_{SLA}$  (Shear-Layer-Adapted), адаптированный к расчету течений со слоями смешения.

Новое определение линейного подсеточного масштаба  $\Delta_{SLA} = \tilde{\Delta}_\omega F_{KH}^{\lim}$  учитывает две особенности течения на начальном участке оторвавшегося слоя смешения, а именно его квазидвумерный характер и существенную анизотропию ячеек расчетных сеток, типичную для этой области. Первый ингредиент нового подсеточного масштаба – масштаб  $\tilde{\Delta}_\omega$  – опирается на анизотропию ячеек сетки: в случае двумерных течений его определение не включает в себя размер сетки в направлении, поперечном плоскости развития течения. Второй ингредиент – специальным образом сконструированная эмпирическая функция  $F_{KH}^{\lim}$  от кинематического критерия VTM (Vortex Tilting Measure), позволяющего идентифицировать области потока, близкие к двумерным. При расчете пристенных течений гибридными методами важно, чтобы при отсутствии турбулентного контента в большей части пограничного слоя работала RANS ветвь метода, поэтому в них значение функции  $F_{KH}^{\lim}$  полагается равной 1. На начальных участках слоев смешения  $F_{KH}^{\lim} = 0.1$ , что приводит к уменьшению подсеточного масштаба в 10 раз, а турбулентной вязкости, соответственно, примерно в 100 раз. В то же время, в областях с развитой турбулентностью функция  $F_{KH}^{\lim}$  неактивна (равна 1). Замена традиционного подсеточного масштаба на масштаб  $\Delta_{SLA}$  приводит к существенному снижению уровня подсеточной вязкости на начальных участках слоев смешения, что, в свою очередь, существенно ускоряет развитие неустойчивости Кельвина-Гельмгольца [2].

Модификация IDDES (Improved DDES, [4]) может быть построена заменой традиционного масштаба  $\Delta = \min\{\max[C_w d_w, C_w \Delta_{\max}, \Delta_{wn}], \Delta_{\max}\}$  на новый –  $\Delta = \min\{\max[C_w d_w, C_w \Delta_{\max}, \Delta_{wn}], \Delta_{SLA}\}$ . Здесь  $C_w = 0.15$  – эмпирическая константа,  $d_w$  – расстояние до стенки, а  $\Delta_{wn}$  – размер ячейки по нормали к стенке.

Цель работы состоит в оценке эффективности подсеточного масштаба  $\Delta_{SLA}$  для расчета задач внешней аэродинамики и проверка его совместимости с гибридными RANS-LES подходами к моделированию турбулентности.

Задача о трансзвуковом течении в каверне размером  $5H \times H \times H$  рассматривалась при числе Маха набегающего потока  $M = 0.85$  и числе Рейнольдса, построенном по глубине каверны  $H$  и скорости набегающего потока,  $Re = 1.36 \times 10^6$ . Параметры каверны и характеристики течения соответствовали эксперименту [5]. Расчетная сетка состояла из 3 млн узлов, из них  $0.54 \times 10^6$  приходилось на каверну. Расчеты проводились с использованием метода DDES, построенного на базе модели Спаларта-Аллмареса [6].

В соответствии с идеей построения нового масштаба, функция  $F_{KH}^{lim}$  существенно меньше 1 на начальном участке слоя смешения (рис. 1), что приводит к снижению турбулентной вязкости (рис. 2a,b), разблокировке неустойчивости Кельвина-Гельмгольца и быстрому переходу к развитой турбулентности (рис. 2c,d). В результате точность предсказания пульсаций и спектров давления на дне каверны значительно повышается (рис. 3).

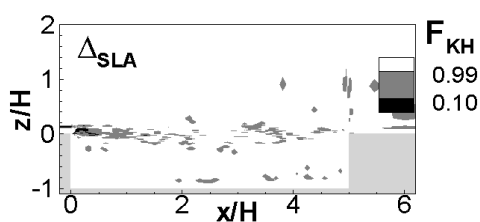


Рис.1. Мгновенное поле функции  $F_{KH}^{lim}$

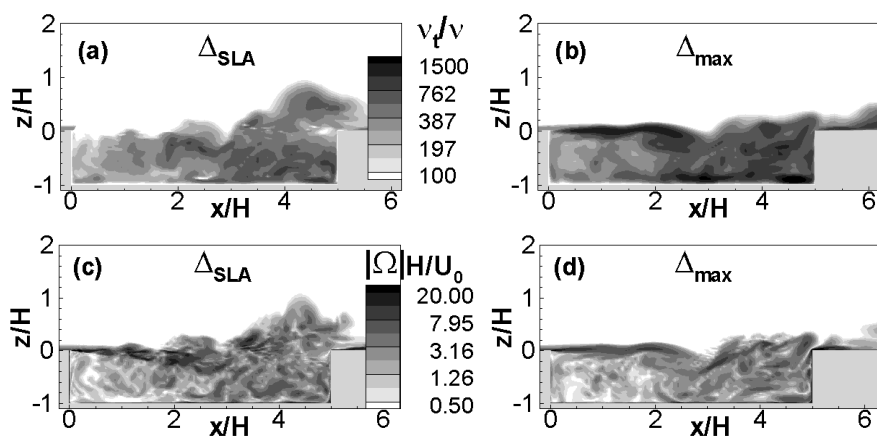


Рис. 2. Мгновенные поля турбулентной вязкости (a,b) и завихренности (c,d), полученные модифицированным и стандартным SA DDES подходами

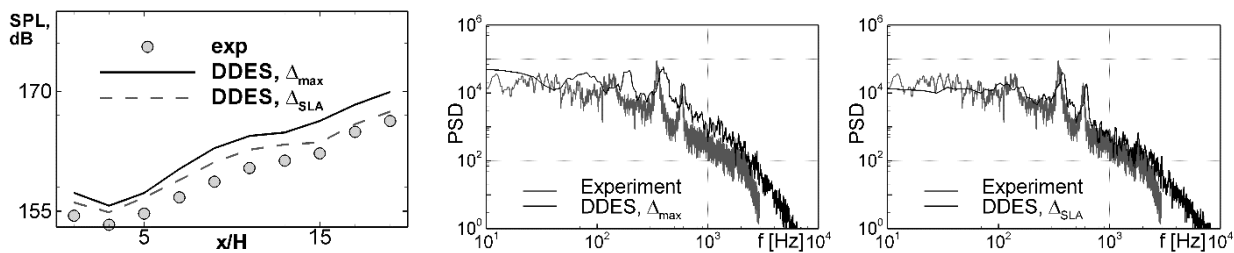


Рис. 3. Распределение уровня шума по дну каверны и спектры давления, полученные модифицированным и стандартным SA DDES подходами

Обтекание выпуклости длиной  $s$  и высотой  $h = 0.128s$ , расположенной на плоской поверхности, рассматривалось при числе Рейнольдса, построенном по длине выпуклости и максимальной скорости на входе  $U_0$ , равном  $9.4 \times 10^5$ . Число узлов базовой расчетной сетки составляло  $5 \times 10^6$ , а для исследования чувствительности метода к шагу сетки в поперечном направлении, использовалась также загрубленная сетка, в которой шаг сетки по  $z$  был в два раза больше ( $\Delta z = 0.01s$ ). Расчеты проводились с использованием SA DDES и SA IDDES.

Как и в предыдущей задаче, в начальной области слоя смешения благодаря низким значениям  $F_{KH}^{lim}$  в модифицированной версии DDES наблюдается более низкий уровень турбулентной вязкости и ускорение распада оторвавшегося слоя смешения, что приводит к улучшению согласования результатов расчета с экспериментальными данными [7] (рис. 5а).

При использовании метода IDDES улучшение результата оказалось не столь существенным, поскольку стандартная версия IDDES достаточно точно предсказывает характеристики данного течения.

Следует также отметить более слабую чувствительность модифицированного метода к качеству сетки в поперечном направлении. Так, двукратное загробление сетки существенно ухудшает результаты стандартной версии DDES и практически не влияет на результаты модифицированного подхода (рис. 6).

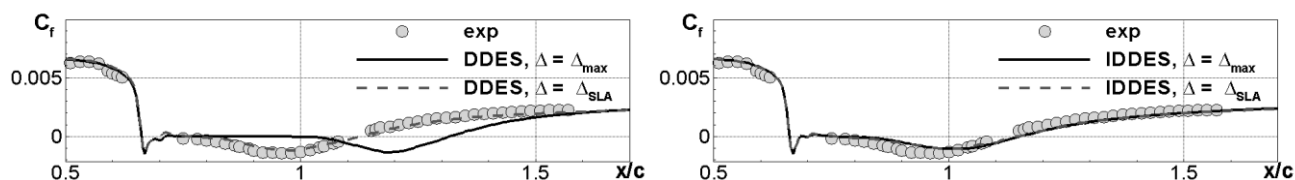


Рис. 5. Распределение коэффициента трения вдоль нижней стенки, полученные с использованием стандартного и модифицированного SA DDES и SA IDDES методов

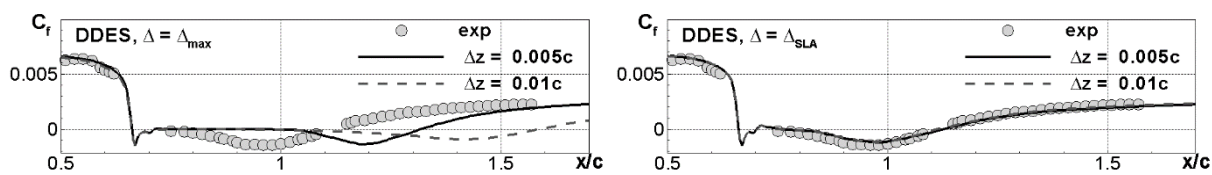


Рис. 6. Распределение коэффициента трения вдоль нижней стенки, полученные с использованием стандартного и модифицированного SA DDES методов на разных сетках

**Выводы.** Представлены результаты применения SA DDES и SA IDDES в сочетании с масштабом  $\Delta_{SLA}$  к расчетам трансзвукового течения в прямоугольной каверне и обтекания выпуклости на плоской поверхности. Показано, что применение масштаба  $\Delta_{SLA}$  приводит к ускорению турбулизации слоев смешения и улучшению согласия результатов с экспериментальными данными. Кроме того, при расчете квазидвумерных течений использование подсеточного масштаба  $\Delta_{SLA}$  снижает чувствительность результатов к загроблению шага сетки в поперечном (гомогенном) направлении.

#### ЛИТЕРАТУРА:

1. Spalart P.R. et al. Comments on the feasibility of LES for wings, and on a hybrid RANS/LES approach // Proceedings of first AFOSR intern. conference on DNS/LES. Ruston, Louisiana, USA, 1997. P. 137–147.
2. Shur M.L. et al. An enhanced version of DES with rapid transition from RANS to LES in separated flows // Flow Turbul. Combust. 2015. Vol. 95.
3. Spalart P.R. et al. A New Version of Detached-eddy Simulation, Resistant to Ambiguous Grid Densities // Theor. Comput. Fluid Dyn. 2006. Vol. 20, № 3. P. 181–195.
4. Shur M.L. et al. A hybrid RANS-LES approach with delayed-DES and wall-modelled LES capabilities // Int. J. Heat Fluid Flow. 2008. Vol. 29, № 6. P. 1638–1649.

5. Henshaw M.J. de C. M219 cavity case: Verification and validation data for computational unsteady aerodynamics // Tech. Rep. RTO-TR-26, AC/323(AVT)TP/19. QinetiQ, UK, 2002. P. 453–472.
6. Spalart P.R., Allmaras S.R. A one-equation turbulence model for aerodynamic flows // La Rech. Aerosp. Reno, Nevada, USA, 1994. Vol. 1, № 1. P. 5–21.
7. Greenblatt D. et al. A Separation Control CFD Validation Test Case // 43rd AIAA Aerosp. Sci. Meet. Exhib. Reno, Nevada, USA, 2004. Vol. 485.

УДК 533.69.01

А.А. Матюшенко, А.В. Гарбарук  
Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого

## МОДИФИКАЦИЯ $k-\omega$ SST МОДЕЛИ ТУРБУЛЕНТНОСТИ ПРИМЕНИТЕЛЬНО К ЗАДАЧАМ ОБТЕКАНИЯ АЭРОДИНАМИЧЕСКИХ ПРОФИЛЕЙ ВЕТРОГЕНЕРАТОРОВ ПРИ ВЫСОКИХ ЧИСЛАХ РЕЙНОЛЬДСА

Определение аэродинамических характеристик крыловых профилей является важной задачей как для авиационной промышленности и ветроэнергетики, так и для энергомашиностроения. Обычно расчеты этих характеристик выполняются в рамках осредненных уравнений Рейнольдса в сочетании с полуэмпирическими моделями турбулентности. Однако при углах атаки, близких к срыву потока, наблюдается систематическое значительное завышение максимального коэффициента подъемной силы и критического угла атаки по сравнению с экспериментальными данными, даже при использовании наиболее совершенных моделей. Характерной особенностью обтекания профилей при приближении к срыву потока является наличие отрывной зоны на верхней поверхности крылового профиля (сторона разрежения), возникающей из-за воздействия неблагоприятного градиента давления. Положение точки отрыва и, как следствие, аэродинамические характеристики сильно зависят от выбранной модели турбулентности, а специальная настройка полуэмпирических моделей турбулентности для рассматриваемого класса течений является одним из возможных путей повышения точности расчета аэродинамических характеристик. Настоящая работа посвящена именно такой настройке  $k-\omega$  SST модели турбулентности [1].

Предварительные расчеты показали, что при решении двумерных уравнений Рейнольдса, замкнутых при помощи рассматриваемой модели турбулентности, размер отрывной зоны сильно занижается, что и приводит к завышению максимального коэффициента подъемной силы. Проведенная оценка чувствительности положения точки отрыва к изменению различных констант модели показала, что даже относительно незначительное уменьшение константы  $a_1 = 0.31$  до значения 0.28 приводит к существенному улучшению согласования с экспериментом.

В настоящей работе рассмотрены несколько крыловых профилей, используемых в ветрогенераторах различной толщины (от 15% до 21%) и формы: S805, S809, S827, DU-96-W-180. Их обтекание в широком диапазоне углов атаки было исследовано экспериментально [2-5] в аэродинамических трубах с низким уровнем турбулентности ( $I < 1\%$ ). Поскольку число Рейнольдса, определенное по длине хорды профиля и скорости набегающего потока, достаточно велико ( $Re > 10^6$ ), то при проведении расчетов не учитывалось влияние ламинарно-турбулентного перехода [6] и использовалось допущение о полностью турбулентном режиме течения. Кроме того, при численном моделировании использовалась несжимаемая постановка задачи, так как в экспериментах числа Маха не превышали 0.15. Расчетные структурированные сетки C-типа удовлетворяли общепринятым критериям для подобных течений и обеспечивали сеточно-независимое решение.

Результаты расчетов (рис. 1) показали, что предложенная модификация SST модели

обеспечивает хорошее совпадение с экспериментальными данными для всех рассмотренных профилей в широком диапазоне углов атаки ( $0^\circ$ - $30^\circ$ ), а ошибка в предсказании максимального коэффициента подъемной силы не превышает 5% (вместо 25% для оригинальной модели).

Предложенное изменение константы  $a_1$ , однако, приводит к снижению точности расчета даже относительно простых базовых турбулентных течений, на которых производилась настройка констант оригинальной версии SST модели. В частности, при расчете турбулентного пограничного слоя [7] ошибка в определении коэффициента трения достигает 25% (рис. 2), что в очередной раз подтверждает несовершенство полуэмпирических моделей турбулентности и невозможность создания модели, одинаково хорошо подходящей для всех типов течений.

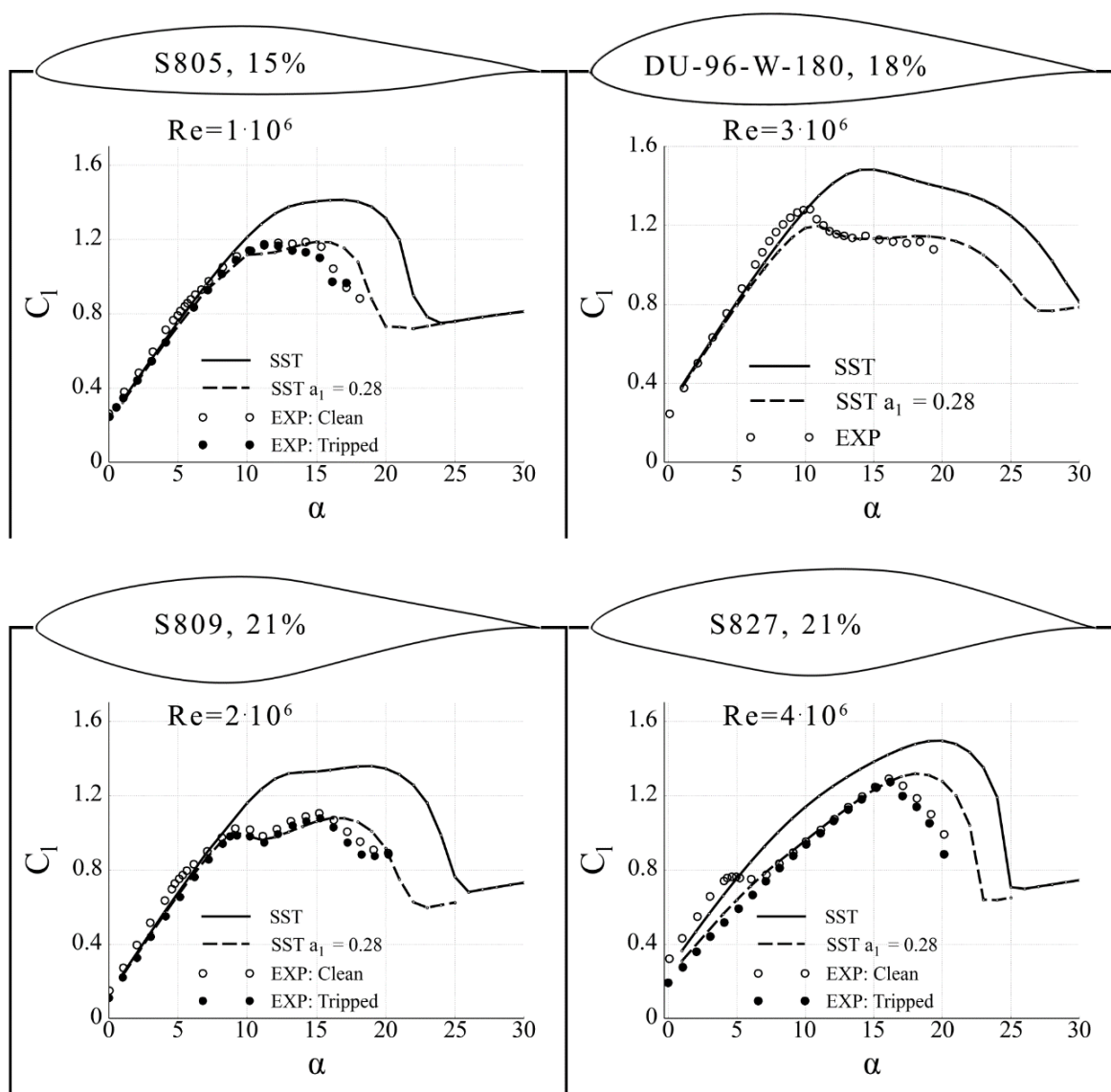


Рис. 1. Зависимость коэффициента подъемной силы ( $C_l$ ) от угла атаки ( $\alpha$ ) для различных профилей (в процентах указана относительная толщина профилей).

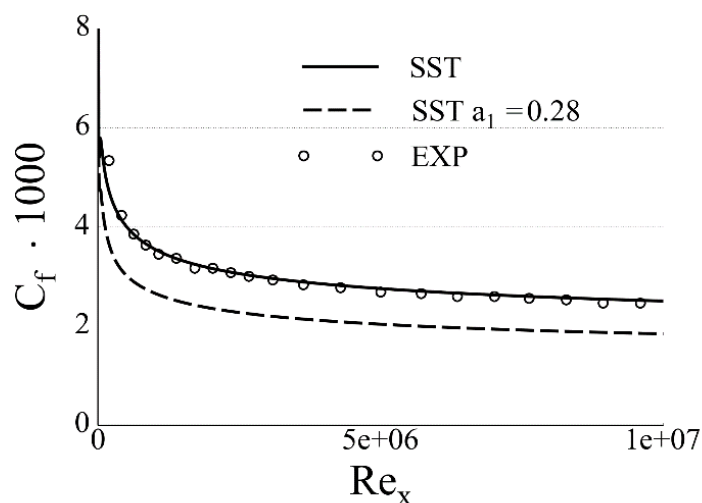


Рис. 2. Распределение коэффициента трения ( $C_f$ ) на плоской пластине.

#### ЛИТЕРАТУРА:

1. Menter, F. R., Kuntz, M., Langtry, R. (2003) R.B. Ten Years of Industrial Experience with the SST Turbulence Model.
2. Somers, D. M. (1997) Design and Experimental Results for the S805 airfoil.
3. Somers, D. M. (2005) Design and Experimental Results for the S827 Airfoil Period of Performance 1998 – 1999.
4. Somers, D. M. (1997) Design and Experimental Results for the S809 Airfoil, NRELSR-440-6918.
5. Timmer W. A. (2003) Summary of the Delft University Wind Turbine Dedicated Airfoils.
6. Carmichael, B. H. (1981) Low Reynolds Number Airfoil Survey, NASA.
7. Wieghardt, K., Tillmann, W. (1951) On the turbulent friction layer for rising pressure. NASA TM 1314.

УДК 532.517

А.С. Стабников, А.В. Гарбарук

Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого

#### ТЕСТИРОВАНИЕ МОДИФИЦИРОВАННОЙ ПОПРАВКИ НА КРИВИЗНУ И ВРАЩЕНИЕ ДЛЯ $k-\omega$ SST МОДЕЛИ

При применении осредненных по Рейнольдсу уравнений Навье-Стокса (RANS) к задачам с существенной кривизной линий тока и/или вращением потока необходимо использовать соответствующие поправки в полуэмпирических моделях турбулентности, в противном случае модели не способны учитывать влияние этих факторов на характеристики турбулентности. Это обстоятельство мотивирует к созданию новых и совершенствованию уже существующих поправок. В частности, на основе расчета развития турбулентности в поле однородного сдвига при наличии вращения с использованием метода моделирования крупных вихрей (LES) авторами настоящей работы была предложена модификация [1] поправки Ментера-Смирнова [2] для  $k-\omega$  SST модели [3].

Настоящая работа посвящена тестированию предложенной поправки применительно к различным течениям, в которых существенны эффекты кривизны линий тока и вращения потока. Двумерные пристенные течения представлены течением во вращающемся канале и течением в канале с поворотом на  $180^\circ$ , характеризующимся существенной кривизной линий тока. Две другие задачи относятся к классу трехмерных вихревых течений, а именно



свободный вихрь, сходящий с закругленной боковой кромки крыла, и продольные вихри в пограничном слое за рядом вихрегенераторов.

Расчеты были проведены с использованием NTS кода [4], для аппроксимации конвективных потоков использовалась противопоточная схема третьего порядка, а для вязких – симметричная схема второго порядка.

Расчеты установившегося течения несжимаемой жидкости в плоском канале, вращающемся с угловой скоростью  $\Omega$  относительно оси  $z$ , перпендикулярной течению, были проведены при числе Рейнольдса  $Re = U_{bulk} \cdot h / \nu = 5.8 \cdot 10^3$  ( $U_{bulk}$  – среднерасходная скорость,  $h$  – высота канала,  $\nu$  – кинематическая вязкость жидкости). Течение было рассмотрено при нескольких скоростях вращения, соответствующих режимам, изученным ранее методом прямого численного моделирования (DNS) [5]. Вторая задача, установившееся течение несжимаемой жидкости в плоском канале с поворотом на  $180^\circ$  при числе Рейнольдса  $Re = V_m \cdot H / \nu = 10^6$  ( $V_m$  – среднерасходная скорость,  $H$  – высота канала), была рассмотрена при условиях, соответствующих эксперименту [6].

Результаты расчетов для вращающегося канала при различных значениях числа Россби  $Ro = \Omega \cdot h / U_{bulk}$  (рис. 1а) и канала с поворотом (рис. 1б) показали, что профили скорости, полученные с использованием обеих поправок, близки, при этом результаты для модифицированной поправки несколько ближе к экспериментальным данным. В целом, можно сделать вывод, что для двумерных пограничных слоев, подверженных влиянию кривизны линий тока и вращению, модификация поправки приводит лишь к незначительному улучшению результатов.

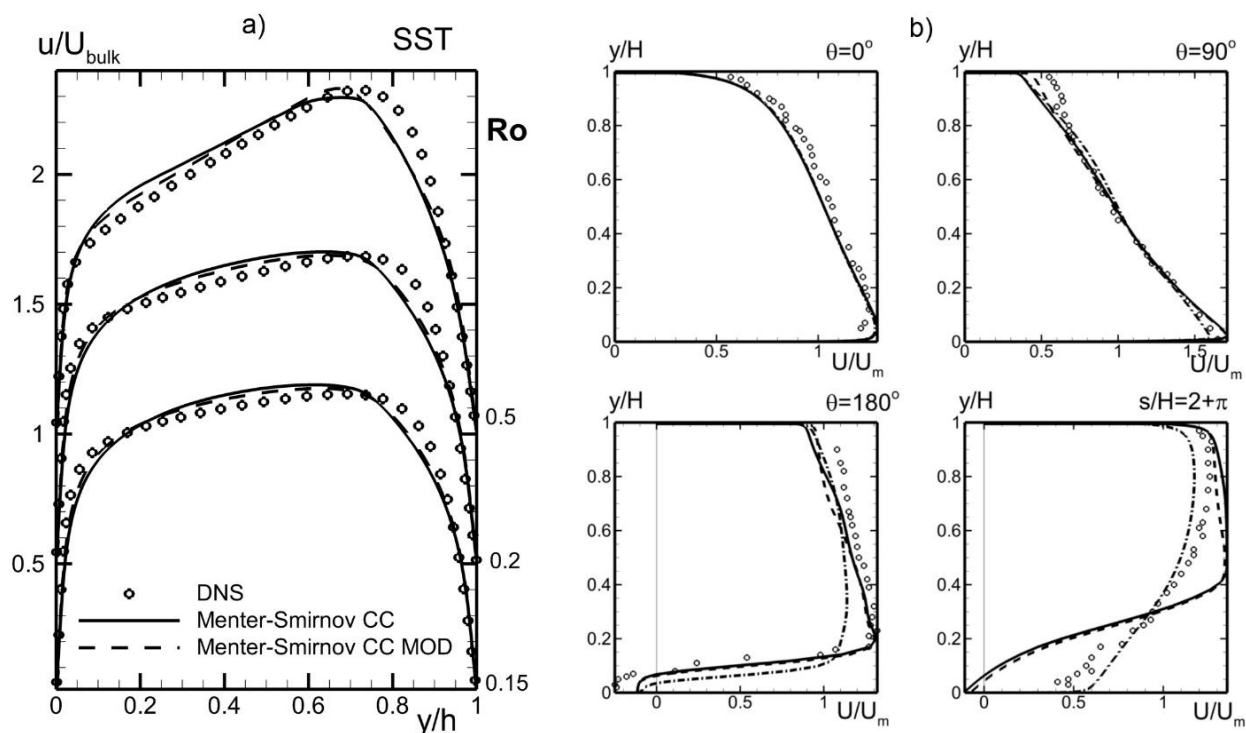


Рис. 1. а) – профили скорости во вращающемся канале при  $Ro = 0.15, 0.2, 0.5$ ;  
 б) – профили расходной скорости в четырех сечениях канала с поворотом на  $180^\circ$

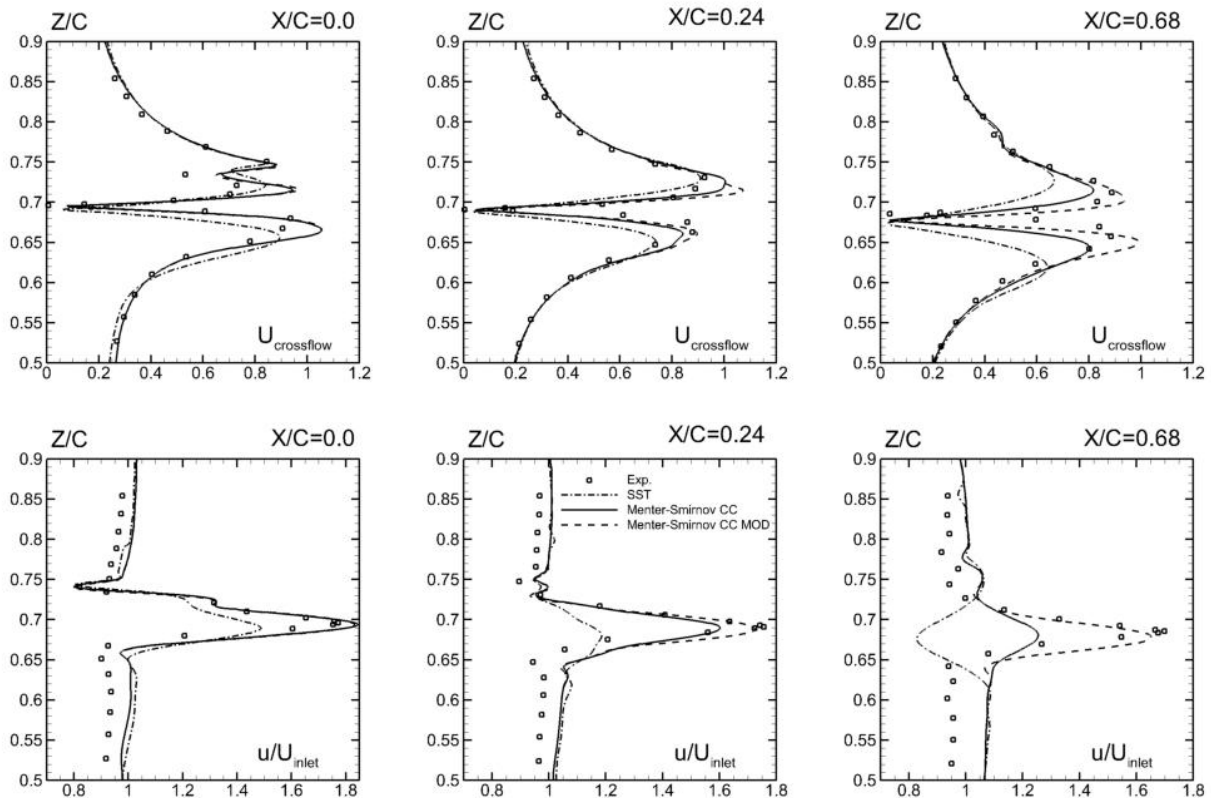


Рис. 2. Профили продольной (внизу) и окружной (вверху) скоростей в трех сечениях

Концевой вихрь, появляющийся при обтекании крыла конечного размаха, рассматривался при условиях, соответствующих эксперименту [7], в котором крыловой профиль NASA0012 со скругленной боковой кромкой обтекался в закрытой аэродинамической трубе. На рис. 2 приведены профили продольной и окружной  $U_{crossflow} = \sqrt{v^2 + w^2}/U_{inlet}$  скоростей в сечениях, проходящих через центр вихря, в окрестности задней кромки профиля и в сечениях, расположенных на расстоянии  $0.24 \cdot C$  и  $0.68 \cdot C$  вниз по потоку ( $C$  – длина хорды). Видно, что модификация поправки приводит к значительному улучшению совпадения с экспериментальными данными в последних двух сечениях, что связано более эффективным подавлением турбулентности в центре вихря, приводящем к замедлению его диссипации.

Течение за рядом вихрегенераторов в сверхзвуковом пограничном слое (число Маха внешнего потока  $M_\infty = 1.4$ ) – второе из рассмотренных вихревых течений. На ряд вихрегенераторов высотой  $h$ , длиной  $4h$  с расстоянием между ними  $5h$  под углом  $18^\circ$  набегающий пограничный слой толщиной  $h$ . Число Рейнольдса, построенное по скорости внешнего потока и высоте вихрегенератора, равно  $10^4$ , что соответствует расчету DNS [8]. Сравнение распределений циркуляции и максимальной завихренности вниз по течению от вихрегенераторов (рис. 3) свидетельствует о том, что в рамках RANS вихрь диссипирует существенно быстрее, чем в DNS. Применение поправки несколько исправляет это несоответствие, причем использование модифицированной поправки обеспечивает заметно более хорошее совпадение с результатами DNS, чем при использовании оригинальной версии.

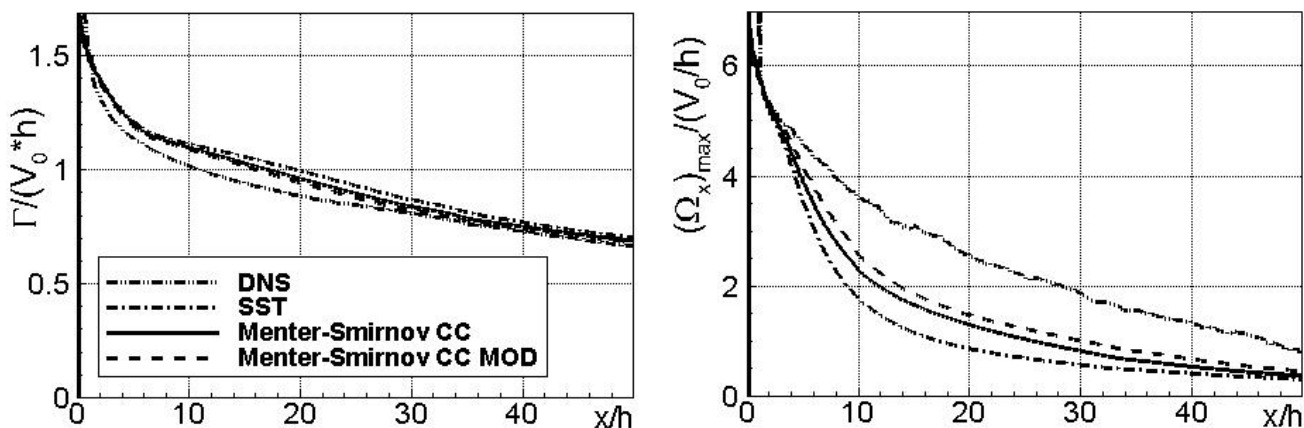


Рис. 3. Циркуляция (слева) и максимальная завихренность (справа) вниз по течению от вихрегенератора

Проведенное тестирование показало, что эффект предложенной ранее модификации поправки Ментера-Смирнова [2] для  $k-\omega$  SST модели [3] зависит от типа рассматриваемого течения. Так, для двумерных пристенных течений достигается лишь незначительное превосходство над оригинальной поправкой, однако в вихревых течениях модификация поправки привела к значительному улучшению результатов. Важно отметить, что ни в одном из рассмотренных случаев модифицированная поправка не уступает оригинальной версии. Таким образом, модифицированная поправка может быть рекомендована к применению при расчете широкого круга течений, в которых эффекты кривизны и вращения играют существенную роль.

#### ЛИТЕРАТУРА:

1. Стабников А.С., Гарбарук А.В. (2015). Модификация поправки на кривизну линий тока и вращение в модели SST на основе LES вращающегося сдвигового слоя, XX Школа-Семинар для молодых ученых и специалистов под руководством академика РАН А.И. Леонтьева "Проблемы газодинамики и теплообмена в энергетических установках. Тезисы докладов, сс. 71-72.
2. Smirnov, P. E., Menter, F. R. (2009). Sensitization of the SST Turbulence Model to Rotation and Curvature by Applying the Spalart–Shur Correction Term. *Journal of Turbomachinery*, 131, 041010.
3. Menter, F. R. (1993). Zonal Two Equation  $k-\omega$  Turbulence Models for Aerodynamic Flows. *AIAA Paper* 93-2906.
4. Strelets, M. K. (2001). Detached Eddy Simulation of Massively Separated Flows. *AIAA Paper*, 2001-0879.
5. Kristoffersen, R., Andersson, H. I. (1993). Direct Simulation of Low-Reynolds-Number Turbulent Flow in a Rotating Channel. *Journal of Fluid Mechanics*, Vol. 256, pp. 163–197.
6. Monson, D. J., Seegmiller, H. L., Mc Connaughey, P. K., Chen, Y. S. (1990). Comparison of Experiment with Calculations Using Curvature-Corrected Zero and Two Equation Turbulence Models for a Two-Dimensional U-Duct. *AIAA Paper* 90-1484.
7. Chow, J. S., Zilliac, G. G., Bradshaw, P. (1997). Mean and turbulence measurements in the near field of a wingtip vortex. *AIAA J.* 35, No. 10, pp. 1561-1567.
8. P. R. Spalart, M. L. Shur, M. Kh. Strelets, A. K. Travin, (2015). Direct Simulation and RANS Modelling of a Vortex Generator Flow. *Flow, Turbulence and Combustion*, Vol. 95, Issue 2, pp 335-350.

ЧИСЛЕННОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ ОБТЕКАНИЯ АЭРОДИНАМИЧЕСКИХ ПРОФИЛЕЙ  
ПРИ РЕЖИМАХ, БЛИЗКИХ К СРЫВУ ПОТОКА

Из всех возможных подходов к расчету турбулентного обтекания аэродинамических профилей наиболее доступным с точки зрения требуемых вычислительных затрат является решение двумерных уравнений Рейнольдса (RANS), замкнутых при помощи полуэмпирических моделей турбулентности. Этот подход оказывается достаточно точным при умеренных углах атаки (до  $10^{\circ}$ - $15^{\circ}$  в зависимости от формы профиля), однако при увеличении угла атаки в расчетах наблюдается систематическое завышение коэффициента подъемной силы [1, 2].

Предварительные расчеты с моделью SST [3] показали, что такое различие расчета и эксперимента [4] наблюдается для крыловых профилей различной формы (рис. 1), причем значение максимального коэффициента подъемной силы завышается более чем на 10%. Кроме того, оказалось, что завышение коэффициента подъемной силы имеет место, хотя и в различной степени, при использовании совершенно различных моделей турбулентности, включая модели реynoльдсовых напряжений (рис. 2).

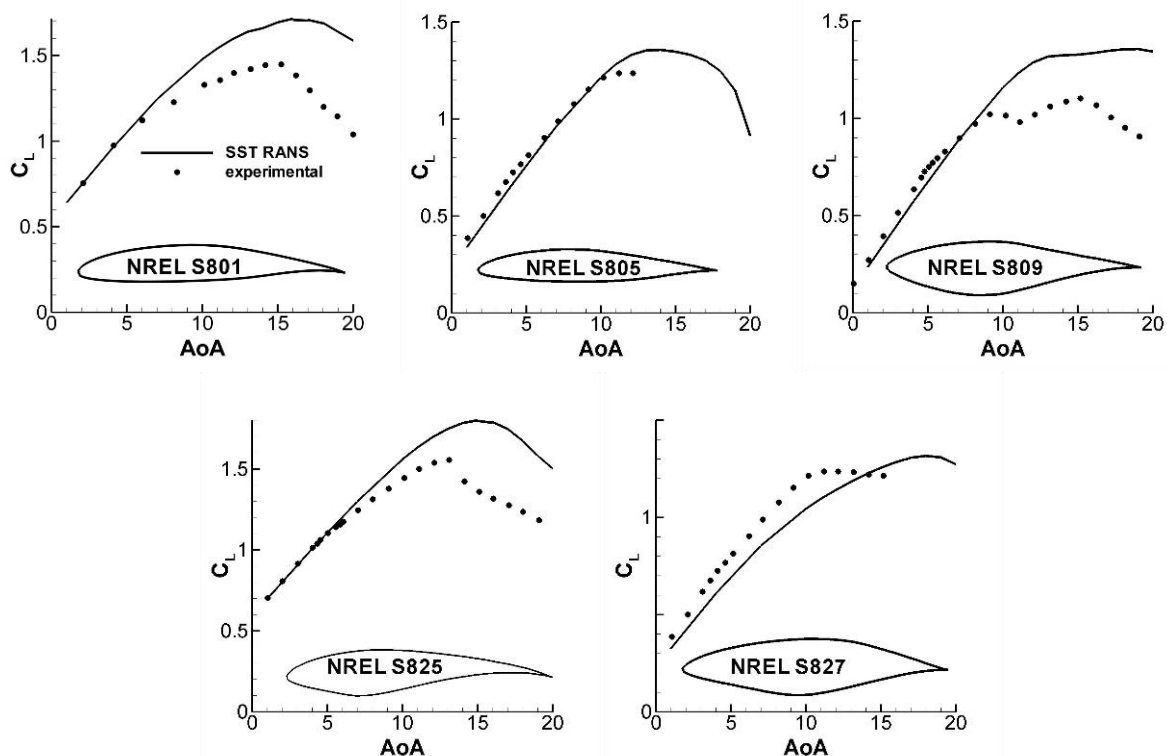


Рис. 1. Зависимость коэффициента подъемной силы от угла атаки для крыловых профилей S801, S805, S809, S825 и S827

Наблюдаемое систематическое рассогласование может быть обусловлено различными причинами. Во-первых, с появлением отрыва в окрестности задней кромки течение в эксперименте может становиться существенно трехмерным, что не может быть учтено в рамках двумерных уравнений Рейнольдса. Во-вторых, хорошо известно, что все

полуэмпирические модели турбулентности не универсальны и их точность при расчете отрывных течений оставляет желать лучшего. Не исключено, что различие расчета и эксперимента обусловлено именно систематическим дефектом моделей турбулентности. Однако нельзя исключить и того, что ошибка в расчете является следствием недостаточно мелкой расчетной сетки, недостаточного размера расчетной области или влиянием граничных условий на свободной границе. Проверке этих предположений и посвящена настоящая работа.

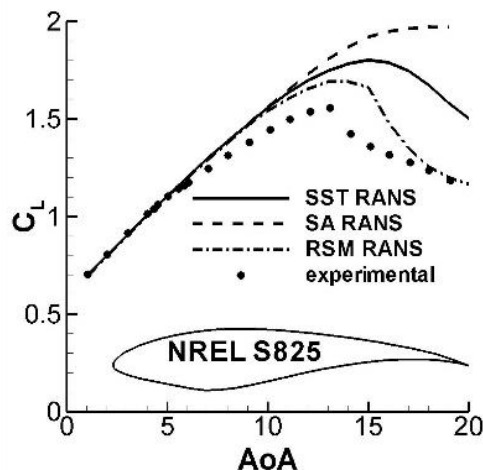


Рис. 2. Сравнение зависимостей коэффициента подъемной силы от угла атаки для профиля S825 с использованием различных моделей турбулентности: SST [3], SA [5] и модели Рейнольдсовых напряжений (RSM) [6]

Расчеты крылового профиля S825 несжимаемой жидкостью при числе Рейнольдса  $Re = 2 \times 10^6$  были проведены с использованием программного пакета ANSYS Fluent, при этом использовались низкорейнольдсовые сетки C-типа. Расчеты показали, что при измельчении сетки по нормали к профилю коэффициент подъемной силы меняется не более чем на 1% (рис. 3а). Результаты расчетов на измельченной вдоль поверхности профиля сетке ( $575 \times 140$ ), проведенные при углах атаки  $13^\circ$ - $14^\circ$ , также отличались от результатов на сетке  $375 \times 140$  менее чем на 1% по коэффициенту подъемной силы. Увеличение расчетной области в 2 раза также слабо влияет на значение коэффициента подъемной силы (рис. 3б). Для последующих расчетов использовалась сетка  $375 \times 140$ , обеспечивающая точность не менее 1%.

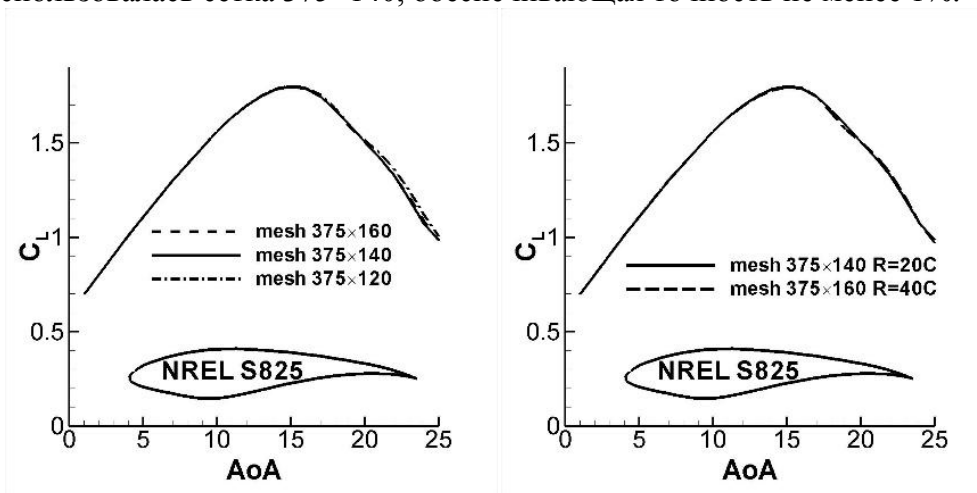


Рис. 3. Сравнение зависимостей коэффициента подъемной силы от угла атаки на различных сетках (а), и при различном размере расчетной области (б)

Для соответствующего максимальному коэффициенту подъемной силы в эксперименте значения угла атаки ( $AoA = 13^\circ$ ) проведено исследование влияния уровня турбулентной вязкости на входной границе. Оказалось, что при увеличении значения турбулентной вязкости во входном потоке в 100 раз (от  $v_t/v = 0.1$  до  $v_t/v = 10$ ) величина подъемной силы изменяется менее чем на 0.5%.

Таким образом, можно уверенно утверждать, что наблюдаемое расхождение расчетного и экспериментального значений коэффициента подъемной силы (более 10%) носит объективный характер и связано либо с неточностью моделей турбулентности, либо с влиянием трехмерных эффектов в эксперименте.

#### ЛИТЕРАТУРА:

1. Villalpando, F., Reggio, M., Ilinca, A. (2011) Assessment of Turbulence Models for Flow Simulation around a Wind Turbine Airfoil. Modelling and Simulation in Engineering, V.2011, Article ID 714146, 8 p.
2. Bak, C., Fuglsang, P., Johansen, J., Antoniou, I. (2000) Wind tunnel tests of the NACA 63-415 and a modified NACA 63-415 airfoil. Risø Technical Report Risø-R-1193, Risø National Laboratory, 2000, 108 pp.
3. Menter, F.R. (1994) Two-equation eddy-viscosity turbulence models for engineering applications. - AIAA, 1994. - Vol. 32. - № 8. - P. 1598 -1605.
4. Somers, D.M. Design and Experimental Results for the S805 Airfoil. Airfoils, Inc. January 1997.
5. Spalart, P.R., Allmaras, S.R. (1992) A One-Equation Turbulence Model for Aerodynamic Flows, AIAA Paper 92-0439.
6. Launder, B.E., Reece, G.J. and Rodi, W. (1975) Progress in the Development of a Reynolds-Stress Turbulent Closure. Journal of Fluid Mechanics, Vol. 68(3), pp. 537-566.

УДК 536.25

М.А. Засимова, Н.Г. Иванов, Н.А. Щур  
Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого

### ИССЛЕДОВАНИЕ СОПРЯЖЕННОГО ТЕПЛООБМЕНА ПРИ СМЕШАННОЙ КОНВЕКЦИИ В ГЛАДКОТРУБНЫХ ПУЧКАХ ГЛУБОКОВОДНЫХ ТЕПЛООБМЕННЫХ АППАРАТОВ

В последние годы появились и активно внедряются новые технологии добычи природного газа со дна Мирового океана, опирающиеся на использование оборудования, устанавливаемого на больших глубинах. Комплексы подводного оборудования включают управляющую работой скважин арматуру, соединенную с трубопроводами для транспортировки газа на берег. По мере выработки месторождения давление газа падает, и естественная транспортировка оказывается невозможной. Повысить эффективность разработки газовых месторождений на шельфе можно посредством включения в состав комплексов оборудования глубоководных газоперекачивающих компрессорных станций. Первый в мире глубоководный компрессор введен в эксплуатацию в 2015 году [1]. Для охлаждения газа, а также в целях противопомпажной защиты в состав компрессорной установки должны входить теплообменные аппараты. Для глубоководного оборудования наиболее простым и надежным решением оказывается использование гладкотрубных пучков, охлаждение которых происходит при пассивном теплосъеме за счет естественной конвекции морской воды.

Численные исследования свободноконвективного течения и теплообмена вблизи коридорных [2, 3] и шахматных [4] гладкотрубных пучков ведутся на кафедре гидроаэродинамики СПбПУ на протяжении ряда лет. До сих пор задача ставилась в 2D и 3D

постановках в предположении постоянства температуры теплоотдающих поверхностей. Цель настоящей работы – рассмотрение в рамках одной согласованной постановки вынужденной трехмерной конвекции газа в трубе, свободной и смешанной нестационарной трехмерной конвекции в межтрубном пространстве и теплопроводности в стенке трубы, что соответствует имитационному моделированию работы глубоководного теплообменного аппарата в приближенных к реальным условиям.

Рассматривается шахматный трубный пучок, состоящий из большого числа труб, изогнутых в форме змеевика (рис. 1а). Внешний диаметр труб  $D = 0,02$  м, внутренний диаметр –  $d = 0,014$  м, относительные поперечный (горизонтальный) и продольный (вертикальный) шаги труб –  $a = S_1/D = 2,6$ ;  $b = S_2/D = 1,6$  (рис. 1б). Каждая труба состоит из 12 горизонтальных участков протяженностью  $32,5D$  и 11 поворотов на  $180^\circ$ . Расчетная область включает в себя две трубы, на поверхности трубы задается условие прилипания. На вертикальных внешних границах в направлении  $y$  (рис. 1а) задаются условия периодичности. Предполагается, что пучок находится в безграничном пространстве, внешние границы расчетной области в направлениях  $x$  и  $z$  (рис. 1а) отодвинуты от теплообменника на одинаковое расстояние  $L_{ext} = 1$  м, на них ставятся мягкие граничные условия.

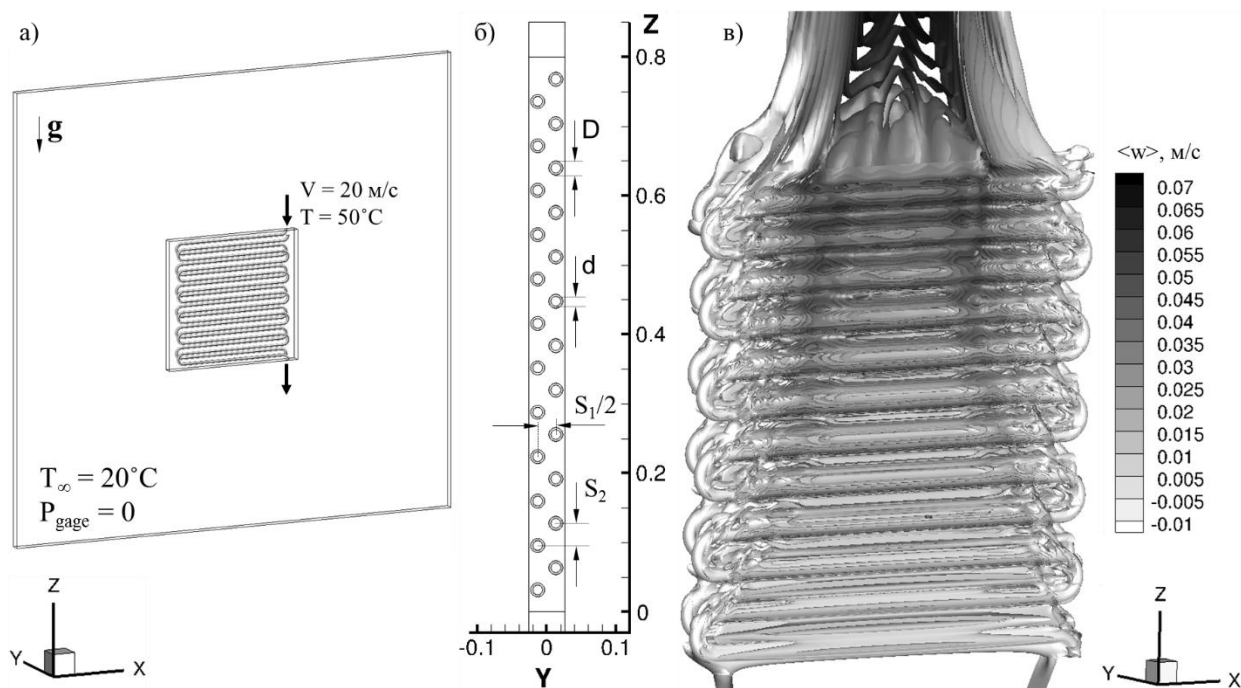


Рис. 1. а) Общий вид расчетной области и граничные условия, б) поперечное сечение расчетной области вблизи пучка труб, в) изоповерхности  $z$ -компоненты скорости, осредненной по времени

Теплофизические свойства принимаются постоянными: для воды  $\rho = 997,1$  кг/м<sup>3</sup>,  $\mu = 8,9 \times 10^{-4}$  Па с,  $\lambda = 0,611$  Вт/м К,  $C_p = 4180,9$  Дж/кг К,  $\beta = 2,057 \times 10^{-4}$  1/К (данный набор соответствует  $T = 25^\circ\text{C}$ ), для стальных труб  $\rho = 7840$  кг/м<sup>3</sup>,  $\lambda = 12,9$  Вт/м К,  $C_p = 482$  Дж/кг К, для природного газа принято при давлении 40 бар и температуре  $35^\circ\text{C}$   $\rho = 35$  кг/м<sup>3</sup>,  $\mu = 1,2 \times 10^{-5}$  кг/м с,  $\lambda = 0,04$  Вт/м К,  $C_p = 3000$  Дж/кг К.

На входе в трубы задается постоянные значения скорости газа  $V = 20$  м/с и температуры  $T = 50^\circ\text{C}$ , значение числа Рейнольдса, определенное по входной скорости,  $Re = 8,2 \times 10^5$ . Температура воды на удалении от трубного пучка полагается равной  $20^\circ\text{C}$ .

Моделирование нестационарного течения воды осуществляется на основе прямого решения полных уравнений Навье-Стокса, эффекты плавучести учитываются в приближении Буссинеска. Для моделирования течения газа в трубе используются осредненные по Рейнольдсу уравнения Навье-Стокса, замкнутые полуэмпирической моделью турбулентности  $k-\omega$  SST в сочетании с пристенными функциями. Численное решение выполнено с использованием гидродинамического пакета ANSYS Fluent. Расчеты проведены со вторым порядком дискретизации по пространству и времени.

В расчетах используется неструктурированная сетка, которая состоит из гексагональных ячеек в пристенных областях, тетраэдральных и призматических ячеек вдали от стенок. Внутри трубы (в области течения газа) величина безразмерного расстояния от центра первой пристенной ячейки до стенки,  $y^+$ , составляет примерно 100. Размерность сетки – 22,2 млн ячеек, при этом в области течения воды сетка состоит из 17,6 млн ячеек.

За счет силы плавучести в межтрубном пространстве формируется вертикальное подъемное течение, при этом скорость подъемного течения заметно возрастает по мере увеличения вертикальной координаты, от нижних рядов пучка к верхним (рис. 1в). Такой характер свободноконвективного течения вблизи пучка отличается от вынужденного течения [5], в котором значения средней скорости не меняются вверх по потоку. Среднее значение скорости подъемного течения составило 0,034 м/с, этому соответствует весьма умеренное значение числа Рейнольдса 760. За счет эжекции морской воды при обтекании поворотов формируются нестационарные вихри на всем протяжении пучка. Обтекание горизонтальных участков в нижней части пучка является практически стационарным. Начиная с седьмого горизонтального участка труб, наблюдается переход к турбулентному обтеканию, как за счет проникновения в межтрубное пространство формирующихся при обтекании поворотов вихревых структур, так и благодаря общему ускорению подъемного течения.

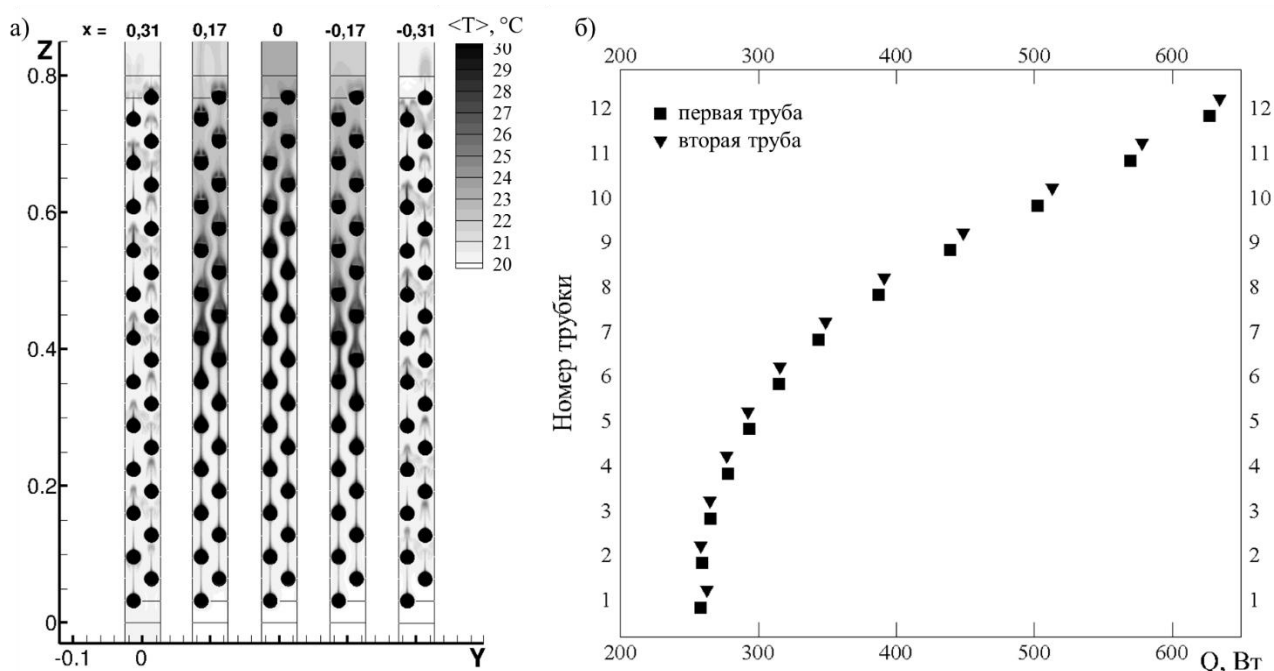


Рис. 2. Поля осредненной по времени температуры в сечениях  $x = \text{const}$  (слева) и график осредненного по времени интегрального теплосъема с прямолинейных участков труб (справа)

Постепенный переход к турбулентному течению воды иллюстрирует и рис. 2а: стационарные факелы, поднимающиеся от нижних участков труб, в верхней части пучка



отсутствуют. Поскольку при движении по трубе температура газа падает  $50^{\circ}\text{C}$  до  $35^{\circ}\text{C}$ , температура внешней поверхности стенки трубы меняется в диапазоне от  $37,8^{\circ}\text{C}$  до  $29,8^{\circ}\text{C}$ , среднее значение температуры стенки составляет  $34^{\circ}\text{C}$ , этому соответствует число Грасгофа  $2,8 \times 10^5$ . На рис. 2б изображен график интегрального теплосъема с прямолинейных участков труб, осредненного по времени. Интенсивность отвода тепла от газа монотонно падает от верхних прямолинейных участков к нижним. За счет низкой температуры стенки и малой интенсивности подъемного течения теплосъем с нижних рядов отличается от теплосъема с верхних рядов более чем в 2 раза. Результаты расчетов в сопряженной постановке принципиально отличаются от данных, полученных в предположении изотермической стенки, где количество теплоты, отводимой на горизонтальных участках, меняется по высоте пучка немонотонно: сначала теплоотвод снижается, а затем плавно возрастает. Разработанная методика расчета сопряженного теплообмена представляется весьма многообещающей применительно к проектированию трубных пучков глубоководных теплообменных аппаратов, охлаждаемых в режиме смешанной конвекции.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 15-08-02382).

#### ЛИТЕРАТУРА:

1. The first subsea gas compression plant in the world on line – a step change in subsea technology, 2015. URL: [http://www.statoil.com/en/NewsAndMedia/News/2015/Pages/17Sep\\_Aasgard\\_subsea.aspx](http://www.statoil.com/en/NewsAndMedia/News/2015/Pages/17Sep_Aasgard_subsea.aspx) (retrieved October 25, 2015).
2. Иванов Н.Г., Рис В.В., Щур Н.А. Исследование краевых эффектов при смешанной конвекции в гладкотрубных пучках глубоководных теплообменных аппаратов // Труды Шестой Российской национальной конференции по теплообмену (27-31 октября 2014 г.). – Москва, МЭИ, 2014. – 4 с.
3. Ivanov N., Ris V., Tschur N., Yurkina N. Numerical simulation of buoyancy-induced flow through a staggered tube bank of subsea cooler / In: Advances in Heat Transfer. Proceedings of the 7th Baltic Heat Transfer Conference (BHTC 2015), Tallinn, Estonia, August 24-26, 2015.
4. Ivanov N.G., Kirillov A.I., Ris V.V., Smirnov E.M. Numerical modeling of buoyancy-induced fluid flow and heat transfer in a staggered tube bank / In: Proc. of the International Heat Transfer Conference IHTC14. August 8-13, 2010, Washington, DC, USA. 2010. 7 p. ASME Technical Paper IHTC14-22640.
5. Жукаускас А. А. Конвективный перенос в теплообменниках. М.: Наука, 1982. 472с.

УДК 532.517

Е.В. Колесник, Н.Г. Иванов, А.М. Левченя  
Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого

#### РАСЧЕТ ТРЕХМЕРНОГО ТУРБУЛЕНТНОГО ТЕЧЕНИЯ В КРУГЛОЙ ТРУБЕ С ПОВОРОТОМ: ОЦЕНКА ТРЕБОВАНИЙ К ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ МОДЕЛИ

Для множества инженерных приложений важно надежно предсказывать характеристики течения в трубах и каналах с поворотами. В качестве примера можно привести проектирование теплообменных устройств. Современный тепловой и гидравлический расчет теплообменников, наряду с отлаженными инженерными методиками, практически всегда требует привлечения методов вычислительной гидродинамики и теплообмена, включая трехмерное моделирование турбулентных течений. Несмотря на развитие в последние годы вихреразрешающих подходов к расчету турбулентных течений, в практических расчетах моделирование турбулентности обычно производится на основе решения уравнений Рейнольдса, замкнутых той или иной полуэмпирической моделью турбулентности. Одной из распространенных конфигураций теплообменного оборудования

является трубчатый теплообменник, в котором один из теплоносителей течет внутри труб, собранных в пучок. В таких конструкциях часто используются трубы с поворотами.

Известно, что в изогнутых трубах вследствие искривления потока появляются центробежные силы, действие которых приводит к формированию вторичных течений [1]. Образование парного вихря, наложенного на основное течение, в сочетании с возможными явлениями отрыва, сопровождающимися дополнительным вихреобразованием, приводит к существенному росту сопротивления. Вычислительная модель должна надежно воспроизводить детали течения в поворотах, однако вопрос о точности получаемых при использовании полуэмпирических моделей турбулентности результатов на сегодняшний день остается открытым.

Цель работы – детальная оценка возможностей гидродинамического вычислительного кода при расчете локальных и интегральных характеристик течения в трубе с поворотом на основе решения осредненных по Рейнольдсу уравнений Навье-Стокса, замкнутых полуэмпирической моделью турбулентности.

Численное моделирование турбулентного течения проводится для условий хорошо документированного эксперимента [2], в котором проводились измерения характеристик течения воздуха в повороте на  $90^\circ$  с длинными входным и выходным прямыми участками (длина участка от форкамеры до поворота составляла 100 калибров).

Рассматривается стационарное турбулентное течение несжимаемой жидкости на участке  $90^\circ$ -градусного поворота трубы круглого поперечного сечения диаметром  $d$ , радиус поворота  $R_c = 2d$ . Число Рейнольдса  $Re$ , построенное по  $d$  и среднерасходной скорости  $W_a$ , равно  $6 \times 10^4$ . Геометрия расчетной области представлена на рис. 1. Расчетная область включает расположенный вверх по потоку прямой участок длиной  $L_0 = 3d$ . Длина прямого участка за поворотом составила  $L = 12d$ . Расчеты проводились в предположении симметричности стационарного течения относительно срединной плоскости.

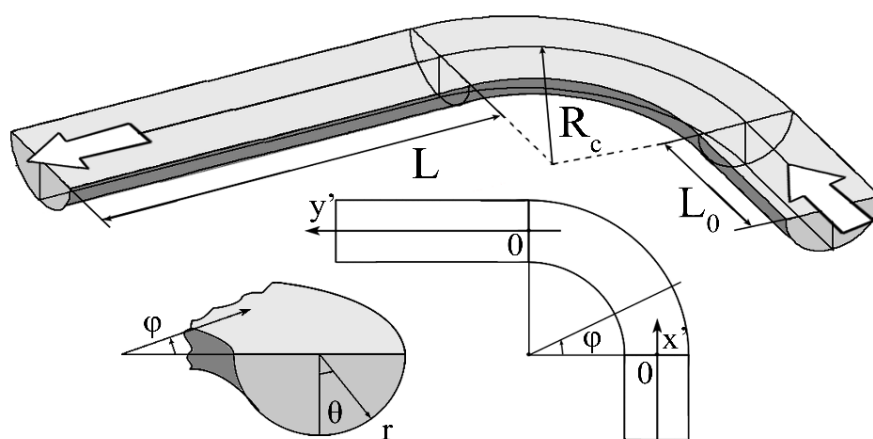


Рис. 1. Расчетная область

На входной границе задавались распределения скорости и характеристик турбулентности, полученные в результате предварительных расчетов полностью развитого течения в прямой трубе при том же значении  $Re$ . На стенке трубы ставилось условие прилипания. На выходной границе предполагалось постоянство статического давления.

Использовался CFD-пакет ANSYS Fluent 15.0. Уравнения Рейнольдса замыкались с помощью SST модели турбулентности Ментера (MSST) [3] и Realizable версии  $k$ - $\epsilon$  модели (RKE) [4]. Расчеты проводились на 4 сетках, со следующими характеристиками: сетка №1 –

0.3 млн ячеек,  $\langle y+\rangle \approx 0.5$ ; сетка №2 – 1.5 млн ячеек,  $\langle y+\rangle \approx 0.5$ ; сетка №3 – 5.3 млн ячеек,  $\langle y+\rangle \approx 0.5$ ; сетка №4 – 0.2 млн ячеек,  $\langle y+\rangle \approx 25$  (для данной сетки применялась технология пристенных функций [5]).

На рис. 2 приведено распределение коэффициента давления  $C_p = (p - p_{ref})/0.5\rho W_a^2$  для трех линий вдоль стенки трубы: при  $\theta = -90^\circ, 0^\circ, 90^\circ$  (см. рис. 1). Как видно из рис. 2, имеет место хорошее согласие расчетных данных и эксперимента, однако расчеты по двум моделям немного по-разному предсказывают изменение  $C_p$  в области за поворотом, по модели MSST получено более резкое изменение коэффициента давления.

Чувствительность получаемого численного решения к вычислительным аспектам задачи оценивалась на основе сопоставления расчетных и экспериментальных распределений интегральных характеристик потока, определенных для поперечных сечений трубы. Интегральные характеристики, определенные в соответствии с [2], представляют собой величину отклонения потока от оси трубы, интенсивность вторичных течений и интегральную кинетическую энергию турбулентности:

$$x^*/d = \frac{8}{\pi d^2 W_a^2} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \int_0^{d/2} \frac{r \sin \theta}{d} W r dr d\theta, \quad (1)$$

$$I_s = \frac{8}{\pi d^2 W_a^2} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \int_0^{d/2} \left( (u^2 + v^2 + w^2) - W^2 \right) r dr d\theta, \quad (2)$$

$$k_a = \frac{8}{\pi d^2 W_a^2} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \int_0^{d/2} k r dr d\theta. \quad (3)$$

На рис. 3 показано влияние модели турбулентности на интегральные характеристики при непосредственном разрешении пристенной области. Из графика величины  $x^*/d$  видно, что расчеты по двум моделям демонстрируют хорошее согласие как между собой, так и с экспериментом. Максимальные значения интегральной интенсивности вторичных течений в эксперименте фиксируются в конце поворота, а в расчетах достигаются несколько ранее, при  $\varphi \approx 70^\circ$ , расчетные значения  $I_s$  лежат ниже данных эксперимента (максимум  $I_s$  отличается примерно на 30%), однако в целом форма кривой  $I_s$  хорошо воспроизводится. Влияние модели турбулентности на предсказание  $I_s$  оказывается существенным, различие между двумя расчетами достигает 15%, при этом расчет по модели MSST дает значения  $I_s$  более близкие к экспериментальным. Величина  $k_a$  оказывается наиболее чувствительной к использованию той или иной модели турбулентности: различия расчетных значений  $k_a$  между собой превышают 25%. Значения  $k_a$ , полученные по модели MSST, снова демонстрирует лучшее согласие с экспериментом, оставаясь при этом выше экспериментальных на 15-20%.

Возможность применения технологии пристенных функций при использовании модели MSST демонстрирует рис. 4, где приведены данные расчетов при  $\langle y+\rangle \approx 0.5$  и  $\langle y+\rangle \approx 25$ . Видно, что чувствительность решения к способу описания пристенного слоя при одном и том же качестве разрешения вторичных течений мала (она существенно ниже, чем к выбору модели турбулентности).

Исследование влияния общей размерности расчетной сетки на получаемое решение было также проведено для модели турбулентности MSST (рис. 5). Как видно из рисунка, при непосредственном разрешении пристенного слоя ( $\langle y+\rangle \approx 0.5$ ) качество предсказания интенсивности вторичных течений перестает зависеть от сетки при числе ячеек примерно 1,5 млн ячеек, уже для сетки №2 влияние модели турбулентности превышает влияние сетки.

Можно сделать вывод о том, что при проведении расчетов турбулентного течения в трубах с поворотами возможно использование расчетных сеток размерностью 200 тыс. ячеек

на один поворот: дифференциальная модель турбулентности при этом должна быть применена в сочетании с технологией пристенных функций.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 15-08-02382).

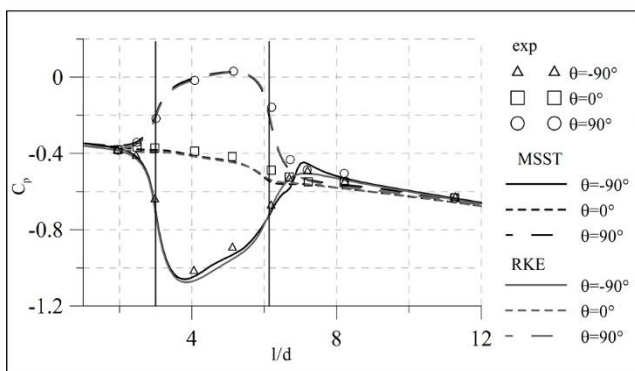


Рис. 2. Распределение коэффициента давления: влияние модели турбулентности

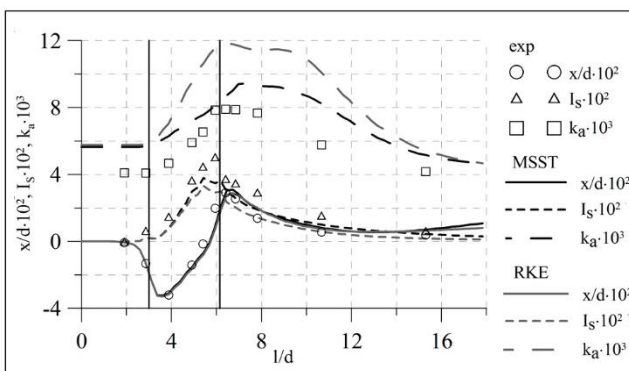


Рис. 3. Влияние модели турбулентности на интегральные характеристики течения (для расчетов на сетке №2)

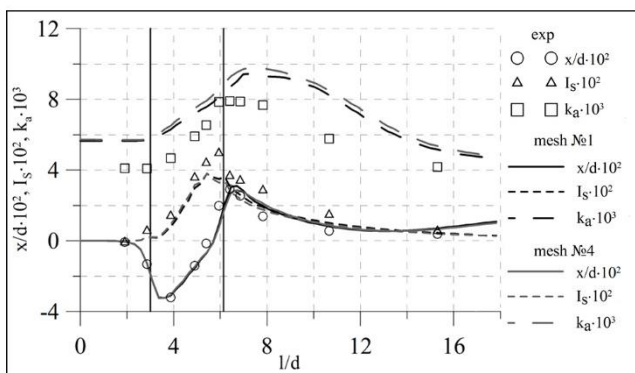


Рис. 4. Влияние пристенных функций на интегральные характеристики течения (MSST модель турбулентности, сетка №2 –  $\langle y^+ \rangle \approx 0.5$ , сетка №4 –  $\langle y^+ \rangle \approx 25$ )

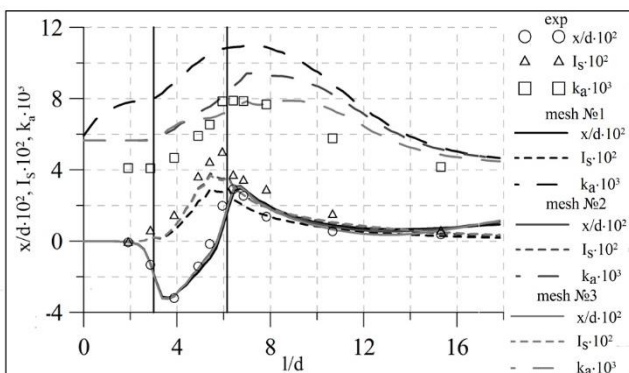


Рис. 5. Влияние расчетной сетки на интегральные характеристики течения (MSST модель турбулентности,  $\langle y^+ \rangle \approx 0.5$ )

#### ЛИТЕРАТУРА:

1. Щукин В.К. Теплообмен и гидродинамика внутренних потоков в полях массовых сил. Изд. 2-е. М.: Машиностроение, 1980. 240 с.
2. Sudo K., Sumida M., Hibara H. Experimental investigation on turbulent flow through a circular-sectioned 180° bend. Experiments in Fluids, 2000, vol. 28. pp. 51-57.
3. Menter F.R., Langtry R., Kuntz M. Ten years of industrial experience with the SST turbulence model. Turbulence. Heat and Mass Transfer 4 (CD-ROM Proceedings), Begell House, Inc., 2003. 8 p.
4. Shih T.-H., Liou W.W., Shabbir A., Yang Z., Zhu J. A new k-ε eddy-viscosity model for high Reynolds number turbulent flows – model development and validation. Computers and Fluids, 1995, vol. 24. no. 3, pp. 227–238.
5. Launder B.E., Spalding D.B. The numerical computation of turbulent flows. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 1974, vol. 3, pp. 269–289.

ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ТЕПЛОПЕРЕНОСА  
В НИЗКОТЕМПЕРАТУРНОЙ ТЕПЛОВОЙ ТРУБЕ

Теплоперенос в тепловых трубах был и в настоящее время является предметом многих исследований. Интерес к изучению данного процесса возникает, в первую очередь, из-за разнообразного практического применения тепловых труб. Тепловые трубы используются в космической промышленности, в медицине, для отвода тепла в устройствах микроэлектроники (в том числе, в компьютерах). Также тепловые трубы находят применение в холодильниках и других устройствах охлаждения, для оборудования современных систем отопления производственных и жилых помещений, для обеспечения теплом теплиц.

Существует немало работ, например, работы [1-4], в которых для расчетов тепловых труб использовались специальные программные коды, написанные самими авторами работ. Эти коды применимы только к расчетам тепловых труб, то есть к очень узкому классу задач. Целью же настоящей работы является попытка моделирования процессов, происходящих в тепловой трубе, с использованием программного пакета общего назначения ANSYS Fluent.

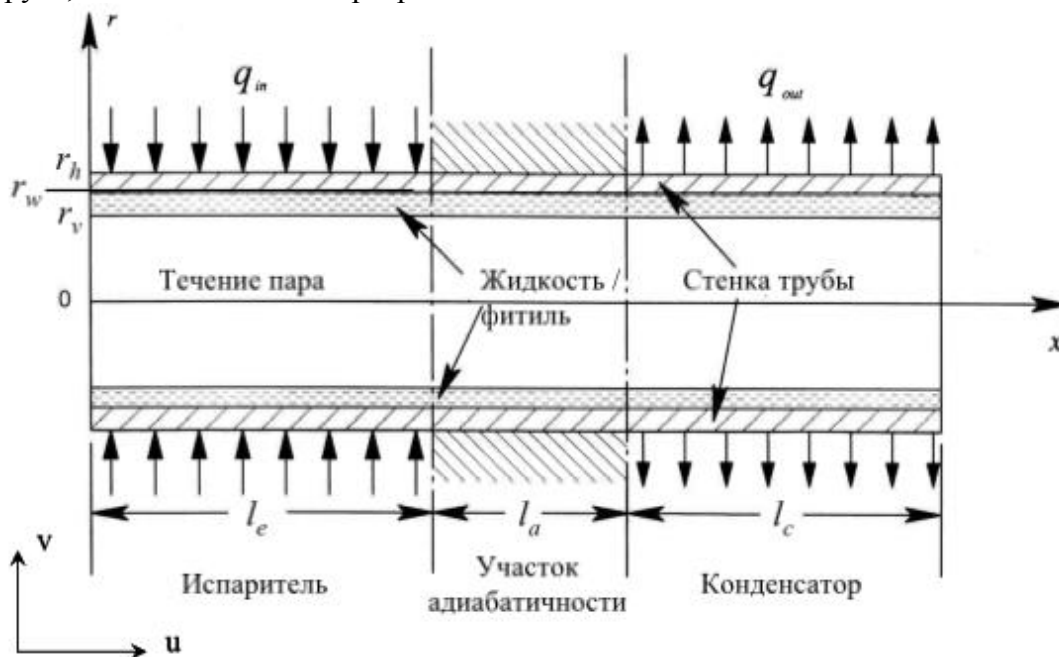


Рис. 1. Общая схема аксиальной тепловой трубы

Схема аксиальной тепловой трубы и используемая система координат показаны на рис. 1. Труба включает участок испарения длиной  $l_e$ , адиабатический участок длиной  $l_a$  и участок конденсации длиной  $l_c$ . На внешней границе испарителя к трубе подводится тепло от внешнего источника. Адиабатический участок окружен кольцом из изоляционного материала, а на внешней стенке конденсатора происходит отвод тепла от трубы. Внутреннее пространство трубы заполнено рабочей средой в паровой фазе. Труба делится на три подобласти по радиальному направлению: область пара – от оси трубы до  $r = r_v$ , область пористого фитиля – до  $r = r_w$ , теплопроводящая стенка – до  $r = r_h$ .

Задача решается в осесимметричной нестационарной постановке (нестационарность в данном случае используется только как способ получения стационарного решения).

Ламинарное течение и теплообмен пара описываются системой уравнений Навье-Стокса, записанной для несжимаемой жидкости. Внешние объемные силы отсутствуют.

Ламинарное течение и теплообмен жидкости в пористой среде также описываются системой уравнений Навье-Стокса для несжимаемой жидкости. В уравнения неразрывности и энергии включены согласованные друг с другом источниковые члены, моделирующие межфазные процессы на границе фитиль-пар. Внешние объемные силы отсутствуют, пористость моделируется с использованием классического закона Дарси. Фитиль считается гомогенным и изотропным.

Теплоперенос в твердой стенке описывается классическим двумерным уравнением теплопроводности.

Граничные условия задаются следующим образом.

1) Ось OX – условие осевой симметрии:  $\frac{\partial u}{\partial r} = \frac{\partial v}{\partial r} = 0, \frac{\partial T}{\partial r} = 0$ .

2) Верхняя твердая стенка:  $\lambda_w \frac{\partial T_w}{\partial r} = \frac{Q}{2\pi r_h L_e}$  ( $Q$  – внешний тепловой поток).

3) Торцевые стенки:  $u = v = 0, \frac{\partial T}{\partial x} = 0$  (в твердой среде только условие  $\frac{\partial T}{\partial x} = 0$ ).

4) Интерфейс стенка-фитиль: условие отсутствия разрыва,  $T_l = T_w, \lambda_l \frac{\partial T_l}{\partial r} = \lambda_w \frac{\partial T_w}{\partial r}$ .

5) Интерфейс фитиль-пар. На этой границе ставятся довольно нетривиальные условия:

$T = T_{ref} \left( 1 + \frac{p - p_{ref}}{L \rho_{ref}} \right)$  – это граничное условие по температуре ставится при решении

уравнения энергии как в паре, так и в пористой среде, значения давления берутся из ячеек, примыкающих к границе со стороны пара, и обновляются на каждой итерации;

$\rho v = -\frac{\lambda_l \partial T_l}{L \partial r}$  – плотность потока массы пара, согласованная с плотностью потока тепла в

пористой среде (это граничное условие также обновляется на каждой итерации);

$u_l = v_l = 0$  – условие прилипания для жидкости. Несмотря на то, что физически интерфейс фитиль-пар – это одна граница, пакет ANSYS Fluent позволяет на одной и той же линии (поверхности) задать две границы, при этом одна будет относиться к пару, другая к жидкости. На границе, относящейся к пару, задается входная плотность потока массы, а на границе, относящейся к жидкости, ставится условие прилипания.

Источниковые члены в уравнении баланса массы для жидкости задаются только в ячейках, примыкающих к интерфейсу фитиль-пар со стороны фитиля на участках испарения и конденсации. Их значения задаются согласованно с тепловыми потоками в пористой среде

(а значит, и с массовыми потоками пара) в следующем виде:  $S = -\frac{\lambda_l \partial T_l}{L \partial r} \frac{1}{\Delta r}$  (умножение на

$1/\Delta r$  соответствует пересчету поверхностных источников в объемные,  $\Delta r$  – радиальный размер ячейки расчетной сетки в пористой среде).

Расчеты производились по методу PISO, дискретизация уравнений осуществлялась со вторым порядком точности по пространству и с первым порядком по времени. Для выполнения расчетов использовалась блочно-структурированная равномерная внутри каждой подобласти сетка, построенная с помощью сеточного генератора ANSYS Gambit. Исходная расчетная сетка состояла из 6 тыс. ячеек. Для исследования сеточной сходимости выполнены также расчеты на сетках из 24 тыс. и 96 тыс. ячеек. Оказалось, что не зависящее от сетки решение получается уже на исходной сетке.

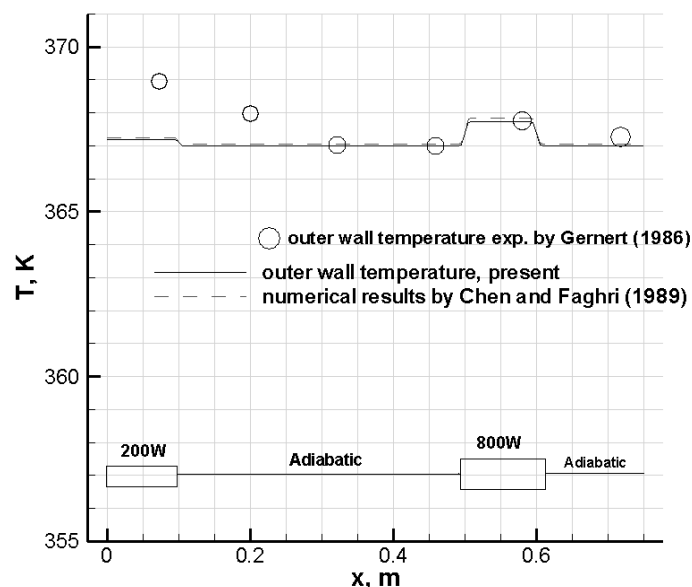


Рис. 2. Распределение температуры вдоль внешней стенки на испарительном участке, сравнение с имеющимися экспериментальными и расчетными данными

Согласие полученных результатов по температуре стенки с известными из литературы экспериментальными [5] и расчетными [1] данными очень хорошее (см. рис. 2). Отличие почти на 2 градуса температуры стенки вблизи торца от экспериментального значения ставит под вопрос скорее качество проведенного в этой точке измерения, чем результаты расчета.

#### ЛИТЕРАТУРА:

1. Chen M.M., Faghri A. An analysis of the vapor flow and the heat conduction through the liquid-wick and pipe wall in a heat pipe with single or multiple heat sources // International Journal of Heat and Mass Transfer. – 1990. – Vol. 33, No. 9. – P. 1945–1955.
2. Noh Hong-Koo, Song Kyu-Sub. Temperature Distribution of a Low Temperature Heat Pipe with Multiple Heaters for Electronic Cooling // ETRI Journal. – 1998. – Vol. 20, No. 4. – P. 379–393.
3. Zhu N., Vafai K. Analysis of Cylindrical Heat Pipes Incorporating the Effects of Liquid–Vapor Coupling and Non–Darcian Transport – a Closed Form Solution // International Journal of Heat and Mass Transfer. – 1999. – Vol. 42. – P. 3405–3418.
4. Mahjoub S., Mahtabroshan A. Numerical Simulation of a Conventional Heat Pipe // World Academy of Science, Engineering and Technology. – 2008. – Vol. 2. – 6 p.
5. N. J. Gernert. Analysis and performance evaluation of heat pipes with multiple heat sources. AIAA ASME 4th Joint Thermophysics and Heat Transfer Conf I, 1986.

УДК 614.841

О.Е. Тасс, В.В. Степанов

Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого

#### ИССЛЕДОВАНИЕ КИНЕТИКИ ОКИСЛЕНИЯ ПРОДУКТОВ ПИРОЛИЗА СМЕСЕЙ ПОЛИМЕРНЫХ МАТЕРИАЛОВ МЕТОДОМ КИСЛОРОДНОЙ СКАНИРУЮЩЕЙ МИКРОКАЛОРИМЕТРИИ

В настоящее время диапазон применения полимерных материалов охватывает не только бытовую сферу жизнедеятельности человека, но и большинство отраслей промышленности. В связи с многообразием условий применения полимеров, особое

значение имеет их исследование на *огнестойкость*: снижение горючести снижает риск развития пожара и, в случае его возникновения, уменьшает мощность и количество токсичных продуктов сгорания.

Для настоящей работы проводится исследование кинетики окисления продуктов пиролиза смесей полимерных материалов на основе метода проточной кислородной сканирующей калориметрии [1]. Принцип работы микрокалориметра (рис. 1) основан на разделении процесса горения исследуемого материала на две стадии: пиролиз в потоке инертного газа (азот, аргон) и последующее окисление летучих в камере сгорания при контролируемой температуре, характерной для температуры пламени при пожаре [2, 3].



Рис. 1. Микрокалориметр

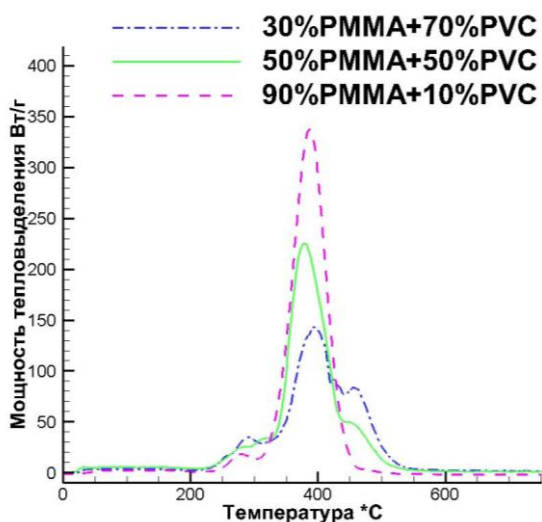


Рис. 2. Экспериментальные результаты для смесей

Термическая деградация материала происходит в условиях нагрева образца с наперед заданной постоянной скоростью изменения температуры в зоне пиролиза. Образующиеся при этом продукты газификации материала (летучие) поступают в камеру сгорания, где окисляются в избытке кислорода. В ходе эксперимента непрерывно измеряется скорость поглощения кислорода при окислении летучих. Мощность тепловыделения при окислении летучих определяется по измеренному количеству израсходованного кислорода. Установлено, что при поддержании в центре камеры сгорания температуры 900°C имеет место полное окисление летучих. В этом случае измеряемая в эксперименте зависимость скорости поглощения кислорода от температуры образца полностью определяется скоростью газификации материала. При более низких температурах в камере сгорания окисление летучих лимитируется скоростью реакций окисления. По результатам измерений скорости поглощения кислорода при разных температурах в камере сгорания открывается возможность для исследования кинетики реакций окисления летучих.

Опыты проводились со смесями порошков *Полиметилметакрилата (PMMA)*, формула  $[-CH_2C(CH_3)(COOCH_3)-]_n$ , и *Поливинилхлорида (PVC)*, формула  $[-CH_2-CHCl-]_n$ , в различных концентрациях, навесках и темпах нагрева (рис. 2).

*Основные задачи исследования* – проверка правила аддитивности и подбор теоретической модели, позволяющей получить зависимость тепловыделения от температуры для произвольной смеси веществ по аналогичным зависимостям для каждого отдельного вещества, выявление диапазонов концентраций применимости такой модели, ее погрешности, а также корректности работы для других полимерных веществ.



В ходе исследования установлено, что полученные результаты (рис. 3) близки к теоретической модели, но не полностью соответствуют ей. Отклонение можно объяснить некачественным перемешиванием порошков по причине малого веса насыпки, требуемого прибором для анализа. Таким образом, необходимо ввести в модель поправочные коэффициенты. Для корректировки модели нужно провести исследования других концентраций, так же необходимо обеспечить максимальное перемешивание порошков.

Проведенное исследование в области термического анализа смесей порошков *Полиметилметакрилата* и *Поливинилхлорида* может служить основанием для построения полноценной кинетической модели окисления продуктов пиролиза таких смесей [4].

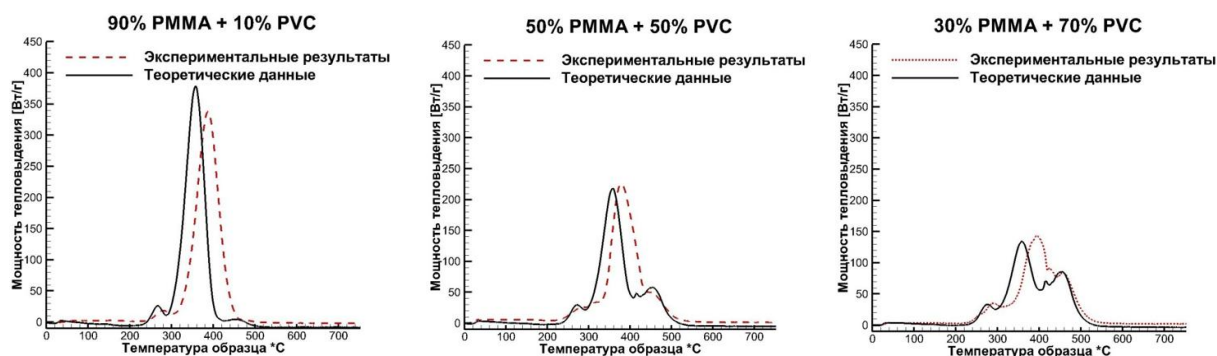


Рис. 3. Сравнение экспериментальных результатов с теоретическими по правилу аддитивности

#### ЛИТЕРАТУРА:

1. Standard Test Method for Determining Flammability Characteristics of Plastics and Other Solid Materials Using Microscale Combustion Calorimetry. Designation: D 7309 – 07a, ASTM-international, 2007.
2. Richard E. Lyon. The role of thermal decomposition kinetics in the burning of polymers. 12th International Conference on Fire Science and Engineering (INTERFLAM); University of Nottingham, UK , July 2010.
3. Alexander B. Morgan. Pyrolysis combustion flow calorimetry: a tool for flame retardant development and fundamental combustion science. University of Dayton Research Institute Multiscale Composites and Polymers Division Dayton, OH 45469-0160 USA.
4. A.Yu. Snegirev, V.A. Talalov, V.V. Stepanov, J.N. Harris, Formal kinetics of polystyrene pyrolysis in non-oxidizing atmosphere, *Thermochim. Acta* 548, 2012.

УДК 531.51:001.891

Д.А. Мусаева<sup>1,2</sup>, Э. Бааке<sup>1</sup>, В.К. Ильин<sup>2</sup>

<sup>1</sup>Ганноверский Университет им. Лейбница, Институт Электротехнологий

<sup>2</sup>Казанский государственный энергетический университет

#### ИССЛЕДОВАНИЕ ДВИЖЕНИЯ РАСПЛАВА GaInSn ПОД ДЕЙСТВИЕМ НИЗКОЧАСТОТНОЙ ИМПУЛЬСНОЙ СИЛЫ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОГО ПОЛЯ

*Введение.* Движение жидкости в нестационарных условиях и влияние подобных условий на протекание тепломассопереноса в потоке на сегодняшний день остается актуальной темой исследования – авторы, проводившие экспериментальные, численные исследования приводят противоречивые данные о влиянии нестационарных воздействий на поток. В определенных случаях подобные воздействия приводят к интенсификации теплообмена в потоке [1-4], и в данном контексте изучение поведения потока в нестационарных условиях представляет практический интерес.

Довольно широко распространенным активным методом интенсификации теплообмена в жидкости является наложение на поток низкочастотных импульсов, реализуемых механическим, пневматическим, ультразвуковым и т.п. способами [5, 6]. Диапазон частот накладываемых пульсаций обуславливается физическими параметрами жидкости, в частности, ее инертностью. При рассмотрении в качестве жидкой среды расплавленного металла наиболее эффективным представляется воздействие на него при помощи электромагнитной (ЭМ) индукции – управление потоком может быть реализовано без непосредственного взаимодействия с жидкостью, что с учетом агрессивности жидких металлов, является преимуществом. Возможность контролировать интенсивность движения в потоке при помощи изменения параметров накладываемого ЭМ поля также представляется удобным.

Эффективность протекания тепломассообменных процессов и возможность их направленной интенсификации являются важными вопросами в металлургии. Интенсификация процесса тепло- и массопереноса может быть осуществлена при повышении эффективности перемешивания жидкого металла, что приводит к более равномерному распределению температуры в потоке потока. Одним из направлений для повышения количества движения в жидкости и может служить наложение на поток низкочастотных нестационарных импульсных воздействий ЭМ поля.

*Цель работы* – экспериментальное исследование влияния низкочастотной импульсной силы ЭМ поля (силы Лоренца) на движение расплава GaInSn.

Для достижения поставленной цели была спроектирована и построена экспериментальная установка, предназначенная для изучения потока жидкого металла в нестационарных условиях при применении ультразвукового измерения скорости по принципу Доплера [2] (рис. 1). На рисунке схематично обозначены характерное распределение силы Лоренца в расплаве и форма потока, образующаяся под действием гравитации и силы ЭМ поля. Движение объема жидкости в основном представлено двумя тороидальными вихрями с противоположными направлениями вращения, расположенными один над другим, положение вихрей также показано на рис. 1.

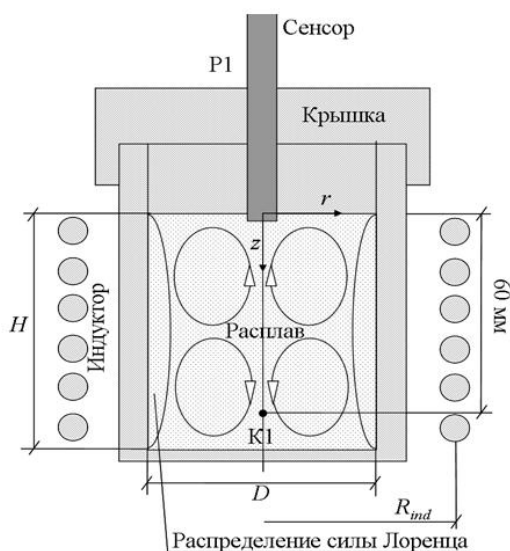


Рис. 1. Схема экспериментальной установки

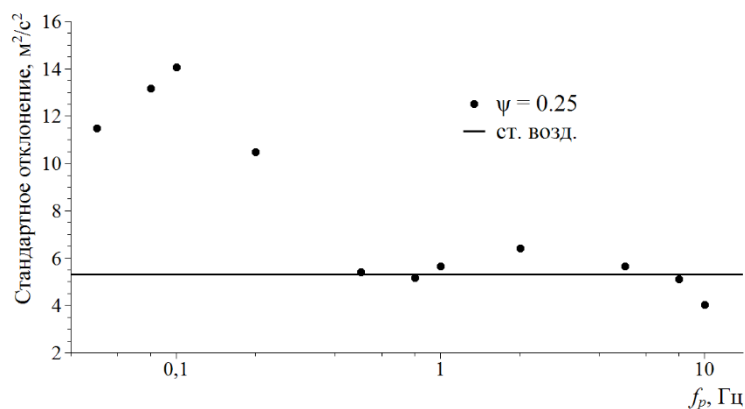


Рис. 2. Интенсивность пульсаций скорости для различных  $f_p$

Эксперимент проводился с применением эвтектического сплава галлия 68%, индия 20% и олова 12%, температура плавления которого позволяет проводить экспериментальные

исследования потока при комнатной температуре. Цилиндрический контейнер с внутренним диаметром  $D = 62$  мм, в котором помещался расплав, был выполнен из плексигласа. Высота расплава в нем составила  $H = 70$  мм. Контейнер был окружен шестью витками медного индуктора. На первом этапе исследования была разработана и экспериментально верифицирована двухмерная осесимметричная математическая модель движения жидкости с применением  $k$ - $\epsilon$  модели турбулентности, описывающая скорости и характер потока при стационарном воздействии силы Лоренца. Далее экспериментально исследовался поток под действием импульсной силы – производилось измерение осевой составляющей скорости от сенсора до дна объема, при этом сенсор закреплялся на крышке стакана. Рассматривались одна основная позиция сенсора для получения профиля скорости – на оси стакана P1,  $r = 0$  мм (рис. 1).

В эксперименте использовались два режима наложения на поток силы ЭМ поля. В стационарном случае, в котором сила Лоренца принималась, в качестве допущения, за постоянную во времени величину, частота переменного тока в индукторе составляла  $f_{AC} = 150$  Гц, а сила тока  $I_{AC} = 200$  А.

В случае модуляции силы ток в индукторе с тем же значением частоты  $f_{AC} = 150$  Гц прерывался для создания импульсов с частотой  $f_p$ . Если допустить, что  $T_{act}$  – промежуток времени, в течение которого сила ЭМ поля оказывает воздействие на расплав, а  $T_o$  – пауза, во время которой сила Лоренца отсутствует и жидкость движется под действием инерции, то выражения для определения частоты и периода импульсов могут быть представлены в виде:

$$f_p = \frac{1}{T_p}, \quad T_p = T_{act} + T_o, \quad \psi = \frac{T_o}{T_{act}},$$

где  $\psi$  – скважность импульсов силы. В работе рассмотрены несимметричные импульсы с  $\psi = 0.25$  (длительность импульсов в 4 раза меньше, чем пауза между ними).

Для каждого режима наложения стационарной или импульсной силы ЭМ поля записывались профили осевой скорости в течение 200 секунд. Были получены измерения средней скорости потока и ее стандартного отклонения, т.е. интенсивности пульсаций скорости для каждой из точек профиля вдоль пучка.

Влияние низкочастотного импульсного воздействия на поток и тепломассоперенос в нем оценивалось при помощи сопоставления величин интенсивности пульсаций скорости для различных  $f_p$ . (рис. 2). В настоящем случае, величина стандартного отклонения в импульсном режиме отражает величину пульсаций скорости под действием нестационарной силы. Подобным образом может быть оценено насколько интенсивно жидкость отвечает на переменное внешнее воздействие. Сплошной линией на графике отмечено значение стандартного отклонения, измеренного в расплаве, движущемся под действием постоянной силы.

Отсутствие выраженного влияния на поток импульсов с частотами от 0.5 до 10 Гц, значения близки к величине, полученной при стационарной силе Лоренца, связано с невозможностью отклика потока на воздействие в силу инерции.

Присутствие максимума на рис. 2 может быть обосновано приближением частоты импульсов силы ЭМ поля к характерной частоте оборота вихрей в потоке, что, предположительно, повышает эффективность наложения импульсов.

*Результаты.* В работе экспериментально исследовано движение расплава под действием импульсной силы Лоренца, проанализировано влияние различных частот импульсов на интенсивность пульсаций скорости потока. Проведено математическое моделирование движения потока при стационарном воздействии.

*Вывод.* Наложение на поток расплава импульсной силы Лоренца в диапазоне частот от 0.05 до 0.2 Гц приводит к значительному повышению интенсивности пульсаций осевой компоненты скорости потока в сравнении с величиной, полученной для случая

стационарного воздействия и импульсов с более высокой частотой, среди рассмотренных значений  $f_p$ .

#### ЛИТЕРАТУРА:

1. Качанов Ю.С., Козлов В.В., Левченко В.Я. Возникновение турбулентности в пограничном слое. Новосибирск: Наука, 1982. 152 с.
2. Бергман Л. Ультразвук и его применение в науке и технике. М.: Мир, 1957. 216 с.
3. Константинов Б.П. Гидродинамическое звуковое распространение звука в ограниченной среде. Д.: Энергия, 1947. 233 с.
4. Борисов Ю.Я., Гынкина Н.М. Физические основы ультразвуковой технологии // Акустическая сушка. М: Наука, 1970. С. 16-27.
5. Inaba, T., Kubo, T. Enhanced heat transfer through oscillatory flow // J. Heat Transfer - Japanese Research. 1993. Vol.22. № 5. P. 480-492.
6. Mostinskii I.L., Lamden D.I., Stonik O.G. Influence of flow pulsations on the heat and mass transfer with particles // High Temperature. July-Aug. 1983. Vol.21. № 4. P. 576-582.

УДК 662.611

Р.Б. Поваренский, А.С. Цой, А.Ю. Снегирев  
Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого

### ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ПОДАВЛЕНИЯ ТУРБУЛЕНТНОГО ПЛАМЕНИ СТРУЕЙ РАСПЫЛЕННОЙ ВОДЫ

*Введение.* Для повышения эффективности средств пожаротушения требуется проводить многочисленные натурные испытания, максимально приближенные к сценарию возможного пожара. На практике данное требование не всегда осуществимо. Кроме того, испытания проходят с большими затратами времени и средств. Численное моделирование позволяет получить более детальную информацию о динамике и эффективности подавления пламени и может быть применено для сценариев, которые невозможно воспроизвести в натуральных условиях. Достоверность результатов численного моделирования должна быть проверена путем их сравнения с имеющимися экспериментальными данными, количество которых крайне ограничено. В работе [1] приведены результаты сравнения результатов расчета газокапельной струи с имеющимися экспериментальными данными. Цель данной работы – апробация текущей версии математической модели и расчетного кода FDS 6 [2] на примере подавления крупномасштабного турбулентного диффузионного пламени струей распыленной воды. Апробация более ранней версии была выполнена в работе [3].

*Описание модели и кода.* В расчетах использован расчетный код FDS 6 [2], в котором реализованы математические модели турбулентного диффузионного горения и газокапельной струи. Для расчета трехмерных турбулентных течений, возникающих при горении, численно решается система уравнений Навье-Стокса в существенно дозвуковом приближении. Для моделирования турбулентности используется метод крупных вихрей, который воспроизводит наиболее крупные вихревые структуры. Горение в газовой фазе описывается одностадийной необратимой реакцией окисления горючего с образованием заданных количеств сажи и монооксида углерода. Скорость выгорания реагентов определяется скоростью их подсеточного смешения. Эмиссия, перенос и поглощение теплового излучения моделируется с помощью уравнения переноса энергии излучения, которое решается численно методом контрольных объемов. Применяется приближение серой среды с эффективным коэффициентом поглощения смеси, зависящим от температуры и концентраций продуктов сгорания.

Полидисперсная газочапельная струя испаряющейся воды моделируется в рамках дискретно-траекторного подхода. Для задания параметров начального распыла используются эмпирические соотношения, связывающие расход и скорость истечения жидкости, а также начальный средний диаметр каплей  $s$  и перепадом давления в распылителе и диаметром отверстия сопла. Начальные диаметры каплей определяются случайным образом в соответствии с заданным распределением по размерам. В окрестности распылителя струя имеет форму заполненного конуса. Движение каплей определяется действием силы гидродинамического сопротивления и силы тяжести. Учитывается нагрев и испарение каплей.

*Постановка задачи.* В расчетах приближенно воспроизводится сценарий натуральных испытаний в установке FLAME[4] (Sandia Laboratories, США), изображенной на рис. 1. Рассматривается горение жидкого горючего над круглым резервуаром диаметром 2 м. В расчетах полагали, что горючим является керосин ( $C_{11}H_{21}$ ), расход горючего принимали постоянным и соответствующим тепловой мощности 2500 кВт. Для тушения пламени в эксперименте использовалось сопло с диаметром отверстия  $D_0 = 8.74$  мм, расположенное на высоте 5 м над очагом. Струя направлена вертикально вниз к центру очага, конус распыла составляет  $30^\circ$ . В соответствии с программой испытаний [4], в данной работе выполнены расчеты с разными значениями избыточного давления в распылителе:  $\Delta P_0 = 1.72, 6.9$  и  $13.1$  бар. Увеличение перепада давления  $\Delta P_0$  приводит к увеличению расхода воды  $Q_l$  и начальной скорости каплей  $V_0$ , а также к уменьшению начального среднего диаметра частиц  $d_{v50}$ .

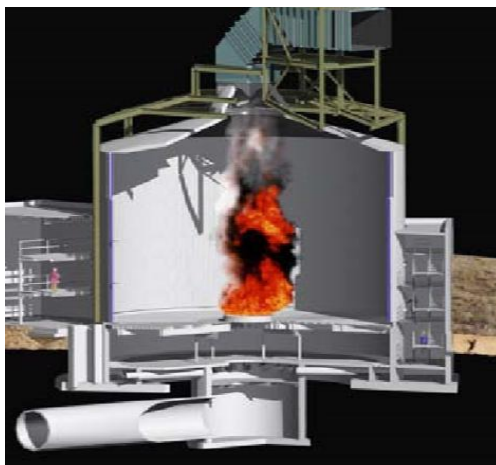


Рис. 1. Схема установки [4] и сценарий пожара, рассмотренный в данной работе

Расчетная область представляет собой параллелепипед с размерами  $8 \times 8 \times 6$  м. Все границы, за исключением нижней, проницаемы для потока. Расчеты производились на неравномерных декартовых сетках с количеством элементов 384 000 и 800 000. Элементы с наименьшими размерами сконцентрированы вблизи оси резервуара.

Расчеты выполнялись в два этапа. На первом этапе выполнялся расчет турбулентного диффузионного пламени до достижения установившегося режима, в котором осредненные характеристики перестают изменяться с течением времени. На втором этапе активировали струю распыленной воды и рассматривали взаимодействие струи и пламени. При этом определяли время подавления пламени как промежуток между моментами активации струи и снижения температуры до значений менее  $30^\circ\text{C}$  в точке, расположенной на оси пламени, на высоте 10 см над поверхностью горючего.

*Результаты.* Расчетная динамика подавления пламени струей распыленной воды при  $\Delta P_0 = 6.9$  бар (соответствующий начальный средний диаметр каплей равен  $d_{v50} = 0.55$  мм) представлена на рис. 2.

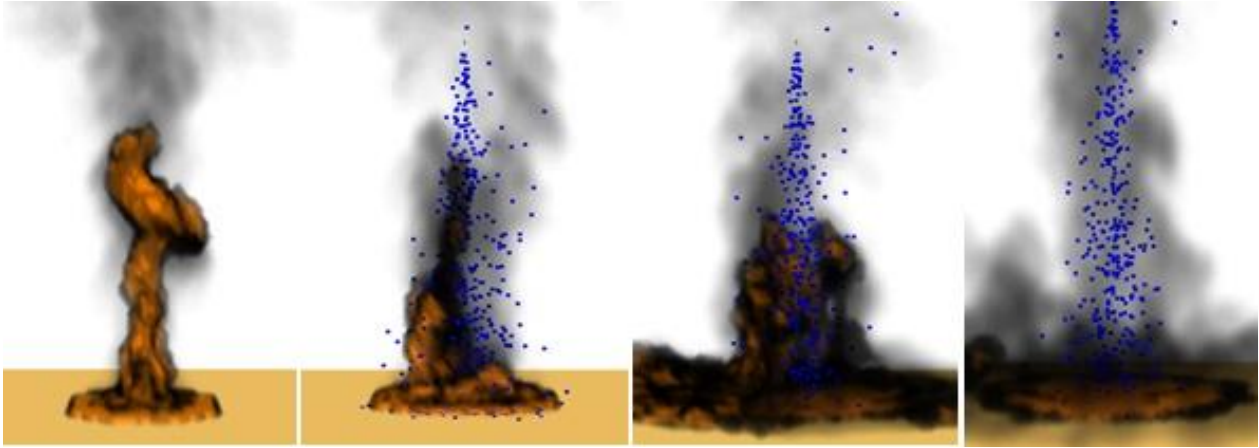


Рис. 2. Воздействие вертикальной струи распыленной воды на пламя. Показаны изоповерхности с мощностью тепловыделения  $200 \text{ кВт/м}^3$ , поля концентрации сажи и мгновенные положения капель в моменты 5.8, 6.6, 7.5 и 7.8 с после начала истечения струи

Расчеты показали, что имеет место подавление пламени при перепадах давления  $\Delta P_0 = 6.9$  и  $13.1$  бар. В то же время, при перепаде давления  $\Delta P_0 = 1.72$  бар пламя продолжает существовать, несмотря на воздействие струи. Таким образом, имеют место критические условия подавления пламени в рассматриваемом сценарии. Как и в натурных испытаниях, расчетное значение критического перепада давления находится в интервале между  $1.72$  и  $6.9$  бар. Расчетные значения времени подавления пламени согласуются с экспериментальными данными, приведенными в [4]. Для перепадов давления  $\Delta P_0 = 6.9$  и  $13.1$  бар расчетное время тушения составило  $3.3$  и  $2.2$  с, что согласуется с экспериментальными значениями  $3 \pm 0.3$  с и  $2.6 \pm 0.3$  с соответственно.

*Выводы.* Установлено, что текущая версия модели и кода FDS 6, удовлетворительно воспроизводит результаты натурных испытаний подавления крупномасштабного турбулентного пламени струей распыленной воды. Расчетные значения времени подавления пламени согласуются с экспериментальными данными. Выявлены требования к расчетным сеткам и количеству вычислительных частиц в газокапельной струе.

#### ЛИТЕРАТУРА:

1. Цой А.С., Снегирев А.Ю. Моделирование струи тонкораспыленной воды методом крупных вихрей: сравнительный анализ двух моделей и расчетных кодов // Теплофизика и аэромеханика, 2015, Т. 22, №5, С. 633-645.
2. Fire Dynamics Simulator Technical Reference Guide. NIST Special Publication 1018-1, Sixth Edition, 2014.
3. Tsoi A., Snegirev A., Tanklevskiy L., Sheinman I. Flame Suppression by Water Sprays: Exploring Capabilities and Failures of FDS / Proc. Seventh Int. Seminar on Fire and Explosion Hazards ISFEH7 (5-10 May 2013, Providence RI, USA), Research Publ., 2013, P. 482-491.
4. Blanchat T.K., Nichols R.T., Figueroa V.G. Benchmark Enclosure Fire suppression. Experiments – Phase 1 Test Report / Sandia Report SAND 2007-3220, 2007, 59 p.

СОВМЕСТНОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ТУРБУЛЕНТНОГО ГОРЕНИЯ  
И ИСПАРЕНИЯ ЖИДКИХ ТОПЛИВ

*Введение.* При аварийном истечении жидких топлив и воспламенении паровоздушной смеси возникает турбулентное диффузионное пламя над поверхностью разлива. Количественное прогнозирование скорости выгорания топлива и мощности тепловыделения в пламени представляет важную задачу моделирования динамики пожара. Для современных методов численного моделирования горения над поверхностью жидких топлив характерно раздельное моделирование процессов в газовой фазе и в жидкости, в рамках которого для расчета газофазного пламени используется заранее заданная скорость испарения горючего [1, 2]. Данный подход требует привлечения эмпирических данных для скорости выгорания топлива и не учитывает ее возможное изменение (например, под действием бокового ветра [3]). Совместное моделирование горения в газовой фазе и испарения жидкого топлива представляет более сложную задачу, для решения которой необходимо учесть зависимость скорости испарения жидкости от теплового потока из газофазного пламени (тепловая обратная связь). Целью данной работы является апробация текущей версии модели и расчетного кода FDS [4] и оценка точности расчета скорости выгорания жидких топлив в рамках совместного моделирования с учетом указанной тепловой обратной связи.

*Описание модели и постановка задачи.* Модель и расчетный код FDS (Fire Dynamics Simulator) [4] представляет собой полевую гидродинамическую модель тепломассопереноса при горении. FDS численно решает уравнения Навье-Стокса в приближении малых чисел Маха. Турбулентное течение моделируется методом крупных вихрей, который воспроизводит наиболее крупные вихревые структуры при условии достаточного сеточного разрешения. Для описания горения в газовой фазе используется одностадийная необратимая реакция окисления горючего с образованием заданных количеств сажи и монооксида углерода. В приближении большой скорости реакции скорость выгорания реагентов определяется скоростью их подсеточного смешения. Уравнение переноса энергии излучения учитывает эмиссию, перенос и поглощение теплового излучения и решается численно методом контрольных объемов. Эффективный коэффициент поглощения смеси, вычисляется в зависимости от температуры и концентраций (приближение серой среды).

Скорость испарения жидкого топлива определяется равенством

$$\dot{m}'' = \text{Sh} \frac{\mathcal{D}_{\text{vap}} \rho_g}{L} \ln \left( 1 + \frac{X_{\text{vap},s} - X_{\text{vap},g}}{1 - X_{\text{vap},s}} \right) \quad (1)$$

где  $\text{Sh} = 0.037 \text{Re}^{4/5} \text{Sc}^{1/3}$ ,  $\text{Sc} = 0.6$ ,  $\text{Re} = VL/v_g$ ,  $X_{\text{vap},s} = \exp\left(-(\Delta h_{\text{vap}} M_{\text{vap}} / \mathcal{R})(1/T_s - 1/T_{\text{boil}})\right)$  – мольная доля насыщенного пара на поверхности,  $\rho_g$  и  $X_{\text{vap},g}$  – плотность смеси и мольная доля пара в центре приповерхностной ячейки сетки,  $\mathcal{D}_{\text{vap}}$  – коэффициент диффузии пара,  $L$  – масштаб длины, принятый равным 1 м [4]. Таким образом, массовый поток пара определяется температурой поверхности жидкости. В свою очередь, температура поверхности определяется с учетом баланса тепловых потоков из газовой фазы и в приповерхностном слое жидкости, который считается неподвижным и термически толстым. Следует отметить, что данный подход неприменим, если температура поверхности приближается к температуре кипения жидкости.

В данной работе выполнены расчеты установившегося горения в неподвижной атмосфере над поверхностью двух жидких топлив (гептан и этанол). Очаги имеют форму квадрата и расположены в центре нижней границы расчетной области. Поверхность очагов расположена на одном уровне с нижней поверхностью. Нижняя поверхность непроницаема и поддерживается при постоянной температуре 25°C, равной начальной. Остальные границы расчетной области являются открытыми.

Размеры расчетной области выбраны с учетом высоты пламени и составляют 1×1×1, 1.6×1.6×1.6, 2.5×2.5×2.5 и 3.6×3.6×3.6 м для очагов со стороной  $D = 0.1, 0.3, 0.5$  и 1 м. Во всех случаях используется равномерная сетка 80×80×80 (512 тыс. ячеек). В случае  $D = 0.1$  был выполнен расчет с удвоенным числом ячеек по каждому направлению (4096 тыс. ячеек), что привело к незначительному уменьшению расчетной скорости выгорания (на 12%) при сильном увеличении длительности расчета.

В расчетах использована версия FDS 6.1.1.

*Результаты расчетов.* В работе выполнены расчеты установившегося горения над поверхностью жидких топлив (гептан и этанол) с существенно разным выходом сажи. Примеры расчетов для горения гептана представлены на рис. 1 и 2. На рис. 1 показана расчетная форма пламени над очагом 1×1 м. Расчетные значения удельной мощности тепловыделения  $Q'' = m''\Delta h_c$  при установившемся горении ( $\Delta h_c$  – теплота сгорания пара) для размеров очага от 0.1 до 1 м приведены на рис. 2. Расчеты показали, что при малых размерах очага расчетная скорость выгорания намного превышает измеренные значения. При увеличении размера очага указанное рассогласование уменьшается.

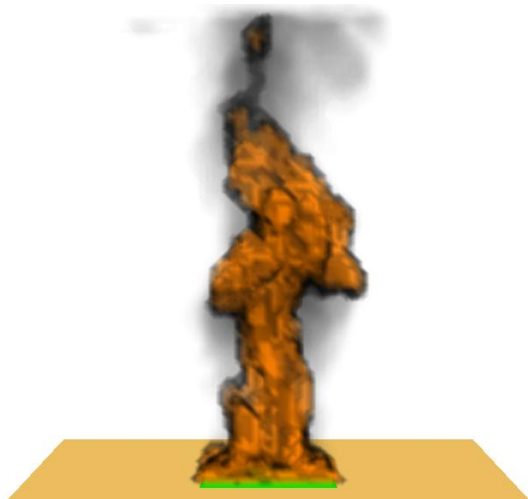


Рис. 1. Изоповерхность мощности тепловыделения 200 кВт/м<sup>3</sup> в пламени над поверхностью жидкого гептана. Размер очага 1×1 м

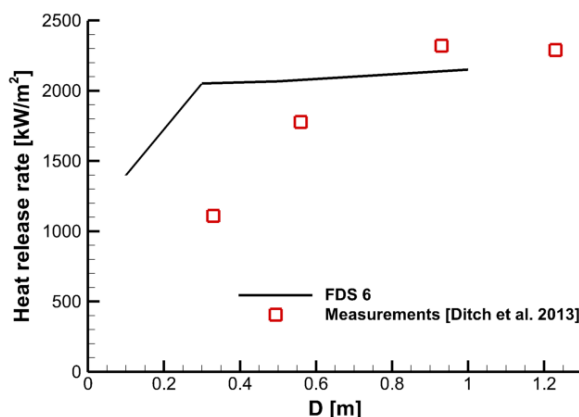


Рис. 2. Зависимость удельной мощности тепловыделения при установившемся горении жидкого гептана. Линия – расчет с помощью FDS 6.1.1, символы – измерения по данным [5]

*Заключение.* В данной работе показано, что численное моделирование самоподдерживающегося горения над поверхностью жидкого топлива с помощью FDS 6.1.1 позволяет получить качественное согласие с экспериментальными зависимостями скорости выгорания от размера очага. В то же время, выявлены значительные количественные различия между расчетными и измеренными значениями, особенно для малых размеров очага. Возможные причины рассогласования связаны с погрешностями, которые вносятся в расчете лучистого теплопереноса, конвективного теплового потока на поверхности горячего, а также при вычислении скорости выгорания.



#### ЛИТЕРАТУРА:

1. Babrauskas V. Heat Release Rates // SFPE Handbook of Fire Protection Engineering. 3rd ed. Quincy MA: NFPA, 2002, pp. 3-1-3-37.
2. Снегирев А.Ю., Талалов В.А. Теоретические основы пожаро- и взрывобезопасности. Горение перемешанных реагентов. Учебное пособие. Санкт-Петербург, Изд-во Политехн. ун-та, 2008, 212 с.
3. Snegirev A.Yu. Statistical Modelling of Thermal Radiation Transfer in Buoyant Turbulent Diffusion Flames // Combustion and Flame. 2004. Vol. 136, No. 1-2, pp. 51-71
4. McGrattan K., Hostikka S., McDermott R., Floyd J., Weinschenk C., Overholt K. Fire Dynamic Simulator Technical Reference Guide.
5. Ditch B.D., de Ris J.L., Blanchat T.K. Pool fires – An empirical correlation // Combustion and Flame. 2013. Vol. 160, pp. 2964-2974.

УДК 662.611

Е.С. Коковина, А.С. Цой, А.Ю. Снегирев  
Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого

#### АПРОБАЦИЯ ANSYS FLUENT ДЛЯ МОДЕЛИРОВАНИЯ ПОЖАРА

*Введение.* Для численного моделирования пожаров применяются три типа программного обеспечения: модели и коды собственной разработки, открытые и коммерческие пакеты [1]. Коммерческие пакеты общего назначения, такие как ANSYS и CD-Adapco, активно используются, в первую очередь, в крупных промышленных компаниях. Преимуществом коммерческих кодов является наличие широкого спектра современных моделей для рассматриваемых процессов, эффективные численные методы, возможности описания сложной геометрии, совместимость с системами автоматического проектирования, возможность проведения параллельных вычислений с использованием большого числа ядер. Модели и коды собственной разработки, как правило, используются в исследовательских целях. Программное обеспечение с открытым кодом, находящееся в открытом доступе, является либо специализированным, т.е. специально разработанным для решения задач моделирования пожаров (FDS [2]), либо адаптированным для моделирования пожара универсальным пакетом (FireFOAM [3]). Среди достоинств такого подхода следует отметить возможность внесения изменений непосредственно в код программы.

Будучи ориентированными на моделирование пожара, открытое ПО (в первую очередь, FDS) получило широкое распространение в мировой инженерной практике и проходит непрерывную апробацию для сценариев, в которых имеются экспериментальные данные. В результате оказывается, что среди опубликованных материалов по моделированию пожаров доминируют работы с использованием FDS. Напротив, опубликованный опыт применения универсальных коммерческих кодов, в частности ANSYS Fluent, для моделирования пожара крайне ограничен. Это обусловлено как практикой конфиденциальности коммерческих компаний, использующих «большие» коммерческие коды, так и спецификой пожара как физико-химического явления.

В самом деле, промышленное применение универсальных коммерческих кодов часто нацелено на моделирование горения в двигателях, турбинах и топках. Горение при пожаре существенно отличается от указанных приложений. Во-первых, движение потока обусловлено действием сил плавучести, которые в значительной степени определяют структуру и динамику потока, а также механизм генерации турбулентности. Во-вторых, горение протекает в широком диапазоне соотношений горючего и окислителя, включая как значительный недостаток, так и избыток любого из компонентов. В-третьих, горение

является неполным и сопровождается образованием большого количества сажи, которая вносит значительный вклад в тепловое излучение пламени. В-четвертых, интенсивность горения определяется наличием положительной обратной связи между тепловыделением в пламени и пиролизом конденсированных горючих. Адекватное моделирование указанной обратной связи предъявляет значительные требования к точности расчета не только конвективного, но и лучистого теплопереноса. В результате оказывается, что модель, апробированная на задачах горения в двигателях, турбинах и топках, требует дополнительной апробации для условий пожара.

Цель данной работы – апробация коммерческого ПО ANSYS Fluent на задачах турбулентного диффузионного горения в условиях, характерных для пожаров в открытом пространстве и в помещениях. Апробация выполняется путем сравнения результатов расчетов с опубликованными экспериментальными данными, а также с результатами, полученными с использованием текущей версии FDS 6.3.

*Методы и результаты.* Отметим, что принципы построения численных моделей гидродинамики являются общими для обоих используемых кодов. Для расчета трехмерных турбулентных течений, возникающих при горении и распространении дыма, численно решается система уравнений Навье-Стокса в существенно дозвуковом приближении. Для моделирования турбулентности применяется метод крупных вихрей с использованием соответствующих подсеточных моделей. Скорости расходования реагентов и локальная мощность тепловыделения в турбулентном пламени определяются с помощью подсеточной модели диссипации вихрей. Рассматривается одностадийная необратимая реакция окисления горючего газа. Эмиссия, перенос и поглощение теплового излучения моделируется уравнением переноса энергии излучения.

В то же время, реализация указанных принципов в ANSYS Fluent и FDS имеет существенные отличия. В частности, используются разные: модели образования и окисления сажи; методы расчета спектральных свойств продуктов сгорания и решения уравнения переноса излучения; методы дискретизации уравнений и их численного решения.

В данной работе проведено две серии расчетов:

- 1) Пламя в открытом пространстве над круглой (квадратной) горелкой с заданным расходом газообразного горючего. Расчетные параметры, используемые для сравнения с экспериментами, включают: высоту пламени, средние и пульсационные значения температуры, скорости и концентрации, лучистый тепловой поток. Кроме того, анализируются нестационарные эффекты (частота пульсаций пламени, спектр флуктуаций скорости и температуры). Результаты численных расчетов сравниваются с экспериментальными данными, полученными в работах [4–6].
- 2) Горение в помещении с проемами в условиях как избыточной, так и ограниченной вентиляции. Сценарии отличаются формой и размером проемов, мощностью очага, способом подвода окислителя (естественная или вынужденная конвекция). С результатами экспериментов сравниваются: скорости и температуры газа, расходы газа через проемы, температура в припотолочном слое, стратификация продуктов сгорания. Результаты численных расчетов сравниваются с экспериментальными данными, полученными в работах [7–8].

Примеры результатов расчетов для указанных серий расчетов приведены на рис. 1. Установлено, что разные модели образования сажи в текущих версиях ANSYS Fluent приводят к существенно отличающимся результатам расчетов. При этом наблюдается тенденция к занижению расчетных значений лучистого теплового потока из турбулентного пламени.

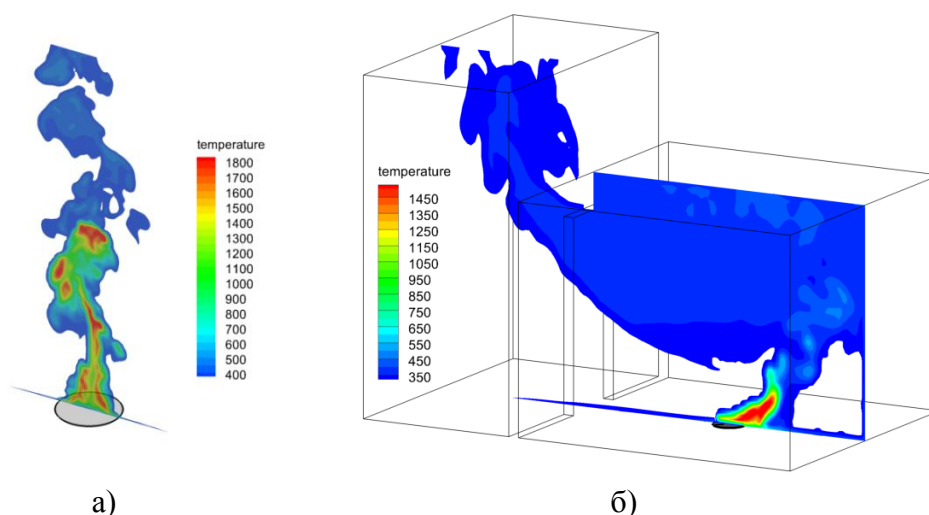


Рис. 1. Мгновенные разрешенные поля температуры (К), полученные с использованием пакета ANSYS Fluent 14.5 для турбулентного горения в открытой неподвижной атмосфере (а) и в помещении (б). Пламя метана над круглой горелкой диаметром 0.3 м: а) – тепловая мощность 15.8 кВт, условия эксперимента [4]; б) – тепловая мощность 62.9 кВт, условия эксперимента [7]

#### ЛИТЕРАТУРА:

1. International survey of fire models for fire and smoke <http://www.firemodelsurvey.com/FieldModels.html>
2. Fire Dynamics Simulator Technical Reference Guide. NIST Special Publication 1018-1, Sixth Edition, 2015.
3. The 7th FM Global Open Source CFD Fire Modeling Workshop, Norwood MA, May 6-7, 2015, <https://sites.google.com/site/firemodelingworkshop/home>
4. E. Gengembre, P. Cambray, D. Karmed, J. C. Bellet. Turbulent Diffusion Flames with Large Buoyancy Effects, *Combust. Sci. Technol.* 41 (1984) pp. 55-67.
5. J. M. Souil, P. Joulain, E. Gengembre, Experimental and Theoretical Study of Thermal Radiation from Turbulent Diffusion Flames to Vertical Target Surfaces, *Combust. Sci. Technol.* 41 (1984), pp. 69-81.
6. W.C.-K. Wong, N.A. Dembsey, J. Alston, C. Lautenberger. A multi-component dataset framework for validation of CFD flame spread models, *J. Fire Prot. Eng.* 23 (2013), pp. 85-134.
7. K. D. Steckler, J. G. Quintiere, W. J. Rinkinen, Flow induced by fire in a compartment, Report NBSIR 82-2520, National Bureau of Standards, 1982, 93 p.
8. K. L. Foote, 1986 LLNL Enclosure Fire tests Data Report, Livermore, CA: Lawrence Livermore National Laboratory, 1987, 40 p.

УДК 621.039:608.3

С.С. Макухин, Е.Д. Федорович  
Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого

#### РАЗРАБОТКА ПРИНЦИПИАЛЬНОЙ ТЕХНОЛОГИЧЕСКОЙ СХЕМЫ МНОГОЦЕЛЕВОЙ УСТАНОВКИ НА БАЗЕ АТОМНОГО РЕАКТОРА

В новом тысячелетии человечество стоит перед многими проблемами, из которых к наиболее серьезным относится нехватка пресной воды. В настоящее время до 60% площади материков планеты испытывает дефицит пригодной для питья и сельскохозяйственных нужд воды [1]. Население планеты постоянно растет (по оценкам ООН, к 2030 году оно увеличится с 6 до 8.5 млрд человек [2]), объем потребления и использование пресной воды также стремительно растет. На земном шаре общие запасы воды достигают 1,5 млн км<sup>3</sup>.

Около 2% этого объема составляет пресная вода, а количество доступной для использования воды не превышает 0,003% [2].

Возможным вариантом решения проблемы дефицита пресной воды может стать использование атомных энерготехнологических установок опреснения (далее АЭТУО) многоцелевого назначения, направленных как на производство пресной воды, так и выработку электрической и тепловой энергии. Предложенный к использованию в них дистилляционный метод опреснения морской воды является наиболее эффективным из всех возможных на сегодняшний день, так как технологическая схема данного метода основывается на использовании атомного энергоисточника [3]. Он достаточно прост в реализации и способен решить главную задачу – обработку большого количества морской воды («крупнотоннажное производство»), так как мощность атомного источника может быть обеспечена практически на любом заданном уровне.

Цель настоящего исследования заключается в разработке принципиальной технологической схемы АЭТУО. Для опреснения морской воды в АЭТУО предусматривается использование технологии дистилляционного метода, при этом предлагается комплексный подход к решению задач электроснабжения, теплоснабжения и опреснения. В пользу осуществимости проекта говорит успешный опыт эксплуатации опреснительной части атомной энергетической установки с реактором на быстрых нейтронах БН-350 в г. Шевченко (ныне г. Актау в республике Казахстан) [3].

Общий принцип разработанной схемы состоит в наличии в ней двух основных частей – энергетической и опреснительной (рис. 1). Энергетическим «сердцем» установки является ядерный реактор кипящего корпусного типа ориентировочной электрической мощностью 300 МВт. Мощность реактора на стадии проектирования может выбираться и другой – в зависимости от потребностей заказчиков и других технико-экономических факторов. Данная мощность производится электрогенератором (15), приводимым во вращение турбиной с противодавлением (11). Необходимая тепловая мощность реактора должна быть рассчитана, исходя из КПД турбины. Давление пара противодействия выбирается исходя из потребностей опреснительной установки. Часть пара из реактора (он называется «острым» паром [4]) сначала поступает в сепаратор высокого давления (2), который служит для подпитки реактора отделяемой от пара водой и организации в реакторе и вне его контура естественной циркуляции. Данная циркуляция организуется под действием движущего напора, создающегося «всплываемой» в активной зоне (1а) и в подъемной шахте (1б) легкой средой. Бак-аккумулятор воды для реактора (3) в целях безопасности должен обеспечивать достаточный запас воды для охлаждения реактора. Расход воды в контуре сепаратора (2), т.е. производительность сепаратора, определяется необходимой (безопасной) величиной расхода пароводяной смеси в активной зоне. Этот расход много меньше расхода пара, подаваемого через клапан дальнейшего разветвления (4.1) на турбину (11) через стопорный клапан (4.2) и на сепаратор низкого давления (5). Величина низкого давления в сепараторе (5), который нужен для обеспечения работы деаэрата (6), должна быть определена гидравлическим расчетом. Деаэрат (6) должен удалять воздух путем сброса давления и промывки пара водой в головке деаэрата. Деаэрированная вода насосом (4) при необходимом давлении (несколько большем, чем в реакторе) подается в реактор, предварительно смешиваясь с конденсатом опреснительной установки (ОУ), подаваемым конденсационным насосом 4.3.

Схема опреснительной части состоит в следующем. Греющий пар из турбины поступает по линии (11а) на обогрев аппаратов мгновенного вскипания ОУ (14) и, отдав там часть своего теплосодержания, направляется по линии (14.1) в конденсатор подогрева морской воды (17), где конденсируется. Морская вода подается на подогрев в конденсатор (17) насосом (19) по линии (18.1), предварительно пройдя через деаэрат (12). При этом часть расхода морской воды может направляться на деаэрирование напрямую по линии

(18.2), откуда по линии (12.1) она поступает в аппараты опреснения (в данном случае используются аппараты мгновенного вскипания). Клапаны (18) служат для распределения расходов в системе подогрева и деаэрации. Таким образом, исходная вода поступает в аппараты мгновенного вскипания как в подогретом виде (по линии 17.2), так и в деаэрированном виде (по линии (12.1) под напором насоса (19.2)). Насос (19) обеспечивает подачу воды и на подогрев, и на деаэрацию. Насос (20.1) служит для отвода рассола из опреснительных аппаратов, а насос (20.2) используется для отвода дистиллята (продукт опреснения) потребителю.

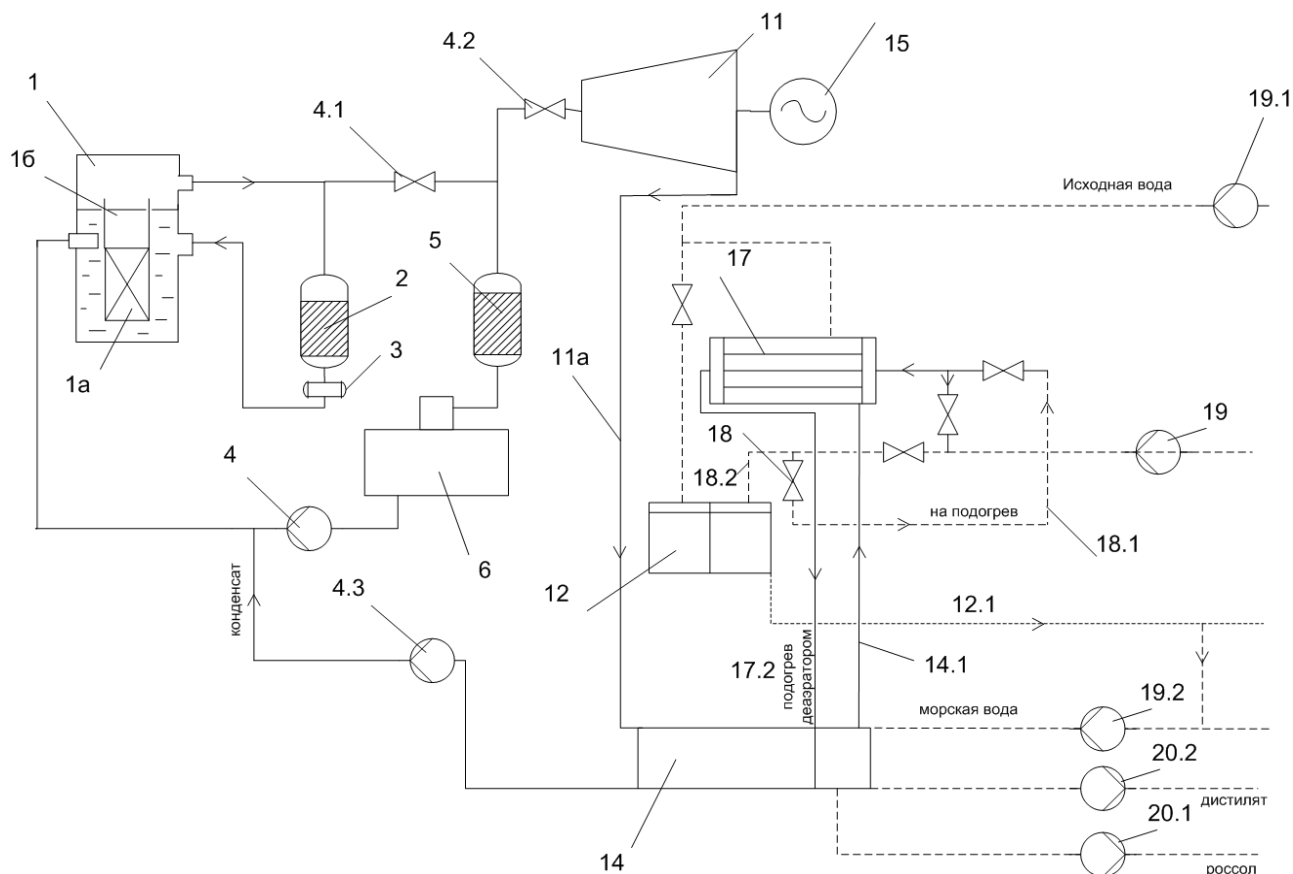


Рис. 1. Принципиальная технологическая схема многоцелевой атомной установки

В ходе проведенного анализа принципиальной технологической схемы АЭТУО выявлена необходимость проведения расчетных исследований, оптимизационных технико-экономических расчетов и определения профиля оборудования установки, а также выявлена необходимость экспериментальных исследований и испытаний оборудования установки (теплообменников, сепараторов, испарителей и т.д.). Результаты расчетных исследований дадут возможность приступить к разработкам технических заданий по проектированию узлов установки. Экспериментальные исследования окажутся необходимыми, так как, несмотря на то, что в мировой технике все предполагаемые процессы (ядерный нагрев и кипение реакторного теплоносителя, конденсация и т.д.) уже используются, их сочетание в предлагаемой схеме является новым.

#### ЛИТЕРАТУРА:

1. Танганов Б.Б. Морская вода и проблема ее опреснения // Современные наукоемкие технологии. 2010. № 7. С. 90-92.

2. Данилов-Данильян В. И. Глобальная проблема дефицита пресной воды // Век глобализации. 2008. № 1. С. 45—56
3. Слесаренко В.Н. Дистилляционные опреснительные установки. – М.: Энергия,1980. – 248 с., ил.
4. Мосин О.В. Физико-химические основы опреснения морской воды // Сознание и физическая реальность, 2012, № 1, С. 19-30.

МЕТОДОЛОГИЯ АВТОМАТИЧЕСКОЙ РАССТАНОВКИ ФИКСИРУЮЩИХ  
 ЭЛЕМЕНТОВ ДЛЯ СОЕДИНЕНИЯ ЧАСТЕЙ КРЫЛА

*Введение.* Сборка крыла самолета на производстве представляет собой очень трудозатратный и дорогостоящий процесс, одной из главных частей которого является прикрепление внешней панели крыла (рис.1 Skin panel) к его каркасу (рис.1 Ribs и Spars). В данной работе представлена методика автоматического определения расположения фиксирующих элементов. Ключевым звеном этой методики является моделирования случайных зазоров между скрепляемыми деталями, а также их анализ с применением методов теории вероятностей и математической статистики.

Необходимость использования вероятностного подхода при автоматической расстановке фиксирующих элементов возникает в связи с особенностями производственного процесса. Действительно, при промышленном производстве самолетов, для ускорения работы, в процессе сборки крыла необходимо применять одну общую инструкцию (шаблон) по установке фиксирующих элементов ко всем крыльям. Эта общая инструкция не может учитывать индивидуальные особенности каждой детали, но должна скреплять их как можно лучше. Понятно, что скрепляемые детали обладают рядом вариаций по отношению друг к другу в связи с наличием разнообразных неконтролируемых факторов при их изготовлении, позиционировании и т.д. В такой ситуации вероятностный подход является наиболее естественным и уже зарекомендовавшим себя во многих других прикладных задачах.

*Цель работы* — разработать метод автоматической расстановки фиксирующих элементов для прикрепления внешней панели крыла к его каркасу, основанный на использовании методов теории вероятностей и математической статистики, а также разработать метод контроля качества этого скрепления. В качестве параметра качества скрепления здесь рассматривается вероятность  $P$  того, что максимальная величина получившегося после постановки фиксирующих элементов зазора меньше заданного значения  $A$ . Чем больше вероятность  $P$ , тем больше случайных зазоров для произвольного набора крыльев полученная автоматическая расстановка сведет до величины  $A$ . В данной работе необходимо чтобы вероятность  $P$  достигла 0.99.

Предложенная процедура расстановки фиксирующих элементов состоит из следующих этапов:

Этап 1. Величина начального зазора между деталями считается случайным полем. Генерируется набор реализаций этого случайного поля – набор величин начальных зазоров. Для каждого соответствующего зазора из этого набора решается контактная задача соединения двух деталей. В качестве решения каждой такой задачи получаются величины зазора после контакта. Этот набор величин зазоров мы будем называть *текущим*.

Этап 2. Статистически обрабатывается полученный набор реализаций текущего зазора

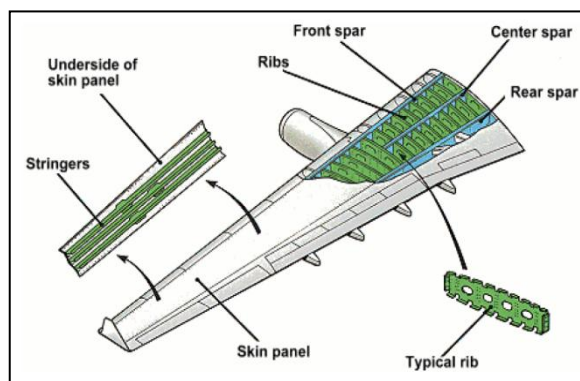


Рис. 1. Схема строения крыла

– для каждой реализации зазора находится положение и величина глобального максимума. По этим статистическим данным оценивается функция плотности вероятности для положения глобального максимума зазора и функция плотности вероятности для величины максимального зазора. Используя последнюю, находится вероятность  $P$  того, что максимальная величина зазора меньше определенного заданного значения  $M$ . Если вероятность имеет удовлетворительную величину (больше 0.99), тогда процедура останавливается. Если необходимое значение вероятности еще не достигнуто, тогда, используя функцию плотности вероятности для положения глобального максимума зазора, находится наиболее вероятное положение глобального максимума и в эту точку устанавливается фиксирующий элемент.

Этап 3. Для всего набора реализаций текущего зазора решается контактная задача с учетом всех новых установленных фиксирующих элементов. Набор решений этой задачи принимается как новый набор текущих зазоров, после чего повторяется “Этап 2”.

Описанная процедура заканчивает свою работу тогда, когда вероятность  $P$  того, что максимальная величина зазора меньше определенного заданного значения  $M$ , больше 0.99. Это означает, что заданная цель достигнута, расстановка фиксирующих элементов получена. Результатом работы алгоритма является список позиций, в которых установлены фиксирующие элементы.

Существенная часть описанной методики опирается на моделировании начального зазора между внешней панелью крыла и его каркаса как случайного поля  $Gap(x, y)$ . Параметры этого случайного поля подбираются в соответствии с исходными данными – зазорами, измеренными для реальных крыльев. Однако проведение подобных измерений на реальных крыльях является трудоемким и дорогостоящим процессом, зачастую приходится действовать при ограниченных объемах данных, поэтому в данной работе при моделировании случайного поля необходимо сделать несколько предположений о его характере. В качестве предположений используется то, что моделирующее случайное поле  $Gap(x, y)$  однородно и изотропно (то есть его свойства не изменяются от точки к точке и одинаковы во всех направлениях), гауссово, имеет нулевое математическое ожидание и спектральную плотность определенного вида (для того, чтобы поле было гладким). Эти предположения наиболее часто используются при моделировании таких поверхностей [1] и часто согласуются с физической реальностью.

В данной работе предлагается задавать случайное поле  $Gap(x, y)$  при помощи двух параметров:

1. Параметр  $\alpha$  характеризует изогнутость поверхности (радиус корреляции). Случайное поле  $Gap(x, y)$  имеет спектральную плотность  $S(\omega) = \frac{1}{2\pi\alpha^2} \exp\{-\frac{|\omega|^2}{2\alpha^2}\}$ , которая убывает с увеличением  $\alpha$ . Такая спектральная плотность позволяет контролировать вклад высокочастотных гармоник в спектральном разложении  $Gap(x, y)$  за счет выбора  $\alpha$ .

2. Параметр  $G$  (99-перцентиль максимального зазора) характеризует максимальную величину зазора для реализаций поля  $Gap(x, y)$ , т.е. величина зазора с вероятностью 0.99 меньше  $G$ .

Для получения реализаций случайного поля  $Gap(x, y)$  использовался метод параметрического моделирования случайных полей [2]. Решение контактной задачи опирается на [3]. Для получения функций плотности вероятности применяются ядерные оценки [4, 5]. Примеры сгенерированных реализаций при разных значениях  $\alpha$  приведены на рис. 2.



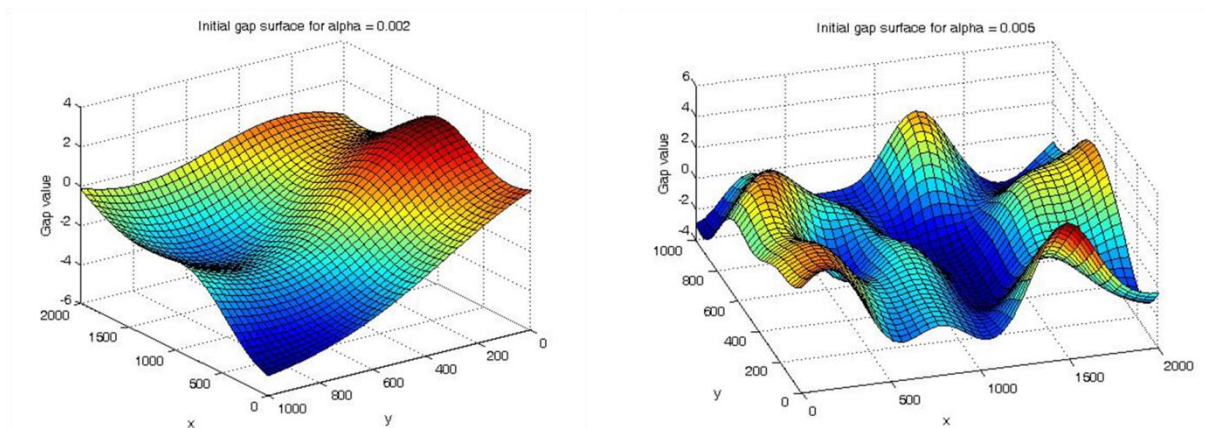


Рис. 2. Реализации случайного поля  $Gap(x, y)$  при разных значениях  $\alpha$

Данная методология применялась для получения положений заклепок для крыла самолета. На рис. 3, слева, изображен начальный зазор, полученный как одна реализация случайного поля  $Gap(x, y)$ . На рис.3, справа, зазор, получившийся из начального после автоматической расстановки фиксирующих элементов и решения контактной задачи.

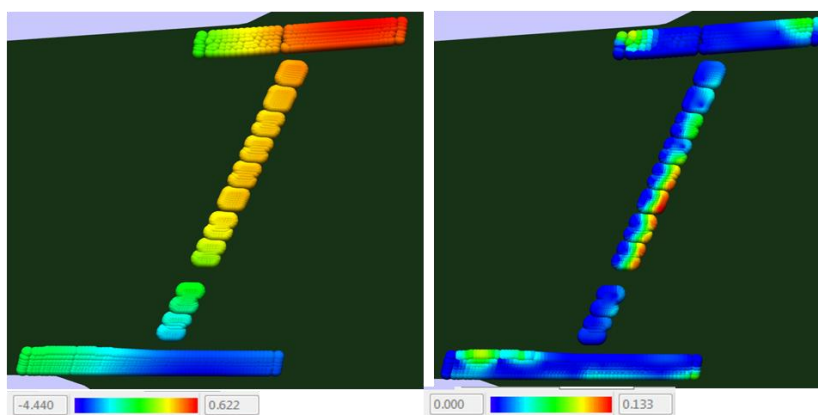


Рис. 3. Пример применения метода на крыле самолета

*Результаты.* Полученная методология позволяет получать автоматические расстановки фиксирующих элементов, а так же оценивать вероятности сведения зазора для всевозможных генерированных начальных зазоров без реальных замеров. Полученный универсальный подход позволяет в будущем корректно поставить задачу оптимизации числа фиксирующих элементов.

#### ЛИТЕРАТУРА:

1. Хусу А.П., Витенберг Ю.Р., Пальмов В.А. Шероховатость поверхностей (теоретико-вероятностный подход). М.: Наука, 1975. 344 с.
2. Шалыгин А.С., Палагин Ю.И. Прикладные методы статистического моделирования. Л.: Машиностроение, 1986. 320 с.
3. Petukhova M., Lupuleac S., Shinder Y., Smirnov A., Yakunin S., Bretagnol B. Numerical approach for airframe assembly simulation // Journal of Mathematics in Industry, 2014, vol. 4, num. 8
4. Rosenblatt M. Remarks on some nonparametric estimates of a density function // Annals of mathematical statistics, 1956, vol. 27, no. 3, pp. 832-837.
5. Епанечников В.А. Непараметрическая оценка многомерной плотности вероятности // Теория вероятностей и ее применения. 1969. №1(14). С. 156-161.

АЛГОРИТМ ПОСТРОЕНИЯ ОЦЕНКИ РАЗМЕРНОСТИ АТТРАКТОРОВ  
ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ

Получение интегральных характеристик различных медико-биологических систем есть объективная необходимость. На пути от категориальных оценок к количественным исследователи переходят к построению математических моделей, более сложных по своей структуре, более содержательных и легко интерпретируемых специалистами предметной области. Подобным образом обстоят дела и с изучением системы кровообращения человека методами доплероскопии. В тех случаях, когда обследуются пациенты с серьезными патологиями, опытные специалисты способны уже по мере регистрации спектрограмм, по их виду, поставить предварительный диагноз. Но более тонкое исследование требует и более тонких моделей, а значит и математических моделей исследуемых систем. В настоящее время одной из востребованных методик анализа сигналов, регистрируемых в ходе медико-биологических систем, является построение оценки корреляционной размерности аттракторов этих систем в их фазовом пространстве [1]. Таким образом математики, физиологи и кардиологи уже довольно давно изучают ЭКГ человека. Ультразвуковые методы исследования скорости кровотока – сравнительно новое направление, сформировавшееся в последние 20-30 лет. Построение интерпретируемых математических моделей для описания регистрируемых доплерограмм – особенно актуально, когда речь идет об изучении внутримозгового кровообращения. В течение последних двух лет авторами настоящей статьи было разработано программное и математическое обеспечение (ПО), позволяющее проводить подобные исследования на качественно новом уровне [2]. Ряд результатов, полученных нами за последние полгода, будут представлены в настоящей работе.

## ОСОБЕННОСТИ ИССЛЕДУЕМЫХ ПРОЦЕССОВ

Прежде всего следует заметить, что мы предлагаем рассматривать эти процессы как композицию случайных и детерминированных составляющих. Разделение слагаемых, если рассуждать об этой композиции как об аддитивной модели сигнала, – это самостоятельная задача. Изучаемый процесс имеет квазипериодический характер, причем периодическая составляющая по всей видимости имеет детерминированный характер, а случайные составляющие мы можем отнести к классу нестационарных и/или квазистационарных с.п. [2]. Устранив из сигнала детерминированную линейную составляющую, природа которой нам неизвестна [2], воспользуемся методами спектрального представления сигналов. Большую часть гармоник в спектрах скорректированных таким образом сигналов мы интерпретируем как белый шум. Фильтрация этих гармоник осуществляется нашим ПО с помощью решающего правила, в основу которого положена проверка нулевой гипотезы о равномерном распределении фиксированного подмножества оценки плотности спектральной мощности сигнала. Причем такая оценка должна быть последовательно построена на некоторых ограниченных частях сигнала. Другими словами, задавшись размером окна,  $N$ , и множеством смещений по отношению к началу выборочной функции (зарегистрированного сигнала), в пределах каждого такого окна далее должна быть построена оценка плотности спектральной мощности,  $\{S_i\}, i \in \{0, N\}$ . Мы получаем исходную выборку, из которой затем последовательно исключаем те ее элементы, которые вносят наибольший вклад в мощность сигнала, и проверяем нулевую гипотезу о согласии оставшейся части выборки с равномерным распределением.

Подмножество  $\{S_j\} \subset \{S_i\}, 0 < j < [N/2]$ ,  $[\bullet]$  - целая часть, для которого нулевая гипотеза не отвергается, есть та часть оценки плотности спектральной мощности сигнала, которую мы трактуем как белый шум.

Объектом исследований на следующем этапе становятся элементы множества

$\{S_k^{\max}\} \subset \{S_j\}, 0 < k < [N/2]$ ,  $[\bullet]$  - целая часть. Его составляют оценки плотности спектральной мощности тех гармоник, которые вносят наибольший вклад в мощность сигнала (то есть те гармоники, которые мы последовательно исключали для фильтрации белого шума). Однако изучению подлежат не все элементы  $\{S_i^{\max}\}$ , а только некоторое их собственное подмножество.

Часть элементов подмножества  $\{S_i^{\max}\}$  включены в него по той простой причине, что БПФ дискретного сигнала на конечном интервале неизбежно приводит к эффекту растекания мощности. Численные оценки плотности спектральной мощности, доставляемые алгоритмом БПФ, существенно отличаются от теоретических оценок. Причина прежде всего кроется в этом эффекте растекания мощности. Поэтому из подмножества  $\{S_i^{\max}\}$  мы выбираем только гармоники с наибольшими значениями плотности спектральной мощности и одновременно исключаем из  $\{S_i^{\max}\}$  их ближайших соседей, попавших в  $\{S_i^{\max}\}$  за счет растекания мощности.

В данной работе исследование динамических характеристик сигналов, регистрируемых в доплерографическом исследовании, сводится нами к изучению корреляционной размерности,  $D_2$  плотности спектральной мощности подмножества гармоник в спектральном представлении сигнала. Наш интерес к оценке  $D_2$  объясняется тем, что эта характеристика активно обсуждается в работах, где методами теории динамических систем изучаются ЭКГ человека [1]. На сегодняшнем уровне знаний об этих процессах  $D_2$  – одна из наиболее востребованных интегральных характеристик.

Согласно теореме Такенса [3] по имеющейся реализации траектории процесса мы можем сконструировать ее аттрактор. Пусть  $S_i^{\max} = (s_1, s_2, \dots, s_T)$ , где  $s_1, s_2, \dots, s_T$  - скалярные величины (оценки плотности спектральной мощности) в моменты времени  $t_1, t_2, \dots, t_T$  соответственно. Построим вектора  $x_k$  в  $n$ -мерном фазовом пространстве с координатами  $(s_k, s_{k+\tau}, \dots, s_{k+(n-1)\tau})$ , где  $\tau$  – временная задержка,  $n$  – размерность вложений,  $1 \leq k \leq T - (n-1)\tau$ . Размерность вложений будем выбирать из  $\dim = \{1, \dots, 10\}$ . Выбор множества, из которого принимает значения параметр алгоритма  $\tau$ , – самостоятельная задача, решение которой неоднозначно. Один из практикуемых подходов – оценка первого корня автокорреляционной функции (момента первого пересечения ее графиком оси абсцисс)  $B(\tau)$ . Оценки  $\hat{\tau}$ , которые были получены таким образом, не позволяют получить результаты, адекватные размерам наших временных рядов. Причина расхождений теоретических положений и наших конкретных оценок кроется в том, что первые построены в предположении неограниченного объема анализируемого временного ряда (в.р.)  $S_i^{\max}$ . В наших исследованиях любой в.р.  $S_i^{\max}$  можно рассматривать как квазистационарный лишь на ограниченных участках. Второй подход к построению  $\hat{\tau}$  – это оценка первого локального минимума функции взаимной информации  $s(\tau)$  [4]. Она доставляет более реалистичное значение  $\hat{\tau}$ , которые мы можем рассматривать как супремум для множества, из которого  $\tau$  принимает свои значения.

Оценку корреляционной размерности  $D_2$  получаем на основе корреляционной суммы  $C(r) = \frac{1}{N^2} \sum_{i \neq j}^N \theta(r - \rho(x_i, x_j))$ , где  $\theta$  функция Хевисайда,  $\rho$  – расстояние между точками.

Вычисляется количество тех соседей каждой точки  $x_i$ , которые удалены от нее не более, чем на расстояние  $r$ . Заметим, что  $C(r)$  увеличивается с ростом  $r$ . Для одномерного аттрактора имеем  $C(r) \sim r$ , для двумерного –  $C(r) \sim r^2$  и т.д. Тогда оценка корреляционной размерности аттрактора может быть получена как  $D_2 = \log C(r) / \log r$ . Возникает еще одна важная задача построения множества, из которого принимает значение  $r$ . В нашем алгоритме построение такого множества выполняется для каждого в.р. в виде равномерной сетки значений  $r$ . Корреляционные суммы и корреляционные размерности,  $C(r)$  и  $D_2$ , вычисляются во всех узлах этой сетки для каждого  $n$ , принадлежащего множеству  $\text{dim}$ .

Затем строим график зависимости  $D_2$  от  $r$ , так называемый график Раппа.

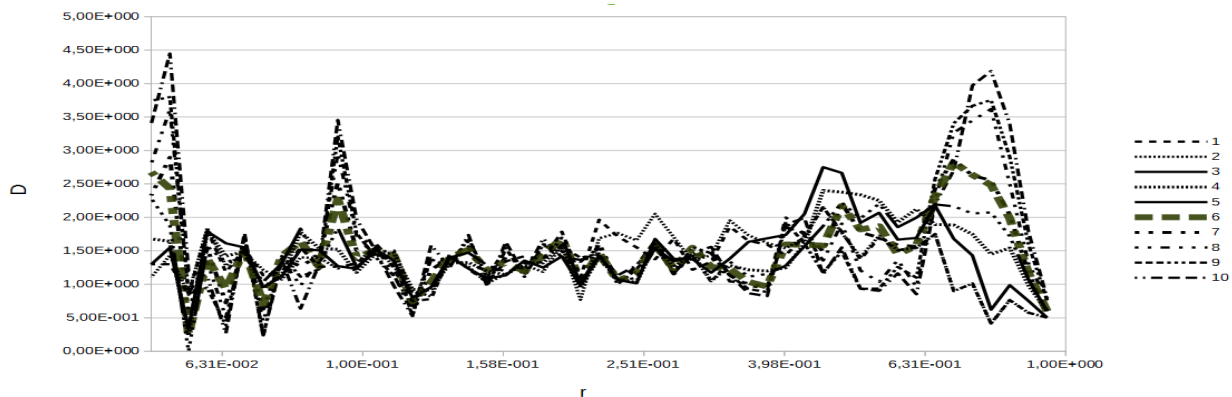


Рис 1. График оценок размерности аттрактора. Номер кривой – число вложений

На рис. 1 для различных  $n$  представлены полученные численные оценки размерности,  $D_2$ , как функции  $r$ . Для получения финальной оценки размерности аттрактора будем выявлять горизонтальное плато (некоторое окно от  $r_b$  до  $r_e$  включительно) на графике Раппа и усреднять значения  $D_2$  на этом промежутке [1]:

$$D(n, i_b, i_e) = \frac{\sum_{i_b}^{i_e} \ln \frac{C(m, r_k)}{C(m, r_{k-1})} \ln \sqrt{r_k r_{k-1}}}{\sum_{i_b}^{i_e} \ln \frac{r_k}{r_{k-1}}}, \sigma(n, i_b, i_e) = \sqrt{\frac{\sum_{i_b}^{i_e} \left[ \frac{\ln \frac{C(m, r_k)}{C(m, r_{k-1})} \ln \sqrt{r_k r_{k-1}} - D(n, i_b, i_e) \right]^2}{\sum_{i_b}^{i_e} \ln \frac{r_k}{r_{k-1}}}}$$

Искомый промежуток – участок, для которого отношение  $\frac{\sigma}{D}$  минимально. При тестировании ПО на модельных данных были получены следующие оценки  $D_2$ : аттрактор Икеда - 1.77, аттрактор Хеннона - 1.25. Оценки, полученные в ходе анализа реальных данных (основная гармоника с частотой 1.25 Гц), попадают в интервал от 1.25 до 1.98.

#### ЛИТЕРАТУРА:

1. Майоров О. Ю., Фенченко В. Н. Вычисление корреляционной размерности и энтропии ЭЭГ сигналов на кластерных вычислительных системах. // Клиническая информатика и Телемедицина. 2014. Т.10. Вып.11. с. 10-20.

- Mayorov O. Yu., Fenchenko V. N. Calculation of the correlation dimension and entropy of EEG signals in cluster computing systems. *Klin.inform.telemed*, 2014, vol. 10, iss. 11, pp. 10-20. (rus)
2. Ivankov, A.A. Samarin, A.D. On Stationarity of Transcranial Blood Flow Velocity Registered with Doppler Sonography Methods. *Humanities and Science University Journal*, 2015, 13, p.31-41.
3. Takens F. Detecting strange attractors in turbulence. // *Dynamical Systems and Turbulence*. Under edit. D.A. Rand and L.S. Young. Warwick 1980, Lecture Notes in Mathematics, vol. 898, Springer, Berlin, 1981, pp. 366-381.
4. Fraiser A.M., Swinney H.L. Independent Coordinates for Strange Attractors From Mutual Information. // *Physical Rev. A.*, 1986, pp. 1134 - 1140.

УДК 532.51:532.522

В.П. Первадчук, Д.Б. Владимирова, А.Л. Деревянкина  
Пермский национальный исследовательский политехнический университет

## ОБ УСТОЙЧИВОСТИ ПРОЦЕССОВ ИЗГОТОВЛЕНИЯ КВАРЦЕВЫХ ВОЛОКОН

*Введение.* При вытяжке кварцевых волокон небольшие изменения скорости подачи и вытяжки, колебания температуры нагревательного элемента и т.д. могут, в лучшем случае, привести к непостоянству характеристик световода по его длине, а в худшем - к разрушению вытягиваемой струи. Поэтому очень важно знать, как система отреагирует на эти воздействия. Иначе говоря, устойчив ли процесс.

*Целью* настоящей работы является исследование устойчивости вытяжки волокна и определение оптимального режима данного процесса на основе устойчивости. Процесс вытяжки кварцевых волокон описывается системами безразмерных дифференциальных уравнений в частных производных [1-4]:

Исследование устойчивости для данных систем проводилось следующим образом:

1. Система была линеаризована в окрестностях стационарного течения.
2. Решение системы линейных уравнений в частных производных искалось с помощью метода разделения переменных. То есть каждая искомая величина представлялась в виде

$$\tilde{\Psi}(x, \tau) = \psi(x) \cdot e^{-i\omega\tau} \quad (1)$$

Здесь  $\omega = \omega_2 + i\omega_i$ , где  $\omega_i$  - коэффициент нарастания. Если все  $\omega_i < 0$  - исследуемое состояние при заданном возмущении устойчиво, в противном случае при  $\omega_i > 0$  - неустойчиво [1].

3. Для решения получившейся системы применялся конечно-разностный метод. В результате была получена система линейных алгебраических уравнений.

4. По полученной системе была составлена матрица  $A$  коэффициентов при соответствующих переменных.  $\omega$ -собственные числа данной матрицы.

Отметим, что в расчетах отслеживалось максимальное значение мнимой части  $\omega_i^{(1)}$ .

На первом этапе был рассмотрен изотермический процесс вытяжки сплошного цилиндра, который описывается следующей системой нелинейных уравнений в частных производных:

$$\begin{cases} \frac{\partial R}{\partial t} + V \frac{\partial R}{\partial x} + \frac{R}{2} \cdot \frac{\partial V}{\partial x} = 0, \\ R^2 \left( \frac{\partial V}{\partial t} + V \frac{\partial V}{\partial x} \right) = \frac{3}{\text{Re}} \cdot \frac{\partial}{\partial x} \left( R^2 \frac{\partial V}{\partial x} \right) + \frac{R^2}{\text{Fr}} + \frac{1}{\text{We}} \cdot \frac{\partial R}{\partial x}, \end{cases} \quad (2)$$

с граничными условиями:  $V(0)=1/E, V(L)=1, R(0)=R_0$ , где  $Re = \rho v_0 L / \mu$  – число Рейнольдса,  $\rho, \mu$  – плотность и вязкость расплава,  $v_0$  – скорость вытяжки,  $R(t,x)$  – радиус заготовки;  $L$  – длина исследуемого участка расплава кварца, а  $R_0$  – безразмерный радиус заготовки.

Была выявлена следующая зависимость устойчивости ( $\omega_i^{(1)}$ ) от  $Re$  и кратности вытяжки  $E$  (табл. 1).

Табл. 1. Зависимость  $\omega_i^{(1)}$  от  $Re$  и  $E$ , при  $n = 350$

Re	отношение скоростей $E$					
	15	20	21,5	25	55	350
$10^2$	-0,27455	-0,20141	-0,18616	-0,15702	-0,06165	-0,00008
10	-0,15517	-0,09345	-0,08114	-0,05894	0,00294	
1	-0,06508	-0,01980	-0,01144	0,00289		
$10^{-1}$	-0,05125	-0,00876	-0,00106	0,01198		
$10^{-2}$	-0,04980	-0,00761	0,00003			
$10^{-3}$	-0,04965	-0,00749	0,00014			

При  $Re > 0.01$  устойчивость процесса возрастает при увеличении числа Рейнольдса. Также были найдены критические значения скоростного коэффициента  $E$  для различных значений  $Re$ .

В реальности процесс вытяжки происходит при изменении температуры. Оценим, как процесс реагирует на особенности печи, в которой происходит непосредственно нагрев. Неизотермический процесс вытяжки кварцевых волокон описывается следующей системой:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial R}{\partial t} + V \frac{\partial R}{\partial x} + \frac{R}{2} \cdot \frac{\partial V}{\partial x} = 0, \\ R^2 \left( \frac{\partial V}{\partial t} + V \frac{\partial V}{\partial x} \right) = \frac{3}{Re} \cdot \frac{\partial}{\partial x} \left( R^2 \frac{\partial V}{\partial x} \right) + \frac{R^2}{Fr} + \frac{1}{We} \cdot \frac{\partial R}{\partial x}, \\ R^2 \left( \frac{\partial T}{\partial t} + V \frac{\partial T}{\partial x} \right) = \frac{1}{Pe} \cdot \frac{\partial}{\partial x} \left( \lambda R^2 \frac{\partial T}{\partial x} \right) - 2R\sqrt{1+R'^2} \cdot St \cdot (T-1) + \\ + 4\chi R \cdot R_p \cdot (R_p - R) \cdot \int_0^1 \frac{(\beta \varepsilon_p T_p^4 - \varepsilon T^4) \left( (R_p - R) + kR'(x - \eta) \right)}{\left( (\eta - x)^2 + (R_p - R)^2 \right)^2} d\eta, \end{array} \right. \quad (1)$$

Здесь  $Re$  – число Рейнольдса,  $Fr$  – число Фруда,  $We$  – число Вебера,  $Pe$  – число Пекле,  $\chi$  – безразмерный комплекс,  $St$  – число Стэнтона (в нашей задаче:  $Re \approx 3 \cdot 10^{-5}$ ,  $Fr \approx 5 \cdot 10^{-5}$ ,  $We \approx 0,1467$ ,  $Pe = 634,92$ ,  $\chi \approx 4,8 \cdot 10^{-5}$ ). А  $T_p(t,x)$ ,  $R_p(t,x)$  – температура и радиус нагревательного элемента (печи).  $T(t,x)$ ,  $R(t,x)$ ,  $V(t,x)$  – безразмерные температура, радиус и продольная скорость соответственно, где  $x$  – продольная координата,  $t$  – время. С учетом практики, изменение температуры вдоль поверхности печи будем описывать функцией следующего вида:

$$Tp(x,t) = \begin{cases} Tp1, x \in [0; \frac{(1-h)*L}{2}] \\ Tp2, x \in [\frac{(1-h)*L}{2}; \frac{(1+h)*L}{2}] \\ Tp1, x \in [\frac{(1+h)*L}{2}; L] \end{cases} \quad (2)$$

где  $h = H/L$  – относительная ширина ядра нагревательного элемента.

Исследование устойчивости проводилось по приведенной ранее схеме.

В исследованиях температуру ядра  $Tp2$  была выбрана равной  $2100^\circ\text{C}$ , что в безразмерном виде соответствует температуре  $Tp2 = 7$ . Результаты расчетов приведены на рис. 1 и рис. 2.

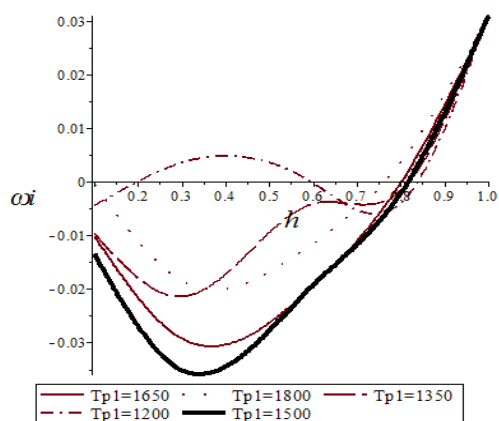


Рис. 1. Зависимость  $\omega_i^{(1)}$  от  $h$

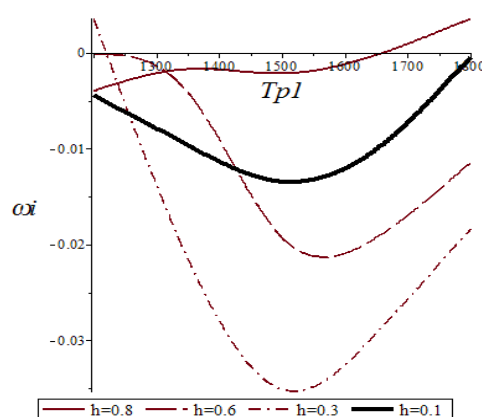


Рис. 2. Зависимость  $\omega_i^{(1)}$  от  $Tp1$

Как видно из полученных данных, конструкция печи влияет на устойчивость, и существует такая конструкция печи, при которой значительно (в несколько раз) увеличивается устойчивость процесса вытяжки кварцевых волокон. Для исследованного случая:  $Tp1 = 5, Tp2 = 7$  (в размерном виде соответствует  $1500^\circ\text{C}$  и  $2100^\circ\text{C}$ ) и  $h \in [0.2; 0.5]$ .

**Выводы:** Таким образом, в работе исследовано влияние нелинейности на устойчивость изотермического процесса вытяжки сплошной трубки. Также оценено влияние  $E$  на устойчивость, и получены критические кратности вытяжки для различных значений числа Рейнольдса. Показана существенная зависимость стабильности процесса от конструкции печи. Эти результаты позволяют ввести в практику новые параметры управления стабильностью вытяжки.

#### ЛИТЕРАТУРА:

1. Барбашин Е.А. Введение в теорию устойчивости. – М.: Наука, 1967. – 224с.
2. Васильев В.Н., Дульнев Г.Н., Наумчик В.Д. Нестационарные процессы при формировании оптического волокна. Устойчивость процесса вытяжки // Энергоперенос в конвективных потоках. – Минск, 1985.- С. 64-76.
3. Владимирова Д.Б., Деревянкина А.Л., Женетль А.Р. Влияние нелинейных эффектов на устойчивость процесса вытяжки оптического волокна // Перспективы науки №3(54). – Тамбов, 2014.- С. 56-61.
4. Владимирова Д.Б., Деревянкина А.Л., Женетль А.Р. Определение стабильности изотермического процесса вытяжки оптического волокна // Глобальный научный потенциал №3(36). – Санкт-Петербург, 2014.-С. 53-57.

5. Владимиров Д.Б., Деревянкина А.Л., Женеть А.Р. Определение оптимальной конструкции нагревательного элемента в задаче стабилизации процесса вытягивания оптических волокон, // Глобальный научный потенциал. 2014. № 8(41)
6. Иванов Г.А., Первадчук В.П.. Технология производства и свойства кварцевых оптических волокон: учеб. пособие - Пермь: Изд-во Перм. нац. исслед. политехн. ун-та, 2011. – 171 с.

УДК 51-72

М.В. Стефанова, С.А. Якунин, М.В. Петухова, С.В. Лупуляк  
Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого

## ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА ВНУТРЕННЕЙ ТОЧКИ ДЛЯ РЕШЕНИЯ СПЕЦИАЛЬНОГО КЛАССА КОНТАКТНЫХ ЗАДАЧ

Контактные задачи имеют большое практическое значение. Они возникают при исследовании процесса деформирования составных конструкций, при ударных взаимодействиях тел, при анализе процесса сборки сложных механических конструкций и др. Такие задачи, как правило, требуют больших вычислительных затрат в том числе и из-за большой размерности. Некоторые из задач о контактном взаимодействии тел удобно переформулировать как задачи минимизации квадратичного функционала при наличии ограничений. Одними из современных и быстро развивающихся методов оптимизации являются методы внутренней точки, показывающие себя как эффективные методы для решения задач большой размерности [1]. В данной работе производится адаптация прямо-двойственного метода внутренней точки для уменьшения времени работы и сокращения используемого объема памяти при решении одного класса контактных задач. Снижение вычислительных затрат достигается благодаря использованию эффективного предобуславливателя, а также выбору начального приближения, основанного на особенностях решаемого класса задач.

Рассмотрим специальный класс контактных задач из [2] и формулировку задачи минимизации для этого класса:

$$\text{Прямая задача: } \frac{1}{2}x^TKx + f^Tx \rightarrow \min, \text{ при условии } Ax + g \geq 0, \quad (1)$$

$$\text{Двойственная задача: } -\frac{1}{2}\lambda^TQ\lambda - p^T\lambda + c \rightarrow \max, \text{ при условии } \lambda \geq 0, \quad (2)$$

где  $K$  – матрица жесткости,  $x$  – вектор нормальных перемещений,  $f$  – вектор внешних сил,  $A$  – матрица ограничений,  $g$  – начальный зазор,  $\lambda$  – вектор контактных сил (множители Лагранжа),  $Q = A^TK^{-1}A$ ,  $p = g - A^TK^{-1}f$  и  $c = -\frac{1}{2}f^TK^{-1}f$ .

Прямо-двойственный метод внутренней точки для решения задачи (1) предлагает решать последовательность нелинейных систем уравнений:

$$S(x, y, \lambda) = \begin{pmatrix} x + f - A\lambda \\ A^Tx + g - y \\ \lambda y - \sigma \mu e \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

где  $\mu$  – интервал двойственности,  $\sigma \in [0,1]$  – параметр центрирования. При стремлении интервала двойственности к нулю решение системы стремится к решению исходной задачи (1). В данной работе использовалась схема предиктор-корректор прямо-двойственного метода с адаптивным выбором параметра центрирования  $\sigma$  ([3]).

Наиболее трудоемким шагом прямо-двойственного метода, требующим решение системы (3), является нахождение направления шага:



$$\begin{pmatrix} K & 0 & -A \\ A & -I & 0 \\ 0 & A & Y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta x \\ \Delta y \\ \Delta \lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Kx + f - A\lambda \\ A^T x + g - y \\ AY - \sigma \mu e \end{pmatrix} \text{ или } \begin{pmatrix} H & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta x \\ \Delta y \\ \Delta \lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \end{pmatrix}, \quad (3)$$

где  $H = K + AY^{-1}AA^T$ . Итерационные методы решения системы имеют лучшие оценки сложности, нежели прямые методы, поэтому в качестве рабочего метода был выбран метод сопряженных градиентов. Матрица  $H$  является симметричной положительно определенной, однако плохо обусловленной, причем число обусловленности растет при приближении к точному решению задачи. Использование предобуславливателя вида:  $V = U + \sqrt{Y^{-1}A}$  (см. Рис. 1), позволяет сократить число итераций метода сопряженных градиентов и в значительной степени ускорить работу алгоритма для случая единичной матрицы ограничений  $A$ . Заметим, что для двойственной задачи матрица ограничений всегда единичная.

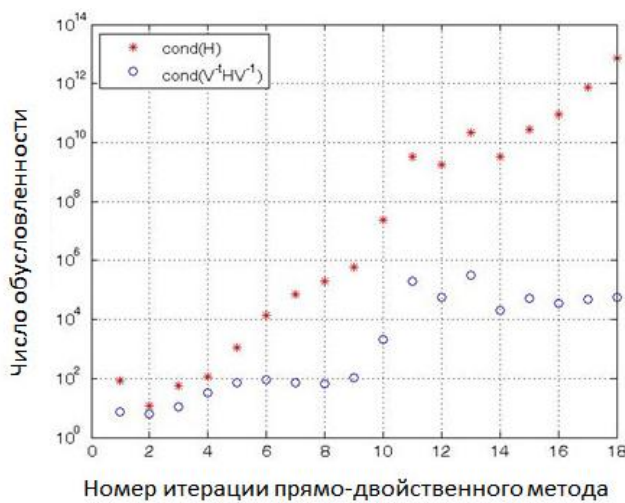


Рис. 1. Изменение числа обусловленности при решении задачи с числом узлов 4386 для матрицы системы с предобуславливанием (синий) и без (красный)

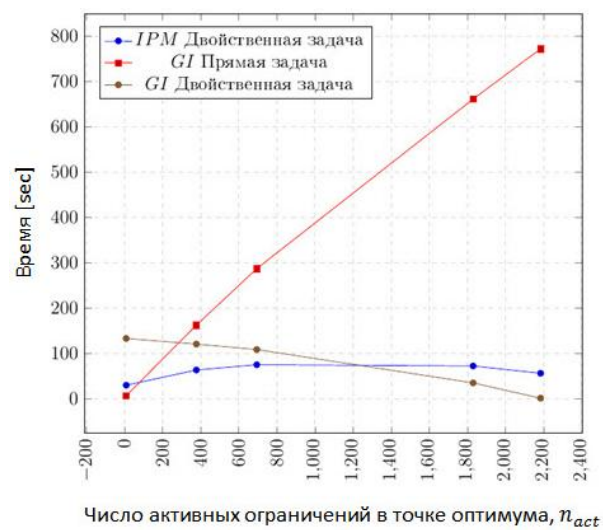


Рис. 2. Время работы прямо-двойственного метода (синий) и алгоритма Гольдфарба-Иднани (красный и коричневый) для задачи с числом узлов 4386

Другим немаловажным фактором, влияющим на скорость работы прямо-двойственного метода, является выбор начального приближения. Удачный выбор начальной точки ведет к сокращению числа итераций метода по параметру  $\mu$ . Начальное приближение должно удовлетворять условиям (4):

$$\begin{aligned} Kx + f - A\lambda = 0, A^T x + g - y = 0, \lambda \geq 0, y \geq 0 & \text{ (для прямой задачи),} \\ Q\lambda + p - y = 0, \lambda \geq 0, y \geq 0 & \text{ (для двойственной задачи).} \end{aligned} \quad (4)$$

Физическая интерпретация задачи квадратичного программирования позволяет построить алгоритм для поиска начального приближения. Идея алгоритма основана на том факте, что для рассматриваемого класса задач увеличение силы  $\lambda$  при выполнении равенств из (4) ведет к увеличению зазора  $y$  между частями.

Табл. 1 Сравнение прямо-двойственного метода и алгоритма Гольдфарба-Иднани

	Прямо-двойственный метод	Алгоритм Гольдфарба-Иднани
Время предобработки данных	$O(n^3)$	$O(n^3)$
Время работы	$O(n^{2.5}n_{it})$ , $n_{it}$ – число итераций метода сопряженных градиентов.	$O(n_{act}n^2)$ , где $0 \leq n_{act} \leq m$
Память	$O(n)$	$O(n^2)$

В работах [4], [5] был рассмотрен и адаптирован к поставленной задаче алгоритм Гольдфарба-Иднани с модификацией Пауэлла. Данный алгоритм, относящийся к методам активного набора, использовался для верификации результатов, а также для оценки эффективности прямо-двойственного метода применительно к рассматриваемому классу контактных задач. В Табл. 1 приведены сравнительные характеристики для обоих методов.

Использование предобуславливателя  $V$  и начального приближения, предложенных в работе, позволило сократить время работы метода сопряженных градиентов и уменьшить число итераций прямо-двойственного метода. В результате время работы прямо-двойственного метода оказалось сравнимо со временем работы алгоритма Гольдфарба-Иднани для двойственной задачи (см. Рис. 1), и для приведенного примера соответствует теоретическим временным оценкам.

*Благодарности.* Часть работы была выполнена в рамках стажировки в университете МакГилл (Монреаль, Канада) при поддержке программы академического обмена в рамках договоров с вузами из ТОП 500 QS и договоров о стратегическом партнерстве. Авторы работы выражают особую благодарность профессору Майклу Кокколарасу (университет МакГилл) за участие в обсуждении результатов и помощь в организации стажировки.

#### ЛИТЕРАТУРА:

1. Gondzio J. Interior Point Methods 25 Years Later. European Journal of Operation Research, 2012, pp 587-601.
2. Lupuleac, S., Petukhova, M., Shinder, Y., and Bretagnol, B.. Methodology for Solving Contact Problem during Riveting Process, SAE Int. J. Aerosp. , 2011, 4(2):952-957, doi:10.4271/2011-01-2582.
3. Mehrorta S. On the Implementation of a Primal-Dual Interior Point Method . SIAM J. Optimization, November 1992, Vol. 2, No. 4, pp 575-601.
4. Якунин С.А., Петухова М. В. Адаптация алгоритма решения задачи квадратичного программирования к моделированию клепочного процесса . Труды СПбГТУ , 2013, № 515, с. 75-82.
5. Petukhova, M., Lupuleac, S., Shinder, Y., Smirnov, A., Yakunin, S., Bretagnol, B., Numerical approach for airframe assembly simulation, Journal of Mathematics in Industry, 2014, 4:8, doi:10.1186/2190-5983-4-8

## ИСПОЛЬЗОВАНИЕ ГРАФА СОВМЕСТИМОСТИ ДЕРЕВА СЦЕНАРИЕВ ПРИ ГЕНЕРАЦИИ УПРАВЛЯЮЩИХ КОНЕЧНЫХ АВТОМАТОВ С ПОМОЩЬЮ МУРАВЬИНОГО АЛГОРИТМА

*Введение.* В последнее время при решении задач логического управления все чаще применяется автоматное программирование [1] – парадигма, в которой логика работы программ представляется одним или несколькими управляющими конечными автоматами. Одним из основных достоинств автоматного программирования является возможность автоматической верификации автоматных программ при помощи метода проверки моделей [2]. В некоторых случаях автоматы удается построить эвристически, однако известны примеры, когда построенные вручную автоматы неоптимальны, или же их вовсе не удается построить [3]. Это неудивительно, так как многие задачи генерации автоматов являются NP-трудными [4, 5]. Поэтому развиваются методы автоматической генерации конечных автоматов, в том числе, по сценариям работы и темпоральным свойствам [6, 7].

Управляющий конечный автомат – это множество состояний, соединенных переходами, причем каждый переход помечен входным событием, булевой формулой от входных переменных и последовательностью выходных воздействий. Пример управляющего конечного автомата приведен на рисунке 1.

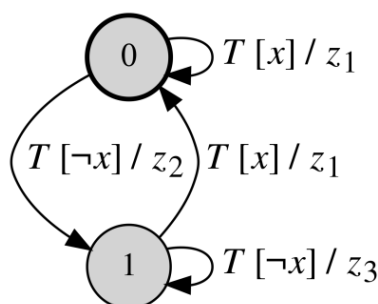


Рис. 1. Пример управляющего конечного автомата

Сценарий работы – это последовательность троек  $\langle e, f, Z \rangle$ , где  $e$  – входное событие,  $f$  – булева формула от входных переменных, а  $Z$  – последовательность выходных воздействий. Приведем пример сценария работы:  $\langle T, x, (z_1) \rangle$ ;  $\langle T, \neg x, (z_2) \rangle$ ;  $\langle T, \neg x, (z_3) \rangle$ ;  $\langle T, x, (z_1) \rangle$ . Темпоральные свойства позволяют задать более общие закономерности поведения и задаются на языках темпоральной логики, например, Linear Temporal Logic (LTL).

Метод, предложенный в [6, 7], основан на муравьином алгоритме [8]. Принцип его работы таков: генерируется некое случайное решение-кандидат, которое постепенно улучшается путем внесения в него случайных изменений. Степень соответствия решений-кандидатов заданным сценариям работы и темпоральным формулам оценивается с помощью так называемой функции приспособленности (ФП). Используемая ФП состоит из двух основных компонентов. Первый из них отражает степень соответствия решения сценариям работы и основан на вычислении редакционного расстояния Левенштейна [9] между последовательностью, заданной в сценарии, и последовательностью, выдаваемой решением-

кандидатом. Второй компонент отражает степень соответствия решения темпоральным формулам и основан на запуске верификатора [10].

Целью данной работы является повышение эффективности метода, предложенного в [6, 7]. Для этого предлагается добавить в функцию приспособленности новый компонент, основанный на графе совместимости дерева сценариев [11]. Дерево сценариев – это префиксное дерево, каждое ребро которого помечено входным событием, булевой формулой от входных переменных и последовательностью выходных воздействий. Дерево, построенное по набору сценариев, содержит все сценарии и все их префиксы. Граф совместимости дерева сценариев [11] задается следующим образом. Множество вершин графа совместимости совпадает с множеством вершин дерева сценариев. Две вершины графа  $u$  и  $v$  соединены ребром (и называются несовместимыми), если существует различающая их последовательность пар событий и значений входных переменных. Дерево сценариев строится за линейное от длины сценариев время, а для построения графа совместимости используется алгоритм динамического программирования, работающий за квадратичное время. Примеры дерева сценариев и графа совместимости приведены на рисунке 2.

Основная идея настоящей работы – непосредственно использовать граф совместимости при вычислении значения функции приспособленности решения-кандидата. Алгоритм вычисления нового компонента ФП работает следующим образом. Каждый из сценариев подается на вход автомату, при этом для каждого состояния  $y \in Y$  хранится множество  $V_y$  вершин дерева сценариев, попавших в это состояние. Далее, для каждого состояния определяется множество  $P_y$  пар несовместимых вершин из множества  $V_y$ . Наконец, третий компонент функции приспособленности вычисляется по формуле:

$$F_{CG} = \frac{1}{|Y|} \sum_{y|V_y \neq \emptyset} \frac{|P_y|}{|V_y|^2}.$$

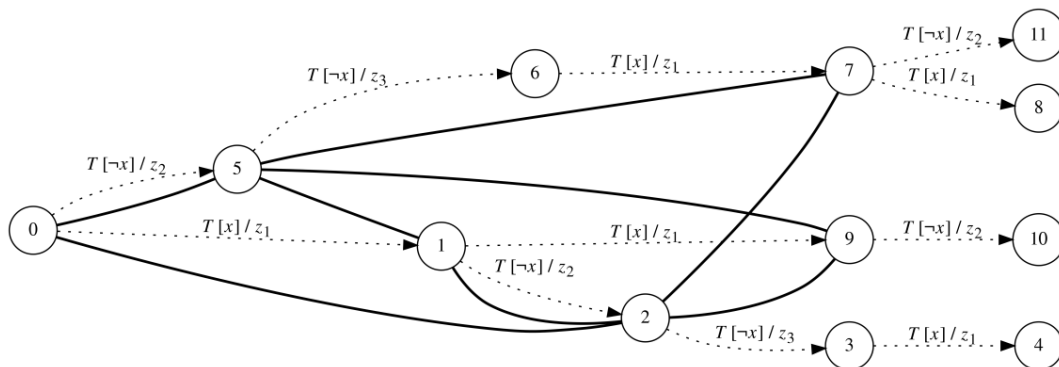


Рис. 2. Примеры дерева сценариев (пунктирные ребра) и графа совместимости (сплошные ребра)

Суммирование производится только для тех состояний автомата, в которые попала хотя бы одна вершина дерева сценариев. Результат нормируется таким образом, чтобы итоговое значение  $F_{CG}$  не превышало единицы. Для оценки эффективности использования предложенного компонента функции приспособленности были проведены вычислительные эксперименты, в которых муравьиный алгоритм, использующий предложенный компонент, сравнивался со старым муравьиным алгоритмом.

Для проведения сравнения были сгенерированы случайные конечные автоматы, содержащие от пяти до десяти состояний. По случайным автоматам были сгенерированы наборы сценариев и темпоральных формул, которые использовались в качестве входных данных для сравниваемых алгоритмов. Каждый алгоритм работал до тех пор, пока не находил решение, удовлетворяющее заданным сценариям работы и темпоральным формулам. Результаты экспериментальных запусков для автоматов из десяти состояний приведены в таблице.

Табл.1. Время работы и число вычислений ФП с использованием и без использования графа совместимости

	Граф совместимости	Без графа совместимости
Среднее время работы, с	6719	13792
Медианное время работы, с	1343	2861
Среднее число вычислений ФП	$3,771 \cdot 10^6$	$12,781 \cdot 10^6$
Медианное число вычислений ФП	$0,807 \cdot 10^6$	$2,384 \cdot 10^6$

*Результаты.* Как видно из данных, приведенных в таблице, использование графа совместимости позволяет примерно в два раза уменьшить время, необходимое для генерации автоматов. Число вычислений ФП уменьшается примерно в четыре раза. Это объясняется тем, что вычисление предложенного в настоящей работе компонента ФП связано с дополнительными накладными расходами. Отметим, что статистическая значимость полученных результатов подтверждается результатом проведения теста Уилкоксона [12].

*Вывод.* Предложенный подход позволяет увеличить эффективность метода генерации конечных автоматов по сценариям работы и темпоральным формулам.

Работа выполнена при государственной поддержке ведущих университетов Российской Федерации (субсидия 074-U01), а также при поддержке РФФИ в рамках научного проекта № 14-01-00551 а.

#### ЛИТЕРАТУРА:

1. Поликарпова Н.И., Шалыто А.А. Автоматное программирование. — СПб : Питер, 2009. — 176 с.
2. Верификация автоматных программ / С.Э. Вельдер, М.А. Лукин, А.А. Шалыто, Б.Р. Яминов. — СПб : Наука, 2011. — 244 с.
3. Царев Ф.Н., Шалыто А.А. О построении автоматов с минимальным числом состояний для задачи об «Умном муравье» // Сборник докладов X международной конференции по мягким вычислениям и измерениям. Т. 2. — СПбГЭТУ «ЛЭТИ», 2007. — С. 88—91.
4. Gold M. Complexity of Automaton Identification from Given Data // Information and Control. — 1978. — Vol. 37, no. 3. — P. 302–320.
5. Ульянов В.И. Применение методов решения задачи о выполнимости булевой формулы для построения управляющих конечных автоматов по сценариям работы. Бакалаврская работа, НИУ ИТМО, 2011.
6. Chivilikhin D., Ulyantsev V. MuACOsm: a new mutation-based ant colony optimization algorithm for learning finite-state machines // Proceedings of the 15th Genetic and Evolutionary Computation Conference. — ACM, 2013. — P. 511–518.
7. Chivilikhin D., Ulyantsev V., Shalyto A. Combining Exact and Metaheuristic Techniques for Learning Extended Finite-State Machines from Test Scenarios and Temporal Properties // Proceedings of the 13th International Conference on Machine Learning and Applications. — IEEE Computer Society, 2014. — P. 350–355.
8. Dorigo M., Stutzle T. Ant Colony Optimization. — MIT Press, 2004. — 319 p.
9. Levenshtein V.I. Binary Codes Capable of Correcting Deletions, Insertions and Reversals // Soviet Physics Doklady. — 1966. — Vol. 10. — P. 707.
10. Tsarev F., Egorov K. Finite-state machine induction using genetic algorithm based on testing and model checking // Proceedings of Genetic and Evolutionary Computation Conference companion. — 2011. — P. 759–762.
11. Ulyantsev V., Tsarev F. Extended Finite-State Machine Induction Using SAT-Solver // Proceedings of the 10th International Conference on Machine Learning and Applications. Vol. 2. — Los Alamitos, CA, USA : IEEE Computer Society, 2011. — P. 346–349.
12. Wilcoxon F. Individual Comparisons by Ranking Methods // Biometrics Bulletin. — 1945. — Vol. 1, no. 6. — P. 80–83.

ГЕНЕРАЦИЯ ДИАГРАММ УПРАВЛЕНИЯ ВЫПОЛНЕНИЕМ БАЗИСНЫХ  
ФУНКЦИОНАЛЬНЫХ БЛОКОВ СТАНДАРТА IEC 61499 ПО СЦЕНАРИЯМ РАБОТЫ

*Введение.* IEC 61499 [1] – это развивающийся стандарт в промышленной автоматике, определяющий открытую архитектуру для разработки систем управления. Этот стандарт призван заменить широко распространенный стандарт IEC 1131-3 [2] для программируемых логических контроллеров (ПЛК). Основными отличиями IEC 61499 от IEC 1131-3 являются использование событий и реализация логики управления с помощью конечных автоматов.

Приложения в IEC 61499 реализуются в виде функциональных блоков (ФБ), каждый из которых характеризуется интерфейсом, определяющим используемые входные/выходные переменные и входные/выходные события. Функциональный блок может быть базисным или составным. Базисный блок задается диаграммой управления выполнением (ДУВ) – конечным автоматом Мура специального вида. Составной блок задается сетью ФБ, базисных и/или составных. Примеры интерфейса ФБ и диаграммы управления выполнением базисного ФБ приведены на рис. 1.

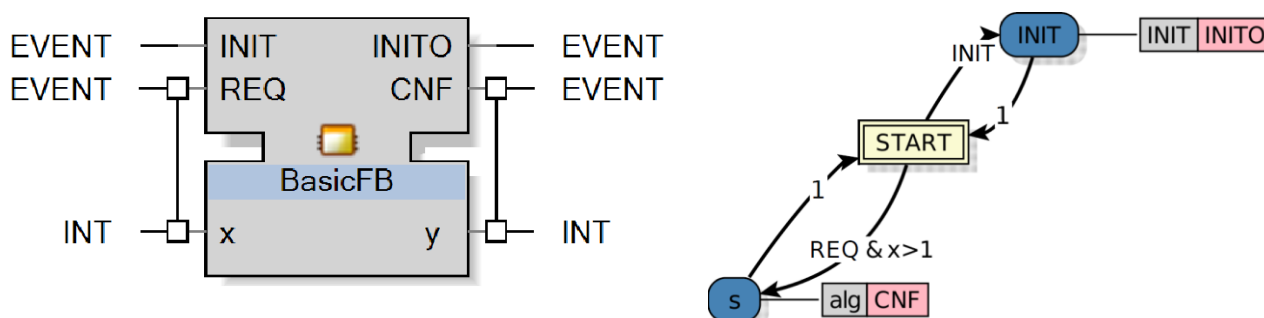


Рис. 1. Пример интерфейса функционального блока (слева) и диаграммы управления выполнением базисного функционального блока

Множество работ посвящено методам построения эквивалентного приложения стандарта IEC 61499 [3–5] по приложению IEC 1131-3, однако все эти методы предполагают наличие исходного кода ПЛК. Такие подходы неприменимы в часто возникающих на практике ситуациях, когда исходный код утерян или инженеров, способных в нем разобраться.

*Целью настоящей работы* является создание подхода, позволяющего восстановить логику работу ПЛК-программы в виде базисного функционального блока IEC 61499. Рассматривается случай, когда все входные и выходные переменные являются логическими.

Введем необходимые определения. Диаграмма управления выполнением – это множество состояний  $Y$ , соединенных переходами. Каждый переход помечен булевой формулой от входных переменных. Каждое состояние ассоциировано с выходным воздействием, которое состоит из генерации выходного события и запуска алгоритма. Алгоритмы обычно реализуются на языке *Structured Text* и используются для изменения значений выходных переменных.

Стандартом установлена следующая семантика выполнением ДУВ. В каждый момент времени ДУВ находится в определенном состоянии. При поступлении входного события считываются новые значения входных переменных и проверяется, не активизировался ли

один из переходов. Переход активизируется, если при текущих значениях входных переменных булева формула на переходе принимает значение *True*. Если переход активизирован, то ДУВ переходит в новое состояние и выполняется выходное воздействие.

Опишем предлагаемый подход. Функциональный блок, логику работы которого требуется восстановить, будем называть целевым. Сначала этот ФБ автоматически заменяется составным ФБ, дополненным блоками для записи входных/выходных событий и входных/выходных переменных. Создается набор тестов, которые подаются на вход приложению, при этом записываются сценарии работы целевого ФБ. Сценарий работы – это последовательность элементов сценария, каждый из которых состоит из входного события, множества значений входных переменных, множества значений выходных переменных и выходного события. Для генерации ДУВ по набору сценариев работы используется алгоритм, предложенный в [6], дополненный специальными операторами мутации для ДУВ и способом представления ДУВ.

Предлагаемый способ представления ДУВ отличается тем, что позволяет задавать сложные условия на переходах. В случае большого числа входных переменных простейший способ представления ДУВ (полные таблицы переходов) неприменим. Поэтому для представления автоматов пользуются методом сокращенных таблиц [7], в котором предполагается, что для выбора нужного перехода достаточно всего нескольких входных переменных. Для каждого состояния хранится маска значимости входных переменных. Однако метод сокращенных таблиц позволяет задавать только относительно простые условия на переходах, использующие операции отрицания и конъюнкции и не использующие скобки. Булевы формулы на переходах ФБ зачастую имеют более сложный вид. Предлагаемый способ представления использует тот факт, что любую булеву формулу можно представить в дизъюнктивной нормальной форме (ДНФ). В каждом состоянии хранится набор групп переходов, каждой группе соответствует своя маска значимости.

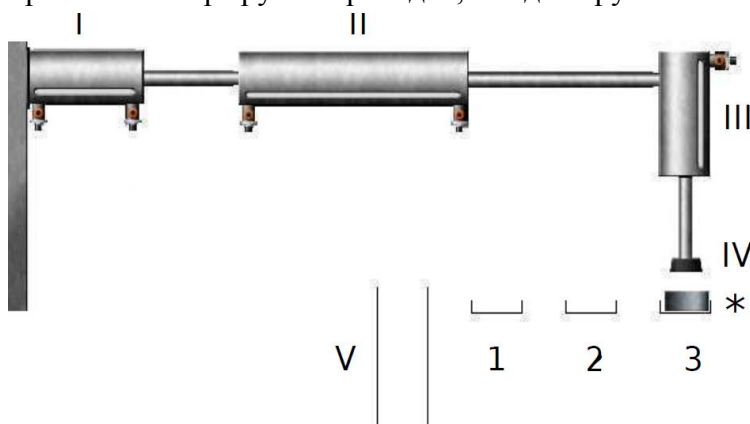


Рис. 2. Механический манипулятор

*Результаты.* Предложенный подход был протестирован при восстановлении логики работы функционального блока управления механическим манипулятором [8], представленным на рис. 2. В этом ФБ используется десять входных и семь выходных логических переменных. Для записанных тестов сгенерированные с помощью предложенного подхода ДУВ обладают эквивалентным с исходной поведением.

*Выводы.* Разработанный в настоящей работе подход позволяет восстанавливать логику работы функциональных блоков, использующих только логические переменные, без использования исходного кода.

Работа выполнена при государственной поддержке ведущих университетов Российской Федерации (субсидия 074-U01), а также при поддержке РФФИ в рамках научного проекта № 14-01-00551 а.

#### ЛИТЕРАТУРА:

1. International standard IEC 61499. — URL: <https://webstore.iec.ch/searchform%5C&q=61499>.
2. International standard IEC 61131. — URL: <https://webstore.iec.ch/searchform%5C&q=61131>.

3. W. Dai, V. Dubinin, V. Vyatkin. Migration From PLC to IEC 61499 Using Semantic Web Technologies // IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics: Systems, vol. 44, no. 3, P. 277–291.
4. C. Gerber, H.-M. Hanisch, and S. Ebbinghaus. From IEC 61131 to IEC 61499 for Distributed Systems: A Case Study // EURASIP J. Embedded Syst., vol. 2008, P. 1–8.
5. W. Dai and V. Vyatkin. Redesign Distributed PLC Control Systems Using IEC 61499 Function Blocks // IEEE Transactions on Automation Science and Engineering, vol. 9, no. 2, P. 390–401
6. Chivilikhin D., Ulyantsev V. MuACOsm: a new mutation-based ant colony optimization algorithm for learning finite-state machines // Proceedings of the 15th Genetic and Evolutionary Computation Conference. — ACM, 2013. — P. 511–518.
7. Поликарпова Н. И., Точилин В. Н., Шалыто А. А. Метод сокращенных таблиц для генерации автоматов с большим числом входных переменных на основе генетического программирования // Известия РАН. Теория и системы управления. — 2010. — No 2. — С. 100—117.
8. Patil S., Vyatkin V., Sorouri M. Formal verification of Intelligent Mechatronic Systems with decentralized control logic // Proceedings of the 17th IEEE Conference on Emerging Technologies Factory Automation. — 2012. — P. 1–7.



УДК 539.3

О.В. Антонова

Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого

**МЕТОДИКА РАСЧЕТА ГИДРОДИНАМИЧЕСКОГО СОСТОЯНИЯ ОПОРНЫХ ПОДШИПНИКОВ С УЧЕТОМ ЭЛАСТОЭФФЕКТА**

Цель работы – разработка методики и составление алгоритма расчета опорных подшипников с учетом эластоэффекта.

В настоящее время для изготовления накладок сегментов упругодеформирующихся неметаллических опорных подшипников и подпятников жидкостного трения успешно применяются неметаллические материалы (например, фторопласт). В большинстве случаев величина модуля упругости данных материалов в сотни раз меньше чем у металлов. Это ведет к тому, что в процессе работы конструкции, под действием гидродинамического давления накладка сегмента деформируется. Соответственно, при этом происходит изменение формы зазора, что в свою очередь влечет за собой изменение несущей способности смазочного слоя и гидродинамических характеристик. Поэтому при оценке грузоподъемности смазочного слоя подпятника необходимо учитывать деформации накладки сегмента. Для этого необходимо решать контактногидродинамическую задачу. На основании решения таких задач Л.М. Эртелем, А.И. Петрусевичем, А.Н. Грубиным, Д.С. Кодниром и др.[1,2] и была создана контактногидродинамическая теория, чьи положения использованы в описываемой методике.

Объектом исследования являются опорные подшипники скольжения с различным числом сегментов. На рис. 1 представлены примеры таких конструкций [3,4].

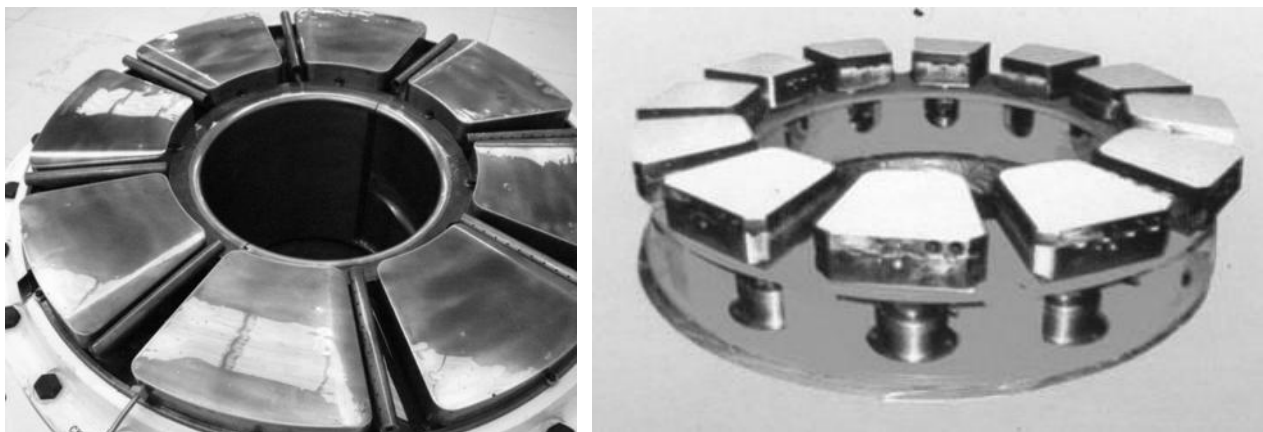


Рис. 1. Подпятники гидрогенераторов

Методика расчета гидродинамического состояния подпятников гидрогенераторов уже была изложена в [5]. Разработанная автоматизированная методика позволяет проводить многовариантное исследование гидродинамического состояния опорных подшипников гидрогенераторов и оценивать несущую способность конструкции. Данная методика использовалась при создании пользовательского интерфейса для расчёта гидродинамического состояния опорных нереверсивных и реверсивных подшипников в условиях заводского конструкторского бюро инженерами-конструкторами [6], что наряду с

классическими инженерными методиками и проведением экспериментальных исследований позволяет оптимизировать процесс расчета конструкции ещё на этапе проектирования.

Описание расчета подпятника гидрогенератора с учетом эластоэффекта было проведено ранее, результаты представлены в [7].

Поскольку, в общем случае не существует точных аналитических решений контактно-гидродинамической задачи, а получение приближенных и уточненных решений требует сложных аналитических вычислений, для решения данную задачи используем современный программный комплекс вычислительной механики и гидродинамики ANSYS. Главной особенностью решения контактногидродинамической задачи является необходимость в решении связанной задачи гидродинамики и теплообмена и сопряженной задачи гидродинамики и теории упругости.

Предлагается следующий алгоритм:

1. Решаем задачу гидродинамики без учёта теплообмена, при этом используем разработанный ранее алгоритм определения угла положения колодки в потоке жидкой смазки. Угол положения колодки определяется с учетом условия равновесия гидродинамических сил, действующих на колодку со стороны обтекаемой вязкой жидкости а также сил тяжести, обеспечивающих опрокидывающий момент за счет наличия эксцентриситета [8].

2. Производим оценку влияния размеров расчётной области на результат решения задачи с учётом теплообмена. Для этого проводим многовариантное исследование влияния различных элементов конструкции на ее 3-D тепловое и гидродинамическое состояние. Выбираем рациональную математическую модель.

3. Для выбранной рациональной математической модели, решаем сопряженную задачу гидродинамики и теории упругости с учетом зависимости вязкости масла от давления.

4. При решении связанной задачи гидродинамики и теплообмена и сопряженной задачи гидродинамики и теории упругости учитываем зависимость вязкости масла и от давления и от температуры. При этом могут рассматриваться различные формулы зависимости вязкости от давления и температуры одновременно [9].

В качестве результатов решения получаем распределение давления по поверхности сегмента, вектор перемещений в каждой точке поверхности накладки под действием гидродинамического давления и оценку несущей способности подшипника.

На рис. 2 представлено распределение температуры по поверхности сегмента-результат решения связанной задачи гидродинамики и теплообмена с учётом зависимости вязкости масла от температуры.

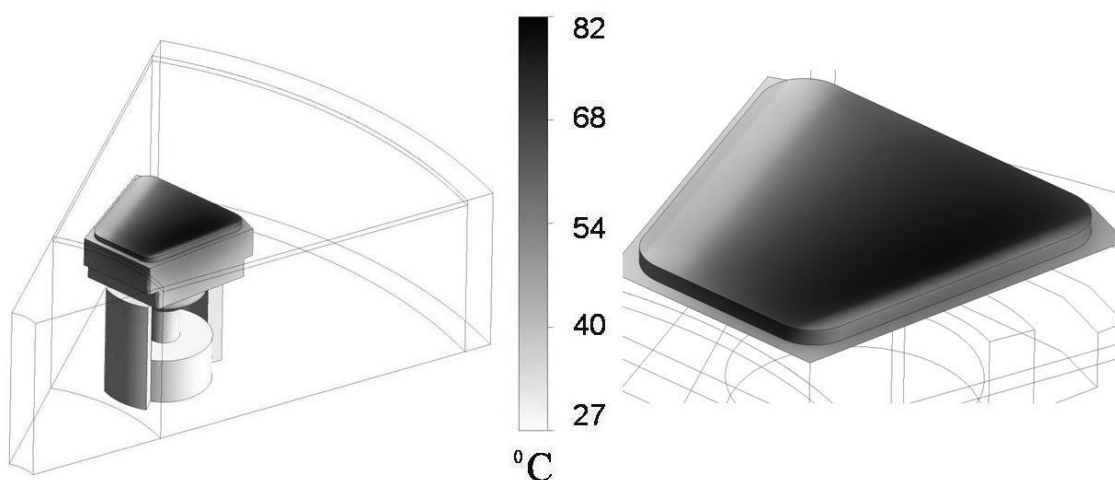


Рис. 2. Распределение температуры, °C

На рис. 3 представлено распределение давления по поверхности сегмента.

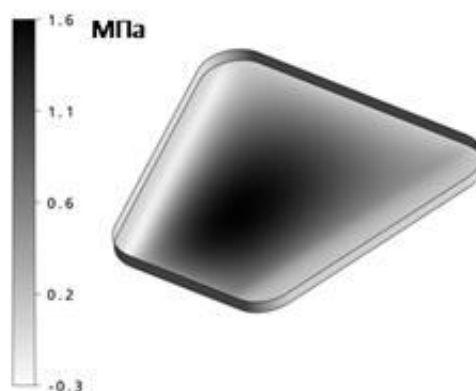


Рис. 3. Распределение давления по поверхности сегмента

Таким образом, описанные в работе методика и алгоритм расчета опорных подшипников с учетом эластоэффекта, могут быть в дальнейшем использованы при расчетах широкого класса гидродинамических опорных подшипников, для оценки несущей способности и оптимизации формы накладки сегмента.

#### ЛИТЕРАТУРА:

1. Коднир Д.С. Контактная гидродинамика смазки деталей машин. М.: Машиностроение, 1976. 304 с.
2. Коднир Д.С., Жильников Е.П., Байбородов Ю.И. Эластогидродинамический расчет деталей машин. М.: Машиностроение, 1988. 160 с.
3. <http://www.hacker.ind.br/>
4. <http://www.ezch.ru/>
5. Антонова О.В., Боровков А.И. Методика расчета гидродинамического состояния подпятников гидрогенераторов // Научно-технические ведомости СПбГПУ. Наука и образование. 2010. № 3(106).С. 210 - 216.
6. Антонова О.В., Войнов И.Б., Закиров О.А., Боровков А.И. Расчёт подшипников и подпятников гидрогенераторов. Свидетельство о регистрации программы для ЭВМ № 201561517, Роспатент, М., 22.05.15
7. Антонова О.В., Боровков А. И. Расчет подпятников гидрогенераторов с учетом эластоэффекта // XXXIX международная научно-практической конференции “Неделя науки СПбГПУ”: материалы докладов, Изд. СПбГПУ. 2011 с. 129-131
8. Antonova O.V., Borovkov A.I., Michailov A.A., Voynov I.B. The method of determination of thrust bearing pad angle in a fluid flow // Proc. XXXVIII Conf. "Advanced Problems in Mechanics". 2010, St.Petersburg, Russia. p. 30-34.
9. Коднир Д.С. Контактно-гидродинамическая теория смазки. Куйбышевское книжное издательство, 1963. 184с

ЛОКАЛИЗАЦИЯ ДЕФОРМАЦИЙ ПРИ ЧЕТЫРЕХТОЧЕЧНОМ ИЗГИБЕ  
АРМИРОВАННОЙ БЕТОННОЙ БАЛКИ

Возможность описания процесса распространения макротрещины в твердом теле на основе методов механики континуальных повреждений определяется способностью модели материала предсказать появление локализации поля поврежденности, конфигурация которой и определяет траекторию роста трещины. При использовании уравнений эволюции повреждений деформационного вида для описания процесса трещинообразования бетона локализация повреждений является следствием локализации деформаций. Локализацию можно интерпретировать как неустойчивую реакцию материала, представляющую собой возникновение поверхностей разрыва высших производных от перемещений по времени и/или по пространству внутри материала.

Мотивацией к проведению исследования условий локализации деформаций при изгибе армированной бетонной балки послужила наблюдаемая нами при проведении конечно-элементных (КЭ) расчетов неспособность ряда моделей накопления повреждений предсказать локализацию деформаций, наблюдаемую в натурных экспериментах [1, 2]. Стремление дать теоретическое объяснение эмпирически установленной чувствительности возникновения локализации к параметрам модели накопления повреждений послужило основой данной работы.

Изгибаемые армированные бетонные элементы, как правило, начинают разрушаться вследствие возникновения трещин в бетонном теле. Прогнозирование появления и развития трещин в бетоне является одной из основных задач при анализе несущей способности железобетонных конструкций, решение которой в последнее время все чаще осуществляется на основе проведения КЭ расчетов [3-8].

Прогнозирование трещинообразования при КЭ расчетах возможно на основе использования упруго-пластической модели бетона с учетом поврежденности [3, 4]. Определяющие уравнения для рассматриваемого класса материалов имеет вид [9-12]:

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}} = {}^4\mathbf{L} \cdot \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}, \quad (1)$$

где  ${}^4\mathbf{L}$  - тензор упругопластических модулей, имеющий структуру [12]

$${}^4\mathbf{L} = {}^4\mathbf{E} - \frac{{}^4\mathbf{E} \cdot \mathbf{a} \otimes \mathbf{b} \cdot {}^4\mathbf{E}}{h}. \quad (2)$$

Необходимыми и достаточными условиями существования мод локализации в теле на поверхности разрыва с нормалью  $\mathbf{n}$  является следующее условие [11]:

$$\det(\mathbf{n} \cdot {}^4\mathbf{L} \cdot \mathbf{n}) = 0. \quad (3)$$

Условие (3) эквивалентно условию невозможности получения тензора обратного  ${}^4\mathbf{L}$ , который имеет вид:

$${}^4\mathbf{L}^{-1} = {}^4\mathbf{E}^{-1} - \frac{\mathbf{a} \otimes \mathbf{b}}{h^*}, \quad (4)$$

где  $h^* = h - \mathbf{b} \cdot {}^4\mathbf{E} \cdot \mathbf{a}$ . Таким образом, условие (3) эквивалентно условию  $h^* = 0$ .

Для уравнения эволюции повреждений

$$\dot{D} = \frac{Y}{S_0} \dot{\varepsilon}_i^p, \quad (5)$$

где  $Y = \frac{1}{2} \boldsymbol{\varepsilon}^e \cdot \cdot^4 \mathbf{E}_0 \cdot \cdot \boldsymbol{\varepsilon}^e$ ,  $\dot{\varepsilon}_i^p = \sqrt{\frac{2}{3} \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p \cdot \cdot \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p}$ ,  $S_0$  - кусочно-постоянная функция  $\varepsilon_i^p$ . Условие  $h^* = 0$  сводится к возможности определения предельного значения поврежденности  $D_c$  при котором возникает локализация [12]:

$$D_c = 1 \pm \sqrt{\frac{3}{5} + \frac{\sigma_y^2}{5E_0S_0} \frac{\sigma_y}{k}}, \quad (6)$$

где  $\sigma_y$  - предел текучести;  $E_0$  - начальный модуль упругости;  $k$  - параметр изотропного упрочнения материала. Условие  $0 \leq D_c \leq 1$  следствием (6) приводит к следующему ограничению на параметры модели

$$-3 \leq \frac{\sigma_y^2}{E_0S_0} \frac{\sigma_y}{k} \leq 2, \quad (7)$$

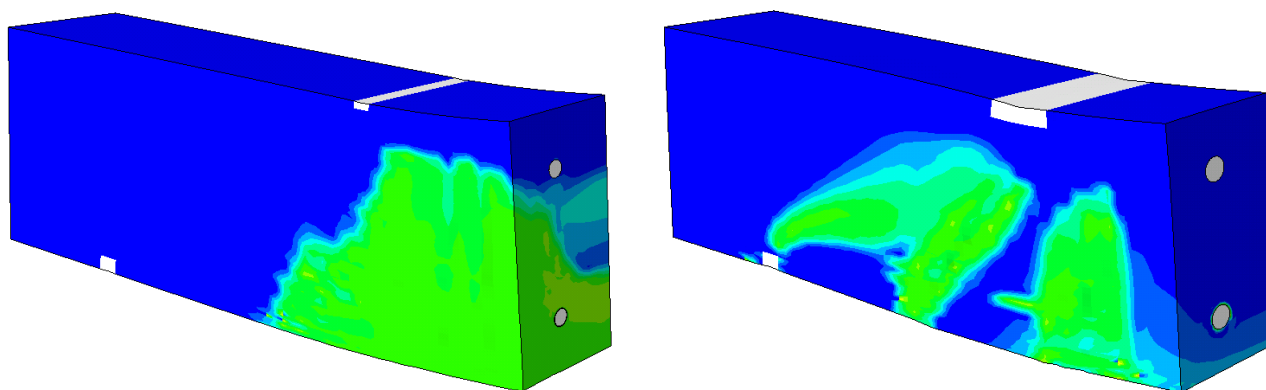
обеспечивающему возникновение локализации.

Рассмотрим две модели накопления повреждений. В первой допустим возможность накопления повреждений в допиковой области диаграммы деформирования (то есть  $1/S_0$  отлично от нуля), а во второй не будем учитывать возможность накопления повреждений в допиковой области (то есть  $1/S_0$  равняется нулю). Вторая модель фактически предполагает наличие порогового значения пластических деформаций в формулировке уравнения эволюции повреждений (5), ниже которого накопления повреждений не наблюдается.

Параметры материала  $S_0$  и  $k$  определяются на основе углов наклона касательных к кривым «поврежденность–неупругая деформация» и «напряжение–неупругая деформация» соответственно.

В модели, допускающей отсутствие накопления повреждений до пика, с  $1/S_0 = 0$  условие (7) удовлетворяется. В модели без порога с учетом поврежденности до пика с  $1/S_0 \neq 0$  непосредственная проверка (7) с константами материала, характерными для бетона В45 при растяжении:  $\sigma_y = 2.0$  МПа,  $k = 3157.5$  МПа,  $S_0 = 7.8948 \cdot 10^{-9}$  МПа, показала, что неравенство (7) нарушается. С таким набором параметров локализация может возникнуть только при достижении поврежденности, вычисленной по (6), значения  $D_c = 2.53$ , что превосходит допустимую верхнюю границу  $D = 1$ .

Для иллюстрации анализа возможности локализации был проведен КЭ расчет 4-х точечного изгиба армированной бетонной балки. Рассматривались два набора констант материала для бетона: с учетом поврежденности до пика при растяжении и без учета поврежденности до пика. Распределения полей поврежденности при равных значениях максимальной поврежденности приведены на рис. 1. Результаты КЭ моделирования подтверждают заключение о том, что при учете поврежденности до пика с рассматриваемым набором констант материала не происходит локализации деформаций, а, следовательно, и образования трещин. Поле поврежденности в этом случае распространяется в объеме равномерно.



а) с учетом поврежденности до пика

б) без учета поврежденности до пика

Рис. 1. Распределения полей поврежденности при различных константах материала

Анализ условий локализации деформаций позволяет сформулировать ограничение для констант материала, обеспечивающих возможность возникновения трещин. Этот аспект крайне важен при моделировании процесса растрескивания бетонных конструкций. Неучет допиковой поврежденности бетона при растяжении, безусловно, обеспечивает выполнение условий локализации. Учет же возможности накопления повреждений бетона до пика может в ряде случаев препятствовать локализации деформаций, что не позволит при нарушении (7) описать средствами КЭ моделирования процесс роста трещин в бетоне.

#### ЛИТЕРАТУРА:

1. Богданова Е.Р., Бенин А.В., Беляев М.О., Семёнов С.Г., Семёнов А.С. Исследование процессов деформирования и разрушения бетонных элементов, армированных стеклопластиковой арматурой // Материалы научно-практической конф. Неделя науки СПбГПУ. ИПММ. 2014. С. 6-9.
2. Benin A.V., Semenov S.G., Semenov A.S. Modeling of deformation and fracture of concrete structures with FRP reinforcement // Applied Mechanics and Materials. 2015. Vol. 752-753. P. 685-688.
3. Desmorat R., Gatuingt F., Ragueneau F. Nonlocal anisotropic damage model and related computational aspects for quasi-brittle materials // Engineering Fracture Mechanics. 2007. 74(10): 1539–1560.
4. Geers M.G.D., De Borst R., Peerlings R.H.J. Damage and crack modeling in single-edge and double-edge notched concrete beams // Engineering Fracture Mechanics, 2000, vol. 65, no. 2-3, pp. 247–261.
5. Benin A.V., Semenov A.S., Semenov S.G. Modeling of fracture process in concrete reinforced structures under steel corrosion // Journal of achievements in materials and manufact. Eng. 2010, №2 (39). P. 168-175.
6. Бенин А.В., Семёнов А.С., Семёнов С.Г., Федоров И.В. Конечно-элементное моделирование процессов неупругого деформирования и разрушения элементов железобетонных конструкций // Морские интеллектуальные технологии. 2011. № 3. С. 102-105.
7. Бенин А.В., Семёнов А.С., Семёнов С.Г., Мельников Б.Е. Математическое моделирование процесса разрушения сцепления арматуры с бетоном. Часть 1. Модели с учетом несплошности соединения // Инженерно-строительный журнал. 2013. № 5 (40). С. 86-99.
8. Бенин А.В., Семёнов А.С., Семёнов С.Г., Мельников Б.Е. Математическое моделирование процесса разрушения сцепления арматуры с бетоном. Часть 2. Модели без учета несплошности соединения // Инженерно-строительный журнал. 2014. № 1 (45). С. 23-40.
9. Rice J.R. The Localization of Plastic Deformation // Theoretical and Applied Mechanics. 1976. Vol 1. Pp. 207-220.
10. Rudnicki J.W., Rice J.R. Conditions for the Localization of Deformation in Pressure-Sensitive Dilatant Materials // Journal of the Mechanics and Physics of Solids. 1975. Vol. 23 (6). Pp. 371-394.
11. Бессон Ж., Каето Ж., Шабош Ж.-Л., Форест С. Нелинейная механика материалов. - СПб.: СПбПУ, 2010. – 397 с.
12. Doghri I., Billardon R., Investigation of localization due to damage in elasto-plastic materials // Mechanics of Materials. 1995. Vol. 19. Pp. 129-149.

Е.Р. Богданова<sup>1</sup>, А.В. Бенин<sup>1</sup>, М.О. Беляев<sup>2</sup>, С.Г. Семёнов<sup>2</sup>, А.С. Семёнов<sup>2</sup>  
<sup>1</sup>Петербургский государственный университет путей сообщения Александра I,  
<sup>2</sup>Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого

## ИССЛЕДОВАНИЕ НЕСУЩЕЙ СПОСОБНОСТИ ИЗГИБАЕМЫХ БЕТОННЫХ БАЛОК, АРМИРОВАННЫХ РАЗЛИЧНЫМИ МАТЕРИАЛАМИ

Композитная полимерная арматура на сегодняшний день является распространенным строительным материалом, как за рубежом, так и в России, о чем свидетельствует обширная область её применения: дорожное строительство; конструкции, работающие в условиях ускоренной коррозии стальной арматуры (причалы, волнорезы, берегоукрепление, канализация, водоотведение); проведение тоннельных работ; конструкции, подвергаемые в процессе эксплуатации действию блуждающих токов (осветительные опоры, опоры ЛЭП, изолирующие траверсы ЛЭП) [1]. Наиболее широкое распространение в отечественной стройиндустрии получила стеклопластиковая арматура (СПА). Применение СПА в бетонных конструкциях требует детального изучения особенностей ее работы, физико-механических и химических характеристик, а также создания нормативной базы, регламентирующей применение данного вида арматуры в соответствии с отечественными строительными нормами, что требует наработки экспериментальной базы в процессе проведения научно-исследовательских работ.

В ИЛ «Механическая лаборатория им. проф. Н.А. Белелюбского» ПГУПС совместно с сотрудниками СПбГУ ведется работа по изучению процессов деформирования и разрушения бетонных элементов, армированных полимерной арматурой [2,3]. В 2015 году в ИЛ была проведена серия сравнительных испытаний бетонных элементов с применением стеклопластиковой арматуры, металлической арматуры и смешанного армирования. Диаметр композитной и металлической арматуры, а так же схема армирования были приняты одинаковыми для всех бетонных образцов (табл. 1).

Целью данной работы является экспериментальное исследование прочностных и деформативных свойств изгибаемых бетонных элементов с различным видом армирования. В задачи исследования входит проведение испытания балок с применением различных материалов армирования на 4-х точечный изгиб, сбор данных с использованием различных аппаратных комплексов и анализ полученных результатов. Также в ходе исследования проводилось конечно-элементное (КЭ) моделирование процесса разрушения бетонных образцов.

Общий вид испытательной установки представлен на рис. 1. Балки были армированы четырьмя стержнями, уложенными симметрично. Испытания проводились до разрушения ступенчато-возрастающей нагрузкой с шагом 10 кН и выдержками на каждой ступени нагружения (рис. 2). В эксперименте для всех образцов использовался бетон класса В45. Эксперимент проводился на универсальной испытательной машине Instron модели 1200KN серии SATEST<sup>TM</sup>. Регистрация данных производилась на каждом этапе нагружения после выдержки под нагрузкой. Измерение прогибов образца проводилось тремя датчиками перемещений LVDT, установленными в середине и в четверти пролета.

Результаты испытаний показали, что образцы, армированные стеклопластиковой арматурой, показали большую деформативность (прогиб центрального сечения  $f_2=3,76$  мм) по сравнению с образцами, армированными стальной арматурой ( $f_2=1,64$  мм).

Конечно-элементное (КЭ) моделирование проводилось в программном комплексе Abaqus с использованием упруго-пластической модели деформирования бетона с учетом

накопления континуальных повреждений. При задании сцепления арматуры с бетонным блоком учитывалась адгезия.



Рис. 1. Общий вид экспериментальной установки

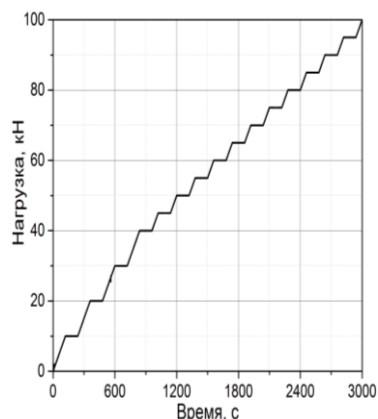


Рис. 2. Программа нагружения

Табл. 1. Результаты испытаний армированных бетонных балок

Схема армирования	Разрушающее усилие, $P$ , кН	Прогибы в сечениях, мм			Характер разрушения
		1	2	3	
<p><b>Стальная арматура</b></p> <p><math>b=150</math> мм, <math>h=150</math> мм, <math>a_1=a_2=35</math>мм</p>	310	1,37	1,64	1,36	<p>разрушение по наклонным трещинам</p>
<p><b>Стеклопластиковая арматура</b></p> <p><math>b=150</math> мм, <math>h=150</math> мм, <math>a_1=a_2=35</math>мм</p>	220	2,75	3,76	3,31	<p>разрушение по наклонным трещинам</p>



Расчеты выполнены на основе трехмерных КЭ моделей с использованием двадцати-узловых квадратичных гексаэдрических КЭ C3D20R. В силу наличия двух плоскостей симметрии в расчетах рассматривалась одна четвертая часть образца. Арматурные стержни моделировались как трёхмерные объекты. Нагрузка на верхнюю грань задавалась в виде равномерно распределенного по площадке контакта давления. Перемещения точек контакта опоры на нижней грани фиксировались в вертикальном направлении. На плоскостях симметрии задавались граничные условия запрета перемещений по нормали.

Распределение полей максимальных деформаций (в бетоне)  $\varepsilon_1$  при нагрузке близкой к разрушающей ( $F = 160$  кН) для балок, армированных стальной арматурой, представлено на рис. 3а. Максимальные деформации в бетонном теле составляют  $\varepsilon_1 = 0.0953$ . Соответствующее распределение полей повреждений представлено на рис. 3б.

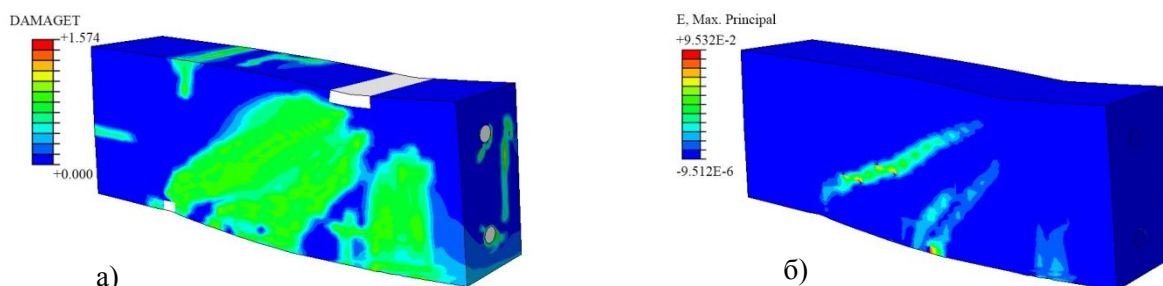


Рис. 3. Распределение полей: а) максимальных деформаций в бетоне, б) поврежденности

Сравнение расчетных и экспериментальных кривых зависимости прогиба нижней точки центрального сечения балки от нагрузки приведены на рис. 4. Решения, полученные с использованием упруго-пластической модели с учетом поврежденности и адгезии, практически полностью совпадают с результатами проведенных экспериментов. Значительные отличия в результатах наблюдаются только при нагрузках превышающих 80% от разрушающей.

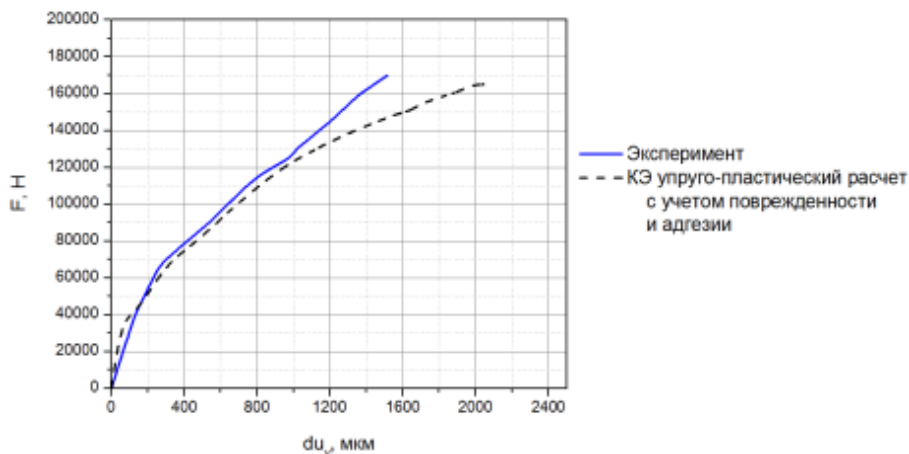


Рис. 4. График зависимости прогиба нижней точки центрального сечения балки от нагрузки

#### ЛИТЕРАТУРА:

1. Степанова В.Ф., Степанов А.Ю., Жирков Е.П. Арматура композитная полимерная. М: ООО «Бумажник», 2013. 200 с.
2. Богданова Е.Р., Бенин А.В., Беляев М.О., Семёнов С.Г., Семенов А.С. Исследование процессов деформирования и разрушения бетонных элементов, армированных стеклопластиковой арматурой // Материалы научно-практической конф. Неделя науки СПбГПУ. ИПММ. 2014. С. 6-9.
3. Бенин А.В., Гарбарук В.В. Планирование эксперимента. - СПб.: ПГУПС, 2010. –90 с.

4. Бенин А.В., Семёнов А.С., Семёнов С.Г., Федоров И.В. Конечно-элементное моделирование процессов неупругого деформирования и разрушения элементов железобетонных конструкций // Морские интеллектуальные технологии. 2011. № 3. С. 102-105.
5. Бенин А.В., Семёнов А.С., Семёнов С.Г., Мельников Б.Е. Математическое моделирование процесса разрушения сцепления арматуры с бетоном. Часть 1. Модели с учетом несплошности соединения // Инженерно-строительный журнал. 2013. № 5 (40). С. 86-99.
6. Бенин А.В., Семёнов А.С., Семёнов С.Г., Мельников Б.Е. Математическое моделирование процесса разрушения сцепления арматуры с бетоном. Часть 2. Модели без учета несплошности соединения // Инженерно-строительный журнал. 2014. № 1 (45). С. 23-40.

УДК 539.3

В.А. Борисенко, А.С. Семёнов, Б.Е. Мельников  
Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого

### ИССЛЕДОВАНИЕ ПРОЦЕССОВ ДЕФОРМИРОВАНИЯ И РАЗРУШЕНИЯ ДРЕВЕСНОГО СЛОИСТОГО ПЛАСТИКА, ИСПОЛЬЗУЕМОГО ДЛЯ ИЗГОТОВЛЕНИЯ ЛОНГБОРДОВ

В связи с набирающим популярность в России производством лонгбордов, выполнено исследование свойств многослойного композита, состоящего из склеенного деревянного шпона, в зависимости от направлений, толщин и последовательности укладки слоев. Технология производства древесных слоистых пластиков включает следующие этапы [1,2,3]. Листы сухого лущеного сортированного шпона, как правило березового, пропитывают спиртовым раствором феноло-формальдегидной смолы. Пропитка осуществляется в ванне, специальном агрегате или в клеевальцах. В смолу могут быть добавлены дополнительные ингредиенты - модификаторы. После пропитки шпон подсушивают при температуре 65-90°C. Сборку пакетов осуществляют с заданным, в зависимости от марки пластика, расположением волокон шпона в смежных слоях (параллельное, взаимно перпендикулярное, с поворотом на 45° и др.). Собранный пакет прессуют при температуре около 145°C при давлении 12,5-20 МПа (с последующим снижением температуры и давления).

Целью данной работы является экспериментальное исследование упругих и прочностных характеристик девятислойного древесного слоистого пластика для двух различных типов пакета шпона, представленных на рис. 1, и сопоставление их механических свойств. Исследования включают в себя проведение испытаний брусков различного типа на трехточечный изгиб, идентификация параметров композита и анализ полученных результатов.

Схема испытаний представлена на рис. 2. Размеры испытываемых образцов соответствуют ГОСТ 9625-87 [4]. Испытуемые образцы были вырезаны непосредственно из готовых лонгбордов, как показано на рис. 3, они отличались по толщине шпона в пакетах разных типов. Древесный слоистый пластик типа 1 имел толщину 10.2 мм, а типа 2 – толщину 13.6 мм. Бруски были ориентированы так, чтобы волокна внешних слоев шпона были направлены вдоль плоскости изгиба. Нагрузка прикладывалась по схеме трехточечного изгиба. Испытания проводились до разрушения возрастающей нагрузкой со скоростью 2 мм/мин.



Рис. 1. Типы пакетов 9-слойного пакета

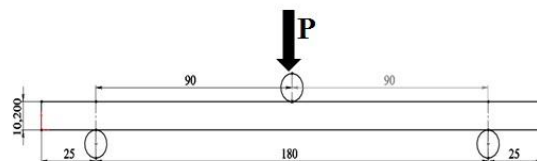


Рис. 2. Схема испытаний трехточечного изгиба

Эксперимент проводился на универсальной испытательной машине Instron модели 5965 серии Instron5900. Показания напряжений и перемещений снимались непосредственно с испытательной машины. Жесткостью самой машины можно было пренебречь в связи с основной целью - сравнить два типа пакета древесного слоистого шпона. Показания измерительной аппаратуры регистрировались с интервалом в 0.1 с. Общий вид установки для испытаний с установленным образцом приведен на рис. 4. Поведение испытываемых образцов изменялось в зависимости от типа пакета древесного слоистого шпона и уровня нагружения. Момент появления трещин фиксировался визуально и по появлению характерного спада напряжений на графике. Результаты испытаний представлены в виде зависимостей прогиб - нагрузка на рис. 5 и прогиб - напряжение на рис. 6. Необходимость рассмотрения второй зависимости вызвано различием площади поперечного сечения образцов.



Рис. 3. Заготовка для образцов

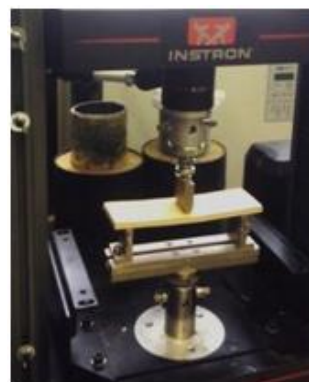


Рис. 4. Испытательная установка

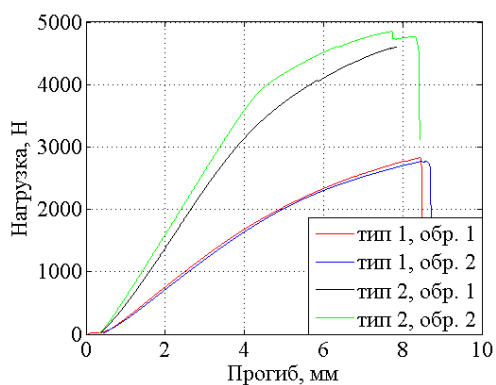


Рис. 5. Зависимость нагрузки от прогиба

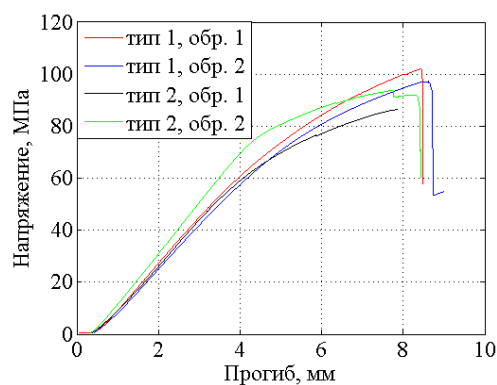


Рис. 6. Зависимость макс. напряжения от прогиба

Максимальные напряжения вычислялись на основе соотношения [4]:

$$\sigma_m = \frac{3Pl}{2bh^2},$$

где  $P$  – нагрузка, Н;  $l$  – расстояние между опорами, мм;  $b$  – ширина образца, мм;  $h$  – толщина образца, мм. Для определения модуля упругости использовалась формула из [4]:

$$E = \frac{Pl^3}{4bh^3 f},$$

где  $P$  – нагрузка, равная разности между 25 %  $P_{max}$  и 5%  $P_{max}$  пределами нагружения, Н;  $f$  – стрела прогиба, соответствующая нагрузке  $P$ , мм.

В таблице 1 представлено сравнение осредненных по результатам опытов пределов прочности и модулей упругости для пакетов двух типов.

Табл. 1. Результаты экспериментов

	тип 1	тип 2
$\sigma_m$ , МПа	99,42	90,09
$E$ , ГПа	9,3	7,24

Применим полученные результаты непосредственно к лонгборду типа «Фрирайд». Будем рассматривать нагрузку прикладываемую точно в центральном сечении (рис. 7), и в сечении с наименьшей площадью (рис. 8). Размеры лонгборда представлены на рис. 9, в качестве толщины возьмем среднюю толщину девятислойной доски – 11.5 мм.

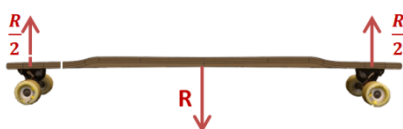


Рис. 7. Нагрузка в центральном сечении



Рис. 8. Нагрузка в узком сечении

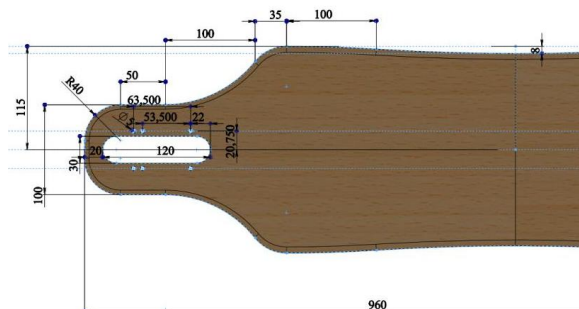


Рис. 9. Размеры лонгборда

Результаты расчетов максимально допустимых нагрузок для двух типов пакетов шпона приведены в табл. 2. В расчетах использовались соотношения [5]:

$$1) \sigma_{max} = |M_z|/W_z = 6|M_z|/(b_1 h^2) = 6R_{max} L/(4b_1 h^2)$$

$$2) \sigma_{max} = |M_z|/W_z = 6|M_z|/(b_2 h^2) = 21R_{max} L/(32b_2 h^2)$$

В табл. 2 приведены максимальные нагрузки для двух типов пакета шпона.

Табл. 2. Результаты расчетов предельно допустимых нагрузок на лонгборд

тип 1	$\sigma_{max} = 94,42$ МПа	для центрального сечения: $R_{max} = 1855,7$ Н
		для узкого сечения: $R_{max} = 1387,5$ Н
тип 2	$\sigma_{max} = 90,09$ МПа	для центрального сечения: $R_{max} = 1770,6$ Н
		для узкого сечения: $R_{max} = 1323,8$ Н

Полученные результаты показали, что тип 2, в котором преобладают продольные волокна, имеет меньший предел прочности, чем тип 1. Однако отличие в пределах прочности и в максимально допустимых нагрузках (табл. 2) незначительное. Важно отметить, что лонгборд должен сочетать упругость и прочность, соответственно при выборе материала доски необходимо знать ее назначение и возможные нагрузки. Тип 2 обладает меньшим модулем упругости (табл. 1), что делает лонгборды из этого материала более податливыми. Поэтому для данной доски больше подходит пакет типа 2, так как в ней важна податливость, а по прочности она удовлетворяет нормам.

#### ЛИТЕРАТУРА:

1. Шейдин И.А., Пюдик П.Э., Технология производства древесных пластиков и их применение, М., 1971.
2. Баженов В.А., Карасев Е.И., Мерсов Е.Д., Технология и оборудование производства древесных плит и пластиков, М., 1980.
3. Шулепов И.А., Доронин Ю.Г., Древесные слоистые пластики. - М.: Лесная промышленность, 1987.
4. ГОСТ 9625-87, Древесина слоистая клееная. Методы определения прочности и модуля упругости при статическом изгибе
5. Мельников Б.Е., Введение в сопротивление материалов. – СПб.: Издательство «Лань», 1999.

УДК 539.3

А.И. Грищенко, А.С. Семёнов, Л.Б. Гецов  
Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого

#### МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРОЦЕССОВ ПОЛЗУЧЕСТИ ЖАРОПРОЧНЫХ МОНОКРИСТАЛЛИЧЕСКИХ СПЛАВОВ С УЧЕТОМ ЭВОЛЮЦИИ МИКРОСТРУКТУРЫ

Развитие газотурбинных двигателей (ГТД) привело к необходимости применения жаропрочных материалов, в качестве которых в последнее время находят все более широкое применение монокристаллические сплавы на никелевой основе. Использование рабочих и сопловых лопаток, изготовленных из монокристаллических сплавов, позволяет значительно повысить рабочую температуру ГТД, что, в свою очередь, влечет повышение эффективности и экономичности ГТД. Лопатки являются наиболее ответственными деталями двигателя, испытывающими высокий уровень температур (до 1200 °С) и напряжений в совокупности с нестационарностью режимов нагрева и нагружения, возникновение резонансных колебаний. Действующие на рабочие лопатки ГТД центробежные и газодинамические силы, вызывают в них растяжение, изгиб и кручение. В связи с этим, возникает потребность в разработке уточненных моделей неупругого деформирования монокристаллических сплавов для оценки их прочности и долговечности. Целью исследований являлась разработка феноменологических моделей высокотемпературной ползучести монокристаллических сплавов на никелевой основе с учетом эволюции  $\gamma$  и  $\gamma'$  фаз.

На микроуровне монокристаллические сплавы на никелевой основе представляют собой квазипериодическую структуру, состоящую из двух фаз:  $\gamma$  фазы – твердого раствора легирующих элементов в никеле и стохастически расположенных в ней частиц  $\gamma'$  фазы, формирующуюся на основе  $Ni_3Al$ . Частицы  $\gamma'$  фазы представляют собой кубоиды со средним размером  $\sim 500$  нм, разделенные прослойками  $\gamma$  фазы с поперечным размером 50-90 нм, объемная доля  $\gamma'$  фазы составляет порядка 70 % [1, 2]. На рис. 1а. показана структура монокристаллических сплавов на микроскопическом уровне. В качестве элементарного представительного объема (ЭПО) монокристаллического сплава рассматривалась ячейка периодичности, состоящая из  $\gamma$  - матрицы и  $\gamma'$  - кубического включения (рис. 1б).

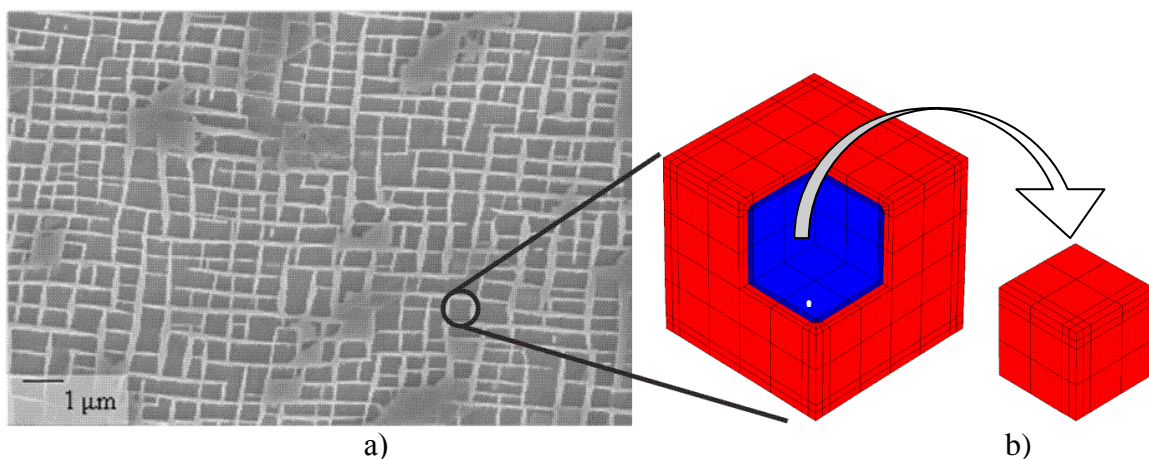


Рис. 1. Микроструктура монокристаллического сплава на никелевой основе:  
а) фото [3], б) ЭПО

Для прогнозирования долговечности и термической усталости [4] монокристаллических лопаток ГТУ необходимо применение уточненных моделей неупругого деформирования. В настоящее время предложен ряд физических и феноменологических моделей ползучести для монокристаллических материалов. Большинство моделей формулируются на макроскопическом уровне (см., например, [5-7]), однако, они не учитывают двухфазную структуру монокристаллических сплавов на никелевой основе. Напротив, существуют несколько моделей [8, 9], учитывающих микроструктурную морфологию (форму и размер обеих фаз), однако, в отличие от первых моделей, их использование требует весьма больших вычислительных затрат при проведении расчетов реальных лопаток ГТД. Компромиссный подход, заключающийся в применении микромеханически мотивированных феноменологических моделей, рассматривается в данной работе.

Для прогнозирования напряженно-деформированного состояния двухфазного ЭПО монокристаллического сплава на никелевой основе целесообразно применять микромеханические модели неупругого деформирования, учитывающие, что массоперенос при ползучести происходит в соответствии со скольжением в активных системах скольжения.

В этой работе предполагается, что вязкопластическое течение осуществляется как результат возможного скольжения в  $N$  системах скольжения, характеризуемых нормалью к плоскости скольжения  $\mathbf{m}$  и направлением скольжения  $\mathbf{s}$ . Монокристаллические никелевые сплавы имеют гранецентрированную кубическую решетку, соответственно для них необходимо учесть двенадцать октаэдрических систем скольжения  $\{111\}\langle 011 \rangle$  и шесть кубических систем скольжения  $\{001\}\langle 011 \rangle$ . При конечных деформациях, принимается концепция мультипликативного разложения градиента деформации  $\mathbf{F}$ :

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}^* \cdot \mathbf{F}^p, \quad (1)$$

где неупругая составляющая  $\mathbf{F}^p$  определяется уравнениями

$$\mathbf{L}^p = \dot{\mathbf{F}}^p \cdot \mathbf{F}^{p-1} = \sum_{\alpha=1}^N \dot{\gamma}^{\alpha} \mathbf{s}^{\alpha} \mathbf{m}^{\alpha}, \quad \dot{\gamma}^{\alpha} = f(\tau^{\alpha}, \dots), \quad \tau^{\alpha} = \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{s}^{\alpha} \mathbf{m}^{\alpha}, \quad (2)$$

а упругая  $\mathbf{F}^*$  при помощи равенств

$$\mathbf{E}^* = \frac{1}{2}(\mathbf{C}^* - \mathbf{1}) = \frac{1}{2}(\mathbf{F}^* \cdot \mathbf{F}^{*T} - \mathbf{1}), \quad \mathbf{S}^* = {}^4\mathbf{D} \cdot \mathbf{E}^*, \quad \mathbf{S}^* = \mathcal{J}\mathbf{F}^{*-1} \cdot \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{F}^{*-T}. \quad (3)$$

Множитель  $\dot{\gamma}^\alpha$ , характеризующий интенсивность неупругой деформации в системе скольжения  $\alpha$ , рассчитывался на основе уравнения:

$$\dot{\gamma}^\alpha = A^\alpha |\tau^\alpha|^n \text{sign}(\tau^\alpha). \quad (4)$$

Доля  $\gamma'$  фазы в общем объеме монокристаллического сплава на никелевой основе является одним из основных параметров, влияющих на свойства ползучести сплава. Для моделирования влияния доли  $\gamma'$  фазы на свойства ползучести монокристаллического сплава на никелевой основе проведена серия вычислительных экспериментов с объемной долей  $\gamma'$  фазы, меняющийся в пределах от 40% до 90%. Результаты моделирования представлены на рис. 2а. Параметры ползучести для уравнения (4) брались для сплава ЖС32 при 1050 °С: для  $\gamma'$  фазы  $A=0.61 \cdot 10^{-51}$ ,  $n=5.36$  и для  $\gamma'$  фазы  $A=1.99 \cdot 10^{-41}$ ,  $n=4.24$  [3].

Многовариантные вычислительные эксперименты показали, что возрастание доли  $\gamma'$  фазы приводит к уменьшению скорости ползучести (см. рис. 2 а). Сравнение результатов конечно элементного моделирования и экспериментальных данных [10] для кривых ползучести, полученных для сплава ЖС32 при температуре 1050 °С для объемной доли  $\gamma'$  58% и 70% показало хорошее совпадение (см. рис. 2 б).

Изменение формы кубоидных включений  $\gamma'$  фазы в процессе ползучести вследствие раффинга в данном исследовании не учитывалось. При варьировании объемной долей  $\gamma'$  фазы использовались топологически эквивалентные конечно-элементные модели (Рис. 1б), учитывающие скругление на ребрах и в углах включения.

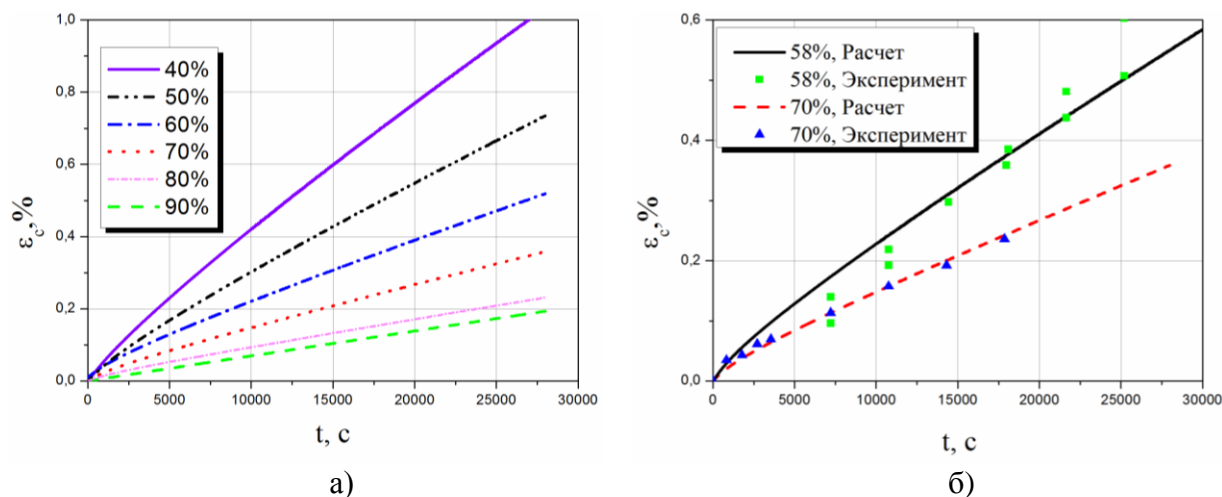


Рис. 2. Кривые ползучести для ЭПО монокристаллического сплава ЖС32 с различными долями  $\gamma'$  фазы (а) и сравнение с экспериментом (б)

Результаты получены с использованием КЭ программы PANTOCRATOR [11], обладающей возможностью проведения расчетов с использованием микромеханических моделей ползучести монокристаллических материалов.

#### ЛИТЕРАТУРА:

1. Шалин Р.Е., Светлов И.Л., Качалов Е.Б. и др. Монокристаллы никелевых жаропрочных сплавов – М.: Машиностроение, 1997. – 336с.
2. Каблов Е.Н., Петрушин Н.В., Елютин Е.С. Монокристаллические жаропрочные сплавы для газотурбинных двигателей // Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. 2011. №2. С. 38–52.
3. Tresa M. Pollock, Sammy Tin. Nickel-Based Superalloys for Advanced // Turbine Engines: Chemistry, Microstructure, and Properties // Journal of propulsion and power. 2006. Vol. 22, №. 2.
4. Семёнов А.С., Л.Б. Гецов. Критерии термоусталостного разрушения монокристаллических жаро-

- прочных сплавов и методы определения их параметров // Проблемы прочности. 2014, № 1. С. 50-62.
5. Бессон Ж., Каето Ж., Шабош Ж.Л., Форест С. Нелинейная механика материалов. Санкт-Петербург, 2010. – 397с.
6. Семёнов А.С.. Идентификация параметров анизотропии феноменологического критерия пластичности монокристаллов на основе микромеханической модели // Научно-технические ведомости Санкт-Петербургского государственного политехнического университета. Физико-математические науки. 2014. Т. 194, №2. С. 15-29.
7. Семёнов А.С., Гецов Л.Б., Семёнов С.Г., Грищенко А.И. Сопротивление деформированию и разрушению монокристаллических жаропрочных сплавов при статическом и циклическом нагружении // Вестник СГАУ, 2014 г. Выпуск 5 (47), Часть 3. С. 70-79.
8. Estevez R., Hoinard G., Franciosi P. Hardening anisotropy of  $\gamma/\gamma'$  superalloy single crystals—II. Numerical analysis of heterogeneity effects // Acta Materialia. 1997; 45(4):1567-1584.
9. Busso E.P., Meissonnier F.T., O'Dowd N.P. Gradient-dependent deformation of two-phase single crystals // Journal of the Mechanics and Physics of Solids. 2000 (48) 2333–2361.
10. Tikhomirova E.A., Rybnikov A.I., Getsov L.B. // Metal Science and Heat Treatment (2016) to be published.
11. Семёнов А.С. PANTOCRATOR – конечно-элементный программный комплекс, ориентированный на решение нелинейных задач механики / Тр. V межд. конф. Научно-технич. проблемы прогноз. надежности и долговечн. конструкций и методы их решения. Изд-во СПбГПУ; 2003. С. 466-480.

УДК 539.43

Р.В. Гучинский, С.В. Петин  
Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого

## ОЦЕНКА РАССЕЯНИЯ УСТАЛОСТНОЙ ДОЛГОВЕЧНОСТИ ПРИ ПОМОЩИ МОДЕЛИРОВАНИЯ НЕОДНОРОДНОСТИ НАКОПЛЕНИЯ ПОВРЕЖДЕНИЙ

Результаты испытаний на усталостную долговечность всегда характеризуются разбросом, оценка которого является важной задачей для проектирования с заданными показателями надежности элементов конструкций, работающих при переменных нагрузках [1]. Обычно стадия зарождения трещины усталости характеризуется большим разбросом долговечности, чем стадия ее развития. Экспериментально показано, что основными источниками разброса на стадии зарождения трещины являются неоднородность структуры материала и присутствие начальных дефектов [2]. Для моделирования влияния неоднородности материала на разброс долговечности обычно вводится различное сопротивление материалов накоплению повреждений [3], которое может быть описано правилом линейного суммирования повреждений [4]. Voronoi Finite-Element Method позволяет эффективно моделировать структуру материала в виде зерен, для которых различие податливости может быть задано с помощью вариации модуля Юнга, либо характеристик упрочнения [5, 6].

Целью данной работы является моделирование зарождения и развития плоской трещины в стальных цилиндрических образцах, испытываемых при одноосном симметричном нагружении с учетом эволюции области пластической деформации и неоднородности сопротивления материала переменному нагружению, а также оценка влияния параметров введенной неоднородности на рассеяние долговечности.

В соответствии с предложенным подходом область развития трещины разбивается на ряд конечных элементов материала примерно равного размера. Для описания упруго-пластических циклических свойств материала используется модель кинематического упрочнения, критерий пластичности Мизеса, а также аппроксимация Рэмберга-Осгуда обобщенной циклической кривой:



$$\varepsilon_a = \frac{\sigma_a}{E} + \left( \frac{\sigma_a}{K'} \right)^{1/n'} \quad (1)$$

где  $\varepsilon_a$  и  $\sigma_a$  - амплитуды полной деформации и напряжения,  $K' = 1530$  МПа,  $n' = 0,157$  – параметры упрочнения материала, принятые для элементов перлита рассматриваемой высокопрочной стали С45. Предполагается, что циклический предел пропорциональности элементов феррита в два раза ниже, чем у элементов перлита. Сопротивление усталости элементов материала оценивается деформационным критерием Коффина – Тавернелли:

$$\Delta\varepsilon_i^j = C(N_i^j)^{-b} + 2\sigma_{-1} / E, \quad (2)$$

где  $\Delta\varepsilon_i^j$  и  $N_i^j$  - размах полных деформаций и число циклов до разрушения  $i$ -го элемента на  $j$ -м шаге процедуры;  $\sigma_{-1}$  - предел усталости стали С45, который был принят равным 340 МПа на основании испытания образца с увеличивающейся амплитудой (испытывались стандартные цилиндрические образцы с длиной рабочей части 12 мм и диаметром 7,5 мм по симметричному циклу при контроле амплитуды напряжения.); параметры  $C = 0,125$ ,  $b = 0,4$  были заданы условно из-за ограниченности экспериментальных данных.

На первом шаге процедуры на основании (2) вычисляется число циклов до разрушения каждого элемента, из них выбирается минимальное значение. Для каждого элемента в соответствии с этим значением вычисляется повреждение по правилу линейного суммирования Пальмгрена-Майнера. Повреждение наиболее напряженного элемента становится равным единице и его разрушение моделируется уменьшением жесткости на несколько порядков по сравнению с окружающим материалом. На следующем шаге рассчитывается обновленное поле деформаций элементов и определяется число циклов до разрушения следующего элемента с учетом накопленного им на предыдущем шаге повреждения. Разрушенные элементы формируют фронт трещины. Накопленное  $i$ -м элементом повреждение за  $j$  шагов можно представить так:

$$d_i^j = \sum_j \frac{\min\{n_i^j\}}{N_i^j} = \sum_j \frac{\min\{N_i^j(1 - d_i^{j-1})\}}{N_i^j}, \quad (3)$$

где  $n_i^j$  - число циклов на  $j$  - м шаге, оставшееся до достижения  $i$ -м элементом единичного повреждения.

Идея оценки накопленного в элементах материала повреждения была разработана первоначально для анализа развития сквозных трещин усталости при плоском напряженном состоянии [7]. Однако дальнейшие исследования показали возможность применения этой методики и для пространственных трещин [8].

Для оценки влияния неоднородности структуры материала на процесс накопления повреждений было разработано три разных по подробности конечно-элементных модели рабочей части образца. Элементы феррита случайным образом располагались среди кластеров феррита в соответствии с экспериментально полученным объемным содержанием феррита 16,2%, для каждой модели было проанализировано несколько видов распределений элементов материала. В соответствии с предложенной схемой моделирования развития трещины первым разрушается элемент в одной из областей скопления феррита из-за его предполагаемой большей податливости. Этот элемент определяет поперечное сечение, в котором развивается плоская трещина усталости. Результаты моделирования показывают, что трещина зарождается, как правило, в приповерхностных слоях (рис. 1). В случае более равномерного распределения элементов феррита образуются множественные очаги разрушения, однако довольно быстро определяется доминирующая макротрещина и процесс повреждения во второстепенных очагах замедляется. В результате накопления повреждений

и зарождения макротрещины напряженное состояние в области ее развития значительно изменяется. Резкое одностороннее увеличение податливости образца приводит к возникновению изгиба и нестабильному развитию трещины.

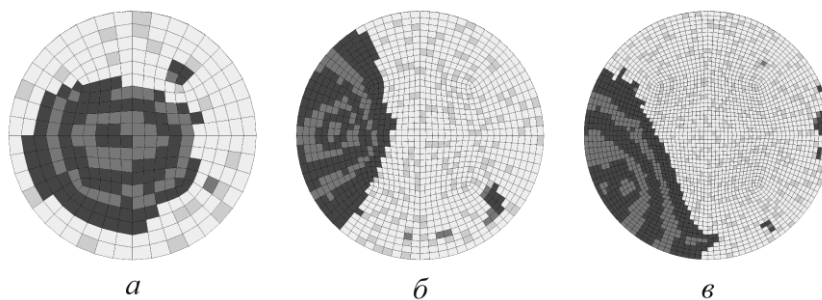


Рис. 1. Примеры эволюции фронта трещины при  $\sigma_a = 370$  МПа для КЭ сеток с размером элементов по диаметру: *a* – 375 мкм, *б* – 187,5 мкм, *в* – 125 мкм

Накопление усталостных повреждений является в существенной степени случайным процессом [3]. Выборочные функции такого процесса могут быть представлены в виде зависимостей относительной площади трещины от числа циклов. По результатам моделирования стадия зарождения трещины составляет около 75-90% общей долговечности (рис. 2). Поэтому число циклов до разрушения образцов с точностью более 97% может определяться при относительном размере трещины 0,1.

Получаемый расчетом разброс долговечности для пяти распределений элементов материала с размером элементов по диаметру 187,5 мкм хорошо согласуется с ограниченными экспериментальными данными (рис. 3). Рассеяние числа циклов до наступления критического состояния (условно определяемое соотношением  $A_{cr} / A_0 = 1/3$ ) сильно зависит от числа рассматриваемых моделей и введенного различия в циклическом упрочнении двух фракций материала. Прямое значение для оценки долговечности также имеют принятые параметры критерия разрушения. Причем, при изменении параметра «С» критерия (1) на 10% число циклов изменяется примерно на 30%, а вариация параметра «*b*» в таких же пределах может приводить к увеличению или сокращению долговечности в 2,5-4 раза. Для более корректного представления упруго-пластического поведения материала и получения параметров деформационного критерия разрушения необходимы испытания на различных структурных уровнях серий стандартных образцов при различных амплитудах нагружения.

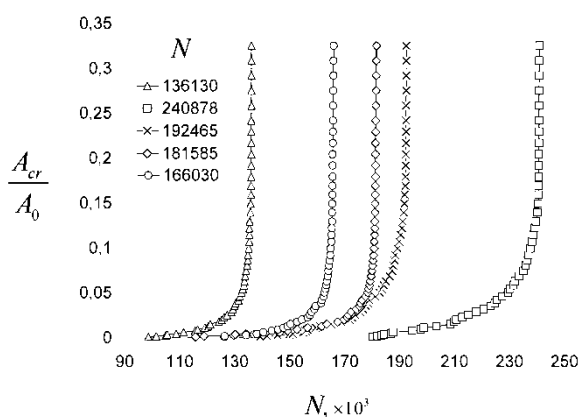


Рис. 2. Выборочные функции процесса развития повреждения для пяти распределений типа «б» при  $\sigma_a = 370$  МПа

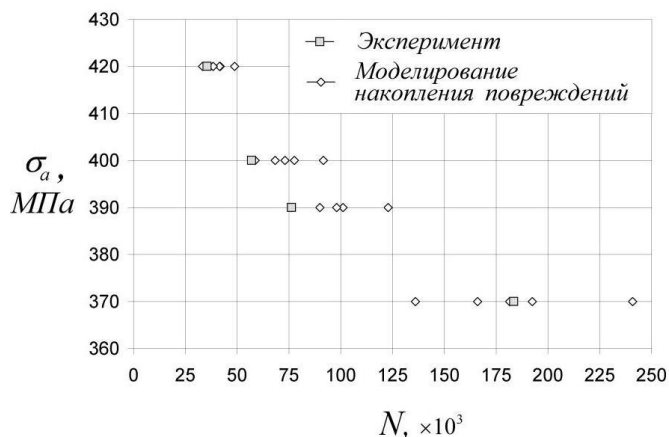


Рис. 3. Сопоставление экспериментальной и вычисленной при моделировании долговечности образцов для пяти распределений типа «б»

Также стоит отметить, что в расчетах не учитывался ряд второстепенных факторов: начальный уровень поврежденности образцов; различие поверхности образцов, определяемое допуском на шероховатость; точность изготовления; условия окружающей среды и тщательность проведения испытаний.

#### ЛИТЕРАТУРА:

1. Петин С.В., Гучинский Р.В. Разработка узла конструкции судна с учетом условия усталостной долговечности // Научно-технические ведомости СПбГПУ. - 2012. - № 4(159). - С. 177-186.
2. Laz P.J., Craig B.A., Hilberry B.M. A probabilistic total fatigue life model incorporating material inhomogeneities, stress level and fracture mechanics // Int. J. Fatigue. - 2001. - V. 23. - P. 119-127.
3. Bolotin V.V., Babkin A.A., Belousov I.L. Probabilistic model of early fatigue crack growth // Prob. Eng. Mech. - 1998. - V. 13, №3. - P. 227-232.
4. Rinaldi A., Peralta P., Krajcinovic D., Lai Y.C. Prediction of scatter in fatigue properties using discrete damage mechanics // Int. J. Fatigue. - 2006. - V. 28. - P. 1069-1080.
5. Warhadpande A., Jalalahmadi B., Slack T.S., Sadeghi, F. A new finite element fatigue modeling approach for life scatter in tensile steel specimens // Int. J. Fatigue. - 2010. - V. 32, №4. - P. 685-697.
6. Bomidi J.A.R., Weinzapfel N., Wang C.-P., Sadeghi F. Experimental and numerical investigation of fatigue of thin tensile specimen // Int. J. Fatigue. - 2012. - V. 44. - P. 116-130.
7. Ellyin F., Fakinlede C.O. Probabilistic simulation of fatigue crack growth by damage accumulation // Eng. Fract. Mech. - 1985. - V. 22, №4. - P. 697-712.
8. Petinov S.V., Guchinsky R.V. Fatigue of fillet-welded joint assessment by the FEA simulation of damage accumulation // Инженерно-строительный журнал. - 2011. - №4(22). - С. 5-9.

УДК 539.3, 537.226.4

И.В. Ивашов, А.С. Семёнов

Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого

### МОДЕЛИРОВАНИЕ ГИСТЕРЕЗИСНЫХ ЯВЛЕНИЙ В БЕССВИНЦОВЫХ СЕГНЕТОЭЛЕКТРОЭЛАСТИКАХ ПРИ НАЛИЧИИ ОРТОРОМБИЧЕСКОЙ ФАЗЫ

*Введение.* Поликристаллическая сегнетопъезокерамика получила широкое распространение на практике. Она используется для изготовления конденсаторов, пьезоэлектрических преобразователей и фильтров, в устройствах памяти, в радио-, акусто-, оптоэлектронике, а также являются практически единственными материалами для гидроакустических устройств, используются для изготовления высокоточных актуаторов и сенсоров, акселерометров, микромоторов, устройств памяти, дизель- и бензиновых инжекторов, струйных принтеров, устройств беспроводной связи.

В настоящее время для изготовления пьезокерамических изделий, в основном, используется цирконат-титанат свинца (ЦТС). Основными достоинствами ЦТС являются достаточно большие уровни спонтанной деформации по сравнению с другими видами пьезокерамики. Основным недостатком считается низкая экологичность.

Повсеместное использование ЦТС керамики вызывает значительные выбросы свинца в атмосферу, что происходит при производстве керамики, эксплуатации, а также при утилизации. В результате, Европейский союз в 2003 году включил ЦТС керамику в список вредных веществ, что ограничивает ее использование. Впоследствии многие другие страны, такие как США, Норвегия, Китай, Япония, Южная Корея начали вводить подобные ограничения.

*Цель работы* – моделирование поведения сегнетоэластичного материала с использованием микромеханических моделей. Сегнетоэластичники имеют кристаллическую структуру. В неполяризованном состоянии кристалл имеет

объемноцентрированную кубическую решетку (рис. 1а). При поляризации ион, находившийся в центре решетки, смещается в одно из трех возможных положений: в сторону грани, в сторону ребра, в сторону угла. В результате такого смещения возникает дипольный момент и решетка искажается, принимая тетрагональную, моноклинную (орторомбическую) или ромбоэдрическую форму (рис. 1б, в, г). Нелинейное поведение таких материалов обусловлено процессами переключения: ион, находящийся вблизи грани, ребра или угла решетки переходит в другое положение, при этом меняется направление поляризации и меняется тензор остаточной деформации.

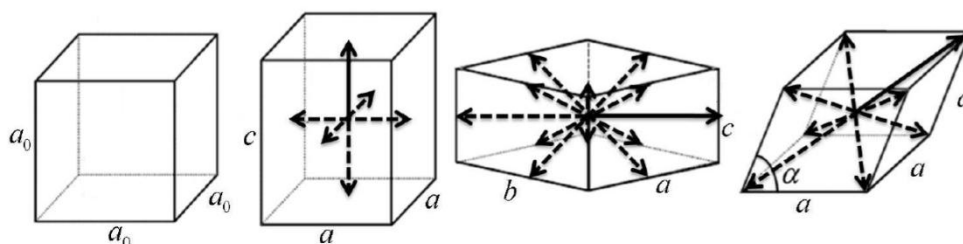


Рис. 1. Основные типы кристаллических решеток сегнетоэлектродупругих материалов: а) кубическая, б) тетрагональная, в) моноклинная (орторомбическая), г) ромбоэдрическая. Сплошной стрелкой показано направление остаточной поляризации, пунктирными – возможные варианты переключений

Особый интерес вызывает смесь этих фаз в виде доменов в поликристалле. В работе [1] проведено теоретическое исследование, в котором показано, что вблизи морфотропной границы тетрагональной и ромбоэдрической фаз для кристалла ЦТС значительно увеличивается спонтанная (остаточная) деформация (рис. 2), что является одним из основных параметров определяющих практическую применимость материала.

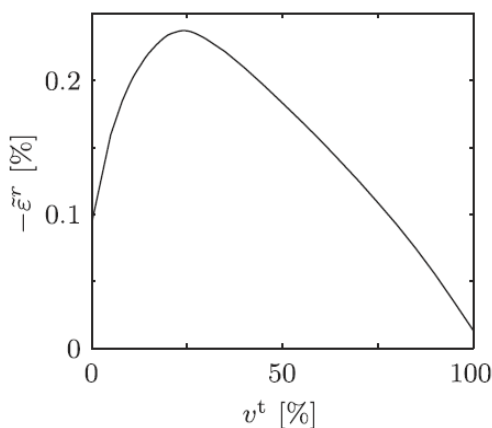


Рис. 2. Макроскопическая остаточная деформация в зависимости от доли тетрагональной решетки в двухкомпонентной смеси тетрагональной и ромбоэдрической фаз [1]

В работе [2] экспериментальным путем исследуется возможность существования тройной морфотропной границы трехкомпонентного материала BNT-BKT-KNN. На рис. 3 представлена схема, характеризующая возможные виды кристаллических решеток в зависимости от процентного содержания каждой компоненты. В результате исследования были обнаружены большие остаточные деформации вблизи предполагаемой тройной морфотропной границы.

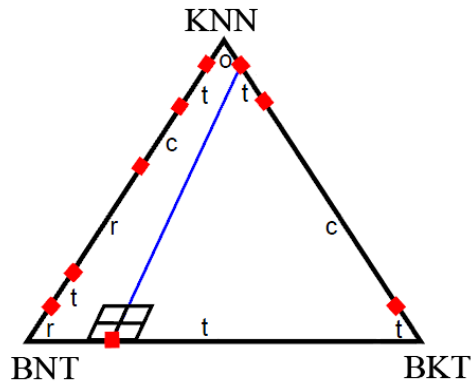


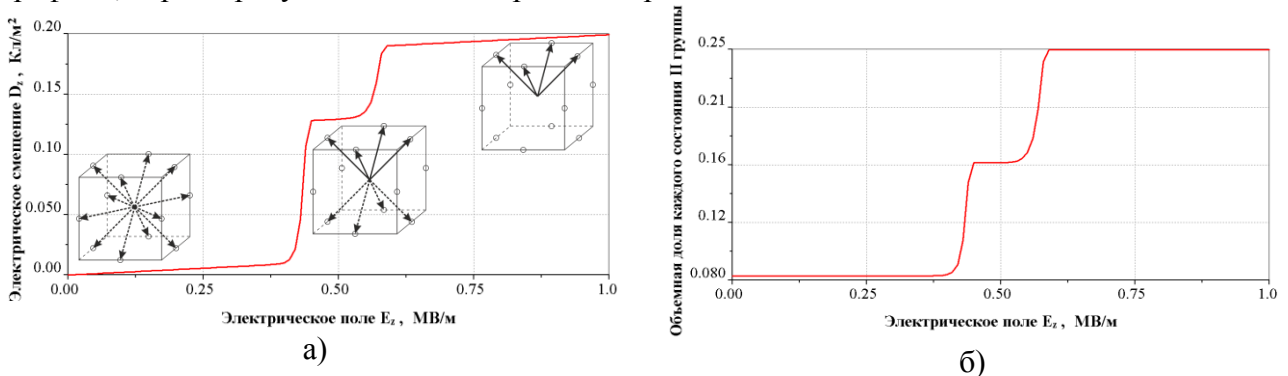
Рис. 3. Схема трехкомпонентного материала BNT-BKT-KNN. Буквами указаны типы решетки для каждой смеси: с – кубическая, t – тетрагональная, o – орторомбическая, r – ромбоэдрическая. Маркерами отмечены двойные морфотропные границы. В нижней части рисунка отмечена область, вблизи которой производился поиск тройной морфотропной границы в работе [2]

На данный момент теоретическое исследование всевозможных многокомпонентных смесей затруднено и не существует программного комплекса, способного смоделировать все возможные варианты различных фаз. В работах [3,4] показано применение метода конечных элементов для моделирования гистерезисных явлений для тетрагональной фазы в кристаллах ЦТС, а также выполнено сравнение с экспериментальными данными.

Для моделирования многофазных структур требуется программная реализация других видов кристаллических решеток, а также переход одного типа решетки в другой.

*Результаты.* В данной работе показывается принцип работы реализованной модели орторомбической решетки при одноосном нагружении на примере монокристалла. Орторомбическая решетка имеет 12 состояний и 4 типа переключений:  $60^\circ$ ,  $90^\circ$ ,  $120^\circ$ ,  $180^\circ$ , каждый тип переключения имеет свое значение энергии, принимаются значения: 100 кДж, 150 кДж, 200 кДж, 300 кДж. В качестве параметров материала взяты стандартные значения PZT PIC 151.

В начальный момент в монокристалле присутствует смесь всех 12 состояний в равных долях (рис. 4а). При одноосном нагружении внешним электрическим полем вдоль вертикальной оси возникает три группы состояний. Сначала достигается пороговое значение энергии 100 кДж и происходят переключения на  $60^\circ$ , что соответствует переключениям из положений вблизи вертикальных ребер (I группа) в положения вблизи горизонтальных ребер верхней грани решетки (II группа). Когда объемная доля всех состояний I группы достигает нуля, происходят переключения при энергии 150 кДж ( $90^\circ$ ) из положений вблизи ребер нижней грани (III группа) в соответствующие положения вблизи ребер верхней грани (II группа). В конечном итоге остается только II группа состояний. На рис. 4 представлены графики, характеризующие данный процесс переключений.



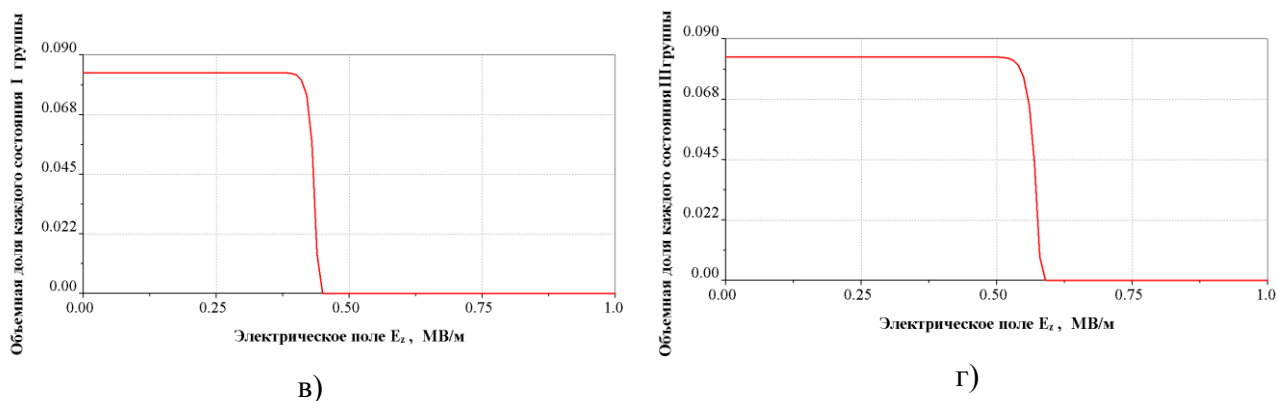


Рис. 4. а) нелинейная зависимость индукции электрического поля от интенсивности электрического поля; б), в), г) – значения внутренних переменных, которые характеризуют объемные доли каждого состояния по группам

*Выводы.* При рассмотрении различных многофазных структур сегнетокристаллов наиболее точным является микромеханическое моделирование с учетом особенностей каждой фазы. Каждый тип решетки имеет свои типы переключений, а также соответствующие им уровни энергии. В дальнейшем планируется использовать данный подход применительно к конечно-элементному моделированию [5] многофазных структур.

#### ЛИТЕРАТУРА:

1. Neumeister, P., Balke, H., 2011. Micromechanical modelling of remanent properties of morphotropic PZT. *J. Mech. Phys. Solids* 59, 1794–1807.
2. Seifert K. *Lead-Free Piezoelectric Ceramics*. MPhysaus Mönchengladbach, Darmstadt. 2010.
3. Семёнов А.С., Бальке Х., Мельников Б.Е. Моделирование поликристаллической пьезокерамики методом конечно-элементной гомогенизации // *Морские интеллектуальные технологии*. 2011. №3. С. 109–115.
4. Осипова Н.Г., Семёнов А.С. Моделирование нелинейного поведения пьезокерамики тетрагональной структуры методами конечно-элементной гомогенизации // *Научно-технические ведомости СПбГПУ. Физико-математические науки*. 2011. Т. 4. № 134. С. 56-64.
5. Семёнов А.С., Лисковски А.Ч., Ноймайстер П., Бальке Х., Ле-Захаров С.А., Додонов П.А., Мельников Б.Е. Эффективные методы решения нелинейных конечно-элементных задач сегнето-электроупругости // *Морские интеллектуальные технологии*. 2010. № 1. С. 55-61.

УДК 539.3

И.А. Игнатович, А.С. Семёнов, Л.Б. Гецов  
Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого

#### ВЕРИФИКАЦИЯ ДЕФОРМАЦИОННОГО КРИТЕРИЯ ПО РЕЗУЛЬТАТАМ АНАЛИЗА ТЕРМОУСТАЛОСТНОЙ ПРОЧНОСТИ ДИСКОВ ГАЗОВЫХ ТУРБИН

Повторные пуски даже сравнительно холодных дисков могут вызывать их разрушение от малоциклового усталости вследствие возникновения и распространения макротрещин, зарождающихся в местах концентрации напряжений. В дисках стационарных газотурбинных установок (ГТУ) с массивными турбинными дисками термоусталостные разрушения вызываются значительными термическими напряжениями, нередко меняющими знак во время цикла. В местах концентрации напряжений наблюдается петля гистерезиса, ширина которой определяется упруго-пластическими деформациями и деформациями ползучести.

Одна из основных причин разрушения дисков ГТУ - возникновение и развитие термоусталостных трещин на ободе диска, под влиянием циклического термо-механического

воздействия [1]. Анализ напряженно-деформированного состояния дисков ГТУ в данной работе производился методом конечных элементов (КЭ) в трехмерной постановке с использованием термо-упруго-вязко-пластических моделей. Деформационный критерий термической усталости [1-3] учитывает циклические и односторонне накопленные деформации пластичности и ползучести, и позволяет с высокой степенью точности произвести оценку числа циклов до зарождения макротрещины. В данном исследовании верификация деформационного критерия производилась на основе сопоставления результатов КЭ расчетов циклической долговечности с результатами натуральных испытаний для различных конфигураций дисков, изготовленных из разных материалов, в частности из сплавов на никелевой основе, перлитных и аустенитных сталей. Рассматривались различные программы изменения температуры и числа оборотов, соответствующие натурным экспериментам, проведенным в ЦНИИТМАШ [4].

В расчетах использовались определяющие уравнения термо-упруго-вязко-пластического материала с учетом нелинейного изотропно-кинематического упрочнения [5,6] (модель Шабоса для пластичности и теория упрочнения для ползучести) для описания поведения материала при несимметричном непропорциональном переменном циклическом нагружении. Предполагается, что скорость деформации допускает аддитивную декомпозицию на упругую, пластическую, вязкую (ползучую) и температурную составляющие:

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}} = \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^e + \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^c + \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p + \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^T . \quad (1)$$

Для определения числа циклов до разрушения использовался деформационный критерий [3]

$$D = \sum_{j=1}^N \left( \frac{\Delta \varepsilon_{eqj}^p}{C_1(T)} \right)^k + \sum_{j=1}^N \left( \frac{\Delta \varepsilon_{eqj}^c}{C_2(T)} \right)^m + \max_{0 \leq t \leq t_{\max}} \frac{\varepsilon_{eq}^p}{\varepsilon_r^p(T)} + \max_{0 \leq t \leq t_{\max}} \frac{\varepsilon_{eq}^c}{\varepsilon_r^c(T)} = 1 . \quad (2)$$

Рассмотрим особенности решения рассматриваемого класса задач на примере разгонного диска №138, изготовленного из сплава ЭИ765 на никелевой основе. Сектор диска (1/72 часть), включающий только один паз ёлочного замка под потенциальное хвостовое соединение с лопаткой, для которого при решении задач непосредственно производилось КЭ разбиение показан на рис. 1а.

При проведении КЭ расчетов при нестационарных режимах работы ГТУ в качестве нагрузок на диск задавались:

- центробежное воздействие непосредственно на материал диска ( $\omega=0 \div 12\,700$  об/мин),
- центробежное воздействие от грузов, вставленных в пазы ( $\omega=0 \div 12\,700$  об/мин),
- переменное во времени и по пространству поле температур ( $T(x, y, z, t)$ ).

На боковых сторонах сектора диска задавались условия циклической симметрии. На внутреннем радиусе, граничащем с валом задавались нулевые радиальные перемещения. Для исключения твердотельных перемещений задавались в одной точке на внутреннем радиусе нулевое осевое перемещение. Период термомеханического цикла составлял 130 минут.

Конечно-элементный анализ диска при сложной термо-механической циклической нагрузке с использованием термо-упруго-вязко-пластического материала модели показывает, что наибольшие напряжения расположены в зоне концентрации напряжений обода диска в нижней части паза (точка А на рис. 1б). Эта точка соответствует местоположению возникновения трещины в эксперименте.

Интенсивность напряжений по Мизесу для критической точки изменяется с течением времени стабилизируясь в течение первых пяти циклов. Интенсивность напряжений для 4 характерных моментов в пределах цикла показаны на рис. 2.

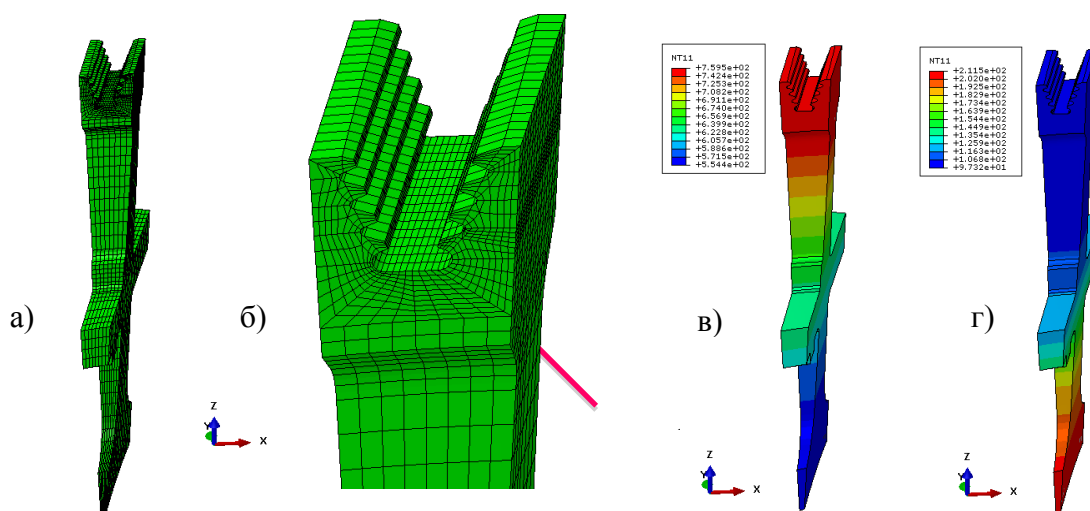


Рис. 1. а) КЭ модель сектора диска №138; б) фрагмент обода КЭ модели диска; в) максимальная температура при циклической нагрузке; г) минимальная температура при циклической нагрузке

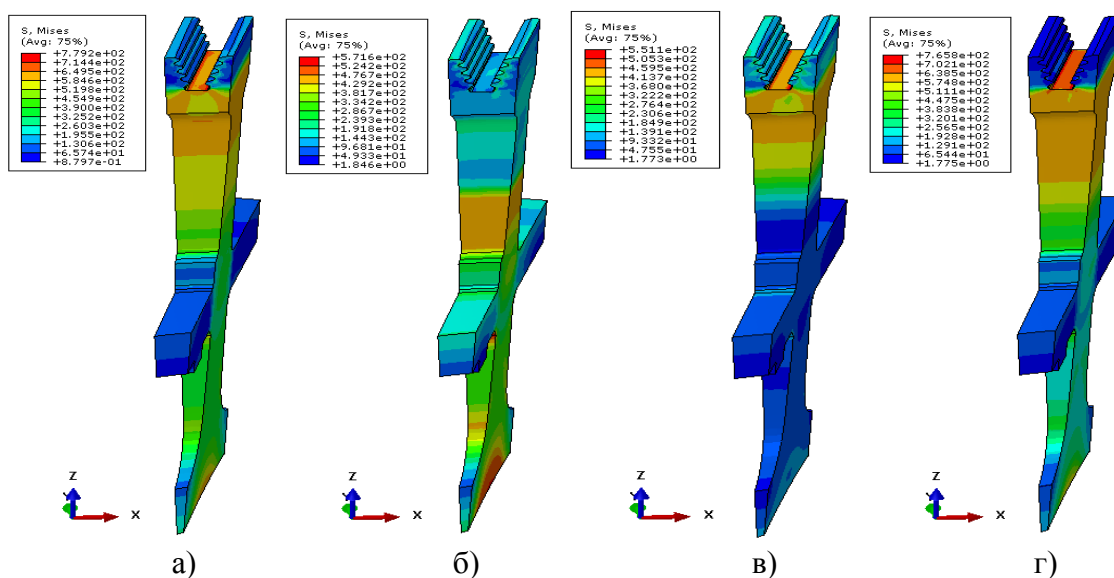


Рис. 2. Распределение полей интенсивности напряжений по Мизесу для четырех характерных моментов нагружения: а) 6 мин.; б) 18 мин.; в) 48 мин.; г) 113 мин

Аналогичным образом было получено решение краевых задач еще для трех вариантов дисков ГТУ. Результаты анализа долговечности всех четырех рассмотренных дисков приведены в табл. 1. Представлены результаты расчета поврежденности  $D$  в наиболее нагруженной точке диска для числа термоциклов нагружения, после которых в эксперименте наблюдалось возникновение макротрещины. Следует отметить хорошую точность прогнозов деформационного критерия в сравнении с данными эксперимента [4] ( $D = 1$ ).



Табл. 1. Результаты расчета поврежденности  $D$  для числа циклов до разрушения, наблюдавшегося в экспериментах [4]

Номер диска	Модель упруго-вязко-пластичности с изотропным упрочнением [7, 8]	Модель упруго-вязко-пластичности с нелинейным изотропно-кинематическим упрочнением
№137	0.98	1.06
№138	1.12	1.20
№ЭН-1	<b>&gt;4.4</b>	1.23
№ЭК-1	1.19	1.01

В расчетах рассматривались две модели материала: с учетом [5, 6] и без учета [7, 8] нелинейного кинематического упрочнения. Наилучшее совпадение результатов расчета с экспериментом мы наблюдаем в модели вязко-упруго-пластичности с нелинейным изотропно-кинематическим упрочнением, что указывает на актуальность учета нелинейного кинематического упрочнения при анализе процессов циклического деформирования и оценке долговечности дисков газовых турбин.

Улучшение точности прогноза долговечности диска может быть сделано на основе анализа кинетики роста трещины [9, 10].

#### ЛИТЕРАТУРА:

1. Гецов Л.Б. Материалы и прочность деталей газовых турбин. В двух книгах. Книга 2. Рыбинск: ООО "Издательский дом Газотурбинные технологии. 2011, 495с.
2. Гецов Л.Б. Деформационный критерий разрушения материалов при циклически изменяющихся напряжениях и температурах // Энергомашиностроение. 1972. №10, .
3. Гецов Л.Б., Семёнов А.С. Критерии разрушения поликристаллических и монокристаллических материалов при термоциклическом нагружении // Труды ЦКТИ, вып. 296, 2009, С. 83-91.
4. Анализ дисков газовых турбин, отчет ЦНИИТМАШ. 1970.
5. Бессон Ж., Каето Ж., Шабош Ж.-Л., Форест С. Нелинейная механика материалов. СПб.: СПбПУ, 2010. 397 с.
6. Семёнов А.С. Вычислительные методы в теории пластичности. // Изд-во СПбГПУ. 2008. 211 с.
7. Гецов Л.В., Кабелевский М.Г. К вопросу о теории пластичности и ползучести при циклическом неизотермическом нагружении // Проблемы прочности. – 1978. №6. С.44-48.
8. Гецов Л.Б., Нигин А.А., Кабелевский С.Г., Кононов К.П. Прогнозирование термоциклической долговечности турбинных дисков по данным стендовых испытаний // Проблемы прочности. 1982. № 8. С. 61-66
9. Semenov A.S., Semenov S.G., Nazarenko A.A., Getsov L.B. Computational methods for determining the fatigue, creep and thermal fatigue crack growth rate in GTE blades // Materials and technology. 2012. № 3. P. 197–203.
10. Гецов Л.Б., Семёнов А.С., Семенов С.Г. Обеспечение надежности эксплуатации газотурбинных установок компрессорных станций // Газовая промышленность. 2013. № S700 (700). С. 72-77.

## РАЦИОНАЛИЗАЦИЯ ПРОЦЕССОВ ПУСКА И РАБОТЫ КАТУШЕЧНОГО МЕХАНИЗМА

*Актуальность.* В настоящее время при проектировании разного рода конструкций и механизмов все больше внимания уделяется оптимизации. Важным становится не только непосредственное решение самой проблематики, но и выбор оптимальных параметров объекта исследования, обеспечивающих желанное изменение тех или иных характеристик. Например, в авиастроении основной задачей является безопасная транспортировка пассажиров и груза. При этом не менее важной задачей является выявление направлений модификации, обеспечивающих увеличение грузоподъемности, скорости и т.п. При реализации дополнительных условий может наблюдаться изменение формы объекта, его структуры или переход к абсолютно новому режиму работы.

*Цели и задачи работы.* Работа посвящена детальному исследованию и рационализации процессов пуска и работы катушечного механизма, представляющего собой барабан, опирающийся на подвижные ролики. Передача движения от вала электродвигателя осуществляется с помощью цевочного зацепления. Одним из важнейших направлений трансформации катушечного механизма является снижение пускового момента и потребляемой мощности электродвигателя, реализующего скоростной режим работы. Использование цевочного зацепления вместо зубчатого связано с характерным способом закрепления катушечного механизма – барабан опирается исключительно на три подвижных ролика, что позволяет барабану не только поворачиваться, но и смещаться относительно предполагаемой оси вращения. Цевочное зацепление обладает сравнительно низкой чувствительностью к изменению межосевого расстояния [1,2]. Катушечный механизм обладает следующими особенностями: радиальный эксцентриситет барабана; зазор цевочного зацепления, равный 10% высоты зуба; 10% отличие профиля одного зуба шестерни от остальных по ширине.

*Пуск катушечного механизма.* Для начала движения катушечного механизма согласно скоростному режиму работы необходимо преодолеть статические силы сопротивления в системе. Рассмотрим пуск катушечного механизма как аналитически, так и численно с помощью современного пакета численного интегрирования MSC.ADAMS. Моментом пуска  $M_{\text{пуска}}$  является сумма момента силы трения на валу и диссипативного момента силы от барабана с учетом передаточных соотношений:

$$M_{\text{пуска}} = \frac{R_{\text{вал}}}{R_{\text{бар.}} \cos \varphi} \left( \frac{r_{\text{бар.}}}{R_0} \mu \tilde{N}_0 r_0 + 2 \frac{r_{\text{бар.}}}{R_{\delta}} \mu \tilde{N}_{\delta} r_{\delta} + m_{\text{бар.}} g \varepsilon \right) + \mu F_{\text{вал}} r_{\text{вал}} \quad (1)$$

где  $R_{\text{вал}}/r_{\text{вал}}$  - внешний/внутренний радиус вала;  $R_{\text{бар.}}/r_{\text{бар.}}$  - внешний/внутренний радиус барабана;  $\varphi$  - угол зацепления;  $R_{0,\delta}/r_{0,\delta}$  - внешний/внутренний радиус ролика;  $\mu$  - коэффициент трения;  $\tilde{N}_{0,\delta}$  - реакция ролика;  $m_{\text{бар.}}$  - масса барабана;  $g$  - ускорение свободного падения;  $\varepsilon$  - эксцентриситет барабана;  $F_{\text{вал}}$  - реакция опоры вала.

На рис. 1 схематически изображены: катушечный механизм и зависимость угловой скорости от времени на валу при линейно возрастающем моменте силы на валу. Линии, изображенные на рис. 1 соответствуют моменту пуска, полученному как аналитически с применением формулы (1), так и путем прямого численного моделирования.

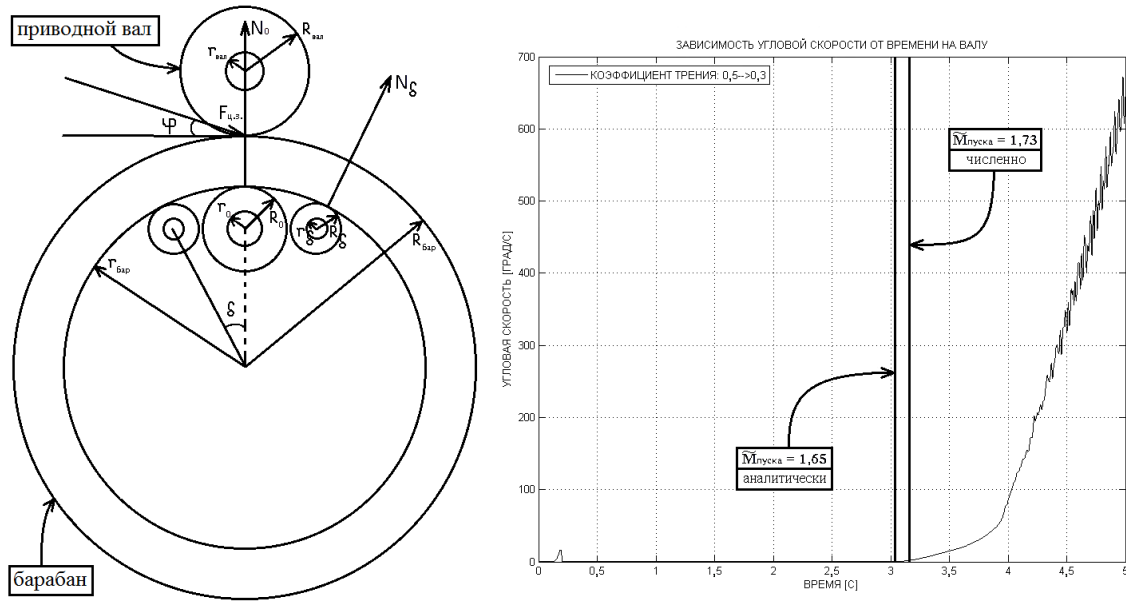


Рис. 1. Пуск катушечного механизма

Небольшой скачок угловой скорости в начале графика обусловлен устранением зазора в зубчато-цевочной передаче. Смена угла наклона угловой скорости от времени вызвана переходом статического коэффициента трения к динамическому. В качестве критической скорости выбрана точка перехода полужидкостного трения в режим жидкостного в соответствии с кривой Герси-Штрибека [3]. Численное значение критической скорости определяется приближенной формулой Фогельполя [4]. Отметим, что на рис. 1 момент силы приведен в безразмерном виде для семейства катушечных механизмов.

*Работа катушечного механизма.* После реализации пуска катушечного механизма возможно движение в соответствии с заданным скоростным режимом работы электродвигателя. Рассмотрим работу катушечного механизма для скоростного интервала с квазипостоянной скоростью, представленного на рис. 2, как аналитически, так и численно с помощью современного пакета численного интегрирования MSC.ADAMS. Лагранжиан катушечного механизма  $L$  представлен выражением (2):

$$L = \left[ J_{вал} + \frac{1}{\eta i^2} J_{бар.} + \frac{2}{\eta i^2} \left( \frac{r_{бар.}}{R_{\delta}} \right)^2 J_{\delta} + \frac{1}{\eta i^2} \left( \frac{r_{бар.}}{R_0} \right)^2 J_0 \right] \frac{(\dot{\varphi}_{вал})^2}{2} - \frac{m_{бар.} g \varepsilon}{\eta} \left[ 1 - \cos \left( \frac{\varphi_{вал}}{i} \right) \right] - \Pi_0 \quad (2)$$

где  $J_{вал}$  – момент инерции вала;  $\eta$  – КПД зубчато-цевочной передачи (см. [5]);  $i$  – передаточное отношение;  $J_{бар.}$  – момент инерции барабана;  $J_{0,\delta}$  – момент инерции ролика;  $\varphi_{вал}$  – угол поворота вала;  $\Pi_0$  – начальный уровень потенциальной энергии.

Подставляя значение  $L$  в уравнение Лагранжа 2-го рода (3) нетрудно выразить внешний момент силы на валу  $M_{внеш.}$ , необходимый для реализации скоростного режима.

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}_{вал}} \right) - \frac{\partial L}{\partial \varphi_{вал}} = M_{внеш.} - \mu F_{вал} r_{вал} - \mu \left[ \frac{N_0}{\eta i} \frac{r_{бар.}}{R_0} r_0 + \frac{2N_{\delta}}{\eta i} \frac{r_{бар.}}{R_{\delta}} r_{\delta} \right] \quad (3)$$

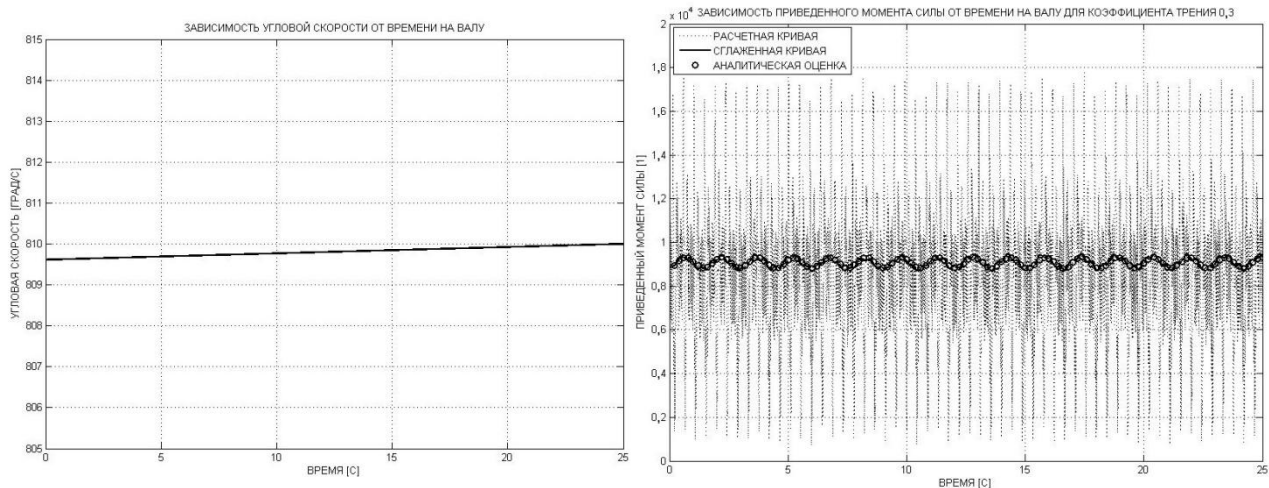


Рис. 2. Работа катушечного механизма

При моделировании работы катушечного механизма передача движения осуществлена через контактную взаимосвязь с использованием Impact-метода (связь типа contact, см [6]), обусловленную уникальным способом закрепления катушечного механизма. На рис. 2 видно наличие высокочастотных колебаний с завышенной амплитудой для расчетной кривой. Применение процедуры сглаживания результатов моделирования приводит к совпадению с аналитической оценкой. Отметим, что на рис. 2 момент силы также приведен в безразмерном виде для семейства катушечных механизмов.

*Выводы.* Из формул (1) - (3) следуют возможные рекомендации по модификации катушечного механизма при стремлении к минимизации момента пуска и потребляемой мощности электродвигателя, необходимой для реализации скоростного режима работы. Во-первых, это балансировка барабана. Во-вторых, изменение передаточных отношений. В-третьих, снижения коэффициента трения. В-четвертых, более точная изготовка деталей зубчато-цевочной передачи и корректное позиционирование элементов при сборке. В-пятых, уменьшение скорости вращения подвижных элементов. Отметим, что необходим учет требований прочности к конструкции при применении рекомендаций по рационализации.

#### ЛИТЕРАТУРА:

1. Первицкий Ю.Д. Расчет и конструирование точных механизмов. Учебное пособие для вузов. 2-е изд. Л.: «Машиностроение», 1976. 456 с.
2. Гаврилов А.Н., Щедровицкий С.С. Прикладная метрология, методика расчета, детали и элементы приборов. Т.2. Ч. 1. М.: МАШГИЗ, 1964. 596 с.
3. Пожбелко В.И. Аналитическая нелинейная скоростная характеристика трения и оптимизация толщины смазочного слоя и эксцентриситета гидродинамических подшипников, // Известия высших учебных заведений. Машиностроение, 2 (611). 2011. 23-30 с.
4. Ицкович Г.М., Чернавский С.А., Кисилев В.А., Боков К.Н., Бонч-Осмоловский М.А. Сборник задач и примеров расчета по курсу деталей машин. 3-е изд. М.: «Машиностроение», 1965. 328 с.
5. Иванов А.С., Муркин С.В. Конструирование современных мотор-редукторов: Электронное учебное издание. М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана. 2012. 147 с.
6. MSC Inc. Adams/Solver C++ Statements. 2014. 408 p.

МОДЕЛИРОВАНИЕ НЕЛИНЕЙНОГО ДЕФОРМИРОВАНИЯ БЕТОНА  
ПРИ ОДНООСНОМ И МНОГООСНОМ МОНОТОННОМ НАГРУЖЕНИИ

Создание трехмерной нелинейной анизотропной модели деформирования бетона является не до конца решенной задачей. Существующие модели неупругого деформирования бетона [1-2 и др.] как правило ограничены случаем изотропного материала. Учет ортотропии, отражающей характер микрорастрескивания бетона, выполнен в модели предложенной Н.И. Карпенко [3]. Недостатком данной модели является отсутствие упругого потенциала. В данном исследовании делается попытка учесть нелинейность, многоосность и анизотропию деформирования бетона на основе использования модели локально-ортотропного гиперупругого материала с осями ортотропии, совпадающими с направлениями главных напряжений. Рассматриваемая модель в силу существования потенциала обладает рядом преимуществ при численном решении краевых задач.

В рассматриваемой модели ортотропного гиперупругого материала потенциал  $\psi$  является функцией инвариантов тензора деформации и тензоров, характеризующих анизотропные свойства материала  $\mathbf{M}_1 = \mathbf{n}_1 \otimes \mathbf{n}_1$ ,  $\mathbf{M}_2 = \mathbf{n}_2 \otimes \mathbf{n}_2$  и  $\mathbf{M}_3 = \mathbf{n}_3 \otimes \mathbf{n}_3$ , только два из которых независимы в силу равенства  $\mathbf{M}_1 + \mathbf{M}_2 + \mathbf{M}_3 = \mathbf{1}$ . В общем случае система инвариантов включает 7 инвариантов [4]:  $I_1 = tr \boldsymbol{\varepsilon}$ ,  $I_2 = \frac{1}{2}(I_1^2 - tr \boldsymbol{\varepsilon}^2)$ ,  $I_3 = \det \boldsymbol{\varepsilon}$ ,  $I_4 = \mathbf{M}_1 \cdot \boldsymbol{\varepsilon} = tr(\mathbf{M}_1 \cdot \boldsymbol{\varepsilon})$ ,  $I_5 = \mathbf{M}_1 \cdot \boldsymbol{\varepsilon}^2 = tr(\mathbf{M}_1 \cdot \boldsymbol{\varepsilon}^2)$ ,  $I_6 = \mathbf{M}_3 \cdot \boldsymbol{\varepsilon} = tr(\mathbf{M}_3 \cdot \boldsymbol{\varepsilon})$ ,  $I_7 = \mathbf{M}_3 \cdot \boldsymbol{\varepsilon}^2 = tr(\mathbf{M}_3 \cdot \boldsymbol{\varepsilon}^2)$ . В данной работе рассматривается одно из простейших представлений потенциала  $\psi$  в виде:

$$\psi = \frac{1}{2} \lambda J_1^2 + \mu J_2 + f(I_4) + g(I_6) + \alpha I_1 I_4 + \beta I_1 I_6 + \gamma I_4 I_6, \quad (1)$$

где  $\lambda$  и  $\mu$  – параметры Ламе;  $f$  и  $g$  – функции, определяемые видом диаграммы деформирования при сжатии и растяжении;  $\alpha$ ,  $\beta$  и  $\gamma$  – константы материала.

Определяющее уравнение в соответствии с определением гиперупругого материала  $\boldsymbol{\sigma} = \frac{\partial \psi(\boldsymbol{\varepsilon})}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}}$  в этом случае определяется равенством (предполагается  $\mathbf{n}_j = const$ ):

$$\boldsymbol{\sigma} = \lambda I_1 \mathbf{1} + \mu \boldsymbol{\varepsilon} + f' \mathbf{M}_1 + g' \mathbf{M}_3 + \alpha (I_1 \mathbf{M}_1 + I_4 \mathbf{1}) + \beta (I_1 \mathbf{M}_3 + I_6 \mathbf{1}) + \gamma (I_4 \mathbf{M}_3 + I_6 \mathbf{M}_1). \quad (2)$$

Дифференцирование (2) приводят к квазилинейной связи скоростей напряжений и деформаций

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}} = {}^4 \mathbf{C}(\boldsymbol{\varepsilon}, \mathbf{M}_1, \mathbf{M}_3) \cdot \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}, \quad (3)$$

где тензор упругих модулей  ${}^4 \mathbf{C} = \frac{\partial \boldsymbol{\sigma}}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}} = \frac{\partial^2 \psi(\boldsymbol{\varepsilon})}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}^2}$  допускает представление:

$${}^4 \mathbf{C} = \lambda \mathbf{1} \otimes \mathbf{1} + \mu (\mathbf{1} \otimes \mathbf{1} + \mathbf{1} \otimes \mathbf{1}) + f'' \mathbf{M}_1 \otimes \mathbf{M}_1 + g'' \mathbf{M}_3 \otimes \mathbf{M}_3 + \alpha (\mathbf{M}_1 \mathbf{1} + \mathbf{1} \mathbf{M}_1) + \beta (\mathbf{M}_3 \mathbf{1} + \mathbf{1} \mathbf{M}_3) + \gamma (\mathbf{M}_1 \mathbf{M}_3 + \mathbf{M}_3 \mathbf{M}_1) \quad (4)$$

где использованы символы прямого и непрямого диадного умножения  $(\mathbf{A} \otimes \mathbf{B})_{ijkl} = A_{ij}B_{kl}$ ,  $(\mathbf{A} \bar{\otimes} \mathbf{B})_{ijkl} = A_{ik}B_{jl}$ ,  $(\mathbf{A} \underline{\otimes} \mathbf{B})_{ijkl} = A_{il}B_{jk}$ .

Уравнение (3) с учетом (4) допускает следующее выражение в матричном виде:

$$\begin{Bmatrix} \dot{\sigma}_{11} \\ \dot{\sigma}_{22} \\ \dot{\sigma}_{33} \\ \dot{\sigma}_{12} \\ \dot{\sigma}_{13} \\ \dot{\sigma}_{23} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda + 2\mu + f'' + 2\alpha & \lambda + \alpha & \lambda + \alpha_5 + \beta + \gamma & 0 & 0 & 0 \\ \lambda + \alpha & \lambda + 2\mu & \lambda + \beta & 0 & 0 & 0 \\ \lambda + \alpha + \beta + \gamma & \lambda + \beta & \lambda + 2\mu + g'' + 2\gamma & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mu & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mu & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mu \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{\varepsilon}_{11} \\ \dot{\varepsilon}_{22} \\ \dot{\varepsilon}_{33} \\ \dot{\varepsilon}_{12} \\ \dot{\varepsilon}_{13} \\ \dot{\varepsilon}_{23} \end{Bmatrix}. \quad (5)$$

Уравнение инверсии (5), переписанное в главных осях тензора напряжений (предполагается выполненным равенство  $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$ ), имеет вид:

$$\begin{Bmatrix} \dot{\varepsilon}_1 \\ \dot{\varepsilon}_2 \\ \dot{\varepsilon}_3 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda + 2\mu + f'' + 2\alpha & \lambda + \alpha & \lambda + \alpha + \beta + \beta \\ \lambda + \alpha & \lambda + 2\mu & \lambda + \beta \\ \lambda + \alpha + \beta + \gamma & \lambda + \beta & \lambda + 2\mu + g'' + 2\beta \end{bmatrix}^{-1} \begin{Bmatrix} \dot{\sigma}_1 \\ \dot{\sigma}_2 \\ \dot{\sigma}_3 \end{Bmatrix}. \quad (6)$$

Наряду с предложенной моделью ортотропного гиперупругого материала рассмотрим модель Н.И. Карпенко [3], позволяющую так же учесть свойство ортотропии, но не обладающую свойством наличия потенциала. Определяющие уравнения для модели Н.И. Карпенко, записанные, также как и (6), в главных осях тензора напряжений имеют вид:

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \end{Bmatrix} = \frac{1}{E} \begin{bmatrix} \frac{1}{v_1} & \frac{-v_{t12}}{v_2^-} & \frac{-v_{t13}}{v_3^-} \\ \frac{-v_{t21}}{v_1^-} & \frac{1}{v_2} & \frac{-v_{t23}}{v_3^-} \\ \frac{-v_{t31}}{v_1^-} & \frac{-v_{t32}}{v_2^-} & \frac{1}{v_3} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \end{Bmatrix}, \quad (7)$$

где  $E$  – начальный модуль упругости бетона,  $v_i$  – коэффициент изменения секущего модуля, определяемый при одноосном нагружении соотношением  $v_i = \sigma_i / E\varepsilon_i$  ( $i=1, \dots, 3$ ),  $v_{tji}$  – секущий коэффициент поперечной деформации (аналог коэффициента Пуассона) определяется как  $v_{tji} = -\varepsilon_j / \varepsilon_i$  ( $j=1, 2, 3; j \neq i$ ). Для  $v_i$  в [3] предлагается аппроксимация

$$v_i = v_i^{\max} \pm (v_{0i} - v_i^{\max}) \sqrt{1 - e_{1i}\eta_i - e_{2i}\eta_i^2}. \quad (8)$$

где  $\eta_i = \sigma_i / \sigma_i^{\max}$ ,  $e_{1i} = 2 - 2.05v_i^{\max}$ ,  $e_{2i} = 1 - e_{1i}$ .

В качестве примера для сравнения моделей (6) и (7) рассмотрим случай трехосного сжатия, при котором соотношения между главными напряжениями имеют следующие пропорции, сохраняющиеся в процессе всего нагружения:  $\sigma_3 : \sigma_1 : \sigma_2 = -1 : -1/10 : -1/10$ . Согласно (6) можно найти зависимость  $\dot{\varepsilon}(\dot{\sigma})$ , обратив матрицу касательных упругих модулей. Выражение для нее получается довольно громоздким, поэтому здесь не приводится. Для случая кусочно-линейных аппроксимаций диаграмм деформирования

(кусочно-квадратичных функций  $f$  и  $g$  и, соответственно, кусочно-постоянных  $f'' = F$  и  $g'' = G$  [5] и  $\alpha = \beta = \gamma = 0$  получается следующее выражение для  $\varepsilon_1$

$$\varepsilon_1 = \frac{(G\lambda + 2G\mu + 4\lambda\mu + 4\mu^2)\sigma_1 - 2\lambda\mu\sigma_2 - (G + 2\mu)\lambda\sigma_3}{FG\lambda + 2FG\mu + 4F\lambda\mu + 4F\mu^2 + 4G\lambda\mu + 4G\mu^2 + 12\lambda\mu^2 + 8\mu^3} + const \quad (9)$$

На рис. 1. представлено сравнение результатов расчетов с использованием предложенной модели ортотропного гиперупругого материала (6) в форме (9) и модели ортотропного материала Н.И. Карпенко с экспериментальными данными [3].

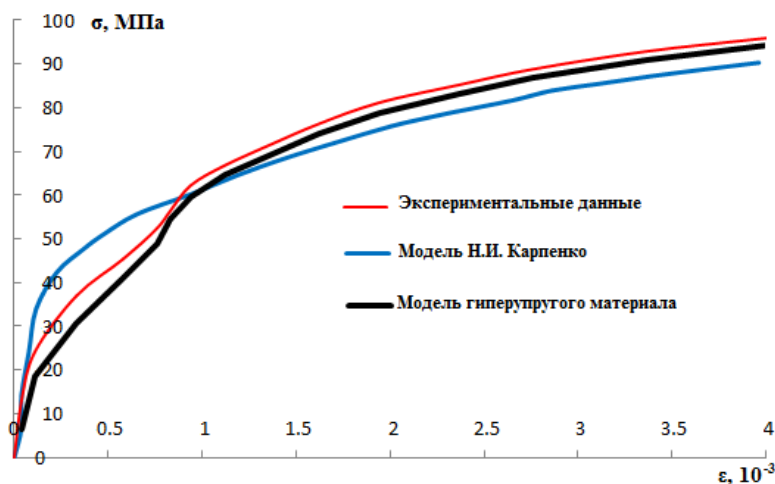


Рис. 1. Сравнение результатов расчета с экспериментом

Результаты сравнительного анализа указали на значительное сходство прогнозов обеих моделей с данными эксперимента, при несколько более высокой точности модели гиперупругого ортотропного материала. В дальнейшем авторами планируется выполнить сравнение прогнозов модели для более сложных случаев нагружения, а также введение дополнительных нелинейных параметров, которые могут улучшить ее точность, а также получить решений ряда нелинейных краевых задач [6-8] с использованием предложенной модели материала.

#### ЛИТЕРАТУРА:

1. Newman, K. Concrete Systems, Chapter VIII in Composite materials, L.Holiday, Editor, Elsevier, Amsterdam, (1966) P. 336-452.
2. Kupfer, H. Hilsdorf, H.K. and Rush, H. Behaviour of concrete under biaxial stresses, ACI Journal, (1969) 66, P. 656-666.
3. Карпенко Н.И. К построению общей ортотропной модели бетона (1987) Строительная механика и расчет сооружений. 2, С. 31-36.
4. Spencer, A.J.M. Theory of invariants. In: Eringen, A.C. (Ed.), Continuum Physics, vol. 1. Academic Press, New York. 1971. P. 239–353.
5. Лавров К.И., Семенов А.С., Бенин А.В. Моделирование нелинейного многоосного деформирования бетона с учетом анизотропии при растяжении-сжатии (2014) Неделя науки СПбПУ, ИПММ. С. 21-23.
6. Бенин А.В., Семенов А.С., Семенов С.Г., Мельников Б.Е. Конечно-элементное моделирование процессов разрушения и оценка ресурса элементов автодорожного моста с учётом коррозионных повреждений // Инженерно-строительный журнал. 2012. № 7 (33). С. 32-42.
7. Бенин А.В., Семенов А.С., Семенов С.Г., Мельников Б.Е. Математическое моделирование процесса разрушения сцепления арматуры с бетоном. Часть 1. Модели с учетом несплошности соединения // Инженерно-строительный журнал. 2013. № 5 (40). С. 86-99.

УДК 621.039

С.В. Макаркин, И.Н. Логинов  
Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого

## КОНЕЧНО-ЭЛЕМЕНТНОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ КОРПУСА ЯДЕРНОГО РЕАКТОРА ТИПА ВВЭР-1000 И ИЗУЧЕНИЕ ЕГО НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННОГО СОСТОЯНИЯ

На сегодняшний день водно-водяные энергетические установки (ВВЭР) являются основой мировой ядерной энергетики. В связи с широким распространением в России реакторов типа ВВЭР-1000 и ужесточением правил безопасности, имеет смысл исследовать запроектные режимы работы реактора для повышения безопасности его эксплуатации. Для исследования возможности функционирования реактора на запроектных режимах, необходимо детально рассмотреть напряженно-деформированное состояние корпуса реактора при режиме нормальной эксплуатации. На основе исследований данного режима возможно путем сравнения анализировать получаемые результаты при исследовании функционирования на запроектных режимах. Одним из примеров запроектных режимов может быть работа реактора при пониженной мощности и осуществлении режима естественной циркуляции теплоносителя первого контура [1]. Целью данной работы является исследование напряженно-деформированного состояния корпуса реактора и его зависимость от жесткости присоединенного к патрубкам трубопровода при режиме нормальной эксплуатации.

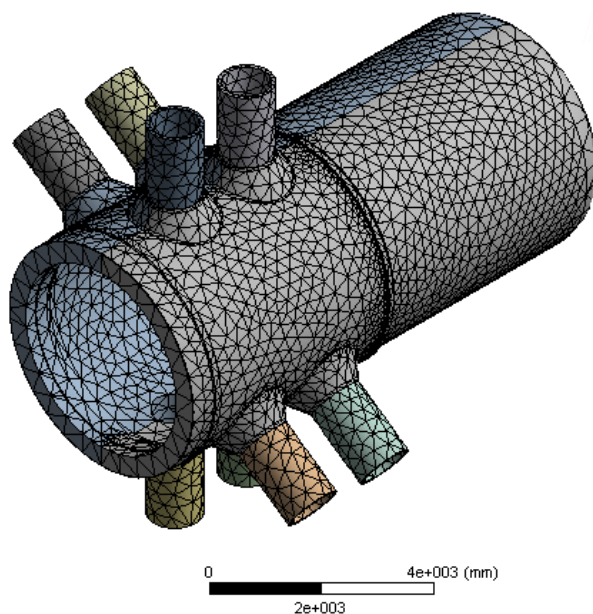


Рис. 1. Конечно-элементная модель

В ходе работы построена геометрическая модель реактора [2], включающая в себя основные элементы корпуса реактора: цилиндрические обечайки, патрубки, эллиптическое днище и опорный фланец. В модель корпуса включены небольшие участки трубопровода, примененные для сдвига зон влияния граничных условий из тела корпуса. На основании геометрической модели построена конечно-элементная (КЭ) модель. При построении КЭ модели использовались элементы типа Solid 198, имеющего 10 узлов по 3 трансляционных степени свободы в каждом узле. Конечно-элементная модель предоставлена на рисунке 1. Далее получено решение методом конечных элементов.

Граничные условия постановок:

- Внутренне давление на стенки корпуса со стороны теплоносителя составляет 16 МПа [3];



- Температура равномерно распределена по телу реактора и равна среднему значению между температурами входа и выхода теплоносителя из реактора в 305 °С [3].
- На торцы патрубков и на место стыковки крышки с реактором для компенсации отсутствия давления в сквозных сечениях отверстий приложена сила  $F = P \cdot S$ , где  $P$  – давление,  $S$  – площадь сквозного сечения.
- На фланец опоры корпуса задано ограничение радиальных и тангенциальных перемещений.

В ходе выполнения работы рассмотрено две постановки задачи. В постановках используется одна и та же КЭ модель, все граничные условия идентичны, кроме закреплений на торцах патрубков. В первой постановке закрепления на торцах патрубков отсутствуют, при применении данного условия жесткость присоединённых трубопроводов не учитывается. Во второй постановке используется закрепление типа «заделка», которое моделирует наличие присоединенных трубопроводов с бесконечно большой жесткостью. Цель двух постановок в том, чтобы исследовать влияние жесткости трубопровода на напряженно-деформируемое состояние корпуса реактора.

Полученные результаты в виде перемещений и напряжений в стенках корпуса для приведены на картинках: для первой постановки -- 2 и 3; для второй -- 4 и 5.

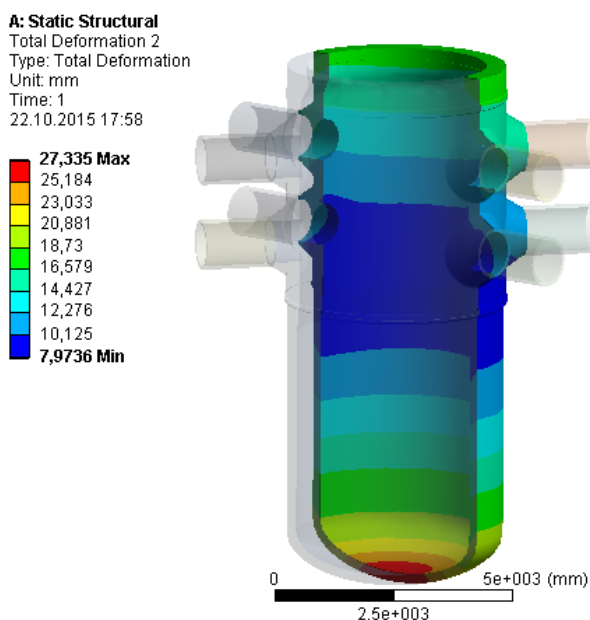


Рис. 2. Перемещения в корпусе, мм

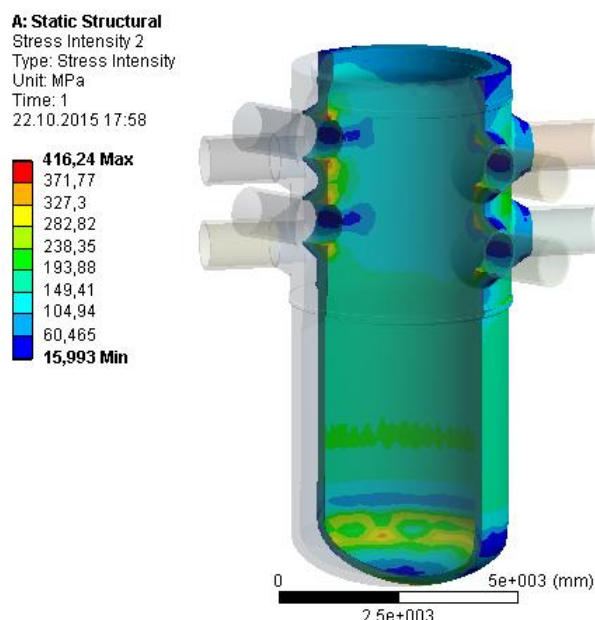


Рис. 3. Напряжения в корпусе, МПа

Проведено аналитическое решение и получено значение напряжений в цилиндрической части корпуса, выполнено сравнение между результатами, полученными в ходе аналитического и конечно-элементного решения. В решении ANSYS напряжения в стенках цилиндрической части корпуса достигают 173 МПа. Аналитически напряжения на цилиндрической поверхности вычисляются по формуле [4]  $\sigma = \frac{P \times (D_a - S)}{2 \times S} = 173.9$  МПа, где  $P$  – давление, оказываемое на стенки реактора;  $D_a$  – внешний диаметр реактора;  $S$  – толщина стенки реактора. Погрешность между аналитическим и конечно-элементным решением, соответственно, составляет 0.6%.

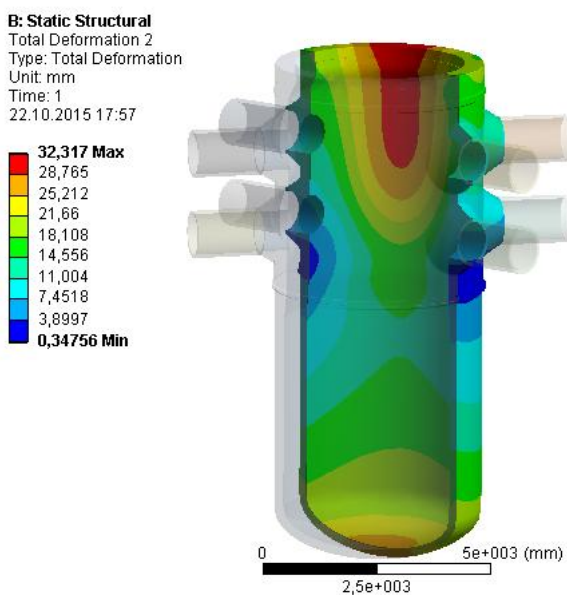


Рис. 4. Перемещения в корпусе, мм

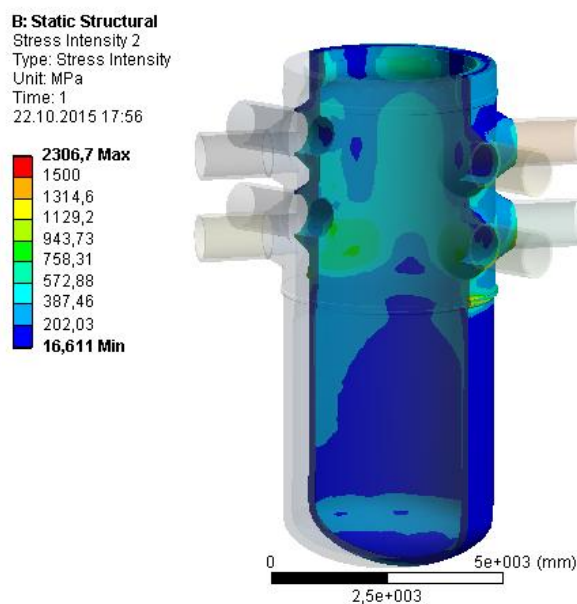


Рис. 5. Напряжения в корпусе, МПа

Полученные напряжения в характерных точках в окрестностях патрубков в разных постановках отличаются в среднем в 3 раза, с большими значениями в постановке с заземленными патрубками. Это объясняется тем, что расширению под действием давления и нагрева корпуса препятствуют заданные ограничения на торцах патрубков, т.е. возникают дополнительные напряжения по всему корпусу, а в особенности в области сглаживания патрубков на внешней и внутренней поверхности реактора.

Полученные результаты позволяют сделать вывод, что при конструировании ядерных реакторов и расчете их напряженно-деформированного состояния не следует пренебрегать жесткостью трубопровода. Полученные результаты можно в дальнейшем использовать для расчета запроектных режимов работы реакторов.

#### ЛИТЕРАТУРА:

1. Концепция расширенного использования естественной циркуляции теплоносителя первого контура в энергоблоках с ВВЭР-1000(1200) и перспективы её реализации/ А.Я. Благовещенский, [и др.] // Сборник тезисов докладов VIII международной научно-технической конференции «Обеспечение безопасности АЭС с ВВЭР»// ОКБ «Гидропресс» – Подольск; 2013, стр. 30
2. Реакторы ВВЭР-1000 для атомных электростанций // В. К. Резепов, [и др.]// Создание реакторных установок ВВЭР для АЭС. // ОКБ «Гидропресс» – М; 2004, 333 с.
3. АЭС с ВВЭР: Режимы, характеристики, эффективность // Р.З. Аминов, [и др.]// «Энергоатомиздат» – М; 1990, 264 с.
4. Нормы расчета на прочность оборудования и трубопроводов атомных энергетических установок (ПНАЭ Г-7-002-86) // «Энергоатомиздат» – М; 1989, 524 с.

СНИЖЕНИЕ КОЭФФИЦИЕНТА КОНЦЕНТРАЦИИ НАПРЯЖЕНИЙ  
У КРАЯ ОТВЕРСТИЯ В КОМПОЗИТНОЙ ПАНЕЛИ

Большинство конструкций, так или иначе, содержит области, в которых наблюдается концентрация напряжений. В основном это места соединения различных деталей между собой. В ряде случаев такие соединения (например, болтовые) связаны с необходимостью проделать отверстие в соединяемых частях, у края которого при нагружении возникают повышенные напряжения, что может оказаться решающим для нормальной работы конструкции фактором. Снизить высокие напряжения в конструкции можно, например, путем ее локального увеличения размеров, однако данный способ далеко не всегда применим из-за конструктивных особенностей. Кроме того, данный способ предполагает повышение общей массы. В композитных конструкциях существует другой метод снижения коэффициента концентрации напряжений (ККН), который не связан с изменением массы – управление укладкой волокон материала [1]. Основную сложность при этом представляют задачи нахождения наиболее рациональной укладки, а также производства таких деталей. Развитие аддитивных технологий и появление 3D-принтеров, способных использовать при печати композиционные материалы, обуславливают возможность реализации второго из предложенных способов и предполагают, что оптимизированные детали конструкций со сложной укладкой волокон могут быть изготовлены [2].

В данной работе в качестве исходной конструкции взята тонкая панель из композиционного материала (эпоксидная матрица + углеродное волокно, объемная доля волокон  $V_f = 0.4$ ) с прямыми однонаправленными волокнами, имеющая отверстие в ее центре. Волокна направлены вдоль большего края пластины. Размеры панели выбраны так, чтобы ее края не оказывали заметного влияния на напряженно-деформированное состояние у края выреза. Пластина растягивается путем задания равномерно распределенной на ее грани нагрузки параллельно исходному направлению волокон. На противоположной грани равны нулю все компоненты перемещений и поворотов (конечно-элементная модель задачи представлена на рис. 1). Данная задача была решена численно методом конечных элементов (МКЭ). Полученный в ней ККН у края отверстия для материалов с заданными значениями механических характеристик и объемной доли волокон равен:  $K_0 = 7.145$ . Для сравнения аналитически методом комплексных потенциалов [3] была решена задача одноосного растяжения бесконечной панели под действием той же нагрузки. Полученный аналитически ККН по своему значению близок к значению  $K_0$ , что объясняется выбором размеров панели, и равен:  $K_{th} = 7.074$ . Путем изменения укладки волокон в панели попытаемся снизить значение  $K_0$ . Все задачи далее решены численно в пакете конечно-элементного моделирования ABAQUS [4].

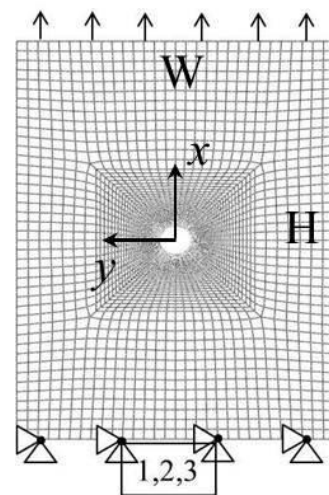


Рис. 1. КЭ модель  
композитной панели

Потребуем плавного огибания волокнами контура отверстия. Угол ориентации волокон в произвольном конечном элементе определим путем нахождения кривой, проходящей через его центр, направление касательной к которой в этой точке и будет определять укладку волокон. Опишем эту кривую полиномом третьей степени:

$$y = ax^3 + bx^2 + cx + d$$

Значение неизвестных констант найдем из следующих условий:

$$\begin{cases} y'(0) = 0 \\ y'(H/2) = 0 \\ y(x_c) = y_c \\ y(0) = \Delta(W/2 - R) + R \end{cases} \Delta = \begin{cases} \frac{2y_c}{W}, \text{ если } x_c \geq R \\ \frac{y_c - \sqrt{R^2 - x_c^2}}{W/2 - \sqrt{R^2 - x_c^2}}, \text{ если } x_c < R \end{cases}$$

Здесь введены обозначения:  $H, W$  – геометрические размеры панели,  $R$  – радиус отверстия,  $x_c, y_c$  – координаты центра конечного элемента,  $\Delta$  – величина, определяющая значение полинома в точке  $x = 0$ . Таким образом, решая эту систему уравнений для каждого отдельно взятого конечного элемента, получим распределение ориентации волокон, показанное на рис. 2.

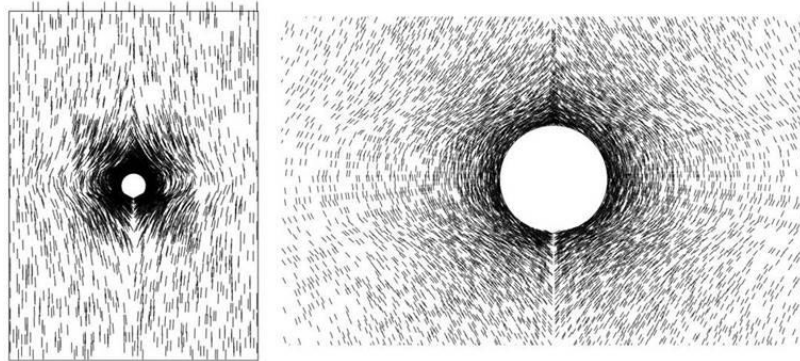


Рис. 2. Распределение углов ориентации волокон в конечных элементах модели

Такие панели носят название панелей переменной жесткости. Как можно видеть, при таком описании волокна плавно огибают отверстие. Отметим, что масса панели при этом не изменилась, то есть не изменилось количество матрицы и волокон композиционного материала. Однако этот факт означает, что теперь волокна распределены неравномерно – их содержание выше у края отверстия. Чтобы учесть этот эффект, зададим распределение концентраций в панели, следя при этом за сохранением ее массы. Отношение массы исходной панели к ее толщине:

$$M_0 = M_{FIB} + M_{MATR} = (\rho_{FIB} V_f + \rho_{MATR} (1 - V_f))(WH - \pi R^2)$$

Зададим сначала дискретное распределение концентрации волокон. На основании приведенного на рис. 2 распределения ориентаций разобьем модель на три подобласти с различной объемной долей волокон – 0.39, 0.43 и 0.4618. Для каждого из этих значений с целью определения упругих характеристик материала решена задача гомогенизации. Разбиение КЭ-модели на подобласти, а также распределение наибольших по модулю главных значений напряжений у края отверстия показано на рис.3. Значение ККН для полученной укладки – 5.489.

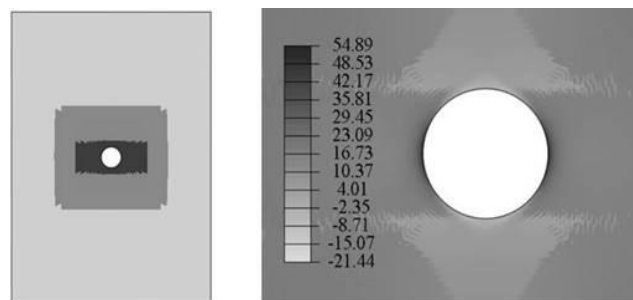


Рис. 3. Разбиение модели на 3 подобласти с разной долей волокон (слева) и распределение наибольших по модулю главных значений напряжений (справа)

В рассмотренном случае значения концентраций волокон в каждой подобласти были выбраны произвольно (единственное условие – сохранение массы панели). В общем случае для данной укладки волокон это сложная задача оптимизации с большим числом варьируемых параметров. Однако даже при произвольном выборе параметров в первом

приближении (дискретное изменение концентрации) удалось снизить ККН на 23% по сравнению с исходной панелью. При этом за счет того, что часть волокон начала работать на изгиб, максимальные перемещения в панели увеличились на 87%. Таким образом, при рассмотрении реальных конструкций необходимо учитывать данный эффект и вводить соответствующие ограничения при постановке задачи.

Далее предложим задание концентрации в форме поверхности распределения. Предположим, что требуется изготовить панель, у которой по оси  $OY$  значение концентрации экспоненциально убывает при движении к краю пластины, по оси  $OX$  – линейно, а на краях принимает одинаковые значения. Тогда поверхность распределения имеет следующий вид:

$$F = c_1 f_0 \left(1 - \frac{2x}{H}\right) + c_2, \text{ где } f_0 = c_3 e^{-c_4 y}$$

Граничные условия для нахождения констант:

$$\begin{cases} F|_{x=H/2} = Q_{ex} \\ F|_{x=0} = f_0 \\ f_0|_{y=R} = Q_{in} \\ f_0|_{y=W/2} = Q_{ex} \end{cases}$$

где  $Q_{ex}$  и  $Q_{in}$  – значения концентрации на внешней границе пластины и в точке  $(0;R)$  соответственно. Данные значения выбираются при этом так, чтобы выполнялось условие сохранения массы:

$$\iint_S (\rho_{FIB} F + \rho_{MATR} (1 - F)) dx dy = M_0$$

В частности, при значениях параметров  $Q_{ex}=0.35$ ,  $Q_{in}=0.544$  поверхность распределения в первой четверти имеет вид, показанный на рис.4. Чтобы перенести данное распределение в КЭ модель необходимо либо решить набор задач гомогенизации в промежутке  $[Q_{ex}, Q_{in}]$ , а затем интерполировать значения эффективных механических характеристик в необходимом промежутке, либо использовать проверенные аналитические модели. Углы ориентации волокон были определены также при помощи полинома 4 степени, картина распределения волокон при этом практически не изменилась, так же как и полученный в этом случае ККН. Таким образом, в работе предложен способ снижения ККН путем изменения укладки волокон. В дальнейших исследованиях возможна постановка формальной задачи оптимизации, в которой ключевым фактором будут являться ограничения, обусловленные технологическими возможностями современного оборудования.

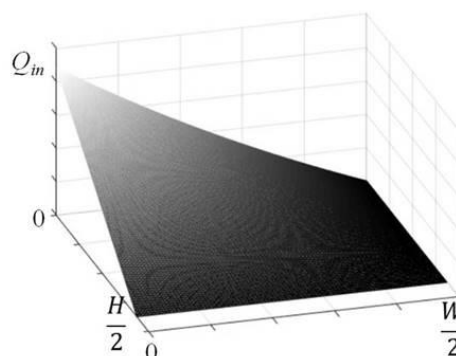


Рис. 4. Пример поверхности распределения концентраций

#### ЛИТЕРАТУРА:

1. C.S. Lopes, Z. Gurdal, P.P. Camanho. Tailoring for strength of composite steered-fibre panels with cutouts. Composites: Part A 41, 2010, pp. 1760-1767.
2. Nannan GUO, Ming C. LEU. Additive manufacturing: technology, applications and research needs. Front. Mech. Eng. 2013, pp. 215-243.
3. С.Г. Лехницкий. Анизотропные пластинки. М.-Л.: ОГИЗ Гостехиздат. 1947. 355 с.
4. ABAQUS Scripting Reference Guide. URL: <http://129.97.46.200:2080/v6.14/books/ker/default.htm> (дата обращения: 25.10.2015)

## ВЛИЯНИЕ БЫСТРОЙ ДИНАМИКИ НА КАЧЕСТВО УПРАВЛЕНИЯ КВАДРОКОПТЕРОМ

В настоящее время среди представителей промышленности различных отраслей наблюдается все более возрастающий интерес к созданию или приобретению малогабаритных беспилотных летательных аппаратов (БПЛА) с целью ведения геодезической разведки, мониторинга оперативной обстановки местности, а также охраны территорий [1]. Наибольшей популярностью среди такого рода летательных аппаратов пользуются мультироторы (многовинтовые вертолеты), в частности, квадрокоптеры, по причине удобства их эксплуатации и в силу ряда технических характеристик: возможности вертикального взлета и посадки, зависания в воздухе, выполнения сложных маневров.

Конструирование квадрокоптеров стало широкодоступным благодаря современному уровню развития науки, техники и технологии, а именно появлению энергоемких источников питания, легких высокопрочных материалов, компактных цифровых средств навигации и, что самое главное, программируемых микроконтроллеров, обладающих высокой вычислительной мощностью [2]. Однако многие проблемы по-прежнему остаются нерешенными. Так, например, имеет место существенная ограниченность автономности беспилотных квадрокоптеров — средняя продолжительность полета аппарата массой около 5 кг и радиусом несущих винтов 20 см не превышает 1 часа при средней скорости движения 30 км/ч. Кроме того, казалось бы способные к высокоскоростному маневрированию малогабаритные четырехвинтовые вертолеты, на деле имеют низкие показатели допускаемых в полете перегрузок, и поэтому способны осуществлять устойчивое движение только по мало искривленным траекториям с относительно небольшими скоростями [3].

По мнению авторов, помимо необходимости рассмотрения вопросов оптимизации энергопотребления БПЛА, решение которых может способствовать увеличению длительности автономного полета и массы полезной нагрузки, с целью повышения эффективности пилотирования существенным является также и разработка адекватной модели аппарата как объекта управления. К сожалению, на данный момент в открытой печати отсутствуют необходимые сведения, касающиеся таких важных особенностей, как аэродинамическое взаимодействие несущих винтов с корпусом летательного аппарата и между собой, нестационарные эффекты воздушного обтекания при наличии разнотемповых движений, быстрая динамика исполнительных устройств. Только в совокупности, перечисленные здесь пункты, вместе с уравнениями механики летательного аппарата как системы твердых или деформируемых тел, могут составить его достаточно полную модель, способную описать все многообразие возможных движений и служить надежной основой для синтеза системы автоматического управления. Цель настоящей работы продемонстрировать, насколько сильно пренебрежение указанными выше составляющими модели объекта сказывается на качестве процессов управления.

Ранее авторами было осуществлено развитие концепции многоуровневого регулирования применительно к разработке робастного контроллера для программного управления квадрокоптером [4]. Низший уровень управления предложенного контроллера — стабилизационный — содержит многомерный двухконтурный пропорционально-интегрально-дифференциальный (ПИД) регулятор, формирующий совместно с уровнями программной и динамической компенсации желаемые значения углов наклона квадрокоптера (крена  $\varphi$  и тангажа  $\theta$ ) и управляющих усилий, воздействующих на его корпус со стороны

несущих винтов (силы тяги  $T$  и моменты  $M_1; M_2; M_3$ ). Настройка ПИД регуляторов представляет собой отдельную сложную задачу многокритериальной оптимизации, адекватное решение которой может быть получено только при наличии достоверной модели объекта управления.

Далее рассмотрена настройка такого регулятора при управлении движением квадрокоптера в вертикальной плоскости (рис. 1.) и исследовано влияние модели системы исполнительных устройств (актуаторов) на результаты поиска коэффициентов регулятора методом градиентного спуска и достигаемое качество управления. Модель движения квадрокоптера представлена ниже:

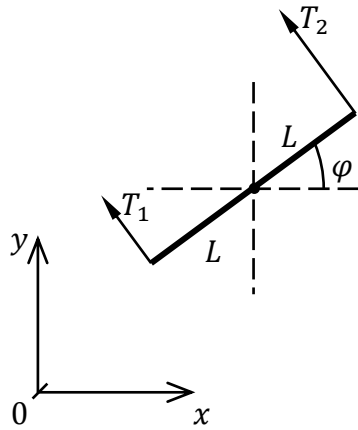


Рис. 1. Плоская модель квадрокоптера

$$\begin{cases} m\ddot{x} = -(T_1 + T_2) \sin(\varphi) = -T \sin(\varphi) = F_x \\ m\ddot{y} = (T_1 + T_2) \cos(\varphi) - mg = F_y - mg \\ J\ddot{\varphi} = L(T_2 - T_1) = M \end{cases} \quad (1)$$

Настройка регуляторов производится при помощи средств имитационного моделирования вычислительного пакета MatLab.Simulink. В качестве объекта управления выбран малогабаритный квадрокоптер со следующими характеристиками: масса  $m=1$  кг; главные моменты инерции относительно центра масс  $J=J_1=J_2=0.0277$  кг·м<sup>2</sup>;  $J_3=0.0549$  кг·м<sup>2</sup>; плечи тангажа и крена  $L=L_1=L_2=0.2$  м; момент инерции ротора электродвигателя с пропеллером  $J_\gamma=0.00005$  кг·м<sup>2</sup>. Сначала во внимание принимается только статическая модель несущих винтов, согласно которой имеют место соотношения  $T_i = T_\gamma(g_i)$ , где  $g_i$  — сигналы условного уровня газа, непосредственно выдаваемые на модуляторы электродвигателей с микроконтроллера. Характерный вид функции  $T_\gamma(g)$  изображен ниже на рисунке 2.

Согласно схеме многоуровневого управления управляющие воздействия  $g_{1;2}$  формируются следующим образом:

$$\begin{aligned} F_{x;yd} &= F_{x;yp} + F_{x;yc} + F_{x;ys}; \begin{cases} F_{xp} = m\ddot{x}_d \\ F_{yp} = m\ddot{y}_d \end{cases}; \begin{cases} F_{xc} = 0 \\ F_{yc} = mg \end{cases}; \\ F_{x;ys} &= K_{x;yp}(x_d; y_d - x; y) + K_{x;yl} \int_0^t (x_d; y_d - x; y) dt + K_{x;yD}(\dot{x}_d; \dot{y}_d - \dot{x}; \dot{y}); \\ \varphi_d &= \arctan\left(-\frac{F_{xd}}{F_{yd}}\right) \Big|_{t=0} + \int_0^t -\frac{\dot{F}_{xd}F_{yd} - F_{xd}\dot{F}_{yd}}{F_{xd}^2 + F_{yd}^2} dt; \\ M_d &= M_s; M_s = K_{\varphi P}(\varphi_d - \varphi) + K_{\varphi I} \int_0^t (\varphi_d - \varphi) dt + K_{\varphi D}(\dot{\varphi}_d - \dot{\varphi}); \end{aligned} \quad (2)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} T_1 = \frac{1}{2} \left( -F_{xd} \sin(\varphi) + F_{yd} \cos(\varphi) - \frac{M_d}{L} \right) \\ T_2 = \frac{1}{2} \left( -F_{xd} \sin(\varphi) + F_{yd} \cos(\varphi) + \frac{M_d}{L} \right) \end{array} \right\} \begin{array}{l} g_1 = T_\gamma^{-1}(T_1) \\ g_2 = T_\gamma^{-1}(T_2) \end{array}$$

В первом приближении быстрая динамика электродвигателей может быть учтена за введением инерционного звена первого порядка. Немаловажным является дополнительное ограничение на скорость изменения управляющего сигнала, без которого двигатели в силу своей конструкции могут терять управляемость (из-за срыва синхронизации):

$$\tau \dot{T}_i + T_i = T_\gamma(g_i); \dot{g} \in [\dot{g}_{\min}; \dot{g}_{\max}] \quad (3)$$

Параметры данного уравнения определяются экспериментально по переходным процессам установления тяги (рис. 3).

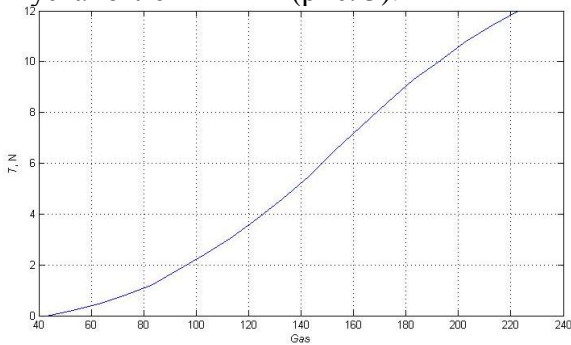


Рис. 2. Зависимость силы тяги от уровня газа

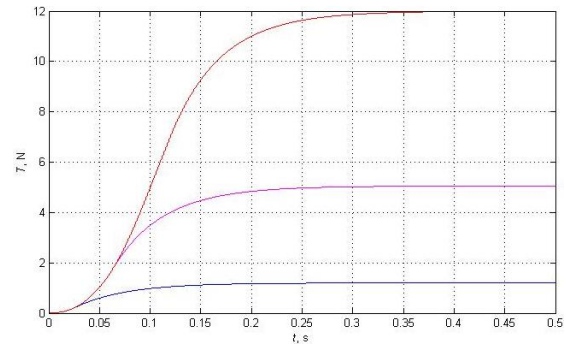


Рис. 3. Разгонные характеристики двигателя

Результаты серии вычислительных экспериментов по исследованию влияния быстрой двигателей на управление квадрокоптером представлены на примере движения по окружности радиуса  $R = 4$  м с периодом обращения  $T_R = 4$ .

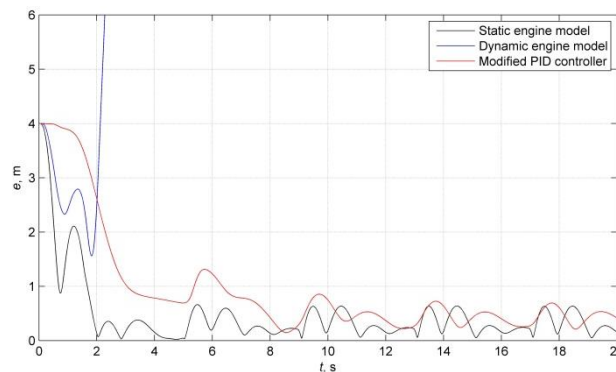


Рис. 4. Ошибка позиционирования БПЛА

По графикам на рисунке 4 видно, что найденные коэффициенты регулятора без учета инерционности несущих винтов не пригодны к управлению реальным объектом. Так, при  $\tau = 0.05$ ;  $g_{\min} = -3 \text{ мс}^{-1}$ ;  $g_{\max} = 1.5 \text{ мс}^{-1}$  система теряет устойчивость, и для стабилизации движения требуется ощутимая подстройка регулятора с его дополнительной модификацией.

#### ЛИТЕРАТУРА:

1. Василевский И., Зубарев А. Авиационные технологии охраны и мониторинга наземных объектов // ТЭК Безопасность, № 2(4), 2013, с. 154 – 155.
2. Magnussen O., Skjonhaug K. E. Modeling, design and experimental study for a quadcopter system construction // Master's thesis, University of Agder, 2011.



3. Белинская Ю. С., Четвертиков В. Н. Управление четырехвинтовым вертолетом // Наука и образование. Электронный научно-технический журнал. Науч. изд. МГТУ им. Н. Э. Баумана, Май, 2012, с. 157–171.

4. Марков А. О., Бурдаков С. Ф. Построение двухуровневой системы управления квадрокоптером // Научный форум с международным участием «Неделя науки СПбПУ»: Материалы научно-практической конференции. Институт прикладной математики и механики СПбПУ — СПб.: Изд-во Политехн. ун-та, 2015, с. 30–32.

УДК 621.8

П.А. Марченко, А.Д. Новокшенов

Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого

## ТОПОЛОГИЧЕСКАЯ ОПТИМИЗАЦИЯ МОДЕЛИ КРОНШТЕЙНА ПОД УСТАНОВКУ ЗВЕЗДНОГО ДАТЧИКА

*Актуальность.* Одним из важных показателей для всех конструкций, используемых в аэрокосмической отрасли, является их масса. Существенно, что снижения массы нужно добиться, обеспечив заданный уровень прочности. Передовым методом решения такого класса задач является применение топологической оптимизации.

Топологическая оптимизация – математический подход, решающий проблему оптимального распределения материала в ограниченном пространстве с учетом действующих нагрузок и граничных условий таким образом, чтобы решение удовлетворяло требуемым условиям. При этом прочностной анализ конструкции выполняется методом конечных элементов. Данный подход используется на стадии разработки первоначальной концепции дизайна изделия или конструкции. Полученное оптимальное решение обеспечивает выполнение функциональных, производственных и технологических требований. Это позволяет существенно сэкономить время на первоначальном этапе проектирования.

*Цель работы* – получение оптимальной топологии модели кронштейна под установку звездного датчика, предназначенного для определения ориентации космического аппарата. Топология должна отвечать требованиям на перемещения отдельных узлов конструкции и первую собственную частоту.

Для достижения поставленной цели использовался программный пакет HyperWorks OptiStruct, являющийся мировым лидером в области топологической оптимизации. Исходная оболочечная модель кронштейна, изображенная на рис. 1, была упрощена для дальнейших расчетов. Рассматриваемая в работе упрощенная конечно-элементная 3D-модель кронштейна изображена на рис. 2.



Рис. 1. Исходная оболочечная модель кронштейна

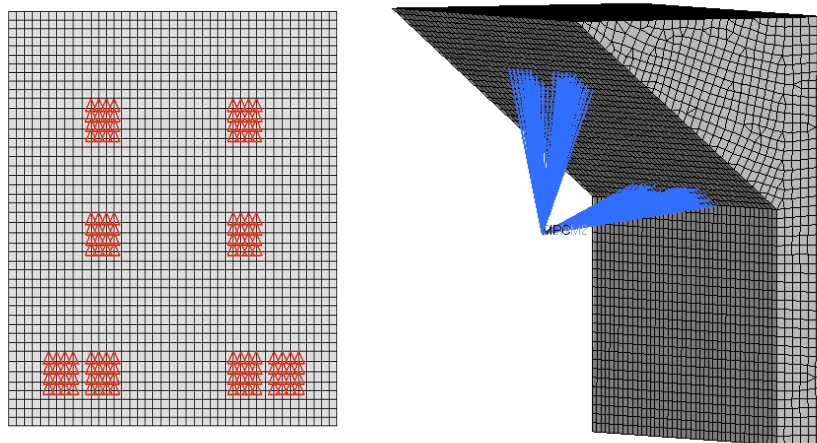


Рис. 2. Упрощенная конечно-элементная 3-D модель кронштейна

Для решения проблемы оптимизации программный пакет OptiStruct использует метод плотностей (Density method), известный так же как (SIMP method (Solid Isotropic Material with Penalty) [1]. При данном подходе к описанию материала конструкции материальная плотность каждого элемента дизайна изменяется непрерывно от 0 до 1, что определяет уменьшение толщины (вплоть до удаления) или сохранение материала элемента. Промежуточные значения плотности представляют собой фиктивный материал. Метод плотностей представляет жесткость материала линейно зависящей от плотности.

В рассматриваемой задаче задняя стенка конечно-элементной модели закреплена в узлах по всем степеням свободы. Сам звездный датчик моделировался точечной массой, соединенной с кронштейном при помощи наложенных связей, перераспределяющих усилия. В качестве материала конструкции был выбран изотропный материал со свойствами: модуль упругости  $E = 125$  ГПа, коэффициент Пуассона  $\nu = 0.2$ , плотность  $\rho = 1500$  кг/м<sup>3</sup>. Число элементов КЭ модели – 22838, число степеней свободы – 76353. Конструкция находится под действием квазистатических перегрузок величиной 30g, действующих в трех взаимно-перпендикулярных направлениях.

В качестве целевой функции при оптимизации выступала масса конструкции, которая минимизировалась. Ограничениями выступали перемещения центра масс звездного датчика и первая собственная частота конструкции. Перемещения в итоговой оптимизированной конструкции должны были быть  $\leq 0,24$  мм, а первая собственная частота должна быть  $> 50$  Гц. Первоначальная масса конструкции составляет 15,719 кг. Масса материала, подверженная оптимизации составляет 12,1 кг.

Результат оптимизационных расчетов представлен на рис.3.

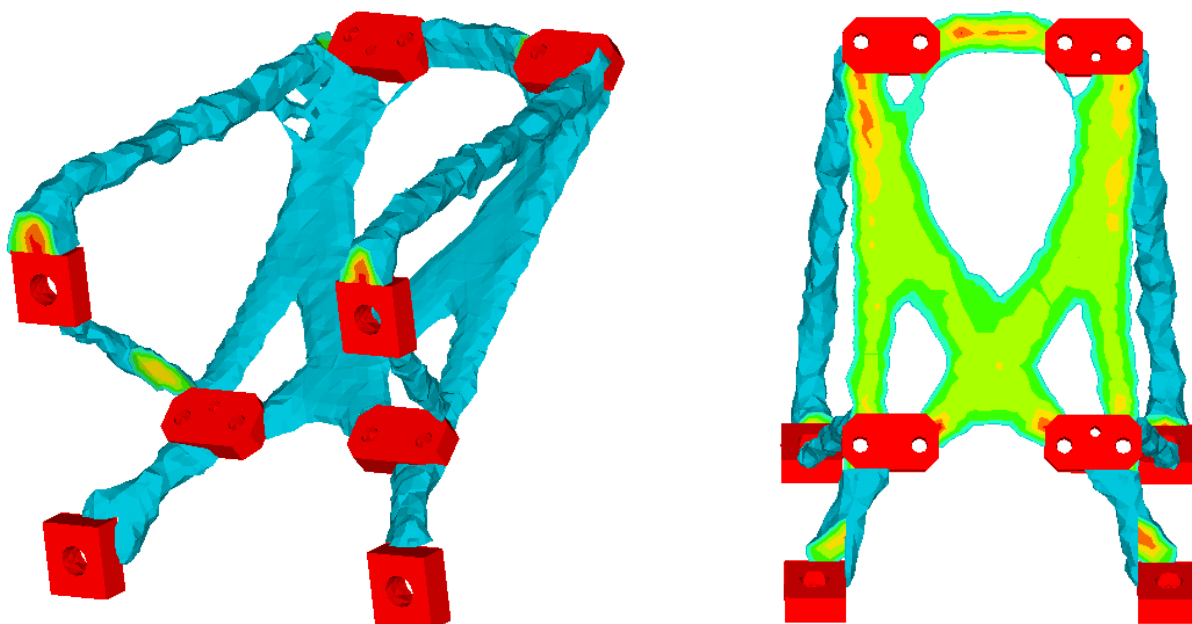


Рис. 3. Оптимизированная КЭ 3D-модель кронштейна

Масса конструкции в ходе оптимизации уменьшилась на 73,7%. Амплитуда перемещений звездного датчика для взаимно перпендикулярных действий объемных сил не превышает заявленных ограничений. Первая собственная частота конструкции 176 Гц.

Полученная в результате оптимизации конечно-элементная модель была модернизирована в программном пакете Autodesk Meshmixer – рис. 4.



Рис. 4. Сглаженная КЭ 3D-модель кронштейна

*Результаты.* В работе получена оптимальная топология рассматриваемой модели конструкции, удовлетворяющая указанным ограничениям.

*Вывод.* Оптимизированная конструкция модели кронштейна под установку звездного датчика удовлетворяет предъявленным к ней требованиям. Общая масса конструкции снизилась на 11.8 кг. Дальнейшим этапом в расчетах может стать учет технологических ограничений, которые накладываются на конструкцию при ее изготовлении, и модификация свойств материала.

#### ЛИТЕРАТУРА:

1. OptiStruct 12.0 User's Guide - Altair Engineering Inc.
2. Сегерлинд Л., Применение метода конечных элементов. – Москва, изд-во «Мир». 1979 г. 392 с.
3. OptiStruct\_12.0\_Tutorials.pdf.
4. Niels Olhoff, Hans A Eschenauer «Topology optimization of continuum structures: A review\*» - Appl Mech Rev vol 54, no 4, July 2001.

УДК 539.3, 544

С.Е. Петренко<sup>1,2</sup>, А.Б. Фрейдин<sup>1,2</sup>

<sup>1</sup>Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого;

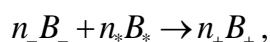
<sup>2</sup>Институт проблем машиноведения Российской Академии наук

### МОДЕЛИРОВАНИЕ РАСПРОСТРАНЕНИЯ ФРОНТОВ ХИМИЧЕСКИХ РЕАКЦИЙ В УПРУГИХ И ВЯЗКО-УПРУГИХ ТЕЛАХ

*Введение.* Установление взаимосвязей между химическими реакциями и процессами деформирования представляет интерес как с точки зрения фундаментальной науки, так и для инженерных приложений. Процессы окисления в деталях МЕМС, выполненных из поликристаллического кремния, окисление и литизация кремниевых нанопроволок в приложениях электроники, окисление частиц в керамических композитах, формирование металл-гидридов как хранилища водорода (см., например, [1-6]) являются примерами, дающими мотивацию для детального моделирования влияния напряженно-деформированного состояния на распространение фронтов химических реакций в деформируемых твердых телах.

Используемый в данной работе подход к моделированию кинетики фронта химической реакции основан на выражении для тензора химического сродства, полученного в [7] для случая реакции между газообразной и нелинейно-упругой компонентами и затем в [8] в результате анализа балансов массы, импульса и энергии и второго начала термодинамики в виде неравенства Клаузиуса-Дюгема, записанных для открытой системы деформируемое тело произвольной реологии – газ (см. также [9, 10]). Ранее этот подход был использован для решения задач о плоском [10], цилиндрическом [11] и сферическом [12] фронтах реакции, в которых твердые компоненты предполагались линейно-упругими.

*Цели и задачи работы.* В задачи данной работы входило решение задач о химическом превращении сферического упругого включения в упругой матрице и о распространении плоского фронта химической реакции в пластине для случая линейного вязко-упругого превращенного материала. Учет вязкости позволил описать релаксацию напряжений, порождаемых деформацией химического превращения. Рассматривалась химическая реакция типа



где  $B_-$ ,  $B_*$  и  $B_+$  – химические формулы материалов реагирующих компонент, причем  $B_-$  и  $B_+$  – деформируемые твердые компонентами, а  $B_*$  – диффундирующая газообразная компонента. Принималось, что реакция локализована на фронте реакции, разделяющем

области, занятые материалами  $B_-$  и  $B_+$ , и что весь подошедший к фронту реакции газ расходуется на реакцию.

*Результаты.* После определения напряжений на фронте реакции и решения задачи диффузии для каждого положения фронта реакции вычислялась нормальная компонента тензора сродства и затем соответствующая скорость фронта реакции. В результате получались кинетические зависимости положения фронта реакции от времени. Исследовалось как внутренние (порождаемые деформацией превращения) и внешние напряжения и энергетический параметр, играющий роль температуры, влияют на кинетику распространения фронта реакции. При анализе влияния внешних деформаций и температуры на кинетику фронта реакции использовали понятие равновесной концентрации газообразной компоненты, зависимость которой от напряжений и деформаций на фронте реакции находилась из условия равенства нулю нормальной компоненты тензора сродства [10].

В результате решения задачи о химическом превращении сферического включения в упругой матрице была исследована зависимость кинетики фронта химической реакции от модулей упругости исходного и превращенного материалов, а также матрицы, и показана согласованность полученных результатов с ранее полученными результатами [12, 13] для химического превращения свободного и стесненного шара. Исследовано также влияние внешнего напряжения на кинетику фронта реакции.

В результате решения задачи о распространении плоского фронта химической реакции в пластине для случая линейного вязко-упругого превращенного материала (модель Максвелла) исследовано влияние внешних деформаций на кинетику фронта реакции. Кинетическое уравнение принимает вид

$$A\xi^2 + B\xi = Qt, \quad \xi = h/H,$$

где коэффициенты  $A, B, Q$  зависят от параметров химической реакции, коэффициента диффузии, деформации, сопровождающей химическое превращение, температуры и внешней деформации. Показано, что внешние деформации могут ускорять, замедлять и даже блокировать химическую реакцию (см. рис. 1а, где приведены зависимости положения фронта реакции от времени для разных внешних деформаций).

Исследовано влияние зависящего от температуры энергетического параметра  $\gamma$  на кинетику фронта реакции (рис. 1б). Продемонстрировано, что увеличение  $\gamma$  ускоряет реакцию. Найдено критическое значение параметра  $\gamma$ , при значениях ниже которого реакция невозможна без приложения дополнительных растягивающих деформаций. Исследовано влияние модулей упругости твердых компонент реакции.

Показано, что в случае модели Максвелла вязкость превращенного материала не влияет на кинетику фронта химической реакции, так как не влияет на мгновенные напряжения на фронте, но влияет на релаксацию напряжений позади фронта (рис. 2). Получены выражения для зависимостей напряжений и деформаций от времени в точках позади распространяющегося фронта реакции. Исследованы предельные случаи перехода от вязко-упругого материала Максвелла к линейно-упругому и линейно-вязкому превращенному материалам.

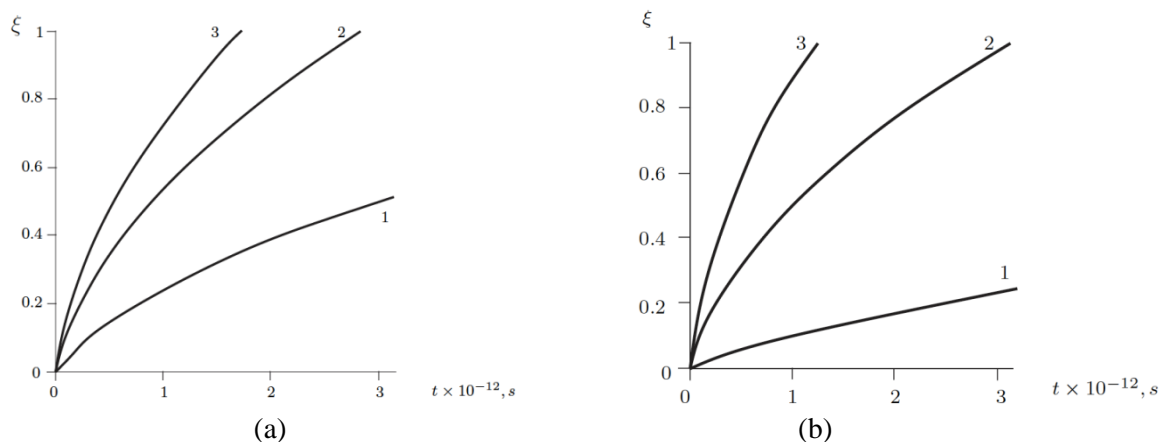
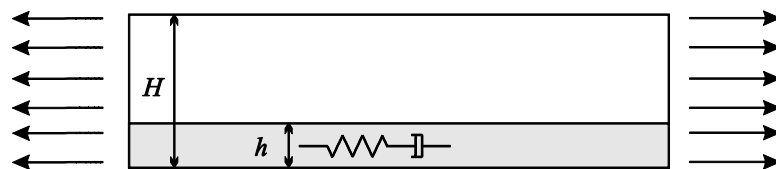


Рис. 1. (а): Зависимости положения фронта реакции  $\xi = h/H$  от времени при различных внешних деформациях: 1 -  $\varepsilon_0 = -0.01$ , 2 -  $\varepsilon_0 = 0$ , 3 -  $\varepsilon_0 = 0.01$  при  $\gamma = 1.1\gamma_*$ . (б): Зависимость кинетики фронта от энергетического параметра  $\gamma$ : 1 -  $\gamma = 1.1\gamma_*$ , 2 -  $\gamma = 1.3\gamma_*$ , 3 -  $\gamma = 1.6\gamma_*$  при  $\varepsilon_0 = 0$ .

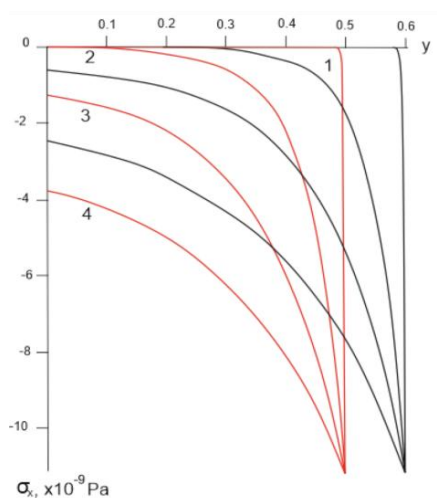


Рис. 2. Релаксация напряжений позади фронта реакции: 1 -  $\eta = 10^{21} Pa \cdot s$ , 2 -  $\eta = 2 \cdot 10^{22} Pa \cdot s$ , 3 -  $\eta = 5 \cdot 10^{22} Pa \cdot s$ , 4 -  $\eta = 10^{23} Pa \cdot s$ .

Работа выполнена при поддержке РФФИ (Грант № 13-01-00687).

#### ЛИТЕРАТУРА:

1. Muhlstein C., Ritchie R. High-cycle fatigue of micron-scale polycrystalline silicon films: fracture mechanics analyses of the role of the silica/silicon interface. *Int. J. Fracture*, 2003.V.119/120: P. 449-474.
2. Buttner C., Zacharias M. Retarded oxidation of Si nanowires. *Applied Physics Letters*, 2006. V. 89: P. 263106

3. Kelly S., Clemens B. Moving interface hydride formation in multilayered metal thin films. *J. Applied Physics*, 2010. V. 108(1): P. 013521.
  4. Kikkinides E. Design and optimization of hydrogen storage units using advanced solid materials: General mathematical framework and recent developments. *Computers and Chemical Engineering*, 2011. V. 35: P. 1923-1936.
  5. Jacobson N., Fox D., Opilab E. High temperature oxidation of ceramic matrix composites. *Computers and Chemical Engineering*, 2011. V. 35.
  6. Nanko M. High-temperature oxidation of ceramic matrix composites dispersed with metallic particles. *Science and Technology of Advanced Materials*, 2005. V.6: P.129-134.
  7. Freidin A. On chemical reaction fronts in nonlinear elastic solids, in: *Proceedings of XXXVII International Summer School-Conference Advance Problems in Mechanics (APM 2009)*, Indeitsev D.A., Krivtsov A.M. (eds.), IPME RAS, St. Petersburg, 2009: P. 231-237.
  8. Freidin A. Chemical affinity tensor and stress-assist chemical reactions front propagation in solids. *ASME 2013, USA, California, San Diego, 2013, Paper No. IMECE 2013-64957, V009T10A102*.
  9. Фрейдин А.Б. О тензоре химического сродства при химических реакциях в деформируемых материалах. *Изв. РАН. Механика твердого тела*. 2015, № 3: С. 35-68. (English translation: Freidin A. On chemical affinity tensor for chemical reactions in deformable solids. *Mechanics of Solids*, 2015. V. 50, No. 3: P. 260-285)
  10. Freidin A., Vilchevskaya E., Korolev I. Stress-assist chemical reactions front propagation in deformable solids. *Int. J. Engineering Science*, 2014. V.83: P.57-75.
  11. Vilchevskaya E.N., Freidin A.B. On kinetics of chemical reaction fronts in elastic solids. In: *Surface Effects in Solid Mechanics*. H. Altenbach and N.F. Morozov (eds.) *Advanced Structured Materials*.<sup>^</sup> 2013. V.30: P. 105-117.
  12. Friedin A., Morozov N., Petrenko S., Vilchevskaya E. Chemical reaction front in symmetric problems of mechanochemistry. *Acta Mechanica*, 2015, DOI 10.1007/s00707-015-1423-2.
  13. Вильчевская Е.Н., Фрейдин А.Б., Морозов Н.Ф. Кинетика фронта химической реакции в центрально-симметричных задачах механохимии. *Доклады академии наук*, 2015, Т. 461, № 5: С. 525-529.
- УДК 539.3, 537.226

О.А. Пуделева, А.С. Семёнов  
Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого

### ВЛИЯНИЕ ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ ПАРАМЕТРОВ НА ПРОЦЕСС ПОЛЯРИЗАЦИИ ПЬЕЗОКЕРАМИЧЕСКИХ СЕНСОРОВ И АКТЮАТОРОВ ПРИ ЗАТВЕРДЕВАНИИ АЛЮМИНИЕВОГО КОРПУСА

Поликристаллическая пьезокерамика широко применяется в современной технике в качестве элементов электромеханических преобразователей: сенсоров и актюаторов (клапанов впрыска топлива, гасителей вибрации, микромоторов, нанопозиционеров, датчиков систем мониторинга целостности конструкций и сооружений и т. д.). Пьезокерамические элементы изготавливаются, как правило, методом горячего литья под давлением, экструзии или прессования с последующим обжигом. После этого керамику, представляющую собой разориентированный поликристалл поляризуют [1], помещая ее в сильное электрическое поле при температуре ниже точки Кюри.

В данном исследовании рассматривается альтернативный способ поляризации пьезокерамических элементов путем механического воздействия при естественном затвердевании алюминиевого корпуса вследствие различия коэффициентов температурного расширения. Пьезокерамический элемент заливается под давлением жидким алюминием и при последующем остывании и затвердевании алюминия в форме поляризуется [2]. Данный способ не требует создания сильного электрического поля и позволяет получить уже готовый поляризованный пьезокерамический элемент в алюминиевом корпусе.

Развитие данной технологии, продемонстрировавшей подобную возможность поляризации в ряде экспериментов, требует теоретического объяснения наблюдаемого явления, а также выбора оптимальных режимов литья и геометрии пьезоэлемента и корпуса для обеспечения достаточной поляризации без разрушения пьезоэлемента. Целью данной работы является выявление зависимости поляризации элемента от геометрических параметров алюминиевого корпуса. Анализ проводился на основе прямого конечно-элементного (КЭ) моделирования процесса затвердевания алюминиевого элемента с пьезоэлектрическим включением.

Анализ процесса остывания композита был проведен для пьезокерамики PZT-5H [4], с учетом анизотропии упругих модулей и реальной геометрии датчика. Наличие симметрии позволяет при создании КЭ модели рассматривать одну восьмую часть исследуемого композитного пьезокерамического устройства (рис. 1).

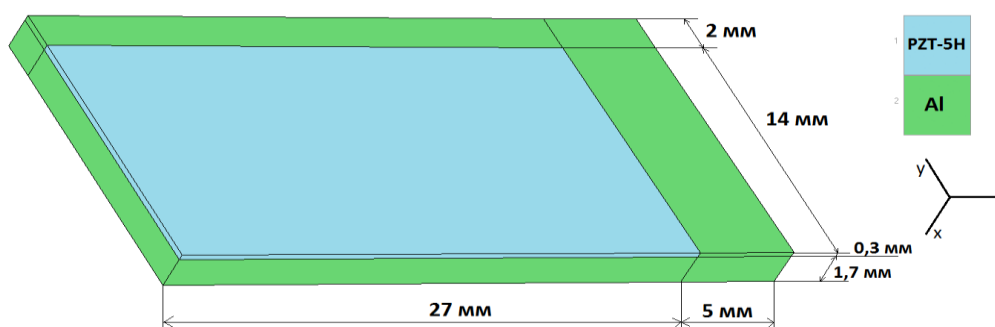


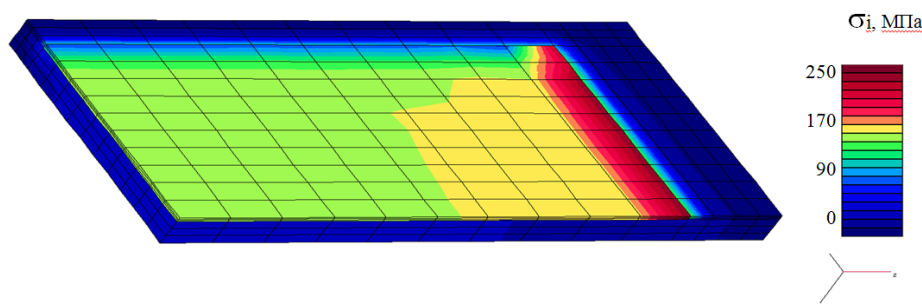
Рис. 1. Модель пьезокерамического устройства

В качестве граничных условий были приняты условия отсутствия нормальных перемещений и касательных векторных потенциалов на гранях плоскостей симметрии XOY, XOZ, ZOY и отсутствие поверхностных зарядов на трех оставшихся гранях.

При проведении КЭ расчетов использовался программный комплекс PANTOCRATOR [4, 5], обладающий возможностью получения решения в линейной и нелинейной постановках.

Результаты КЭ расчетов интенсивности напряжений и электрического поля композитного пьезокерамического устройства показаны на рис. 2. Расчеты интенсивности электрического поля (рис. 2б) показали, что уровень коэрцитивного электрического поля (820 000 В/м для PZT-5H) превзойден, что обеспечивает поляризацию пьезокерамического элемента.

а





б

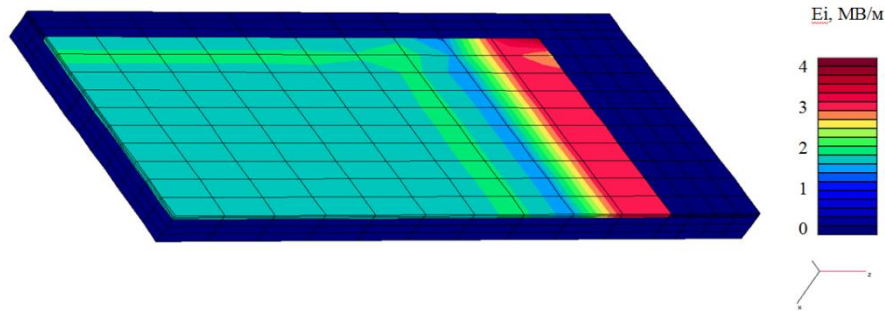


Рис. 2. Распределение полей интенсивности напряжений (а) и электрического поля (б) в пьезокерамическом устройстве

Для выявления зависимости интенсивности напряжений и электрического поля от геометрических параметров алюминиевого корпуса варьировалась толщина алюминиевого слоя по каждой из трех осей. Графики зависимостей представлены на рис. 3, 4 и 5.

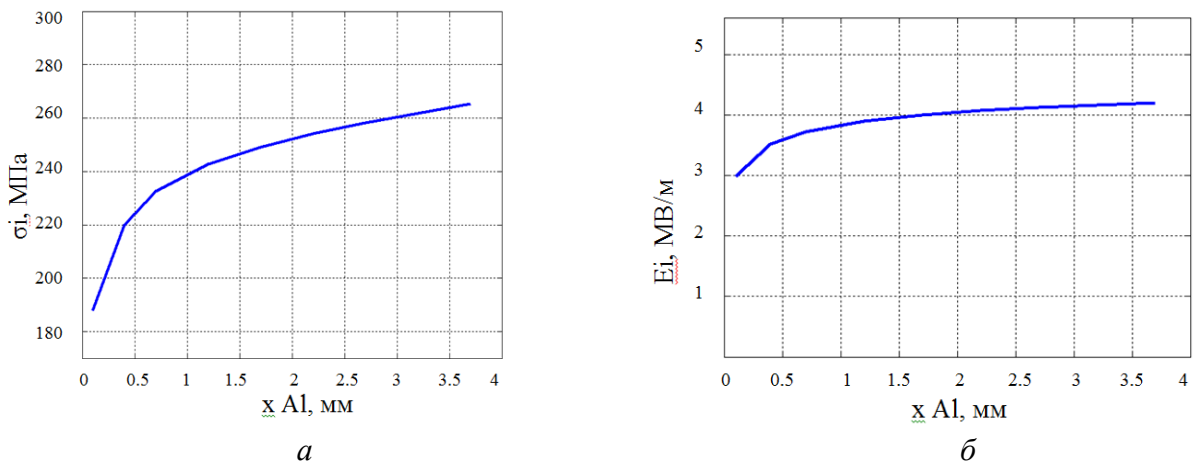


Рис. 3. Зависимость интенсивности напряжений (а) и электрического поля (б) в пьезокерамическом устройстве от размера алюминиевого корпуса по оси x

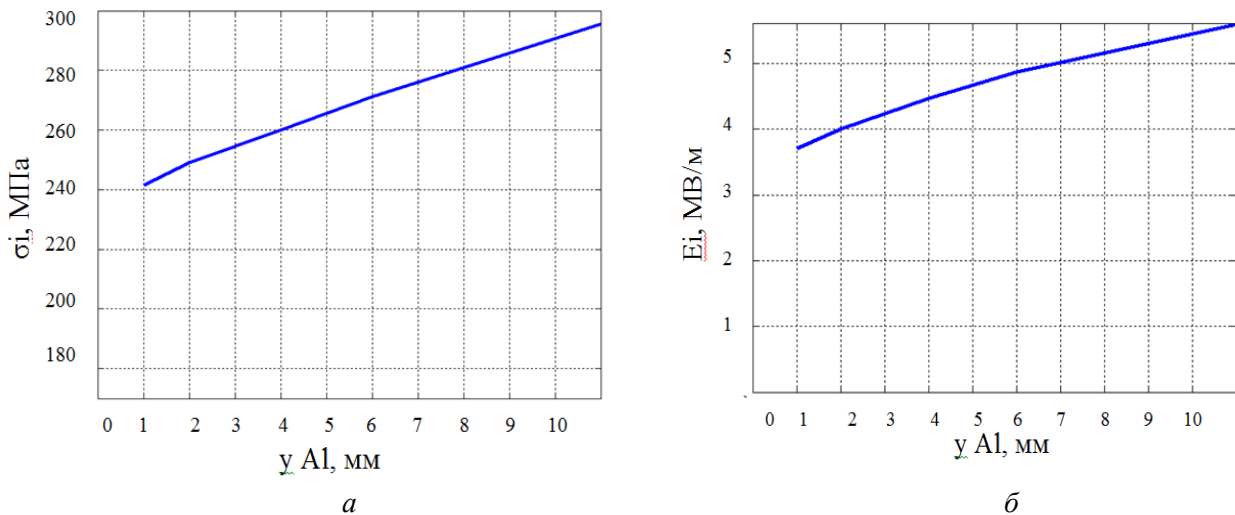


Рис. 4. Зависимость интенсивности напряжений (а) и электрического поля (б) в пьезокерамическом устройстве от размера алюминиевого корпуса по оси y

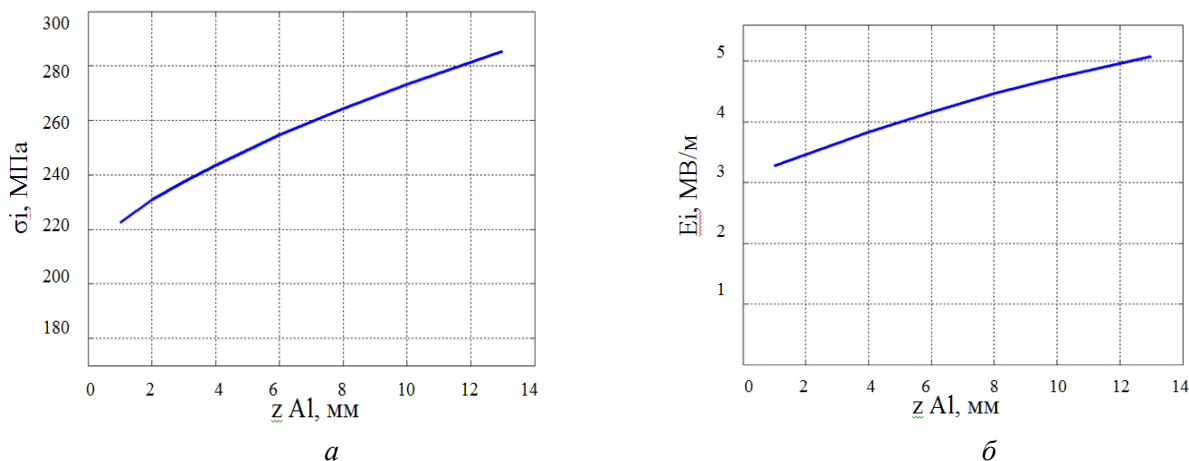


Рис. 5. Зависимость интенсивности напряжений (а) и электрического поля (б) в пьезокерамическом устройстве от размера алюминиевого корпуса по оси  $z$

Увеличение толщины алюминиевого окаймления приводит к росту интенсивности напряжений и электрического поля. Полученные результаты указывают на возможность достижения желаемого уровня поляризации путем варьирования геометрии окаймления. При этом уровень напряжений позволяет гарантировать отсутствие потери прочности пьезоэлектрика.

#### ЛИТЕРАТУРА:

1. Жуков, С.А. О пьезокерамике и перспективах ее применения. – МТТ: Мир техники и технологий: международный промышленный журнал. - 2009. - N 5. - С. 56-60.
2. Klassen, A., Rübner, M., Ilg, J., Rupitsch, S.J., Lerch, R., Körner, C., Singer, R.F. Integration of piezoceramic sensors and actuators into structural components via high pressure die casting. In: Proc. of the CRC/TR39 3rd Sci. Symp Integration of Active Functions into Structural Elements, Chemnitz, 2011, S. 45-50.
3. Тополов В.Ю.; Панич А.Е.: Электромеханические свойства сегнетопьезокерамик на основе оксидов семейства перовскита. – Электронный научный журнал «Исследовано в России», – 2008. С. 8-26.
4. Семёнов А.С. PANTOCRATOR – конечно-элементный программный комплекс, ориентированный на решение нелинейных задач механики / Тр. V межд. конф. Научно-технич. проблемы прогноз. надежности и долговечн. конструкций и методы их решения. Изд-во СПбГПУ; – 2003. – С. 466-480.
5. Semenov, A.S., Liskowsky, A.C., Balke, H. Return mapping algorithms and consistent tangent operators in ferroelectroelasticity // Int. Journal for Numerical Methods in Engineering. – 2010. – №81. – С. 1298–1340.

УДК 539.3, 621.762

Ф.Д. Ривас, А.С. Семёнов

Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого

#### ВЛИЯНИЕ ДАВЛЕНИЯ НА РАЗМЕР ЗОН ПЛАВЛЕНИЯ КОНТАКТНЫХ ОБЛАСТЕЙ ПРИ СПЕКАНИИ ПОРОШКОВ ПРОПУСКАНИЕМ ЭЛЕКТРИЧЕСКОГО ТОКА

В настоящее время весьма интенсивно развиваются способы прототипирования. Очень популярны стали 3Д принтеры технологий FDM (наплавление пластиковой нити) и SLS (лазерное спекание порошка). Теоретическое и экспериментальное изучение процесса плавления порошковых материалов является важной задачей. В данной работе представлены результаты моделирования процессов плавления и спекания [1] металлических шариков при пропускании электрического тока в условиях сжимающего механического воздействия, экспериментальное исследование которых выполнено в Дрезденском техническом

университете. В качестве материалов использовались: медь, температура плавления которой равна 1085 °С, никель – 1455 °С и сталь – 1539 °С.

Результаты конечно-элементных расчетов нестационарных полей температур, выполненные в осесимметричной постановке, для никелевых шариков радиуса  $R = 500 \mu\text{m}$  при экспоненциально убывающей во времени разности потенциалов для различных радиусов контакта (определяется силой прижатия) показаны на рис. 1 для  $t = 1 \text{ms}$ . Сравнение размеров зон плавления для меди, никеля и стали представлены на рис. 2. Изменение максимальной температуры с течением времени и в зависимости от радиуса контакта показано на рис. 3-8 для трех рассматриваемых материалов.

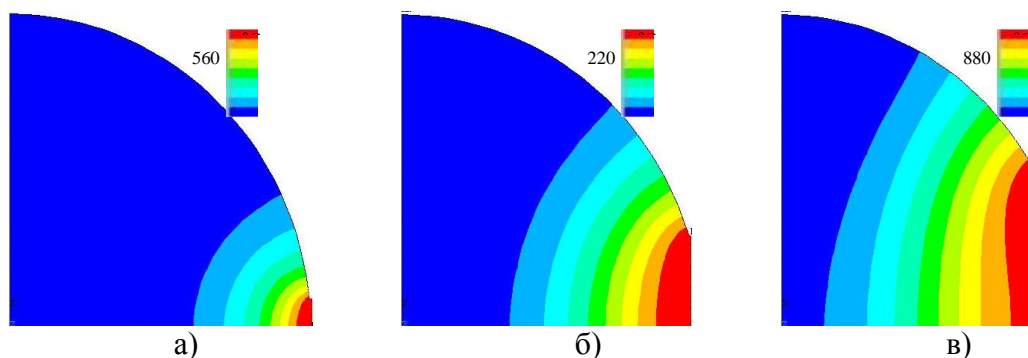


Рис. 1. Влияние радиуса контакта на распределение полей температур при  $t=1 \text{ms}$  для никеля: а)  $r=50 \mu\text{m}$ , б)  $r=150 \mu\text{m}$ , в)  $r=250 \mu\text{m}$

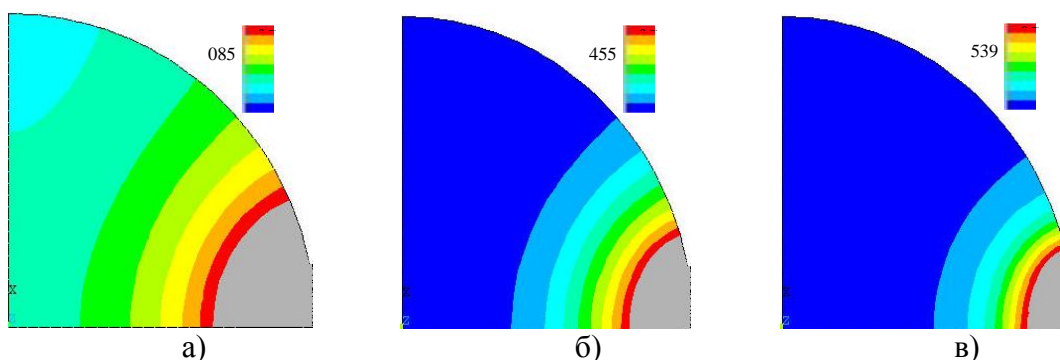


Рис. 2. Сравнение распределения полей температур для трех различных материалов при  $r=100 \mu\text{m}$ : а) медь, б) никель, в) сталь (серым цветом показана зона плавления)

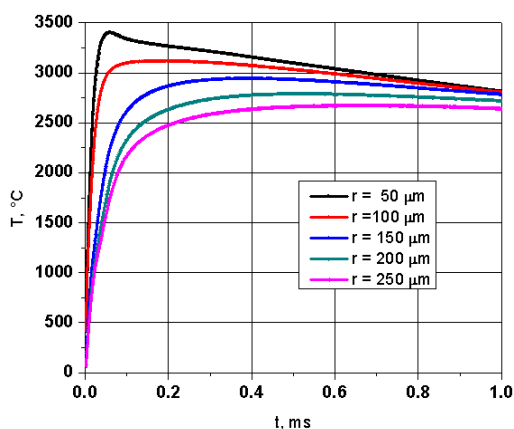


Рис. 3. Зависимость температуры от времени для различных радиусов контакта (медь)

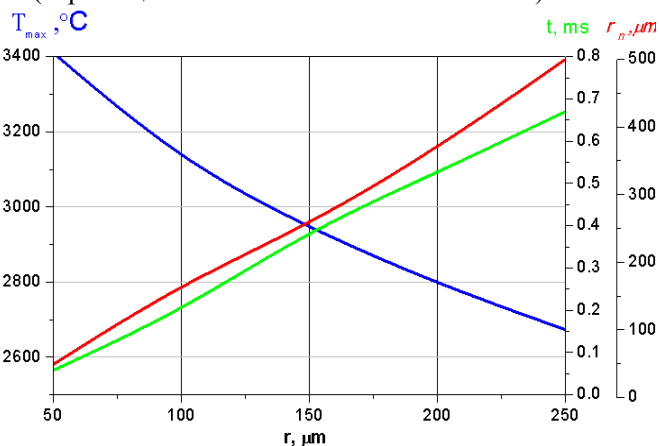


Рис. 4. Зависимость максимальной температуры, времени достижения максимальной температуры и радиуса зоны плавления от радиуса контакта (медь)

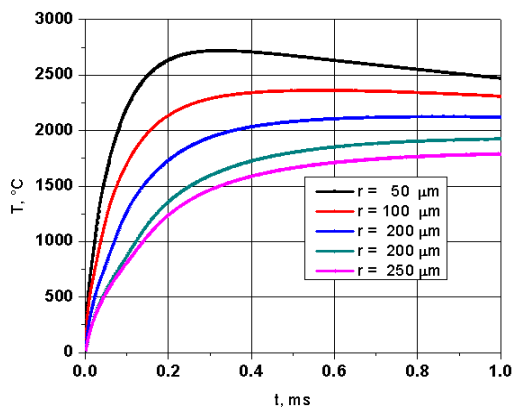


Рис. 5. Зависимость температуры от времени для различных радиусов контакта (никель)

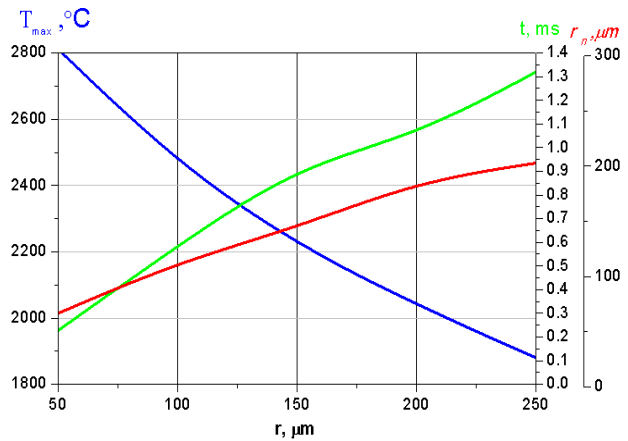


Рис. 6. Зависимость максимальной температуры, времени достижения максимальной температуры и радиуса зоны плавления от радиуса контакта (никель)

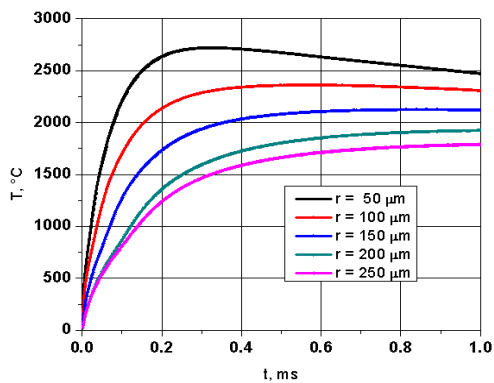


Рис. 7. Зависимость температуры от времени для различных радиусов контакта (сталь)

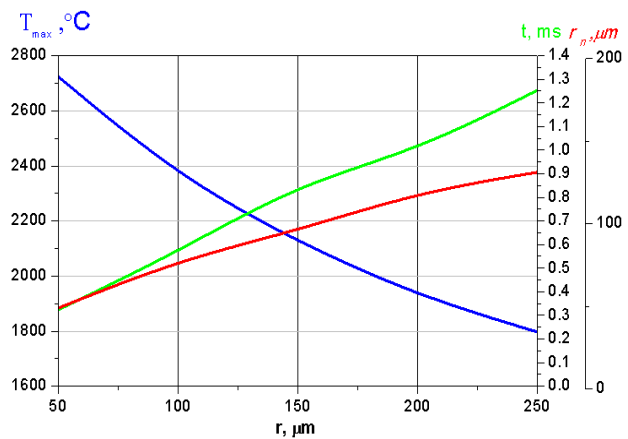


Рис. 8. Зависимость максимальной температуры, времени достижения максимальной температуры и радиуса зоны плавления от радиуса контакта (сталь)

Полученная в КЭ расчетах зависимость максимальной (по пространству) температуры (реализуется в точке на оси симметрии в центре контактной площадки) от времени демонстрирует наличие максимума (см. рис. 3, 5, 7), который реализуется в диапазоне от 0.1 мс до 1.4 мс и зависит от радиуса контактной зоны и материала. С течением времени температура в пределах шарика стремится к однородному состоянию, убывая в зоне контакта и возрастая в центральной области шара. Максимальная (по времени и по пространству) температура убывает с ростом радиуса контактной зоны (см. рис. 4, 6, 8). Радиус зоны плавления увеличивается с увеличением радиуса контактной зоны, демонстрируя зависимости близкие к линейным. Наибольшие температуры и размеры зон плавления наблюдаются у меди. Никель и сталь демонстрируют близкие отклики.

Радиус площадки контакта определяется усилием поджатия шариков. Простейшая оценка зависимости радиуса контакта  $r$  от сил сжатия  $F$ , действующих вдоль оси симметрии на шарики одинакового радиуса  $R$ , в рамках линейной теории упругости определяется формулой [2]:

$$r = \sqrt[3]{\frac{3}{4} \frac{1 - \nu^2}{E} F \cdot R},$$

где  $E$  – модуль Юнга,  $\nu$  – коэффициент Пуассона.

В работе также были получены на основе проведения конечно-элементных расчетов уточненные зависимости радиуса площадки контакта от силы в упруго-пластической постановке [3] с учетом трения.

При проведении расчетов учитывалась температурная зависимость всех параметров материала. Используемые в расчетах характеристики теплофизических, электрических и механических свойств для меди, никеля и стали заимствованы из работы [4].

Полученные при проведении вычислительных экспериментов результаты продемонстрировали хорошее совпадение с данными опытов по определению размеров радиусов плавления и по оценке сопротивления линейной цепочки шариков [5]. Результаты моделирования процессов плавления и спекания позволяют найти оптимальный режим электрического и механического воздействия, произвести детальный параметрический анализ, а также лучше понять динамику быстропротекающих термо-электро-механических процессов электроимпульсного плазменного спекания порошковых материалов.

#### ЛИТЕРАТУРА:

1. Гегузин Я.Е. Физика спекания. 2 – изд., пререраб. и доп. М.: Наука. Главная редакция физико-математической литературы, 1984. – 312 с.
2. Тимошенко С.П., Гудьер Дж. Теория упругости, М.: Наука. Главная редакция физико-математической литературы, 1975, – 575 с.
3. Семёнов А.С. Вычислительные методы в теории пластичности. // Изд-во СПбГПУ. 2008. 211 с.
4. Зиновьев В.Е. Теплофизические свойства металлов при высоких температурах: справочник. М.: Металлургия, 1989. 308с.
5. Braunovic M., Myshkin N.K., Konchits V.V. Electrical Contacts: Fundamentals, Applications and Technology. – Taylor & Francis Group, 2nd Ed. 2007. 652 p.

## ИЗМЕРЕНИЕ АКУСТИЧЕСКОЙ АНИЗОТРОПИИ В ТИПОВЫХ ОБРАЗЦАХ

Применяемые сегодня методы неразрушающего контроля обладают рядом существенных недостатков, не позволяющих оценить остаточный ресурс конструкции. Развитие методов неразрушающего контроля напряженно-деформированного состояния материала является одним из наиболее перспективных направлений в современной инженерной и научной практике. Оно позволило бы более эффективно предсказывать возможные аварии и технические инциденты на производстве и в процессе эксплуатации ответственных элементов оборудования и конструкций.

Одним из таких методов является разработанный в пятидесятых годах прошлого века метод акустоупругости [1], обладающий целым рядом преимуществ по сравнению с магнитными, рентгеновскими и прочими методами диагностики. Он основан на существующей в области упругих деформаций зависимости между скоростью распространения объемных упругих волн, движущихся в направлении, перпендикулярном плоскости действия механических напряжений, от величин напряжений [2]. Несмотря на имеющиеся недостатки, связанные, в основном, с малыми изменениями скоростей упругих волн во всем диапазоне нагрузок, которые, в пределах между пределами текучести при сжатии и растяжении, могут не превышать 1-2% от номинальных значений скоростей, данный метод отличается сравнительной простотой, эффективностью, низкой стоимостью и безопасностью [3]. Кроме того, он обладает слабой зависимостью от марки и технологической обработки материала и позволяет отслеживать микроповреждаемости в структуре материала без вмешательства в нее за счет измерения возникаемой при наличии дефектов акустической анизотропии [4], что предположительно позволит диагностировать остаточный ресурс оборудования и конструкций.

Исследованию факторов, влияющих на величину акустической анизотропии и возможности ее применения к нахождению напряжений и деформаций в различных конструкциях [5] посвящены многие работы, как в России, так и за рубежом.

Работа выполняется в рамках проекта “Разработка фундаментальных подходов для определения остаточного ресурса элементов конструкций и машин на основе метода акустоупругости с учетом пластического деформирования, усталости и индуцированной водородом дегградации внутренней структуры” Российского научного фонда. Он посвящен проблеме определения остаточного ресурса методами неразрушающего контроля и диагностики остаточного ресурса материалов и контроля состояния металла в атомной энергетике, нефтегазовой промышленности, авиации, на транспорте и в строительстве. Данная тематика является актуальной, поскольку в настоящий момент не существует количественных методов неразрушающего контроля, позволяющих с инженерной точностью прогнозировать остаточный ресурс конструкций, подверженных микроповреждениям и микродефектам, связанных с усталостью.

Для осуществления измерений собственной акустической анизотропии (анизотропии в ненагруженном состоянии) использовался прибор ИН5101А [6] (представлен на рис.1), позволяющий выполнять прецизионные измерения скорости прохождения ультразвуковой волны в теле. Он обеспечивает возбуждение волн в виде пачки импульсов в теле при помощи пьезоэлектропреобразователей (ПЭП). При работе прибора осуществляется излучение зондирующих ультразвуковых импульсов трехкомпонентным пьезопреобразователем,

регистрация отраженных сигналов и измерение временных интервалов между отраженными импульсами (на рис.2).

Измерение акустической анизотропии проводилось на трех образцах в ненагруженном состоянии, длина каждого из которых составляла 950 мм, размер минимального поперечного сечения - 80x15мм. В ходе проведения испытаний на циклическую прочность осуществлялось нагружение образцов пульсирующей знакопостоянной нагрузкой различной величины. Так, максимальная нагрузка для образца №1 (на рис.3) составляла 40 тс, при этом напряжения в образце превысили предел текучести. Максимальная нагрузка для образцов №2 (на рис.4) и №3 (на рис.5) составляла 38тс, при этом предел текучести не достигался. Образец №3 после испытаний перед проведением измерений был подвергнут механической обработке: обе плоскости образца были сошлифованы на глубину 1,5 мм. Минимальная нагрузка в цикле нагружения для всех образцов составляла 10% от максимальных значений нагрузки. Нахождение величины акустической анизотропии проводилось путем последовательной установки датчика в точках контроля, а само значение анизотропии определялось по формуле:  $a=2 \cdot (t_1-t_2)/(t_1+t_2)$ , где  $t_1$  и  $t_2$  - время распространения поляризованных поперечных волн, одна из которых направлена вдоль линии приложения нагрузки, вторая - в перпендикулярном направлении.

В результате измерений в образце №2 были обнаружены наибольшие для трех образцов значения анизотропии, локализованные вблизи зоны разрушения, при этом по мере приближения к области долома наблюдался рост величины модуля анизотропии. Знак анизотропии зависит от знака остаточной деформации. Число циклов до разрушения образца №2 составило 5 млн.

В образце №1 характер изменения модуля акустической анизотропии оказался аналогичным образцу №2, однако величина анизотропии оказалась в разы меньше. При этом разрушение образца произошло при 300 тыс. циклов, что было связано с наличием поверхностных дефектов при изготовлении образца.

В шлифованном образце №3 разброс значений собственной акустической анизотропии находился на уровне погрешности измерений.



Рис. 1. Прибор ИН5101А

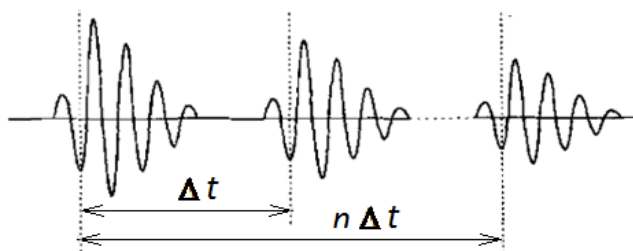


Рис. 2. Вид отраженных импульсов



Рис. 3. Образец №1



Рис. 4. Образец №2



Рис. 5. Образец №3

Таким образом, в ходе эксперимента были получены экспериментальные значения собственной акустической анизотропии в различных образцах из стали 14ХГНДЦ, доведенных до усталостного разрушения при проведении испытаний на циклическую прочность. При этом были рассмотрены различные режимы нагружения (с превышением предела текучести и без превышения). В результате была обнаружена зависимость анизотропии от характера усталостного разрушения и обнаружено влияние поверхностного слоя на величину акустической анизотропии. Было выявлено, что величина акустической анизотропии пропорциональна накопленной поврежденности исследуемых образцов, а сам эффект анизотропии возможно является поверхностным. Планируется проведение испытаний по измерению акустической анизотропии в алюминиевых образцах под внешней приложенной нагрузкой.

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект №15-19-00091).

#### ЛИТЕРАТУРА:

1. Н.Е.Никитина Акустоупругость. Опыт практического применения. Н.Новгород: ТАЛИАМ, 2005.208с.
2. ГОСТ Р 52731-2007. Контроль неразрушающий. Акустический метод контроля механических напряжений. Общие требования. М.: Изд-во стандартов, 2001. 27 с.
3. Никитина Н.Е. Современное состояние и перспективы развития ультразвукового метода исследования напряженного состояния трубопроводов // Вестник Нижегородского университета им. Н.И. Лобачевского.2011.№4(5).С. 2395–2397.
4. Курашкин К.В., Мишакин В.В. Исследование влияния характеристик структуры материала на акустические параметры // Труды Нижегородского государственного технического университета им. Р.Е. Алексеева. 2011. № 2(87).С.190-198.
5. Н.Е.Никитина Акустоупругость и ее применение для измерения напряжений в крупногабаритных конструкциях // Вестник научно-технического развития. 2009. № 2 (18).С.41-46.
6. Прибор для измерения механических напряжений ИН-5101А. Руководство по эксплуатации. ИНКО.468160.008 РЭ

УДК 662.642:621.926.7

Д.Д. Федоров, Л.М. Яковис  
Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого

#### УСЛОВИЯ РОБАСТНОЙ УПРАВЛЯЕМОСТИ В СТАТИКЕ ДЛЯ МНОГОСВЯЗНОГО ДИНАМИЧЕСКОГО ОБЪЕКТА

Основными целями управления являются поддержание значений выходных переменных на заданном уровне в условиях возмущений или при изменении заданий – выведение выходных переменных на новый заданный уровень. Для возможности



осуществления этих целей при различных возмущениях и различных заданиях на выходы системы необходимо существование установившегося (статического) режима, в котором постоянные управляющие воздействия обеспечивают компенсацию любых постоянных по величине возмущений. Ясно, что применительно к линейным моделям в этом случае возможен также перевод выходных переменных управляемого процесса на произвольный заданный уровень.

Для традиционных задач управления определенным объектом с квадратной передаточной матрицей сформулированное требование, которое можно назвать *управляемостью в статике*, гарантированно выполняется при условии, что матрица статических коэффициентов усиления является неособенной. Для задач робастного управления неопределенным объектом для управляемости в статике требуется, чтобы неособенной была матрица статических коэффициентов усиления всех объектов из заданной области возможных значений этих коэффициентов. Проверка такого свойства, которое логично назвать *робастной управляемостью в статике*, является нетривиальной задачей [2]. Решение этой задачи важно потому, что при отсутствии робастной управляемости в статике нет смысла заниматься поиском робастных настроек регуляторов для соответствующих динамических объектов, поскольку такие настройки заведомо не существуют.

Пусть необходимо стабилизировать на уровне  $Y = 0$  динамический многомерный объект

$$X = H(p)U, Y = X + n \quad (1)$$

с передаточной матрицей  $H(p)$ , находящийся под действием управляющих воздействий  $U$  и возмущений  $n$  (см. рис.1)

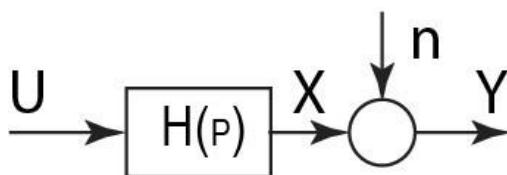


Рис. 2. Блок-схема системы управления

При  $n = \text{const}(t)$  в установившемся режиме должно выполняться условие

$$KU + n = 0, \quad (2)$$

где  $K = H(0)$  – матрица статических коэффициентов усиления динамического объекта  $H(p)$ .

Для того, чтобы (2) выполнялось при любом  $n$ , необходимо и достаточно, чтобы квадратная матрица коэффициентов усиления  $K$  была неособенной, то есть

$$\det K \neq 0. \quad (3)$$

Если  $K$  известно, то условие (3) легко проверить. Так, для объекта 2x2

$$K = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} \\ k_{21} & k_{22} \end{bmatrix} \quad (4)$$

и для проверки (3) следует убедиться, что  $k_{11}k_{22} - k_{21}k_{12} \neq 0$ .

Пусть теперь  $K$  известно с точностью до множества возможных значений, то есть в общем случае задано множество  $G_k$  такое, что  $K \in G_k$ . В частности, коэффициенты  $K$  могут быть заданы интервалами

$$\underline{k}_{ij} \leq k_{ij} \leq \overline{k}_{ij}. \quad (5)$$

Будем называть неопределенный объект робастно управляемым в статике, если

$$\det K \neq 0 \text{ для всех } K \in G_k. \quad (6)$$

Для объектов произвольной размерности задача проверки выполнения условий (6) представляет серьезную проблему [2]. Для ее решения, по-видимому, могут применяться численные методы интервальной математики, требующие, однако значительных ресурсов времени вследствие «проклятия размерности» [3, 4]. Оказывается, однако, задачу проверки робастной управляемости в ряде случаев удается решить аналитически для простейшего многомерного объекта  $2 \times 2$ . В данной работе показано, как это сделать, если неопределенность носит интервальный характер.

Дадим вначале геометрическую интерпретацию условий управляемости в статике (6) для определенного статического объекта  $2 \times 2$ . Для этого представим его в виде

$$X = KU = K_1 U_1 + K_2 U_2, \quad (7)$$

где

$$K_1 = \begin{bmatrix} K_{11} \\ K_{21} \end{bmatrix}, \quad K_2 = \begin{bmatrix} K_{12} \\ K_{22} \end{bmatrix}, \quad U = \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \end{bmatrix}.$$

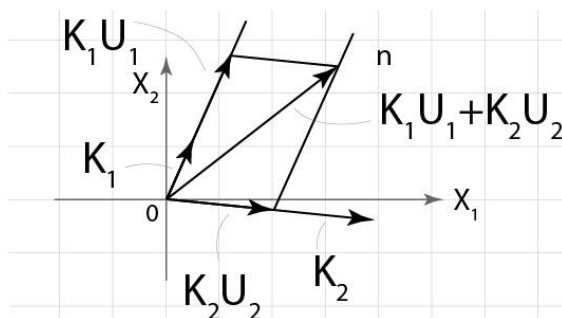


Рис. 2. Графический способ решения уравнения (2)

На рис. 2 показан графический способ решения уравнения (2), записанного в виде

$$K_1 U_1 + K_2 U_2 = -n, \quad (8)$$

основанный на правилах сложения векторов.

Из рис. 2 ясно, что (8) имеет решение  $U_1, U_2$  для произвольного возмущения  $n$  тогда и только тогда, когда векторы  $K_1$  и  $K_2$  имеют различные направления (в противном случае могут быть компенсированы лишь возмущения  $n$ , которые задаются вектором, имеющим то же направление, что  $K_1$  и  $K_2$ ). Имея в виду эти обстоятельства, рассмотрим далее объект с неопределенной матрицей  $K$  и получим геометрические условия робастной управляемости.

Пусть известно, что  $K_1 \in G_{k1}, K_2 \in G_{k2}$  (что соответствует заданию области  $K \in G_k$ ). Введем понятие охватывающего сектора  $OS_G$  для области  $G$ . Будем называть таким образом множество всех прямых, проходящих через начало координат в плоскости  $X_1, X_2$  и имеющих хотя бы одну общую точку с областью  $G$ . На рис.3а) горизонтальной штриховкой показан  $OS_{Gk1}$ , а вертикальной -  $OS_{Gk2}$ . Ясно, что если имеет место пересечение  $OS_{Gk1}$  и  $OS_{Gk2}$  (пересечение заштрихованных областей на рис. 3а), то соответствующий неопределенный объект, задаваемый матрицей  $K \in G_k$ , не является робастно управляемым.

Будем далее рассматривать статический объект  $2 \times 2$  с интервальной неопределенностью типа (5). В этом случае области  $G_{k1}$  и  $G_{k2}$  представляют собой прямоугольники и ОС проходят через их вершины. В частности, на рис. 3б) ОС проходят через вершины 1 и 3. Границы каждого ОС задаются двумя углами  $\underline{\alpha}$  и  $\overline{\alpha}$ , причем величина этих углов может быть определена по координатам соответствующих вершин прямоугольных областей  $G_{k1}$  и  $G_{k2}$ . Поскольку координатами вершин прямоугольников служат границы интервалов неопределенности коэффициентов матрицы  $K$ , то появляется возможность рассчитать граничные углы  $\underline{\alpha}$  и  $\overline{\alpha}$  через верхние и нижние границы этих интервалов. Так, угловые

границы  $OC_{Gk1}$  для прямоугольной области неопределенности  $G_{k1}$  на рис. 3б) рассчитываются по формулам

$$\underline{\alpha}_1 = \arctg(\underline{k}_{21} / \underline{k}_{11}), \quad \bar{\alpha}_1 = \arctg(\bar{k}_{21} / \bar{k}_{11}).$$

Аналогично угловые границы  $OC_{Gk2}$  для прямоугольной области неопределенности  $G_{k2}$  на рис. 3б) рассчитываются по формулам

$$\underline{\alpha}_2 = \arctg(\underline{k}_{22} / \underline{k}_{12}), \quad \bar{\alpha}_2 = \arctg(\bar{k}_{22} / \bar{k}_{12}).$$

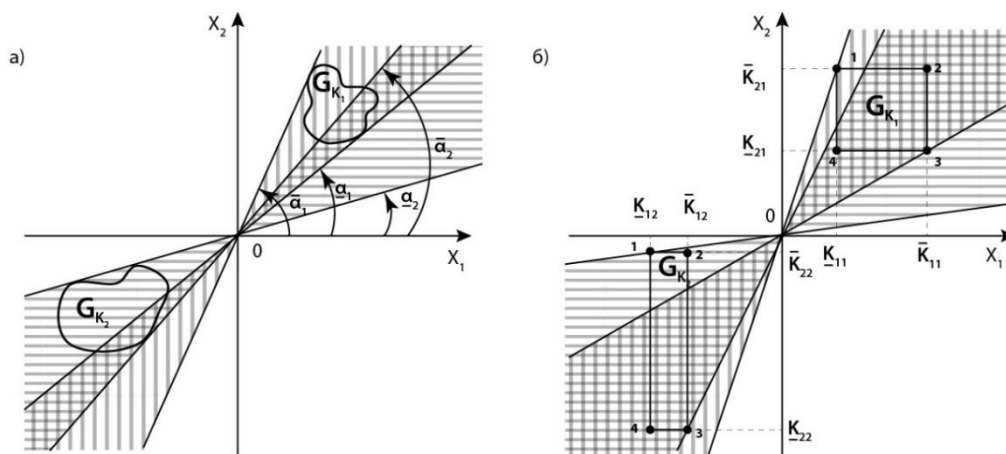


Рис. 3. Пересечение охватывающих секторов:  
а) произвольные области неопределенности; б) интервальная неопределенность

Зная угловые границы  $OC$   $\underline{\alpha}_1, \bar{\alpha}_1$  и  $\underline{\alpha}_2, \bar{\alpha}_2$ , несложно проверить, имеется ли пересечение секторов, а именно: пересечение  $OC$  имеет место, если выполняется одно из двух неравенств  $\underline{\alpha}_1 \leq \alpha_2 \leq \bar{\alpha}_1$  или  $\underline{\alpha}_2 \leq \alpha_1 \leq \bar{\alpha}_2$ . Для рис. 3а) и 3б) пересечение  $OC$  имеет место, т.к. выполняется второе из неравенств. Одновременно это означает, что статический объект (7) с показанной на рисунках 3а) и 3б) областью неопределенности параметров робастно неуправляем. Заметим, что для решения вопроса о робастной управляемости в случае интервальной неопределенности рис. 3б) играет сугубо иллюстративную роль, так что задача была алгоритмизирована в виде последовательности алгебраических операций и для ее решения разработана пользовательская программа. Она позволяет решать вопрос об управляемости в статике статических и соответствующих им динамических объектов размерности  $2 \times 2$ , то есть объектов с двумя управляющими воздействиями и двумя выходными переменными.

#### ЛИТЕРАТУРА:

1. Первозванский А.А. Курс теории автоматического управления. СПб.: Издательство «Лань», 2010.
2. Поляк Б.Т., Щербаков П.С. Робастная устойчивость и управление. М.: Наука, 2007.
3. Жолен Л., Кифер М., Дидри О., Вальтер Э. Прикладной интервальный анализ. М. – Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2005.
4. Hansen E.R., Walster G.W. Global optimization using interval analysis. New York: Marcel Dekker, 2003.

ИСПОЛЬЗОВАНИЕ МНОГОКОМПОНЕНТНОГО ДАТЧИКА В ЗАДАЧЕ УПРАВЛЕНИЯ  
СИЛОВЫМ ВЗАИМОДЕЙСТВИЕМ РОБОТА С ПОВЕРХНОСТЬЮ  
НЕОПРЕДЕЛЕННОГО ПРОФИЛЯ

Необходимость использования медицинских роботов, выполняющих процедуры массажа и мануальной терапии, обусловлена высокими требованиями по качеству, точности и геометрической однотипности выполняемых действий. Целью взаимодействия медицинского робота с пациентом является такое деформирование мягких тканей, которое обеспечивает необходимый терапевтический эффект, измеряемый вектором биомедицинских параметров состояния пациента. В ряде работ показано, что использование только программного управления ограничивает возможности робота, но его эффективность можно серьёзно увеличить за счёт использования адаптивного по отношению к каждому пациенту управления.

Рассмотрим робот с тремя взаимно-перпендикулярными степенями подвижности. В качестве управляемого примем движение по вертикали. Движение в горизонтальной плоскости считается заданным. Робот оснащён датчиком положения, связанным с ротором двигателя по координате  $y$ , и однокомпонентным силовым сенсором, установленным на конце звена робота. Расчётные схемы робота приведены на рис. 1.

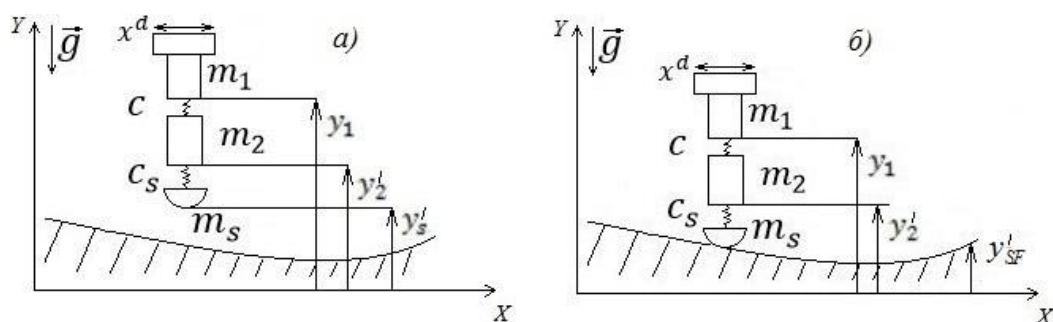


Рис. 1. Расчётные схемы робота в режиме без контакта (а) и с контактом (б)

Ранее было показано [1], что использование комбинированного позиционно-силового управления с обратными связями по положению и по вертикальной составляющей силы взаимодействия робота с поверхностью позволяет получить удовлетворительные с точки зрения плавности и точности процессы. Дальнейшее усовершенствование системы управления при помощи обучения позволяет минимизировать установившуюся ошибку по силе взаимодействия робота с поверхностью.

Пусть робот начинает движение с высоты один метр и движется вниз до момента контакта с поверхностью, форма которой описывается уравнением  $y_{sf} = 0,1 + 0,05\sin(10x)$ . После возникновения контакта робот выходит на желаемый уровень силы взаимодействия  $F_s^d = 40\text{Н}$ . На рис.2 приведены графики процессов  $F_s(x)$  без обучения и с обучением.

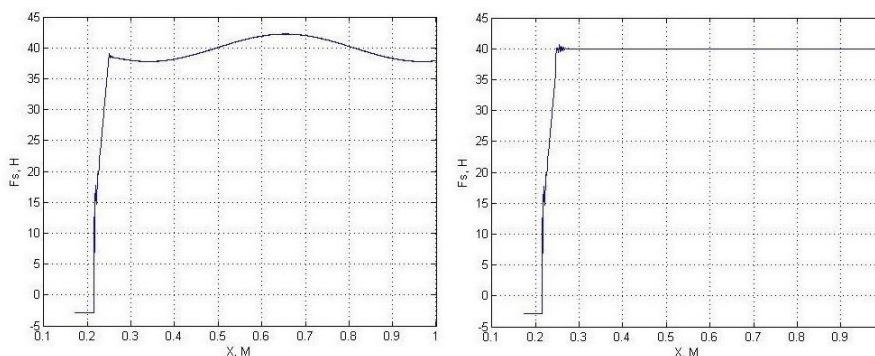


Рис. 2. Графики показаний датчика силы без обучения (слева) и с обучением (справа)

Недостатком системы с однокомпонентным датчиком силы, который измеряет только вертикальную составляющую силы взаимодействия робота с поверхностью, является её неспособность обработать характерные для массажа и мануальной терапии приёмы и действия, такие как точечный массаж, вакуумный массаж и так далее [2, 3]. Приведённые необходимые силовые нагрузки показывают, что для адаптивного управления медицинским роботом, выполняющим подобные операции, однокомпонентного датчика силы недостаточно.

Одним из направлений разработки и программирования медицинских роботов для выполнения техники мануальной терапии и массажа является воспроизведение механизмов человеческой руки и её движений. Датчик усилий располагается между рукой и кистью робота. Такое расположение объясняется близостью к поверхности контакта, где обеспечивается необходимое распределение усилий. Наибольшую информацию предоставляет шестикомпонентный датчик, который выдаёт информацию по силе и моментам в трёх различных направлениях [4]. Схема шестикомпонентного датчика представлена на рис.3.

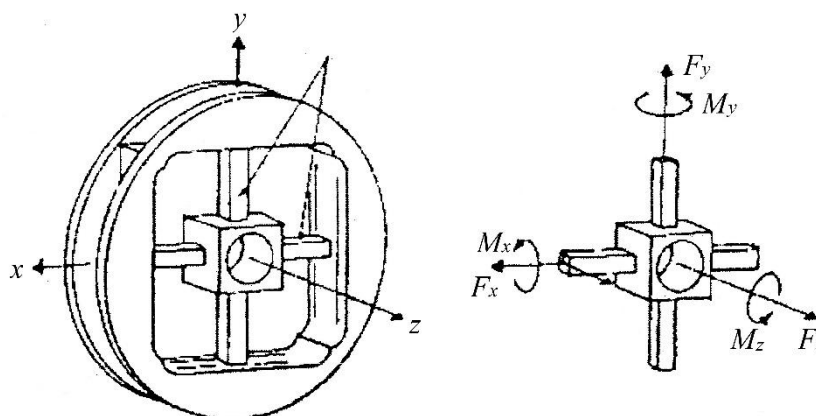


Рис. 3. Шестикомпонентный датчик с крестовым упругим элементом

Измерение горизонтальных составляющих контактной силы необходимо для формирования адекватной реакции на столкновение кисти робота с препятствием и для оценки сил трения. Обратная связь по моментам призвана исключить возможность поломки робота или травмирования пациента. Структурная схема системы с шестикомпонентным датчиком силы представлена на рисунке 4.

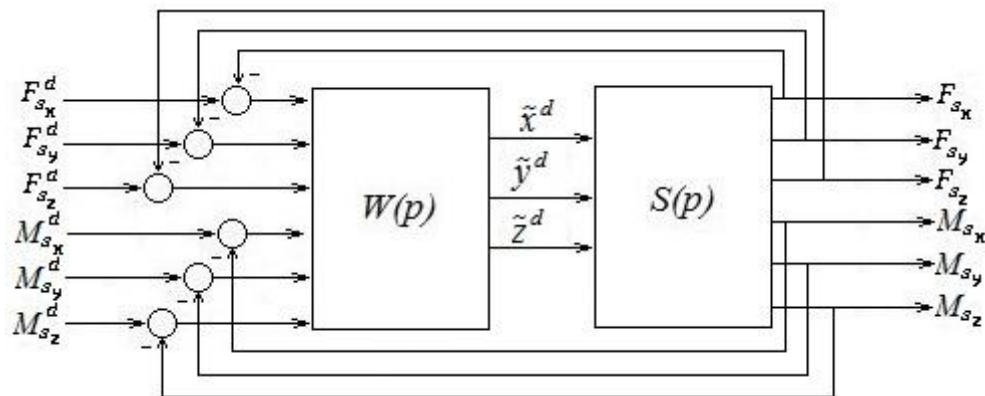


Рис. 4. Структурная схема замкнутой системы

Учет дополнительных компонент, измеряемых датчиком, приводит к необходимости введения дополнительных обратных связей, которые, в свою очередь, через общую нагрузку обуславливают появление динамического взаимовлияния степеней подвижности даже для робота с тремя взаимно-перпендикулярными степенями подвижности.

#### ЛИТЕРАТУРА:

1. Бурдаков С. Ф., Шагниев О. Б. Модели механики в задаче управления силовым взаимодействием робота с поверхностью неопределенного профиля// НТВ СПбПУ, №4, 2015. С. 68-79.
2. Разумов А.Н., Рачков М.Ю., Головин В.Ф., Журавлёв В.В. Модуль силовой адаптации медицинского робота.// Медицинская робототехника. Информационно-измерительные и управляющие системы, №1-3, т.4, 2006. С. 137-145.
3. Головин А.Ф., Архипов М.В., Журавлёв В.В. Проблемы развития робототехники в восстановительной медицине// Мехатроника, автоматизация, управление. 2009. №9. С. 49-53.
4. Гориневский Д.М., Формальский А.М. Об устойчивости движения упругого манипулятора с обратной связью по силе.// Изв. АН СССР. МТТ, 1985, №3. С. 49-57.

УДК 621.313

Р.Э. Шевчук<sup>1</sup>, А.В. Гаев<sup>2</sup>

<sup>1</sup>Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого  
<sup>2</sup>ОАО «НПО ЦКТИ»

#### МНОГОУРОВНЕВОЕ КОНЕЧНО-ЭЛЕМЕНТНОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ЭЛЕМЕНТОВ СТАТОРОВ, СОДЕРЖАЩИХ КОМПОЗИТНЫЕ МАТЕРИАЛЫ

В настоящее время, при создании конкурентоспособных электрических машин большой мощности получают широкое распространение технологии компьютерного моделирования. Они позволяют в сжатые сроки получать наглядное представление о работе машины практически на любом наперед заданном режиме.

Создание рациональной математической модели, позволяющей адекватно описывать вибрационное состояние реальной конструкции электрической машины, является сложной научно-технической задачей и предполагает использование современных расчетно-экспериментальных методов, позволяющих проводить оперативную валидацию расчетных моделей и вносить в них обоснованные изменения.

При наличии в конструкции элементов, выполненных из композитов, в процессе моделирования возникают сложности по определению и моделированию их физико-механических свойств [1].

В предлагаемой работе основное внимание уделяется анализу вибрационного состояния моделей выводных шин мощных турбогенераторов на примере модельных задач. Для решения поставленной проблемы разработана расчетно-экспериментальная методика, основанная на методе прямого многоуровневого конечно-элементного моделирования [2].

В качестве объекта исследования выступает элемент выводной шины статора, закрепленный в держателях при помощи болтов (рис. 1, 2). Нижний держатель прикреплен к вибростолу, который является источником гармонических колебаний с постоянной амплитудой виброускорения.

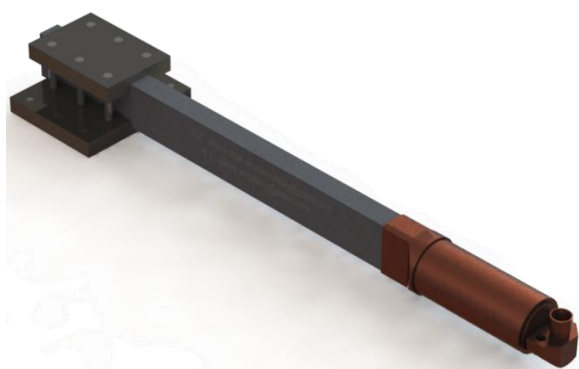


Рис. 1. Объект исследования

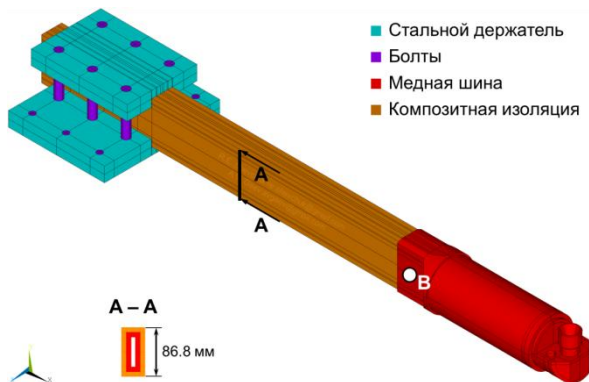


Рис. 2. Геометрическая модель шины

На основании экспериментальных данных по замерам амплитуды колебаний точки В (рис. 2) в зависимости от частоты построена АЧХ, представленная на рис. 3.

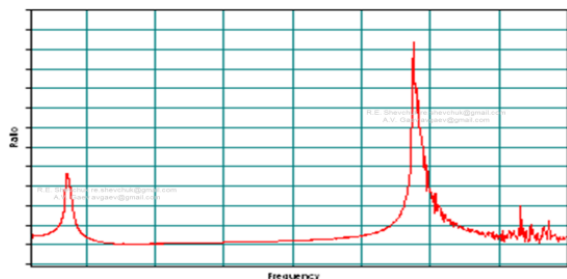


Рис. 3. Экспериментальная АЧХ

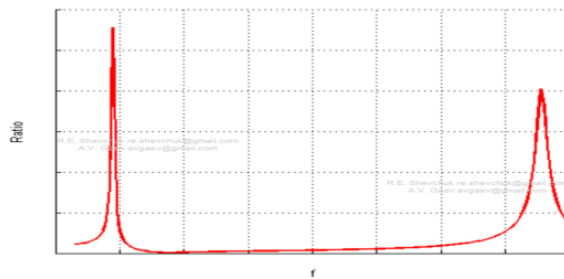


Рис. 4. АЧХ разработанной модели

Из-за наличия большого числа неизвестных параметров, определяющих вибрационное состояние системы (таких как: усилие затяга в креплении, демпфирующие и физико-механические свойства материалов), для проведения корректного многокритериального анализа решение поставленной задачи разбито на три уровня.

На первом уровне, проводится гармонический анализ конструкции. В данном случае, коэффициент демпфирования задается глобально. Материал изоляции предполагается изотропным, с свойствами, обычно используемыми на практике. Принято, что участок зажатой в держателе шины не имеет возможности перемещаться, а у болтов отсутствует предварительный затяг. Результирующая АЧХ представлена на рис. 4, а резонансные формы колебаний на рис. 5.

Сравнительные результаты для значений изгибных частот и коэффициентов передачи представлены в табл. 1.

Табл. 1. Резонансные характеристики системы

№ частоты	Частота F		Коэффициент передачи R	
	Эксперимент	ANSYS	Эксперимент	ANSYS
1	F1	0.99 F1	R1	3.15 R1
2	F2	1.05 F2	R2	0.77 R2

Резонансные частоты, полученные экспериментально и численно отличаются не более чем на 5%, а коэффициенты передачи отличаются значительно. Наблюдается качественное отличие резонансных кривых для первой и второй форм колебаний, что свидетельствует о необходимости уточнения математической модели.

На втором уровне, с целью определения жесткости и демпфирующих свойств крепления была проведена серия многовариантных расчетов, некоторые результаты которых приведены на рис. 6.

Здесь оценивается влияние величины трения между изоляцией и держателями, а также усилия преднатяга болтов на демпфирующие свойства и частоты колебаний системы.

При суммарном натяге в 1 кН демпфирование растет с увеличением коэффициента трения; при 120 кН демпфирование снижается, трение на его значение влияет слабо.

Изоляция шины является монолитом (рис. 7), получаемым путем специальной термомеханической обработки шины, предварительно обмотанной в несколько слоев слюдяной лентой.

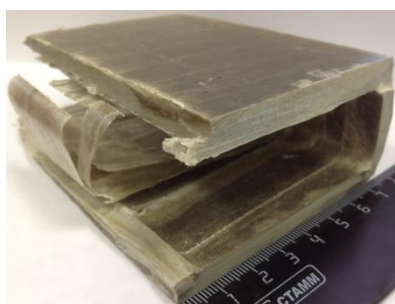


Рис. 7. Изоляция выводной шины

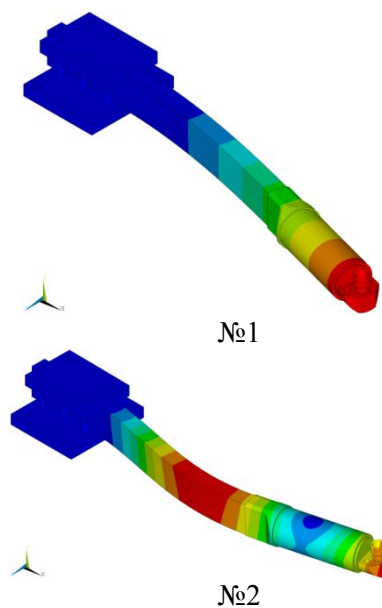


Рис. 5. Изгибные формы колебаний шины в плоскости, перпендикулярной широкой грани (масштаб перемещений условный)

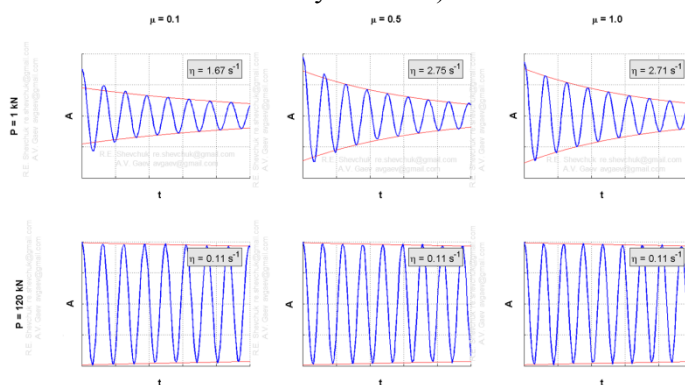


Рис. 6. Отклик шины (в точке В)



Рис. 8. Слюдяная лента

Слюдолента представляет собой композит, где в качестве армирующего компонента выступает слюдяная бумага, с двух сторон обклеенная стеклотканью, а лак является связующей матрицей. В изоляции является возможным выделение элементарной ячейки, периодически повторяющейся по своим геометрическим и физико-механическим характеристикам (рис. 9, 10) – ячейки периодичности (ЯП).

С целью исследования влияния ортотропных физико-механических свойств изоляции на вибрационные характеристики системы разработана модель третьего уровня.





Рис. 9. ЯП материала изоляции

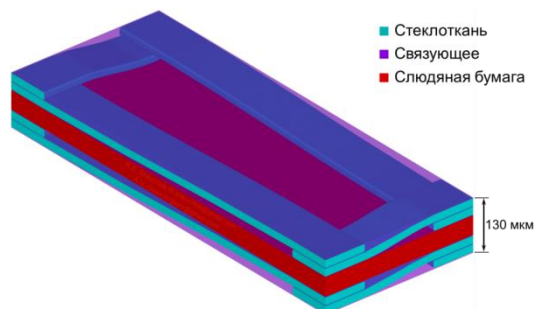


Рис. 10. Геометрическая модель ЯП

Предполагается, что изоляция является макроскопически однородной, тогда ее эффективные физико-механические свойства будут соответствовать эффективным свойствам ЯП. Для их определения обычно используются методы осреднения, широко изложенные в литературе [напр., 3-5]. В настоящей статье используется метод прямой гомогенизации [4].

В результате численного решения, определены эффективные физико-механические характеристики материала изоляции. Для одного из направлений монолита модуль Юнга также был определен экспериментально (рис. 11).

В результате проведенного исследования, разработана многоуровневая методика многокритериальной оценки и анализа вибрационного состояния элементов электрических машин, содержащих композитные материалы; проведена валидация разработанной методики на примере решения модельных задач; изучено влияние свойств системы «держатели» – «изоляция» – «шина» – «наконечник» на ее демпфирующие и резонансные характеристики; проведена разработка и валидация модели материала изоляции с ортотропными свойствами.

Применение описанной методики в численных расчетах элементов мощных генераторов, содержащих композитные материалы, позволяет проводить уточненную оценку вибрационного состояния этих элементов на макро-уровне в составе систем.

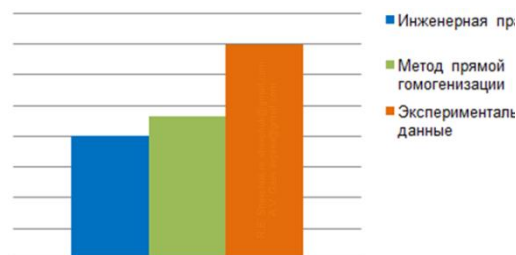


Рис. 11. Модуль Юнга в плоскости ленты, перпендикулярно направлению намотки

#### ЛИТЕРАТУРА:

1. Гаев А.В., Шевчук Р.Э. Многоуровневый подход к конечно-элементному моделированию вибрационного состояния элементов турбоагрегатов, содержащих композиционные материалы // Проблемы вибрации, виброналадки, вибромониторинга и диагностики оборудования электрических станций: сб. докл. VII Международной научно-технической конференции. – М.: ОАО «ВТИ», 2013. – с. 258 – 265.
2. Шевчук Р.Э., Гаев А.В. Методы конечно-элементного моделирования вибрационного состояния элементов электрических машин, содержащих композитные структуры // Неделя науки СПбГПУ: материалы научно-практической конференции с международным участием. Институт прикладной математики и механики СПбГПУ. – СПб: Изд-во Политехн. ун-та, 2014. – с. 143 – 146.
3. Бахвалов И.С., Панасенко П.П. Осреднение процессов в периодических средах. Москва. «Наука». 1984.
4. Боровков А.И. Эффективные физико-механические свойства волокнистых композитов. – М.: Изд-во ВИНТИ, 1985, 113 с.
5. Боровков А.И., Пальмов В.А. Базовые решения и регулярное разложение в механике периодических композитов. Труды СПбГТУ, вычислительная математика и механика, № 498, 73-90.

УДК 621.35:519.12

Е.А. Ржавцев, М.Ю. Гуткин  
Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого

**ДИНАМИКА ФОРМИРОВАНИЯ МАЛОУГЛОВЫХ ГРАНИЦ НАКЛОНА ПРИ УДАРНОМ НАГРУЖЕНИИ УЛЬТРАМЕЛКОЗЕРНИСТЫХ МЕТАЛЛОВ И СПЛАВОВ**

Изучение механизмов эволюции микроструктуры металлов и сплавов в процессе пластической деформации является одной из фундаментальных задач физики прочности и пластичности. В последнее время особую актуальность приобрела проблема получения материалов с мелким зерном, поскольку такие материалы обладают целым рядом полезных прочностных свойств. На данный момент существует большое количество эффективных методов получения конструкционных металлов и сплавов с размером зерна порядка  $10^{-6}$ – $10^{-8}$  м [1], в основе которых лежит процесс деформационного измельчения (фрагментации) структуры материала [2]. Разработано значительное число различных компьютерных и теоретических моделей, описывающих этот процесс, однако есть еще ряд нерешенных вопросов. К числу последних относится выявление основных механизмов фрагментации при ударном нагружении материала.

Цель данной работы – построение компьютерной модели, наглядно демонстрирующей физические механизмы фрагментации ультрамелкозернистых (УМЗ) металлов и сплавов при ударных нагрузках.

Для достижения поставленной цели использовался метод двумерной дискретной дислокационно-дисклинационной динамики, который ранее уже применялся для описания деформационных процессов в условиях квазистатического [3–5] и ударного [6, 7] нагружения. В частности, в основе компьютерных моделей [6, 7] было предположение о том, что в сильно неравновесных условиях ударной волны сжатия на границах формирующихся в материале субзерен имеются скачки угла разориентировки, которые эффективно описываются как места залегания частичных клиновых дисклинаций [8]. Было показано [6, 7], что с помощью своих упругих полей эти дисклинационные структуры «захватывают» скользящие мимо них дислокации, формируя новые устойчивые дислокационные конфигурации типа оборванных стенок и понижая общую энергию начальной дисклинационной структуры. Формирование подобных стенок представляет собой физический механизм дальнейшей фрагментации исходных субзерен. В настоящей работе используется аналогичный подход с той только разницей, что здесь вместо таких субзерен выступают ультрамелкие зерна УМЗ металла или сплава, полученного в сильно неравновесных условиях больших пластических деформаций [1]. В этом случае учитывались не только дислокации, испускаемые границами субзерен [6, 7], но и дислокационные заряды, формирующиеся при этом на самих этих границах.

Моделирование проводилось для различных конфигураций зернограницных дисклинационных структур с нулевым суммарным вектором Франка [8]. Рассматривались дисклинационные диполи, квадруполь и мультиполи. Расчетная ячейка представляла собой прямоугольное зерно с размерами  $400 \times 100$  нм и характеристиками алюминиевого сплава Д16. На боковых границах такого зерна (на линиях  $x = \pm 200$  нм) в момент времени  $t = 0$  под действием приложенного сдвигового напряжения  $\tau$  начиналась генерация краевых дислокаций с векторами Бюргерса  $\pm \mathbf{b}$ , направленными вдоль оси  $x$ . Распределение

дислокаций вдоль оси  $y$  и моменты их появления задавались генератором случайных чисел, а плоскости  $y = const$  служили плоскостями скольжения дислокаций. На месте испущенных границами дислокаций появлялись неподвижные дислокации противоположного знака. Если в процессе моделирования расстояние между двумя подвижными дислокациями противоположных знаков становилось меньше, чем  $3a$  ( $a$  – параметр решетки), то считалось, что они аннигилируют.

Каждая подвижная дислокация в представленной модели находилась под совместным действием сил, вызванных приложенным сдвиговым напряжением, полями упругих напряжений дисклинаций и остальных дислокаций в рассматриваемой области. Уравнение движения  $i$ -й дислокации бралось в обычном виде [3]:  $m\ddot{x}_i + \beta\dot{x}_i = F_i$ ,  $i=1,2,\dots,N$ , где  $m = \rho b^2 / 2$  – эффективная масса дислокации,  $x_i$ ,  $\dot{x}_i$ ,  $\ddot{x}_i$  – ее координата, скорость и ускорение,  $\rho$  – плотность материала,  $\beta$  – коэффициент динамического трения,  $F_i$  – суммарная сила, действующая на дислокацию,  $N$  – общее число подвижных дислокаций, генерированных за время проведения одного численного эксперимента.

Рассмотрим сначала самую простую из возможных дисклинационных конфигураций – двухосный диполь мощностью  $\omega = 0.1$  с плечом  $d = 100$  нм, расположенный в точке  $x = 0$  (рис. 1,а). Уровень приложенного напряжения  $\tau$  выберем равным 0.5 ГПа, что соответствует условиям ударных экспериментов [9, 10]. Под действием такого напряжения происходит циклическая перестройка дислокационной структуры вблизи дисклинационного диполя, в результате чего из потока скользящих сквозь него дислокаций формируется несколько малоугловых границ наклона.

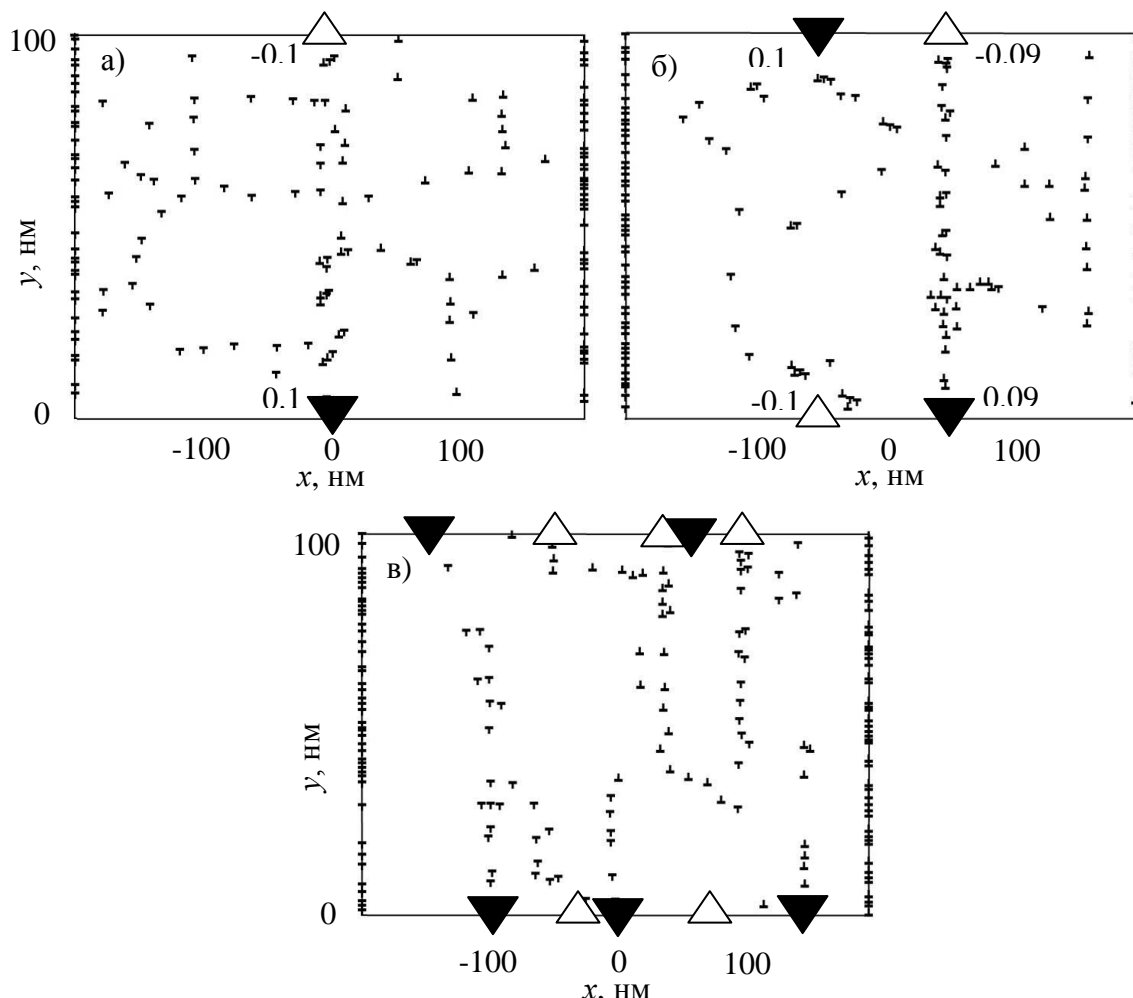


Рис. 1. Конечная дислокационная структура через 10 нс после начала моделирования в случае: а) диполя, б) квадруполя и в) произвольного октуполя дисклинаций. Рядом со значками дисклинаций проставлена их мощность в радианах. Величина средней мощности дисклинаций в октуполе равна 0.1.

На рис. 1,а представлена конечная микроструктура, сформировавшаяся в результате этого процесса за время 10 нс. Аналогичные изменения дислокационной структуры наблюдались для любой мультиполюсной конфигурации дисклинаций, в частности, квадрупольной (рис. 1,б) и октупольной (рис.1,в). Поскольку в реальных условиях на границах зерен в УМЗ металле или сплаве может находиться большое количество исходных неподвижных зернограницных клиновых дисклинаций, скольжение массы краевых дислокаций через такой ансамбль дисклинационных мультиполей должно сопровождаться множественным формированием малоугловых границ наклона. Предполагается, что за обычное время действия импульса сдвиговых напряжений (по экспериментальным данным [9, 10] оно составляло 650 нс) во всех трех рассмотренных выше случаях произойдет насыщение этих границ краевыми дислокациями, быстрая трансформация малоугловых границ зерен в большеугловые и завершение процесса фрагментации.

Отметим, что полученные в данной работе дислокационные структуры заметно отличаются от тех, которые наблюдались в наших моделях [6, 7], в которых не учитывались дислокации, накапливающиеся на границах зерен в процессе испускания подвижных дислокаций. В данном случае видно эффективное пространственное «перемешивание» дислокационных стенок, сформированных дислокациями противоположных знаков, и более равномерное заполнение такими стенками внутризеренного пространства. Анализ причин таких различий требует специального подробного рассмотрения.

В целом, полученные в результате моделирования дислокационные структуры (окончательный размер и вид сформировавшихся фрагментов) визуально схожи со структурами, наблюдавшимися в ударных экспериментах [9–11]. Внешнее напряжение 0.5 ГПа, при котором формируются модельные дислокационные структуры, также совпадает с экспериментальным [9, 10], что подтверждает адекватность предложенной компьютерной модели.

#### ЛИТЕРАТУРА:

1. Р.З. Валиев, И.В.Александров. Наноструктурные материалы, полученные интенсивной пластической деформацией. М.: Логос, 2000, 272 с.
2. В.В. Рыбин. Большие пластические деформации и разрушение металлов. М.: Металлургия, 1986, 224 с.
3. К.Н. Микаелян, М. Seefeldt, М.Ю. Гуткин, Р. Klimanek, А.Е. Романов. Компьютерное моделирование динамики двумерного дислокационно-дисклинационного ансамбля // ФТТ, 2003, том 45, вып. 11, с. 2002-2008.
4. S.V.Bobylev, M.Yu.Gutkin, I.A.Ovid'ko. Transformations of grain boundaries in deformed nanocrystalline materials // Acta Mater., 2004, Vol. 52, No.13, p. 3793–3805.
5. Г.Ф. Сарафанов, В.Н. Перевезенцев. Модель аккомодационного зарождения оборванной субграницы с границы зерна // Письма в ЖТФ, 2007, том 33, вып. 9, с. 87-94.
6. Е.А. Rzhavtsev, M.Yu. Gutkin. Computer simulation of fragmentation processes in FCC metals under shock compression by 2D dislocation-disclination dynamics // Scripta Materialia, 2015, Vol. 100, p. 102-105.
7. М.Ю. Гуткин, Е.А. Ржавцев. Динамика формирования малоугловых границ наклона в металлах и сплавах при высоких скоростях нагружения // ФТТ, 2015, т. 57, № 12, с. 2374-2384.
8. В.И. Владимиров, А.Е. Романов. Дисклинации в кристаллах. Л.: Наука, 1986, 224 с.
9. Ю.И. Мещеряков, А.К. Диваков, С.А. Атрошенко, Н.С.Наумова. Влияние скоростной неоднородности на динамическую рекристаллизацию металлов в ударных волнах // Письма в ЖТФ, 2010, т. 36, № 24, с. 17–24.
10. Ю.И. Мещеряков, А.К. Диваков, Н.И. Жигачева. Пороговые режимы и микромеханизмы динамического деформирования // Mater. Phys. Mech., 2011, Vol. 11, No. 1, p. 23–59.
11. V.F. Nesterenko, M.A. Meyers, J.C. LaSalvia, M.P. Bondar, Y.-J.Chen, Y.L. Lukyanov. Shear localization and recrystallization in high-strain, high-strain-rate deformation of tantalum // Mater. Sci. Eng., 1997, Vol. 5, No.1, p. 23-41.

## ГРАНИЧНАЯ ЗАДАЧА ТЕОРИИ УПРУГОСТИ ДЛЯ ДИЛАТАЦИОННОГО ВКЛЮЧЕНИЯ В ВИДЕ ДЛИННОГО ПАРАЛЛЕЛЕПИДЕДА В ЦИЛИНДРЕ

В последние годы большое внимание привлекают радиально неоднородные нанопроволоки, которые обладают уникальными электронными и оптическими свойствами и находят широкое применение в оптоэлектронике, наноразмерных полевых транзисторах, устройствах хранения и передачи информации, сенсорах и т.д. [1, 2]. Хорошо известно, что стабильность физических свойств композитных нанопроволок зависит от их формы, размера, химического состава, типов кристаллических решеток составляющих композит фаз и, в особенности, от присутствия в них дефектов. Так, например, искажение формы композитных нанопроволок связывают с процессами релаксации напряжений несоответствия. Для теоретического описания механизмов релаксации обычно используются осесимметричные модели нанопроволоки типа «ядро-оболочка» [3, 4]. Недостаток таких моделей заключается в том, что они не применимы для описания процессов релаксации упругих напряжений в композитных нанопроволоках с протяженными плоскими границами раздела [5, 6].

На сегодняшний день известно только одно аналитическое решение, описывающее напряженное состояние в неоднородной нанопроволке с ядром в виде длинного параллелепипеда квадратного поперечного сечения, расположенного симметрично относительно цилиндрической поверхности нанопроволоки [7]. В предположении плоской деформации авторы [7] получили аналитические выражения для комплексных потенциалов задачи. Основным недостатком этой работы состоит в том, что в ней не проверено выполнение граничных условий на свободной поверхности композитной нанопроволоки. Кроме того, случай плоской деформации не подходит для описания напряженно-деформированного состояния неоднородной нанопроволоки с трехмерным дилатационным несоответствием

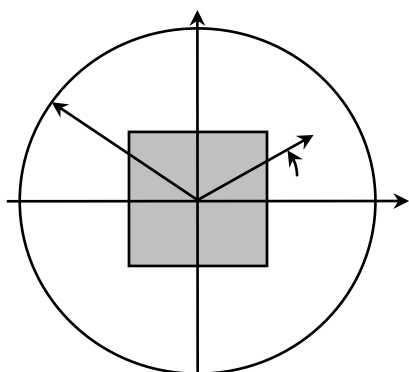


Рис. 1. Поперечное сечение композитной нанопроволки типа «ядро-оболочка» радиуса  $R$  с ядром в виде длинного параллелепипеда квадратного поперечного сечения  $2a \times 2a$ .

кристаллических решеток. В настоящей работе найдено простое аналитическое решение граничной задачи теории упругости о включении в виде длинного параллелепипеда в цилиндре со свободной поверхностью в случае, когда включение испытывает собственную трехмерную дилатацию, имеет квадратное поперечное сечение и располагается симметрично относительно поверхности цилиндра (рис. 1). Это решение может служить моделью полей напряжений решеточного несоответствия или остаточных термоупругих напряжений в нанопроволоках типа «ядро-оболочка» с симметрично расположенным ядром в виде длинного параллелепипеда квадратного сечения.

Искомое поле упругих напряжений  $\sigma_{ij}$ , вызванное собственной дилатацией включения  $\varepsilon^*$ , ищется в виде суммы  $\sigma_{ij} = \sigma_{ij}^\infty + \sigma_{ij}^*$ , где  $\sigma_{ij}^\infty$  – известное поле напряжений такого включения в бесконечной упругой

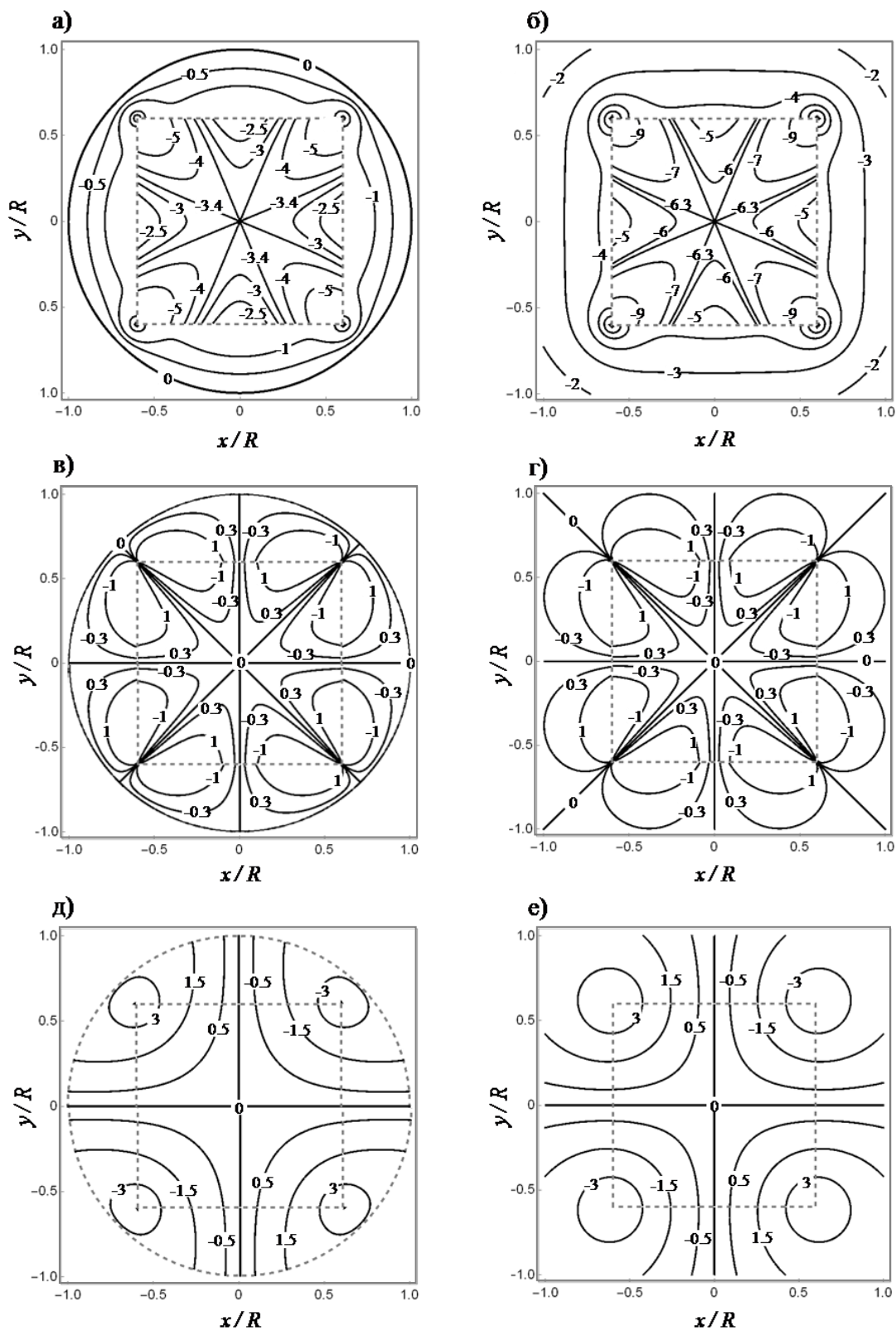


Рис. 2. Карты полей упругих напряжений, создаваемые включением в виде параллелепипеда с поперечным сечением  $2a \times 2a$  в упругом цилиндре радиуса  $R$  ( $a = 0.6 R$ ): (а)  $\sigma_{rr}$ , (в)  $\sigma_{r\theta}$ , (д)  $\sigma_{xy}$  и в неограниченной среде: (б)  $\sigma_{rr}^\infty$ , (г)  $\sigma_{r\theta}^\infty$ , (е)  $\sigma_{xy}^\infty$ . Напряжения даны в единицах  $G\varepsilon^*(1+\nu)/[2\pi(1-\nu)]$ .

среде [8],  $\sigma_{ij}^*$  – дополнительное поле напряжений, обеспечивающее выполнение граничных условий  $\sigma_{rr}(r=R)=0$  и  $\sigma_{r\theta}(r=R)=0$  на свободной поверхности цилиндра.

В декартовой системе координат  $\sigma_{ij}^\infty$  определяются выражениями [8]:

$$\sigma_{xx}^\infty = 2C \left[ \arctan \frac{x-a}{y+a} + \arctan \frac{x+a}{y-a} - \arctan \frac{x-a}{y-a} - \arctan \frac{x+a}{y+a} \right]; \quad (1a)$$

$$\sigma_{xy}^\infty = 2C \ln \frac{[(x-a)^2 + (y-a)^2][(x+a)^2 + (y+a)^2]}{[(x-a)^2 + (y+a)^2][(x+a)^2 + (y-a)^2]}; \quad (1b)$$

$$\sigma_{yy}^\infty = 2C \left[ \arctan \frac{y+a}{x-a} + \arctan \frac{y-a}{x+a} - \arctan \frac{y-a}{x-a} - \arctan \frac{y+a}{x+a} \right]; \quad (1c)$$

$$\sigma_{zz}^\infty = \begin{cases} -4\pi C, & |x| \leq a, |y| \leq a; \\ 0, & |x| > a, |y| > a; \end{cases} \quad (1d)$$

где  $C = G\varepsilon^*(1+\nu)/[2\pi(1-\nu)]$ ,  $G$  – модуль сдвига,  $\nu$  – коэффициент Пуассона, одинаковые для материалов включения и цилиндра. Используя разложение входящих в выражения (1) функций в ряды Фурье, переходя к цилиндрической системе координат (рис. 1) и используя комплексные потенциалы, находим решение для ненулевых компонент поля  $\sigma_{ij}^*$ :

$$\sigma_{rr}^* = 4C\rho^2 \left[ 1 - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} \left( 2(2n-1) - (4n-1) \frac{R^2}{r^2} \right) \left( \frac{\rho r}{R} \right)^{4n} \cos 4n\theta \right]; \quad (2a)$$

$$\sigma_{r\theta}^* = 4C\rho^2 \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} \left( 4n - (4n-1) \frac{R^2}{r^2} \right) \left( \frac{\rho r}{R} \right)^{4n} \sin 4n\theta; \quad (2b)$$

$$\sigma_{\theta\theta}^* = 4C\rho^2 \left[ 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} \left( 2(2n-1) - (4n-1) \frac{R^2}{r^2} \right) \left( \frac{\rho r}{R} \right)^{4n} \cos 4n\theta \right]. \quad (2c)$$

Полученное решение в виде тригонометрических рядов Фурье удобно для численных расчетов. На рис. 2 показаны карты распределения компонент  $\sigma_{ij}(x, y)$  (левая колонка) и  $\sigma_{ij}^\infty(x, y)$  (правая колонка) в поперечном сечении композитного цилиндра. Видно, что компоненты  $\sigma_{rr}(x, y)$  и  $\sigma_{r\theta}(x, y)$  удовлетворяют граничным условиям на свободной поверхности цилиндра. В случае, когда ребра включения подходят достаточно близко к этой поверхности, наблюдается значительная экранировка упругих полей включения – снижается уровень напряжений и искажаются их изолинии. Особенно сильно это проявляется в распределении радиального нормального напряжения (ср. рис. 2а и 2б).

Полученное решение планируется использовать в физических приложениях, в частности, при разработке теоретических моделей релаксации напряжений несоответствия в радиально неоднородных нанопроволоках с ядром в виде длинного параллелепипеда [5, 6].

#### ЛИТЕРАТУРА:

1. L.J. Lauhon, M.S. Gudixsen, C.M. Lieber, Phil. Trans. R. Soc. Lond. A 362 (2004) 1247.
2. A.J. Mieszawska, R. Jalilian, G.U. Sumanasekera, F.P. Zamborini, Small 3 (2007) 722.
3. I.A. Ovid'ko, A.G. Sheinerman, Phil. Mag. 84 (2004) 2103.
4. Y. Liang, W.D. Nix, P.B. Griffin, J.D. Plummer, J. Appl. Phys. 97 (2005) 043519.
5. Y. Ding, F. Fan, Z. Tian, Z.L. Wang, J. Am. Chem. Soc. 132 (2010) 12480.
6. B.T. Sneed, C.N. Brodsky, C.H. Kuo, et al., J. Am. Chem. Soc. 135 (2013) 14691.
7. W.-N. Zou, Q.-C. He, Q.-S. Zheng, Int. J. Solids Struct. 49 (2012) 1627.
8. К.Л. Малышев, М.Ю. Гуткин, А.Е. Романов и др., ФТТ 30 (1988) 2040.

А.М. Смирнов<sup>1</sup>, Е.С. Young<sup>2</sup>, В.Е. Бугров<sup>1</sup>, J.S. Speck<sup>2</sup>, Романов А.Е.<sup>1,3</sup><sup>1</sup>Санкт-Петербургский национальный исследовательский университет информационных технологий, механики и оптики ; <sup>2</sup>UCSB, Materials Department; <sup>3</sup>Физико-технический институт им. А.Ф. Иоффе

### КРИТИЧЕСКИЕ УСЛОВИЯ ФОРМИРОВАНИЯ ДИСЛОКАЦИЙ НЕСООТВЕТСТВИЯ ПУТЕМ ПРИЗМАТИЧЕСКОГО СКОЛЬЖЕНИЯ В ПОЛУПОЛЯРНЫХ И НЕПОЛЯРНЫХ Ш-НИТРИДНЫХ ГЕТЕРОСТРУКТУРАХ

На сегодняшний день интерес к светодиодам, излучающим в видимом диапазоне длин волн, на основе GaN, InGaN, AlGaN, с полуполярной ориентацией роста неуклонно увеличивается [1], поскольку рост нитридных гетероструктур в неполярной и полуполярной ориентации позволяет уменьшить напряженность внутреннего электрического поля. При росте нитридных гетероструктур в полярном направлении (вдоль *c*-оси) в квантовых ямах возникает эффект Штарка, в результате чего падает скорость излучательной рекомбинации носителей заряда, а спектр электролюминесценции сдвигается в коротковолновую область длин волн. В настоящее время, нескольким научным группам удалось создать зеленые и синие лазеры с высокой эффективностью на нитридных структурах, выращенных в полуполярной ориентации – (20 $\bar{2}$ 1) [2-4] и (30 $\bar{3}$ 1) [5].

Различия в параметрах решеток гетероструктур, выращенных на подложках полуполярной ориентации, приводит к возникновению напряжений несоответствия, которые влияют на оптические и электрические свойства устройств на основе этих гетероструктур. Образование дислокаций несоответствия (ДН) может происходить путем базисного (ДНБС) или призматического (ДНПС) скольжения и приводит к релаксации напряжений несоответствия. Для структур, выращенных вдоль направления (0001), угол между базисной и призматической плоскостями и направлением роста равен 0° и 90° соответственно. В этом случае сдвиговая компонента тензора напряжений стремится к нулю, что исключает возможность релаксации напряжений несоответствия скольжением ДН в базисной или призматической плоскостях. Основной плоскостью скольжения в кристаллической структуре типа вюрцит является базисная плоскость (0001), а наиболее плотно упакованными направлениями –  $\langle 11\bar{2}0 \rangle$ . Релаксации напряжений несоответствия с помощью этой системы скольжения приводит к образованию одномерных массивов ДНБС на пересечении *c*-плоскости и полуполярной плоскости роста. Этот механизм релаксации напряжений несоответствия был исследован теоретически и экспериментально в работах [6-9]. Релаксация напряжений несоответствия с помощью вторичных систем скольжения, т.е. систем скольжения ДН в призматических плоскостях в Ш-нитридных гетероструктурах была описана только экспериментально в работах [10, 11].

Целью настоящей работы является сравнительный анализ критических условий релаксации напряжений несоответствия в Ш-нитридных гетероструктурах типа пленка-подложка за счет образования ДНПС и ДНБС.

Задача о релаксации напряжений несоответствия за счет образования ДНПС решалась в приближении анизотропной теории упругости. Формирование такой ДН энергетически выгодно, если соответствующее изменение полной энергии системы  $\Delta W$  будет отрицательным. Величину  $\Delta W$  можно определить следующим образом:

$$\Delta W = W_d + W_{\text{int}} < 0, \quad (1)$$

где  $W_d$  – энергия ДН,  $W_{\text{int}}$  – энергия взаимодействия ДН с упругим полем несоответствия.



Энергия ДН  $W_d$  приведена в работе [12], а энергия взаимодействия  $W_{int}$  была определена как работа по зарождению петли в пленке в упругом поле несоответствия гетероструктуры.

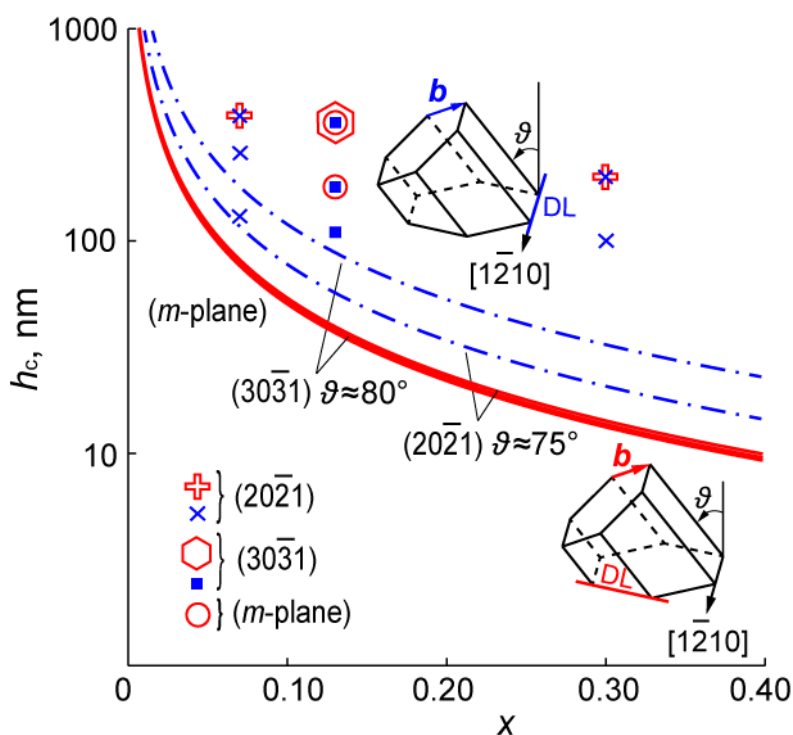


Рис. 1. Зависимость критической толщины  $h_c$  от концентрации Al  $x$  для ДН в гетероструктурах  $Al_xGa_{1-x}N/GaN$  с полярной (20 $\bar{2}$ 1), (30 $\bar{3}$ 1) и неполярной ориентацией роста и сравнение с экспериментальными данными. Символами изображены толщины пленки  $h$ , при которых экспериментально зафиксировано присутствие ДН; полые символы соответствуют ДНПС, а сплошные ДНБС. Штрихпунктирными и сплошными кривыми изображены соответственно ДНБС и ДНПС

Сравнение двух механизмов релаксации напряжений несоответствия было произведено на примере гетероструктуры  $Al_xGa_{1-x}N/GaN$  (рис. 1). Наиболее интересными с практической точки зрения являются зависимости критической толщины пленки  $h_c$  от концентрации Al  $x$  для зарождения ДНБС или ДНПС, поскольку они могут служить ориентиром при выращивании гетероструктур. На рис. 1 видно, что кривые для ДНБС четко разделены, а кривые для ДНПС прилегают друг к другу. В целом теоретические расчеты показывают, что зарождение ДНПС энергетически более выгодно, чем зарождение ДНБС, когда угол роста близок к 90°. Это связано с тем, что в этом случае вектор Бюргерса ДНБС практически параллелен линии дислокации, и винтовая часть ДН, которая не вносит вклад в релаксацию напряжений несоответствия, становится значительно больше краевой части ДН. Экспериментальные данные, отмеченные на рис. 1 различными символами, хорошо согласуются с теоретическими.

Таким образом, построены теоретические модели, описывающие релаксацию напряжений несоответствия в III-нитридных гетероструктурах за счет образования ДНПС. Проведено сравнение механизмов релаксации напряжений несоответствия путем образования ДНБС и ДНПС. Сопоставлены теоретические и экспериментальные данные.

#### ЛИТЕРАТУРА:

1. M. Kneissl and T. Wernicke, "Optical and structural properties of InGaN light emitters on non- and semipolar GaN" in III-Nitride Semiconductors and Their Modern Devices, Bernard Gil (Ed), Oxford University Press (2013).
2. M. Adachi, Japan Journal of Applied Physics 53, 100207 (2014).
3. D. Sizov, R. Bhat, J. Wang, and C.-E. Zah, Applied Physics Express 7, 112701 (2014).
4. A. Pourhashemi, R.M. Farrell, D.A. Cohen, J.S. Speck, and S. Nakamura, Applied Physics Letters 106, 111105 (2015).
5. D.L. Becerra, Y. Zhao, S.H. Oh, C.D. Pynn, K. Fujito, S.P. DenBaars, and S. Nakamura, Applied Physics Letters 105, 171106 (2014).
6. P.S. Hsu, E.C. Young, A.E. Romanov, K. Fujito, S.P. DenBaars, S. Namakura, and J.S. Speck, Applied Physics Letters 99, 081912 (2011).
7. S. Ploch, T. Wernicke, M. Frentrup, M. Pristovsek, M. Weyers, and M. Kneissl, Applied Physics Letters 101, 202102 (2012).
8. E.C. Young, C.S. Gallinat, A.E. Romanov, A. Tyagi, F. Wu, and J.S. Speck, Applied Physics Express 3, 111002 (2010).
9. A.E. Romanov, E.C. Young, F. Wu, A. Tyagi, C.S. Gallinat, S. Nakamura, S.P. DenBaars, and J.S. Speck, Journal of Applied Physics 109, 103522 (2011).
10. M.T. Hardy, P.S. Hsu, F. Wu, I.L. Koslow, E.C. Young, S. Nakamura, A.E. Romanov, S.P. DenBaars, and J.S. Speck, Applied Physics Letters 100, 202103 (2012).
11. P.S. Hsu, M.T. Hardy, E.C. Young, A.E. Romanov, S.P. DenBaars, S. Nakamura, and J.S. Speck, Applied Physics Letters 100, 171917 (2012).
12. M.M. Savin, V.M. Cherov, and A.M. Stroková. Phys. Stat. Sol. 35, 747 (1976).

УДК 661.868.1

Л.И. Гузилова<sup>1,2</sup>, В.Н. Маслов<sup>1,2</sup>, Е.С. Васильева<sup>3</sup>, В.И. Николаев<sup>1,2</sup>, А.Е. Романов<sup>1,2</sup>  
<sup>1</sup>Университет ИТМО; <sup>2</sup>ФТИ им. А.Ф. Иоффе РАН; <sup>3</sup>Санкт-Петербургский  
политехнический университет Петра Великого

#### ИССЛЕДОВАНИЕ ФИЗИКО-МЕХАНИЧЕСКИХ ХАРАКТЕРИСТИК МОНОКРИСТАЛЛОВ $\beta$ -Ga<sub>2</sub>O<sub>3</sub>, ВЫРАЩЕННЫХ ИЗ СОБСТВЕННОГО РАСПЛАВА

$\beta$ -Ga<sub>2</sub>O<sub>3</sub> является широкозонным полупроводником n-типа ( $E_g=4.9$  эВ), благодаря чему находит широкое применение в оптоэлектронике [1-3]. Одним из примеров успешного применения  $\beta$ -Ga<sub>2</sub>O<sub>3</sub> служит его использование Tamura Corp в качестве подложки для сверхъяркого белого светодиода [4].

До настоящего момента сведений в литературе о механических характеристиках кристаллов  $\beta$ -Ga<sub>2</sub>O<sub>3</sub> крайне мало. Отсутствуют оценки критических напряжений, которые способны выдержать моно- и поликристаллы  $\beta$ -Ga<sub>2</sub>O<sub>3</sub>. При этом отмечается, что механическое нагружение может приводить к развитию нежелательных процессов, поскольку кристаллы склонны к двойникованию.

Кристаллы (рис. 1), используемые в работе, выращивались методом свободной кристаллизации на установке «Гранат-2М». При выращивании монокристаллов  $\beta$ -Ga<sub>2</sub>O<sub>3</sub> в качестве исходного сырья использовался порошок ЧДА, монокристаллический сапфир использовался в качестве материала для тигля, диаметр и высота которого составляли 26 мм и 50 мм, соответственно [5].



Рис. 1. Изображение монокристалла  $\beta\text{-Ga}_2\text{O}_3$

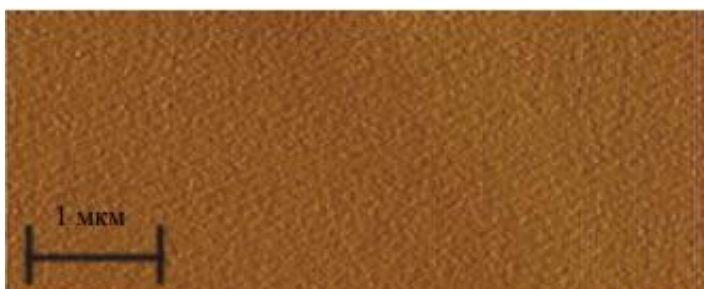


Рис. 2. Изображение поверхности (001) монокристалла  $\beta\text{-Ga}_2\text{O}_3$ , полученное с помощью атомно-силового микроскопа

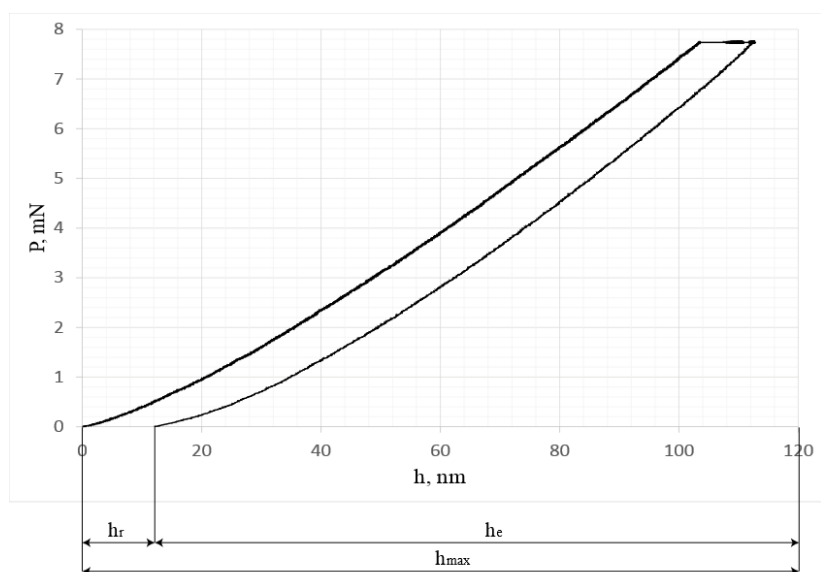


Рис. 3. P-h диаграмма нагружения поверхности (001) монокристалла  $\beta\text{-Ga}_2\text{O}_3$ :  
 P – нагрузка на образец, h – глубина отпечатка, оставленного индентором на поверхности образца,  
 $h_r$  – глубина остаточного отпечатка,  $h_e$  – упругое восстановление,  $h_{\max}$  – максимальная глубина отпечатка при максимальной нагрузке на индентор

Табл. 2. Результаты анализа диаграммы и проведенных расчетов

Характеристика	Значение
Глубина остаточного отпечатка ( $h_r$ ), нм	11,74
Упругое восстановление ( $h_e$ ), нм	101,02
Упругий прогиб поверхности образца ( $h_a$ ), нм	59,036
Максимальная глубина ( $h_{\max}$ ), нм	112,76
Жесткость в контакте индентор-образец (S), нм	98284
Эффективный модуль упругости ( $E_r$ ), ГПа	207
Модуль упругости (E), ГПа	234

В настоящей работе приведены результаты исследования физико-механических свойств монокристаллов  $\beta\text{-Ga}_2\text{O}_3$  и изменений на поверхности кристалла, связанных с

механическим воздействием на него. Изучалась поверхность (100), которая является плоскостью спайности в этом кристалле. На рис. 2 показана поверхности скола по спайности. Исследование значения микротвёрдости осуществлялось по методу Виккерса на установке ПМТ-3, величина нагрузки на индентор составляла 0,3-1 Н. Среднее значение микротвёрдости при этом диапазоне нагрузок составило  $H_V=8.91$  ГПа [6].

Модуль упругости монокристаллов  $\beta\text{-Ga}_2\text{O}_3$  был определён по методу Оливера-Фарра [7] путем анализа диаграммы нагружения (рис.3), полученной при наноиндентировании образцов алмазной трёхгранной пирамидой Берковича. В табл.1 представлены результаты расчётов.

В заключение, хотелось бы отметить, что:

1) величины микротвёрдости для кристаллов, выращенных Tamura Corporation (9.7 ГПа (101), 12.5 ГПа ( $\bar{2}01$ ) [8]) несколько отличаются от величины значения, полученного в [6], что объясняется наличием анизотропии в кристалле.

2) величина модуля упругости для  $\beta\text{-Ga}_2\text{O}_3$ , полученная в данной работе, отлично согласуется со значениями для кристаллов, представленными в [8].

3) анализ полученных величин и сравнение их с усреднёнными значениями микротвёрдости и модуля упругости монокристаллов GaN ( $H_V=10,2$  ГПа,  $E=302,7$  ГПа [9,10]) показывает, что  $\beta\text{-Ga}_2\text{O}_3$  является менее твёрдым, с меньшим модулем упругости чем кристаллы монокристалл GaN.

#### ЛИТЕРАТУРА:

1. Hwang W.S., Verma A., Peelaers H., et al. High-voltage field effect transistors with wide-bandgap  $\beta\text{-Ga}_2\text{O}_3$  nanomembranes. Applied Physics Letters, 2014, vol. 104, no. 24, p.203111.
2. He H., Blanco M.A., Pandey R. Electronic and thermodynamic properties of  $\beta\text{-Ga}_2\text{O}_3$ . Applied Physics Letters, 200, vol. 88, no. 26, p. 261904.
3. Oshima T., Okuno T., Fujita S.  $\text{Ga}_2\text{O}_3$  thin film growth on c-plane sapphire substrates by molecular beam epitaxy for deep-ultraviolet photodetectors. Japanese Journal of Applied Physics, 2007, vol. 46, no. 11, p. 7217–7220.
4. Tamura and Koha Demonstrate White LED Using Gallium Oxide at Lighting Japan 2013. URL: [www.led-professional.com/technology/light-generation/tamura-and-koha-demonstrate-white-led-using-gallium-oxide-at-lighting-taiwan-2013](http://www.led-professional.com/technology/light-generation/tamura-and-koha-demonstrate-white-led-using-gallium-oxide-at-lighting-taiwan-2013) (accessed October 20, 2015). (eng)
5. Maslov V.N., Krymov V.M., Blashenkov M.N., Golovatenko A.A., Nikolaev V.I.  $\beta\text{-Ga}_2\text{O}_3$  crystal growing from its own melt. Technical Physics Letters, 2014, vol. 40, no. 4, p. 303-305.
6. Guzilova L.I., Maslov V.N., Aifantis K.E., et al. Determination of Vickers microhardness in  $\beta\text{-Ga}_2\text{O}_3$  single crystals grown from their own melt. Scientific and Technical Journal of Information Technologies, Mechanics and Optics, 2015, vol.15, no. 3, pp. 546–549. (rus)
7. Oliver W.C., Pharr G.M. An improved technique for determining hardness and elastic modulus using load and displacement sensing indentation experiments. Journal of Materials Research, 1992, vol. 6, no. 7, p. 1564-1583.
8. Single-Crystal Gallium Oxide Substrates. URL: <http://www.tamurass.co.jp/en/release/20131122> (accessed October 20, 2015). (eng)
9. Yonenaga I., Hoshi T., Usui A. Hardness of bulk single-crystal gallium nitride at high temperatures. Japanese Journal of Applied Physics, 2000, vol. 39, p. L200-L201.
10. Polian A., Grimsditch M., Grzegory I. Elastic constants of gallium nitride. Journal of Applied Physics, 1996, vol.79, no.6, p.3343-3344.

## ОПИСАНИЕ НЕУПРУГОГО ДЕФОРМИРОВАНИЯ ПОЛИКРИСТАЛЛОВ С УЧЕТОМ РОТАЦИЙ КРИСТАЛЛИЧЕСКИХ РЕШЕТОК

Работа посвящена моделированию неупругого деформирования поликристаллов с учетом упрочнения и поворота кристаллических решеток зерен. Известно, что почти при любом пластическом деформировании металлические материалы испытывают изменение физико-механических свойств, что сказывается на параметрах изделий, произведенных из этих материалов. Следовательно, построение математических моделей, учитывающих изменение физико-механических свойств в процессе деформирования материала, является актуальной задачей [1].

Чтобы корректно описать эволюцию характеристик материала в процессе неупругого деформирования, необходимо знать, что является основным механизмом данного явления, а также какими соотношениями можно описывать изменение структуры материала при действующих физических механизмах деформации [2].

Главной задачей работы является описание хорошо известного эффекта, заключающегося в изменении ориентации кристаллографических осей зерен поликристалла в процессе интенсивной неупругой деформации; согласованные ротации кристаллографических осей зерен в поликристалле и приводят к появлению наведенной анизотропии свойств образца [3-5]. Наиболее популярными моделями поворота решетки являются модель «материального поворота», модель стесненного поворота по Тейлору и модель, учитывающая несовместность сдвигов по системам скольжения. Выбор конкретной модели ротации зависит от гипотез, на основе которых строится модель: учитываются ли пластические сдвиги в зерне с некоторой ориентацией, ограничена ли деформация зерна соседями, видом нагружения и т.д.

В качестве основных соотношений модели на мезоуровне выбраны:

$$\left\{ \begin{array}{l} \boldsymbol{\sigma}^r \equiv \dot{\boldsymbol{\sigma}} - \boldsymbol{\omega} \cdot \boldsymbol{\sigma} + \boldsymbol{\omega} \cdot \boldsymbol{\sigma} = \mathbf{n} : \mathbf{d}^e = \mathbf{n} : (\mathbf{d} - \mathbf{d}^{in}), \\ \mathbf{d}^{in} = \sum_{k=1}^K \dot{\gamma}^{(k)} \mathbf{m}^{(k)}, \\ \dot{\gamma}^{(k)} = \dot{\gamma}_0 \left| \frac{\boldsymbol{\tau}^{(k)}}{\boldsymbol{\tau}_c^{(k)}} \right|^n H(\boldsymbol{\tau}^{(k)} - \boldsymbol{\tau}_c^{(k)}), k = 1, \dots, K, \\ \dot{\boldsymbol{\tau}}_c^{(k)} = f(\gamma^{(j)}, \dot{\gamma}^{(j)}), k, j = 1, \dots, K. \end{array} \right. \quad (1)$$

В системе уравнений (1)  $\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\omega}, \mathbf{d}, \mathbf{d}^e, \mathbf{d}^{in}, \mathbf{o}$  являются соответственно тензорами напряжений, спина, деформации скорости, а так же упругой и пластической частей тензора деформации скорости и тензором поворота КСК относительно ЛСК,  $\dot{\gamma}^{(k)}, \dot{\boldsymbol{\tau}}_c^{(k)}$  – скаляры, обозначающие скорость сдвигов и скорость изменения критических касательных напряжений по СС (для ГЦК кристаллов количество СС равно 24),  $\dot{\gamma}_0$  представляет базовую скорость сдвига при равенстве касательных напряжений критическим по СС;  $\boldsymbol{\tau}^{(k)}, \boldsymbol{\tau}_c^{(k)}, \gamma^{(k)}$

являются касательными, критическими напряжениями и накопленным сдвигом по СС,  $\mathbf{n}^{(i)}, \mathbf{b}^{(i)}$  – вектор нормали и вектор Бюргерса.

Рассмотрены две модели ротации кристаллической решетки:

$$\left\{ \begin{array}{l} \boldsymbol{\omega}_1 = \mathbf{w} - \mathbf{w}^p = \mathbf{w} + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^K \dot{\gamma}^{(k)} (\mathbf{n}^{(k)} \mathbf{b}^{(k)} - \mathbf{b}^{(k)} \mathbf{n}^{(k)}), \\ (\mathbf{m}^r)^m = \lambda \mathbf{N} \times (\sum_i^K \dot{\gamma}^{(i)} \mathbf{n}^{(i)} \mathbf{b}^{(i)} - \sum_j^K \dot{\gamma}^{(j)} \mathbf{n}^{(j)} \mathbf{b}^{(j)}) \cdot \mathbf{N}, \\ \boldsymbol{\omega}_2 = \begin{cases} \frac{1}{A} \boldsymbol{\mu}^r + \frac{1}{H} \boldsymbol{\mu}, & \text{при } \|\boldsymbol{\mu}\| = \boldsymbol{\mu}_c \text{ и } \boldsymbol{\mu} \cdot \boldsymbol{\mu}^r \geq 0, \\ \frac{1}{A} \boldsymbol{\mu}^r, & \text{в противном случае,} \end{cases} \\ \dot{\boldsymbol{\sigma}} \cdot \boldsymbol{\sigma}^T = \boldsymbol{\omega}, \end{array} \right. \quad (2)$$

где  $\boldsymbol{\omega}_1, \boldsymbol{\omega}_2$  – тензоры спина, полученные с помощью модели стесненного поворота по Тейлору и модели, учитывающую несовместность сдвигов по СС;  $\boldsymbol{\mu}$  – тензор моментных напряжений;  $\mathbf{m}$  – вектор моментных напряжений;  $\mathbf{N}$  – внешняя для анализируемого объекта единичная нормаль к границе с соседним объектом, константы  $\lambda, A, H$  являются параметрами материала и определяются опытным путем.

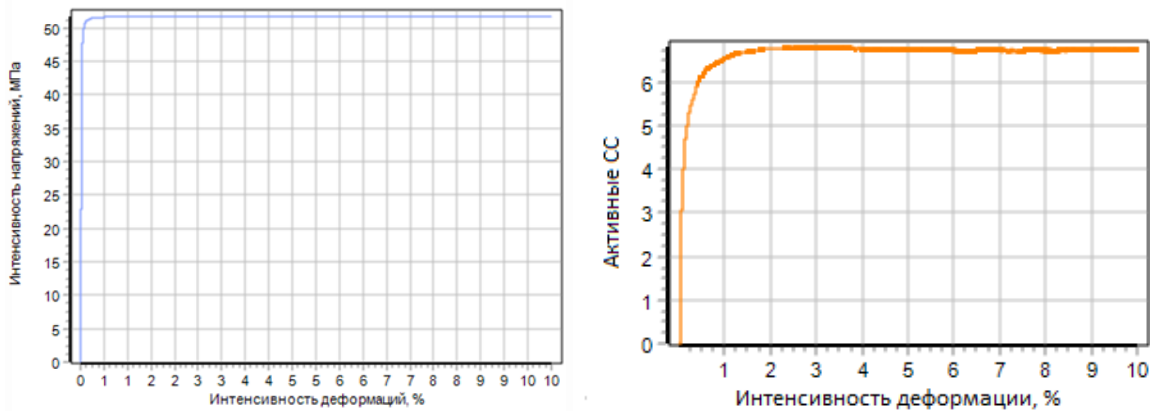


Рис. 1. Слева – зависимость интенсивности напряжений от интенсивности деформаций при простом сдвиге; справа – количество активных систем скольжения в процессе моделирования простого сдвига

На рис. 1 представлены результаты работы программы для простого сдвига [6]. На графиках представлена зависимость интенсивностей напряжений от деформаций и среднее количество активных систем скольжения в процессе моделирования. Полученный результат хорошо согласуется с моделями, не учитывающими упрочнение в процессе деформирования.

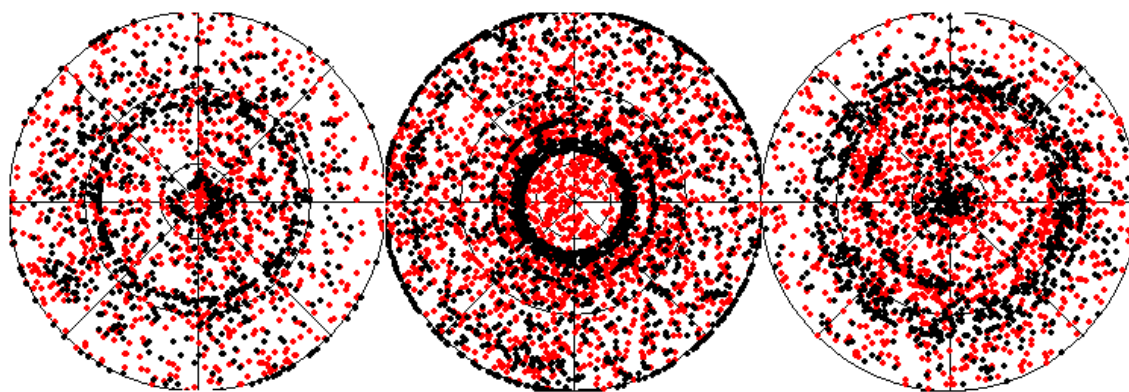


Рис. 2. Полюсные фигуры при осадке поликристалла (численное моделирование)

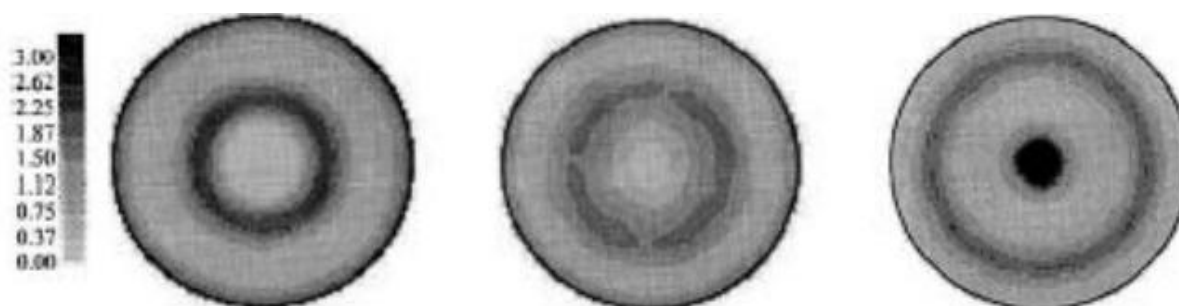


Рис. 3. Полюсные фигуры при осадке поликристалла (эксперимент)

На рис. 2-3 представлены полюсные фигуры, на которых изображены семейства векторов по направлениям  $[001]$ ,  $[011]$  и  $[111]$ , при осадке поликристаллического агрегата; результаты, полученные на основе модели Тейлора, хорошо согласуются с результатами, полученными опытным путем [4].

Работа выполнена при финансовой поддержке гранта Президента РФ № МК-4917.2015.1, РФФИ (грант №14-01-96008 р\_урал\_а).

#### ЛИТЕРАТУРА:

1. Trusov P.V., Ashikhmin V.N., Volegov P.S., Shveykin A.I. Constitutive relations and their application to the description of microstructure evolution // *Physical Mesomechanics*. – 2010. – Т. 13, № 1-2. – С. 38-46.
2. Трусов П.В., Волегов П.С., Кондратьев Н.С. Физические теории пластичности: учеб. пособие. – Пермь: Изд-во Перм. нац. исслед. политехн. ун-та, 2013. – 244 с.
3. Трусов П.В., Волегов П.С., Швейкин А.И. Конститутивная упруговязкопластическая модель гцк-поликристаллов: теория, алгоритмы, приложения. – Saarbrücken, 2011. – 147 с.
4. Trusov P.V., Volegov P.S., Shveykin A.I. Multilevel model of inelastic deformation of fcc polycrystalline with description of structure evolution // *Computational Materials Science*. – 2013. – Vol. 79. – Pp. 429-441.
5. Трусов П.В., Волегов П.С. Физические теории пластичности: теория и приложения к описанию неупругого деформирования материалов. Ч. 2: Вязкопластические и упруговязкопластические модели // *Вестник ПНИПУ. Механика*. – 2011. – № 2. – С. 101-131.
6. Волегов П.С., Янц А.Ю. Несимметричная физическая теория пластичности гцк-поликристаллов: особенности численной реализации некоторых схем деформирования // *Вестник ПНИПУ. Механика*. – 2011. – № 1. – С. 121-137.

РАСЧЕТ КРИВИЗНЫ КРИСТАЛЛИЧЕСКОЙ РЕШЕТКИ НА ОСНОВЕ ДАННЫХ EBSD С  
ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ ГРАДИЕНТНОЙ МАТРИЦЫ

Металлические материалы обычно имеют поликристаллическое строение и сложную многоуровневую микроструктуру: от зеренной структуры с характерным размером в десятки микронов до субмикроскопической структуры внутри зерен, которая формируется в результате пластической деформации и других внешних воздействий. Метод дифракции отраженных электронов (EBSD), используемый в сканирующем электронном микроскопе (SEM) в качестве дополнительного аналитического метода, позволяет на поверхности массивных поликристаллов определять ориентации отдельных зерен, локальную текстуру, корреляцию ориентаций между точками и идентифицировать фазы на поверхности образца [1]. Кроме того, в силу высокой разрешающей способности и широкого спектра получаемых данных этот метод является перспективным для анализа тонкой деформационной субструктуры [2]. На данный момент нет единого подхода к описанию субструктуры методом EBSD, используются такие характеристики как КАМ (средняя разориентация ядра), ГАМ (средняя разориентация в зерне) и прочие [3]. Предполагается, что метод расчета кривизны кристаллической решетки (под кривизной понимается характеристика среды, которую в механике называют тензором изгиба-кручения) с помощью градиентной матрицы может стать удобной и физически обоснованной альтернативой для описания микроструктуры [4]. В данной работе исследовали микроструктура образцов из нержавеющей стали со структурой аустенита. Были поставлены следующие задачи: удаление ориентировок в плохо индексированных точках с их последующим восстановлением на основе ориентаций ближайших соседей; расчет градиентной матрицы для точки с учетом ближайших точек; тестирование алгоритма на смоделированных данных с заданным распределением ориентации; сравнение с данными расчета средней разориентации вокруг точки (КАМ) на реальных образцах, полученными с помощью встроенного в пакет MTEX.

Метод EBSD дает информацию об ориентациях в точках сканирования на поверхности образца. Для анализа субструктуры важно знать, как меняется ориентировка от точки к точке. При этом анализ разориентировок между соседними точками позволяет выявить «зеренную» структуру (здесь под зерном понимается не зерно поликристалла, а любая замкнутая область, разориентированная относительно сопредельных областей на угол больше критического). Для получения более детальной информации о микроструктуре необходимо рассмотреть, как меняются ориентировки в некоторой области. Для этого можно воспользоваться методом, который представлен в статье А. А. Зисмана [4]. Идея метода заключается в расчете градиента разориентации на основе псевдообратной матрицы, построенной для разориентировок относительно выбранной центральной точки, для набора точек в некоторой области.

Как и любой новый алгоритм, расчет кривизны решетки необходимо протестировать на моделях с заданной ориентацией, когда результат известен. Для этого были рассмотрены образцы 100 на 100 точек, все три угла Эйлера изменялись по синусоидальному закону с амплитудой Эйлера 3 градуса. К рассмотренному образцу добавлен распределенный нормально шум (математическое ожидание 0, дисперсия 0.5). Оказалось, что в данном случае карты КАМ малоинформативны, в то время как метод расчета кривизны через градиентную матрицу даже на 6 соседях дает приемлемые результаты. Способы оценки градиентной матрицы с помощью следа и нормы отличаются. Это связано с тем, что след градиентной



матрицы оставляет лишь разориентировки, совпадающие с рассматриваемым направлением, и в случае модельной разориентировки (когда разориентировка носит детерминированный характер) часть информации пропадает. Метод расчета кривизны кристаллической решетки через градиентную матрицу дает большую контрастность, что должно способствовать наглядности представления микроструктуры.

Для проведения анализа реальной структуры из имеющихся данных были выбраны образцы аустенитной стали с разной степенью горячей деформации (0, 30, 50%), отснятые с мелким шагом сканирования. Далее предполагалось проверить образцы на качество индексирования, провести цикл восстановления данных для плохо индексированных точек и уже на восстановленных образцах применить метод расчета кривизны кристаллической решетки с помощью градиентной матрицы, сравнить способы оценки кривизны через след и норму градиентной матрицы. Также проводили сравнение полученных результатов с картинками КАМ, которые позволяет строить MTEX, и с картинками IQ.

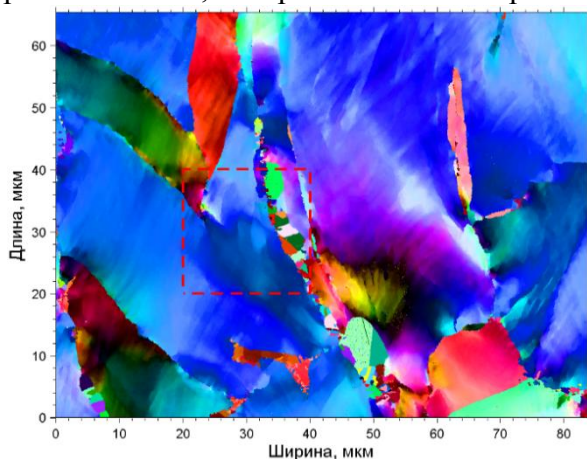


Рис. 1. EBSD восстановленного образца

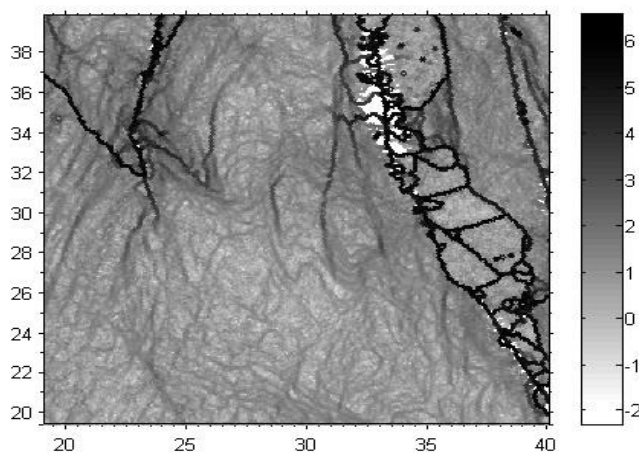


Рис. 2. Оценка кривизны через норму

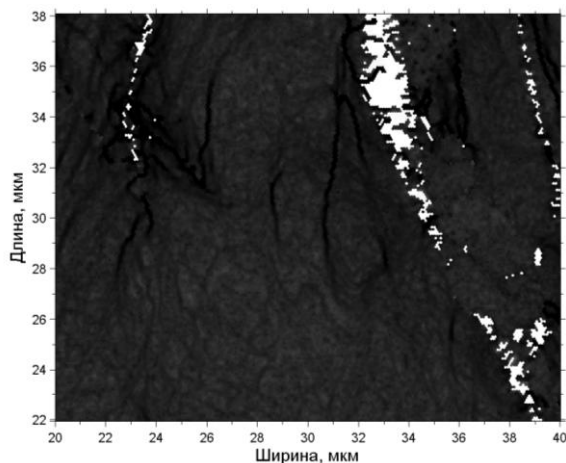


Рис. 3. КАМ в логарифмической шкале

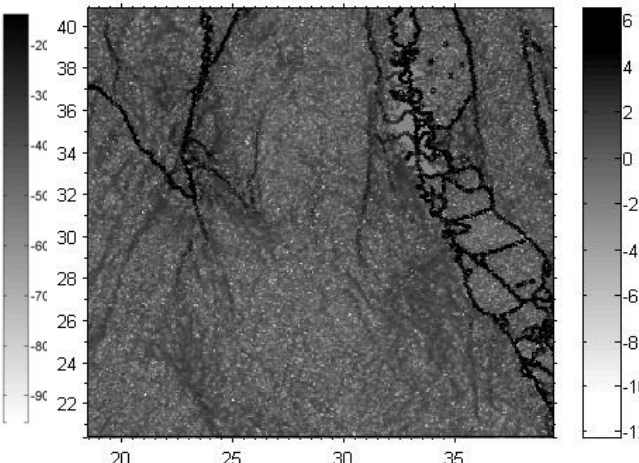


Рис. 4. Оценка кривизны через след

Для реальных образцов будем применять расчет градиентной матрицы для шести ближайших соседей с оценкой градиентной матрицы через норму и след, и расчет КАМ для двенадцати ближайших соседей. Результаты представлены для деформированного на тридцать процентов образца аустенита с крупным зерном. На рис. 1 представлен восстановленный образец. Красным прямоугольником указана выбранная для анализа область. По восстановленным данным построены карты кривизны с оценкой через след (см.

рис. 2), через норму (см. рис. 3) и КАМ (см. рис.4). Видно, что КАМ дает схожие с нормой, но менее резкие результаты. След же дает несколько отличные результаты, к тому же менее наглядные. Для более детального анализа требуется математическое рассмотрение различий между следом и нормой.

*Выводы.* Написана оригинальная программа расчета кривизны решетки с помощью градиентной матрицы в математическом пакете MatLab. Показано, что результаты работы программы расчета кривизны кристаллической решетки с использованием градиентной матрицы на модельных тестовых данных согласуются с методом КАМ. Также была проанализирована микроструктура реального материала на примере образца аустенита, деформированного на 30 %. Сравнение метода КАМ и предложенного алгоритма расчета кривизны кристаллической решетки образца с помощью градиентной матрицы не выявило противоречий и показало лучшую наглядность разработанного алгоритма отображения кривизны кристаллической решетки.

#### ЛИТЕРАТУРА:

1. F. J. Humphreys. Grain and subgrain characterisation by electron backscatter diffraction. Journal of Materials Science 36 (2001) 3833 – 3854.
2. Под ред. А. Шварца, М. Кумара, Б. Адамса, Д. Филда. Мир физики и техники. Метод дифракции отраженных электронов в области материаловедения. 2014, 544с
3. В.Н. Варюхин, Е.Г. Пашинская, А.В. Завдоев, В.В. Бурховецкий. Возможности метода дифракции обратнорассеянных электронов для анализа структуры деформированных материалов. 2010г. 106 с.
4. A.A. Zisman, S. Van Boxel, M. Seefeldt, P. Van Houtte. Gradient matrix method to image crystal curvature by processing of EBSD data and trial recognition of low-angle boundaries in IF steel. Materials Science and Engineering A 474 (2008) 165–172.

УДК 539.4

К.С. Чернышев, С.А. Филиппов

Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого

#### АНАЛИЗ ТЕКСТУР В АВТОМОБИЛЬНЫХ СТАЛЯХ МЕТОДОМ РЕНТГЕНОСТРУКТУРНОГО АНАЛИЗА

*Введение.* Кристаллы по своей природе анизотропны, то есть их свойства (механические, оптические, электрические и другие) зависят от выбранного кристаллографического направления ([1]). Металлические конструкционные материалы в большинстве случаев представляют собой поликристаллы, состоящие из множества мелких кристаллитов (зёрен). Если распределение кристаллитов по ориентировкам однородно, за счёт усреднения по всем зёрнам поликристаллический материал, тем не менее, оказывается изотропным. Однако, при приложении направленного внешнего воздействия (термического, механического, электрического, ...) в материале могут возникнуть выделенные плоскости и направления, вдоль которых будут преимущественно ориентированы кристаллиты. Наличие таких преимущественных ориентировок называется кристаллографической текстурой ([2]).

Наличие текстуры следует учитывать при различных технологических процессах, так как анизотропия свойств материала может существенно повлиять на параметры процесса. Например, в некоторых случаях макроскопическая анизотропия материала может быть охарактеризована с помощью коэффициента Лэнкфорда. Коэффициент анизотропии  $r$  (коэффициент Лэнкфорда) характеризует деформируемость листа (способность к глубокой

вытяжке) и может быть определён как отношение изменения толщины к изменению ширины плоского образца при испытании на растяжение. Для глубокой вытяжки необходимы материалы, для которых  $r > 1$ . Зависимость величины  $r$  от угла между осью образца и направлением прокатки всегда приводит к фестонобразию, поэтому необходимо добиваться высоких значений  $r$  и низкой анизотропии в плоскости листа. Как показывают имеющиеся данные, значения коэффициента Лэнкфорда напрямую зависят от типа и остроты имеющейся в материале текстуры ([4]).

Полное описание текстуры в материале возможно с использованием т.н. функции распределения ориентаций (ФРО), задаваемой следующей формулой:

$$f(g)dg = \frac{dV_g}{V}$$

В этой формуле  $g$  – обозначение определенной ориентации,  $dg$  – элемент объема в пространстве ориентировок,  $V$  – общий объем образца,  $dV_g$  – суммарная часть объема образца с ориентацией  $g$  в пределах элемента объема  $dg$  ([1]).

Основным методом исследования кристаллографических текстур является метод рентгеноструктурного анализа. Метод позволяет строить т.н. полюсные фигуры (ПФ), являющиеся стереографическими проекциями поликристаллического агрегата для выбранных кристаллографических плоскостей ([3]). ПФ не дают полного описания текстуры, однако три ПФ для трёх разных кристаллографических плоскостей могут быть пересчитаны в ФРО с использованием специальных математических методов.

*Цель работы.* В данной работе было проведено исследование текстур прокатки и рекристаллизации в новых автомобильных сталях, разработанных на АО «Северсталь». Если для традиционных автомобильных сталей, раскисленных алюминием, корреляция между коэффициентом анизотропии и существующей текстурой (отношением  $r - \ln(I_{111}/I_{100})$ ) давно установлена ([4]), то для современных сталей вопрос оставался открытым. Таким образом, задачей работы было, во-первых, определить зависимость коэффициента Лэнкфорда от имеющейся в материале текстуры и, во-вторых, оценить погрешность используемого метода.

Исследование образцов автомобильных сталей проводилось на текстурном дифрактометре, который был создан на базе дифрактометра рентгеновского общего назначения (ДРОН) на кафедре МПУ (отделение физики прочности и пластичности). Диапазон изменения полярного угла  $\rho$  гониометра составлял  $0 \div 70^\circ$ . Измерения проводились с использованием Fe-K $\alpha$  излучения (длина волны  $\lambda = 1,94 \text{ \AA}$ ).

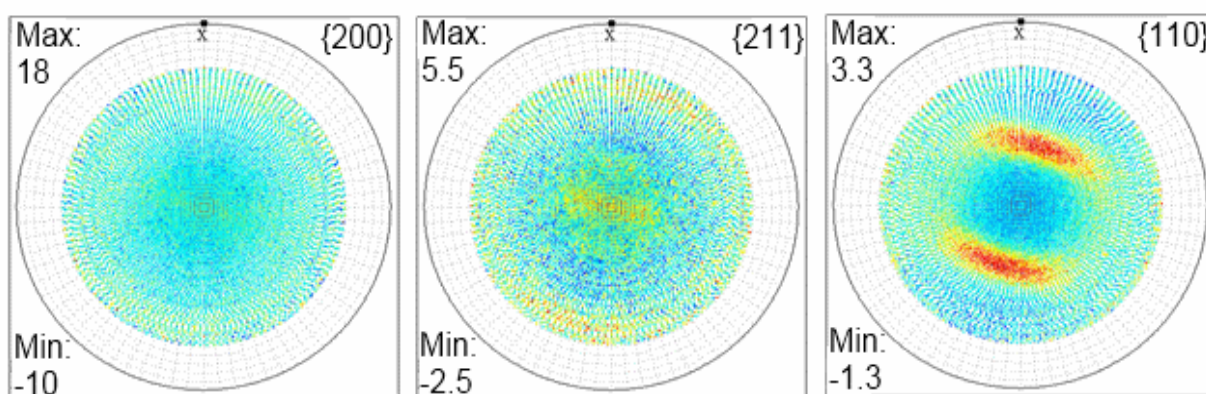


Рис. 1. Экспериментальные ПФ для кристаллографических плоскостей {110}, {200}, {211}

Пример полюсных фигур, полученных расчётом из ФРО, показан на рис.2.

Поскольку для расчета функции распределения ориентаций необходимо не менее трех разных полюсных фигур, на каждом образце съемка текстуры проходила для трех различных

плоскостей - {110}, {200}, {211}. Чтобы оценить разброс полученных значений, эксперимент был повторен по три раза на каждом образце в разных точках. Чтобы исключить влияние возможной неоднородности листа и оценить погрешность прибора, для одной марки стали (S320GD) было произведено три измерения в одной точке.

*Результаты.* Полученные данные обрабатывались в специализированном текстурном пакете MTEX среды MatLab. Из трёх неполных ПФ конструировалась ФРО. Пример измеренных ПФ показан на рис.1.

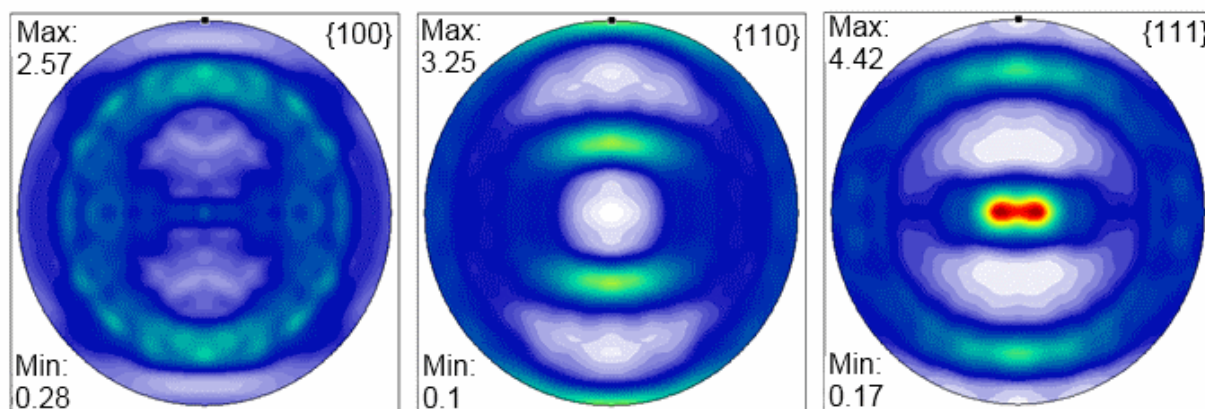


Рис. 2. Рассчитанные полюсные фигуры для кристаллографических плоскостей {100}, {110}, {111}

Из ФРО были рассчитаны значения  $\ln[I_{111}/I_{100}]$  и установлено наличие корреляции между ними и значениями  $\gamma$ . Кроме того, была оценена погрешность определения данной величины. Полученные результаты приведены в таблице 1.

Табл.1. Определение величины логарифма отношения интенсивностей отражений  $I_{111}$  и  $I_{100}$ , а также его погрешности.

Марка стали	CR210 B2	08ПС	08Ю	CR420 LA	DP600	DP780	DX54D	DX54D	A5
$\langle \ln \frac{I_{111}}{I_{100}} \rangle$	1309	766	1.053	-0.023	0.688	0.255	1.485	0.813	1.138
$\Delta(\ln \frac{I_{111}}{I_{100}})$	0,064	0,053	0,199	0,100	0,100	0,045	0,148	0,199	0,136

*Вывод.* В результате проделанной работы проведено экспериментальное исследование текстур в автомобильных сталях, разработанных на АО «Северсталь». Построены функции распределения ориентаций, определены значения отношения интенсивностей отражений для плоскостей (111) и (100). Показано, что имеется корреляция между величиной коэффициента анизотропии и логарифмом  $I_{111}/I_{100}$  для новых автомобильных сталей. Оценена погрешность измерения данной величины.

#### ЛИТЕРАТУРА:

1. Иванов А.Н. Кристаллография, рентгенография и электронная микроскопия Ч. 3 / А. Н. Иванов. – Москва : Национальный исследовательский технологический ун-т, 2009. – 22 с.
2. Методы исследования текстур в материалах : учебное пособие / М. Л. Лобанов, А. С. Юровских, Н. И. Кардонина, Г. М. Русаков. – Екатеринбург : Изд-во Урал. ун-та, 2014. – 115 с.
3. Паромов, В. В. Изучение текстур металлических листов методом полюсных фигур : учебное пособие / Санкт-Петербург : Мин-во образования и науки Российской Федерации СПбГПУ, 2013. – 35 с.
4. Гревен Дж., Хубер Дж, Текстуры отжига, в Рекристаллизация металлических материалов / под ред. Ч. В. Копецкого. – Москва : Металлургия, 1982. – 352 с.

### ЭВОЛЮЦИЯ РАЗОРИЕНТИРОВОК НА ДВОЙНИКОВЫХ ГРАНИЦАХ В ПРОЦЕССЕ ПЛАСТИЧЕСКОЙ ДЕФОРМАЦИИ

Явление фрагментации (разбиение деформируемых кристаллов на разориентированные микрообъемы, углы разориентировки которых увеличиваются с ростом степени пластической деформации) контролирует как механизм пластической деформации, так и его результаты: деформационное упрочнение и формирование текстуры [1]. Однако изучение фрагментации осложняется тем, что исходные ориентации исследуемых зерен обычно неизвестны. В тех же случаях, когда они известны, эксперименты проводятся на крупнокристаллических материалах или исследуемые зерна располагаются на поверхности образца [2-3].

Интересную возможность исследовать эффекты фрагментации в реальном поликристалле дает наличие в нем границ двойников. В этом случае, измеряя разориентировку вдоль двойниковой границы, можно определить неоднородность относительного разворота зерен, которая является прямым следствием фрагментации их решетки. Задача настоящей работы – исследовать закономерности изменения разориентировок на исходно двойниковых границах. Для этого, аустенитную сталь, деформированную сжатием при температуре 850°C до двух степеней деформации, 30% и 50% (истинные деформации 0.36 и 0.69, соответственно) изучали в растровом электронном микроскопе с помощью EBSD-метода. В материале содержится значительное количество двойников, многие из которых имеют характерную пластинчатую форму, рис. 1). Даже после деформации эта морфологическая особенность делает их легко отличимыми от прочих границ, что позволяет путем анализа ориентационных карт получить представительную статистику разориентировок на них.

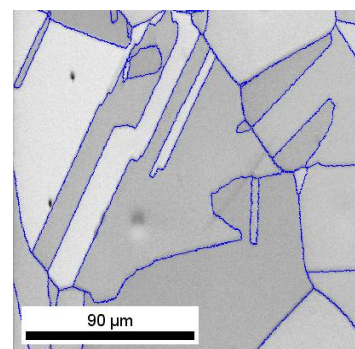


Рис. 1. Микроструктура аустенитной стали в исходном состоянии

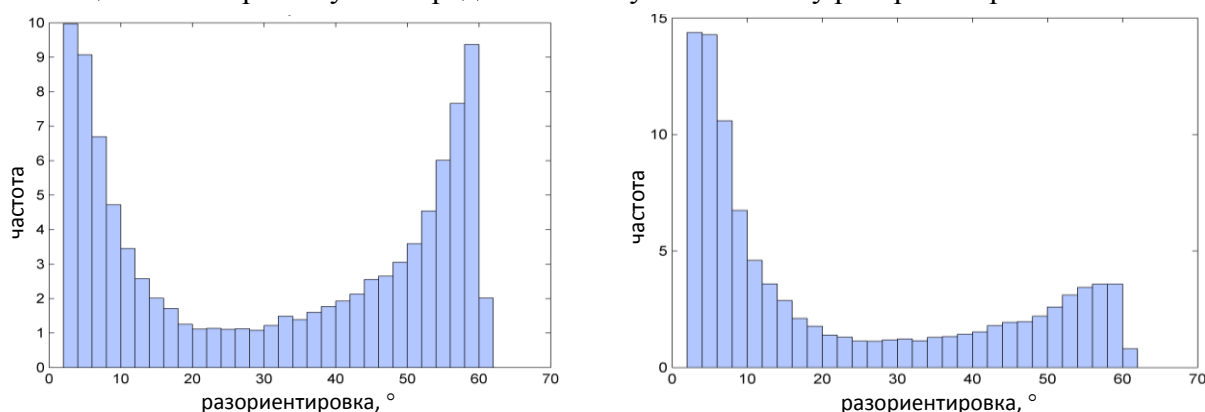


Рис. 2. Распределения разориентировок для  $\varepsilon = 0.36$  и  $\varepsilon = 0.69$  (данные EBSD-анализа)

В исходной структуре границы двойников имеют строго определенную разориентировку с углом 60° и осью <111>. В процессе деформации зерна переориентируются [4], и соответственно изменяется разориентировка между ними. В частности, изменяется и разориентировка на границах исходных двойников. В результате, в

спектре разориентировок острый пик на  $60^\circ$ , соответствующий в исходном состоянии двойниковым границам, размывается, причем тем сильнее, чем больше степень деформации (рис. 2).

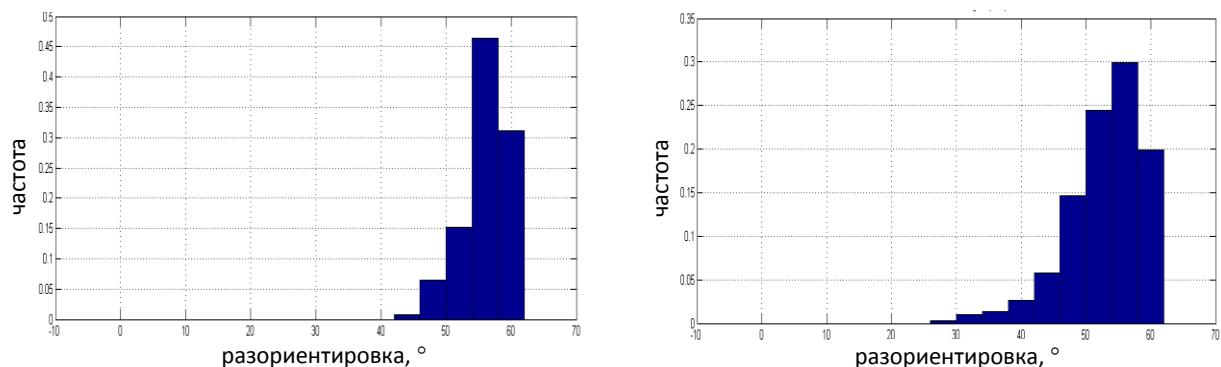


Рис. 3. Распределение углов разориентировки на границах исходных двойников после деформации для  $\varepsilon = 0.36$  и  $\varepsilon = 0.69$ , построенное по результатам определения локальных разориентировок

Для того, чтобы оценить вклад фрагментации в размытие двойникового пика, на ориентационной карте с помощью пакета MTEX определяли разориентировки на границах исходных двойников, смещаясь вдоль границы с постоянным шагом от одного стыка к другому. Всего было измерено 21 границ для  $\varepsilon = 0.36$  и 23 границ для  $\varepsilon = 0.69$ . Результаты этих измерений показывают, что углы на большинстве границ заметно отличаются от начальных  $\theta = 60^\circ$ , причем вдоль каждой границы существует значительная неоднородность разориентировки. Общая статистика локальных разориентировок на этих границах представлена на рис. 3.

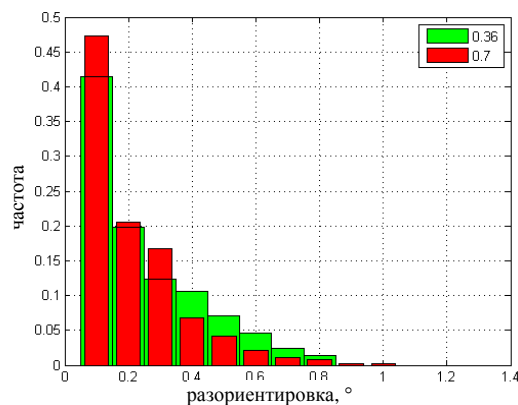


Рис. 4. Распределения отклонений разориентировок, наведенных деформацией на двойниковых границах, от средней наведенной разориентировки

Обнаруженное изменение углов разориентации связано как со средними поворотами решетки зерен, так и с фрагментацией решетки. Чтобы количественно охарактеризовать эффект фрагментации, были определены распределения отклонений  $\delta(\Delta\theta)$  наведенных деформацией разориентировок от средней разориентировки  $\Delta\theta$ , наведенной на данной границе. Оказалось, что нормированные распределения  $F(\delta(\Delta\theta)/\Delta\theta) \equiv F(x)$  для двух изученных деформаций практически совпадают и с хорошей точностью соответствуют нормальному распределению.

Зная, как математически описывать неоднородность распределения разориентировок на границах исходных двойников, можно рассчитать вклад этих границ в общий спектр разориентировок (рис. 2). Однако прежде необходимо определить средние развороты зерен, разделенных двойниковыми границами. Для решения этой задачи использовали модель Тейлора, которая является основой для микромеханики поликристаллов. Сначала для каждой границы вычисляли с помощью модели Тейлора средний разворот  $\Delta\theta$ , а затем конечное распределение разориентировок на данной границы получали с помощью найденного выше распределения  $F(x)$

Для того, чтобы воспроизвести экспериментальные распределения, показанные на рис. 22, необходимо, помимо (1) вклада двойниковых границ, формирующих большеугловой

пик, учесть (2) вклад границ деформационного происхождения, формирующих малоугловой пик, а также (3) вклад произвольных границ зерен. Распределение разориентировок границ деформационного происхождения можно, как известно [5], воспроизвести с помощью гамма-распределения, которое масштабируется нормировкой на среднюю разориентировку. В данном случае параметр гамма-распределения  $\alpha = 1.8$ , средние разориентировки 12.3. Пренебрегая кристаллографической текстурой, вклад произвольных границ можно описать, считая зерна хаотически ориентированными. Соответствующее распределение разориентировок имеет характерный вид с максимумом при  $45^\circ$ . Поскольку форма распределений, представляющих три описанных выше вклада, полностью определена их свойствами, моделирование общего спектра заключается в подборе трех весовых множителей, соответствующих этим вкладам. Результаты моделирования спектра разориентировок показаны на рис. 5, где вместе с экспериментальным и рассчитанным распределениями приведены отдельные вклады в последнее.

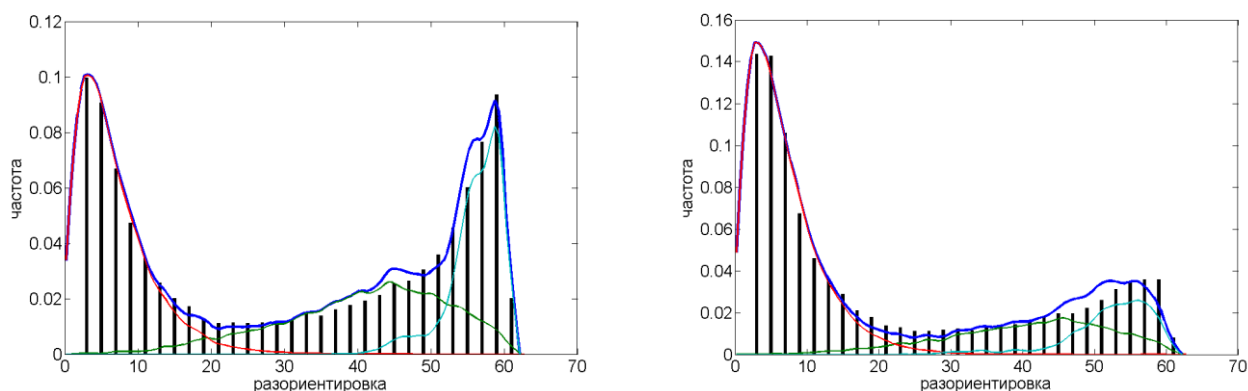


Рис. 5. Сравнение эксперимента (рис. 2) с результатами моделирования спектра разориентировок. В дополнение к общему рассчитанному спектру показаны отдельные вклады, соответствующие границам деформационного происхождения, границам исходных двойников и произвольным границам зерен.

Таким образом, по итогам проведенного исследования можно сделать следующие выводы:

- неоднородность поворота решетки (фрагментация) зерен аустенитной стали при сжатии приводит к неоднородному изменению разориентировки на границах исходных двойников;
- разброс деформационных разворотов на границах двойников соответствует нормальному распределению и при нормировке на средний разворот описывается функцией, слабо зависящей от степени деформации;
- на основе проведенного анализа предложен метод моделирования распределения разориентировок в материале, содержащем двойниковые границы.

#### ЛИТЕРАТУРА:

1. Рыбин В. В. Большие пластические деформации и вязкое разрушение металлов. – Металлургия, 1986. – 231 с
2. Becker R., Panchanadeswaran S. Effect of grain interaction on deformation and local texture in polycrystals // *Acta mater.*, 1995. V. 43, № 7, P. 2701-2719.
3. Zolotarevsky N.Yu., Titovets Yu.F., Dyatlova G.Yu - Evolution of microtexture in single grain of large-grained aluminium polycrystal during tension - *Scripta mater.* 1998, vol.38, 1263-1268.
4. Вассерман Г., Гревен И. Текстуры металлических материалов. М: Металлургия, 1969. 655 с.
5. Hughes D.A., Liu Q., D.C. Chrzan, Hansen N. Scalling of microstructural parameters: misorientations of deformation induced boundaries. *Acta mater.*, 1997, v. 45, pp. 105-112.

## РАЗРАБОТКА БИОНИЧЕСКОГО ПРОТЕЗА РУКИ

Основными органами человеческого организма, позволяющими воздействовать на окружающую среду, являются руки. Утрата одной конечности приводит к большому дискомфорту в ведении повседневной жизни. Утрата обеих конечностей делает человека недееспособным. В связи с этим, задача по возврату утраченной конечности представляет большую актуальность. При современном развитии науки и техники наиболее возможным вариантом представляется создание электромеханических протезов, по внешнему виду и функционалу походящих на природные конечности.

Идея создания электромеханических бионических протезов не нова и на данный момент ряд крупных европейских и американских компаний выпускает их массово, а также проводят широкие исследования с целью их усовершенствования [1]. Одним из наиболее известных и продвинутых представителей данной области является компания TouchBionics [2]. Так же активно ведутся разработки для военных приложений, например, под руководством американского агентства по военным разработкам (DARPA). Главный недостаток выпускаемых и разрабатываемых протезов заключается в их большой стоимости (миллионы рублей) и недоступности для пациентов РФ (настройка системы управления индивидуальна и требует присутствия пациента). Завершенные отечественные разработки в данном направлении отсутствуют.

Целью данной работы является разработка бионического протеза, позволяющего частично возмещать функции утраченной конечности; организация системы управления на основе регистрации мышечной активности; организация системы управления на основе определения ориентации протеза в пространстве. Используются технологии 3D печати и передовые достижения технологий МЭМС. Прототип устройства разрабатывается под реального пациента, девочки в возрасте 16-ти лет, у которой с рождения атрофирована правая рука ниже локтя.

Основными условиями, налагаемыми на механику протеза, являются: независимое движение пальцев (сгибание/разгибание), возможность взятия как крупногабаритных (чашка), так и маленьких предметов (электронная карточка, монета), возможность совершения вращательного движения кисти, срок работы без подзарядки должен составлять не менее 12-ти часов, рука должна иметь природоподобный вид.

В данной работе разработан прототип, представленный на рис. 1. Прототип обладает 6-ю степенями свободы: каждый палец сгибается/разгибается независимо от остальных, реализована вращательная степень свободы кисти с предплечьем вокруг крепления гильзы к руке пациента. Пальцы приводятся в движение посредством сервомашинок (момент на валу 10 кгс/см, скорость поворота вала на 60 градусов равна 0.08 с). Передача усилия с серводвигателя на палец осуществляется посредством тяговых нитей, крепящихся одним концом к кончику пальца, другим к валу двигателя. Проложено по 2 тяги на палец (одна работает на сгибание, вторая на разгибание). При вращении двигателя в одну сторону происходит намотка первой нити и разматывание второй, в результате чего происходит сгибание пальца, при вращении в противоположную сторону аналогично происходит разгибание. В качестве тяг использована плетеная нить из высокомолекулярного



полиэтилена высокой плотности (Dyneema) диаметром 0.5 мм и усилием на разрыв 56 кг. Для снижения трения нитей о корпус руки, проложены каналы из фторопласта, внутри которых проведена нить. Двигатели размещены согласно рис. 1. Рука изготовлена с использованием технологии 3D печати. Управление двигателями осуществляется по средствам микроконтроллера Arduino Nano 3.0.

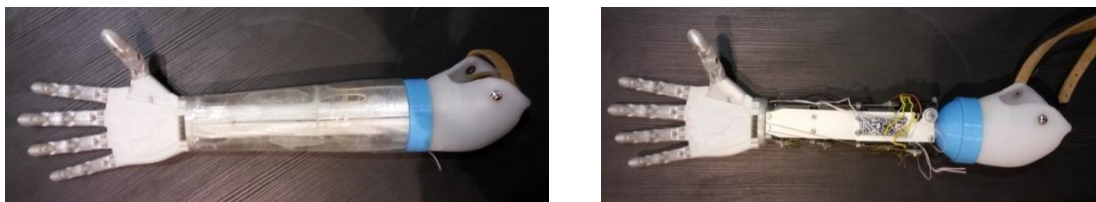


Рис. 1. Разработанный прототип протеза

Управление протезом осуществляется при помощи 6-ти осевого датчика (3х осевой акселерометр + 3х осевой гироскоп), вмонтированного в корпус руки. Принцип управления следующий: при помощи алгоритма DCM происходит определение наклона руки относительно линии горизонта (тангаж) и угла поворота вокруг собственной оси (крен). Отсчет ведется относительно начального положения руки (в момент включения). Если тангаж положителен – рука производит хватательное движение. Если тангаж имеет отрицательное значение, то рука разжимается. Крен можно использовать для совершения вращательного движения, например, при отведении локтя вправо или влево будет происходить вращение руки по часовой или против часовой стрелки. Также для управления можно независимо использовать акселерометр. Например, при резком и коротком движении вниз рука будет совершать хватательное движение, при аналогичном движении вверх – будет разжиматься.

На практике был применен только первый из описанных методов (управление по тангажу). Результат оказался положительным, пациент смог совершать манипуляции с предметами (использовать протез для удержания предметов).

Для полноценного функционирования протеза необходимо, чтобы он управлялся пациентом интуитивно, без совершения сторонних манипуляций. Наиболее перспективным, неинвазивным способом является управление посредством регистрации активности сохранившихся мышц.

Для регистрации мышечной активности используются датчики электрического потенциала EPIC Sensors [5], обладающие следующими характеристиками: материал электрода AgCl, площадь  $\sim 1 \text{ см}^2$ , для получения сигнала достаточно сухого контакта с кожей. Конструкция данных датчиков такова, что усилитель расположен непосредственно вблизи электрода, что значительно повышает помехоустойчивость системы. Принципиальная схема устройства датчика приведена на рис. 2.

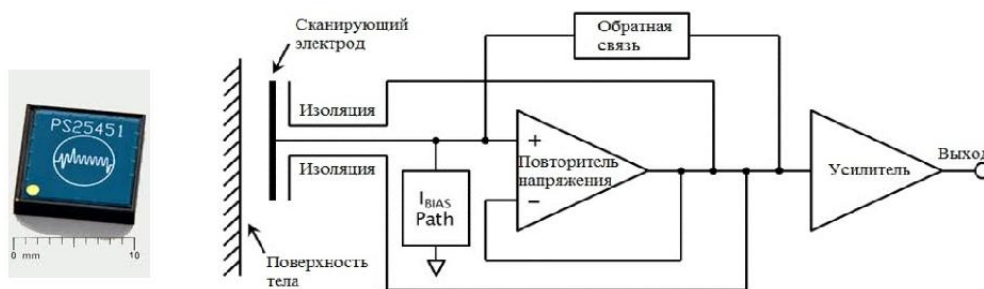


Рис. 2. Датчик электрического потенциала. Схема датчика

Датчик помещен в корпус, покрытый слоем проводящего материала (алюминиевая фольга) с целью уменьшения помех, создаваемых окружающими прибор источниками электрического поля (рис. 3). Для изготовления корпуса использована технология быстрого прототипирования.



Рис. 3. Датчик электрического потенциала в корпусе

Выделение необходимого сигнала из потока непрерывно поступающих данных представляет собой отдельную и довольно сложную задачу. Основная проблема заключается в отделении исследуемого сигнала от шумов в режиме реального времени, а также сопоставление получаемых сигналов с вызывающими их сокращениями мышц или мозговой активностью [3].

Традиционные методы фильтрации сигналов включают в себя метод интегральных квадратов, абсолютных величин и нулей [4]. Данные методы удобны с вычислительной точки зрения и позволяют выделять исследуемые сигналы. Недостатком данных методов является то, что при одном и том же сокращении мышц получаемый сигнал сильно зависит от скорости и силы сжатия. Данная проблема решается путем использования нескольких датчиков электрического потенциала.

В данной работе собрана система, позволяющая регистрировать слабые изменения электрического поля вблизи поверхности сенсоров. В качестве используемого датчика выбран датчик электрического потенциала PS25401A [5]. Проведен ряд тестов по проверке работы системы (реакции на изменение электрического поля вблизи поверхности датчиков). Проведен обзор существующих методов фильтрации сигналов.

В результате работы разработан прототип электромеханического протеза для девочки в возрасте 16-ти лет, у которой с детства атрофирована правая рука ниже локтя (протезированию подлежит ладонь и 2/3 предплечья). Предложена система управления на основе регистрации ориентации и динамики протеза в пространстве. Собрана электромеханическая схема регистрации мышечной активности. Проведено медицинское обследование руки девочки (институт нейрохирургии имени Поленова), по результатам которого представляется возможным управление протезом посредством регистрации мышечной активности сохранившихся мышц (отвечающих за сгибание/разгибание и вращение кисти).

#### ЛИТЕРАТУРА:

1. Joseph T. Belter, Jacob L. Segil, Aaron M. Dollar, Richard F. Weir. Mechanical design and performance specifications of anthropomorphic prosthetic hands: A review. // *Journal of Rehabilitation Research & Development*. 2013. P. 599-618.
2. Christine Connolly. Prosthetic hands from Touch Bionics. // *Industrial Robot*. 2008. P 290-293.
3. Xueyan Tang, Yunhui Liu, Congyi Lv and Dong Sun. Hand Motion Classification Using a Multi-Channel Surface Electromyography Sensors. // *Sensors*. 2012. P. 1130-1147.
4. М.Г. Серебрянников, А.А. Первозванский. Выявление скрытых периодичностей. // Физматлит, 1965 год.
5. C.J. Harland, T.D. Clark, N.S. Peters, M.J. Everitt and P.B. Stiffell. A compact electric potential sensor array for the acquisition and reconstruction of the 7-lead electrocardiogram without electrical charge contact to the skin. // *Physiological Measurement*, 26 (6). 2005. P. 939-950.

## БИОМЕХАНИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ СОСТОЯНИЯ СТРУКТУР ПОЯСНИЧНОГО ОТДЕЛА ПОЗВОНОЧНИКА

Боли в поясничном отделе позвоночника – обычное недомогание у людей трудоспособного возраста. Около 80% людей на протяжении своей жизни испытывают боль в этой области [1].

В настоящее время при хирургической коррекции врачи выбирают тип имплантата, проводят необходимую редукцию, основываясь только на своем опыте и интуиции. Поэтому есть необходимость в создании модели поясничного отдела позвоночника с целью проведения биомеханического анализа состояния его структур при нормальных нагрузках и при патологии еще до операции, чтобы дать прогноз, к чему может привести данный вид коррекции.

Цель работы – провести биомеханический анализ состояния структур поясничного отдела позвоночника.

Задачи работы – построить модель нагружения поясничного отдела позвоночника при наклоне вперед и провести биомеханический анализ состояния структур поясничного отдела позвоночника.

При построении модели нагружения поясничного отдела позвоночника приняты следующие допущения: материалы позвонков, связок, межпозвонковых дисков – сплошные, изотропные, однородные, идеально упругие; в модели отсутствуют начальные напряжения [2]. Геометрические размеры структур определены по томографическим снимкам; механические свойства позвонков и межпозвонковых дисков введены в соответствии с усредненными литературными данными; механические свойства связок введены согласно исследованиям, проведенным в ходе экспериментов; позвонок L4 закреплен по нижнему краю.

Для задания модуля упругости позвонков и межпозвонковых дисков были использованы имеющиеся данные исследований их механических свойств. Материалы определены из [3, 4]. Так, механические свойства межпозвонковых дисков поясничного отдела человека приняты следующие: модуль Юнга 57 МПа, коэффициент Пуассона 0,4, плотность 1090,3 кг/м<sup>3</sup>. Механические свойства позвонков поясничного отдела: модуль Юнга 350 МПа, коэффициент Пуассона 0,3, плотность 2020 кг/м<sup>3</sup> [5].

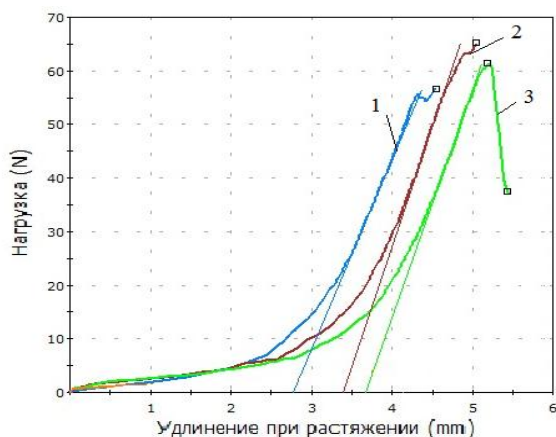


Рис. 1. Диаграмма нагрузка-растяжение

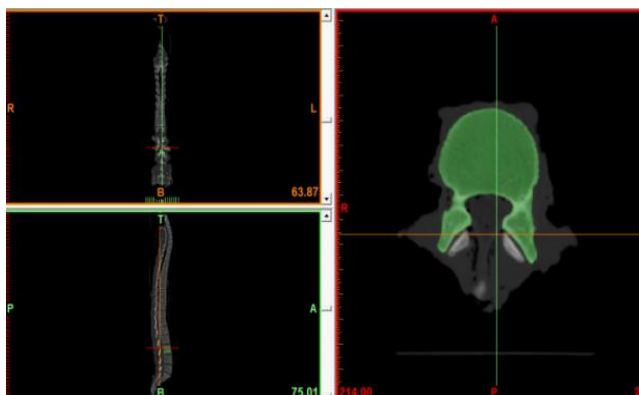


Рис. 2. КТ позвоночника и маска позвонка L3

Для определения механических свойств связок были проведены исследования связок позвоночника при растяжении-сжатии. Экспериментальные исследования при растяжении связок четвертого и пятого поясничных позвонков выполнены на установке INSTRON. На рисунке 2 представлены диаграммы нагрузка – растяжение для образца желтой связки.

Зная величины сопротивления, можно найти значения касательных модулей нормальной упругости  $E = \sigma/\epsilon$ . Среднее значение модуля упругости для каждой связки: желтая – 3,6 МПа, межостистая – 2,6 МПа.

Геометрические модели позвонков поясничного отдела построены в пакете прикладных программ Mimics по компьютерным томограммам. MIMICS – интерактивный программный пакет для визуализации и сегментации изображений, полученных томографией (КТ, микроКТ, МРТ и др.) и 3D рендеринга объектов [6]. По КТ снимку позвоночника проводится выделение позвонка по определенному диапазону рентгеновской плотности, согласно шкале Хаунсфилда на всех срезах и проекциях, отсекая все то, что не входит в данный диапазон (рис. 2). С помощью программы Mimics Remesh 3D модель оболочки позвонка импортируется в Solid Works, в результате чего получается твердотельная модель.

В базе данных Orthoload приведены исследования позвоночника при различных нагрузках. Особенность исследований состоит в том, что в позвоночник вставляется индукционный датчик, фиксирующий нагрузки в определенном участке позвоночника. С помощью БД зависимость силы от времени, представленная на рисунке 3, приведена при построении модели нагружения по осям x,y,z (рис. 4).

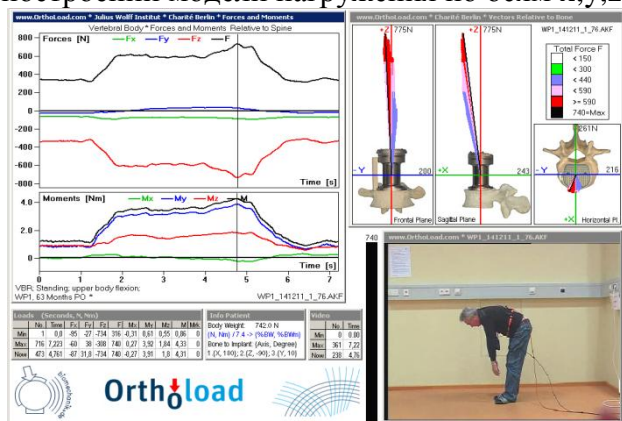


Рис. 3. Исследования позвоночника при наклоне вперед, проводимые в системе Orthoload

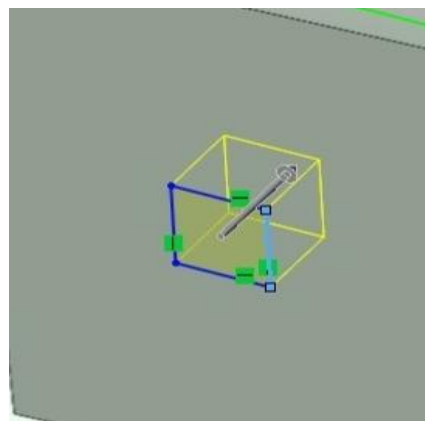


Рис. 4. Выделенное место для датчика, где измеряются нагрузки

### Результаты исследований:

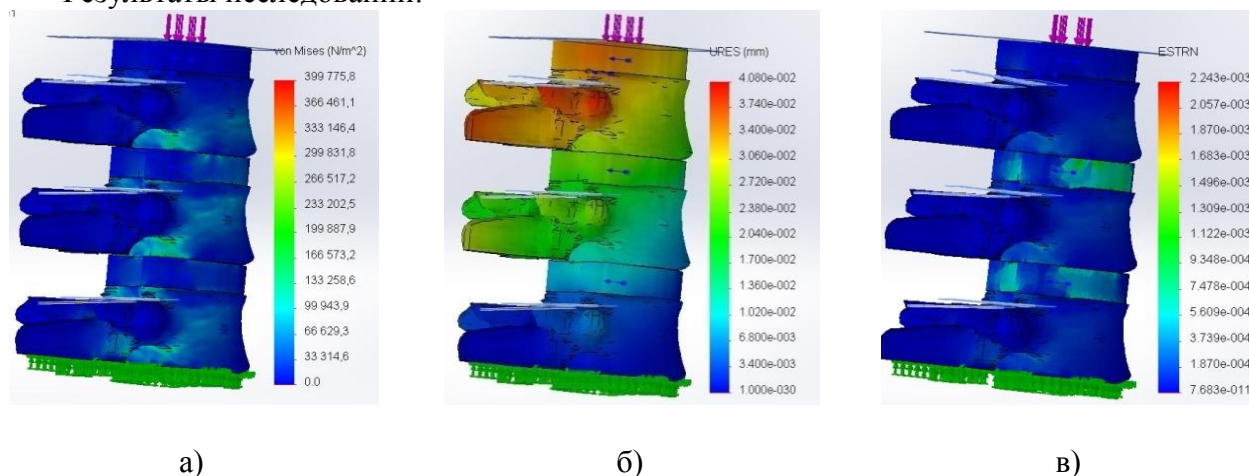


Рис. 5. НДС поясничного отдела позвоночника без учета связок:  
а) напряжение, б) перемещение, в) деформация

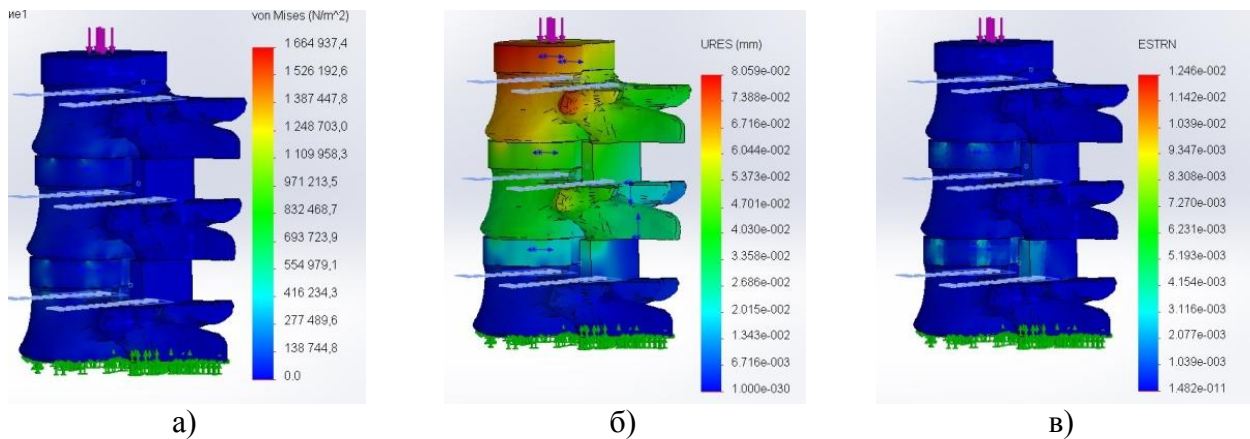


Рис. 6. НДС поясничного отдела позвоночника с желтыми связками:  
 а) напряжение, б) перемещение, в) деформация

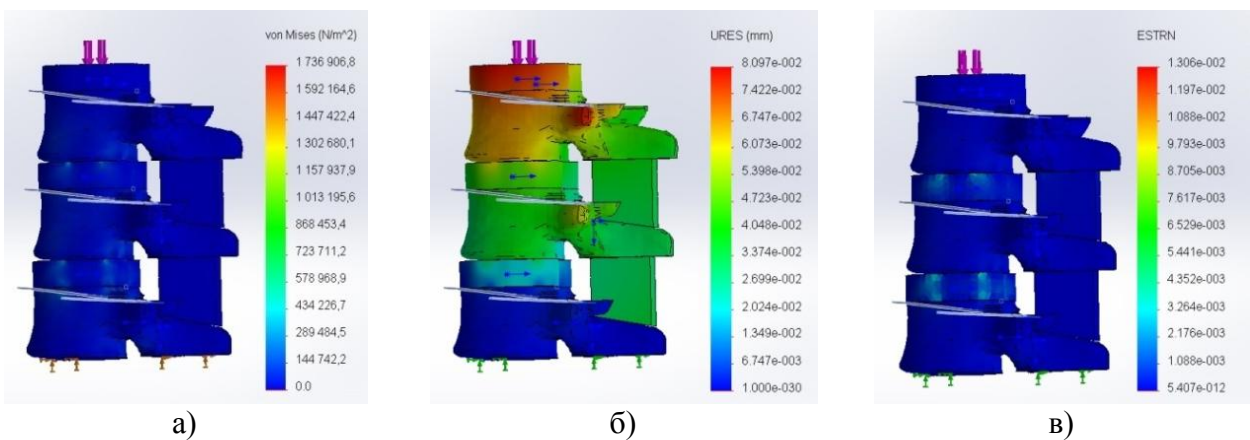


Рис. 7. НДС поясничного отдела позвоночника с межкостистыми связками:  
 а) напряжение, б) перемещение, в) деформация

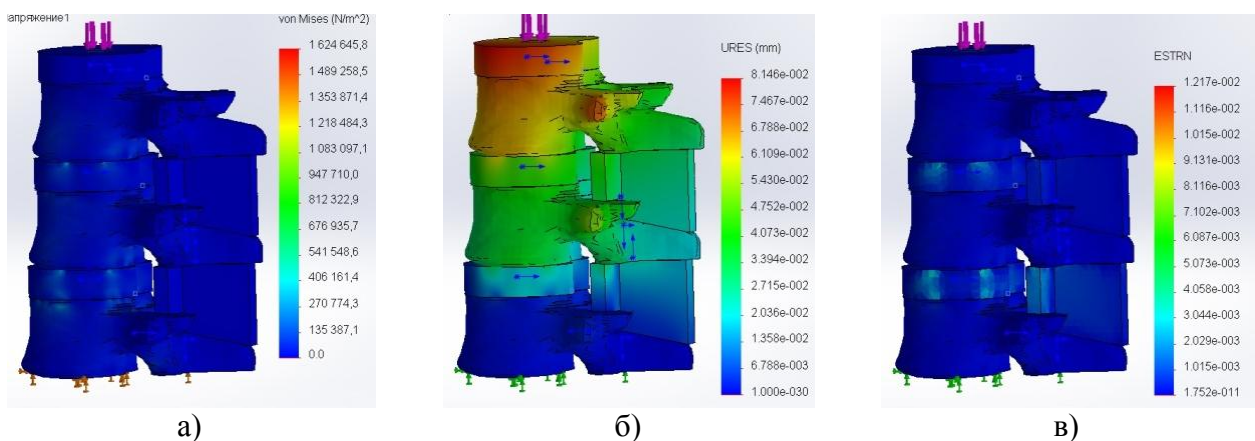


Рис. 8. НДС поясничного отдела позвоночника с межкостистыми и желтыми связками:  
 а) – напряжение, б) – перемещение, в) – деформация

Таким образом, наличие связок существенно влияет на результаты анализа. Максимальное напряжение в структурах поясничного отдела позвоночника без связок равно 0,4 МПа, со связками – 1,6 МПа. Был проведен сравнительный расчет элемента поясничного отдела позвоночника по модели, сходной с рассматриваемой, но при которой возможен аналитический расчет. В данном случае – по упрощенной стержневой модели. Расхождение в

результатах расчетов составляет 25%. В дальнейшем планируется проведение биомеханического анализа поясничного отдела позвоночника при спондилолистезе разной степени для прогнозирования необходимости редукции.

#### ЛИТЕРАТУРА:

1. Викинг Хузберг, Минна Ханхиярви, Ирина Мелех Энциклопедия международной организации труда: Раздел I. Организм; глава 6. Костно-мышечная система; редакторы - Hilikka Riihimaki, Eira Viikari-Juntura [Электронный ресурс] URL: <http://base.safework.ru/iloenc>
2. Н.В.Верещагин. Компьютерная томография мозга / Н.В.Верещагин, Л.К.Брагина, С.Б.Вавилов, Г.Я.Левина. – М.: Медицина, 1986. – 256с
3. Бранков, Г. Основы биомеханики: Пер. с болг. В. Джупанова /Бранков. – М.: Мир, 1981. – 257 с
4. Березовский В.А. Биофизические характеристики тканей человека: справочник / В.А. Березовский, Н.Н. Колотилов; Отв. ред. и авт. предисл. Костюк П.Г. – Киев: Наук. думка, 1990. – 244 с
5. И.П. Палатинская, Н.Ю. Долганина, Т.Ю. Попцова Суперкомпьютерное моделирование вибронгруженности поясничного отдела позвоночника [Электронный ресурс] URL: <http://agora.guru.ru/abrau2012/pdf/509.pdf>
6. Mimics 12. Пакет обработки изображений. Базовый обучающий курс. Materialise. 2008; 81.

УДК 532.542

Я.Ф. Радченко, Я.А. Гатаулин  
Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого

#### УТОЧНЕНИЕ ФОРМУЛЫ ДЛЯ ИЗМЕРЕНИЯ СТЕПЕНИ СТЕНОЗА

Стеноз — это врожденное или приобретенное аномальное сужение просвета какого-либо сосуда. Сужение сосудов препятствует течению крови, а, следовательно, некоторые части организма недополучают кислород и питательные вещества. По общепринятой классификации различают стенозы низкой степени – от 0 до 40%, умеренные стенозы – от 50 до 60%, гемодинамически значимые стенозы – свыше 70% перекрытия просвета сосуда.

Самым распространенным методом диагностики стеноза является ультразвуковой доплеровский метод благодаря своей неинвазивности и относительной дешевизне. Существует несколько формул для определения степени стеноза – по диаметру сосуда  $St_d = (1 - d/D) \cdot 100\%$  [1] и по площади  $St = (1 - S_d/S_D) \cdot 100\%$  [2], где  $D$  – диаметр сосуда,  $d$  – диаметр стеноза (рис. 1),  $S_D$  – площадь сосуда перед стенозом,  $S_d$  – площадь просвета сосуда в центре стеноза. По этим формулам измеряется степень стеноза в В-режиме ультразвукового сканера, поскольку он позволяет получить изображение сосудистой стенки [3]. Но такой метод не годится при гемодинамически значимом стенозе, так как присутствуют эффекты затенения стенки в области стеноза [2]. Наиболее достоверным критерием для диагностики при больших степенях стеноза является величина максимальной систолической скорости кровотока [3]. На основе ее можно оценить степень стеноза по следующей формуле [4]:

$$St \approx (1 - V_{0max}/V_{1max}) \cdot 100\% , \quad (1)$$

где  $V_{0max}$  – максимальная систолическая скорость перед стенозом,  $V_{1max}$  – максимальная систолическая скорость в центре стеноза.

Цель работы – проверить формулу (1) для оценки степени стеноза и ввести поправку в данную формулу, чтобы уменьшить ошибку, получаемую в результате ее использования.

Была собрана экспериментальная установка, состоящая из насоса и модели сосуда со стенозом, подключенная к насосу системой трубок. Насос работал в двух режимах – постоянного и пульсирующего расхода. С помощью регулятора расхода создавались течения

жидкости с различными расходами в диапазоне от 85 до 700 мл/мин. В эксперименте использовались две модели сосудов со стенозом (рис.1), отличающиеся степенью стеноза.

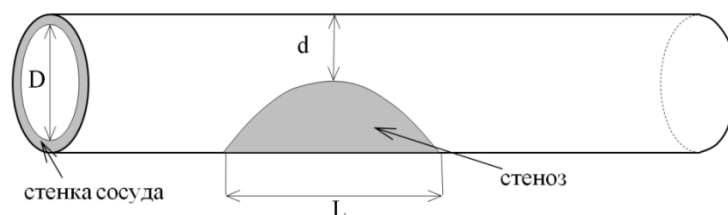


Рис. 3. Геометрия модели сосуда со стенозом

Обе модели сосуда имели внутренний диаметр  $D = 6$  мм и толщину стенок 2 мм. В одной модели стеноз имел диаметр  $d = 3$  мм, длину  $L = 12$  мм и, соответственно, степень стеноза  $St_{\text{точн}} = 75\%$ . В другой модели сосуд имел степень стеноза  $St_{\text{точн}} = 30\%$ . Форма стеноза в обоих случаях несимметрична. Измерения проводились на водном растворе глицерина (36%), имеющем динамическую вязкость 0.004 Па·с и плотность  $1000 \text{ кг/м}^3$ , близкие к характеристикам крови. Числа Рейнольдса  $Re$ , определенные по внутреннему диаметру и средней скорости в сосуде перед стенозом, находились в диапазоне от 50 до 550.

### Методика измерений

Максимальная осевая скорость измерялась ультразвуковым доплеровским методом с помощью ультразвукового сканера LogicScan 64 в импульсно-волновом режиме. Расход жидкости измерялся с помощью электромагнитного расходомера Nihon Kohden.

Для измерения максимальной осевой скорости перед стенозом было выбрано сечение на расстоянии около 2 см вверх по течению от центра стеноза. В данном сечении профиль скорости был параболическим. Связано это с наличием перед стенозом длинного прямого участка трубки, в котором формируется установившееся течение (течение Пуазейля).

Для измерения максимальной осевой скорости в стенозе датчик передвигался вдоль оси сосуда, и в программе сканера в В-режиме было видно, как изменялось сечение сосуда в размере. В центре стеноза сечение сосуда минимальное.

При измерении максимальной осевой скорости для каждого случая вручную подбирались такие мощность и усиление сигнала ультразвукового сканера, чтобы доплеровский спектр скорости был заполненным и с плавной огибающей. При этом отличие измеренной максимальной осевой скорости от точной не превышало 10%.

### Результаты

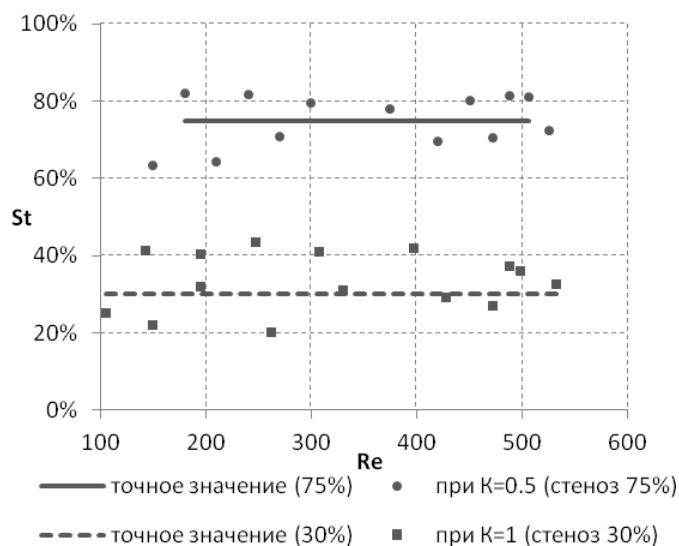
Для модели сосуда  $St_{\text{точн}} = 75\%$  измеренная степень стеноза варьировалась от 62 до 82% в диапазоне заданных скоростей (рис. 2а). Ее средняя величина – 60%, что на 25% ниже точного значения. Для модели сосуда со степенью  $St_{\text{точн}} = 30\%$  измеренная степень стеноза изменялась от 20 до 40%, ее средняя величина – 30%, что совпадает с точным значением (рис. 2б).

Для уменьшения погрешности измерений в формулу (1) был введен поправочный коэффициент  $K$  следующим образом:

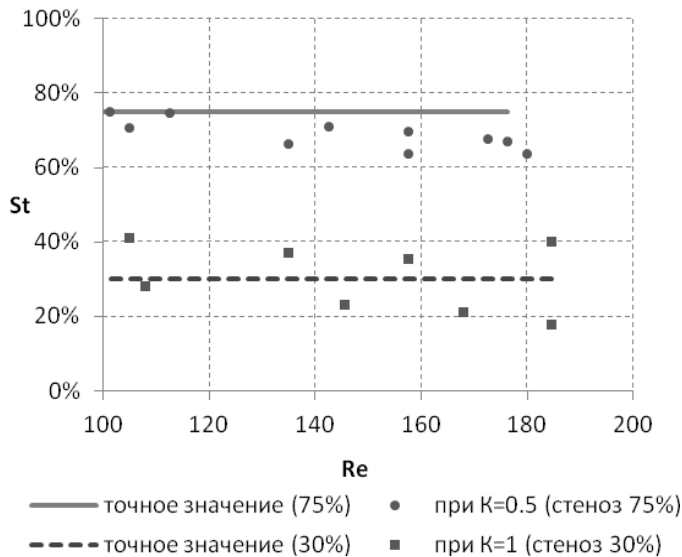
$$St \approx (1 - K \cdot V_{0\text{max}}/V_{1\text{max}}) \cdot 100\% , \quad (2)$$

Для модели сосуда со степенью стеноза  $St_{\text{точн}} = 75\%$  поправочный коэффициент как для течений с постоянным, так и с пульсирующим расходом –  $K = 0.5$ . Для данного коэффициента отличие степени стеноза от его точного значения не превосходит 10%. Для модели сосуда со степенью  $St_{\text{точн}} = 30\%$  поправочный коэффициент  $K = 1$ , который обеспечивает отличие от точного значения степени стеноза примерно на 20%.

Введение поправочного коэффициента  $K = 0.5$  для модели сосуда со степенью  $St_{\text{точн}} = 75\%$  обеспечивает значительное (примерно в 4 раза) уменьшение ошибки при вычислении степени стеноза по формуле (2). При этом полученное значение можно объяснить с физической точки зрения. В центре гемодинамически значимого стеноза ( $St_{\text{точн}} = 75\%$ ) формируется близкий к однородному профиль скорости, а перед стенозом – параболический, и соответственно отношение средних скоростей к отношению максимальных в этом случае составляет примерно 0,5. Для малого стеноза ( $St_{\text{точн}} = 30\%$ ) измеренные значения степени стеноза в среднем совпадают с точным значением, поскольку профиль скорости в стенозе близок к параболическому.



а)



б)

Рис. 4. Сравнение измеренной степени стеноза с точной для моделей сосуда со стенозом 30% и 75%: а) течения с постоянным расходом; б) течения с пульсирующим расходом.

### Выводы

Если при цветном картировании присутствуют затенения в В-режиме, а течение за стенозом является турбулентным, то рекомендуется применять формулу (2) с поправочным



коэффициентом  $K = 0.5$ . Для малых стенозов при цветном картировании за стенозом будет наблюдаться ламинарное течение, следует измерять степень стеноза в В-режиме.

#### ЛИТЕРАТУРА:

1. Никитин Ю.М., Труханов А.И. (ред.) Ультразвуковая доплеровская диагностика в клинике. Иваново: МИК, 2004. – 496 с.
2. Reutern G-M., Goertler M-W, Natan M. et al. Grading Carotid Stenosis Using Ultrasonic Methods // Stroke. – 2012. – p.916-921.
3. Куперберг Е.Б., Гайдашев А.Э., Лаврентьев А.В. с соавт. Клиническая доплерография окклюзирующих поражений артерий мозга и конечностей Москва 1997. – 107 с.
4. Юхнев А.Д., Чумаков Ю.С., Степанов Е.А. Курс лабораторных работ по ультразвуковой доплеровской диагностике // Биотехносфера. – 2009.-N5.- с.45-51.

УДК 532.542

Е.А. Федорова, Я.А. Гатаулин  
Санкт-Петербургский государственный политехнический университет

### ИССЛЕДОВАНИЕ ТЕЧЕНИЯ В МОДЕЛИ СОСУДА СО СТЕНОЗОМ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ КРОСС-ВЕРИФИКАЦИИ РАСЧЕТОВ И ИЗМЕРЕНИЙ

Многие исследования указывают на существование закрученного течения крови на отдельных участках сердечно-сосудистой системы человека [1,2]. До настоящего времени точно неизвестно, каким образом закрутка влияет на развитие сердечно-сосудистых заболеваний, среди которых чаще всего встречается атеросклероз. Атеросклероз – заболевание, при котором на стенках сосуда образуются атеросклеротические бляшки, которые сужают просвет сосуда и затрудняют кровоток. Есть ряд работ, в которых исследуются закрученные турбулентные течения в сосудах со стенозом [3,4,5].

За бляшкой возникает зона обратных токов, где клетки крови пристаю к стенкам артерий, и происходит разрастание бляшки. Зону обратных токов можно измерить с использованием ультразвукового доплеровского метода, а также рассчитать с помощью численного моделирования. Как в эксперименте, так и в численном моделировании имеются погрешности, и полученные результаты могут различаться между собой. Для более точного определения размеров зоны обратных токов был использован метод кросс-верификации, или перекрестной проверки. Кросс-верификация заключается в сравнении результатов расчетов и экспериментов, данная процедура позволяет проанализировать и обосновать применимость расчетных методов и уточнить методику измерения.

Цель и задачи данной работы – провести численный расчет закрученного и незакрученного течения в стенозе по моделям стационарного ламинарного и стационарного турбулентного течения, измерить с помощью ультразвукового доплеровского метода длину зоны обратных токов, образующейся за сужением, определить с использованием метода кросс-верификации поправку к измерениям длины зоны обратных токов, обосновать применимость выбранных математических моделей течения, изучить влияние закрутки потока на размер зоны обратных токов.

Для проведения экспериментального исследования течения в модели сосуда со стенозом была создана установка в виде замкнутого контура с циркулирующей в нем водой. Измерения проводились в прямой трубке диаметром 6 мм, которая находилась в акустической ванночке, заполненной водой. Длина стеноза – 12 мм, проходной диаметр в самом узком месте – 3 мм. Стеноз несимметричный, в любом поперечном сечении просвет сосуда имел форму круга. Степень стеноза, рассчитанная по площади, составляла 75%.

Для создания закрученного течения в контур была вставлена скрученная лента, которая имела следующие параметры: ширина 6 мм, длина 20 мм, толщина 0,4 мм, угол между входной и выходной кромками  $180^\circ$ .

Для измерения длины обратных токов использовалась следующая методика. Датчик закрепляется на державке над моделью сосуда со стенозом под углом  $60^\circ$  к оси сосуда, чтобы поперечное сечение модели сосуда лежало в плоскости сканирования датчика, и изначально устанавливался в сечении за стенозом, где на цветном изображении поля осевой скорости (в окне графического интерфейса программы EchoWave II) видна зона с отрицательными скоростями, обозначенная синим цветом. Затем датчик сдвигался вниз по течению до достижения сечения, в котором синяя зона пропадает. Расстояние между этим сечением и минимальным сечением стеноза трактовалось как длина зоны обратных токов. Предполагается, что поток отрывается от стенки сразу за наиболее узким сечением.

Численное моделирование течения в рассматриваемой жесткой модели сосуда со стенозом вначале проводилось в предположении стационарности и ламинарного характера движения жидкости. Решались полная система уравнений Навье-Стокса для несжимаемой жидкости с постоянной вязкостью. Затем, с учетом результатов проведенных экспериментов, свидетельствовавших о наличии интенсивных пульсаций скорости за стенозом, были проведены расчеты и на основе осредненных по Рейнольдсу уравнений Навье-Стокса. При этом для замыкания задачи была выбрана широко используемая сегодня модель турбулентности  $k-\omega$  SST.

Расчеты по методу контрольных объемов проводились с использованием программного пакета ANSYS CFX 14.0, со вторым порядком точности пространственной дискретизации. Динамический коэффициент вязкости  $\mu = 0,001$  Па·с, плотность жидкости  $\rho = 1000$  кг/м<sup>3</sup>. На входе задавался параболический профиль, на выходе – постоянное давление. На стенках ставилось условие прилипания. Расчеты проводились при серии значений среднерасходной скорости  $V_{cp}$  в диапазоне от 6 до 16 см/с. Соответствующие числа Рейнольдса  $Re = \rho V_{cp} D / \mu$  равны 360 – 960. При расчетах по модели турбулентного течения, входной уровень кинетической энергии турбулентности определялся заданием интенсивности турбулентных пульсаций в 1%, а отношение турбулентной вязкости к молекулярной полагалось равным 0.01.

Измеренная с помощью ультразвукового доплеровского метода длина зоны обратных токов занижена по сравнению с расчетной. Связано это с тем, что ультразвуковой сканер не может визуализировать конец зоны обратных токов, поскольку скорость в нем по величине меньше, чем нижний предел измерений сканера (рис.1).

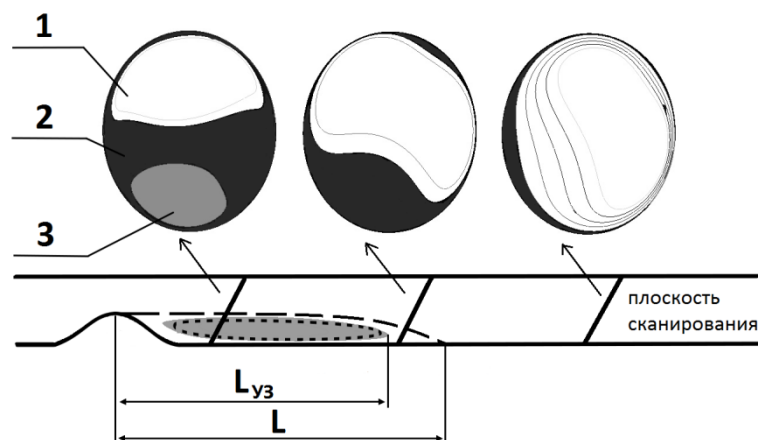


Рис. 1. Схема измерения длины зоны обратных токов в закрученном течении: 1) зона больших положительных скоростей, 2) зона малых скоростей, 3) зона больших отрицательных скоростей  
 $L$  – действительная длина зоны обратных токов,  $L_{уз}$  – измеренная длина зоны обратных токов

Для более точного определения длины зоны обратных токов был использован метод кросс-верификации. Поскольку расчеты незакрученных и закрученных течений в модели сосуда со стенозом при числах Рейнольдса  $Re < 300$  производятся точно, так как данные течения являются ламинарными и стационарными, то длину зоны обратных токов на этом интервале чисел Рейнольдса можно считать за реальную. Соответственно, разница между расчетной и измеренной длиной на участке  $Re < 300$  – это та поправка, которую нужно прибавить к измеренной длине, чтобы получить точное значение длины зоны обратных токов (рис. 2). Данная поправка для незакрученного течения составляет примерно  $0,7D$ , что означает в условиях эксперимента –  $4,2$  мм, для закрученного –  $0,9D$  ( $5,4$  мм).

Данная поправка применяется к измеренной длине зоны обратных токов в течениях с большими числами Рейнольдса ( $Re > 300$ ). Данные течения не являются ламинарными и стационарными, поскольку в них из-за больших скоростей в стенозе за сужением возникает переход к турбулентности. Если разница между рассчитанной и измеренной с учетом поправки длиной зоны обратных токов не превосходит 10%, то можно заключить, что данная модель турбулентности подходит для использования в расчетах незакрученных и закрученных течений в сосудах со стенозами.

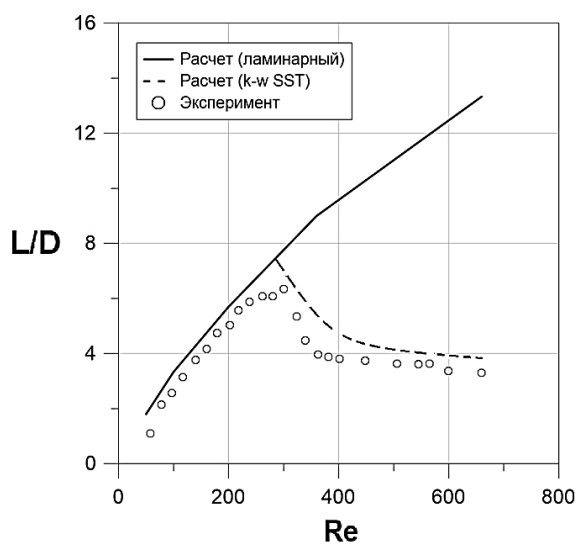


Рис. 2. Измеренная и рассчитанная длина зоны обратных токов за стенозом от числа Рейнольдса в незакрученном и закрученном течениях

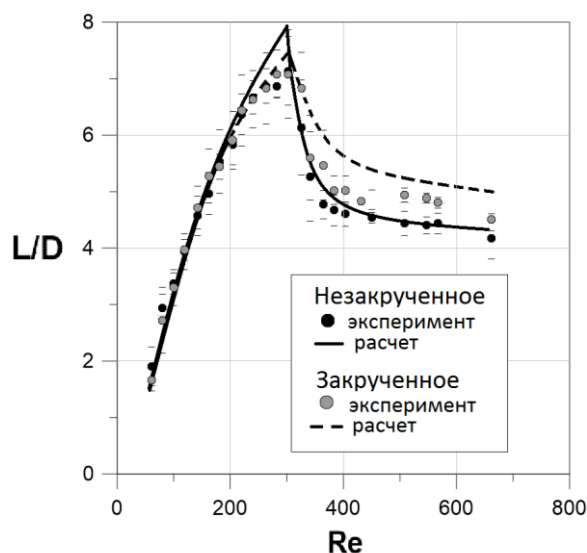


Рис. 3. Измеренная (с учетом предложенной поправки) и рассчитанная по двум моделям длина зоны обратных токов незакрученного (а) и закрученного (б) течений

На рис.3 показано изменение измеренной с помощью ультразвукового доплеровского метода (с учетом предложенной поправки) и рассчитанной длины зоны обратных токов от числа Рейнольдса в закрученном и незакрученном течениях.

Для течений, числа Рейнольдса которых не превышают 300, длина зоны обратных токов плавно растет с увеличением числа Рейнольдса для обоих течений. Длина зоны обратных токов достигает своего максимального значения при  $Re = 300$ , а при дальнейшем увеличении числа Рейнольдса начинает резко уменьшаться. При больших числах Рейнольдса  $Re > 400$  длина зоны практически не меняется. Однако, длина зоны в закрученном течении превышает длину зоны в незакрученном течении - примерно на 5-10%.

Таким образом, разработана методика измерения длины зоны обратных токов за стенозом с помощью ультразвукового доплеровского метода, предложена расчетная поправка, уточняющая результаты измерений, верифицированы математические модели для расчета течений в сосуде со стенозом.

#### ЛИТЕРАТУРА:

1. Morbiducci U., Ponzini R., Rizzo G., Cadioli M., Esposito A. et al. In Vivo Quantification of Helical Blood Flow in Human Aorta by Time-Resolved Three-Dimensional Cine Phase Contrast Magnetic Resonance Imaging. *Annals of Biomedical Engineering*, 2009, vol. 37, No. 3, pp. 516–531.
2. Stonebridge P.A., Brophy C.M. Spiral laminar flow in arteries? *The Lancet*, 1991, vol. 338, pp. 1360–1361.
3. Stonebridge P.A., Buckley C., Thompson A., Dick J., Hunter G. et al. Nonspiral and spiral (helical) flow patterns in stenoses: in vitro observations using spin and gradient echo magnetic resonance imaging (MRI) and computational fluid dynamic modeling. *International Angiology*, 2004, vol. 23, pp. 276–283.
4. Ha H., Lee S.-J. Effect of swirling inlet condition on the flow field in a stenosed arterial vessel model. *Medical Engineering & Physics*, 2014, vol. 36, No. 1, pp. 1119–1128.
5. Paul M.C., Larman A. Investigation of spiral blood flow in a model of arterial stenosis. *Medical Engineering & Physics*, 2009, vol. 31, No. 9, pp. 1195–1203.

УДК 004.942

С.В. Фролов, С.В. Синдеев  
Тамбовский государственный технический университет

### ЧИСЛЕННОЕ И ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ КРОВОТОКА В ЦЕРЕБРАЛЬНОЙ АНЕВРИЗМЕ

*Введение.* Согласно клиническим данным характер кровотока играет решающую роль в генезисе внутричерепных аневризм [1]. Нарушения структуры тока крови являются причиной разрушения внутреннего слоя стенки сосуда, что приводит в конечном итоге к образованию церебральных аневризм. Для успешного лечения особо ценной является возможность определения изменений поля скоростей в области аневризмы.

*Цель работы.* С помощью математического моделирования и натуральных экспериментов определить структуру потока и скорость движения крови в индивидуальной модели церебральной аневризмы.

*Методы.* Для исследования гемодинамики в области церебральной аневризмы была использована индивидуальная модель внутренней сонной артерии пациента, геометрия которой представлена на рис. 1. Для оценки поля скоростей в аневризме совместно использовались методы численного и экспериментального моделирования.

Для численного моделирования движения крови в области аневризмы была использована математическая модель локальной гемодинамики, разработанная авторами. Были приняты следующие допущения: течение крови ламинарное; жидкость несжимаема,  $\rho = const$ ; жидкость неньютоновская; влияние внешних сил не рассматривается; стенка сосуда – жесткая. Для задания граничных условий использовались данные, полученные из результатов натуральных экспериментов. На стенке сосуда использовалось условие прилипания. Плотность крови составляла  $1141 \text{ кг/м}^3$ . Зависимость вязкости от скорости сдвига для неньютоновской модели жидкости была получена с помощью экспериментальных измерений. Найденная зависимость была аппроксимирована с помощью степенного закона вязкости (рис. 2).

Для симуляции тока крови было разработано соответствующее программное обеспечение. Был смоделирован период времени равный 5 с, с шагом равным  $2 \cdot 10^{-4}$  с. Из-за высоких вычислительных затрат расчет математической модели был произведен на суперкомпьютере «Ломоносов» Московского государственного университета им. М.В. Ломоносова [2]. Полученное решение было сравнено с результатами натуральных экспериментов и показало достаточную точность.

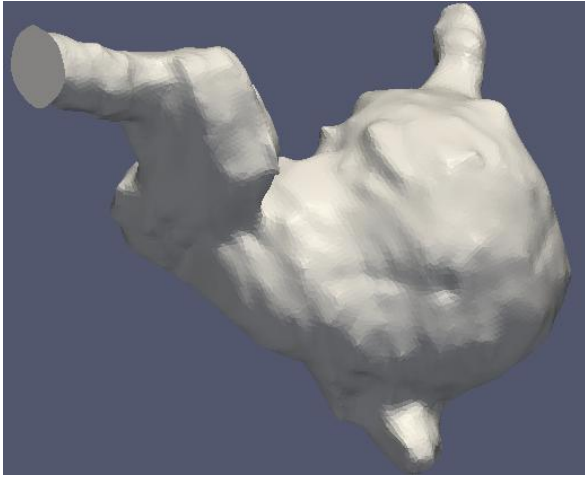


Рис. 1. Индивидуальная модель аневризмы внутренней сонной артерии

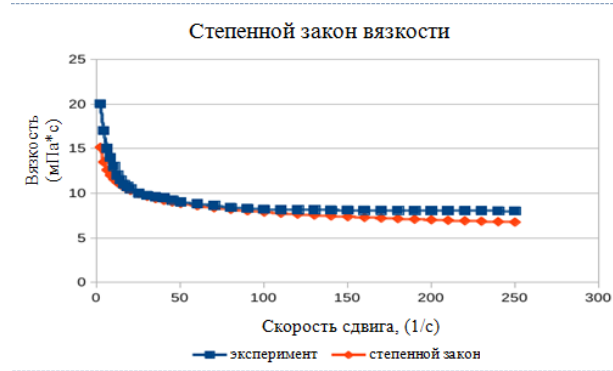


Рис. 2. Степенной закон вязкости для неньютоновской модели крови

Для экспериментальных исследований с помощью метода стереолитографии, из STL файла была изготовлена эластичная силиконовая модель внутренней сонной артерии [1, 3]. Используя силиконовую модель аневризмы внутренней сонной артерии, были проведены измерения скорости кровотока с помощью экспериментальной установки, схема которой приведена в [4]. Силиконовая модель была помещена на XYZ подвижный стол и X, Y, Z компоненты скорости были измерены с использованием 1D лазерного доплеровского анемометра. Пространственное разрешение используемого анемометра составляет 70 мкм. Измерение проводилось в поперечных сечениях, расстояние между которыми составляло 4 мм. В поперечном сечении шаг по оси Y составлял 0.2 мм и 0.625 мм по оси Z. Временное разрешение прибора равнялось 1 мс. Из-за того что кровь не может быть использована для измерения лазером (эритроциты поглощают красный свет лазера) был использован раствор полиакриламида. Раствор полиакриламида представляет собой прозрачную жидкость со сходными с кровью неньютоновскими свойствами, но в отличие от крови для него не характерно свойство трихотропии.

*Результаты.* Как показали результаты экспериментов, индивидуальные особенности геометрии внутренней сонной артерии являются ключевым фактором, влияющим на характер течения крови в области аневризмы. Рис. 3 показывает поле величины скорости в XY сечении центра аневризмы. Скорость крови изменяется от  $1 \cdot 10^{-5}$  м/с до 0.186 м/с. Область с высоким модулем скорости расположена в левой части сечения аневризмы (рассматривается направление от входа к выходу). Среднее значение скорости в этой области равняется 0.14 м/с, что составляет 35 % от средней по сечению входной скорости. Среднее значение скорости в сечении равняется 0.09 м/с. В мешочке аневризмы модуль скорости не превосходит 0.016 м/с, что составляет 17 % от средней скорости по сечению. В центре поперечного сечения аневризмы располагается область с низкой скоростью движения крови 0.04 м/с, что составляет около 44 % от средней скорости в поперечном сечении.

Линии тока в момент систолического пика представлены на рис. 4 (линии тока проходят через прямую во входном сегменте). Диапазон изменения модуля скорости [1.29 мм/с; 1 м/с]. Средняя скорость крови внутри аневризмы достигает 0.08 м/с. В полости аневризмы содержится вихрь, который нестабилен на протяжении сердечного цикла. Линии тока для неньютоновской модели жидкости имеют спиралевидную форму, закрученную против часовой стрелки в направлении выхода.

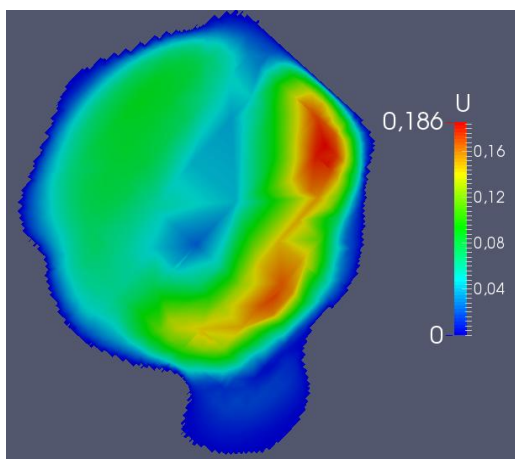


Рис. 3. Поле величины скорости в поперечном сечении центра аневризмы плоскостью XY в момент систолического пика

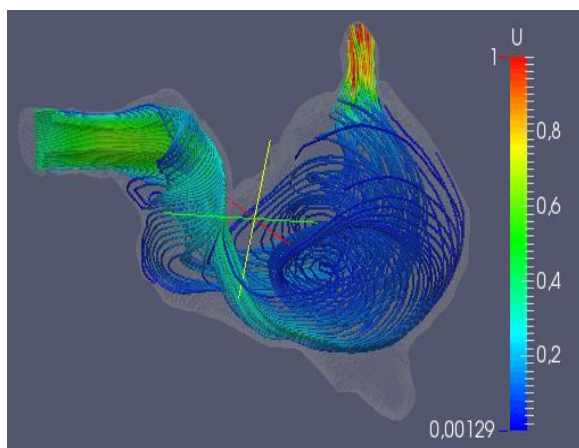


Рис. 4. Линии тока, проходящие через прямую во входном сегменте модели аневризмы в момент систолического пика

Рис. 5 отображает величины скорости на сечении YZ при  $X=0$  во время систолического пика, измеренные с помощью лазерного доплеровского анемометра. Средняя скорость в сечении равняется 0.12 м/с, что составляет около 30 % от средней по сечению входной скорости. Максимальное значение скорости составляет лишь 20 % от максимальной входной скорости, в то время как скорость в центре сечения аневризмы составляет лишь 3.1 %. Область с высокой скоростью течения крови расположена в левой части сечения аневризмы (согласно направлению от входа к выходу). Средняя скорость движения крови в данной области составляет 0.14 м/с. В центре сечения аневризмы расположена область с низкой скоростью движения крови. Средняя скорость движения крови в этой области составляет лишь 10 % от средней по сечению входной скорости.

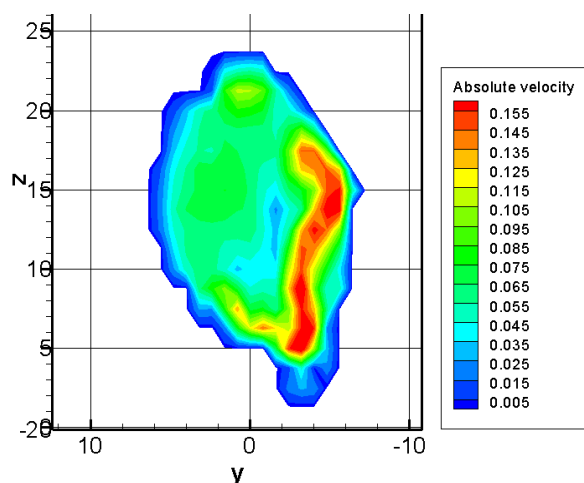


Рис. 5. Распределение скорости крови в сечении  $X=0$  в момент систолического пика

скорости и распределения пристеночного напряжения сдвига в моделях аневризмы внутренней сонной артерии со сходной формой геометрии. Результаты исследования показали, что средняя скорость в полости аневризмы не превосходит 12% от скорости во входном сегменте. Присутствующий в полости аневризмы вихрь может быть причиной образования тромбов.

*Обсуждение.* На основании сравнения результатов численного эксперимента с результатами натурального эксперимента, можно заключить, что используемая математическая модель является адекватной. В настоящем исследовании была определена структура потока и скорость движения крови в индивидуальной модели аневризмы внутренней сонной артерии. Было установлено, что ключевым фактором, определяющим течение крови в области аневризмы, является индивидуальные особенности формы артерии. Полученные результаты могут быть использованы для оценки поля

*Выводы.* Результаты проведенного исследования согласуются с гемодинамической теорией генезиса аневризм. Вероятно, что флуктуации скорости приводят к появлению высокочастотных вибраций стенки сосуда, которые являются причиной разрыва аневризмы.

#### ЛИТЕРАТУРА:

1. Liepsch D., Balasso A., Berger H., Mclean J., Thurston G. Blood modelling and flow studies in models of the cardiovascular system. Series on Biomechanics, 2010, vol. 25, no 1-2, pp. 7–22.
2. Sadovnichy V., Tikhonravov A., Voevodin V., Opanasenko V. "Lomonosov": Supercomputing at Moscow State University. Contemporary High Performance Computing: From Petascale toward Exascale, 2013, pp. 283-307.
3. Liepsch D., Moravec S., Baumgart R. Some flow visualization and laser Doppler-velocity measurements in a true-to-scale elastic model of a human aortic arch - a new model technique. Biorheology, 1992, vol. 29. no. 5-6, pp. 563-580.
4. Frolov S.V., Sindeev S.V., Lischouk V.A., Gazizova D.Sh., Liepsch D., Balasso A. Development of multiscale hemodynamics model for research of basilar artery circulation. Problems of Contemporary Science and Practice. Vernadsky University, 2013, vol. 48. no. 4, pp. 46-53.

УДК 532.542+616.126.3

С.В. Хоробров, А.Д. Юхнев, Я.А. Гатаулин  
Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого

### РАСЧЕТНО-ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ ГИДРОДИНАМИЧЕСКИХ ХАРАКТЕРИСТИК ПОЛНОПРОТОЧНОГО ИСКУССТВЕННОГО КЛАПАНА СЕРДЦА

*Введение.* Пороки клапанов сердца – одна из часто встречающихся болезней сердечно-сосудистой системы, лечащаяся, в большинстве своем, хирургически. При этом замена пораженного клапана на биологический или механический искусственный аналог происходит чаще, нежели пластика клапана. В связи с этим представляет интерес исследование структуры потока и гидродинамических характеристик искусственных клапанов сердца [1]. Стоит отметить, что в большинстве своем работы по гидродинамике клапанов сердца либо расчетные [2, 3], либо экспериментальные [4]. Реже встречаются расчетно-экспериментальные работы, где проводится расчет в условиях эксперимента [5].

*Цель работы* – провести численное исследование распределения скорости пульсирующего потока через полнопроточный искусственный клапан сердца МедИнж-СТ.

Для выполнения цели решены следующие задачи:

- измерена скорость движения створок, пульсовые кривые давления и пульсации расхода при работе клапана в пульсдубликаторе;
- проведен двумерный нестационарный расчет в пакете ANSYS Fluent;
- результаты сопоставлены с полем скорости в двустворчатом клапане St. Jude Medical [3].

В работе проведено исследование пульсирующего потока жидкости в механическом двустворчатом аортальном искусственном клапане сердца МедИнж-СТ, проходящего в настоящее время клинические испытания. В частности, рассчитаны распределения скоростей и сдвиговых напряжений в различные фазы работы клапана.

В отличие от известных двухстворчатых клапанов, таких, как St. Jude Medical и МедИнж-2 [5], у которых створки в фазу открытия располагаются параллельно потоку, разделяя его на три струи, клапан МедИнж-СТ является полнопроточным – открытые створки также располагаются параллельно потоку, но при этом они прилегают к каркасу, полностью открывая проходное отверстие клапана. Для обеспечения такого открытия

створки клапана МедИнж-СТ имеют полусферическую форму, тогда как у его предшественника МедИнж-2 – профилированную плоскую форму.

Геометрия расчетной области соответствует геометрии аортальной камеры пульсодубликатора (рис. 1), в которой был предварительно испытан рассчитываемый клапан. Для расчета построена двумерная сетка из 200 000 треугольных элементов. Движение жидкости описывалось нестационарными уравнениями Рейнольдса, в качестве замыкающего выражения была выбрана наиболее универсальная  $k-\omega$  SST модель турбулентности. Расчет проведен с использованием пакета ANSYS Fluent. Число Рейнольдса, оцененное по средней скорости в пик систолы и диаметру канала, составляет 7500. В качестве входного условия задавался плоский профиль скорости, меняющийся во времени. Кривая расхода задавалась по измерениям электромагнитным датчиком работы клапана в пульсодубликаторе. В качестве условия на выходе задавалась пульсовая кривая давления по измерениям тензометрическим датчиком. Закон движения створок клапана определен по результатам видеорегистрации с частотой 50 кадров/с.

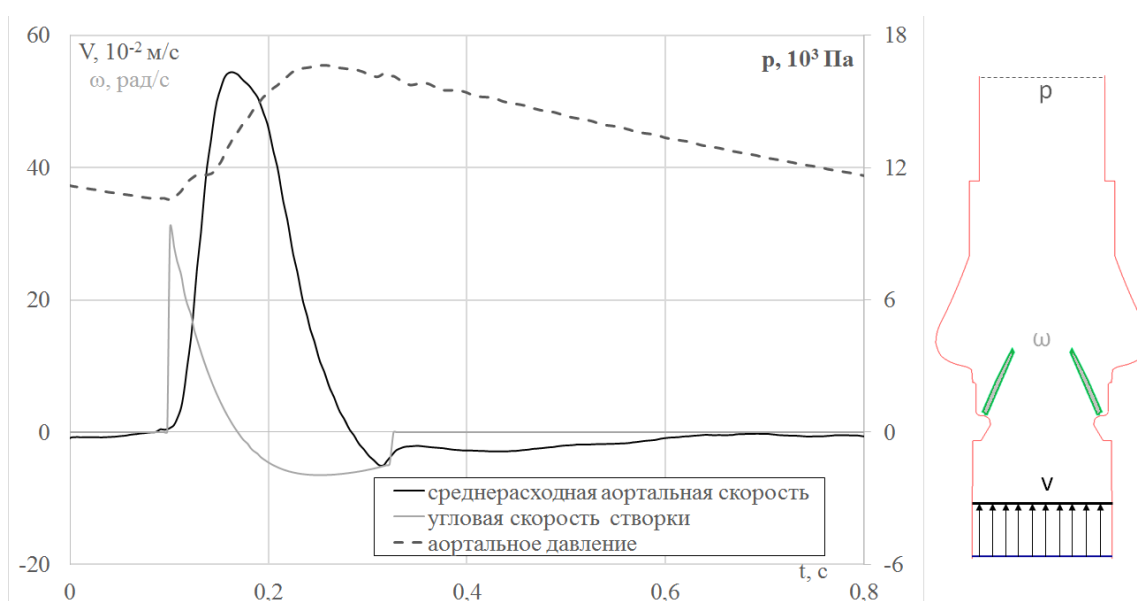


Рис. 1. Граничные условия и геометрия расчетной области

*Результаты.* Расчеты показали, что в фазу систолы поток проходит через клапан беспрепятственно, без образования больших градиентов скоростей, деформирующих форменные элементы крови. Сдвиговые напряжения в фазу систолы в потоке между створками не превышают 0.1 Па. Внутренняя часть створок омывается высокоскоростным потоком, внешняя – медленным движением жидкости в рециркуляционной зоне, которая формируется между створками клапана и стенками синуса корня аорты. Вычитая из среднего давления на входной границе расчетной области давление на выходной границе, получаем трансортальный перепад. Сравнение среднего трансортального перепада в расчете и эксперименте (рис. 2), показывает, что расчет с хорошей точностью предсказывает положение локальных минимумов и максимумов на временной оси (наибольшее расхождение – 15 мс), значения перепада предсказываться с относительной погрешностью не более 30%. Так, пик трансортального перепада в эксперименте составляет 27 мм рт. ст., тогда как в расчете это значение – 20 мм рт. ст.

Расхождение результатов расчета и эксперимента может объясняться наличием в эксперименте сложных трехмерных турбулентных структур, чье воздействие не учитывается в двухмерном расчете.



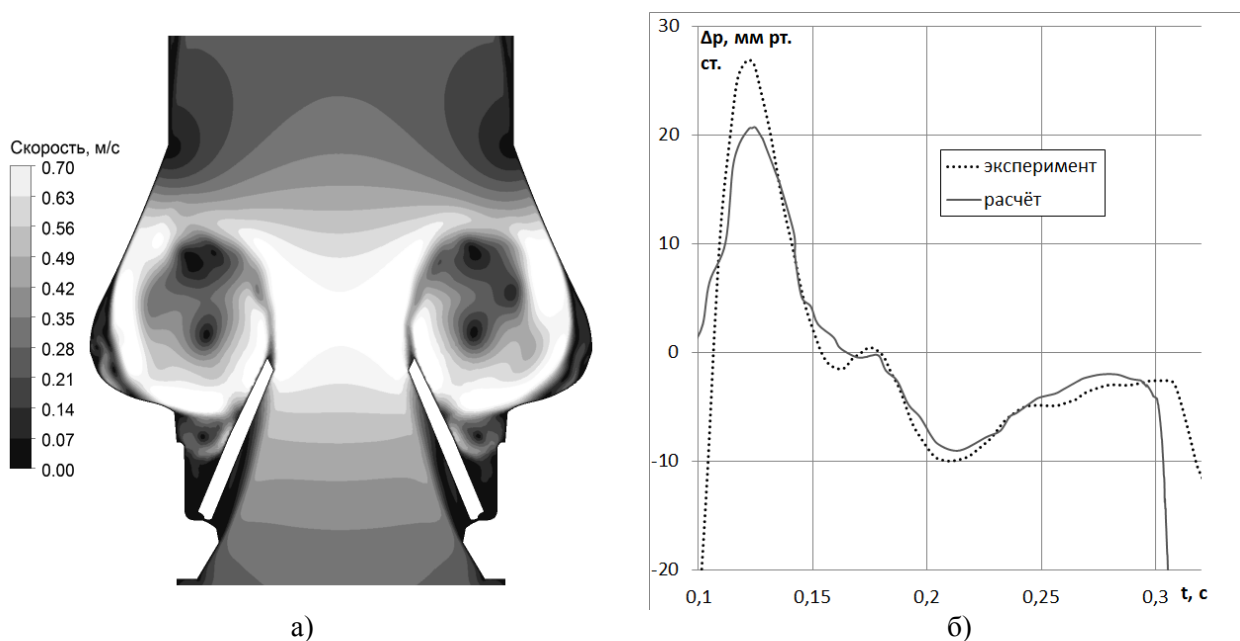


Рис. 2. Поле величины скорости в фазу закрытия створок,  $t=0.23$  с (а) и сравнение экспериментального и расчетного трансортального перепада (б)

#### Выводы:

1. Систолический поток через клапан МедИнж-СТ близок к физиологическому, в отличие от известных дисковых и двустворчатых клапанов.
2. Сдвиговые турбулентные напряжения в потоке на порядок меньше, чем в аналогичных расчетах для других двустворчатых клапанов.
3. Трансортальный перепад в расчете и эксперименте совпадают по положениям минимумов и максимумов с точностью до 15 мс, значения перепада расходятся не более, чем на 30%.

#### ЛИТЕРАТУРА:

1. Орловский П.И., Гриценко В.В., Юхнев А.Д., Евдокимов С.В., Гавриленков В.И. Искусственные клапаны сердца [Книга] / ред. Ю.Л. академик РАМН Шевченко. - Москва : ОЛМА-пресс, 2007. - 477 с. - ISBN 978-5-373-00314-8.
2. Smadi O., Fenech M., Hassan I.G., Kadem L. Flow Through a Defective Mechanical Heart Valve: a Steady Flow Analysis [Журнал] // Medical Engineering Physics. - 2009 г.. - 31 : Т. 3. - стр. 295-305.
3. Uzu-Kuei Hsu Pong-Ju Lu. Dynamic Simulation and Hemolysis Evaluation of the Regurgitant Flow over a Tilting-Disc Mechanical Heart Valve in Pulsatile Flow [Журнал] // World Journal of Mechanics. - 2013 г.. - 3 : Т. 3. - стр. 160-168.
4. D.M. Amaty. Experimental studies of flow through deformable silicone and tissue engineered valves // Ph. D. thesis. - Minnesota : [б.н.], 2009 г..
5. K. Dumont. Experimental and numerical modeling of heart valve dynamics // Ph. D. thesis. - Gent : [б.н.], 2004 г..

**РАЗРАБОТКА МУЛЬТИАГЕНТНОЙ РАСПРЕДЕЛЕННОЙ СИСТЕМЫ  
ГРУППОВОГО УПРАВЛЕНИЯ РОБОТАМИ**

Роботы используются во многих областях науки, техники и промышленности, в первую очередь там, где жизнедеятельность человека либо затруднена, либо вообще невозможна, например, в зонах радиоактивного или химического загрязнения, в условиях боевых действий, при проведении подводных или космических исследований и т.п. Проблеме создания роботов различного назначения посвящено достаточно большое число исследований [1, 2]. В результате этих исследований достаточно хорошо проработаны основные проблемы, с которыми приходится сталкиваться разработчикам при создании роботов, такие как распознавание объектов и сцен, формирование моделей окружающей среды, планирование маршрутов движения и последовательностей действий для достижения цели, управление движением с учётом динамики роботов и т.д.

В то же время стало понятно, что одиночный робот, каким бы интеллектуальным он ни был, может использоваться только для решения некоторых частных задач, либо выполнения довольно простых операций, поскольку он, как правило, обладает сравнительно малыми возможностями для выполнения поставленной задачи (небольшой радиус действия, ограниченный бортовым энергоресурсом; небольшое число выполняемых функций, ограниченное набором исполнительных устройств, невысокая вероятность выполнения поставленной задачи при функционировании в экстремальных ситуациях).

Очевидным решением указанных выше проблем является применение при решении сложных задач сразу нескольких роботов, то есть групп роботов [2].

Преимущества группового применения роботов очевидны. Это и больший радиус действия, достигаемый за счет рассредоточения роботов по всей рабочей зоне; и расширенный набор выполняемых функций, достигаемый за счет установки на каждый робот индивидуальных исполнительных устройств; и, наконец, более высокая вероятность выполнения задания, достигаемая за счет возможности перераспределения целей между роботами группы в случае выхода из строя некоторых из них.

Для организации систем управления группами роботов целесообразно использовать некоторые общие стратегии, применяемые для управления во всех технических, социальных и природных группах. К таким стратегиям относят [3]:

1. централизованное управление, которое предполагает наличие в группе командира или центрального устройства управления, на которое возлагается задачи планирования действий и управления группой роботов;
2. иерархическое управление, которое предлагает наличие командиров, которые управляют небольшим количеством подчинённых. В подчинении каждого из них состоит своя группа объектов. По сравнению с централизованным управлением, существенно снижается сложность задачи, решаемой отдельным командиром;
3. децентрализованное управление, предполагающее отсутствие какого-либо командира, при этом каждый член группы самостоятельно принимает решение о своих действиях, пытаясь внести максимально возможный вклад в достижение групповой цели.

В данной работе рассматривается мультиагентный подход к организации группового управления роботами, на базе которого возможно реализовать первые две стратегии

группового управления роботами.

Акцентированное внимание, активно проявившееся со стороны мирового научно-технического сообщества к проблематике мультиагентных робототехнических систем (МАРС) обусловлено чисто прагматическими соображениями о преимуществах их прикладного применения [3]:

1. существование различных прикладных задач, наиболее эффективное решение которых связано с организацией взаимодействий нескольких исполнителей, объединяющих функциональные и технические ресурсы;
2. существование различных прикладных задач, допускающих распараллеливание процессов своего решения между несколькими исполнителями;
3. возможность повышения надёжности решения выполняемой задачи при отказе одного из исполнителей за счёт перераспределения функций между оставшимися;
4. возможность потенциальной замены сложных многофункциональных дорогостоящих систем группой более простых и дешёвых робототехнических устройств.

Перспективы применения МАРС охватывают широкий спектр прикладных областей, таких как оборонная сфера, строительные работы, ликвидация последствий катастроф, освоение космоса и множество других задач.

Основные требования к функциональным возможностям МАРС связаны с необходимостью анализа поставленной прикладной задачи, её декомпозиции на множество подзадач или составных технологических операций и их последующего выполнения в автономном режиме совместными усилиями отдельных исполнителей, координирующих свои действия. Создание таких систем, в полной мере отвечающих предъявляемым к ним требованиям, сопряжено с решением следующих ключевых проблем:

1. организации развитого человеко-машинного интерфейса, позволяющего обеспечить оперативную постановку общей прикладной задачи;
2. организации целесообразного взаимодействия между отдельными агентами в интересах выполнения общей прикладной задачи.

Каждая из перечисленных проблем является крайне сложной и многогранной, затрагивая целый ряд взаимосвязанных вопросов.

Так, например, проблема организации целесообразных взаимодействий между активными элементами в составе МАРС охватывает две важнейших составляющих:

1. планирование координированных действий агентов с последующим формированием и выдачей соответствующих заданий;
2. обеспечение информационно-логического взаимодействия и совместимости агентов.

Кроме того, обеспечение информационно-логического и физического взаимодействия агентов так или иначе сопряжено с необходимостью обобщения собираемых ими в процессе функционирования разнородных сенсорных данных, а также формирования единой модели внешней среды и рабочей обстановки.

Анализ проблем, связанных с построением МАРС позволяет перейти к поиску путей их решения и сформулировать те концептуальные положения, которые будут регламентировать архитектуру МАРС. Так, к фундаментальным основам построения МАРС необходимо отнести следующие ключевые принципы [4]:

1. единство целей функционирования агентов;
2. адекватность интеллектуальных и функциональных возможностей агентов сложности решаемых задач;
3. единство информационного пространства системы;
4. гибкость, перестраиваемость и детерминированность сетевой архитектуры, обеспечивающей поддержку единого информационного пространства системы при реализации различных стратегий группового управления;

5. взаимная информационно-логическая совместимость агентов.

Представленные принципы фактически предопределяют функциональную структуру МАРС (рис. 1).

В рамках данной работы разрабатывается прототип МАРС, предназначенной для перемещения групп роботов по лабиринту. Мультиагентная система разрабатывается в рамках парадигмы «платформа, как сервис» (PaaS), является распределенной и состоит из трех логических компонент:

1. контроллер вычислительного кластера, позволяющий ставить группам роботов задачи и выделять вычислительные ресурсы для решения этих задач;
2. подсистема управления группой роботов;
3. подсистема обмена сообщениями между роботами и подсистемой управления группами роботов.

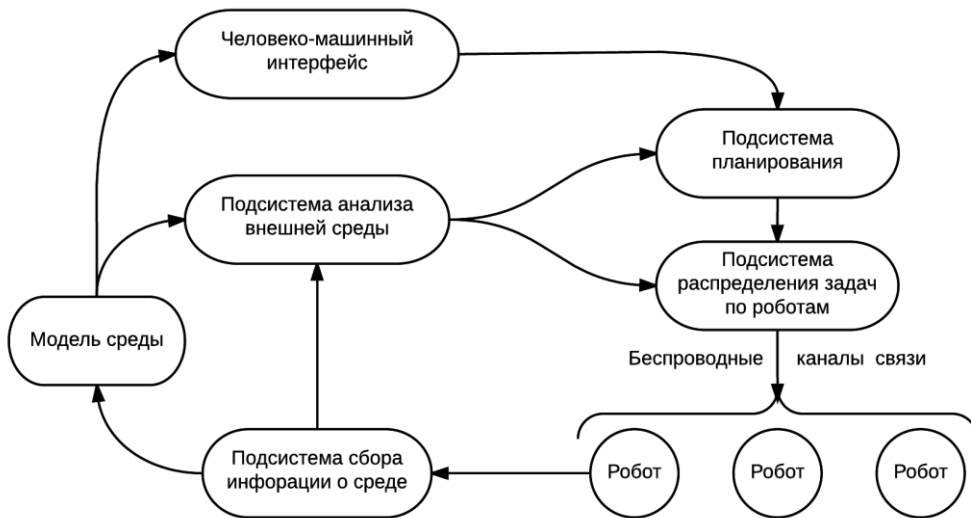


Рис. 1. Функциональная структура МАРС

Каждая из компонент системы является отдельным приложением, которое может быть запущено по требованию в отдельной виртуальной машине в сервере виртуализации, что обеспечивает горизонтальное масштабирование системы и гибкое управление ресурсами системы.

Приложения реализованы с использованием модели акторов [5], представляющей из себя математическую модель параллельных вычислений, которая трактует понятие «актор» как универсальный примитив параллельного численного расчета: в ответ на сообщения, которые он получает, актор может принимать локальные решения, создавать новые акторы, посылать ответные сообщения, а также устанавливать, как следует реагировать на последующие сообщения, что естественным образом отображается на действия агентов МАРС.

В рамках дальнейших исследований можно выделить следующие направления:

1. рассмотрение и реализация алгоритмов разрешения конфликтов между роботами при перемещению по лабиринту;
2. рассмотрение и разработка алгоритмов синхронизации выполнения подзадач отдельными агентами, при реализации поставленной перед группой задачи;
3. исследование характеристик предложенных алгоритмов планирования и синхронизации агентов.

#### ЛИТЕРАТУРА:

1. Юревич Е.И. Принципы группового управления роботами // Экстремальная робототехника-2003: материалы научной молодежной школы.– Таганрог: Изд-во ТРТУ, 2003.
2. Юревич Е.И. О проблеме группового управления роботами // Мехатроника, автоматизация, управление, 2004.
3. Каляев И.А., Гайдук А.Р., Капустян С.Г. Модели и алгоритмы коллективного поведения в группах роботов. –М.: Физматлит, 2009.
4. Городецкий В.И., Серебряков С.В., Троцкий Д.В. Средства спецификации и инструментальной поддержки командного поведения автономных агентов // Изв ЮФУ. Технические науки № 3 (116). 2011 г. с 23-41.
5. Эндрюс Г.Р. Основы многопоточного, параллельного и распределенного программирования. - М.: Издательский дом "Вильямс", 2003.

УДК 004.725, 004.418

А.С. Тучков, С.Г. Попов

Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого

### ИССЛЕДОВАНИЕ СЕТЕВОЙ СИНХРОНИЗАЦИИ СИСТЕМНЫХ ЧАСОВ МУЛЬТИПРОТОКОЛЬНЫХ КИБЕРОБЪЕКТОВ В ГЕТЕРОГЕННЫХ СЕТЯХ

*Введение.* Синхронизация системных часов мультипротокольных киберобъектов имеет решающее значение в интеллектуальных сетях транспортных средств в задачах функционирования систем безопасности, навигации и сервисов водителя и пассажиров [1, 2]. Для функционирования сервисов интеллектуальной транспортной системы (ИТС), киберобъект оснащен мультипротокольным подвижным узлом [3], обеспечивающим взаимодействие одного транспортного средства с другим, транспортного средства с дорожной инфраструктурой и транспортного средства с облачными сервисами [4, 5].

Мультипротокольный подвижный узел обеспечивает передачу данных между приложениями пользователя, такими как: почтовые сервисы, службы дистанционного запуска заданий в заданное время, компоненты систем безопасности, сервисы поиска свободных парковочных мест и информации о дорожных условиях (пробках и авариях). Для этого каждый МПУ содержит системные часы, характеризующиеся своим ходом.

Процесс отклонения хода системных часов от требуемой точности приводит к нарушению последовательности запуска сервисов и служб мультипротокольного подвижного узла, что ведёт к рассогласованию функционирования компонент ИТС. Поэтому при внедрении ИТС возникает проблема постоянного поддержания точности хранения времени на МПУ. Решением этой проблемы является периодическая сетевая синхронизация системных часов МПУ по временным беспроводным каналам связи.

*Цели и задачи.* Целью работы является исследование качества сетевой синхронизации системных часов мультипротокольных киберобъектов ИТС по проводным и беспроводным каналам локальных и глобальных технологий передачи данных. Для этого необходимо определить зависимость погрешности синхронизации системных часов от комбинации технологий передачи данных.

*Программно-аппаратная реализация эксперимента.* Методика определения качества синхронизации и программно-аппаратная реализация синхронизации мультипротокольных киберобъектов изложены в работе [6]. Задачей функционирования алгоритма является поддержание точности синхронизации при минимизации объема служебного трафика, возникающего в ходе синхронизации системных часов от комбинации технологий передачи данных.

С целью проверки методики выполнено натурное моделирование процесса

синхронизации системных часов на программно-аппаратном стенде. Структура стенда для экспериментов приведена на рис. 1.

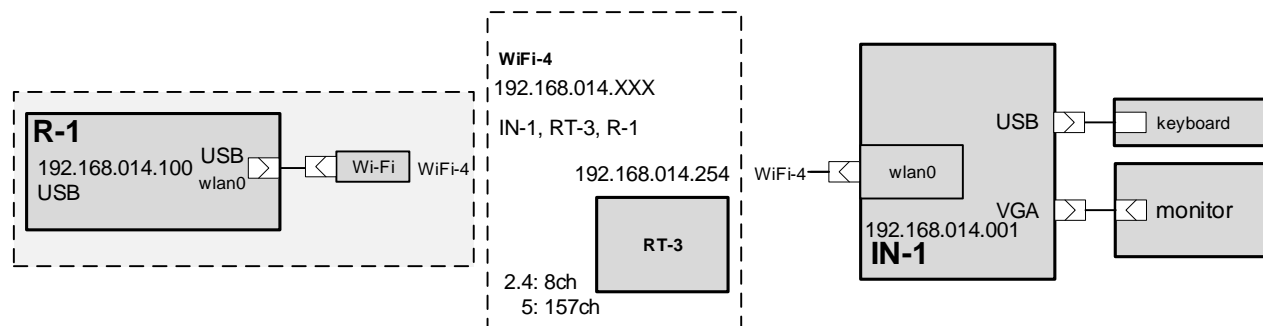


Рис. 1. Схема стенда экспериментальной установки

На имитаторе нагрузки установлен сервер NTP, а на R-1 - клиент синхронизации. Управление запуском программы-клиента осуществлялось с помощью файлов-сценариев на стороне МПУ. Регистрация результатов синхронизации осуществлялась в файлы средствами операционной системы.

*Условия проведения экспериментов.* С целью подтверждения применимости технологии сетевой синхронизации для получения поправок часов мультипротокольного киберобъекта на разных расстояниях от имитатора нагрузки на экспериментальном стенде проведены две серии экспериментов по синхронизации киберобъекта с имитатором облачного сервиса по:

- локальной беспроводной сети MESH на расстоянии 2 м в условиях реальной нагрузки в эфире и нагрузки на сеть;
- локальной беспроводной сети MESH на расстоянии 20 м в условиях реальной нагрузки в эфире и нагрузки на сеть.

Для проведения экспериментов были выбраны следующие параметры и константы:

- технология передачи данных: MESH (802.11s);
- тип маршрутизации: статические пути;
- расстояние от IN-1 до R-1: 2м и 20м;
- протокол: NTP;
- тип трафика: UDP;
- число испытаний: 1000 шт.

*Результаты экспериментов.* На рис. 2 приведены значения отклонений хода часов для всех расстояний от ИИ-1 в 20 интервалах, с шагом  $0.1 \times 10^{-3}$ . Из диаграмм видно, что 80% значений отклонений лежит в области погрешностей порядка  $10^{-2}$ , что обеспечивает достаточную для приложений пользователя точность синхронизации при использовании беспроводных технологий связи. Расстояние между R-1 и IN-1 никак не повлияло на значения отклонения хода часов.

На рис. 3 приведена функции распределения вероятности отклонения поправки часов для разных расстояний R-1 от IN-1.

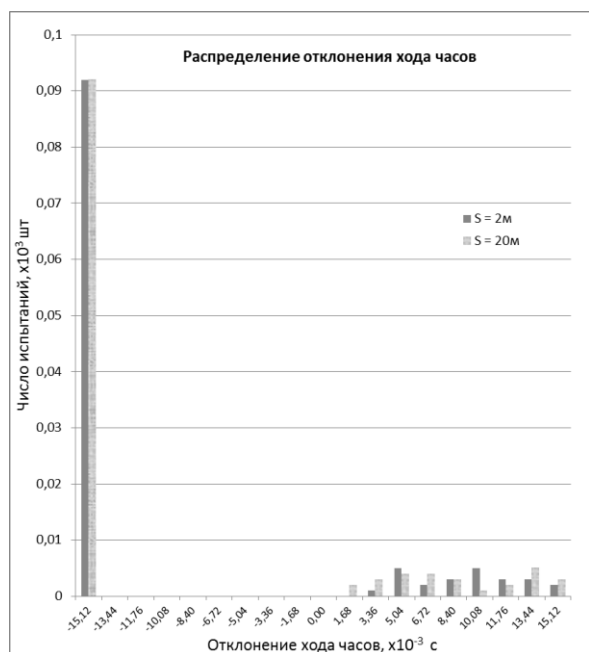


Рис. 2. Гистограммы распределения поправки часов для синхронизации для разных для разных расстояний КО-1 от ИН-1

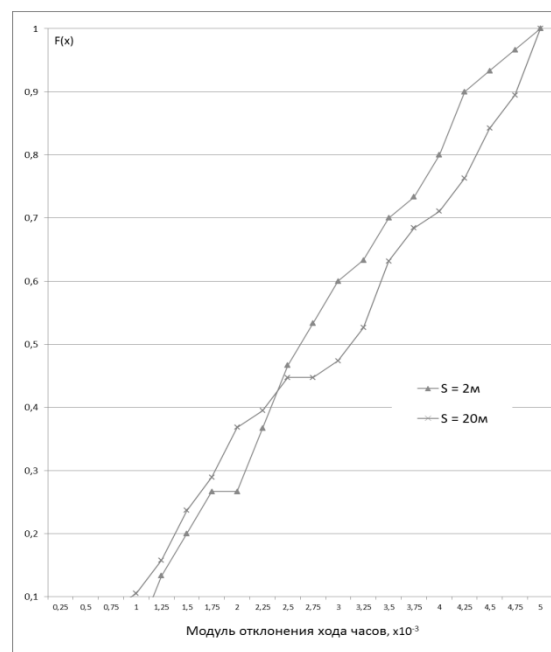


Рис. 3. Функции распределения вероятности отклонения поправки часов для разных расстояний КО-1 от ИН-1

**Выводы.** С целью подтверждения возможности синхронизации мультипротокольного киберобъекта по беспроводному каналу связи на разных расстояниях от имитатора облачного сервиса на стенде реализована серия экспериментов, подтверждающих работоспособность алгоритма синхронизации системных часов. В ходе проведения экспериментов стенд продемонстрировал безотказное функционирование программно-аппаратного комплекса и обеспечил сбор результатов двух серий экспериментов.

Результаты экспериментов показывают, что синхронизация мультипротокольных киберобъектов по сети MESH обеспечивается с точностью до  $10^{-2}$ , что обеспечивает функционирование сервисов ИТС. Также по результатам экспериментов было показано, что изменение расстояния между имитатором облачного сервиса и киберобъектом на порядок не влияет на качество синхронизации.

Результаты исследования могут быть применены для обоснованного выбора частоты синхронизации мобильных мультипротокольных киберобъектов в интеллектуальных транспортных системах.

Развитием работы является исследование алгоритма синхронизации в условиях применения динамических протоколов синхронизации сетевого уровня на разных расстояниях от источника обработки данных и проведение натурных экспериментов на транспортных средствах в условиях городского и загородного движения.

#### ЛИТЕРАТУРА:

1. Тучков А., Попов С. Исследование сетевой синхронизации системных часов транспортных средств в гетерогенных сетях, Неделя науки Санкт-Петербургского государственного политехнического университета. 2014. № 1. С. 104-109. ISSN: 2409-4935
2. Glazunov V., Kurochkin L., Kurochkin M. et al. Road Road Traffic Efficiency and Safety Improvements Trends // ICINCO (2) / Ed. by J.-L. Ferrier, O.Y. Gusikhin, K. Madani, J.Z. Sasiadek. SciTePress, 2013, pp. 439—446.
3. Glazunov V., Kurochkin L., Kurochkin M., Popov S. Instrumental Environment of Multi-protocol Cloud-oriented Vehicular Mesh Network // ICINCO (1) / Ed. by J.-L. Ferrier, O. Y. Gusikhin, K. Madani, J.Z. Sasiadek. SciTePress, 2013, pp. 568—574.

4. Zaborovskiy V., Lukashin A., Popov S., Vostrov A. Adage mobile services for ITS infrastructure // ITS Telecommunications (ITST), 2013 13<sup>th</sup> International Conference on. 2013. Nov., pp. 127—132.
5. Bregni S., Subrahmanyam R. Synchronization over Ethernet and IP in next generation networks [Guest Editorial] // Communications Magazine, IEEE. 2011. February, vol. 49, no. 2, pp. 130—131.
6. Glazunov V., Gusikhin O. Y., Kurochkin L. et al. An Experimental Comparison of Dynamic Routing Protocols in Mobile Networks // ICINCO 2014 — Proceedings of the 11th International Conference on Informatics in Control, Automation and Robotics, vol. 2, Vienna, Austria, 1—3 September, 2014 / Ed. by J. Filipe, O.Y. Gusikhin, K. Madani, J.Z. Sasiadek. SciTePress, 2014, pp. 775—782.

УДК 004.35

Н.В. Калугин, В.А. Мулюха  
Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого

## РАЗРАБОТКА МЕТОДА СИНТЕЗА АГРЕГАТНО-МОДУЛЬНОГО РОБОТА

Развитие теории автоматического управления, методов искусственного интеллекта, информационных, телекоммуникационных и сетевых технологий, достижения в микросистемной технике, мехатронике и других научно-технических направлениях на рубеже XX века вызвали резкую активизацию поисковых исследований в области применения роботов, в том числе в изучении космоса и космических объектов.

В данный момент исследования, направленные на освоение и колонизацию Луны с помощью роботов, включены в космические программы многих государств, в том числе и Российской Федерации [1]. Согласно принятым нормативным документам, основной составляющей роботизированной лунной базы должен стать парк напланетных роботов, достаточный для решения задач, возникающих в ходе исследования, освоения и колонизации Луны.

К таким задачам можно отнести: манипулирование объектами, перевозку крупногабаритных грузов по поверхности планеты, обеспечение строительно-монтажных работ, проведение научных исследований, добычу полезных ископаемых и прочее [1].

Существуют два основных подхода к формированию парка робототехнических объектов:

1. малое число многофункциональных, сложных в изготовлении и обслуживании роботов, каждый из которых выполняет широкий спектр задач;
2. большое число разнотипных, простых в изготовлении и эксплуатации роботов, каждый из которых выполняет ограниченный класс задач.

Преимуществом второго подхода является простота в изготовлении роботов и отдельных функциональных модулей, а также, как следствие, более высокая надёжность системы в целом, что в условиях космических исследований является критическим показателем.

Одним из наиболее распространённых методов реализации данного подхода является агрегатно-модульный принцип построения робототехнических объектов [2].

Основной целью работы является изучение возможности создания алгоритма автоматического построения оптимальной конфигурации робота из набора унифицированных узлов для реализации конкретной задачи. Предполагается, что такие унифицированные модули обладают едиными механическими и программными интерфейсами. Основными задачами работы являются:

1. разработка математической модели агрегатно-модульного робота;
2. разработка математической модели задачи, поставленной перед роботом;
3. разработка метода автоматического построения конфигурации робота, обладающего наименьшей избыточностью характеристик по отношению к поставленной перед ним



задачей;

4. проверка корректности предложенного подхода на примере конкретной задачи.

В рамках первого этапа работы была предложена математическая модель агрегатно-модульного робота [3], описывающая сборку робота в виде графовой сети, узлами которой являются унифицированные модули. Данная модель позволяет учитывать влияние всех модулей, присоединённых к родительскому модулю, на характеристики этого модуля, а также достаточно легко рассчитать часть характеристик всей сборки в целом, однако она не позволяет учесть синергетические характеристики, возникающих при совместной работе однотипных модулей. Также в части работы была предложена математическая модель целевой функции робота, которая представляет собой классическую задачу оптимизации. Были проведены исследования алгоритмической сложности данной задачи и приведены математические выкладки, показывающие, что данная задача относится к классу NP-полных задач.

В рамках второго этапа работы был разработан метод синтеза модели агрегатно-модульного робота. При решении задачи комплексного синтеза структуры и алгоритмов управления агрегатно-модульного робота возникает ряд проблем:

1. при отсутствии алгоритмов управления невозможно в автоматическом режиме оценить эффективность разработанной конструкции робота;
2. при отсутствии функциональной модели робота невозможно синтезировать алгоритмы управления в связи с отсутствием объекта управления;
3. очень большое пространство поиска решений не позволяет перебрать все возможные решения.

Таким образом, синтез модели робота и алгоритмов её управления является не тривиальной задачей и требует глубокой проработки и анализа подходов к её решению.

В рамках данной работы задача была решена, основываясь на следующих принципах:

1. конструкция и алгоритмы управления роботом должны синтезироваться и оцениваться комплексно. При этом процесс синтеза алгоритма управления роботом должен производиться в рамках конкретного задания, поставленного перед роботом;
2. полученное решение должно решать поставленную задачу, но не обязано быть лучшим из всех возможных. Это связано с тем, что невозможно за приемлемое время перебрать все возможные решения в поисках наилучшего в связи с практически неограниченным пространством поиска.

Поиск решений задачи синтеза функциональной модели и алгоритма управления агрегатно-модульного робота предлагается осуществлять по схеме, приведённой на рис. 1.

Формирование программы управления агрегатно-модульного робота, модель которого может включать различные типы унифицированных узлов предполагает построение целесообразной в рамках поставленной задачи последовательности элементарных действий, доступных узлам, входящих в состав данной модели, обеспечивающей успешное выполнение роботом поставленной задачи.

Таким образом, рассматриваемая задача автоматического синтеза алгоритма управления агрегатно-модульным роботом сводится к организации автоматического поиска комбинации элементарных действий, допустимых для данной модели агрегатно-модульного робота, обеспечивающих решение поставленной перед роботом задачи.

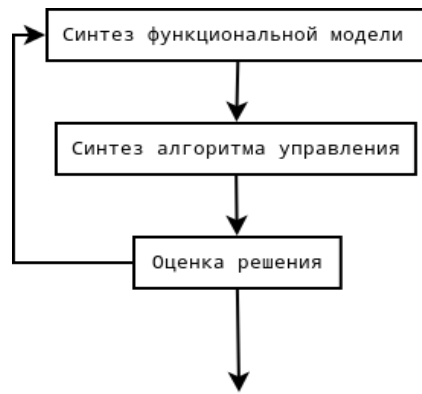


Рис. 1. Схема комплексного поиска решений задачи синтеза функциональной модели и алгоритмов управления агрегатно-модульного робота

Для реализации поиска возможного алгоритма решения предлагается использовать модифицированные генетические алгоритмы с хромосомами переменной длины [4]. Для улучшения сходимости генетических алгоритмов был предложен механизм использования схем при синтезе хромосом [5]. В качестве схемы для хромосомы переменной длины было предложено использовать регулярные выражения, поражающие в общем случае цепочки бесконечной длины с заданной структурой, что позволило значительно ускорить поиск оптимального алгоритма управления.

Последним этапом данной работы является детализация предложенных алгоритмов и методов решения задачи синтеза модели агрегатно-модульного робота на примере задачи перевозки грузов. В данной части предложен переборный алгоритм, позволяющий построить все возможные корректные сборки робота, для их последующего использования при построении алгоритма управления.

Предложены операции скрещивания, мутации, инициализации, использующие механизм регулярных выражений в качестве схем, для генетического алгоритма. Функция оценивания качества функционирования сборки робота была построена с использованием методов имитационного моделирования, т.к. единственным способом надёжной оценки полученного решения является проведение серии модельных экспериментов, которая должна дать количественную оценку пригодности полученного решения задачи синтеза модели агрегатно-модульного робота, для решения конкретной поставленной перед роботом задачи.

В заключительном этапе работы представлены практические результаты решения задачи синтеза модели агрегатно-модульного робота, синтезируемого для задачи перевозки грузов, а также приведены зависимости числа возможных алгоритмов управления от суммарных затрат энергии необходимых для их реализации, при различных параметрах генетического алгоритма, показывающие, что число алгоритмов, имеющих наименьшее значение суммарных затрат энергии, составляет в среднем 80% от общего числа сгенерированных алгоритмов, что позволяет говорить о корректности предложенного подхода к построению модели агрегатно-модульного робота.

#### ЛИТЕРАТУРА:

1. Луна - шаг к технологиям освоения Солнечной системы / Под научной редакцией В.П. Легостаева и В.А. Лопоты. - М.: РКК 'Энергия'. 2011. - 584 с. - Тираж 2000 экз. - ISBN 978-5-91820-046-9.
2. Промышленные роботы агрегатно-модульного типа/ Е. И. Воробьев, Ю. Г. Козырев, В. И. Царенко; Под общ. ред. Е. П. Попова. —М.: Машиностроение, 1988.— 240 с.: ил. — (Автоматические манипуляторы и робототехнические системы).ISBN 5-217-00166-6
3. Калугин Н.В., Мулюха В.А. Разработка методов представления функциональной модели агрегатно-модульных роботов // Неделя науки СПбГПУ Материалы научно-практической

конференции с международным участием – 2013. – С. 303 - 306.

4. Гладков Л.А., Курейчик В.В., Курейчик В.М. Генетические алгоритмы: Учебное пособие / Под ред. В.М. Курейчика. — Ростов-на-Дону: ООО «Ростиздат», 2004 — 320 с.

5. Рутковская Д., Пилиньский М., Рутковский Л. Нейронные сети, генетические алгоритмы и нечеткие системы. — М.: Горячая линия — Телеком, 2004. — 385 с.

УДК 004.725, 004.418

М.П. Шарагин, С.Г. Попов

Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого

## РАЗРАБОТКА АЛГОРИТМОВ УПРАВЛЕНИЯ ДАННЫМИ О БЕСПРОВОДНЫХ ЛОКАЛЬНЫХ СЕТЯХ ТЕЛЕМАТИЧЕСКОЙ КАРТЫ

При движении транспортного средства возникает проблема непрерывности доступа к информационным ресурсам, находящимся вне автомобиля [1, 2, 3]. Проблема связана с локальностью данных о доступных беспроводных сетях в текущей точке его траектории. Решением проблемы является расширение области видимости доступных беспроводных сетей для водителей и пассажиров транспортного средства с путём предоставления данных о сетях на всей траектории движения [7]. Непрерывность получения актуальных данных о беспроводных сетях региона обеспечивает телематическая карта [4] – группа слоев геоинформационной системы, содержащая данные о типе, названии и уровне сигнала беспроводных сетей географического региона. В частности, на ней отображаются сети беспроводных технологий: Wi-Fi, LTE, 3G, 4G, DSRC [5]. Для корректного функционирования карты каждое транспортное средство непрерывно собирает данные о беспроводных сетях и передает их в центр обработки данных, где они актуализируются и передаются по запросу транспортного средства. Реализация технологии телематической карты обеспечивает планирование использования телематических ресурсов водителем и пассажирами в процессе движения транспортного средства. В статье рассмотрен вариант реализации телематической карты с применением географической регулярной сетки переменного шага для хранения данных о телематических ресурсах.

Задачей исследования является разработка алгоритмов генерации регулярных сеток с заданным шагом и актуализации данных о беспроводных сетях в четырехсвязной области.

Пусть задан географический регион, определенный своей широтой и долготой от верхнего правого угла до нижнего левого. Для создания модели географического региона на телематической карте, генерируется регулярная прямоугольная сетка с шагом 5, 10, 15, 20, 25 и 30 метров. Для схемы базы данных, приведенной в работе [5], реализованы алгоритмы генерации регулярных сеток с заданным шагом и актуализации данных о беспроводной сети в четырехсвязной области. Прототипом устройства для сбора данных являлся мультипротокольный узел из состава стенда облачного сервиса [6].

Реализация алгоритмов осуществлена на языке общего назначения PHP версии 5.3.10. Для хранения данных регулярной сетки использована реляционная система управления базами данных MySQL версии 5.5.40. Для каждого шага написан отдельный скрипт, содержащий реализации двух алгоритмов

Разработанные и реализованные алгоритмы генерации регулярных сеток с заданным шагом и актуализации данных о беспроводной сети в четырехсвязной области протестированы на компьютере с процессором 2.4 GHz Intel Core i5 и объёмом оперативной памяти 8 ГБ. Исполнение кода осуществлялось на виртуальной машине, с операционной системой Ubuntu 12.04 LTS (i386). Число испытаний -  $10^5$ . Шаг сетки: 5,10,15,20,25,30

метров. Операции заполнения выполнялись в один поток операционной системы. Частота поступления запросов – 2-4 Гц.

В результате проведенной серии экспериментов получены данные о статистике выполнения операции актуализации данных на сетке разного шага, приведенных в таблице.

Из табл. 1 видно, что число anomalно долгих запросов на актуализацию данных не превышает трети процента и связано с запуском новых копий сервера базы данных. Минимальное время запроса одинаково для всех шагов сетки, что связано с обновлением первых записей в индексе таблиц телематической карты. Актуализированные данные телематической карты хранятся в таблице базы данных, число записей в которой квадратично зависит от шага сетки. Объем таблицы базы данных остаётся постоянным, так как данные сетки поместились в одну страницу таблицы.

Табл. 1. Статистика выполнения операций актуализации для сеток разного шага

Параметр	Шаг сетки, м					
	5	10	15	20	25	30
Минимальное, $\times 10^{-3}$ с	1,586	1,422	1,344	1,339	1,294	1,285
Максимальное, с	0,053	0,054	0,055	0,060	0,059	0,905
Мат. ожидание, $\times 10^{-3}$ с	4,806	4,082	3,632	3,450	3,343	3,562
Дисперсия, $\times 10^{-6}$	8,803	7,507	6,126	5,703	5,594	16,164
Полное число точек, шт.	$10^5$					
Число точек в диапазоне графиков, шт.	99688	99783	99816	99825	99823	99703
Число записей в таблице БД, шт.	2652	676	306	169	121	81
Объем файла таблицы, байт	8800					
Общее время актуализации данных, с.	480	408	363	344	334	356

Распределение времени выполнения операции актуализации данных на сетках разного шага приведено на рис. 1.

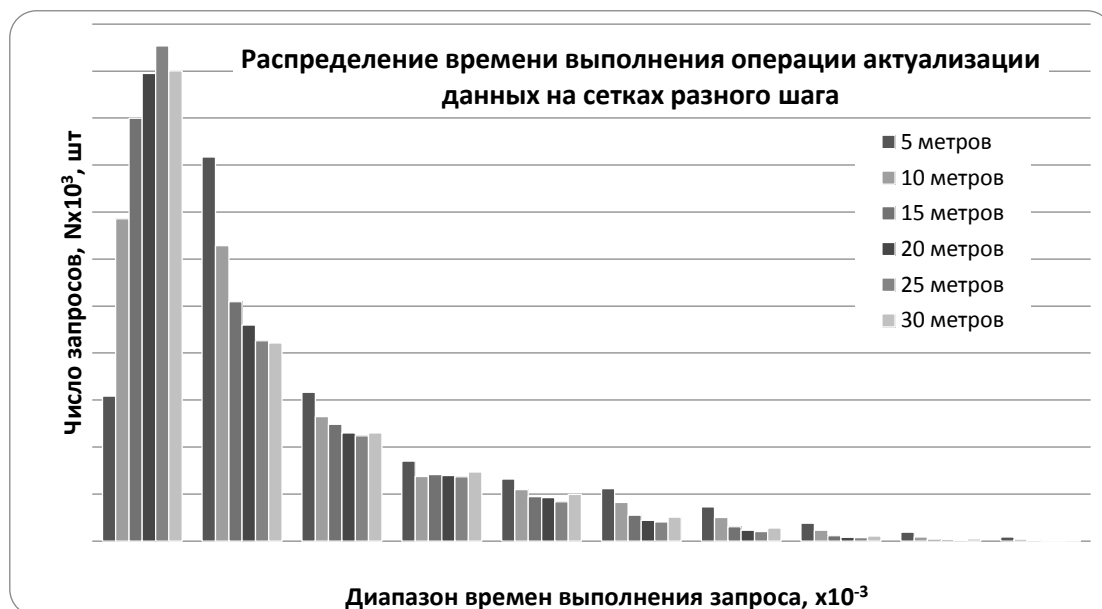


Рис. 1. Распределение времени выполнения операции актуализации данных на сетках разного шага

Из рис. 1 видно, что распределение времени выполнения запросов происходит по гамма-распределению, причём максимальное число операций при всех шагах сетки, кроме сетки с шагом в 5 метров приходится на диапазон времен 0,00-2,50 мс. Максимум числа значений в диапазоне 2,50-4,00 мс для сетки с шагом 5 метров связан с увеличением времени поиска нужного диапазона по причине большего числа точек в таблице карты.

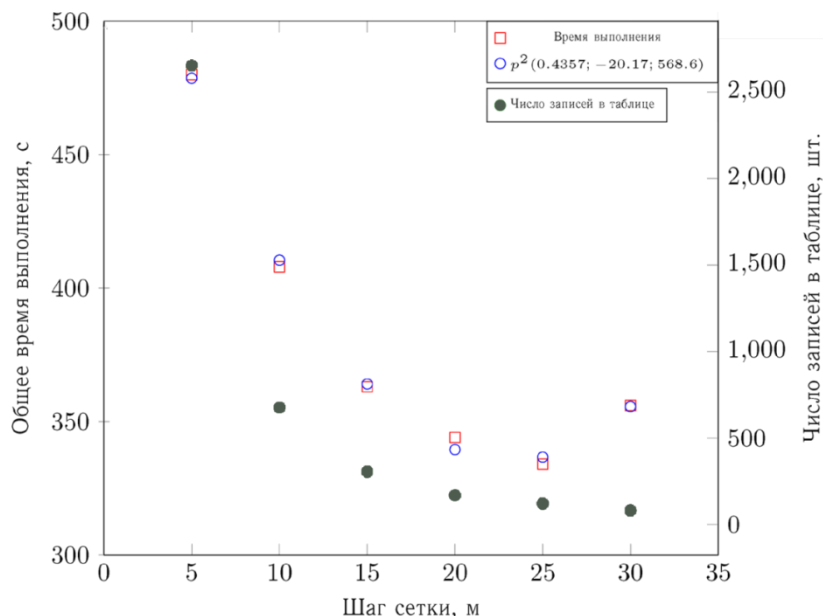


Рис. 2. Зависимость общего времени выполнения операции актуализации данных от числа записей в таблице

На рис. 2 приведены зависимости общего времени выполнения операции актуализации данных и числа записей в таблице от шага сетки. Исследования показали, что время выполнения алгоритма актуализации данных квадратично зависит от числа записей в таблице карты.

Проведенные исследования подтвердили применимость технологии обновления данных телематической карты для одного потока данных обновления карты с частотой от 2 до 4 Гц. Дальнейшим направлением исследования может стать проверка выполнения запросов от большего числа потоков данных операционной системы для нескольких технологий одновременно.

#### ЛИТЕРАТУРА:

1. Zheng, K.; Zheng, Q.; Chatzimisios, P.; Xiang, W.; Zhou, Y., "Heterogeneous Vehicular Networking: A Survey on Architecture, Challenges and Solutions," in Communications Surveys & Tutorials, IEEE, vol. PP, no. 99, pp. 1-1
2. M. Gerla, E.-K. Lee, G. Pau, and U. Lee, "Internet of vehicles: From intelligent grid to autonomous cars and vehicular clouds," in Internet of Things (WF-IoT), 2014 IEEE World Forum on, March 2014, pp. 241–246.
3. Zaborovskiy V., Lukashin A., Popov S., Vostrov A. Adage mobile services for ITS infrastructure // ITS Telecommunications (ITST), 2013 13th International Conference on. 2013. " - Nov. P. 127-132.
4. Popov, Serge; Kurochkin, Mikhail; Kurochkin, Leonid; Glazunov, Vadim, "The implementing of the Internet of things concepts for the continuous provision of informational services for vehicle drivers and passengers," in Telematics and Future Generation Networks (TAFGEN), 2015 1st International Conference on, vol., no., pp. 1-5, 26-28 May 2015

5. Glazunov, V.; Kurochkin, L.; Popov, S.; Chuvatov, M., "Prototype of the telematics map cloud service," in Open Innovations Association (FRUCT), 2015 17TH Conference of , vol., no., pp.50-55, 20-24 April 2015.
6. Glazunov V., Kurochkin L., Kurochkin M., Popov S. Instrumental Environment of Multi-protocol Cloud-oriented Vehicular Mesh Network. // ICINCO (1) / Ed. by J.-L. Ferrier, O. Y. Gusikhin, K. Madani, J. Z. Sasiadek. SciTePress, 2013. P. 568-574.
7. P. Jaworski, T. Edwards, J. Moore, and K. Burnham, "Cloud computing concept for intelligent transportation systems," in Intelligent Transportation Systems (ITSC), 2011 14th International IEEE Conference on, Oct 2011, pp. 391–936.

УДК 004.415.538, 004.738.5.057.4, 004.056.52, 004.056.53

В.В. Галимский, Ю.Е. Подгурский  
Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого

## МЕТОДИКА НАГРУЗОЧНОГО ТЕСТИРОВАНИЯ МЕЖСЕТЕВЫХ ЭКРАНОВ

Наравне со стремительным развитием информационных технологий, все большее значение принимает вопрос производительности сетевых устройств. Любое сетевое устройство подвергается нагрузке проходящим через него трафиком, а также внутренними параметрами. Поэтому, важной задачей является разработка надежного ПО, адекватно реагирующего на большую нагрузку. Основным способом определения степени надежности ПО относительно производительности является нагрузочное тестирование.

Межсетевой экран является достаточно сложным и многофункциональным программно-аппаратным комплексом. Поэтому, как и любое другое сложное оборудование, межсетевой экран нуждается в тестировании. На сегодняшний день направление нагрузочного тестирования еще плохо проработано. Каждая организация проводит тестирование по своим методикам. По этой причине достаточно сложно и, иногда, невозможно сравнить устройства различных организаций. Требуется разрабатывать универсальные методики к тестированию ПО для упрощения классификации и сравнения устройств.

Разработка универсальной методики нагрузочного тестирования является очень сложной задачей [1]. Её сложность объясняется большим количеством разнообразных критериев нагрузки и параметров оценки.

Целью данной статьи является описание методики нагрузочного тестирования межсетевых экранов проходящим через него трафиком на примере тестирования МЭ линейки ССПТ. Приведенная методика позволяет упростить проектирование и реализацию тестов для нагрузочного тестирования межсетевых экранов.

В частности, предлагается решение следующей задачи: разработка методики нагрузочного тестирования межсетевых экранов проходящим через него трафиком на основе существующих и разработанных методов, которая будет включать:

- Определение критериев нагрузки и показателей оценки тестируемого устройства;
- Разработка стенда тестирования.

На основе анализа различных существующих подходов к нагрузочному тестированию [2, 3] определены виды тестирования и методы построения нагрузки, которые могут быть использованы в нагрузочном тестировании межсетевых экранов.

Используемые виды тестирования:

- Тестирование нагрузкой;
- Тестирование производительности;
- Тестирование используемых ресурсов;
- Стресс тестирование;

- Тестирование на больших объемах данных;
- Тестирование длительной нагрузкой.

Используемые методы построения нагрузки:

- Пользовательский;
- Компонентный.

Опираясь на используемые методы, выделены критерии нагрузки и показатели оценки объекта тестирования. С помощью различных комбинаций критериев нагрузки и показателей оценки разработаны тесты.

Критерии нагрузки позволяют задать нагрузку на тестируемое устройство для определения производительности. Для удобства использования критерии разделены на внешние и внутренние.

Критерии нагрузки тестируемого устройства:

- Внешние (параметры проходящего через МЭ трафика);
  - Количество пакетов в секунду;
  - Параметры пакета.
- Внутренние (параметры настройки функционала МЭ) [4];
  - Механизм фильтрации;
  - Зеркалирование трафика;
  - Механизм защиты от flood атак;
  - Механизм регистрации пакетов, сессий;
  - Изменение конфигурации МЭ;
  - NAT.

Показатели оценки позволяют определить производительность межсетевого экрана. Они также разделены на внешние показатели и внутренние.

Показатели оценки тестируемого устройства:

- Внешние (характеристики проходящего через МЭ трафика);
  - Пропускная способность устройства относительно "идеальной" пропускной способности, которая замеряется при подключении стенда напрямую;
  - Доля потерянных пакетов;
  - Число новых сеансов в секунду;
  - Зависимость пропускной способности от числа сеансов.
- Внутренние (характеристики аппаратной части МЭ);
  - Загруженность ЦП;
  - Объем используемой оперативной памяти;
  - Размер занятого буфера очереди пакетов.

Также сформирована общая методика нагрузочного тестирования межсетевых экранов проходящим через него трафиком:

1. Определение применимости обозначенных внешних критериев нагрузки межсетевого экрана.
2. Добавление дополнительных внешних критериев нагрузки МЭ при надобности.
3. Формирование внутренних критериев нагрузки МЭ, опираясь на функциональные возможности. При этом в список внутренних критериев нагрузки добавляется только тот функционал, который достаточно сильно может влиять на производительность устройства в целом. Достаточность влияния того или иного функционала определяет тестировщик.
4. Определение применимости обозначенных параметров оценки.
5. Добавление дополнительных параметров оценки работоспособности МЭ при необходимости.

6. Определение применимости стенда нагрузочного тестирования. Добавление изменений в стенд при необходимости.
7. Разработка набора тестов с помощью комбинации критериев нагрузки и показателей оценки. Набор тестов, приведенный в приложении 3, можно использовать как образец.

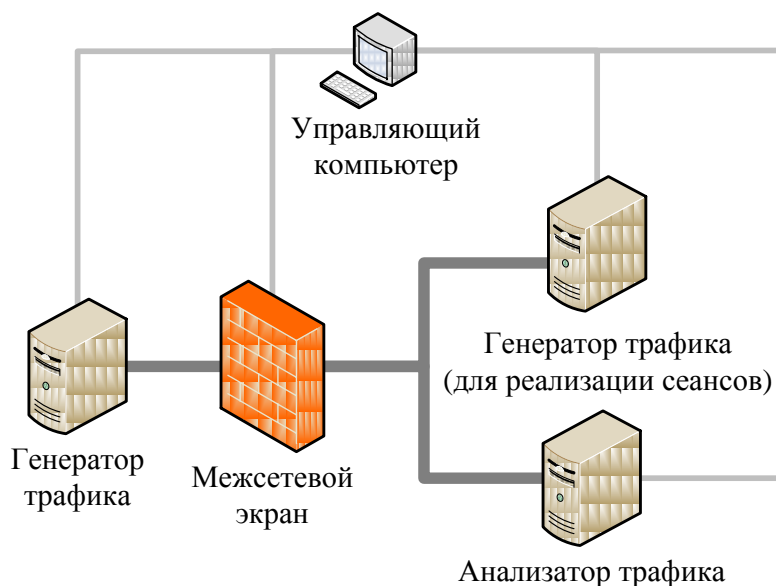


Рис. 1. Универсальная логическая схема стенда нагрузочного тестирования

#### ЛИТЕРАТУРА:

1. Галимский В.В. Разработка методики нагрузочного тестирования межсетевых экранов: Выпускная работа бакалавра / Галимский В.В., 2014. – 57 с.
2. Про Тестинг – Тестирование ПО // Режим доступа: <http://www.protesting.ru/> (дата обращения: 12.11.2014 г.)
3. Основы тестирования программного обеспечения // Режим доступа: <http://www.intuit.ru/studies/courses/48/48/info> (дата обращения: 12.11.2014 г.)
4. Межсетевой экран ССПТ-2 версии 1.3: Руководство администратора: Изд-во НПО РТК, 2013.- 237 с.
5. НПО РТК. Официальный сайт // Режим доступа: <http://www.npo-rtc.ru/> (дата обращения: 12.11.2014 г.)

УДК 004.932.4, 519.725

М.В. Попов, М.А. Рябинин, А.В. Востров  
Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого

### ПРОБЛЕМА ПОМЕХОУСТОЙЧИВОСТИ ШТРИХКОДА ПРИ РАСПОЗНАВАНИИ ЭКЗАМЕНАЦИОННОЙ ВЕДОМОСТИ

Цель: Распознать отсканированную экзаменационную ведомость для последующей передачи полученных данных в АСУ “Студент”.

АСУ “Студент” – автоматизированная система управления учебным процессом, которая является интегрированной и состоит из 5 подсистем: приемная комиссия, учебный отдел, деканат, дополнительные образовательные услуги, рабочие учебные планы. Каждая из



подсистем предназначена для поддержки одного из этапов образовательного процесса, при этом работа осуществляется в едином информационном пространстве.

Экзаменационная ведомость является одним из атрибутов образовательного процесса и включает в себя данные о дисциплине и экзаменаторе, форме отчетности, учебном семестре, списке студентов и результатах освоения дисциплины. Ведомость формируется на основе учебного плана и большинство ее параметров определены: дисциплина, форма отчетности, список студентов, учебный семестр. В условиях задачи требуется однозначно идентифицировать ведомость, а также распознать с помощью цифровых алгоритмов обработки изображений результаты освоения дисциплины студентами. [1]

Для идентификации ведомости предлагается кодировать параметры, которые определены заранее, с помощью штрихкода. Существуют стандартизированные алгоритмы кодирования с высокой степенью избыточности, а также помехоустойчивые алгоритмы декодирования (например, алгоритм Рида-Соломона [3]). Одним из важных критериев помехоустойчивости является избыточность кодирования. Мерой количественной оценки избыточности является коэффициент избыточности:

$$K_{и} = \frac{H(X)_{max} - H(X)}{H(x)_{max}},$$

где  $H(X)$  – энтропия реального сообщения;  $H(X)_{max}$  – энтропия соответствующего ему оптимального сообщения. [2]

Для проведения эксперимента были выбраны и протестированы на устойчивость к помехам 7 основных типов штрихкодов.

При выборе типа штрихкода учитывались несколько факторов:

1. Размер конечного изображения штрихкода (т.к. ведомость имеет ограниченный размер).
2. Возможность напечатать данный тип штрихкода на стандартном принтере.
3. Устойчивость к помехам.

Исходя из вышеуказанных условий выбраны следующие типы штрихкодов:

1. Матричные (Data matrix, Aztec, QR, PDF417). [4]
2. Линейные (ITF (2 of 5), ITF14, Code 39). [5]

Матричные способы кодирования обладают преимуществом перед линейными благодаря расширенному алфавиту символов, а также выбору кодировок при формировании.

Для тестирования штрихкодов на помехоустойчивость были выбраны следующие виды искажений:

1. Потеря качества изображения (физические повреждения поверхности печати).
2. Загрязнения (пятна, случайные штрихи).
3. Множественные сгибы.
4. Линейные искажения (при сканировании или распечатывании).

При проведении эксперимента использовался ряд тестов, приведенных на рис. 1–4. Результаты эксперимента приведены в табл. 1.

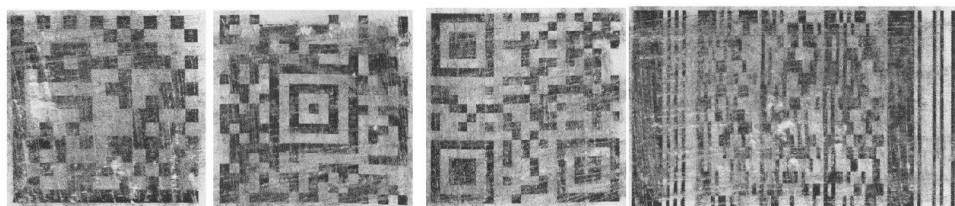


Рис. 1. Тестирование матричных штрихкодов на потерю качества

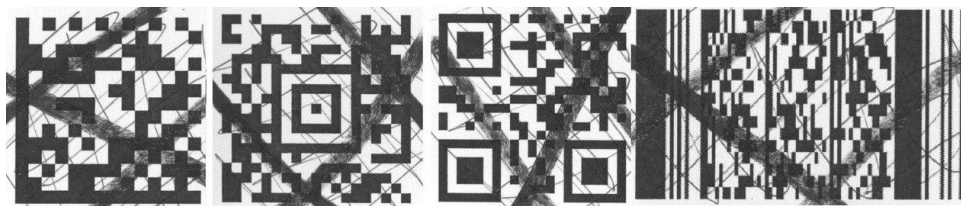


Рис. 2. Тестирование матричных штрихкодов на загрязнения

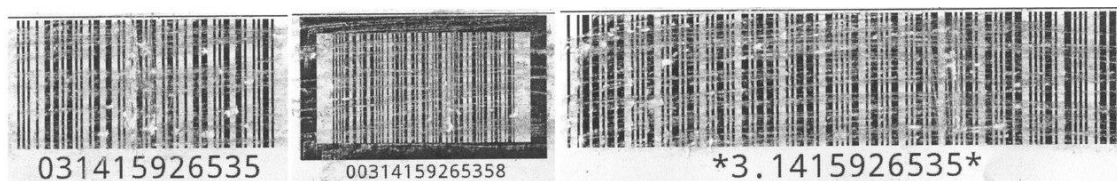


Рис. 3. Тестирование линейных штрихкодов на потерю качества

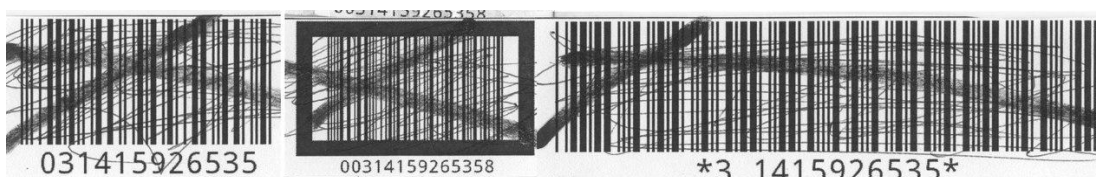


Рис. 4. Тестирование линейных штрихкодов на загрязнения

Табл. 1. Результаты проведения эксперимента

Тип штрихкода	Потеря качества	Загрязнения	Множественные сгибы	Линейные искажения
Data matrix	-	-	+	+
Aztec	+	+	+	+
QR	-	-	+	+
PDF417	+	+	+	+
ITF (2 of 5)	-	-	+	-
ITF14	+	-	+	+
Code 39	-	-	+	-

Как видно из табл. 1 все тесты успешно прошли только два вида матричных штрихкода: Aztec и PDF417. Учитывая требования, заявленные при выборе штрихкодов, Aztec код выглядит предпочтительней PDF417, так как имеет меньший размер изображения при том же объеме данных, а также позволяет настроить избыточность при его формировании, что позволяет установить дополнительную корреляцию между конечным размером и точностью распознавания.

По результатам эксперимента и с учетом ограничений к выбору штрихкода для однозначной идентификации экзаменационной ведомости наиболее оптимальным решением представляется выбор штрихкода Aztec.

#### ЛИТЕРАТУРА:

1. Р. Гонсалес, Р. Вудс «Цифровая обработка изображений» М.: Техносфера, 2005.
2. И.В Кузьмин, В.А Кедрус «Основы теории информации и кодирования» К.: Вища шк. Головное изд-во, 1986.
3. [Электронный ресурс]. URL: <http://dic.academic.ru/dic.nsf/ruwiki/973466> (дата обращения 20.10.2015).
4. [Электронный ресурс]. URL: <http://iterator.com.ua/ru/useful-info/96-2dbarcodes> (дата обращения 20.10.2015).
5. [Электронный ресурс]. URL: <http://www.barcoding.ru/resources/statii-obzory/tipy-odnomernykh-shtrikhkodov.html> (дата обращения 20.10.2015).

## ПРИМЕНЕНИЕ ЭКСТРЕМАЛЬНЫХ ОСТОВНЫХ ЛЕСОВ

*Введение.* В данной работе рассматривается возможность применения математической теории графов для решения некоторого класса задач физики. А именно, рассматриваются задачи, в которых возникает необходимость получения спектра матриц  $v$  с положительными элементами вида  $v_{ij} = \varphi_{ij} - \varphi_{ii}$ , где  $\varphi$  – симметричная матрица. Диагональ матрицы такого вида всегда будет состоять только из нулевых элементов, поэтому её можно трактовать как матрицу смежности некоторого взвешенного ориентированного графа специального вида. В силу того, что граф образован матрицей, элементы которой имеют смысл высот потенциальных барьеров в рассматриваемых задачах, такой вид графов было решено называть «потенциальными» [1]. Таким образом, спектр матрицы можно искать не стандартными методами для матриц произвольного вида, а анализируя потенциальный граф, соответствующий этой матрице.

В работе [1] был подробно описан класс задач, в которых могут возникать матрицы, представляющие потенциальные графы. Если рассматривается процесс малой диффузии или диффузии в сильных полях (вводится малый параметр  $\varepsilon$ ), диффузионный оператор, суженный на подпространство младших собственных функций, представляет собой матрицу  $L$  размера  $N \times N$ . Её внедиагональные элементы  $v_{ij}$  имеют смысл потенциальных барьеров, который надо преодолеть, чтобы из области притяжения  $i$  динамической системы перейти в область притяжения  $j$ . Матрица  $L$  оказывается взвешенной матрицей Кирхгофа. Она представляется в виде  $L = D - A$ , где матрица  $A$  – матрица смежности некоторого потенциального графа  $G$ , а матрица  $D$  – взвешенная диагональная матрица полустепеней исхода его вершин. Для матрицы  $L$  справедливо [2][3] представление характеристического полинома в терминах древовидной структуры графа:

$$\det(\lambda I - L) = (-1)^N \sum_{k=0}^N \left\{ (-\lambda)^k \left[ \sum_{F \in \mathcal{F}^k} \pi_F \right] \right\}$$

Здесь  $\pi_F$  – продуктивность графа  $F$ , то есть произведение всех его весов, а  $\mathcal{F}^k$  – множество остовных заходящих лесов графа  $G$ , состоящих из  $k$  деревьев. Так как сумма элементов любой строки  $L$  равна нулю, суммирование ведётся от 1. Асимптотически (по параметру  $\varepsilon$ ), коэффициенты при  $(-\lambda)^k$  определяются «экстремальными» остовными лесами, состоящими из  $k$  деревьев. *Экстремальным остовным лесом* из  $k$  деревьев назовём лес, имеющий минимальную сумму весов  $k$  деревьев, в него входящих. У исходного графа рассматриваются подграфы, включающие

В той же работе [1], был приведён и обоснован новый алгоритм поиска минимального остовного дерева для потенциального графа (то есть экстремального леса, состоящего из одного дерева), и, таким образом, найден коэффициент в полиноме при  $\lambda$ . Алгоритм в потенциальном случае значительно проще и эффективней, чем известный алгоритм Чу Йонджина и Лю Цзенхонга[4] поиска минимального остовного дерева произвольного графа. Однако последний, помимо своей сложности, принципиально не позволяет находить экстремальные леса графа, которые определили бы все коэффициенты при  $(-\lambda)^k$ .

Новый алгоритм обоснован теоремой, описанной в [1], в которой доказано, что минимальное остовное дерево ориентированного графа  $G$  может быть получено как минимальное остовное дерево неориентированного графа  $G'$  путём фиксирования корня дерева в вершине  $k$  с минимальным весом  $\varphi_{kk}$ , где  $v_{ij} = \varphi_{ij} - \varphi_{ii}$  – положительная матрица весов графа  $G$ , а  $\varphi_{ij}$  – симметричная матрица весов неориентированного графа  $G'$ .

*Цели и задачи работы.* Цель данной работы – исследовать алгоритм поиска минимального остовного дерева потенциального графа, полученный в [1], на применимость для поиска всех экстремальных лесов, реализовать его, а также визуализировать его работу. Визуализация, в конечном счёте, должна отражать некоторые свойства потенциальных графов.

*Результаты.* Возможность последовательного поиска экстремальных лесов (начиная с экстремального леса, состоящего из  $N - 1$  дерева, и заканчивая минимальным остовным деревом) связана с тем, что при построении следующего леса, его структура не меняется. Если две вершины графа были связаны в экстремальном лесе, состоящем из  $k$  деревьев, они останутся связанными и на следующем шаге алгоритма по числу деревьев, то есть в лесе, состоящем из  $k - 1$  дерева: может измениться лишь направление дуги, связывающей вершины. Визуализация отразит это свойство.

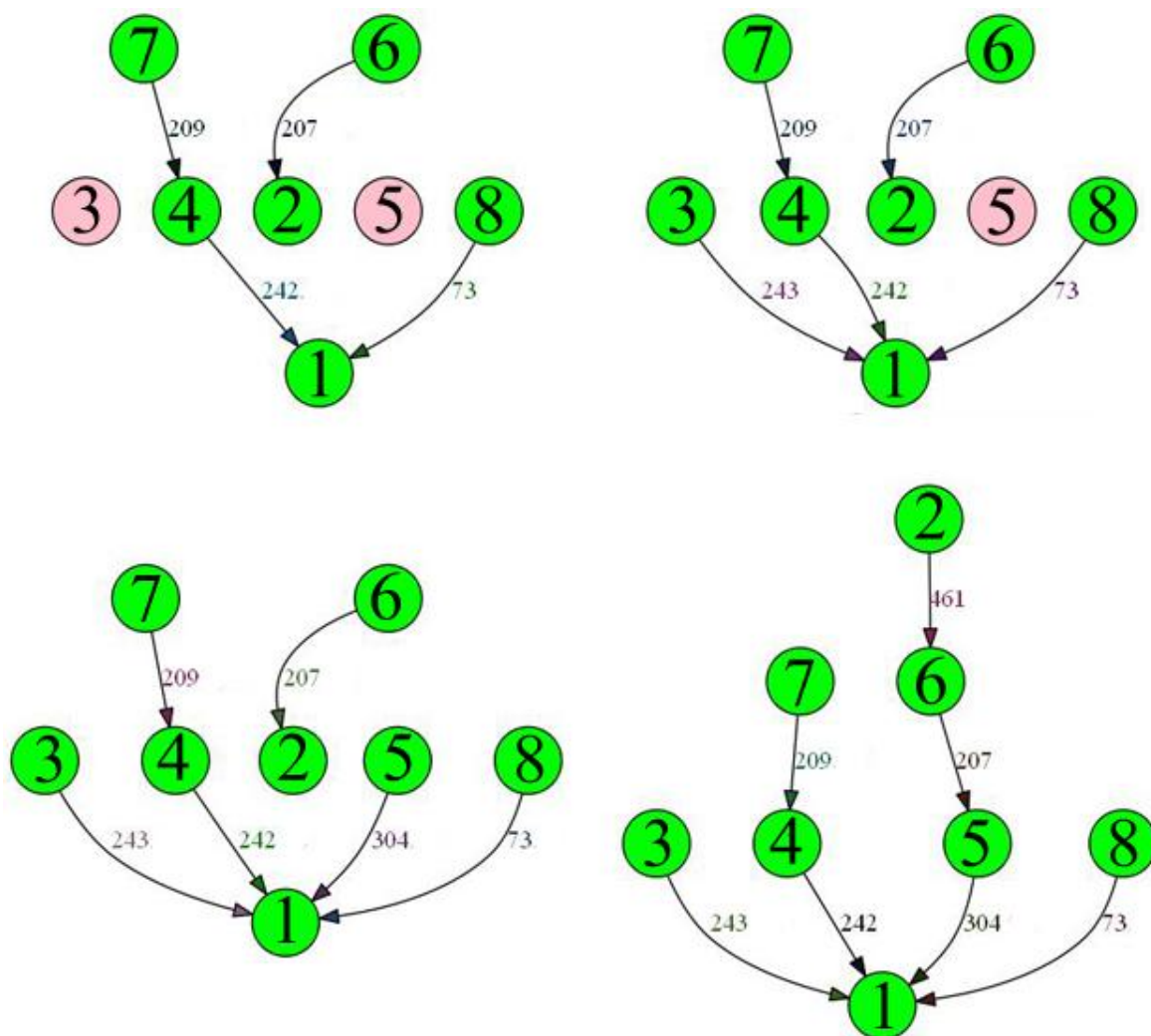


Рис. 1. Результат визуализации – экстремальные леса

Алгоритм был реализован на языке C++, была написана программа, позволяющая работать с потенциальными графами, искать их экстремальные леса и визуализировать результат. Визуализация реализуется при помощи генерации в программе кода DOT, который далее подаётся пакету *graphviz* для представления результатов в виде изображений.

$$\begin{pmatrix} 0 & 1014 & 378 & 486 & 508 & 1068 & 1011 & 302 \\ 924 & 0 & 1091 & 1237 & 1128 & 461 & 971 & 841 \\ 243 & 956 & 0 & 782 & 921 & 767 & 1090 & 1081 \\ 242 & 993 & 538 & 0 & 842 & 1132 & 465 & 486 \\ 304 & 924 & 717 & 638 & 0 & 461 & 712 & 627 \\ 814 & 207 & 513 & 878 & 207 & 0 & 488 & 1187 \\ 755 & 715 & 834 & 209 & 456 & 232 & 0 & 856 \\ 73 & 612 & 852 & 257 & 398 & 958 & 627 & 0 \end{pmatrix}$$

Рис. 2. Матрица весов потенциального орграфа

На рис. 1 показан результат работы алгоритма и визуализации для некоторого потенциального ориентированного графа (матрица его весов показана на рис. 2). Изображены последние четыре шага алгоритма – экстремальные леса из четырёх, трёх, двух и одного деревьев. На данном примере хорошо подтверждается тот факт, что могут меняться только направления дуг при последовательном построении минимального остовного дерева (переход от экстремального леса из двух деревьев к минимальному остовному дереву графа), общая же структура не меняется.

Таким образом, на выходе алгоритма имеем информацию обо всех экстремальных лесах, а значит, например, для задачи с малой диффузией может быть полностью построен характеристический полином, так как становятся известными все деревья и их продуктивности. По характеристическому полиному легко определить все собственные значения искомой матрицы.

*Выводы.* Была реализована поставленная цель – реализация и визуализация поиска экстремальных лесов произвольного потенциального ориентированного графа. Этот алгоритм можно рассматривать как новый метод спектрального анализа матриц потенциального вида, основанный на их свойствах, а значит, теперь его можно применять для эффективного решения любых задач, в которых возникают такие объекты. Данная работа также показывает, насколько может быть широка область применимости математической теории графов.

Необходимо заметить, что данный алгоритм является *новым* в теории графов, так как термин «экстремальные леса» для ориентированного случая, который значительно сложнее задачи с неориентированными графами, ранее нигде не вводился, и потребовался только при рассмотрении особых матриц (из класса задач, рассматриваемых в работе) в терминах древовидной структуры графа.

#### ЛИТЕРАТУРА:

1. Буслов В.А., Богданов М.С., Худобахшов В.А. О минимальном остовном дереве для орграфов с потенциальными весами // Вестник СПбГУ, сер. 10, вып. 3. 2008. Р. 42–46.
2. Fiedler M., Sedlacek J. O w-basich orientirovanych grafu // ~Casopis P'est. Mat. 1958. Vol. 83. P. 214–225.
3. Буслов В.А. О коэффициентах характеристического многочлена лапласиана взвешенного ориентированного графа и теореме о всех минорах // Записки научных семинаров ПОМИ, Том 427, 2014 г.. Р. 5-21

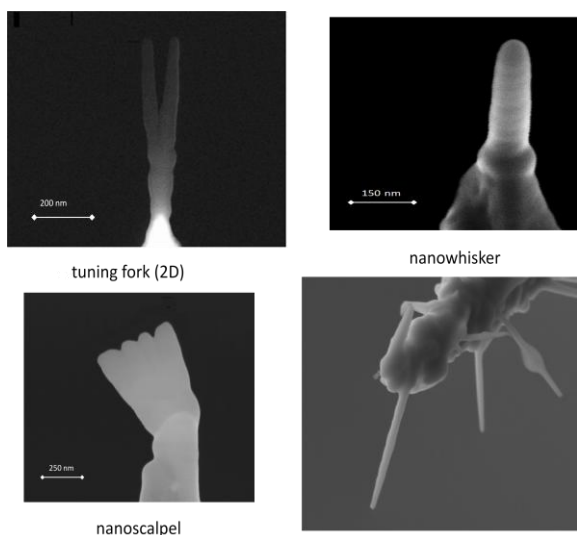
УДК 534-16

В.В. Ванюшкина  
Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого

## ИССЛЕДОВАНИЕ КОЛЕБАНИЙ УГЛЕРОДНЫХ НАНОСТРУКТУР

### *Введение*

В последнее время большой толчок к развитию получило направление исследования наноструктур [1]. Это связано с расширившейся областью их применения. В результате развития технологий, человечество получило доступ к объектам. Настолько малым, что они невидимы человеческому глазу, однако видны микроскопу. Позже люди научились создавать данные объекты и нашли им применения. Сейчас наноконструкции (в том числе нанотрубки и углеродные вискеры) используются в медицине, микробиологии, электронике и механике.



Основополагающим объектом этих конструкций является углеродный вискер. Он представляет собой одиночную балку, созданную с помощью напыления углерода на конец вольфрамовой или кремниевой иглы. Далее на этот вискер можно напылять другие, создавая более сложные конструкции.

На рис. 1 показаны примеры наноструктур.

Данная работа посвящена их исследованию, в особенности исследованию их колебаний. С помощью полученных результатов можно будет найти новые области применения наноструктур, а так же улучшить качество экспериментов и повысить точность измерений (например на нановесах).

Рис. 1. Примеры углеродных конструкций

### *Цели и задачи работы*

Главной целью данного проекта является определение параметров используемого материала, исследование колебаний наноструктур и открытие новых возможностей применения.

Данная работа состоит из нескольких задач.

1. Исследование вынужденных (продольных и поперечных) и собственных колебаний одиночных углеродных вискеров.
2. Аналитические решения для некоторых конструкций, и их сравнение результатами, полученными при моделировании.
3. Создание простых механических аналогий для некоторых конструкций и программирование их поведения на Java-Script.
4. Моделирование нановесов. Аналитический расчет для нановесов.
5. Моделирование более сложных конструкций, таких как скальпель, вилка, камертон.

### Описание работы

В ходе исследования были смоделированы все, описанные выше структуры, а так же получены аналитические решения для некоторых из них.

В качестве модели продольных колебаний двойного вискера (это вискер из конца которого наращен более тонкий вискер, причем так, чтобы их главная ось была общей) была взята простейшая механическая система, состоящая из двух шариков, скрепленных пружинками (рис. 2).

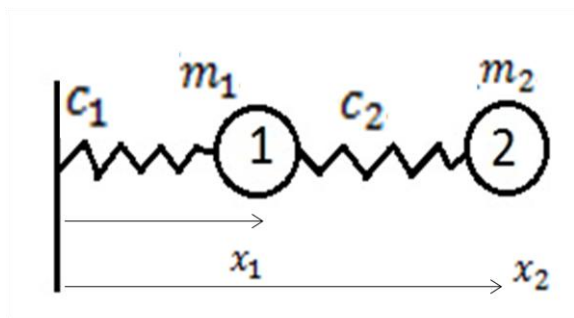


Рис. 2. Механическая модель продольных колебаний двойного вискера

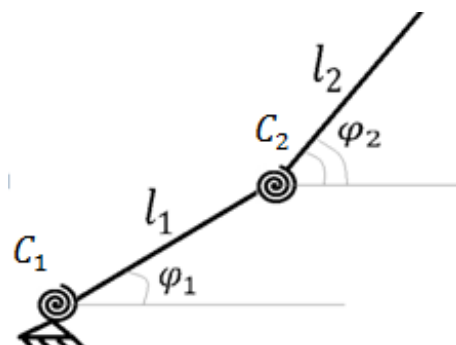


Рис. 3. Модель двойного маятника

Данная система была решена аналитически и смоделирована с помощью языка программирования Java Script, что позволило выставить данный проект в интернет в качестве интерактивной модели.

Далее была исследована механическая система, представляющая из себя двойной маятник с пружинами, чтобы смоделировать поперечные колебания двойного вискера (рис. 3).

Это так же было выполнено аналитически и на Java Script, и теперь доступно в виде интерактивной модели.

Так же была исследована модель нановесов (рис. 4).

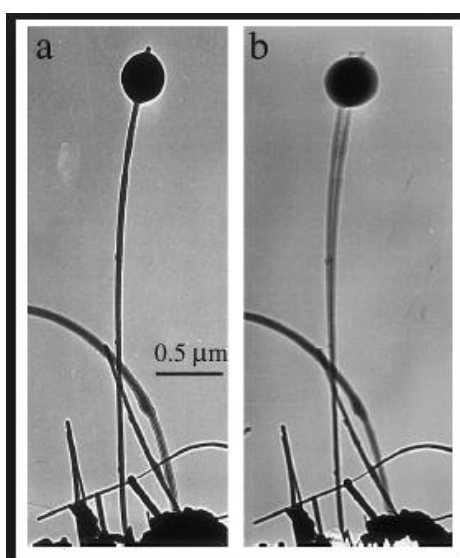


Рис. 4. Модель нановесов

Принцип их работы заключается в том, что на углеродный вискер падает некая точечная масса, и вискер начинает колебаться [5]. Можно померить частоту колебаний вискера, а зная частоту несложно найти массу. Данная модель была полностью исследована, как аналитически [2], [3], так и смоделирована на ANSYS. В результате была получена формула для нахождения массы через частоту, которая подтвердилась экспериментально.

Были найдены собственные частоты и формы колебаний для сложных конструкций, таких как скальпель, вилка и камертон [4]. Что позволяет при дальнейшем использовании этих структур избежать попадания в резонанс и разрушения материала, а это в свою очередь увеличит точность и эффективность экспериментов, проводимых с этими структурами.

Результаты этих моделирований представлены ниже на рис. 5 - 8.

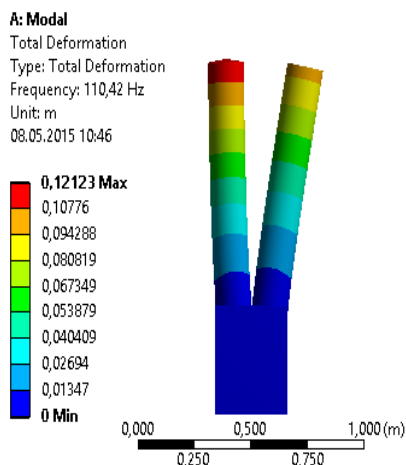


Рис. 5. Вторая собственная форма

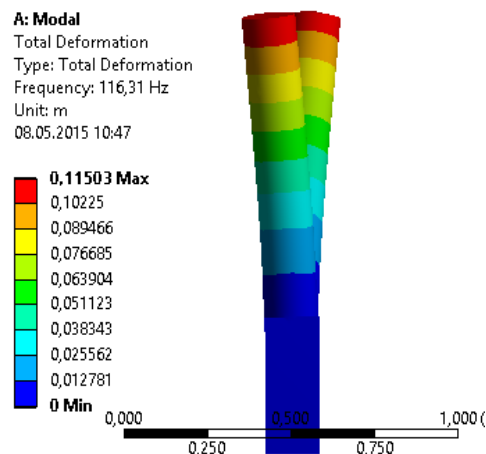


Рис. 6. Первая собственная форма

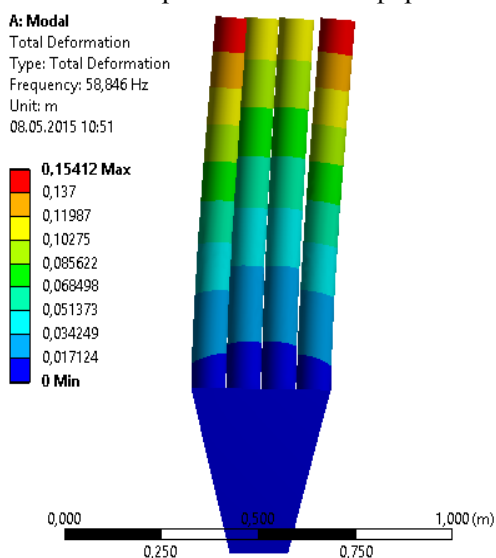


Рис. 7. Вторая собственная форма

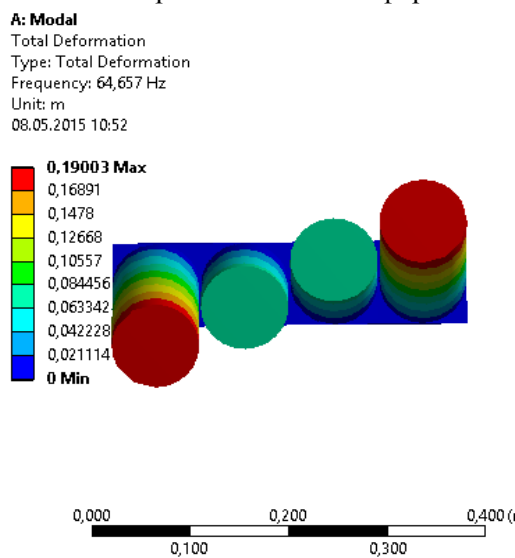


Рис. 8. Первая собственная форма

#### ЛИТЕРАТУРА:

1. Z.L. Wang, P. Poncharal, W.A. de Heer. Measuring physical and mechanical properties of individual carbon nanotubes by in situ TEM. J. Phys. Chem. Solids, 2000, 61(7), pp.1025-1030
2. Dynamik der Baukonstruktionen, Christian Petersen 2000 1st edition, 722
3. И.М. Бабаков. Теория колебаний. 1968, 3
4. Я.С. Гринберг, Ю.А. Пашкин, Е.В. Ильичев. Наномеханические резонаторы. 2012.
5. Mai Duc Dai, Chang-Wan Kim, Kilho Eom. Nonlinear vibration of graphene resonators and their applications in sensitive mass detection. Nanoscale Research Letters 2012 7:499

УДК 53.044

П.М. Григорьева, Е.Н. Вильчевская  
Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого

### ВЛИЯНИЕ ДИФфуЗИИ ПОД НАПРЯЖЕНИЕМ НА КИНЕТИКУ ФРОНТА ХИМИЧЕСКОЙ РЕАКЦИИ В ЗАДАЧАХ МЕХАНОХИМИИ

*Введение.* Проблема термического окисления кремния сегодня является одной из важнейших проблем в химии в связи с широким использованием и значимостью технологии



кремниевых интегральных схем. Так как объем молекулы диоксида кремния примерно в 2.3 раза больше атома кремния, окисление кремния сопровождается большим увеличением объема. Это значит, что эта проблема принадлежит области механохимии, которая рассматривает химические реакции под действием механических нагрузок.

В этой работе будет изучен простейший аналитический пример, в котором фронт химической реакции распространяется вдоль одной оси и остается плоским внутри всего трехмерного тела. Кроме того, базируясь на результатах предшествовавшей работы [1], была решена задача диффузии и были приведены результаты с учетом коэффициента диффузии, зависящего от механических нагрузок.

*Литературный обзор и необходимые формулы.* Теория кинетики химических реакций основана на концепции химических потенциалов и химического сродства. В классической теории химический потенциал является скаляром. Однако для исследований фазовых переходов в деформируемых твердых материалах необходимо представить химический потенциал в тензорном виде. Это также значит, что химическое сродство тоже станет тензором.

В связи с проблемой, описанной в предыдущем разделе, мы рассмотрим химическую реакцию между твердой и газовой компонентами:



где  $B_-$  и  $B_+$  являются деформируемыми твердыми компонентами, а  $B_*$  – газовой компонентой. Считаем, что реакция сконцентрирована около фронта реакции,  $\Gamma$ , который разделяет области, занятые  $B_-$  и  $B_+$ . Реакция протекает и продолжается вследствие диффузии газовой компоненты  $B_*$  сквозь образующуюся компоненту  $B_+$  (см. Рис.1). Мы считаем, что область, занятая  $B_*$ , является проницаемой для газовой компоненты, она может свободно диффузировать через твердую компоненту и не вызывать в ней никаких деформаций. Для простоты мы не решаем задачу теплопроводности, и считаем температуру  $T$  параметром модели.

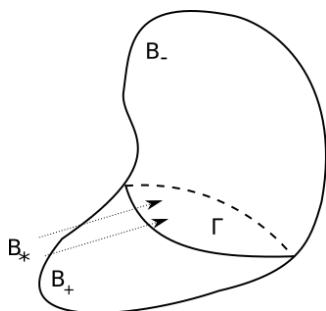


Рис. 1.

Было показано, что нормальная компонента тензора химического сродства может быть вычислена согласно следующей формуле (см.[1]):

$$A_{nn} = \frac{n_- M_-}{\rho_-} \left( \gamma(T) + \frac{1}{2} \sigma_- : \epsilon_- - \frac{1}{2} \sigma_+ : (\epsilon_+ - \epsilon_{ch}) + \sigma_+ : (\epsilon_+ - \epsilon_-) \right) + n_* RT \frac{c(\Gamma)}{c_*}$$

Здесь  $\sigma_- = C_- : \epsilon_-$ ,  $\sigma_+ = C_+ : (\epsilon_+ - \epsilon_{ch})$  – тензоры напряжений Коши,  $C_{\pm}$  – линейно-упругие тензоры жесткости компонент,  $\epsilon_{\pm}$  – тензоры деформаций,  $c(\Gamma)$  – концентрация газовой компоненты на фронте реакции,  $c_*$  – растворимость газовой компоненты в материале  $B_+$ . Деформации химических превращений мы относим к  $\epsilon_{ch} = \epsilon_{ch} \mathbf{I}$ .  $\gamma(T)$  – энергетический параметр, в случае заданной температуры  $T$  является параметром системы (см. подробнее [2], [3]).

Реакция продвигается только если  $A_{nn} > 0$ , поэтому из уравнения  $A_{nn} = 0$  можно найти равновесную концентрацию  $c_{eq}$ , при которой в системе устанавливается химическое равновесие. Преобразуя известную формулу для скорости химического фронта, получаем выражение для скорости:

$$V = \frac{n_- M_-}{\rho_-} k_* n_* (c(\Gamma) - c_{eq})$$

Чтобы найти концентрацию на фронте химической реакции, необходимо решить уравнения диффузии, которые представляют собой дифференциальное уравнение, полученное из закона Фика:  $\nabla \cdot (D \nabla c) = 0$  и граничных условий:

$D\nabla \cdot c|_{\Omega} + \alpha(c_* - c|_{\Omega}) = 0, D\nabla \cdot c|_{\Gamma} + n_*^2 k_*(c(\Gamma) - c_{eq}) = 0$ , где  $\alpha$  – скорость растворения газовой компоненты в  $B_+$ ,  $\Omega$  – внешняя граница тела. Коэффициент диффузии  $D$  может рассматриваться как постоянная величина и как величина, зависящая от напряжений:

$$D = D_0 e^{-pV_d/kT}, \text{ где } p = -\frac{1}{3}(\sigma_{11}^+ + \sigma_{22}^+ + \sigma_{33}^+).$$

Таким образом, задача сводится к отысканию концентрации на фронте химической реакции  $c(\Gamma)$  и равновесной концентрации  $c_{eq}$  и последующей подстановке их в формулу для скорости продвижения фронта химической реакции.

*Случай трехмерного прямоугольного тела.* Станем рассматривать прямоугольный трехмерный блок, в котором реакция распространяется вдоль одной из осей. Механическая нагрузка может быть задана двумя способами: заданными перемещениями на боковых поверхностях тела или заданными напряжениями (см. рис.2 и рис.3).

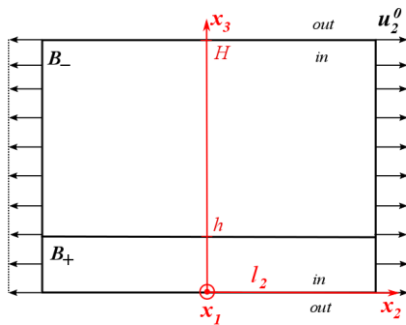


Рис. 2.

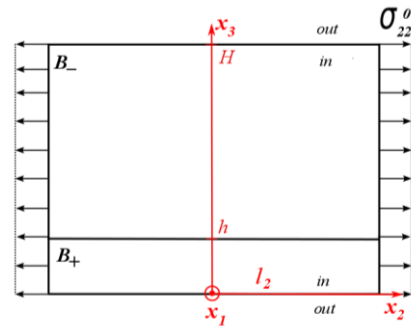


Рис. 3.

Эти два случая различны только тем, что в случае заданных напряжений деформации, а, следовательно, и коэффициент диффузии зависит от координаты  $x_3$ . В случае заданных перемещений скорость фронта химической реакции можно найти по следующей формуле:

$$V = \frac{n_- M_- n_* k_* D \alpha c_* \left(1 - \frac{c_{eq}}{c_*}\right)}{\rho_- (D \alpha + n_*^2 k_* \alpha h - D n_*^2 k_*)}$$

В случае заданных напряжений, в виду предположения, что деформации зависят от координаты линейно ( $\epsilon_{ii} = A_i x_3 + B_i, i=1,2$ ), скорость фронта будет выглядеть следующим образом:

$$V = \frac{n_- M_-}{\rho_-} \frac{D_0 e^{\tilde{B}} \tilde{A} \alpha c_* k_* n_* \left(1 - \frac{c_{eq}}{c_*}\right)}{D_0 e^{\tilde{B}} \tilde{A} (\alpha - n_*^2 k_*) + \alpha n_*^2 k_* (1 - e^{-\tilde{A}h})}$$

где  $\tilde{A} = A_1 + A_2; \tilde{B} = B_1 + B_2 - 2\epsilon_{ch}$

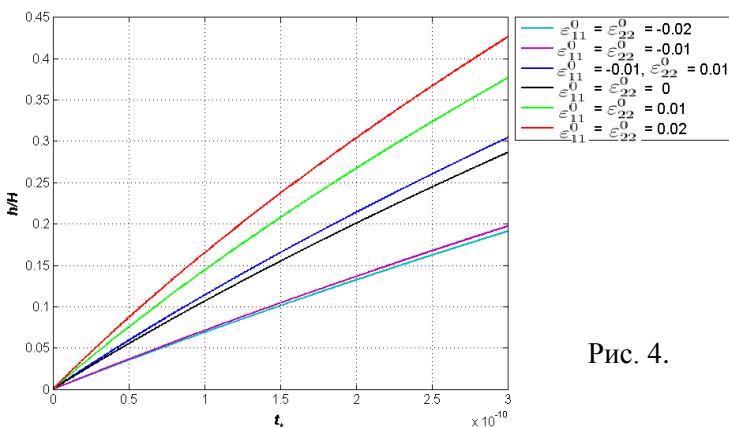


Рис. 4.

Для построения графиков были взяты параметры, отвечающие реальным параметрам кремния, кислорода и оксида кремния (см. [4], [5]).

Кинетика фронта химической реакции в случае постоянного коэффициента диффузии выглядит следующим образом (см. рис. 4). Можно заметить, что в случае деформаций, работающих на растяжения, реакция ускоряется, в случае деформаций, работающих на

сжатие, реакция замедляется. Если же заданы деформации противоположных знаков, то тогда кривая роста слоя оксида близка к кривой роста в отсутствие внешних механических нагрузок. В случае заданных напряжений кривые ведут себя так же.

Для того, чтобы учесть влияние коэффициента диффузии, зависящего от механических нагрузок, построим кривые роста разницы со временем (рис. 5), где разница вычисляется следующим образом:

$$\zeta = h/H. \text{ Difference} = \frac{\zeta(D) - \zeta(D_0)}{\zeta(D_0)}. \text{ Здесь } D_0 - \text{ постоянный коэффициент диффузии.}$$

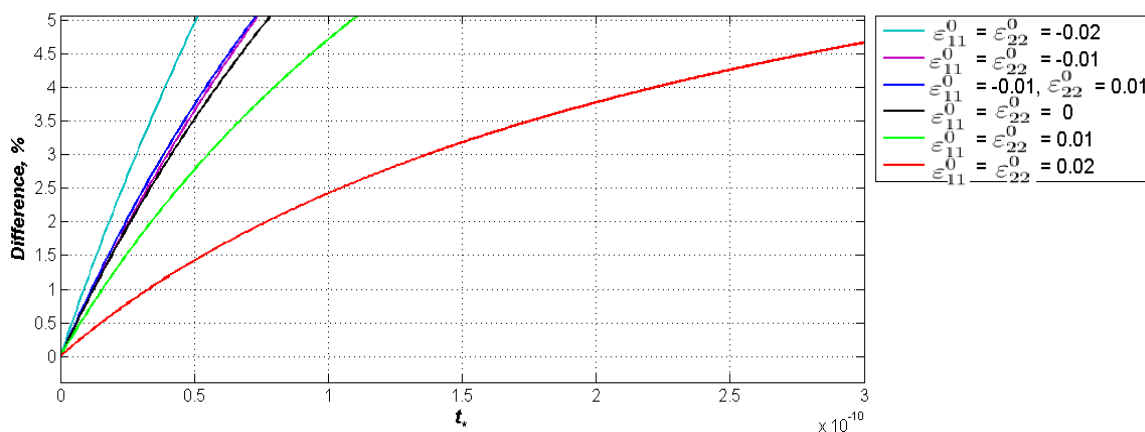


Рис. 5.

В случае заданных деформаций разница между двумя моделями диффузии не велика, хоть и растет со временем. Тем не менее, можно пренебречь переменным коэффициентом диффузии. В случае заданных напряжений разница между двумя моделями велика и растет со временем. Разницей между кривыми пренебречь нельзя – разница между кривыми, полученными с учетом переменного коэффициента диффузии, и кривыми, полученными с постоянным коэффициентом диффузии, велика и со временем достигает 10% и больше.

*Выводы.* Аналитически была решена задача распространения химического фронта в трехмерном линейно-упругом теле. Исследована кинетика фронта в зависимости от параметров модели и приложенных внешних нагрузок. Рассмотрены две модели диффузии, с постоянным коэффициентом диффузии и зависящим от внешних нагрузок. Были получены внешние нагрузки, при которых необходимо учитывать зависимость диффузии от механических нагрузок.

#### ЛИТЕРАТУРА:

1. Freidin, A.B., Vilchevskaya, E. N., Korolev, I. K.: Stress-assist chemical reactions front propagation in deformable solids. International Journal of Engineering Science, 83 (2014), pp. 57-75.
2. Prigogine, I., Defay, R.: Chemical thermodynamics. London: Longmans, Green, 1954.
3. Prigogine, I., Thermodynamic theory of structure, stability and fluctuation. Wiley Interscience, London, 1971, pg. 50..
4. Ming-Tzer Lin.: Stress effects and oxidant diffusion in the planar oxidation. (1999). Thesis and Dissertation, Lehigh University. Paper 594
5. B.E.Deal, A.S. Grove: General relationship for the thermal oxidation of Silicon. Journal of Applied Physics, vol.36(12), December 1965.

РАЗРАБОТКА МОДЕЛИ ТЕЧЕНИЯ ЖИДКОСТИ ПРИ БУРЕНИИ СКВАЖИН С  
УПРАВЛЯЕМЫМ ДАВЛЕНИЕМ

Наиболее перспективной технологией для бурения интервалов с узким окном бурения, разницей градиентов порового/пластового давлений и давления гидроразрыва является бурение с управляемым давлением, либо MPD (Managed Pressure Drilling). Данный подход позволяет снизить риски при бурении, повысить его эффективность, а также бурить ранее не подлежащие разбурированию скважины. Среди основных преимуществ бурения под контролем давления можно назвать улучшение параметров процесса бурения за счет применения замкнутого контура, а также контроль основных параметров системы, таких как противодействие, плотность флюида, реологические свойства флюида, уровень флюида в затрубном пространстве, потери циркуляционного давления на трение в затрубном пространстве [1]. Анализ статей по тематике бурения с управляемым давлением показывает, что в большинстве случаев, исследования ведутся в крупных нефтесервисных компаниях, таких как Weatherford, Schlumberger, Halliburton. Основной акцент сосредоточен на программируемых логических контроллерах, а также пользовательских интерфейсах с удобным и безопасным управлением. Также существует ряд статей, которые дают более детальное описание метода MPD и описывают ряд преимуществ [2]. Однако, на ряду с рекламными статьями, данные работы не дают информации о существующих недостатках и проблемах метода. Большой интерес представляют статьи более узкой направленности, например, посвященные разработке сложных математических моделей течения бурового раствора в скважине. В работе [5] для описания динамики жидкости в затрубном пространстве предложено описывать течение жидкости системой уравнений в частных производных и использовать метод конечных объемов. Такой подход позволяет получить точное аналитическое значение для давлений в системе, и, как результат, разработать более чувствительный контроллер. Отдельная группа статей посвящена алгоритму управления клапаном, а также предложены и реализованы схемы получения, обработки информации, сценарии работы логического контроллера в зависимости от полученной информации, приведены результаты сходимости схем, варианты регуляторов для управления клапаном [4]. На основе анализа статей был сделан вывод об основных проблемах метода MPD. Во-первых, существует неопределенность состояний системы на некоторых участках, из-за этого становится невозможным измерить параметры системы и корректно воздействовать на нее. Во-вторых, не смотря на разработку сложных математических моделей, при помощи которых можно оценивать давление в забое скважины, реальная скорость получения данных о давлении в забое является очень низкой. В-третьих, серьезной проблемой MPD является нестабильность системы при появлении двухфазной среды (появление воздуха в затрубном пространстве). Одним из нерешенных вопросов MPD можно отметить высокую стоимость и большую площадь исследовательских и учебных стендов метода бурения с контролем давления [3]. Учитывая достоинства технологии MPD, а также существующие нерешенные задачи, несложно сделать вывод о высокой актуальности темы бурения с контролем давления.

Постановка задачи данной работы сводится к разработке математической модели, описывающей течение жидкости в замкнутом трубопроводе, а также разработка математического описания случаев притока, либо поглощения жидкости. В результате необходимо написать алгоритмы и создать программу контроля давления в системе. Для

решения задачи необходимо разработать установку, моделирующую процесс течения бурового раствора, а также обладающую следующими свойствами: компактность, мобильность, экономичность. Создание такого стенда делает возможным проведение безопасных недорогих исследований технологии MPD в лабораторных условиях. Преимуществом проекта является собственная математическая модель, а также модифицируемый стенд, что позволит расширять круг решаемых задач по мере необходимости. Более того, одной из отличительных черт стенда является моделирование райзера из прозрачного материала.

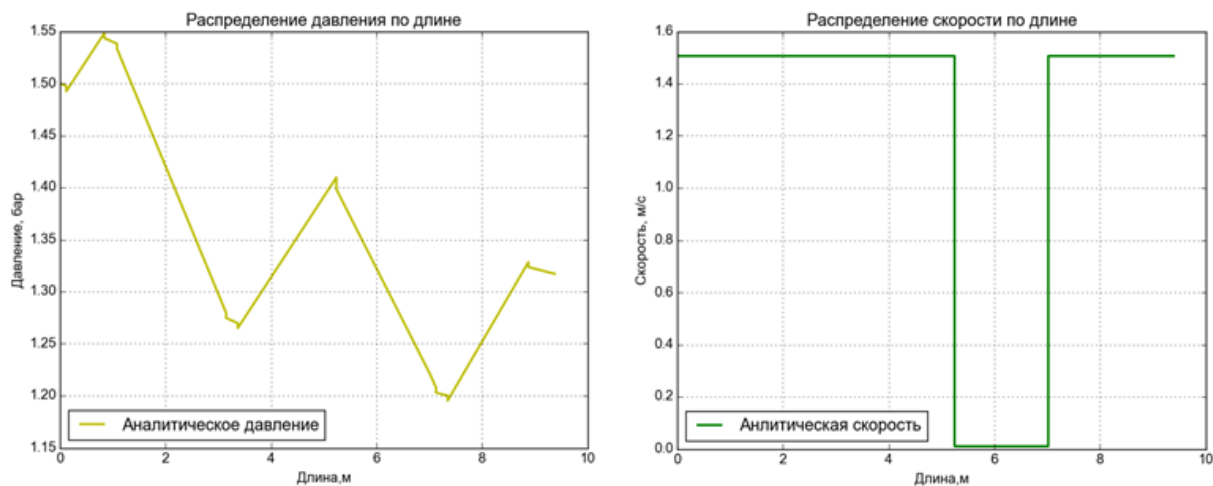


Рис. 1. Распределение давления и скорости по длине трубопровода

Вывод результатов описания течения жидкости в экспериментальном стенде при помощи математической модели в статическом случае представлен на рис. 1. Данные графики показывают изменения значений полного давления в местах перепада высоты, а также видны потери давления на сопротивлениях. Резкое изменение скорости происходит в момент резкого расширения трубы и смены направления течения. Также был проанализирован режим протекания жидкости.

В данной работе была проведена оценка времени корректировки давления (1). Необходимость во введении и оценке данного параметра заключается в необходимости отслеживать время реакции системы на изменение давлений и принятие решений. Если совокупное время получения информации с датчиков, работы алгоритма и задержки управляющих сигналов будет больше чем  $\Delta t$ , то программа будет работать некорректно и получить сходимость будет сложнее.

$$\Delta t < \frac{S_{riser}}{S_0} \frac{\sqrt{P_{забой}}}{g\sqrt{2\rho}} \quad (1)$$

Здесь  $S_{riser}$  – площадь сечения райзера [м<sup>2</sup>],  $S_0$  – площадь сечения отверстия поглощения [м<sup>2</sup>],  $g$  – ускорение свободного падения [м/с<sup>2</sup>],  $\rho$  – плотность жидкости [кг/м<sup>3</sup>],  $P_{забой}$  – давление в забое до появления поглощения [Па].

Важной составляющей данной работы была разработка программы управления давлением в забое на основе математической модели, уравнений для случаев изменения количества жидкости. На рис. 2 представлены графики, демонстрирующие экспериментальное моделирование изменения количества жидкости в системе и зависящее от них поведение входящих и выходящих в райзер потоков жидкости.

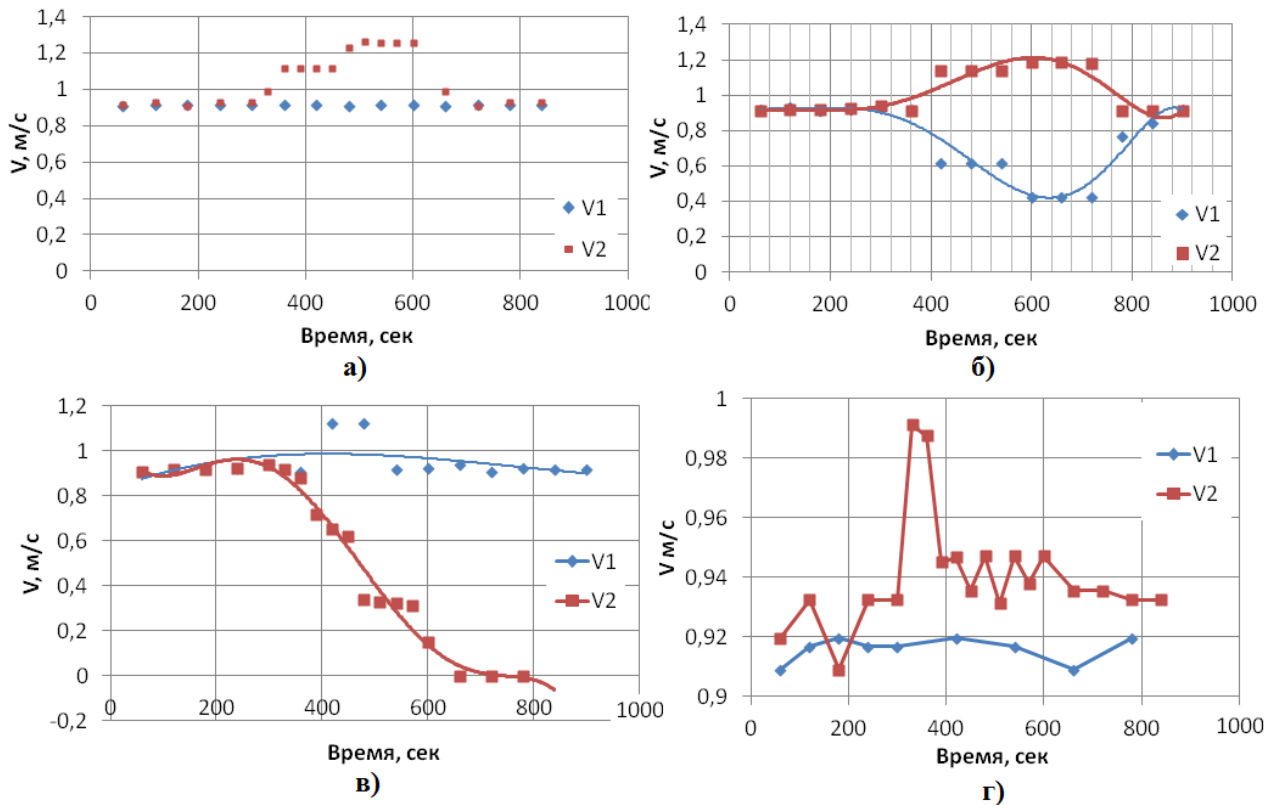


Рис. 2. Экспериментальное моделирование изменения количества жидкости в забое: а) приток, V1 – скорость входного потока, V2 – скорость выходного потока; б) поглощение, V1 – скорость выходного потока, V2 – скорость входного потока; в) компенсация изменения количества жидкости управляемым клапаном в случае притока, где V1 – скорость входного потока, V2 – скорость выходного потока.; г) компенсация изменения количества жидкости управляемым клапаном в случае поглощения, где V1 – скорость входного потока, V2 – скорость выходного потока

В результате исследований была разработана гидравлическая модель одномерного трубопровода для описания течения бурового раствора в скважине, а так же разработан настраиваемый экспериментально-демонстрационный стенд бурения с управляемым давлением. Более того, была построена KV-характеристика управляемого клапана для регулировки давления, найден коэффициент пропорциональности для контроля давления с использованием управляемого клапана. Получены уравнения для описания скоростей в случае изменения количества жидкости в системе и сделана оценка времени снятия показаний для точной корректировки давления. На заключительном этапе был реализован алгоритм и программа корректировки давления в случае изменения количества жидкости, получена устойчивость в случае притока.

#### ЛИТЕРАТУРА:

1. Elliot D., Montilva J., Francis P. Managed Pressure Drilling Erases the lines// Oilfield Review. 2011, pp. 14- 23.
2. McCaskill J., Kinder J., Goodwin B. Managing wellbore pressure while drilling // IADC Drilling Contractor. 2006. pp. 40-42.
3. Mæland M. Managed Pressure Drilling. 2013.
4. Eilerås J. Fault tolerant control for automated Managed Pressure Drilling. 2012.
5. Landet I. S. Modeling and control for Managed Pressure Drilling from floaters. 2011.

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ КОМПОЗИЦИОННЫХ МАТЕРИАЛОВ,  
ИЗГОТОВЛЕННЫХ НАМОТКОЙ

*Введение.* Композиционные материалы позволяют при снижении веса обеспечить достаточно высокие характеристики прочности, надежности в широком диапазоне интенсивностей нагружения. В общем случае, композиционные материалы представляют собой неоднородный сплошной материал, состоящий из двух или более компонентов, которые можно разделить на армирующие элементы (наполнитель), обеспечивающие нужные механические свойства материала, и на матрицу (связующее), обеспечивающую совместную работу армирующих элементов [1]. Данные материалы применяются во многих областях промышленности, например, авиастроении, металлургии, строительстве и т.д. [2, 3].

*Цель работы* – разработка математической модели деформирования и разрушения анизотропных материалов в условиях динамического нагружения, которое возникает при ударном воздействии на ответственные элементы конструкций. Для этого необходимо решить ряд задач. Необходимо экспериментальное и теоретическое исследования поведения композиционных материалов и развитие новых моделей поведения последних в различных условиях. В данной работе проводится численное моделирование деформирования и разрушения анизотропных композиционных материалов на основе разработанной в лаборатории физических основ прочности ИМСС УрО РАН статистической модели твердого деформируемого тела с мезоскопическими дефектами [4, 5]. Одной из задач при разработке математической модели является идентификация параметров модели, которая будет проводиться по данным квазистатических и динамических натурных испытаний (растяжение-сжатие стандартных плоских образцов, динамическое нагружение при воздействии ударника).

На первом этапе теоретических исследований была разработана математическая модель, описывающая деформационное поведение ортотропного композиционного материала. Она включает в себя уравнение (1) – линейный закон упругости  $\tilde{\sigma} = \tilde{\Pi} : (\tilde{\varepsilon} - \tilde{p})$ , в котором  $\tilde{p}$  – деформация, обусловленная поврежденностью (дефектами) материала; определяющее соотношение (2), связывающее тензор напряжений и тензор поврежденности,  $\tilde{\sigma} = \tilde{f}(\tilde{p})$ ; уравнение неразрывности (3) и уравнение движения (4). Таким образом, полная система уравнений, описывающая поведение композиционного материала с поврежденностью, имеет следующий вид:

$$\left\{ \begin{array}{l} \tilde{\sigma} = \tilde{\Pi} : (\tilde{\varepsilon} - \tilde{p}) \quad (1) \\ \tilde{\sigma} = \tilde{f}(\tilde{p}) \quad (2) \\ \frac{d\rho}{dt} + \rho \bar{\nabla} \cdot (\bar{v}) = 0 \quad (3) \\ \rho \frac{d\bar{v}}{dt} = \bar{\nabla} \cdot \tilde{\sigma} + \rho \bar{f} \quad (4) \end{array} \right.$$

Дифференциальная постановка дополняется начальными и граничными условиями для кинематических и силовых переменных.

Предполагается, что композиционный материал имеет ортотропную симметрию и оси ортотропии совпадают с лабораторной системой координат. Данное предположение

основано на способе изготовления композиционных материалов, исследуемых в работе. Эта гипотеза позволяет рассматривать тензор неупругих деформаций, отвечающий за поврежденность, в главных осях, анализируя при этом только три диагональные компоненты.

Данная постановка (1) - (4) допускает различные варианты зависимостей тензора поврежденности от напряжений за счет вариации тензорной функции  $\tilde{f}(\tilde{p})$ , отвечающей за реакцию материала и связанной с поврежденностью. В данной работе принимается

следующий вид функции  $f(\tilde{p}) = \left\{ \sigma_i^c \frac{p_i}{p_i^c} \frac{\psi(r)}{r} \right\}$ ,  $i=1,2,3$  где  $\sigma_i^c, p_i^c$  – критические напряжения и деформации, определяемые по диаграммам деформирования в каждом направлении, которые соответствуют максимальным достигаемым напряжениям;

$$r = \sqrt{\sum_{i=1}^3 \left( \frac{p_i}{p_i^c} \right)^2}$$

является аналогом

интенсивности, а функция  $\psi(r)$  имеет характерный вид полинома четвертого порядка, представленный на рис. 1.

Вид представленной зависимости может быть в дальнейшем уточнен с использованием экспериментальных зависимостей напряжения от неупругой деформации,

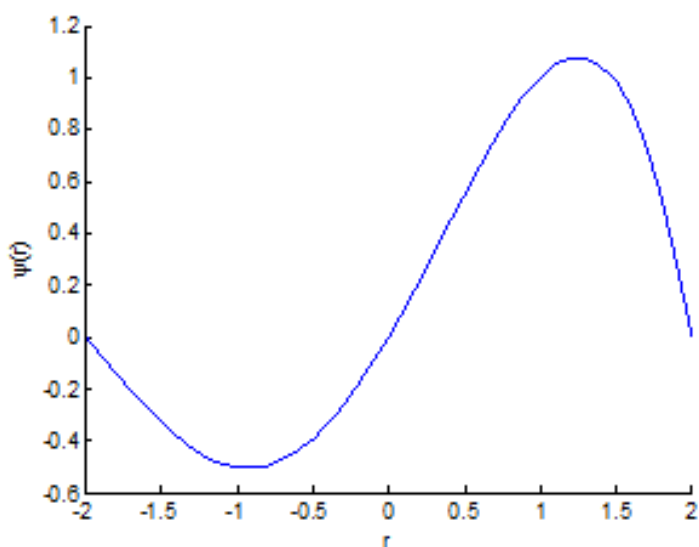


Рис. 1

обусловленной поврежденностью, в каждом из направлений ортотропии рассматриваемого материала.

Полученная система разрешающих уравнений может быть адаптирована к конечно-элементному комплексу прикладных программ Abaqus с использованием пользовательской функции VUMAT, написанной на языке FORTRAN, что позволяет конкретизировать свойства материала в рамках изложенной постановки.

Было проведено численное моделирование одноосного нагружения образца для линейной

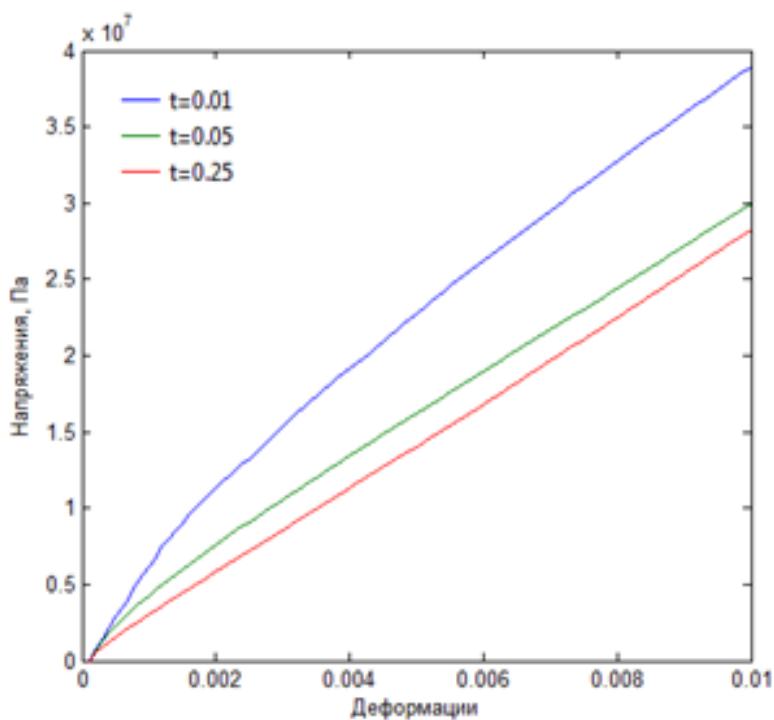


Рис. 2



зависимости  $\tilde{f}(\tilde{p})$ . При этом были получены поля распределений напряжений, перемещений и поврежденности, возникающих в материале. Кроме того, проводились расчеты, позволяющие оценить чувствительность определяющих соотношений к скорости нагружения. На рис.2 представлена зависимость напряжений от деформаций при одноосном нагружении образца для различной длительности деформирования (различных скоростей деформации). Как видно из графика, чем выше скорость нагружения, тем выше напряжения, возникающие в материале. Данный эффект объясняется тем, что при заданных параметрах материал имеет упруговязкие свойства.

*Результаты.* Была разработана математическая модель поведения композиционных материалов и адаптирована к конечно-элементному комплексу прикладных программ. Были проведены численные расчеты по динамическому нагружению композиционных материалов.

*Вывод.* Разработанная математическая модель позволяет проводить численное моделирование деформирования изделий, изготовленных из композиционных материалов, на основе оригинальных определяющих соотношений анизотропной (ортотропной) среды с учетом накопления поврежденности. Это позволяет сократить расходы на натурные эксперименты и учесть механизмы зарождения и накопления повреждений в материале.

Работа выполнена при поддержке СколТеха (проект MRA-319).

#### ЛИТЕРАТУРА:

1. Пестриков В. М., Морозов Е.М. Механика разрушения. Курс лекций. – СПб.: ЦОП Профессия, 2012. - 552 с
2. Кербер М.Л. и др. Полимерные композиционные материалы. Структура. Свойства. Технологии: учебное пособие СПб, Профессия, 2008. - 560 с.
3. Васильев В. В., Механика конструкций из композиционных материалов. — М.: Машиностроение, 1988. — 272 с.
4. Наймарк О.Б., Баяндин Ю.В., Леонтьев В.А., Пантелеев И.А., Плехов О.А. Структурно-скейлинговые переходы и некоторые термодинамические и кинетические эффекты в материалах в объемном субмикро – (нано-) кристаллическом состоянии // Физическая мезомеханика. 2009. Т. 12. № 4.
5. Наймарк О.Б. Коллективные свойства ансамблей дефектов и некоторые нелинейные проблемы пластичности и разрушения // Физическая мезомеханика. 2003. Т. 6. № 4. С. 45-72.

УДК 697.92

А.А. Азнабаев, Д.Р. Бобин, М.Д. Коровина, А.Е. Макаров, Е.В. Почуева  
Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого

#### СРАВНИТЕЛЬНЫЙ АНАЛИЗ ЭФФЕКТИВНОСТИ СОВМЕСТНОЙ РАБОТЫ ДЕЦЕНТРАЛИЗОВАННЫХ И ЦЕНТРАЛЬНОЙ ЕСТЕСТВЕННОЙ СИСТЕМ ВЕНТИЛЯЦИИ

*Введение.* Неудовлетворительное качество воздуха в жилых и производственных помещениях оказывает значительное негативное воздействие на состояние здоровья людей: ухудшается самочувствие, снижается работоспособность и концентрация внимания. Постоянное воздействие загрязненного воздуха приводит к быстрой утомляемости, заболеваниям органов дыхания, развитию кожных и аллергических заболеваний, а химические вещества, содержащиеся в таком воздухе (фенолы, формальдегиды, углеводороды и т.д.) увеличивают риск возникновения злокачественных новообразований и опухолей [1].

Системы вентиляции призваны обеспечивать удаление из помещений перегретого и загрязнённого вредными газами, пылью и парами воздуха и приток чистого воздуха с более низкой температурой. Наибольшее распространение получила естественная вентиляция, обеспечивающая воздухообмен за счет разности плотности воздуха внутри помещения и наружного, а также за счет ветра. Разность плотностей возникает в связи с разностью температур внутри и снаружи помещения, что означает зависимость естественной системы вентиляции от климатических факторов [2]. В теплые и безветренные периоды качество работы естественной системы вентиляции значительно снижается. Установка герметичных окон также оказывает негативное влияние на качество воздуха, так как герметичные окна в закрытом состоянии практически полностью блокируют приток воздуха в помещения через оконные проемы [1, 3]. Обеспечение комфортных условий работы и отдыха в этом случае возможно при использовании в связке с естественной системой дополнительных децентрализованных систем вентиляции.

Также было показано, что оптимальным является размещение проветривателя непосредственно над оконным проёмом [4]. Недавние исследования показали, что влияние естественной системы вентиляции на работу приточно-вытяжных установок незначительно, и доказана эффективность одновременной работы пары приточно-вытяжных установок [5]. В работе [2] была обоснована необходимость учета климатических факторов при подборе децентрализованных систем вентиляции. Однако вопрос эффективности совместной работы центральной и децентрализованных систем вентиляции до настоящего времени так и не был изучен в достаточной степени.

*Цель работы* – выбор наиболее эффективного способа улучшения параметров воздухообмена при совместном использовании естественной и децентрализованных систем вентиляции.

Для достижения поставленной цели было проведено моделирование траекторий движения воздушных потоков и расчет расхода наружного воздуха в случаях использования различных типов вентиляционных систем.

В качестве исследуемого в данной работе помещения было выбрано прямоугольное в плане помещение с габаритными размерами 11x8x3,3 м и окнами, расположенными вдоль его длинной стороны. Помещение предназначено для проведения аудиторных занятий и рассчитано на одновременное нахождение в нем 58-ми человек на протяжении не более 2-х часов одновременно. Помещение оборудовано централизованной системой естественной вентиляции с десятью вытяжными отверстиями размерами 140x140 мм. Расстояние от центра каждого приточного отверстия до устья вытяжной шахты ( $h$ ) – 7,5 м. Общая площадь оконных проемов ( $A_{ок}$ ) составляет 14,8 м<sup>2</sup>. Оконные проемы заполнены современными герметичными окнами из ПВХ, их нормативная воздухопроницаемость была принята по [7]. Выбор данных параметров основан на параметрах аудиторных помещений политехнического университета.

В качестве расчётной ситуации выбрана наименее выгодная для помещений с естественной системой вентиляции: равенство температур наружного и внутреннего воздуха ( $t_{нар} = t_{вн} = 18^{\circ}\text{C}$ ), средняя скорость ветра ( $v_b$ ) равна 7 м/с, фасад здания расположен с наветренной стороны, регулярное проветривание помещения отсутствует, приток из других помещений недопустим. Данная ситуация является типичной для мая в городе Санкт-Петербург. Технические характеристики исследуемого оборудования приведены в табл. 1.

Табл. 1. Технические характеристики исследуемого оборудования

Тип	Модель	Потр. Мощ., Вт/ч	Приток, м <sup>3</sup> /ч	Вытяжка, м <sup>3</sup> /ч	Рекуперация	КПД рекуператора, %	Уровень шума, дБ	Габаритные размеры, см
Оконный проветриватель	AEROMAT VT DS	0	15 – 37 при $\Delta P = 10$ Па	0	-	-	-	120 x 14 x 10
Оконный проветриватель	AEROMAT VT RS	7-20	45 - 100	0	+	62	30	120 x 14 x 10
Стеновой проветриватель	АЭРЭКО ЕНТ	0	40 при $\Delta P = 10$ Па	0	-	-	-	14,5 x 24
ПУ	Marta 2VV JR-M-A	40	120	0	-	-	36,9	35,2 x 35,2 x 14,3
ПВУ	Прана-200 G	7-32	135	125	+	73	40	Ø 20

При условии отсутствия регулярного проветривания помещений, приток наружного воздуха осуществляется только за счет инфильтрации наружного воздуха через ограждающие конструкции, при этом воздухопроницаемость стеновых конструкций не учитывается в силу ее незначительности [2]. В расчетах была использована формула (формула 1), предложенная в [2] для определения фактической разницы давлений воздуха по обе стороны ограждающих конструкций.

$$\Delta P = h(\rho_{\text{нар}} - \rho_{\text{вн}})g + \frac{\rho_{\text{нар}}v_{\text{в}}^2}{2} K_{\text{дин}}, \quad (1)$$

Плотность внутреннего ( $\rho_{\text{вн}}$ ) и наружного ( $\rho_{\text{нар}}$ ) воздуха, а также динамический коэффициент ( $K_{\text{дин}}$ ) в данной формуле были приняты согласно [2].

*Результаты.* Примеры моделирования воздушных потоков в программе SolidWorks представлены на рис. 1. Результаты работы в виде технико-экономических показателей представлены в табл. 2. Для сравнения, нормативный расход наружного воздуха в данной расчетной ситуации, согласно [6], составляет 1160 м<sup>3</sup>/ч.

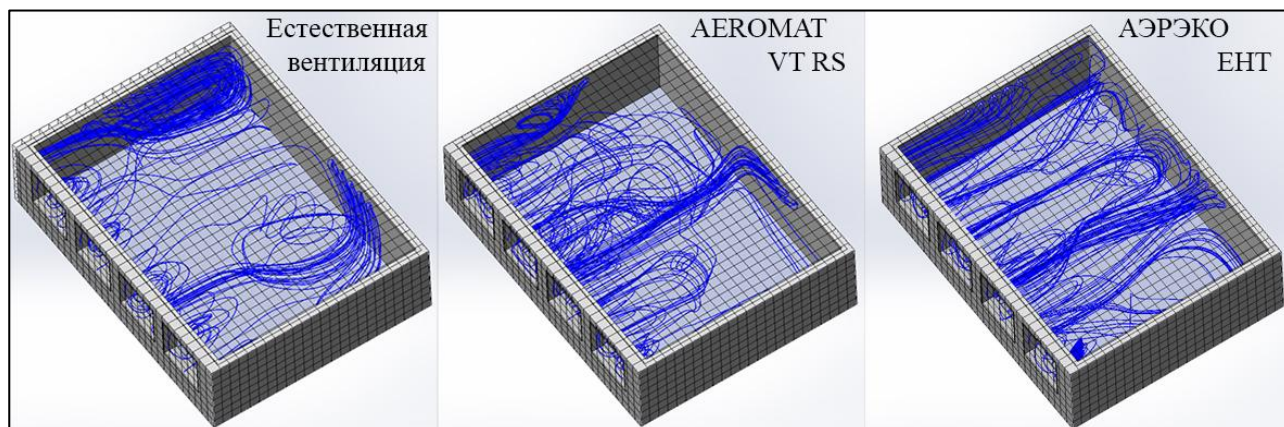


Рис. 1. Примеры моделирования воздушных потоков

Табл. 2. Техничко-экономические показатели исследуемых методов

Описание	Кол-во, шт.	Затраты, тыс.руб.	Затраты энергии, Вт/ч	Расход, м <sup>3</sup> /ч	Скорость воздуха на решетке, м/с	Кратность воздухообмена
Естественная вентиляция	-	0	0	62,40	0,069	0,21
AEROMAT VT DS	4	2,1	0	235,04	0,26	0,81
AEROMAT VT RS	4	5,0	20	462,4	0,51	1,59
АЭРЭКО ЕНТ	4	12,4	0	249,04	0,28	0,86
Marta 2VV JR-M-A	4	84,0	40	542,4	0,61	1,87
Прана-200 G	4	110,0	32	602,5	0,11	2,07

*Вывод.* Ни один из предложенных вариантов, несмотря на высокие технические характеристики, не позволил удовлетворить требованиям современных норм. Более мощное оборудование имеет высокий уровень шума и используется в помещениях промышленного назначения. Установка приточной вентиляции оконного или стенного типа позволяет в разы улучшить параметры воздухообмена, дальнейшее улучшение экономически нецелесообразно. Таким образом, периодические проветривания помещений должны проводиться в обязательном порядке.

#### ЛИТЕРАТУРА:

1. Н.И. Ватин, Т.В. Самопляс. Системы вентиляций жилых помещений многоквартирных домов: учеб. пособие – СПб. Изд-во: ФГАОУ ВО "СПбПУ", 2004 г. – 66 с.
2. А.М. Сайфутдинова. Диссертация «Оценка эффективности естественного воздухообмена жилых помещений». КГАСУ, 2014 г. – 179 с.
3. Крамаренко П.Т., Лисина А.В. Микроклимат жилых зданий - Нижний Новгород: Приволжский научный журнал. Изд-во: ННГАСУ, 2013 г., N 2 (26) – 23-25 с.
4. Рябова Е.А. Исследование эффективности естественного притока свежего воздуха в помещениях при соблюдении принципов энергосбережения – Одесса: Холодильна техніка та технологія., 2013 г., N 5 (145) – 49-52 с.
5. Бройда В.А. Эффективность приточно-вытяжных устройств с регенерацией тепла при совместной работе с естественной вытяжной вентиляцией – Казань: Известия КГАСУ. Изд-во: КазГАСУ, 2011 г., N 4 (18) – 193-198 с.
6. СП 118.13330.2012. Общественные здания и сооружения. Актуализированная редакция СНиП 31-06-2009. – Введ. 2013-01-01. – М.: Минстрой России, 2014 г. - 65 с.
7. ГОСТ 23166-99. Блоки оконные. Общие технические условия. – Введ. 2001-01-01. – М.: ГУП ЦПП, 2000 г. - 45 с.

УДК 539.3

Н.В. Котельникова, П.С. Волегов  
Пермский национальный исследовательский политехнический университет

#### ОПИСАНИЕ УПРОЧНЕНИЯ В МОНОКРИСТАЛЛАХ ПРИ НЕУПРУГОМ ДЕФОРМИРОВАНИИ

Исследование посвящено процессам неупругого деформирования монокристаллов с учетом упрочнения. Эволюция микроструктуры материала, в первую очередь, эволюция его дефектной структуры, влечет за собой значительные изменения его свойств на макроуровне.

Управляя изменением мезо- и микроструктуры материала, можно управлять и свойствами материала на макроуровне. Таким образом, построение математических моделей, учитывающих эволюцию физико-механических свойств моно- и поликристаллов в процессах неупругих деформаций, является актуальной задачей. В создаваемой модели необходимо рассматривать закономерности изменения структуры материала, которые зависят от рассматриваемых физических механизмов деформации. Пластическая деформация является следствием движения дислокаций, поэтому взаимодействие последних необходимо тщательно исследовать.

Центральным моментом в работе является описание упрочнения, причем это описание основывается на методологии физических теорий пластичности [1–4]. Упрочнением (на макроуровне) называют явление, при котором для продолжения пластической деформации образца требуется прикладывать всё большую нагрузку. На мезоуровне под упрочнением понимают увеличение критических сдвиговых напряжений, основной причиной которого на микроуровне является формирование барьеров, препятствующих движению дислокаций внутри зерен.

Для корректного описания упрочнения требуется точно учитывать механизмы неупругого деформирования материала. Выбор конечного вида принимаемого закона упрочнения зависит от того, рассматриваются ли те или иные процессы (например, склонность материала к образованию расщепленных дислокаций), учитываются ли границы внутри кристалла (как в статьях [5, 6]) и т.д.

В данной работе предлагается рассматривать закон упрочнения как совокупность нескольких слагаемых, каждое из которых будет описывать конкретный механизм, влияющий на упрочнение. Такое разделение возможно, если сделать предположение об аддитивности скоростей критических напряжений на системах скольжения.

При реализации модели в качестве типа нагружения принят чистый сдвиг. Для модели мезоуровня используется следующая система соотношений:

$$\begin{cases} \dot{\boldsymbol{\sigma}} = \mathbf{n} : \mathbf{d}^e = \mathbf{n} : (\mathbf{d} - \mathbf{d}^{in}), \\ \mathbf{d}^{in} = \sum_{k=1}^K \dot{\gamma}^{(k)} \mathbf{b}^{(k)} \mathbf{n}^{(k)} \\ \dot{\gamma}^{(k)} = \dot{\gamma}_0 \left| \frac{\boldsymbol{\tau}^{(k)}}{\boldsymbol{\tau}_c^{(k)}} \right|^{1/n}, k = 1, \dots, K, \\ \boldsymbol{\tau}_c^{(k)} = f(\gamma^{(j)}, \dot{\gamma}^{(j)}) \quad k, j = 1, \dots, K, \end{cases}$$

где  $\boldsymbol{\sigma}$  – тензор напряжений Коши,  $\mathbf{II}$  – тензор четвертого ранга упругих свойств кристаллита,  $\mathbf{d}, \mathbf{d}^e, \mathbf{d}^{in}$  – тензор деформации скорости, его упругая и неупругая составляющие на мезоуровне,  $\gamma^{(k)}, \boldsymbol{\tau}_c^{(k)}$  – накопленный сдвиг и критическое напряжение сдвига по  $k$ -й системе скольжения,  $\mathbf{b}^{(k)}, \mathbf{n}^{(k)}$  – единичные векторы в направлении вектора Бюргера и нормали к плоскости скольжения.

В модели учитываются как накопленные сдвиги, так и взаимодействие систем скольжения между собой. Результатом такого взаимодействия может быть образование различных барьеров (например, Ломера-Коттрелла), которые являются серьезным препятствием для движения дислокаций и значительно упрочняют материал. При этом базовое слагаемое записывается в виде следующего соотношения:

$$\dot{\tau}_c^{(k)} = \tau_{c0}^{(k)} \left( \sum_{i=1}^{24} a_i^{(k)} \left( \frac{\gamma^{(i)}}{\sum_{j=1}^{24} \gamma^{(j)}} \right)^\Psi \left( \frac{\dot{\gamma}^{(i)}}{\dot{\gamma}_0} \right)^\delta \right), k, j = 1, \dots, K, \delta, \Psi > 0, \gamma^{(i)} > 0, \quad (1)$$

где  $\Psi$  и  $\delta$  – параметры модели, первый из которых отвечает за чувствительность скорости критических напряжений к накопленному сдвигу, а второй – за чувствительность к скорости сдвига.

Слагаемое, описывающее образование барьеров Ломера-Коттрелла, выглядит следующим образом:

$$f_{LK}^{(i)}(\gamma_{ЭДУ}, \dot{\gamma}^{(i)}, \gamma^{(j)}) = \xi_1 \tau_c^{(i)} \left( 1 - \frac{\gamma_{ЭДУ}}{\gamma_{ЭДУ}^*} \right) H \left( 1 - \frac{\gamma_{ЭДУ}}{\gamma_{ЭДУ}^*} \right) \left( \int_0^1 f_{LK}^{(i)} d\tau + f_0^{(i)} \right)^{-1} \dot{\gamma}^{(i)} \left( \sum_{j \neq i}^{N^*} \gamma^{(j)} + \gamma_0^b \right), \quad (2)$$

где  $\gamma_{ЭДУ}^*$  – критическая ЭДУ, при превышении которой выше изложенный механизм можно не учитывать,  $N^*$  – число систем скольжения, сопряженных к данной,  $\xi_1$  – материальная константа, отвечающий за различную скорость повышения критического сдвигового напряжения у разных материалов при одинаковых условиях нагружения,  $\gamma_0^b$  – некоторая малая константа, введенная для учета наличия в исходном материале расщепленных дислокаций некоторой плотности.

В ходе исследований рассмотрено несколько вариантов закона упрочнения. Приведены расчеты для законов упрочнения, включающих только базовое слагаемое (рис. 1), а также совокупность базового слагаемого и слагаемого, описывающего возникновение барьеров Ломера-Коттрелла (рис. 2). Оценить работоспособность модели можно путем сравнения полученных кривых зависимости интенсивности напряжений от интенсивности деформации с результатами экспериментов.

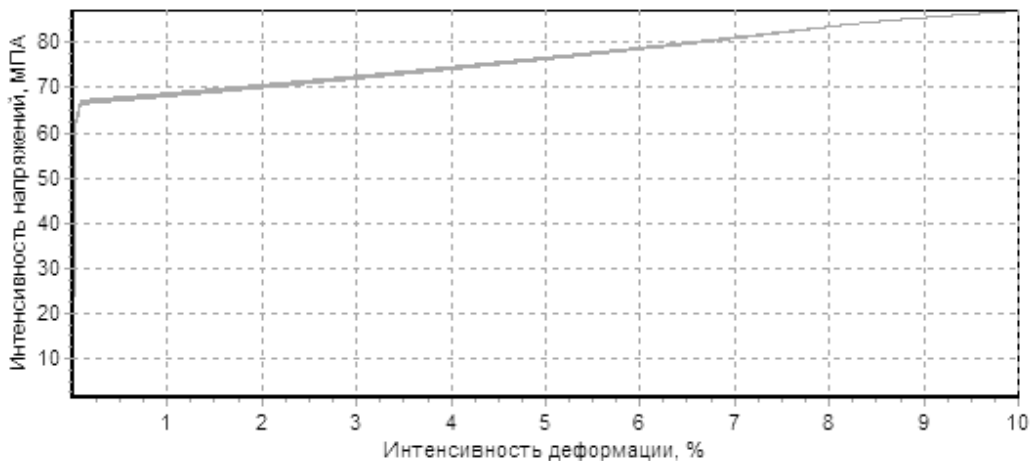


Рис. 1. Зависимость интенсивности напряжений от интенсивности деформаций при простом сдвиге (расчеты с параметрами  $\Psi=0.5, \delta=0.1$ )

Таким образом, в работе рассмотрена классификация упрочнения, основанная на разделении законов упрочнения на слагаемые, связанные с различными механизмами. Модель реализована с учетом базового закона упрочнения, результаты численного эксперимента удовлетворяют известным экспериментальным данным. Разработанная

программа подходит для целого класса задач (с разным типом нагружения и другими различающимися исходными данными).

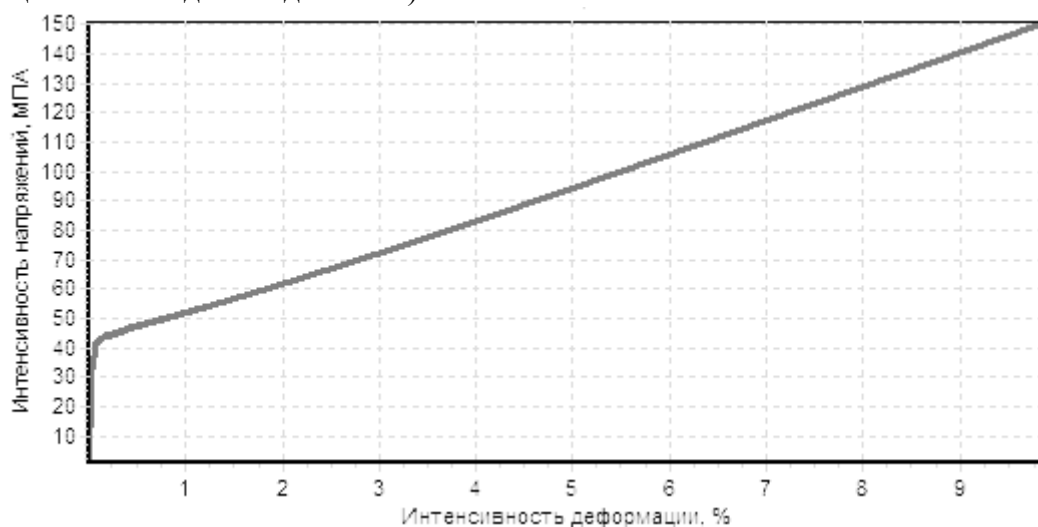


Рис. 2. Зависимость критического напряжения на всех СС от интенсивности деформаций при простом сдвиге с учетом образования барьеров Ломера-Коттрелла, случайная ориентировка кристаллита (расчеты с параметрами  $\Psi=0.5$ ,  $\delta=0.258$ )

Работа выполнена при поддержке гранта Президента РФ №МК-4917.2015.1, гранта РФФИ №14-01-96008 р\_урал\_а.

#### ЛИТЕРАТУРА:

1. Трусов П.В., Волегов П.С., Кондратьев Н.С. Физические теории пластичности: учебное пособие. – Пермь: Изд-во ПНИПУ, 2013. – 244 с.
2. Трусов П.В., Волегов П.С. Физические теории пластичности: теория и приложения к описанию неупругого деформирования материалов. Ч. 3: теории упрочнения, градиентные теории// Вестник ПНИПУ. Механика. – 2011. – № 3. – С. 146-197.
3. Trusov P.V., Volegov P.S. Internal variable constitutive relations and their application to description of hardening in single crystals// Physical Mesomechanics. – 2010. – Т. 13, № 3-4. – С. 152-158.
4. Трусов П.В., Волегов П.С. Физические теории пластичности: приложение к описанию упрочнения в поликристаллах// Вестник Тамбовского университета. Серия: Естественные и технические науки. – 2010. – Т. 15, № 3-1. – С. 983-984.
5. Трусов П.В., Волегов П.С., Янц А.Ю. Описание внутризеренного и зернограничного упрочнения моно- и поликристаллов// Научно-технические ведомости Санкт-Петербургского государственного политехнического университета. Физико-математические науки. – 2010. – Т. 2, № 98. – С. 110-119.
6. Кондратьев Н.С., Трусов П.В. Описание упрочнения систем дислокационного скольжения за счет границ кристаллитов в поликристаллическом агрегате// Вестник ПНИПУ. Механика. – 2012. – № 3. – С. 78-97.

УДК 539.3

Д.А. Лоевец, П.С. Волегов  
Пермский национальный исследовательский политехнический университет

#### МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ЦИКЛИЧЕСКОГО НАГРУЖЕНИЯ ПРЕДСТАВИТЕЛЬНОГО ОБЪЕМА ПОЛИКРИСТАЛЛА

В процессах интенсивных пластических деформаций существенно меняется внутренняя структура материала, причем эти изменения происходят на всех масштабных уровнях:

меняется дефектная структура, зеренная структура, эволюционирует сеть микроповреждений и т.д. С одной стороны, макронагружения являются источником, движущей силой изменения мезо- и микроструктуры; с другой стороны, эволюция мезо- и микроструктуры является фактором, определяющим поведение материала на макроуровне.

Управляя мезо- и микроструктурой, можно управлять свойствами материалов на макроуровне. Поэтому в настоящее время одной из наиболее актуальных проблем является построение моделей, описывающих эволюцию мезо- и микроструктуры поликристаллических материалов [1, 2].

Целью работы является математическое моделирование неупругого деформирования поликристаллов с учетом эволюции внутренней структуры, а также моделирование циклического нагружения поликристаллов.

Объектом исследования является представительный объем поликристалла. В рамках работы используется двухуровневая математическая модель (макро- и мезоуровни), описывающая неупругое деформирование поликристаллических тел [3].

В качестве модели мезоуровня принята упруговязкопластическая модель неупругого деформирования ГЦК-кристалла, при этом считается, что основной вклад в неупругое деформирование вносит скольжение дислокаций по системам скольжения; в качестве определяющего соотношения на каждом из масштабных уровней используется закон Гука в скоростной релаксационной форме. Напряжения на макроуровне в этом случае определяется осреднением напряжений в элементах мезоуровня – зернах.

Запишем систему уравнений, позволяющую описать напряженно-деформированное состояние материала на макроуровне [4]:

$$\begin{cases} \boldsymbol{\Sigma}^R = \mathbf{P} : (\mathbf{D} - \mathbf{D}^{in}), \\ \boldsymbol{\Omega} = \boldsymbol{\Omega}(\boldsymbol{\omega}_{(i)}, \mathbf{p}_{(i)}, \boldsymbol{\sigma}_{(i)}), \\ \mathbf{P} = \mathbf{P}(\mathbf{p}_{(i)}, \mathbf{o}_{(i)}), \\ \mathbf{D}^{in} = \mathbf{D}^{in}(\mathbf{d}_{(i)}^{in}, \mathbf{p}_{(i)}, \boldsymbol{\omega}_{(i)}), \\ i = 1, \dots, N. \end{cases} \quad (1)$$

где  $\boldsymbol{\Sigma}$  – тензор напряжений Коши на макроуровне,  $\boldsymbol{\Omega}$  – тензор спина на макроуровне, который характеризует движение подвижной системы координат,  $\boldsymbol{\omega}$  – тензор спина на мезоуровне,  $\mathbf{P}$ ,  $\mathbf{p}$  – тензоры упругих свойств на макроуровне и на мезоуровне,  $\mathbf{D}^{in}$  – неупругая составляющая тензора деформации скорости на макроуровне,  $\mathbf{d}^{in}$  – неупругая составляющая тензора деформации скорости на мезоуровне,  $\mathbf{D}^e$  – упругая составляющая тензора деформации скорости на макроуровне.

Для передачи воздействия с макро- на мезоуровень принята кинематическая гипотеза Фойгта [5].

Можно записать аналогичную (1) систему для мезоуровня:

$$\begin{cases} \boldsymbol{\sigma}^r = \mathbf{p} : \mathbf{d}^e = \mathbf{p} : (\mathbf{d} - \mathbf{d}^{in}), \\ \mathbf{d}^{in} = \sum_{k=1}^K \dot{\gamma}^{(k)} \mathbf{n}^{(k)} \mathbf{b}^{(k)}, \\ \dot{\gamma}^{(k)} = \dot{\gamma}_0 \left| \frac{\boldsymbol{\tau}^{(k)}}{\boldsymbol{\tau}_c^{(k)}} \right|^m \mathbf{H}(\boldsymbol{\tau}^{(k)} - \boldsymbol{\tau}_c^{(k)}), \\ \dot{\boldsymbol{\tau}}_c^{(k)} = f(\dot{\gamma}^{(j)}, \gamma^{(j)}, \dots), \\ \dot{\mathbf{o}} \cdot \mathbf{o}^T = \boldsymbol{\omega}, \\ \mathbf{d} = \mathbf{D}, \end{cases} \quad (2)$$



где  $\sigma^{\Gamma}$  – коротационная производная тензора напряжений Коши на мезоуровне,  $\mathbf{d}$  – тензор деформации скорости на мезоуровне,  $\mathbf{n}^{(i)}, \mathbf{b}^{(i)}$  – вектора нормали и Бюргера соответственно для  $i$ -ой системы скольжения или единичные вектора в соответствующих направлениях,  $\tau_c^{(i)}$  – критическое напряжение на  $i$ -ой системе скольжения,  $\tau^{(i)}$  – действующее напряжение на  $i$ -ой системе скольжения,  $\dot{\gamma}^{(i)}$  – скорость сдвига на  $i$ -ой системе скольжения,  $H$  – функция Хевисайда.

При моделировании циклического нагружения использовались две схемы деформирования: первая схема заключалась в последовательном растяжении, упругой разгрузки, сжатия, повторной разгрузки и растяжения представительного объема (рис. 1а). Вторая схема исключала процессы, связанные с упругой разгрузкой (рис. 1б).



Рис. 1. Кривые упругопластического гистерезиса монокристалла:  
а) деформирование происходило с этапом упругой разгрузки,  
б) деформирование происходило без учета упругой разгрузки

Несмотря на то, что результаты деформирования по этим схемам на макроуровне практически не отличаются, анализ процесса неупругой деформации позволяет говорить о различной работе систем скольжения, что в случае учета упрочнения или ротации кристаллических решеток приведет к различным кривым на макроуровне.

Аналогичная серия экспериментов проводилась и для поликристалла, состоящего из 125 зерен (рис. 2). Полученные данные позволяют качественно описать кривую упругопластического гистерезиса. Для количественного сопоставления необходимо включить в рассмотрение другие механизмы, сопровождающие неупругое деформирование.



Рис. 2. Кривые упругопластического гистерезиса представительного объема поликристалла:  
а) деформирование происходило с этапом упругой разгрузки,  
б) деформирование происходило без учета упругой разгрузки

В ходе моделирования была получена зависимость интенсивности напряжения от интенсивности деформации при неупругом деформировании поликристаллического агрегата. В данной работе рассматривались и реализованы моделирование простого нагружения и монотонного циклического нагружения. Были приведены и описаны две схемы нагружения на базе одноосного растяжения.

Работа выполнена при поддержке гранта Президента РФ №МК-4917.2015.1, гранта РФФИ №14-01-96008 p\_урал\_a.

#### ЛИТЕРАТУРА:

1. Трусов П.В., Волегов П.С., Кондратьев Н.С. Физические теории пластичности: учебное пособие. – Пермь: Изд-во ПНИПУ, 2013. – 244 с.
2. Ашихмин В.Н., Волегов П.С., Трусов П.В. Конститутивные соотношения с внутренними переменными: общая структура и приложение к текстурообразованию в поликристаллах// Вестник ПНИПУ. Механика. – 2006. – № 14. – С. 11-26.
3. Трусов П.В., Волегов П.С., Швейкин А.И. Конститутивная упруговязкопластическая модель гцк-поликристаллов: теория, алгоритмы, приложения. – LAP LAMBERT: Saarbrücken, 2011. – 147 с.
4. Трусов П.В., Швейкин А.И., Нечаева Е.С., Волегов П.С. Многоуровневые модели неупругого деформирования материалов и их применение для описания эволюции внутренней структуры// Физическая мезомеханика. – 2012. – Т. 15, № 1. – С. 33-56.
5. Трусов П.В., Волегов П.С. Физические теории пластичности: приложение к описанию упрочнения в поликристаллах// Вестник Тамбовского университета. Серия: Естественные и технические науки. – 2010. – Т. 15, № 3-1п. – С. 983-984.

УДК 53.096

Н.С. Марков, В.А. Кузькин  
Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого

### ИССЛЕДОВАНИЕ ОТРИЦАТЕЛЬНОГО ТЕПЛОВОГО РАСШИРЕНИЯ ЦЕПОЧКИ, ОБЛАДАЮЩЕЙ ПРОДОЛЬНОЙ И ИЗГИБНОЙ ЖЕСТКОСТЬЮ

*Актуальность.* Большинство известных веществ имеют положительный коэффициент теплового расширения. Это означает, что при увеличении температуры вещество расширяется, увеличивая занимаемый объем. Но существуют вещества, обладающие отрицательным коэффициентом теплового расширения. Хорошо известный пример - лед. Но помимо льда отрицательным коэффициентом теплового расширения обладают и многие другие вещества, которые активно используются в науке и технике [1], [2]. Поэтому исследование физических процессов, лежащих в основе отрицательного теплового расширения, является актуальной проблемой. Основной причиной теплового расширения веществ являются продольные и поперечные колебания частиц [2], поэтому аналитическое предсказание зависимости коэффициента теплового расширения от микроскопических свойств вещества является довольно трудной задачей, решение которой предполагает использование методов статистической физики [3]. Минус такого подхода заключается в том, что для получения результата необходимо произвести сложные математические расчеты, такие как, например, вычисление интеграла в  $N$  - мерном фазовом пространстве. Использование метода динамики частиц для решения данной задачи позволяет получить количественные и качественные результаты, избегая сложных вычислений.

В работе [4] было исследовано тепловое расширение цепочки с продольными и поперечными колебаниями частиц, обладающей только продольной жесткостью. В данной работе было показано, что параметр Грюнайзена меняется от  $-\infty$  до  $+\infty$  при изменении деформации цепочки от нуля до критического значения. Также аналитически и численно

было показано, что зависимость теплового давления от тепловой энергии нелинейна при малых деформациях цепочки, а при некоторых значениях деформации еще и не монотонна. Из всего вышеперечисленного делается предположение, что у реально существующих веществ зависимость теплового давления от тепловой энергии при давлениях, близких к критическим, будет не линейной, что подтверждается экспериментальными данными. В связи с этим необходимо исследовать модель цепочки, более приближенную к реальной.

*Цель данной работы* – исследовать тепловое расширение двумерной цепочки с продольной и изгибной жесткостью, частицы которой совершают продольные и поперечные колебания.

Для проведения численного эксперимента в данной работе используется метод динамики частиц. В начальный момент времени частицы цепочки находятся на одинаковом расстоянии друг от друга и обладают произвольными скоростями, равномерно распределенными в круге. Макроскопическими параметрами модели являются тепловое давление  $p_T$  и тепловая энергия  $E_T$ . Потенциал межатомного взаимодействия частиц цепочки состоит из суммы потенциала Леннарда-Джонса и потенциала угловой пружинки и имеет вид

$$P = D \left[ \left( \frac{a_0}{r} \right)^{12} - 2 \left( \frac{a_0}{r} \right)^6 \right] + c_s \frac{(\varphi - \pi)^2}{2},$$

где  $D$  – энергия взаимодействия;  $a_0$  – длина связи;  $r$  – расстояние между частицами;  $c_s$  – жесткость угловой пружинки,  $\varphi$  – угол, образованный тремя частицами. Для исключения из рассмотрения граничных эффектов используются периодические граничные условия. Для численного интегрирования уравнений движения частиц в данной работе используется модифицированный алгоритм Верле.

#### *Результаты.*

В результате численного эксперимента было получено, что при растяжении цепочки зависимость  $P_T(E_T)$  линейна для всех значений деформации (рис.1). Таким образом для описания зависимости  $P_T(E_T)$  при растяжении можно пользоваться уравнением состояния Ми-Грюнаизена

$$p = p_0(V) + \frac{\Gamma(V)}{V} E_T,$$

которое предполагает линейную зависимость между тепловой энергией и тепловым давлением.

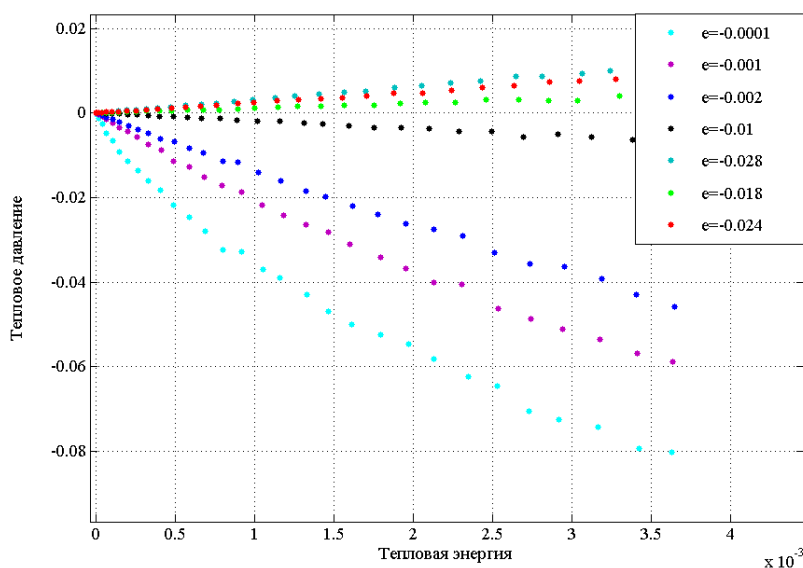


Рис. 1.

В случае сжатия цепочки зависимость  $P_T(E_T)$  нелинейна. При сжатии цепочки на величину деформации, при которой цепочка теряет устойчивость, тепловое давление зависит от квадратного корня из тепловой энергии, то есть  $P_T(\sqrt{E_T})$  (рис. 2). Это новый эффект, который не наблюдался у цепочки без изгибной жесткости. Ожидается, что такой же результат можно получить при рассмотрении некоторых веществ, обладающих отрицательным тепловым расширением, в основе которого лежат поперечные колебания частиц.

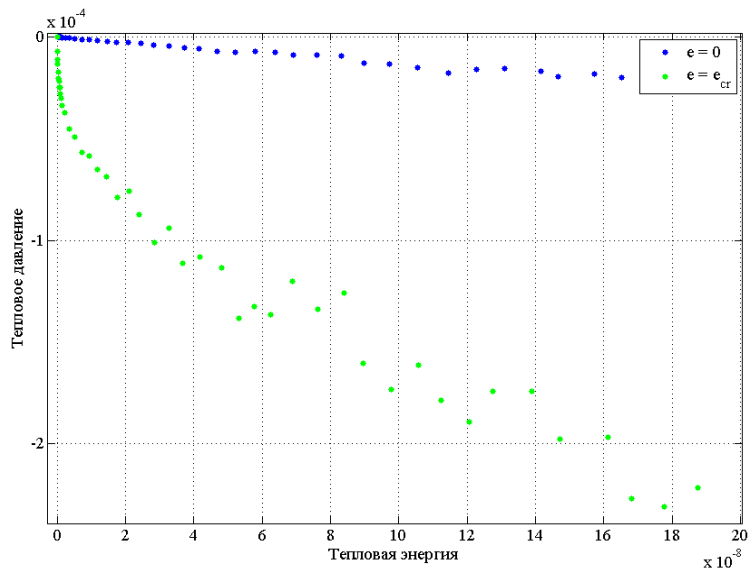


Рис. 2.

На рис. 3 представлена зависимость тангенса угла наклона графика зависимости  $P_T(E_T)$  от числа частиц, составляющих цепочку в случае, когда цепочка недеформированна. Таким образом, коэффициент теплового расширения зависит от длины цепочки. Похожий эффект можно увидеть в работе [5], однако механизмы, лежащие в его основе, до сих пор нигде не описаны. Исследование причин, лежащих в основе данного эффекта, позволит получить и объяснить ранее неизвестные свойства некоторых веществ.

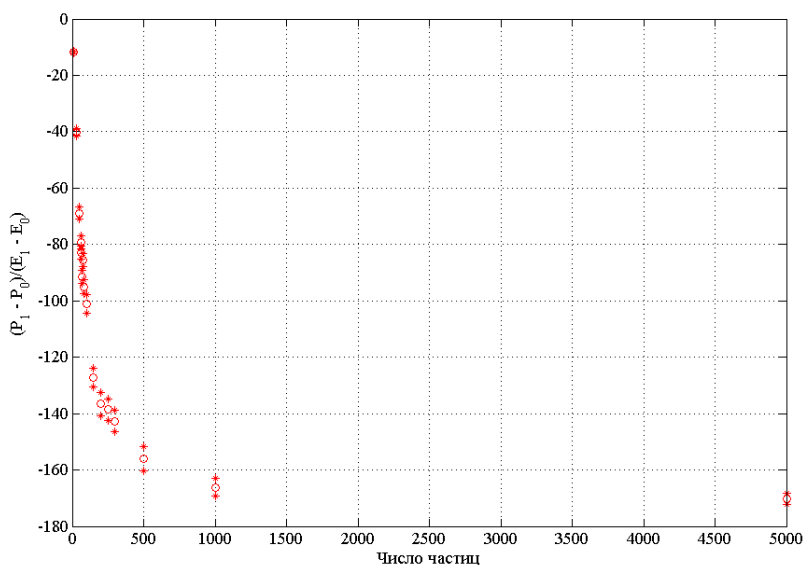


Рис. 3.

*Выводы.* В результате исследования цепочки, обладающей продольной и изгибной жесткостью, было получено несколько новых свойств, которыми, как ожидается, будут обладать вещества с отрицательным тепловым расширением, в основе которого лежат поперечные колебания частиц.

#### ЛИТЕРАТУРА:

1. Joseph N. Grima, Victor Zammit and Ruben Gatt. «Negative Thermal Expansion», Msida MSD 06, Malta.
2. John S. O. Evans. «Negative thermal expansion materials», Journal of the Chemical Society, Dalton Transactions, Issue 19, 1999
3. P.R.L. Welche, V. Heine M.T. Dove. «Negative thermal expansion in beta-quartz», Phys Chem Minerals (1998)
4. Kuzkin V.A., Krivtsov A.M. «Nonlinear positive/negative thermal expansion and equations of state of a chain with longitudinal and transverse vibrations», 2015.
5. Dinghai Huang, Sindee L. Simon, Gregory B. McKenna. «Chain length dependence of the thermodynamic properties of linear and cyclic alkanes and polymers». Department of Chemical Engineering, Texas Tech University, Lubbock, Texas 79409

УДК 531.3

К.В. Мацюк

Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого

### ИССЛЕДОВАНИЕ ДВИЖЕНИЯ СПЛОШНОЙ СРЕДЫ ПРИ СОСРЕДОТОЧЕННОЙ НАГРУЗКЕ

В связи с развитием современных нанотехнологий активно развиваются экспериментальные методы исследования свойств наноматериалов. Одним из способов экспериментального исследования является воздействие с помощью нанощупа на атомарном уровне. Однако проведение данного эксперимента достаточно трудоемко и требует дорогостоящего оборудования и образцов. Использование математического моделирования данного процесса позволяет решить эту проблему. Для моделирования воздействия нанощупа на атомарном уровне требуется решить задачу о действии сосредоточенной силы (нанощупа) на среду (наноматериал). Разработка корректных математических моделей, описывающих этот процесс, является актуальной задачей современной науки.

При решении задач механики важную роль играют, так называемые, фундаментальные решения, в связи с тем, что из таких решений можно сконструировать все остальные решения рассматриваемой задачи. Решение данной задачи позволит получить информацию о поведении исследуемого объекта на различных масштабных уровнях при сосредоточенных нагрузках, в том числе и на наноуровне.

Для нахождения поля перемещений бесконечного упругого полупространства под влиянием силы  $f\delta(\mathbf{x})H(t)$ , сосредоточенной в точке  $\mathbf{x}_0 = \{0, 0, 0\}$  рассматривается уравнение движения сплошной среды в перемещениях (уравнение Ламе) в виде:

$$\rho\ddot{\mathbf{U}} = (\lambda + \mu)\nabla\nabla \cdot \mathbf{U} + \mu\Delta\mathbf{U} + f\delta(\mathbf{x})H(t)\mathbf{e}, \quad (1)$$

где  $\rho$  – плотность среды;  $\lambda, \mu$  – параметры Ламе;  $\mathbf{U}(\mathbf{x}, t)$  – перемещение точки среды;  $f$  – количественная характеристика силы;  $\delta(\mathbf{x})$  – дельта-функция Дирака;  $H(t)$  – функция Хэвисайда;  $\mathbf{e}$  – единичный вектор в направлении действия силы. Начальные условия задачи (1):

$$\mathbf{U}|_{t=0} = \mathbf{0}; \mathbf{U}_t|_{t=0} = \mathbf{0}. \quad (2)$$

Для нахождения поля перемещений бесконечной упругой плоскости под влиянием силы  $f\delta(\mathbf{x})H(t)$ , сосредоточенной в точке  $\mathbf{x}_0 = \{0,0\}$  рассматривается уравнение движения сплошной среды в перемещениях (уравнение Ламе) в виде:

$$\rho\ddot{\mathbf{U}} = (\lambda' + \mu')\nabla\nabla \cdot \mathbf{U} + \mu'\Delta\mathbf{U} + f\delta(\mathbf{x})H(t)\mathbf{e}, \quad (3)$$

где  $\lambda', \mu'$  – параметры Ламе для двумерной задачи, с начальными условиями аналогичными (2). Перемещения по оси  $x_3$  запрещены.

Рассмотрим решение трехмерной задачи (1) для случая  $\mathbf{x} = \{x_1, 0, 0\}$ . На рис. представлена соответствующая компонента смещения  $U(x_1)$  при различных значениях коэффициента Пуассона.

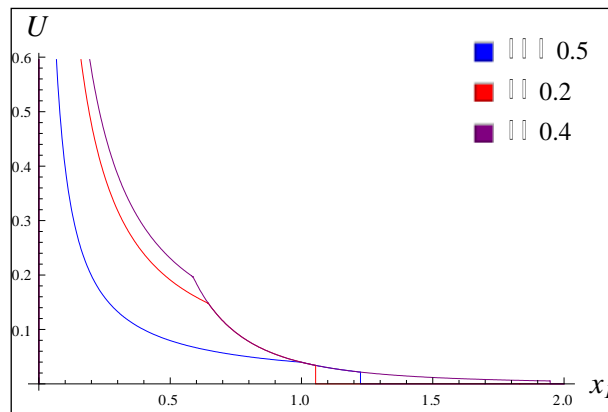


Рис. 1. Зависимость перемещения от координаты в случае трехмерной задачи

Рассмотрим решение двумерной задачи (3) для случая  $\mathbf{x} = \{x_1, 0, 0\}$ . На рис. представлена соответствующая компонента смещения при различных значениях коэффициента Пуассона.

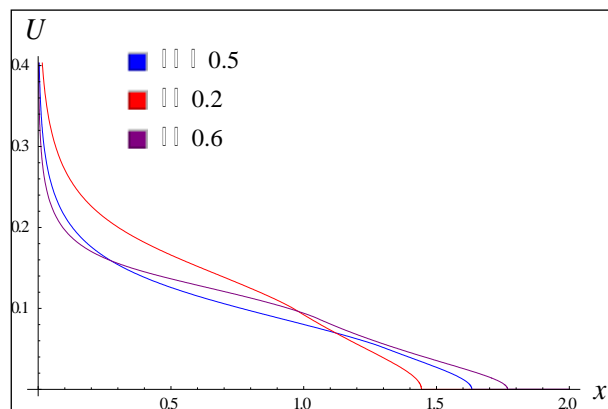


Рис. 2. Зависимость перемещения от координаты в случае двумерной задачи

Изломы на рис.1-2. соответствуют достижению фронта поперечных волн. На рис.1. можно заметить фронт продольной волны для рассматриваемого момента времени, на

радиусе больше фронта продольной волны перемещений нет. Следует отметить, что скорости волн для трехмерной и двумерной задачи различны.

Также было получено решение волнового уравнения с начальными условиями (2) :

$$\frac{\partial^2 \mathbf{U}}{\partial t^2} - c^2 \Delta \mathbf{U} = \frac{f}{\rho} \delta(\mathbf{x}) H(t) \mathbf{e}, \quad (4)$$

где  $c$  – скорость распространения волны продольной или поперечной. Результаты сравнения решений задач (1), (3) и (4) представлены на рис. 3-4.

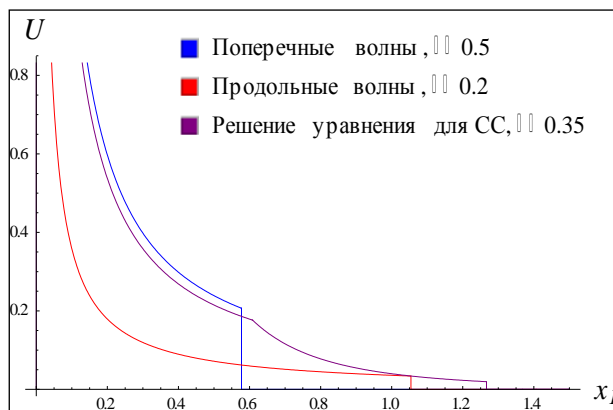


Рис. 3. Зависимость перемещения от координаты в случае трехмерной задачи

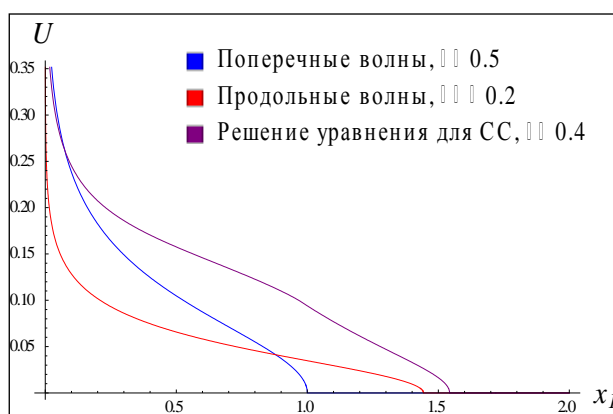


Рис. 4. Зависимость перемещения от координаты в случае двумерной задачи

Полученные результаты и зависимость, представленная на рис.5., свидетельствуют о том, что под действием сосредоточенной силы в точке пространства находится две различные точки сплошной среды. Аналогичная ситуация наблюдается и в плоской задаче. В настоящее время данный феномен исследуется.

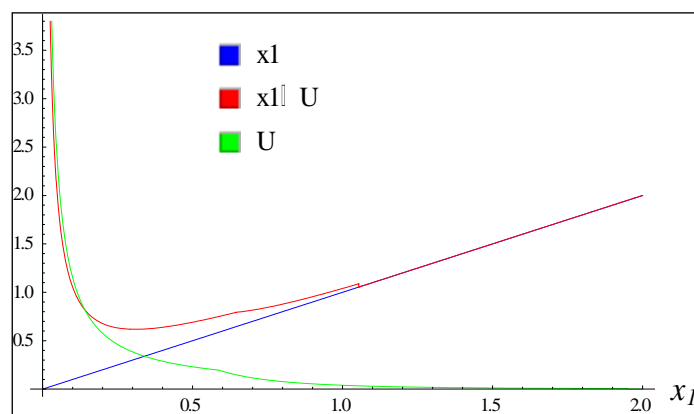


Рис. 5. Трехмерная задача

Решена динамическая задача о перемещении сплошной среды в случае сосредоточенной нагрузки. Рассмотрено неограниченное упругое полупространство и неограниченная упругая плоскость. Получены результаты сравнения с решением динамической задачи о нахождении поля перемещений в случае сосредоточенной нагрузки при решении волнового уравнения в двумерном и трехмерном случаях.

Автор благодарен А.М. Кривцову за ценные обсуждения и замечания по работе.

#### ЛИТЕРАТУРА:

1. Watanabe, K. Integral transform techniques for Green's function. 2014, XII, 190 p. 34 illus. Hardcover.
2. Бабич В.М., Капилевич М.Б., Михлин С.Г., и др. Линейные уравнения математической физики (Справочная математическая библиотека), М., "Наука", 1964.
3. Лурье А. И. Теория упругости. М.: Наука, 1970. — 940 с.
4. Новацкий В. Теория упругости. Пер. с польск. Б. Е. Победри. М.: Мир, 1975. 872 с.

УДК 66-5

Г.А. Мирошник

Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого

### ИССЛЕДОВАНИЕ ВЛИЯНИЯ ДАВЛЕНИЯ ВОЗДУХА В ПНЕВМОСЕТИ НА РАБОТОСПОСОБНОСТЬ ВОСЬМИПОЗИЦИОННОГО ПОВОРОТНО-ФИКСИРУЮЩЕГО МЕХАНИЗМА

Целью данной статьи является исследование влияния давления воздуха в пневмосети на работоспособность восьмипозиционного поворотного-фиксирующего механизма (поворотного стола).

Актуальность разработанного механизма состоит в том, что он может быть использован в различных технологических процессах в зависимости от установленной на него оснастки, что в свою очередь позволяет выпускать продукцию широкого ассортимента [1].

Область применения поворотных столов – упаковочное и сборочное производство, в котором они используются для перемещения заготовок между позициями при организации технологического процесса в форме цикловой машины карусельного типа.

Цикловые машины карусельного типа применяются в производстве, когда требуется сконцентрировать несколько операций внутри одной машины. При этом достигаются следующие преимущества: отсутствие механизмов-спутников и системы их транспортирования, базирования и закрепления; сокращение пути перемещения заготовок между операциями; уменьшение площади, занимаемой машиной [2 - 4].



Пневматический привод помогает обеспечить высокую скорость срабатывания стола, а для его работы, в отличие от гидропривода, достаточно компрессора, что экономически более выгодно. Однако, при выборе пневмоцилиндра необходимо учитывать возможное уменьшение давления воздуха, связанное с подключением к пневмосети сторонних устройств [5].

Для оценки пригодности пневмопривода было проведено компьютерное моделирование работы лопастного пневмоцилиндра, применяющегося в поворотном столе, при различном заданном давлении воздуха в пневмосети. Моделирование было проведено при помощи программного обеспечения корпорации Festo [6].

В качестве исходных условий были заданы:

- момент инерции, приложенный к валу пневмоцилиндра, равный  $1.33 \text{ кг м}^2$ ;
- длина пневмопровода, равная 1 м.

Критерием работоспособности является поворот лопасти на  $45^\circ$  за 0.775 секунды (время и момент инерции обусловлены технологическим процессом) [1].

Результаты моделирования приведены на рис. 1 и 2.

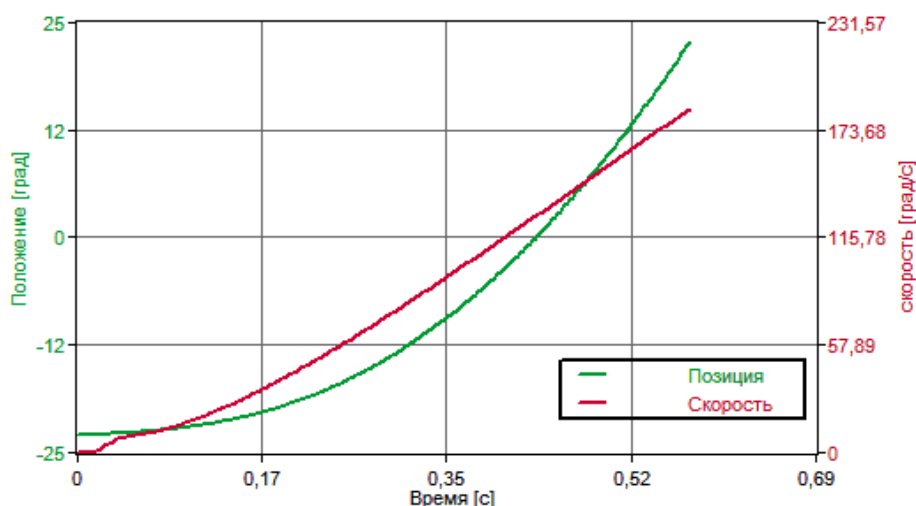


Рис. 1. Зависимость скорости и положения лопасти пневмоцилиндра при давлении 6 бар. Время поворота составляет 0.565 секунд

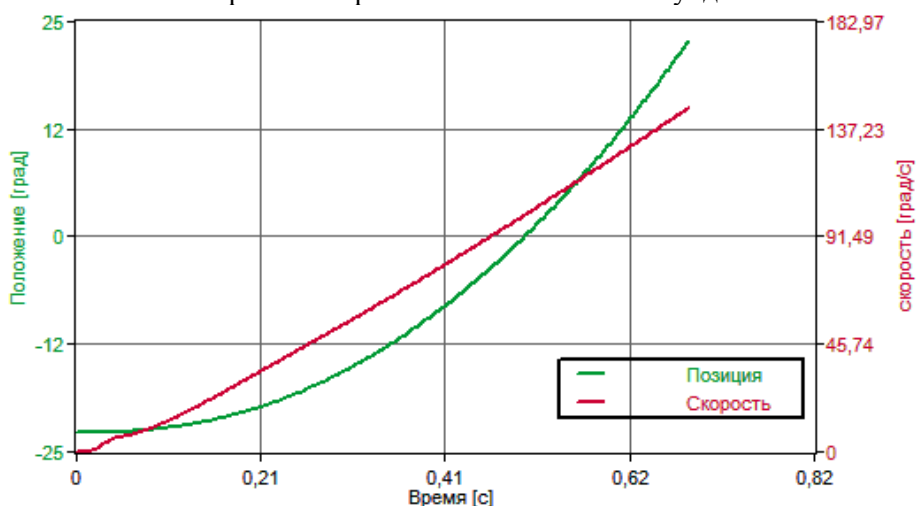


Рис. 2. Зависимость скорости и положения лопасти пневмоцилиндра при давлении 4 бар. Время поворота составляет 0.674 секунд

На время работы привода также может влиять расстояние, которое требуется воздуху, чтобы поступить от компрессора к пневмоцилиндру. На рисунке 3 рассмотрен случай, когда длина пневмопровода увеличена с 1 до 20 м.

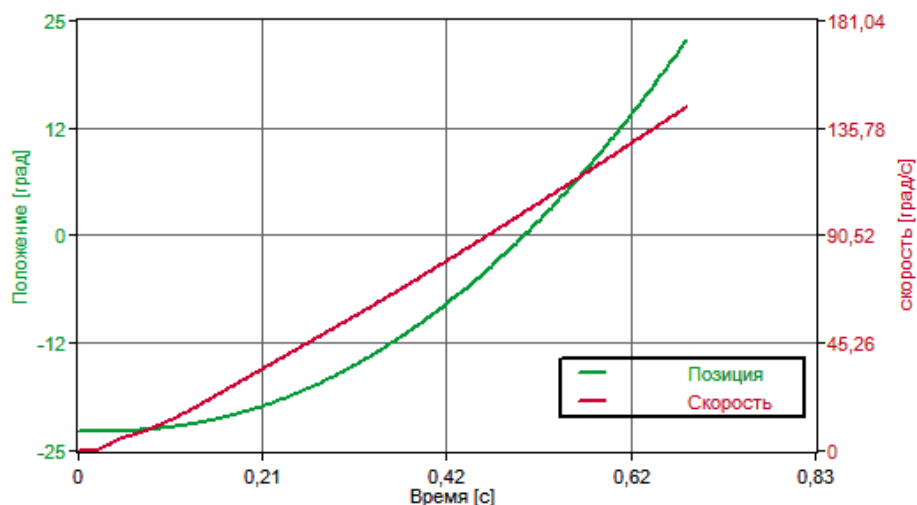


Рис. 3. Зависимость скорости и положения лопасти пневмоцилиндра при давлении 4 бар и удалении пневмоцилиндра от компрессора на расстояние 20 м. Время поворота составляет 0.679 с

Исследование показало, что время поворота лопасти при уменьшении давления на 2 бар увеличивается на 14% от предельного значения, а увеличение длины пневмопровода в 20 раз увеличивает время поворота на 0.6%.

Выбранный привод пригоден к использованию в условиях данного технологического процесса, так как время поворота при рассмотренных режимах работы не превышает заданное критерием работоспособности.

#### ЛИТЕРАТУРА:

1. Мирошник Г.А. Поворотный стол с пневматическим приводом: квалификационная работа бакалавра, СПб., 2015.  
Miroshnik G.A. Povorotniy stol s pnevmaticheskim privodom [Rotating table with pneumatic drive]: bachelor qualification work, SPb., 2015. (rus)
2. Полищук М.Н., Попов А.Н., Тимофеев А.Н. Автоматизация технологических процессов. Цикловые механизмы автоматов: Учеб.пособие. СПб.: Изд-во СПбГТУ, 2002.  
Polischuk M.N., Popov A.N., Timofeev A.N. Avtomatizatsiya technologicheskikh proessov. Cikloviye mekhanizmy avtomatov: Uchebnoye.posobiye [Automation of technological processes. Cycle automatic mechanisms: Textbook]. SPb.: SPbPU, 2002. (rus)
3. Павлюченко С.В. и др. под ред. Дьяченко В.А. Схемы технологических машин: Учеб.пособие. СПб.: Изд-во СПбГТУ, 2001.  
Pavluchenko S.V. et al., ed. Dyachenko V.A. Shemy technologicheskikh mashin: Uchebnoye.posobiye [Schemes of technological machines: Textbook]. SPb.: SPbPU, 2001. (rus)
4. Попов А.Н., Полищук М.Н., Тимофеев А.Н. Технологические процессы в машиностроении. Общие принципы проектирования технологических машин: Учеб.пособие. СПб.: Изд-во СПбГТУ, 2010.  
Popov A.N., Polishchuk M.N., Timofeev A.N. Technologicheskiye process v mashinostroyenii. Obschiye principy proektirovaniya technologicheskikh: Uchebnoye.posobiye [Processes in mechanical engineering. General principles for the design of technological machines: Textbook]. SPb.: SPbPU, 2010 (rus)
5. Игнатъев Н.П. Проектирование нестандартного оборудования. Азов, 2013.  
Ignatiev N.P. Proektirovaniye nestandartnogo oborudovaniya. [Design of custom equipment]. Azov, 2013 (rus)
6. Официальный сайт компании Festo.

URL: [http://www.festo.com/cms/ru\\_ru/](http://www.festo.com/cms/ru_ru/) (дата обращения 27.06.2015)

Official Festo corporation website.

URL: [http://www.festo.com/cms/ru\\_ru/](http://www.festo.com/cms/ru_ru/) (accessed June 27, 2015)

УДК 539.3

Е.И. Овчинников, П.С. Волегов  
Пермский национальный исследовательский политехнический университет

## ИССЛЕДОВАНИЕ ОСТАТОЧНЫХ МЕЗОНАПРЯЖЕНИЙ В УПРУГОВЯЗКОПЛАСТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ ДЕФОРМИРОВАНИЯ ПОЛИКРИСТАЛЛА

В настоящее время возрастает значение надежности и долговечности деталей и механизмов, где остаточные напряжения, возникающие в материале при отсутствии внешних нагрузок, играют одну из важнейших ролей [1].

Остаточные напряжения возникают в деталях практически при любых способах технологической обработки металлов (при литье, ковке, термической и механической обработке), а по своей величине иногда могут превосходить внешние нагрузки. Во многих случаях разрушение конструкций из высокопрочных металлов вызвано действием растягивающих остаточных напряжений (рабочие лопатки турбин, компрессоров, коленчатые валы, плунжеры и пр.).

Для уменьшения остаточных напряжений применяется специальная термическая обработка, которая, однако, не всегда применима. Однако, остаточные напряжения не всегда вредоносны, во многих случаях технологические процессы подразумевают создание остаточных напряжений, улучшающих эксплуатационные характеристики деталей и механизмов (обдувка дробью, обкатка валиками и пр.) [2].

Одной из наиболее типичных физических причин образования остаточных напряжений является пластическая деформация [3], точнее – несовместность пластических деформаций различно ориентированных зерен поликристалла.

Процессы неупругого деформирования и свойства поликристаллических материалов на макроуровне, как показывают многочисленные экспериментальные и теоретические исследования, существенным образом определяются состоянием эволюционирующей мезо- и микроструктуры материала.

Под эволюцией мезоструктуры здесь понимаются процессы разворотов кристаллических решеток зерен или фрагментов зерен, а также их фрагментация и дробление. Под эволюцией микроструктуры в первую очередь понимаются изменения в дефектной структуре материала на микроуровне (уровне дислокационных субструктур, конгломератов точечных дефектов, границ зерен и т.д.) [4].

Существует большое количество теорий, предназначенных для описания деформирования металлов, наиболее известными являются математические макрофеноменологические теории, которые основаны на предсказании поведения материала исходя из предыстории деформирования; такие теории используют «тяжелые» операторные уравнения, в которых можно потерять физический смысл входящих переменных. Однако существует класс теорий, позволяющий путем внедрения внутренних переменных значительно упростить математические выражения, входящие в модель, разделить объект моделирования на несколько масштабных уровней, непосредственно описать механизмы деформирования. С этой точки зрения, наиболее подходящим вариантом для описания деформирования представляются физические теории пластичности (ФТП).

Существует следующая классификация остаточных напряжений по масштабу:

- Остаточные напряжения I рода (макроскопические), вызваны различными факторами обработки материала детали;
- *Остаточные мезонапряжения* (введены в рамках двухуровневой модели, используемой в работе);
- Остаточные напряжения II рода (кристаллитные напряжения), являются следствием ограниченности условий деформирования каждого зерна;
- Остаточные напряжения III рода (микроскопические), возникают вследствие существенной неравномерности пластической деформации, обусловленной анизотропией свойств кристаллической решетки.

Для исследования остаточных мезонапряжений была использована двухуровневая модель деформирования ГЦК-поликристалла. Модели такого типа подробно описаны в литературе [5]. Такие модели позволяют исследовать остаточные напряжения на уровне каждого из кристаллитов, составляющих исследуемый представительный объем.

Целью работы является определение напряженно-деформированного состояния поликристаллического образца в любой момент времени и оценка остаточных напряжений после предварительного этапа произвольного нагружения и последующей упругой разгрузки.

В работе представлены результаты численных экспериментов для оценки остаточных мезонапряжений для представительного объема поликристаллического материала, характеристики соответствуют чистой меди, нагружение кинематическое по схеме простого сдвига. На рис. 1 представлена кривая напряженно-деформированного состояния исследуемого объекта с учетом упругой разгрузки.

Анализируя представленный рисунок, можно отметить, что предложенная процедура упругой разгрузки приводит представительный объем в состояние, в котором отсутствуют внешние напряжения, что позволяет говорить об остаточных напряжениях в отдельных кристаллитах.

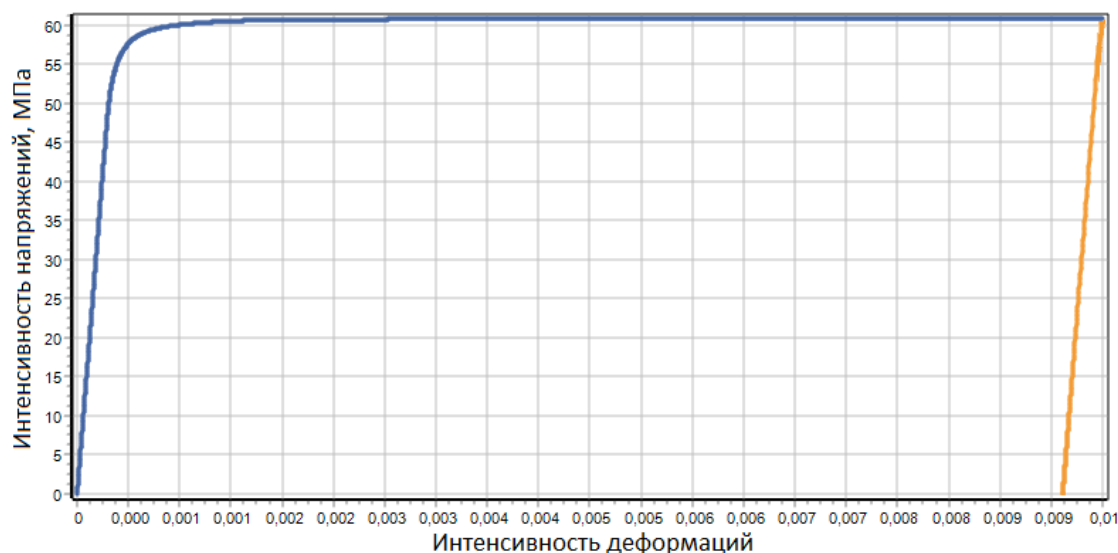


Рис. 1. Кривая НДС поликристалла с учетом упругой разгрузки

К наиболее важным результатам моделирования можно отнести оценку остаточных мезонапряжений, представленную в виде распределения кристаллитов по величине интенсивности тензора напряжений, наглядная гистограмма представлена на рис. 2.

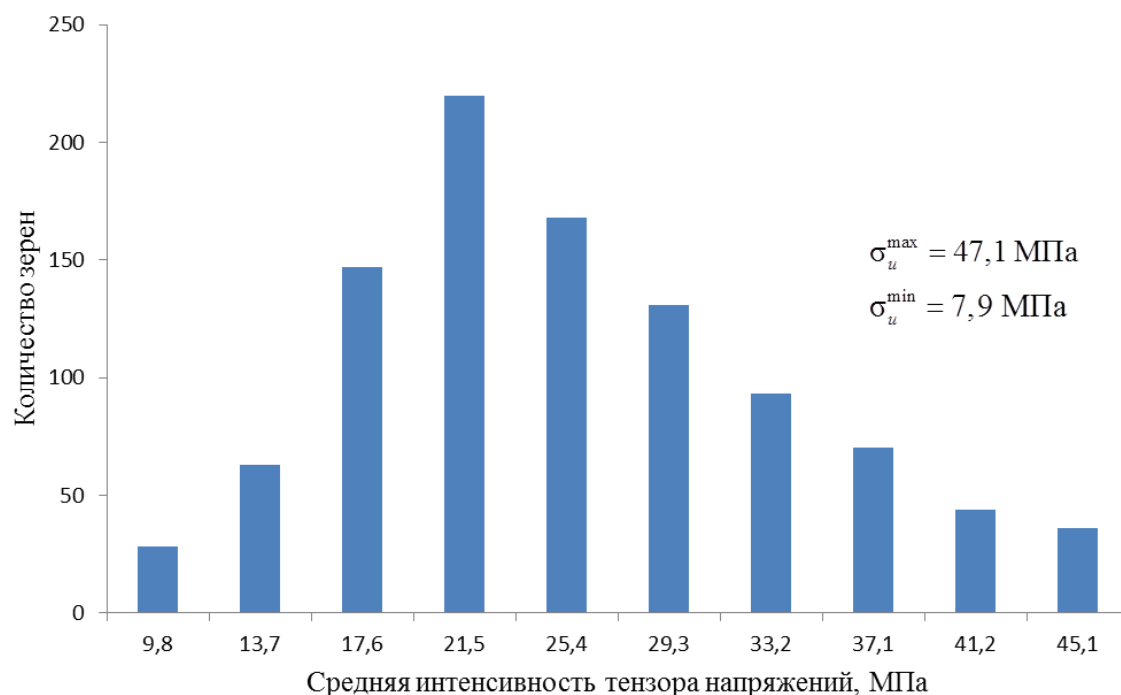


Рис. 2. Распределение кристаллитов по интенсивности тензора напряжений

Анализ представленного распределения приводит к выводу о том, что при равномерном распределении ориентаций кристаллитов, для которого проводились эксперименты, распределение зерен по остаточным мезонапряжениям имеет выраженные закономерности, однако вопрос о характере и причинах его несимметричности остается открытым.

Из проведенных в работе исследований можно сделать вывод о том, что при деформировании представительного объема поликристалла в его зернах возникают значительные остаточные мезонапряжения, способные оказать существенное влияние на его дальнейшее поведение.

Работа выполнена при финансовой поддержке гранта Президента РФ №МК-4917.2015.1, гранта РФФИ №14-01-96008 р\_урал\_a.

#### ЛИТЕРАТУРА:

1. Давиденков Н.Н. Избранные труды: В 2-х т.– Киев: Наук думка. Т. 1. Динамическая прочность и хрупкость металлов. 1981.– 704 с.
2. Биргер И.А. Остаточные напряжения. – М.: Государственное научно-техническое издательство машиностроительной литературы. 1963. – 233с.
3. Поздеев А.А. Няшин Ю.И. Трусов П.В. Остаточные напряжения: теория и приложения. – М.: Наука, 1982. – 109 с.
4. Трусов П.В. Волегов П.С. Кондратьев Н.С. Физические теории пластичности: учеб. пособие // Пермь: Изд-во Перм. нац. исслед. политехн. ун-та, 2013. – 244 с.
5. Ашихмин В.Н., Волегов П.С., Трусов П.В. Конститутивные соотношения с внутренними переменными: общая структура и приложение к текстурообразованию в поликристаллах// Вестник ПНИПУ. Механика. – 2006. – № 14. – С. 11-26.

### ПРОГРАММА ДЛЯ ВЫБОРА ОПТИМАЛЬНОЙ ФОРМЫ ПРЕЦИЗИОННОЙ ОПОРЫ ПОПЛАВКОВОГО ДАТЧИКА УГЛОВОЙ СКОРОСТИ ПО КРИТЕРИЮ МИНИМУМА НАПРЯЖЕНИЙ С УЧЕТОМ ВОЗДЕЙСТВИЯ ТЕМПЕРАТУРЫ

Конкуренция на мировом рынке постоянно возрастает, предъявляются все более жесткие требования к качеству, точности, надежности, безопасности изделий. Поэтому, первоочередной и актуальной задачей является обеспечение соответствия отечественных изделий критериям конкурентоспособности.

Прецизионные поплавковые ДУС разработки ведущих отечественных предприятий имеют: диапазон измеряемых угловых скоростей  $\pm(0,5-6)^\circ/\text{с}$ , коэффициент преобразования  $0,2-2''/\text{бит}$ ; случайно составляющую дрейфа, не зависящего от перегрузки, в запуске  $\pm(0,003-0,005)^\circ/\text{ч}$ ; случайно составляющую дрейфа, не зависящего от перегрузки, между запусками  $\pm(0,03-0,05)^\circ/\text{ч}$ ; случайно составляющую дрейфа, зависящего от перегрузки, в запуске  $\pm 0,05^\circ/\text{ч}$ ; случайно составляющую дрейфа, зависящего от перегрузки, между запусками  $\pm 0,2^\circ/\text{ч}$ ; дрейф, зависящий от квадрата перегрузки  $\pm 0,03^\circ/\text{ч}$ ; нелинейность коэффициента преобразования  $\pm(0,001-0,003)\%$ ; нестабильность коэффициента преобразования не более  $0,003\%$ ; ресурс  $100000$  ч; массу  $0,5-0,7$  кг на один канал измерения [1].

Поплавковый гироскопический прибор предназначен для использования в комплексных командных приборах (ККП), в гиросtabilизированных платформах в качестве индикатора малых угловых скоростей и при азимутальном ориентировании [2]. ДУС предназначен для измерения угловой скорости, действующей вокруг его оси чувствительности и выдачи электрического сигнала, пропорционального по величине и соответствующего по знаку измеряемой угловой скорости. Нулевой сигнал представляет собой сигнал, снимаемый с прибора при отсутствии воздействия входной угловой скорости и перегрузок. Нестабильность сигнала определяется некомпенсированным нулевым сигналом прибора ДУС. Нестабильность сигнала прибора ДУС определяется вредным моментом по оси поплавкового гиروزла (механическим моментом тяжения). Для улучшения параметра «нестабильность нулевого сигнала» прецизионного поплавкового ДУС необходимо минимизировать площадь контакта рабочих поверхностей прецизионных опор с поплавковым гирузлом. Кроме того, прецизионные опоры должны соответствовать определенным требованиям по прочности.

Данная работа посвящена выбору оптимальной формы прецизионных опор (минимальная площадь контакта рабочих поверхностей) с учетом требований, предъявляемым по прочности. Наиболее широкое применение нашли опоры трех типов: цилиндрические, шаровые, конусообразные (рис. 1) [3].



Рис. 1. Формы прецизионных опор

Для решения поставленной задачи была составлена программа на платформе .Net framework 4, на языке программирования С#. Программа предназначена для оптимизации формы прецизионной опоры поплавкового ДУС, по критерию минимума напряжений. Конструкция может быть как односвязанной, так и многосвязанной. Границы могут иметь произвольные очертания, но обладать достаточной гладкостью. Температурные условия трех типов могут задаваться как на внешней границе, так и на внутренней. Программа имеет удобный графический интерфейс (рис. 2). Программа выполнена на платформе .Net framework 4, на языке программирования С#. Программа представляет собой исполняемый .exe файл. Расчет в программе реализован с использованием метода граничных элементов с использованием линейных элементов. Пользователь может задать граничные условия: геометрию области, типы закрепления, внешнее воздействие. После проведения расчета результаты могут выводиться в файл в формате, удобном для визуализации в любом графическом пакете [4].

The screenshot shows a software window titled 'Form1' with several sections for inputting data:

- Базовые параметры:** Includes input fields for 'Число узлов' (0), 'Число элементов' (0), 'Число внутренних точек' (0), 'Число поверхностей' (0), 'Параметр симметрий', 'Область ограничена', 'Тип упругой задачи', and various node coordinates (e.g., 'Первый узел на границе', 'Последний узел на границе', 'Узел ограничений', 'Первый узел площади', 'Последний узел площади', 'Первый узел границы 1', 'Последний узел границы 1', 'Первый узел границы 2', 'Последний узел границы 2', 'Константа ограничения').
- Ключи ввода:** Includes 'Ввод геометрий', 'Параметры упругости и тепловых характеристик', 'Модуль упругости', 'Коэффициент Пуассона', 'Коэффициент теплопроводности', 'Поверхности' (with a 'Замкнутая' checkbox and 'Номер последнего узла'), and 'Ограничения упругой задачи' (with 'Узлы с заданным перемещением' and 'Узлы с заданными усилиями').
- Свойства заполняющей жидкости:** Includes 'Плотность', 'Предел прочности', 'Вязкость', 'Модуль Юнга', and 'Коэффициент Пуассона'.
- Граничные условия тепловой задачи:** A table with columns 'Код', 'Граничные условия', and 'Свободный параметр'. The first row is highlighted with a blue arrow.
- Внутренние точки:** A table with columns 'X', 'Y', and 'isum'. The first row is highlighted with a blue arrow.
- Ввод через радиусы:** Includes 'Внутренний', 'Внешний', 'Эпсилон', and 'M' input fields.
- Ввод через координаты:** Includes 'Внешняя' and 'Внутренняя' dropdown menus, and a table with columns 'x1', 'y1', 'x2', and 'y2'. The first row is highlighted with a blue arrow.
- Bottom left:** A small text area containing '100', 'Задача 1.', '100', and 'Ввод геометрий через радиусы.'
- Bottom right:** A large button labeled 'Посчитать'.

Рис. 2. Графический интерфейс программы

Проведенные исследования показали, что предъявляемым требованиям по прочности, а также для улучшения параметра «нестабильность нулевого сигнала» поплавкового ДУС оптимальной формой является прецизионная опора шарового типа.

#### ЛИТЕРАТУРА:

1. Прецизионные управляемые стенды для динамических испытаний гироскопических приборов/ Д. М. Калихман / Под общ. ред. акад. В.Г.Пешехонова – СПб.: ГНЦ РФ ЦНИИ «Электроприбор», 2008. – 296 с.
2. Филиал ФГУП «НПЦАП им. Академика Н.А. Пилюгина» «Завод звезда». Продукция, URL: <http://zavod-zvezda.ru/produkcija.html> (дата обращения 20.10.2015г.)
3. Lianxi Shen, Jackie Li, Effective elastic moduli of composites reinforced by particle or fiber with an inhomogeneous interphase, International Journal of Solids and Structures 40 (2003) 1393–1409.

4. Пат. 2015616095 Российская Федерация, МПК G 01 P 3/486. Программа для выбора оптимальной формы прецизионной опоры поплавкового датчика угловой скорости по критерию минимума напряжений с учетом воздействия температуры / Пальков Р. С., Пояркин А. В., заявитель и патентообладатель "Саратовский государственный технический университет имени Гагарина Ю.А." (ФГБОУВПО СГТУ им. Гагарина Ю.А.), – № 2015616095; заявл. 13.04.2015; опубл. 29.05.2015, Бюл. № 2. – 14 с. : ил.

УДК 004.942 + 537.634

А.В. Рыжков<sup>1,3</sup>, П.В. Меленёв<sup>1,2,3</sup>, Ю.Л. Райхер<sup>1,3</sup>.  
<sup>1</sup>ПНИПУ, <sup>2</sup>УФУ, <sup>3</sup>ИМСС УрО РАН

## МАГНИТНЫЕ И СТРУКТУРНЫЕ СВОЙСТВА МАГНИТОПОЛИМЕРНОГО КОМПОЗИТА: МНОГОЧАСТИЧНАЯ МОДЕЛЬ

*Актуальность.* Магнитополимерные композиты – полимерные матрицы, наполненные нанодисперсным ферромагнитным наполнителем – представляют важный класс функциональных материалов. Управляемые внешним полем свойства таких образцов позволяют применять их в инновационном приборостроении: при разработке манипуляторов, сенсоров и пр. Для использования в наномедицине синтезируют и экспериментально изучают биосовместимые полимерные объекты, содержащие сотни намагниченных наночастиц [1].

Чтобы предсказать поведение мелкомасштабной композитной системы, требуется разработать адекватную модель, описывающую магнитный отклик образца и процессы изменения его структуры вследствие образования кластеров. Подход, явно рассматривающий взаимодействие магнитных наночастиц и полимерных цепочек с помощью модели крупнозернистой (coarse-grained) молекулярной динамики (КЗМД), был успешно применен для описания механизмов деформирования двумерных и трехмерных феррогелей [2], [3]. Было показано, что различные способы встраивания частиц в матрицу приводят к существенно отличным друг от друга эффектам.

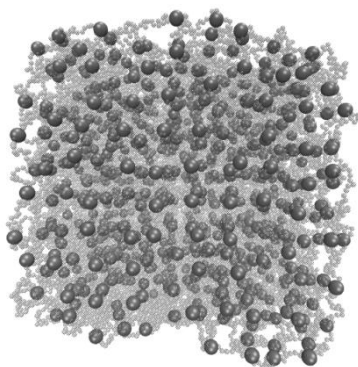


Рис. 1. Начальная конфигурация модельного феррогелевого объекта

*Цели работы.* Цель данной работы – описать процесс намагничивания образца феррогеля, используя подход КЗМД. Анализ изменения структуры (образование цепочек из наночастиц) производится путем построения функции распределения плотности частиц, чувствительной к направлению цепочек.

*Модель.* Рассматривается трехмерный образец, состоящий из сферических частиц двух типов: частицы типа I имитируют зерна магнитного наполнителя, частицы типа II – это мономеры, соединенные в полимерные цепочки (рис. 1), своими концами жестко прикрепленные к магнитным зернам. Цепочки образуют кубическую сетку, в узлах которой с некоторой вероятностью располагаются частицы типа I. Частицы типа I являются точечными диполями, магнитные моменты которых следуют за локальным полем, но при этом испытывают тепловые флуктуации. Магнитная частица

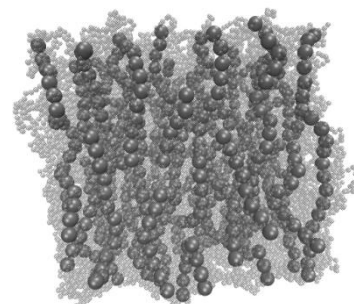


Рис. 2. Конечная конфигурация после намагничивания



обладает одноосной магнитной анизотропией (имеет направление легкого намагничивания), что также влияет на движение ее магнитного момента и свойства всей системы. Таким образом, в построенной модельной системе трансляционные и ротационные степени свободы магнитных частиц и полимерных цепочек взаимосвязаны.

Метод молекулярной динамики заключается в численном интегрировании уравнений движения для всех частиц системы. Для  $i$ -той частицы с радиус-вектором  $\mathbf{r}_i$  и массой  $m_i$  уравнение движения записывается в виде:

$$m_i \ddot{\mathbf{r}}_i = -\nabla U_i - \eta \dot{\mathbf{r}}_i + \mathbf{f}_i(t), \quad i = 1, \dots, N,$$

где  $U_i$  – энергия частицы, являющаяся суммой парных потенциалов ее взаимодействия с остальными. Последние слагаемые в правой части отражают действие термостата Ланжевена с температурой  $T$  [4]: наличие линейной вязкости  $\eta$  и случайной силы  $\mathbf{f}_i(t)$  со свойствами белого шума.

Энергия  $i$ -го мономера описывается выражением:

$$U_i^{\text{monomer}} = \sum_{j, j \neq i}^N U^{\text{LJ}}(\mathbf{r}_i, \mathbf{r}_j) + \sum_{k, k \neq i}^{n_i} U^{\text{harm}}(\mathbf{r}_i, \mathbf{r}_j),$$

где  $N$  – общее число частиц в модели,  $\mathbf{r}_i, \mathbf{r}_j$  – радиус-векторы частиц. Стерическое взаимодействие моделируется потенциалом Леннард-Джонса  $U^{\text{LJ}}$ , обрезанным на расстоянии, равном сумме радиусов частиц. Продольная упругость связи мономера с ближайшими соседями по полимерной цепочке задается гармоническим потенциалом  $U^{\text{harm}}$ .

Магнитная составляющая энергии  $i$ -той частицы типа I есть:

$$U_i^{\text{magn}} = -\boldsymbol{\mu}_i \cdot \mathbf{H}_0 + \sum_{j, j \neq i}^{N^{\text{magn}}} U^{\text{DD}}(\mathbf{r}_i, \mathbf{r}_j, \boldsymbol{\mu}_i, \boldsymbol{\mu}_j) - E_A \cos^2 \theta_i.$$

Первое слагаемое – часть энергии Зеемана, связанная с действием внешнего магнитного поля  $\mathbf{H}_0$  на магнитный момент  $\boldsymbol{\mu}_i$ , второе – энергия диполь-дипольного взаимодействия с остальными магнитными моментами системы. Третье слагаемое – энергия одноосной магнитной анизотропии, где  $E_A$  – ее характерное значение энергии, а  $\theta_i$  – угол между магнитным моментом и осью легкого намагничивания  $i$ -ой наночастицы.

*Результаты.* Расчеты проводились с помощью пакета ESPResSo [5]. Рассматривалась полимерная сетка из  $10 \times 10 \times 10$  узлов, в случайно выбранных 80% которых размещались магнитные частицы. Исходные конфигурации (рис. 1) рассчитывались в отсутствии внешнего поля и диполь-дипольного взаимодействия. Далее выполнялось несколько расчетов при различных значениях внешнего поля для

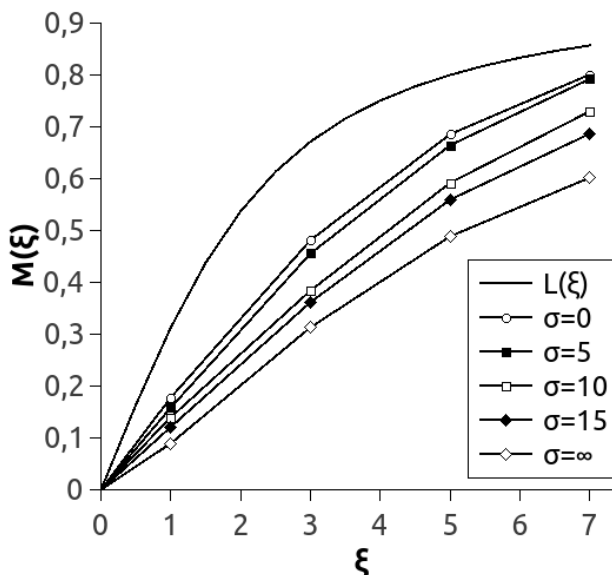


Рис. 3. Кривые намагниченности  $M(\xi) = \langle \mu_y \rangle / N_m \mu$  при различных значениях энергии анизотропии  $\sigma$

$$, L(\xi) = \text{cth}(\xi) - \frac{1}{\xi} \text{ – функция Ланжевена}$$

получения равновесной кривой намагничивания. Отметим, что каждый расчет проводился для 10 исходных конфигураций с последующим осреднением результатов по реализациям.

На рис. 3 представлены зависимости проекции среднего магнитного момента на направление поля от величины этого поля при разных значениях энергии магнитной анизотропии частиц. Значения поля и энергии анизотропии выражены через безразмерные параметры  $\xi = \mu H/k_B T$ ,  $\sigma = E_A/k_B T$ , где  $k_B T$  – энергия тепловых колебаний. Для сравнения приведен график функции Ланжевена, которой описывает намагничивание ансамбля магнитоизотропных не взаимодействующих частиц. По результатам моделирования

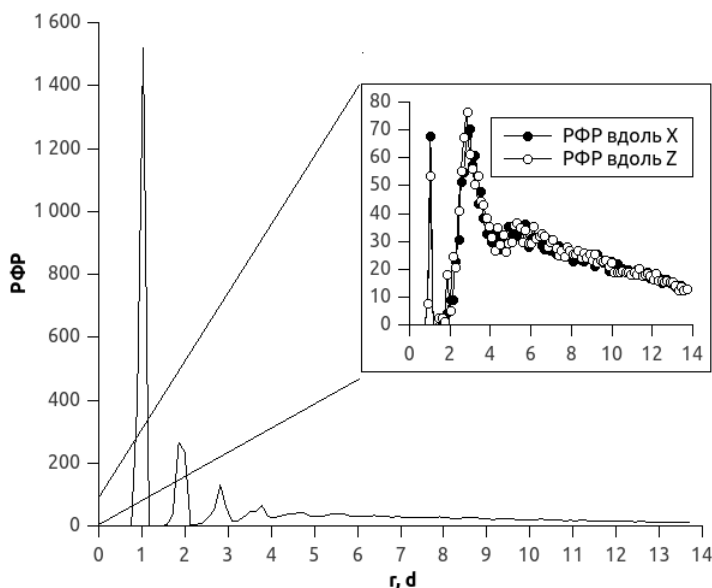


Рис. 4. РФР частиц вдоль направления действия поля (ось Y), на врезке РФР вдоль двух других координатных осей

(РФР) специального вида. Для этого подсчитываются частицы в узком сферическом секторе вдоль выбранного направления. После такого анализа в трех координатных направлениях выяснилось, что РФР в направлении оси действия магнитного поля (ось Y) имеет ярко выраженные пики на малых расстояниях (рис. 4). Такой вид функции свидетельствует о высокой корреляции расположения частиц вдоль данного направления. Это явно соответствует наличию цепочек, что также подтверждается визуальной моделью на рис. 2. Для сравнения на врезке рис. 4 представлены РФР, рассчитанные для двух других координатных направлений; они имеют принципиально иную форму, а также много меньшие характерные значения.

**Выводы.** Представлена модель малого магнитополимерного объекта. Методом крупнозернистой молекулярной динамики были получены равновесные кривые намагниченности при различных параметрах одноосной магнитной анизотропии частиц. Проведен анализ межчастичных корреляций при индуцированном приложенным полем образовании цепочечных кластеров.

#### ЛИТЕРАТУРА:

1. Thévenot, J., Oliveira, H., Sandre, O., Lecommandoux, S. // Chem. Soc. Rev. – 2013. - №42. – p. 7099-7116
2. Weeber, R., Kantorovich, S., Holm, C. // Soft Matter. – 01/2012. – 8(38). – p. 9923-9932

3. Weeber, R., Kantorovich, S., Holm, C. // Journal of Magnetism and Magnetic Materials 383 (2015) 262–266
4. Berendsen, H. J. C., Postma, J.P. M., Van Gunsteren, W. F., Di Nola, A., Haak, J. R. // J. chem. Phys. – 1959. - №81. – p. 3684-3690
5. ESPResSo: Extensible Simulation Package for Research on Soft matter, <http://espressomd.org/>

УДК 533.6.011.5

Е.Л. Светличная

Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого

### ИССЛЕДОВАНИЕ И ПОСТРОЕНИЕ ЧИСЛЕННОГО РЕШЕНИЯ ДВУМЕРНЫХ УРАВНЕНИЙ ГАЗОВОЙ ДИНАМИКИ, ПОЛУЧЕННОГО НА ОСНОВЕ РАЗНОСТНЫХ ФИКСИРОВАННЫХ ШАБЛОНОВ ВЫСОКОГО ПОРЯДКА АППРОКСИМАЦИИ

Необходимость решения уравнений газовой динамики возникает при рассмотрении вопросов, связанных с формированием и распространением ударных волн в газах, течением газа в соплах или решетках турбин, обтеканием тел при их движении в атмосфере, взаимодействием ударных волн с преградами, и т.д. Т.е. тогда, когда силами вязкости можно пренебречь по сравнению с силами инерции, а сжимаемость газа при этом существенна [0]. При рассмотрении сверхзвуковых течений приходится сталкиваться с проблемой появления газодинамических разрывов (ударных волн и контактных поверхностей). Поэтому использование классических численных методов приводит к неизбежному появлению осцилляций в областях с разрывами. Целью работы является построение и исследование численного решения двумерных уравнений газовой динамики, на примере задачи о косом скачке уплотнения в плоском канале, а также изучение разностных фиксированных шаблонов высокого порядка точности для решения двумерных уравнений газовой динамики. Для достижения поставленной цели были реализованы следующие задачи:

- 1) написана программа в MathCAD для определения коэффициентов фиксированных шаблонов высоких порядков точности по пространству;
- 2) реализованы краевые условия, обеспечивающие формирование косого скачка уплотнения в плоском канале постоянного сечения;
- 3) написана программа на языке Fortran для решения двумерных уравнений газовой динамики в прямоугольной области на основе численной схемы повышенного порядка точности с использованием фиксированных шаблонов.
- 4) проведено параметрическое исследование численного решения задачи.

Рассматривается следующая задача. В канал, длина которого в четыре раза превышает его ширину, втекает сверхзвуковой поток идеального газа с показателем адиабаты равным  $k=1.4$  под углом  $\theta=14^\circ$  к боковой поверхности канала со следующими параметрами:  $u=2$ ,  $v=0.5$ ,  $P=1$ ,  $\rho=1$ , что соответствует скорости звука  $c = \sqrt{kP / \rho} \approx 1.183$  и  $M \approx 1.74265$ , где  $M = \sqrt{u^2 + v^2} / c$ ,  $u$ ,  $v$  – компоненты скорости газа,  $c$  – скорость звука.

Введем обозначения:  $\beta$  – угол наклона фронта скачка к скорости невозмущенного потока. Разрывы параметров на косом скачке являются функциями не только числа Маха  $M$  до скачка, но и одного из углов  $\beta$  или  $\theta$ .

Связь угла наклона скачка с углом отклонения потока устанавливается формулой [0]:

$$\operatorname{ctg} \theta = \frac{1 + M^2 \left( \frac{k+1}{2} - \sin^2 \beta \right)}{M^2 \sin^2 \beta - 1} \cdot \operatorname{tg} \beta \quad (1)$$

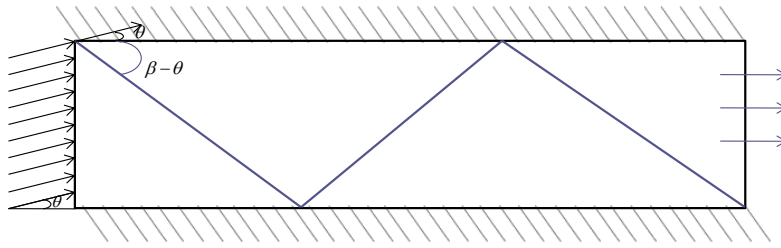


Рис. 1. Формирование косоугольного скачка уплотнения в плоском канале

Угол  $\theta$  выбран таким образом, чтобы косая ударная волна отражалась от стенок так, как показано на рис. 1.

Исходя из геометрии канала, угол:  $\beta - \theta = \operatorname{arctg}(3/4) \approx 36.84^\circ$ .

Используя формулу (1), теоретически получим угол  $\beta \approx 51.914^\circ$ .

Граничные условия:

На нижней и верхней границе канала задаем условия непротекания, характеризующиеся равенством нулю нормальной компоненты скорости.

На левой границе канала задаем давление, плотность и компоненты скорости газа. На правой границе условия не задаются, поскольку истечение сверхзвуковое.

Система уравнений, описывающая нестационарное течение сжимаемого газа, в двумерном приближении имеет вид [0]:

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial E(U)}{\partial x} + \frac{\partial F(U)}{\partial y} = 0 \quad (2)$$

Здесь  $U$  – вектор консервативных переменных,  $E, F$  – вектор потоков.

$$U = \begin{pmatrix} \rho \\ \rho u \\ \rho v \\ \rho E \end{pmatrix}; \quad E(U) = \begin{pmatrix} \rho u \\ \rho u^2 + p \\ \rho uv \\ \rho uH \end{pmatrix}; \quad F(U) = \begin{pmatrix} \rho v \\ \rho uv \\ \rho v^2 + P \\ \rho vH \end{pmatrix},$$

где  $\rho$  – плотность,  $u, v$  – компоненты скорости,  $E$  – полная энергия,  $p$  – давление,  $H$  – энтальпия,  $H = E + P/\rho$ .

Использование фиксированных разностных шаблонов позволяет восстанавливать распределение газодинамических параметров внутри расчетной ячейки на основе построения интерполяционного полинома. По восстановленному распределению газодинамических параметров определяются параметры на левой и правой границах внутри ячеек [0].

Пример противопотоковой реконструкции третьего порядка:

$$v_{i+1/2}^+ = -\bar{v}_{i-1}/6 + \bar{v}_i/5 + \bar{v}_{i+1}/3 + O(\Delta x^3) \quad (\text{для правой границы})$$

$$\text{или } v_{i+1/2}^- = \bar{v}_{i-1}/3 + \bar{v}_i/5 - \bar{v}_{i+1}/6 + O(\Delta x^3) \quad (\text{для левой границы})$$

В общем случае, значения на гранях ячеек определяются по формулам (3) и (4), причем коэффициенты  $c_{rj}$  находим из выражения (5)

$$v_{i+1/2}^+ = \sum_{j=0}^{k-1} c_{r,j} \overline{v_{i-r+j}} \quad (3) \quad \text{и} \quad v_{i+1/2}^- = \sum_{j=0}^{k-1} c_{rj} \overline{v_{i-r+j}} \quad (4)$$

$$C_{rj} = \sum_{m=i+1}^k \frac{\sum_{\substack{l=0 \\ l \neq m}}^k \prod_{\substack{q=0 \\ q \neq m,l}}^k (r-q+1)}{\prod_{\substack{l=0 \\ l \neq m}}^k (m-l)} \quad (5)$$

Для определения потоков газодинамических параметров на границах ячеек в данной работе использовался метод Ван-Лири.

Исследования численного решения проводилось на основе схем со второго по седьмой (рис. 2) порядков точности.

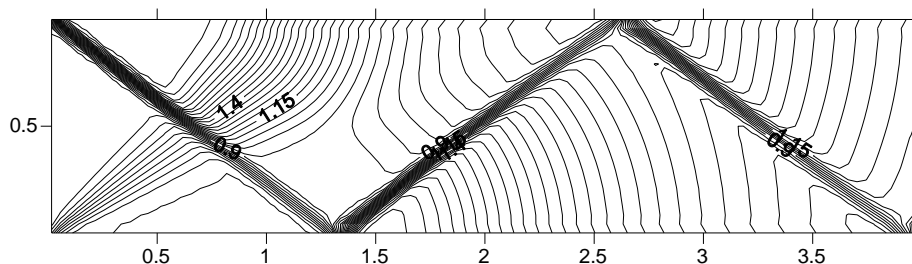


Рис. 2. Зависимость давления от координат для схемы седьмого порядка

В работе исследовались разностные схемы при различных значениях числа Куранта с одинаковым порядком точности и одинаковым разбиении области решения. Также рассматривалось поведение решения при измельчении сетки для схем с одним и тем же порядком точности при заданном числе Куранта и проводилось сравнение решений, полученным на основе схем различного порядка точности.

Расчеты показывают, что координата точки отражения косой ударной волны от нижней стенки отличается от точного значения при указанных значениях параметров не более чем на 1%.

Сходимость разностной схемы была проверена для схем второго и более высоких порядков. Анализируя поведение решения, можно сделать вывод, что схема устойчива, так как при измельчении сетки точность решения значительно увеличивается.

Выводы:

1. Увеличение порядка используемой разностной схемы требует понижение значения числа Куранта для корректного разрешения контактного разрыва и ударной волны.
2. Дальнейшее увеличение порядка аппроксимации разностной схемы не оправдано применительно к решению уравнения газовой динамики в области с разрывами, т.к. точность решения увеличивается незначительно по сравнению с вычислительными затратами.
3. Симметричные реконструкции обеспечивают лучшую сходимость по сравнению с использованием противопотоковых схем, однако в решении с использованием таких шаблонов появляются нефизические осцилляции.

#### ЛИТЕРАТУРА:

1. Годунов С.К., Забродин А.В., Иванов М.Я. Численные методы решения многомерных задач газовой динамики. М.: Наука, 1976. 400 с.
2. Лойцянский Л.Г. Механика жидкости и газа. М.: Дрофа, 2003. 840 с.
3. Миньков Л.Л., Шрагер Э.Р. Численные методы решения одномерных нестационарных уравнений газовой динамики. Томск: Изд-во Том. ун-та, 1999. 44 с.
4. Пинчуков В.И., Шу Ч.-В. Численные методы высоких порядков для задач аэродинамики. Новосибирск: Изд-во СО РАН, 2000. 232 с.

Д.Г. Селуков, П.С. Волегов  
Пермский национальный исследовательский политехнический университет

### ИССЛЕДОВАНИЕ ВЛИЯНИЯ РАЗМЕРА ЗЕРНА НА ПРЕДЕЛ ТЕКУЧЕСТИ ПОЛИКРИСТАЛЛА

Важной макроскопической характеристикой материала является предел текучести. Изучение влияния на предел текучести других параметров материала, безусловно, имеет практическую значимость. Настоящая работа посвящена проблеме Холла-Петча, задаче о влиянии среднего размера зерна на предел текучести поликристалла. Результатом работ Холла и Петча стало соотношение (1), оно выполняется для распространенных металлов в диапазоне размера зерна  $10^{-3}$ – $10^{-6}$  м с постоянными параметрами материала, входящими в данное соотношение. При меньших размерах зерна наблюдается так называемый обратный закон Холла-Петча с отрицательным параметром  $k$ .

$$\sigma_T = \sigma_0 + kd^{-1/2}, \quad (1)$$

где  $\sigma_T$  – предел текучести,  $d$  – средний размер зерна,  $\sigma_0$ ,  $k$  – параметры материала.

В работе предполагается, что влияние размера зерна на предел текучести происходит посредством зернограницного упрочнения в зернах поликристалла. Достижение предела текучести подразумевает активацию систем скольжения (СС) в монокристаллах, движение дислокаций по которым является основным механизмом пластической деформации. Размер зерна ограничивает средний пробег дислокаций, что приводит к затруднениям дальнейшего сдвига по СС, следствием чего является повышение предела текучести при уменьшении размера зерна. Предполагается, что обратный закон Холла-Петча наблюдается в связи с другим механизмом неупругой деформации нанозернистых материалов. В работе же рассматриваются материалы с вышеуказанным диапазоном размера зерна  $10^{-3}$ – $10^{-6}$  м.

В работе рассматривается двухуровневая модель деформирования поликристалла, основанная на физической теории пластичности [1, 2]. Модель включает два масштабных уровня: макроуровень, элементом которого является представительный объем поликристалла, состоящий из некоторого количества произвольно ориентированных монокристаллов, и мезоуровень – масштаб одного кристаллита. В модели заложен механизм пластического сдвига по вполне определенным СС отдельного кристаллита. Начало движения дислокаций вызывается достижением критических касательных напряжений на СС, при этом значения критических напряжений может меняться в связи с взаимодействием дислокаций друг с другом и другими дефектами кристаллов. Такое изменение, в частности, может происходить при переходе дислокаций из зерна в зерно. Механизм такого упрочнения называется зернограницным. При переходе дислокации меняют СС, общем случае не совпадающие ни по направлению скольжения, ни по плоскости скольжения. Физическая причина упрочнения заключается в том, что в силу закона сохранения вектора Бюргерса при переходе дислокации на границе остается дислокационная структура, описываемая вектором Бюргерса, равным разности векторов Бюргерса двух систем скольжения: испускающей и принимающей; при этом она препятствует дальнейшим переходам дислокаций.

Закон упрочнения, отвечающий за зернограницное упрочнение, принят в виде [3-5]:

$$f_{3T}^{(k)} = \eta \frac{1}{d} \gamma^{(k)} \dot{\gamma}^{(k)} \sum_{l=1}^L M_l^{(k)} \frac{S_l}{S}, \quad k = 1, \dots, K, \quad (2)$$

где  $\eta$  – параметр зернограницного упрочнения,  $d$  – средний размер зерна,  $\gamma^{(k)}$ ,  $\dot{\gamma}^{(k)}$  – сдвиги по системам скольжения и их скорости соответственно,  $L$  – количество соседних зерен для

данного,  $M_l^{(k)}$  – мера взаимной разориентации данного зерна, соседнего ( $l$ -го) зерна ( $k$ -й системы скольжения с системами скольжения соседнего зерна) и границы,  $S_l$  – площадь соприкосновения  $l$ -го зерна с данным,  $S$  – площадь поверхности, соприкасающейся с соседними зёрнами,  $K$  – количество систем скольжения. Чем больше площадь поверхности, тем больше дислокаций может переходить в данное зерно, тем большее упрочнение оно вызовет.

Мера разориентации показывает, насколько близки системы скольжения и ориентации границы, принимается в следующем виде [4]:

$$M_l^{(i)} = \min_j \left( \left\| \left[ \Delta \mathbf{I}_l^{(i)(j)} \right]_{ЗГБ} \right\| \right) \quad (3)$$

где  $\Delta \mathbf{I}_l^{(i)(j)}$  – разность тензоров деформации скорости, соответствующих пластическим сдвигам по  $i$ -й СС рассматриваемого зерна и  $j$ -й СС соседнего  $l$ -го зерна. Индекс ЗГБ обозначает, что рассматриваются компоненты тензора в строго определенном базисе, связанном с границей зерна и  $i$ -й СС. Физический смысл этой нормы заключается в том, что дислокация переходит в СС, при которой соседнее зерно приобретет минимальную внутреннюю энергию.

Результатом работы является реализация вышеописанной модели. Проведены численные эксперименты, анализ которых представлен на рис. 1.

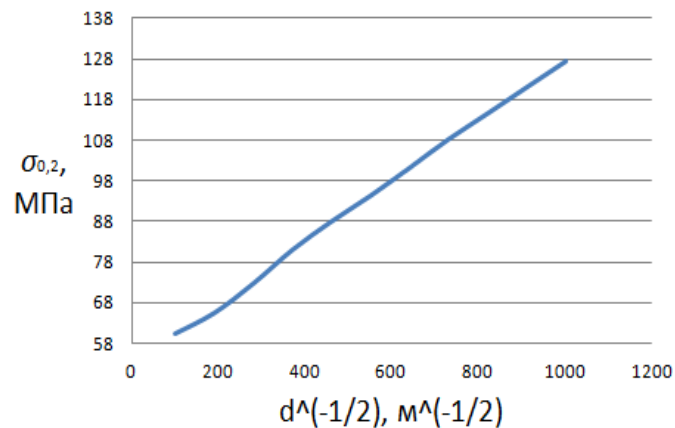


Рис. 1. Зависимость условного предела текучести от размера зерна. Диапазон размера зерна  $10^{-6}$ – $10^{-4}$ м

Была проведена серия численных экспериментов, в которых варьировался размер зерна. Из графиков зависимости интенсивностей тензоров напряжения и деформации фиксировалось значение условного предела текучести 0.2. Соотношение Холла-Петча предсказывает линейную зависимость условного предела текучести от величины размера зерна в степени  $-1/2$ , что и отражено на рис. 1. При этом коэффициент  $k=0.01$ , что наблюдается для меди.

В работе рассмотрена и реализована двухуровневая математическая модель деформирования поликристалла, описывающая зернограницное упрочнение, основанная на физических механизмах пластической деформации. Проведены численные эксперименты, получено качественное удовлетворение закону Холла-Петча.

Работа выполнена при финансовой поддержке гранта Президента РФ №МК-4917.2015.1, гранта РФФИ №14-01-96008 р\_урал\_a.

#### ЛИТЕРАТУРА:

1. Трусов П.В., Волегов П.С., Кондратьев Н.С. Физические теории пластичности: учеб. пособие –

Пермь: Изд-во Перм. нац. исслед. политехн. ун-та, 2013. – 244с.

2. Трусов П.В., Волегов П.С. Физические теории пластичности: приложение к описанию упрочнения в поликристаллах // Вестник Тамбовского университета. Серия: Естественные и технические науки. – 2010. – Т. 15, № 3-1. – С. 983-984.

3. Трусов П.В., Волегов П.С., Янц А.Ю. Описание внутризеренного и зернограничного упрочнения моно- и поликристаллов // Научно-технические ведомости Санкт-Петербургского государственного политехнического университета. Физико-математические науки. – 2010. – Т. 2, № 98. – С. 110-119.

4. Кондратьев Н.С., Трусов П.В. О мере разориентации систем скольжения соседних кристаллитов в поликристаллическом агрегате // Вестник ПНИПУ. Механика. – 2012. – № 2. – С. 112-127.

5. Кондратьев Н.С., Трусов П.В. Описание упрочнения систем дислокационного скольжения за счет границ кристаллитов в поликристаллическом агрегате // Вестник ПНИПУ. Механика. – 2012. – № 3. – С. 78-97.

УДК 539.3

М.В. Симонов, А.М. Кривцов

Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого

### ТЕПЛОВЫЕ КОЛЕБАНИЯ В ОДНОМЕРНОМ КРИСТАЛЛЕ

В настоящее время множество научных трудов посвящено исследованию процессов, протекающих в идеальных кристаллах [1-3]. В простейших дискретных системах, таких как одномерный кристалл, распространение тепла не подчиняется закону Фурье [4-6]. Если в начальный момент времени частицы одномерного кристалла с линейным взаимодействием упорядочены, а их скорости заданы случайно, то начинается колебательный процесс перехода кинетической энергии в потенциальную энергию. Этот переход заканчивается распределением внутренней энергии между кинетическими и деформационными степенями свободы, определяемым теоремой о вириале [7]. Получено аналитическое решение, позволяющее определить, что колебания кинетической и потенциальной энергии в линейном одномерном кристалле выражаются через функцию в Бесселя первого рода. Однако в случае нелинейного взаимодействия между частицами - аналитического решения нет.

Рассматривалось взаимодействие частиц с кубической нелинейностью в выражении для взаимодействия силы, которое может быть представлено, как частный случай нелинейного взаимодействия.

Уравнение динамики цепочки имеет вид:

$$m\ddot{u}_k = C_1(u_{k-1} - 2u_k + u_{k+1}) + C_2[(u_{k+1} - u_k)^3 - (u_k - u_{k-1})^3] \quad (1)$$

где  $u_k$  – перемещение  $k$ -й частицы;  $k$  – индекс, принимающий произвольные целые значения. Для моделирования бесконечной цепочки атомов принимались периодические граничные условия:

$$u_{k+N} = u_k, \quad N \gg 1, \quad (2)$$

где  $N$  – число независимых частиц.

Для произвольной величины  $f_k$  введен оператор осреднения по индексу:

$$\langle f_k \rangle = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N f_k.$$

Для проведения исследования введен безразмерный параметр  $\alpha$ , характеризующий отношение влияния линейного и нелинейного взаимодействия между частицами одномерного кристалла:

$$\alpha = (C_2 / C_1) \cdot \theta = (C_2 \sigma^2) / (C_1 \omega_0^2).$$



Рассмотрен вопрос о характере колебаний кинетической энергии одномерного кристалла с нелинейным взаимодействием между частицами. Для решения задачи (1) заданы начальные условия в виде:

$$u_n = 0, \quad \dot{u}_n = \rho_n, \quad 0 \leq n \leq N, \quad (3)$$

где  $n$  – номер частицы,  $\rho_n$  – случайная величина полученная с помощью генератора случайных чисел. Подобное задание начальных условий аналогично распределению равномерной температуры по кристаллу.

Для анализа зависимости кинетической энергии от параметра  $\alpha$  были проведены численные эксперименты для одномерного кристалла с нелинейным взаимодействием частиц (1) с начальным равномерным распределением скоростей (3) и граничными условиями (2).

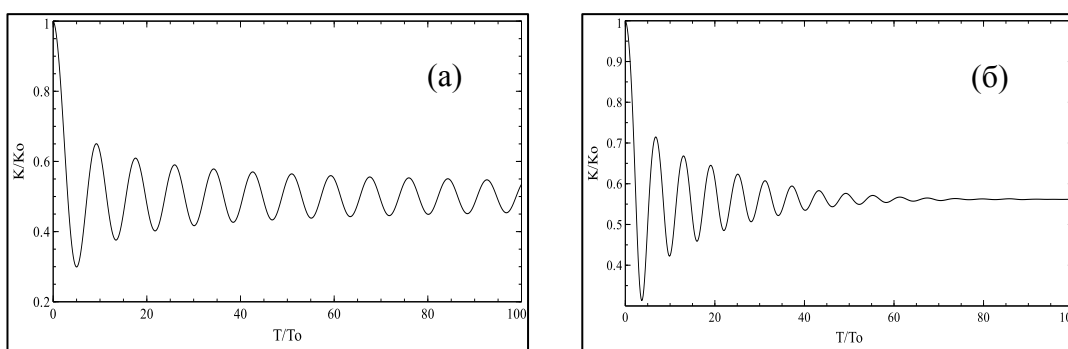


Рис. 1. Зависимость колебаний кинетической энергии в кристалле, а) при  $\alpha = 0$ , б) при  $\alpha = 1$

Получено, что с увеличением нелинейности скорость затухания колебаний увеличивается. Предложена аппроксимация закона затухания колебаний кинетической энергии кристалла для различного значения нелинейности:

$$g(t/T_0) = a(t/T_0)^{-b} \quad (4)$$

Показано, что предложенная аппроксимация дает хорошее соответствие для малой нелинейности.

Для второй постановки задачи была исследована зависимость кинетической температуры кристалла от параметра нелинейности  $\alpha$ . периодическим граничными условиями, движение которого подчиняется (1), рассмотрены следующие начальные условия:

$$u_n = 0, \quad \dot{u}_n = \rho_n \sigma(x), \quad x = na, \quad (5)$$

где  $n$  – номер частицы,  $a$  – расстояние между ними,  $\rho_n$  – случайная величина с равномерным распределением, а  $\sigma(x)$  - начальные распределения скоростей частиц в цепочке. Величину  $\sigma(x)$  определим так, чтобы получить начальное распределение температуры по синусоидальному закону:

$$\sigma^2(x) = A \sin(\kappa x) + \bar{T}, \quad (6)$$

где  $A$  и  $\kappa$  – константы,  $\kappa = 2\pi/N$ ,  $N$  – число частиц в цепочке,  $\bar{T}$  – значение средней кинетической температуры в одномерном кристалле.

Исследована амплитуда колебаний кинетической температуры через разложение кинетической температуры одномерной цепочки в ряд Фурье. Для этого вычислен первый коэффициент при разложении кинетической температуры по синусу:

$$T(t) = (2/N) \sum_{n=1}^N T_n(t) \sin(2\pi n/N), \quad n = \overline{1, N} \quad (7)$$

где  $N$  – число точек, в которых вычислена температура.

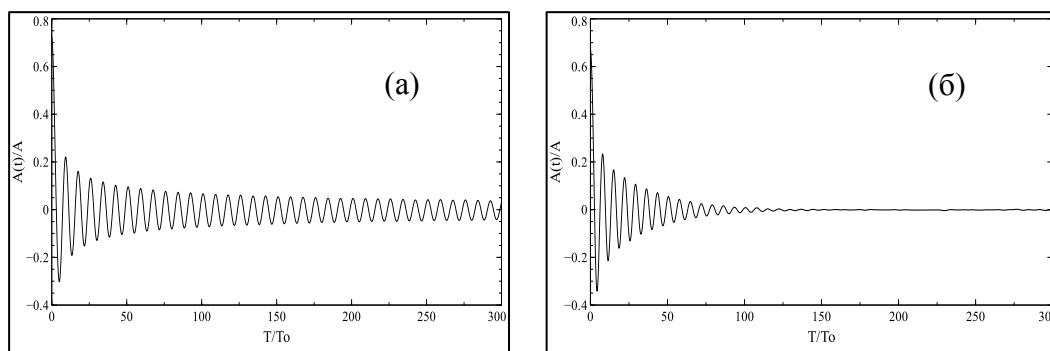


Рис. 2. Зависимость колебаний амплитуды синусоидального профиля температуры от времени в одномерном кристалле, а) при  $\alpha = 0.0$ , б) при  $\alpha = 2.0$

Анализируя результаты моделирования, полученные выше, можно сделать вывод о том, что скорость затухания колебаний амплитуды температуры увеличивается при увеличении коэффициента нелинейности  $\alpha$ , а период колебаний – уменьшается.

Получены параметры аппроксимации закона затухания (4) амплитуды кинетической температуры для различного значения параметра нелинейности. Показано, что выбранный вид закона затухания (4) дает хорошее соответствие при малой нелинейности, однако при большой нелинейности предложенная аппроксимация не дает точного соответствия.

Показано различие в законах затухания для двух рассмотренных начальных условий.

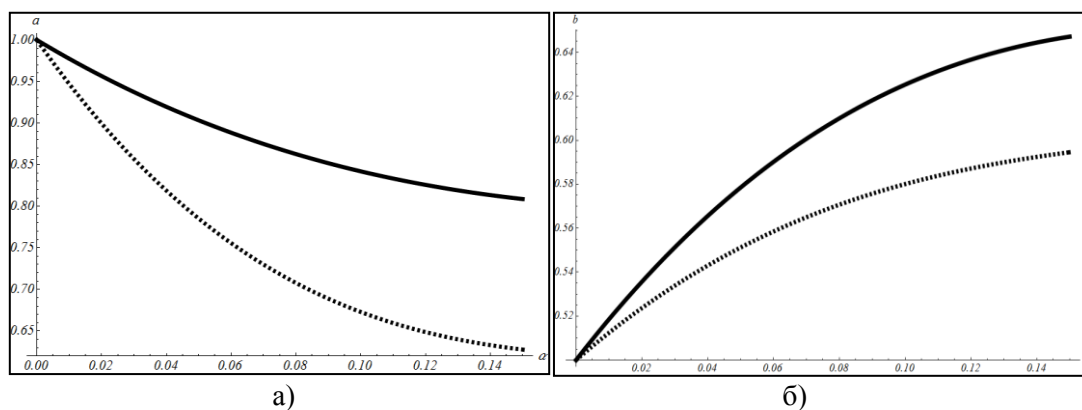


Рис. 3. Зависимость а) коэффициента  $a$  и б) показателя степени  $b$  закона затухания от нелинейности (кинетическая энергия – сплошная линия, кинетическая температура – штриховая)

Из представленных результатов можно сделать вывод о том, что зависимость параметра  $a$  в законе затухания для колебания кинетической энергии и амплитуды кинетической температуры имеют схожий вид. Результаты, представленные на рис. 6, показывают, что показатели степени ( $b$ ) в законе затухания в двух рассмотренных задачах имеют схожий вид зависимости от параметра нелинейности, однако значения параметров отличаются друг от друга на 20%. Коэффициент  $a$ , для двух рассмотренных величин имеет нелинейную зависимость от параметра  $\alpha$ , при этом значения коэффициентов двух законов затухания отличаются на 30%. Таким образом, установлено различие в законах затухания при рассмотрении нелинейного взаимодействия.

**Выводы.** Получено, что зависимость кинетической энергии и кинетической температуры одномерного кристалла от времени носит колебательный характер и с увеличением нелинейности скорость затухания колебаний увеличивается. Предложена аппроксимация закона затухания кинетической энергии и кинетической температуры

кристалла для различного значения параметра нелинейности  $\alpha$ . Введенная аппроксимация дает хорошее соответствие для малой нелинейности, при большой нелинейности наблюдается расхождение графика колебаний энергии и закона затухания

#### ЛИТЕРАТУРА:

1. Кривцов А.М. Деформирование и разрушение твердых тел с микроструктурой. М.: Физматлит, 2007. 304 с.
2. Nakazawa H. // Prog. Theor. Phys. Suppl. 1970. V. 45. P. 231–262.
3. Кривцов А.М., Ле-Захаров А.А. Исследование процесса теплопроводности кристаллах с дефектами методами молекулярной динамики // ДАН. 2008. Т. 420. № 1. С. 45 – 49.
4. Giardina C., Livi R., Politi A., Vassalli M. // Phys. Rev. Lett. 2000. V. 84. № 10. P. 2144–2147.
5. Lepri S., Livi R., Politi A. // Phys. Rev. Lett. 1997. V. 78. № 10. P. 1896–1899.
6. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Механика. Т. 1. Теоретическая физика. М.: Физматлит, 2004. 224 с.
7. Кривцов А.М. Колебания энергий в одномерном кристалле ДАН. 2014, том 458, № 3, с. 279–281.

УДК 538.911, 539.32

С.С. Стволова, И.Ю. Зубко

Пермский национальный исследовательский политехнический университет

### ИНВАРИАНТНОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ ТЕНЗОРА УПРУГИХ МОДУЛЕЙ ПРИ ДИСКРЕТНО-АТОМИСТИЧЕСКОМ МОДЕЛИРОВАНИИ

*Актуальность.* Для прогнозирования свойств наноматериалов и нанокompозитов требуются оценки физико-механических свойств наночастиц. Экспериментальные методы прямого их определения в настоящее время разработаны не полностью. Косвенные методы основаны на применении решений классических задач механики, что не всегда обосновано для нано- объектов. Альтернативой экспериментальным методам являются расчеты с применением дискретно-атомистического моделирования. Прогнозируемые свойства определяются выбранными потенциалами межатомного взаимодействия.

*Целью работы* является сравнение возможностей двух- и многочастичных потенциалов при прогнозировании упругих свойств кристаллических материалов.

Полученные в работе точные выражения в виде сумм для тензора упругих свойств позволяют значительно упростить расчеты по прогнозированию упругих модулей материалов с кристаллической микроструктурой. Вид потенциалов при этом не конкретизируется, появляющиеся производные выражаются через силы межатомного взаимодействия, что позволяет исследовать возможности различных потенциалов для описания анизотропии и симметричности упругого отклика кристаллического материала.

В общем виде потенциальная энергия системы атомов [1] представляется как

$$\Phi = \sum_{i=1}^M \Phi_1(\mathbf{R}_i) + \sum_{i=1}^{M-1} \sum_{j=i+1}^M \Phi_2(\mathbf{R}_j - \mathbf{R}_i) + \sum_{i=1}^{M-2} \sum_{j=i+1}^{M-1} \sum_{k=j+1}^M \Phi_3(\mathbf{R}_j - \mathbf{R}_i, \mathbf{R}_k - \mathbf{R}_i, \mathbf{R}_k - \mathbf{R}_j) + \dots,$$

где  $\mathbf{R}_i$  — радиус-вектор,  $M$  — полное число атомов образца,  $\Phi_1(\mathbf{R}_i)$  — часть потенциальной энергии, определяемая полем внешней силы,  $\Phi_2(\mathbf{R}_j - \mathbf{R}_i)$  — двухчастичный потенциал,  $\Phi_3(\mathbf{R}_j - \mathbf{R}_i, \mathbf{R}_k - \mathbf{R}_i, \mathbf{R}_k - \mathbf{R}_j)$  — трехчастичный потенциал. Далее примем  $\Phi_1(\mathbf{R}_i) = 0$ .

Для расчета упругих модулей кристаллических систем в рамках статического подхода [2-3] принимается, что плотность упругой энергии и плотность потенциальной системы взаимодействующих атомов кристалла в текущей конфигурации совпадают. Тогда производные от плотности потенциальной энергии по мерам деформации дадут выражения

для компонент тензоров напряжений (с помощью первых производных) и компонент тензора линейно-упругих свойств (вторые производные). Пусть  $\hat{\Phi}(\mathbf{F})$  — потенциальная энергия однородно деформированного кристаллического образца в текущей конфигурации,  $\mathbf{F}$  — деформационный градиент, причем  $\hat{\Phi} = \hat{\Phi}(\mathbf{I})$ , где  $\mathbf{I}$  — единичный тензор. Тогда тензор напряжений Пиолы-Кирхгофа вычисляется как

$$\mathbf{P}_1 = \hat{\Omega}^{-1} \partial(\hat{\Phi}(\mathbf{F}) - \hat{\Phi}) / \partial \mathbf{F}^T = \hat{\Omega}^{-1} \partial \hat{\Phi}(\mathbf{F}) / \partial \mathbf{F}^T. \quad (1)$$

Тензор напряжений Коши  $\boldsymbol{\sigma} = J^{-1} \mathbf{F} \cdot \mathbf{P}_1$ , где  $J = \det \mathbf{F} = \hat{\Omega} / \hat{\Omega}$ , то есть  $\boldsymbol{\sigma} = \hat{\Omega}^{-1} \mathbf{F} \cdot \partial \hat{\Phi}(\mathbf{F}) / \partial \mathbf{F}^T$ .

Рассмотрим два вида представления потенциальной энергии через двухчастичный потенциал, используя для простоты вместо набора векторных аргументов, соединяющих различные пары атомов, обозначение  $\Delta \mathbf{R}$  в отсчетной конфигурации или  $\Delta \mathbf{r}$  в текущей:

- 1)  $\hat{\Phi}(\mathbf{F}) = \sum \hat{\Phi}(\Delta \mathbf{r}) = \sum \hat{\Phi}(\mathbf{F} \cdot \Delta \mathbf{R})$ , где  $\sum(\cdot)$  — упрощенное обозначение суммы (1),
- 2)  $\hat{\Phi}(\mathbf{F}) = \sum \hat{\Phi}(|\Delta \mathbf{r}|) = \sum \hat{\Phi}(|\mathbf{F} \cdot \Delta \mathbf{R}|) = \sum \hat{\Phi}(\sqrt{\Delta \mathbf{R} \cdot \mathbf{F}^T \cdot \mathbf{F} \cdot \Delta \mathbf{R}})$ .

В первом случае учитывается направление связи между различными парами атомов, во втором случае — только расстояние между ними. Производная по тензору  $\mathbf{F}$  в этих двух случаях приводит к выражениям:

- 1) производная  $\hat{\Phi}'(\Delta \mathbf{r})$  по аргументу  $\Delta \mathbf{r}$  дает вектор силы  $\mathbf{f}(\Delta \mathbf{r})$ , определяемый конкретным потенциалом межатомного взаимодействия,

$$\begin{aligned} \partial \hat{\Phi}(\mathbf{F}) / \partial \mathbf{F}^T &= \sum \hat{\Phi}'(\Delta \mathbf{r}) \cdot \partial(\mathbf{F} \cdot \Delta \mathbf{R}) / \partial \mathbf{F}^T = \sum \Delta \mathbf{R} \mathbf{f}(\Delta \mathbf{r}), \\ \boldsymbol{\sigma} &= \hat{\Omega}^{-1} \mathbf{F} \cdot \sum \Delta \mathbf{R} \mathbf{f}(\Delta \mathbf{r}) = \hat{\Omega}^{-1} \sum \Delta \mathbf{r} \mathbf{f}(\Delta \mathbf{r}). \end{aligned} \quad (2)$$

Для двухчастичных потенциалов векторы  $\mathbf{f}(\Delta \mathbf{r})$  и  $\Delta \mathbf{r}$  коллинеарны, что приводит к  $\boldsymbol{\sigma}^T = \boldsymbol{\sigma}$ . Для многочастичных потенциалов направление силы  $\mathbf{f}(\Delta \mathbf{r})$  может не совпадать с направлением  $\Delta \mathbf{r}$ , соединяющего атомы, что приведет к  $\boldsymbol{\sigma}^T \neq \boldsymbol{\sigma}$ .

- 2) производная  $\hat{\Phi}'(|\Delta \mathbf{r}|)$  по скалярному аргументу является скалярной величиной:

$$\begin{aligned} \partial \hat{\Phi}(\mathbf{F}) / \partial \mathbf{F}^T &= \sum \hat{\Phi}'(|\Delta \mathbf{r}|) \partial \sqrt{\Delta \mathbf{R} \cdot \mathbf{F}^T \cdot \mathbf{F} \cdot \Delta \mathbf{R}} / \partial \mathbf{F}^T = \sum \hat{\Phi}'(|\Delta \mathbf{r}|) |\Delta \mathbf{r}|^{-1} \Delta \mathbf{R} \Delta \mathbf{r}, \\ \boldsymbol{\sigma} &= \hat{\Omega}^{-1} \hat{\Phi}'(|\Delta \mathbf{r}|) \Delta \mathbf{r} \Delta \mathbf{r} / |\Delta \mathbf{r}|, \end{aligned} \quad (3)$$

то есть тензор напряжений Коши будет симметричным для любого потенциала межатомного взаимодействия.

При учете многочастичного взаимодействия в методе погруженного атома потенциальная энергия системы определяется выражением, в котором учтено, что отталкивание всех атомов описывается согласно закону парного взаимодействия, а притяжение описывается нелинейной функцией  $\gamma()$ , задающей влияние окружения произвольного атома. Окружение определяется множеством номеров соседних атомов  $S_i$ :

$$\hat{\Phi}(\mathbf{F}) = \sum_{i=1}^{M-1} \sum_{j=i+1}^M \varphi^+(|\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_i|) + \sum_{i=1}^M \gamma \left( \sum_{j \in S_i} \varphi^-(\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_i) \right). \quad (4)$$

Функции  $\varphi^\pm(\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_i)$  могут зависеть не только от расстояний между атомами, а от расстояний и направлений действия межатомных сил в окрестности выбранного атома. Используем обозначения  $\mathbf{r}_{(ij)} \equiv \mathbf{r}_j - \mathbf{r}_i$  и  $(\varphi^-(\mathbf{r}_{(ij)}))' \equiv \mathbf{f}_{(ij)}^-$ . Тогда тензор напряжений Коши:

$$\boldsymbol{\sigma} = \frac{1}{\hat{\Omega}} \left\{ \sum_{i=1}^{M-1} \sum_{j=i+1}^M (\varphi^+)' |\mathbf{r}_{(ij)}|^{-1} \mathbf{r}_{(ij)} \mathbf{r}_{(ij)} + \sum_{i=1}^M \left( \gamma' \left( \sum_{j \in S_i} \varphi^-(\mathbf{r}_{(ij)}) \right) \sum_{j \in S_i} \mathbf{r}_{(ij)} \mathbf{f}_{(ij)}^- \right) \right\}. \quad (5)$$

Поскольку вектор  $\mathbf{f}_{(ij)}^-$  не обязательно направлен вдоль вектора  $\mathbf{r}_{(ij)}$ , то в результате получаемый тензор может быть несимметричным. Для вычисления упругих модулей при

малых деформациях необходимо найти производную от тензора напряжений Коши (5). В итоге получим тензор четвертого ранга следующего строения:

$$\begin{aligned} \partial\boldsymbol{\sigma}/\partial\mathbf{F}^T = & -\hat{\Omega}^{-1}\mathbf{F}^{-T}\left(\sum_{i=1}^{M-1}\sum_{j=i+1}^M(\varphi^+)'\left|\mathbf{r}_{(ij)}\right|^{-1}\mathbf{r}_{(ij)}\mathbf{r}_{(ij)}+\sum_{i=1}^M\left(\gamma'\sum_{j\in S_i}\mathbf{r}_{(ij)}\mathbf{f}_{(ij)}^-\right)\right)+ \\ & +\hat{\Omega}^{-1}\sum_{i=1}^{M-1}\sum_{j=i+1}^M\left\{\left((\varphi^+)''\left|\mathbf{r}_{(ij)}\right|-(\varphi^+)'\right)\left|\mathbf{r}_{(ij)}\right|^{-3}\mathbf{r}_{(ij)}\mathbf{r}_{(ij)}\mathbf{R}_{(ij)}\mathbf{r}_{(ij)}+\right. \\ & \left.+(\varphi^+)'\left|\mathbf{r}_{(ij)}\right|^{-1}\left(\mathbf{e}_n\mathbf{r}_{(ij)}+\mathbf{r}_{(ij)}\mathbf{e}_n\right)\mathbf{R}_{(ij)}\mathbf{e}^n\right\}+ \\ & +\hat{\Omega}^{-1}\sum_{i=1}^M\sum_{j\in S_i}\left\{\gamma''\left(\mathbf{r}_{(ij)}\mathbf{f}_{(ij)}^-\mathbf{R}_{(ij)}\mathbf{f}_{(ij)}^-\right)+\gamma'\left(\mathbf{e}_n\mathbf{f}_{(ij)}^-\right)+\mathbf{r}_{(ij)}\mathbf{G}_{(ij)}\cdot\mathbf{e}_n\right\}\mathbf{R}_{(ij)}\mathbf{e}^n, \end{aligned}$$

где производные  $\gamma'$  и  $\gamma''$  функции  $\gamma$  имеют аргумент  $\sum_{j\in S_i}\varphi^-(\mathbf{r}_{(ij)})$ , а тензор второго ранга  $\mathbf{G}_{(ij)}\equiv\partial\mathbf{f}_{(ij)}^-/\partial\mathbf{r}_{(ij)}=\partial^2\varphi^-(\mathbf{r}_{(ij)})/\partial\mathbf{r}_{(ij)}^2$ ,  $\partial\mathbf{f}_{(ij)}^-/\partial\mathbf{F}^T=\mathbf{G}_{(ij)}\cdot\mathbf{e}_n\mathbf{R}_{(ij)}\mathbf{e}^n$ .

При условии малости деформаций  $\mathbf{F}\rightarrow\mathbf{I}$  получим строение тензора линейно-упругих модулей для кристаллического материала в виде выражения

$$\begin{aligned} \mathbf{C} = & -\overset{\circ}{\Omega}^{-1}\mathbf{I}\left(\sum_{i=1}^{M-1}\sum_{j=i+1}^M(\varphi^+)'\left|\mathbf{R}_{(ij)}\right|^{-1}\mathbf{R}_{(ij)}\mathbf{R}_{(ij)}+\sum_{i=1}^M\left(\gamma'\sum_{j\in S_i}\mathbf{R}_{(ij)}\mathbf{f}_{(ij)}^-\right)\right)+ \\ & +\overset{\circ}{\Omega}^{-1}\sum_{i=1}^{M-1}\sum_{j=i+1}^M\left\{\left((\varphi^+)''\left|\mathbf{R}_{(ij)}\right|-(\varphi^+)'\right)\left|\mathbf{R}_{(ij)}\right|^{-3}\mathbf{R}_{(ij)}\mathbf{R}_{(ij)}\mathbf{R}_{(ij)}\mathbf{R}_{(ij)}+\right. \\ & \left.+(\varphi^+)'\left|\mathbf{R}_{(ij)}\right|^{-1}\left(\mathbf{e}_n\mathbf{R}_{(ij)}+\mathbf{R}_{(ij)}\mathbf{e}_n\right)\mathbf{R}_{(ij)}\mathbf{e}^n\right\}+ \\ & +\overset{\circ}{\Omega}^{-1}\sum_{i=1}^M\sum_{j\in S_i}\left\{\gamma''\mathbf{R}_{(ij)}\mathbf{f}_{(ij)}^-\mathbf{R}_{(ij)}\mathbf{f}_{(ij)}^-+\gamma'\left(\mathbf{e}_n\mathbf{f}_{(ij)}^-\right)+\mathbf{R}_{(ij)}\mathbf{G}_{(ij)}\cdot\mathbf{e}_n\right\}\mathbf{R}_{(ij)}\mathbf{e}^n. \end{aligned} \quad (6)$$

В общем случае данное выражение не обладает симметрией внутри пар первых и вторых диад, которая возможна только в случае коллинеарности векторов  $\mathbf{f}_{(ij)}^-$  с векторами  $\mathbf{R}_{(ij)}$ . В случае их коллинеарности и тождественной функции погружения  $\gamma$  для метода погруженного атома  $\gamma'=1$ ,  $\gamma''=0$  тензор четвертого ранга (6) становится изотропным.

В работе для плоских кристаллических структур с осями симметрии различного порядка (рис. 1) получено, что при использовании парных потенциалов для оси симметрии любого порядка кроме четвертого тензор упругих свойств содержит только две ненулевые независимые компоненты. При этом коэффициент Пуассона для этих структур оказывался равным 1/3, то есть в действительности получался только один независимый упругий модуль. Для кристалла с осью симметрии 4-го порядка коэффициент Пуассона был отрицательным, получалось два независимых упругих модуля. При использовании потенциала погруженного атома для различных двумерных структур получалось число независимых модулей, соответствующее результатам линейной теории упругости.



Рис. 1. Элементы плоских кристаллических структур с осями симметрии а) 3-го порядка, б) 4-го порядка, в) 5-го порядка, г) 6-го порядка

*Выводы.* В работе получено инвариантное представление тензора упругих модулей в статическом подходе при дискретно-атомистическом моделировании в виде «быстрых» сумм. Парные потенциалы позволяют описать только изотропию упругих свойств, а реальные тела являются анизотропными. Поэтому применение парных потенциалов не

всегда дает адекватные результаты для тел с кристаллической микроструктурой. Метод погруженного атома больше подходит для прогнозирования свойств кристаллов.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант №14-01-00069, грант №15-01-08678).

#### ЛИТЕРАТУРА:

1. Clayton J. Nonlinear Mechanics of Crystals. – Springer, London, 2011. – 715 p.
2. Зубко И.Ю. Вычисление упругих модулей монослоя графена в несимметричной постановке с помощью энергетического подхода // Физическая мезомеханика. 2015. Т. 18, № 2. – С. 37-50.
3. Симонов М.В., Зубко И.Ю. Определение равновесных параметров решетки различных ГПУ-монокристаллов с помощью потенциала межатомного взаимодействия Ми // Вестник Пермского национального исследовательского политехнического университета. Механика. – 2012. – № 3. – С. 205-218.
4. Зубко И.Ю., Остапович К.В. Метод контроля температуры при исследовании упругих свойств материалов с кристаллической микроструктурой в статическом подходе при дискретно-атомистическом моделировании // Известия Самарского научного центра Российской академии наук. – 2014. – Т. 16, № 4-3. – С. 563-567.

УДК 577.323

В.К. Черногорский  
Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого

### МОДЕЛИРОВАНИЕ МОЛЕКУЛЯРНОЙ ДИНАМИКИ ОЛИГОНУКЛЕОТИДОВ

С появлением высокопроизводительных компьютеров вычислительный эксперимент стал необходимой, а иногда даже неотъемлемой частью любой научно-исследовательской работы. Однако, в исследовании биологических структур вычислительный эксперимент смог закрепиться сравнительно недавно [1]. Все дело в том, что биологические макромолекулы могут насчитывать сотни тысяч атомов, испытывать разные специфические взаимодействия, моделироваться только при задании определенных внешних условий и, так как биологические структуры в природе встречаются только в растворах, то и моделирование происходит с участием раствора, что существенно усложняет процесс расчетов. В данной работе в качестве биологической системы рассматриваются короткие фрагменты двухцепочечной ДНК – олигонуклеотиды. Интерес к ним вызван из-за их малой длины, и, соответственно, при моделировании молекулярной динамики производится расчет для меньшего количества молекул, что благоприятно сказывается на ресурсозатратах. Хотя олигонуклеотиды малой длины, они полностью отражают большую часть особенностей, возникающих при моделировании длинных цепочек ДНК. Актуальность данной работы заключается в проведении сравнительного анализа моделирования динамики коротких олигонуклеотидов в разных по объему модельных сценах при использовании различных современных силовых полей, а критерием сравнения будет являться устойчивость средних по времени траектории динамики стандартных конформационных параметров ДНК, на протяжении 50 нс моделирования. С точки зрения прикладной значимости полученные результаты позволят сформулировать базовые составляющие модели ДНК в водной ячейке, которые могут быть полезны при дальнейшем моделировании взаимодействия ДНК с низкомолекулярными лигандами в растворе. Методом исследования в данной работе является полноатомное молекулярно-динамическое компьютерное моделирование, так как оно позволяет изучать микроскопическую структуру полимера и особенности его поведения в растворе. Метод молекулярной динамики заключается в численном решении для каждой частицы системы из  $N$  атомов уравнения движения:

$$m_i \frac{\partial^2 r_i}{\partial t^2} = F_i, F_i = \frac{-\partial U(r_1, r_2, \dots, r_N)}{\partial r_i}$$

$U(r_1, r_2, \dots, r_N)$  – потенциальная энергия системы (силовое поле);  $i = 1 \dots N$ . Силовое поле – это набор функций и параметров, которые позволяют описать потенциальную энергию системы, в частности, вид функции потенциальной энергии и значения констант, которые входят в эти функции, таких как: равновесные значения связей, валентных и двугранных углов, параметры потенциала Леннарда-Джонса и так далее. В данной работе рассматривается 3 разных силовых поля, доступных из пакета Gromacs [2]: Amber99SB, parmbsc0 и CHARMM27.

Целью данной работы является подборка параметров модели температурной динамики двух различных структур олигонуклеотидов в водном растворе, хорошо согласующихся с имеющимися структурными экспериментальными данными. Для работы были выбраны две структуры ДНК, содержащиеся в Protein Data Bank: «4с64.pdb» - кристаллографическая структура дуплекса додекамера Дикерсона, полученная методом РСА высокого разрешения; «2m8y.pdb» - структура шпилечной ДНК, полученная методом ЯМР. Для достижения цели были поставлены и решены следующие задачи:

1. Создать две разные ячейки для каждой последовательности ДНК. Различие первой и второй ячейки заключается в толщине слоя растворителя в самом длинном направлении ДНК - 1,5 и 2,0 нанометра, соответственно.

2. Заполнить получившиеся ячейки растворителем. В качестве растворителя использовать: вода + некоторое количество противоионов натрия соответствующее количеству фосфатов (нейтральная среда).

3. При моделировании молекулярной динамики использовать три разных силовых поля из доступных в пакете Gromacs: parmbsc0, charmm27, AMBER99SB.

4. Провести анализ. Сравнить полученные усредненные по МД-траектории параметры с параметрами для соответствующей начальной структуры.

Данная работа наглядно показывает, вносит ли существенные искажения в моделирование: размер ячейки и толщина водного слоя окружающего олигонуклеотид, а также применимость выбранных силовых полей. После проведения минимизации энергии приступили к расчету молекулярной динамики со следующими параметрами: шаг моделирования равен 2 фс, температура 300 К поддерживалась с помощью термостата pose-hoover, давление в 1 атм поддерживалось баростатом Берендсена [65]. Интегрирование уравнения Ньютона проводилось с помощью алгоритма leap-frog, электростатические взаимодействия рассчитывались с помощью суммирования по методу Эвальда с использованием быстрого преобразования Фурье (PME). В качестве граничных условий были выбраны периодические граничные условия. Для характеристики и обозначения структурных элементов полинуклеотидных цепей, была использована биохимическая номенклатура разработанная организациями IUPAC и IUB [3]. На основе полученных траекторий из молекулярной динамики, и, основываясь на данной номенклатуре, был проведен анализ исследуемых структур.

В ходе моделирования МД структуры додекамера Дикерсона ДНК было установлено улучшение описания молекулярной динамики при использовании силового поля AMBERparm99 при переходе от «малой» к «большой» ячейке. Улучшения вносят параметры, описывающие взаимное положение соседних пар оснований в стэкинге, и параметры описания двугранных углов  $\alpha$ ,  $\beta$  и  $\zeta$ . При исследовании силового поля parmbsc0 было зафиксировано несколько параметров, которые проявили ухудшения при разбавлении растворителя. Эти параметры касаются описания двугранного угла  $\alpha$ , положения соседних оснований в стэкинге, углов спирального вращения оснований и угла закрученности спирали в целом. При проведении исследования силового поля CHARMM27 не было замечено ухудшений в описании структуры ДНК при моделировании «малой» и «большой» ячеек.

Также была составлена итоговая таблица, показывающая, какое поле лучше описывает конкретный конформационный параметр, и было замечено, что силовое поле charmm27 лучше всего описывает молекулярную динамику структуры додекамера Дикерсона, полученной методом РСА.

При моделировании молекулярной динамики шпильки ДНК с использованием силового поля AMBERparm99 были обнаружены значительные расхождения при переходе от «малой» к «большой» системе. Самые большие расхождение вызывали параметры, отвечающие за положение пар-оснований в стэкинге, почти все параметры, отвечающие за положение комплиментарных пар-оснований, параметры, характеризующие всю цепочку ДНК в целом. Второе исследованное поле parmbsc0 описывает структурные параметры намного лучше предыдущего поля, но все же имеет свои нюансы. При переходе к большей системе наблюдается уменьшение угла закрученности спирали ДНК и ухудшение описание двугранного угла  $\zeta$ . Последнее исследуемое поле – CHARMM. Данное поле описывает молекулярную динамику ДНК в обоих видах растворах одинаково хорошо, за исключением описания параметра, отвечающего за кручение оснований в паре оснований. Также была составлена итоговая таблица, показывающая, какое поле лучше описывает конкретный конформационный параметр, и было видно, что силовое поле charmm27 лучше всего описывает молекулярную динамику шпильчатой структуры, полученной методом ЯМР, и не чувствительно к изменению размеров ячейки.

Таким образом, в ходе моделирования было выяснено, что моделирование структуры, полученной методом рентгеновской кристаллографии, очень хорошо описывается силовым полем CHARMM в 50 наносекундном масштабе моделирования. При исследовании МД структуры, полученной методом ямр спектроскопии, также силовое поле CHARMM оказалось лучшим при описании и не чувствительно к изменению размера ячеек. Силовые поля AMBER и parmbsc0 также пригодны для описания мд, но только при определенных размерах ячеек. Таким образом, можно утверждать, что силовое поле CHARMM является самым универсальным силовым полем из всех трех исследованных, и при дальнейших исследованиях в данных условиях можно использовать именно его. Значимость результата заключается в том, что в авторы в своей статье [4] говорят, что силовое поле parmbsc0 является наиболее универсальным и предпочтительным при моделировании МД олигонуклеотидов на временах до нескольких микросекунд.

#### ЛИТЕРАТУРА:

1. McCammon et al., Nature, Vol.267, Is. 5612: 585-590, 1977.
2. Bekker, Physics computing'92, 252-256, 1993.
3. Eur. J. Biochem., 1983, 131, 9-15; Proceedings of the 16th Jerusalem Symposium "Nucleic Acids, the Vectors of Life" (edited B Pullman and J Jortner) 1983, 559-565; Pure Appl. Chem., 1983, 55, 1273-1280.
4. Refinement of the AMBER Force Field for Nucleic Acids: Improving the Description of a/g Conformers Alberto Pérez,\* y Iván Marchán, Daniel Svozil, z{ Jiri Sponer, §{ Thomas E. Cheatham III, Charles A. Loughton, and Modesto Orozco.

УДК 531.8

А.В. Шубин

Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого

#### РАЗРАБОТКА И РЕАЛИЗАЦИЯ ПРОТОТИПА ФОНОГРАФА ЭДИСОНА В РАМКАХ CDIO ПРОГРАММЫ

*Введение.* Программа CDIO, что расшифровывается как «Conceive — Design — Implement — Operate» исходит из принципа, что создание и развитие продуктов и систем на



протяжении всего их жизненного цикла создают необходимый контекст инженерного образования. Принцип «Задумка – Проектирование – Реализация – Управление» выступает моделью всего жизненного цикла изделия. На стадии «Задумка» происходит определение потребностей покупателя; учитываются применяемые на предприятии технологии, стратегия его развития и его устав; составляются концептуальные, технические и бизнес-планы. На второй стадии «Проектирование» составляются конструкторские планы, схемы и алгоритмы производства изделия, подлежащего к производству. На стадии «Реализация» по составленным планам и схемам изделие производится, кодируется, проверяется и регистрируется. На завершающей стадии «Управление» произведенный продукт эксплуатируется по назначению, осуществляется его техническая поддержка и обслуживание, изделие утилизируется и/или перерабатывается.

CDIO создает необходимую среду инженерного образования, в которой преподаются, усваиваются и применяются на практике технические знания и практические навыки студентов [1-2].

*Актуальность.* Инженерная разработка фонографа Эдисона была поставлена на рельсы программы CDIO, что показало актуальность данной работы на ряду со следующими мотивациями:

- 1) развитие программы CDIO в рамках площадки Фаблаб «Политех» на базе Санкт-Петербургского политехнического университета Петра Великого;
- 2) популяризация науки в учебных учреждениях, прежде всего начального уровня – школы, детские сады;
- 3) усовершенствование наглядности физических опытов;
- 4) развитие творческого и конструкторского мышления у подрастающего поколения.

*Цели и задачи.* Исходя из вышеприведенных проблем, целью данной работы явилась инженерная разработка и реализация проекта прототипа фонографа Эдисона. Для достижения цели был решен ряд технологических задач, а именно:

- 1) создание идеи макета фонографа;
- 2) конструирование модели фонографа с помощью программных продуктов 3D CAD Design Software SOLIDWORKS и CorelDRAW Graphics Suite X7;
- 3) реализация модели с помощью печати деталей на 3D-принтере;
- 4) сборка фонографа;
- 5) запись и воспроизведение звука.

Студенты CDIO программы должны научиться управлять инженерными процессами, проектировать и создавать продукты и системы и применять полученные знания, работая в промышленных организациях. Это есть суть инженерной профессии. Их работу можно сравнить с работой изобретателей 18-19 века, которые посредством опытов пытались привести науку в повседневный образ жизни. Величайшим примером стал Томас Эдисон, и прототип именно его устройства был разработан в ходе данного проекта.

Звук является спутником человека в течение всей его жизни, но мало кто задумывается, что он собой представляет. С физической точки зрения звук можно определить, как колебательные движения частиц в упругой среде, вызванные каким-либо источником, коротко — упругие волны.

Звуковой записью можно назвать ту «картину» звуковой волны, которая возникает на носителе информации (или внутри него) в результате воздействия не самой звуковой волны (это, в принципе, возможно, но практического применения не нашло), а после преобразования ее снова в механические колебания и несет в себе полную (или почти полную) информацию об исходном сигнале. Звукозапись хранит в себе такие параметры звука как громкость, частота, тембр, динамический диапазон.

Чтобы записать звуковые колебания нужно острой иглой, которая колеблется со звуковой частотой, вырезать или выдавить в более-менее твердой поверхности канавку, которая своей формой (глубиной и/или шириной) повторяла бы звуковую волну.

Первый универсальный аппарат для механической записи и воспроизведения звука был изобретен в 1877 году Томасом Эдисоном. Звук воздействовал на мембрану, с которой была жестко связана стальная игла. Для усиления колебаний мембраны применялся рупор. Игла касалась поверхности цилиндра, покрытого оловянной фольгой. Цилиндр вращался вручную, игла одновременно смещалась, оставляя на поверхности цилиндра дорожку переменной глубины. Для воспроизведения нужно было вернуть рупор с иглой в первоначальное положение и снова вращать рукоятку. В рупоре возникал тихий, но отчетливый звук – происходило воспроизведение звуковой записи [2-3].

Полагаясь на опыт прошлых лет, был создан прототип, основу которого составляют детали из термопластика, распечатанные на 3D-принтере, соединяемые выставлением в прорезанные пазы.

Нововведением модели можно считать «носитель информации» – звук записывается на одноразовые пластиковые стаканчики. Сложно утверждать, что этот предмет идеален для звукозаписи, но студийное качество здесь заведомо не предполагается, а для демонстрации принципа довольно и этого. Как показал проведенный хронометраж, в один стакан помещается примерно 25 секунд звука.

Барабан, который тоже представляет собой бумажный стаканчик, с надетым на него «носителем информации» вращается электромотором. Во времена Эдисона, конечно, было иначе, но принцип действия фонографа эта деталь не меняет.

В роли микрофона и репродуктора выступает бумажный стаканчик, проткнутый иглой в двух местах. Для его фиксации на месте использована фанерная шайба, заталкиваемая внутрь стакана.

Записывающее устройство – игла, удерживаемая резинкой в полой Г-образном стержне. Упором для резинки служит обычная платяная кнопка.

Барабан со стаканчиком закреплен на оси – длинном винте с резьбой, ввернутом в закрепленную на раме гайку. При включении мотора ось вместе со стаканами постепенно сдвигается вперед или назад по резьбе в зависимости от направления вращения. Устройство может как записывать, так и воспроизводить звук.

*Результаты.* В ходе работы был разработан, смоделирован и реализован прототип фонографа Эдисона с использованием технологии 3D-печати.

*Вывод.* Данной инженерной разработкой был только приоткрыт весь спектр гениальных изобретений прошлого, конструируя которые сегодня, студенты и ученики образовательных учреждений смогли бы прикоснуться к миру науки и связать с ней всю свою жизнь.

#### ЛИТЕРАТУРА:

1. Эдвард Ф. Кроули, Йохан Малмквист / Перевод с английского под научной редакцией А. Чучалина. Переосмысление инженерного образования. Подход CDIO. – М.: Изд.дом Высшей школы экономики, 2015. – 504 с.
2. Шикалова С.В. / Под ред. Золотаревой Н.М. и Умарова А.Ю. Международный семинар по вопросам инноваций и реформированию инженерного образования «Всемирная инициатива CDIO»: Материалы для участников семинара. – М.: Изд. Дом МИСиС, 2011. – 60 с.
3. Шухардин С.В., Ламан Н.К., Федоров А.С. Техника в ее историческом развитии в конце 19 - начале 20 веков. – М.: Наука, 1982. – 416 с.
4. Радзишевский А. Ю. Основы аналогового и цифрового звука. — М.: Вильямс, 2006. -288 с.

ЭЛЕКТРОДИНАМИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ СЕРДЦА ДЛЯ РЕШЕНИЯ  
ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ КАРДИОГРАФИИ

*Актуальность.* Важнейшей задачей электрокардиологии является диагностика состояний и заболеваний сердечно-сосудистой системы. Проблема диагностики сердечно-сосудистой системы заключается в сложном, многоуровневом механизме ее функционирования, что позволяет только опытным специалистам устанавливать правильный диагноз.

Работающее сердце недоступно для прямого наблюдения, поэтому диагностика заболеваний проводится на основе неинвазивных методов, важнейшим из которых является электрокардиография. По предположению, предвестниками опасных аритмий являются слабые «всплески» (микропотенциалы) электрокардиографических сигналов на различных участках. Амплитуда таких сигналов на поверхности тела весьма мала и обычно оказывается соизмеримой с уровнем шума измерительной системы. Достижения в технике электрокардиографии позволяют получить ЭКГ сигнал высокого разрешения [1] и обнаружить наличие микропотенциалов сердца. Используя метод моделирования путем подбора параметров модели можно понять причины появления микропотенциалов в ЭКГ сигнале. При этом модель сердца должна позволять сгенерировать сигнал, близкий к ЭКГ сигналу высокого разрешения.

*Цели и задачи работы.* Целью исследования является оптимальный выбор численной модели, которая бы позволила решить обратную задачу восстановления характеристик сердечной ткани на базе ЭКГ сигнала высокого разрешения и данных компьютерной томографии о геометрии сердца. Предложенная компьютерная модель в сочетании с высокочувствительными методами измерения ЭКГ входит в состав аппаратно-программного комплекса диагностики предвестников опасных аритмий сердца.

*Методы.* Человеческое тело состоит из миллиардов клеток, которые объединены различными механизмами взаимодействия в зависимости от типа рассматриваемой ткани. При построении математических моделей для электрической активности в ткани возможен подход, при котором моделируется каждая клетка в отдельности, и задается их механизм взаимодействия. Из-за большого количества клеток такой подход применим только к очень маленьким образцам ткани. При изучении электрических явлений на уровне органов или даже организмов данный уровень детализации выходит далеко за рамки возможного. Поэтому используется стандартный подход механики сплошной среды, в котором изучаются усредненные по малому объему величины. Такое усреднение может быть использовано на уровне клеток, чтобы получить непрерывное описание биологической ткани. Выбранный масштаб усреднения должен быть мал по сравнению с характерным размером задачи, но велик по сравнению с объемом одной клетки. В каждой точке ткани величины определяются как средние по небольшим, но многоклеточным объемам в ее окрестности. Таким образом, мы избегаем трудности моделирования дискретных структур ткани тела и можем использовать хорошо развитый математический аппарат дифференциального исчисления.

Для выполнения этой задачи был приспособлен проект CHASTE (Cancer, Heart and Soft Tissue Environment) (рис. 1) разработанный и поддерживаемый учеными кафедры компьютерных наук Оксфордского университета. Целью проекта является мультимасштабное моделирование и решение проблем вычислительных мощностей возникающих в биологии и физиологии. Текущая функциональность включает в себя

моделирование тканей на клеточном уровне, моделирование прерывистых и мягких тканей. В то время как проект направлен на решение проблем в общих аспектах физиологии, его основная цель – моделирование электрофизиологии сердца. На сегодня удалось провести моделирование сердечной мышцы с числом конечных элементов равным 4 миллиона узлов [2].

Полная спецификация параметров модели, в том числе выражения для ионных токов, приведены в [4].

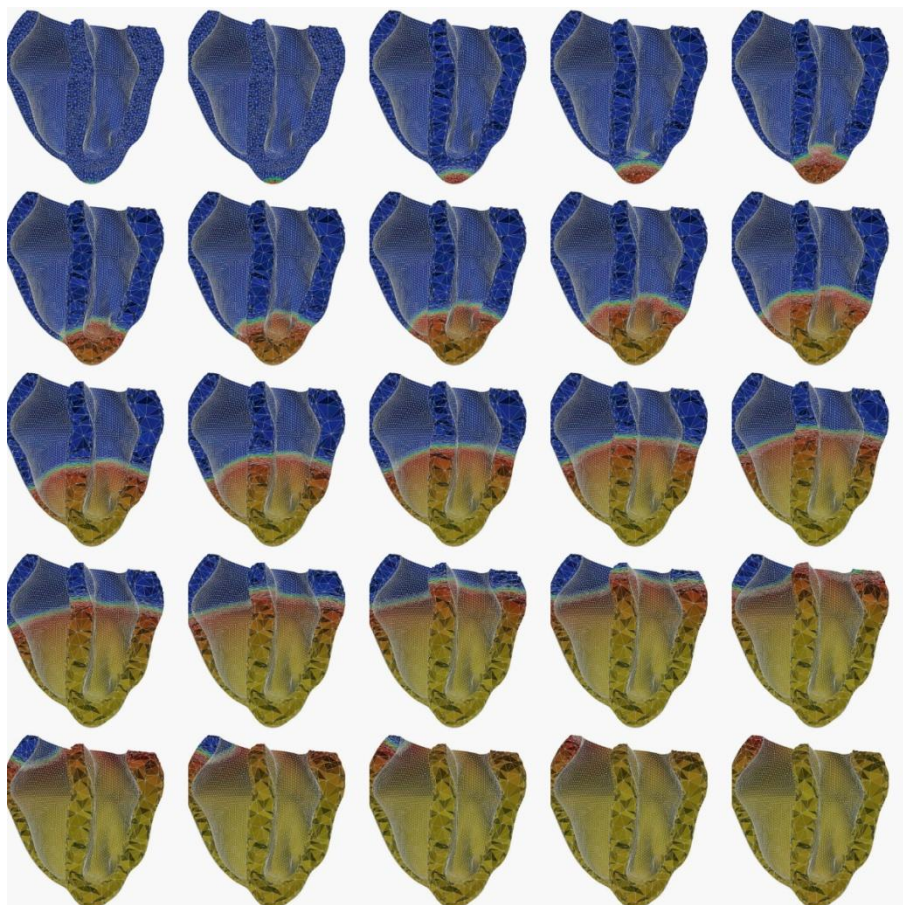


Рис. 1. Бидоменная модель распространения потенциала на сетке высокого разрешения (около 4.3 млн. узлов). Шаг равен 0,2 секунды [3]

*Результаты.* Приведем итоговую математическую модель для электрической активности сердца и окружающего тела пациента. Тело вокруг сердца моделируется как пассивный объемный проводник, в то время как модель для сердечной ткани рассматривается как взаимодействие двух непрерывных сред – внутриклеточной и внеклеточной. Для сердечной ткани ионный ток через клеточную мембрану играет важную роль для активации клеток, поэтому модель содержит математическое описание физиологии клеточной мембраны. Полная модель имеет вид:

$$\frac{\partial s}{\partial t} = F(s, v, t), \quad \vec{x} \in H; \quad (1)$$

$$\nabla \cdot (\sigma_i^* \nabla v) + \nabla \cdot (\sigma_i^* \nabla u_e) = \frac{\partial v}{\partial t} + I_{ion}^*, \quad \vec{x} \in H; \quad (2)$$

$$\nabla \cdot (\sigma_i^* \nabla v) + \nabla \cdot ((\sigma_i^* + \sigma_e^*) \nabla u_e) = 0, \quad \vec{x} \in H; \quad (3)$$

$$\nabla \cdot (\sigma_T^* \nabla u_T) = 0, \quad \vec{x} \in T; \quad (4)$$

$$u_e = u_T, \quad \vec{x} \in \partial H; \quad (5)$$

$$n \cdot (\sigma_i^* \nabla v + (\sigma_i^* + \sigma_e^*) \nabla u_e) = n \cdot (\sigma_T^* \nabla u_T), \quad \vec{x} \in \partial H; \quad (6)$$

$$n \cdot (\sigma_i \cdot \nabla v + \sigma_i \cdot \nabla u_e) = 0, \quad \vec{x} \in \partial H; \quad (7)$$

$$\vec{n} \cdot \sigma_T \nabla u_T = 0, \quad \vec{x} \in \partial T. \quad (8)$$

Соотношение (1) обозначает систему обыкновенных дифференциальных уравнений, соответствующее биофизической модели клетки. Уравнения (2-3) описывают распространение волны возбуждения по ткани сердца. Соотношения (4) описывают распространение потенциала в теле человека. Граничные условия на поверхности сердца имеют вид (5-7). Граничные условия на теле человека соответствуют (8). Звездочкой обозначаются величины, отнесенные к величине  $\alpha C_m$ .

На рис. 2 представлена блок-схема алгоритма программы разработанной на базе лаборатории медицинского приборостроения Томского политехнического университета для исследования микропотенциалов сердца. Программа состоит из четырех модулей: 1 – модуль численного моделирования на базе бидоменной модели сердца, 2 – модуль конфигурирования параметров бидоменной модели сердца, 3 – модуль вычисления невязки «модельной» ЭКГ и ЭКГ сигнала высокого разрешения, 4 – модуль принятия решения о продолжении поиска минимума невязки или о завершении работы программы. Входными данными для программы являются данные компьютерной томографии пациента и ЭКГ сигнал, полученный с помощью АПК для измерения микропотенциалов сердца.

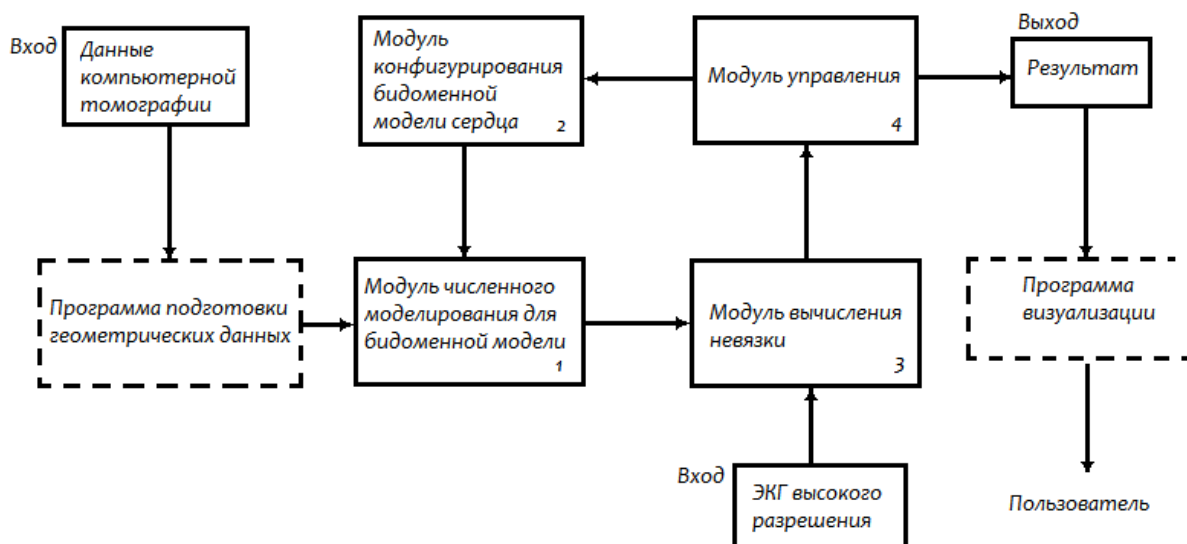


Рис. 2. Логическая структура программы

*Выводы.* В данной статье выбрана оптимальная модель электрической активности сердца, позволяющая исследовать причины появления низкоамплитудных биопотенциалов сердца. Предложен обобщенный алгоритм исследования модели сердца применительно к аппаратно-программному комплексу, предназначенному для диагностики низкоамплитудных биопотенциалов сердца, например, поздних потенциалов желудочков (ППЖ), возникающих из-за замедленной деполяризации желудочков сердца. При разработке компьютерной модели использовалась библиотека классов, созданная в рамках проекта Chaste. Основными преимуществами библиотеки является унификация алгоритмов и их кодов для решения обыкновенных дифференциальных уравнений, уравнений в частных производных и программной реализации алгоритмов генерации сеток и форматов ввода-вывода данных.

*Благодарности.* Исследования были выполнены при финансовой поддержке Федеральной Целевой Программы «Исследования и разработки по приоритетным направлениям развития научно-технологического комплекса России на 2014—2020 годы», проект № 14.578.21.0032 «Разработка экспериментального образца аппаратно-программного

комплекса для неинвазивной регистрации микропотенциалов сердца в широкой полосе частот без фильтрации и усреднения в реальном времени с целью раннего выявления признаков внезапной сердечной смерти». Уникальный идентификатор контракта: RFMEF157814X0032.

ЛИТЕРАТУРА:

1. Baranov V., D. Avdeeva, P. Pen'kov, M. Yuzhakov and M. Grigoriev, Structural approach to the inverse problems of computational diagnostics in cardiology, *Biology and Medicine*, 2014. V. 6, Issue 2, Article number BM-024.
2. Pathmanathan P. and R. Gray, Verification of computational models of cardiac electro-physiology. *Int. J. Numer. Methods Biomed. Eng.* 2014. V. 30(5): P. 525-544.
3. Joe Pitt-Francis., et al., Chaste: A test-driven approach to software development for biological modelling, *Computer Physics Communications*. 2009. V. 180: P. 2452-2471.
4. Luo C.H. and Y. Rudy. A model of the ventricular cardiac action potential: Depolarisation, repolarisation, and their interaction. *Circulation Research*, 1991. V. 68: P. 1501-1526.

## СОДЕРЖАНИЕ

Стр.

### ИНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ . . . . . 3

#### **Секция «Гидроаэродинамика, горение и теплообмен»**

*Гусева Е.К., Гарбарук А.В.* Расчет отрывных течений с использованием методов DDES и IDDES в сочетании с подсеточным масштабом, адаптированным к слоям смешения. . . . . 3

*Матюшенко А.А., Гарбарук А.В.* Модификация  $k-\omega$  SST модели турбулентности применительно к задачам обтекания аэродинамических профилей ветрогенераторов при высоких числах Рейнольдса. . . . . 6

*Стабников А.С., Гарбарук А.В.* Тестирование модифицированной поправки на кривизну и вращение для  $k-\omega$  SST модели. . . . . 8

*Котов Е.В., Гарбарук А.В.* Численное исследование обтекания аэродинамических профилей при режимах, близких к срыву потока. . . . . 12

*Засимова М.А., Иванов Н.Г., Щур Н.А.* Исследование сопряженного теплообмена при смешанной конвекции в гладкотрубных пучках глубоководных теплообменных аппаратов. . . . . 14

*Колесник Е.В., Иванов Н.Г., Левченя А.М.* Расчет трехмерного турбулентного течения в круглой трубе с поворотом: оценка требований к вычислительной модели. . . 17

*Махнов А.В., Булович С.В.* Численное моделирование теплопереноса в низкотемпературной тепловой трубе. . . . . 21

*Тасс О.Е., Степанов В.В.* Исследование кинетики окисления продуктов пиролиза смесей полимерных материалов методом кислородной сканирующей микрокалориметрии . . . . . 23

*Мусаева Д.А., Бааке Э., Ильин В.К.* Исследование движения расплава GaInSn под действием низкочастотной импульсной силы электромагнитного поля. . . . . 25

*Поваренский Р.Б., Цой А.С., Снегирев А.Ю.* Численное моделирование подавления турбулентного пламени струей распыленной воды. . . . . 28

*Афанасьев П.М., Коковина Е.С., Снегирев А.Ю.* Совместное моделирование турбулентного горения и испарения жидких топлив. . . . . 31

*Коковина Е.С., Цой А.С., Снегирев А.Ю.* Апробация ANSYS Fluent для моделирования пожара. . . . . 33

*Макухин С.С., Федорович Е.Д.* Разработка принципиальной технологической схемы многоцелевой установки на базе атомного реактора. . . . . 35

#### **Секция «Прикладная математика»**

*Зайцева Н.И., Погарская Т.А., Березин С.В., Лупуляк С.В.* Методология автоматической расстановки фиксирующих элементов для соединения частей крыла . . 39

*Кутузов А.В., Иванков А.А.* Алгоритм построения оценки размерности аттракторов динамических систем. . . . . 42

*Первадчук В.П., Владимирова Д.Б., Дервянкина А.Л.* Об устойчивости процессов изготовления кварцевых волокон. . . . . 45

*Стефанова М.В., Якунин С.А., Петухова М.В., Лупуляк С.В.* Применение метода внутренней точки для решения специального класса контактных задач. . . . . 48

*Чивилихин Д.С., Ульяновцев В.И., Шальто А.А.* Использование графа совместимости дерева сценариев при генерации управляющих конечных автоматов с помощью муравьиного алгоритма . . . . . 51

Чивилихин Д.С. Генерация диаграмм управления выполнением базисных функциональных блоков стандарта ИЕС 61499 по сценариям работы. . . . .	54
<b>Секция «Механика и процессы управления»</b>	
Антонова О.В. Методика расчета гидродинамического состояния опорных подшипников с учетом эластоэффекта. . . . .	57
Беляев М.О., Семёнов А.С. Локализация деформаций при четырехточечном изгибе армированной бетонной балки. . . . .	60
Богданова Е.Р., Бенин А.В., Беляев М.О., Семёнов С.Г., Семёнов А.С. Исследование несущей способности изгибаемых бетонных балок, армированных различными материалами . . . . .	63
Борисенко В.А., Семёнов А.С., Мельников Б.Е. Исследование процессов деформирования и разрушения древесного слоистого пластика, используемого для изготовления лонгбордов . . . . .	66
Грищенко А.И., Семёнов А.С., Гецов Л.Б. Моделирование процессов ползучести жаропрочных монокристаллических сплавов с учетом эволюции микроструктуры. . . .	69
Гучинский Р.В., Петин С.В. Оценка рассеяния усталостной долговечности при помощи моделирования неоднородности накопления повреждений. . . . .	72
Ивашов И.В., Семёнов А.С. Моделирование гистерезисных явлений в бесвинцовых сегнетоэлектроэластиках при наличии орторомбической фазы. . . . .	75
Игнатович И.А., Семёнов А.С., Гецов Л.Б. Верификация деформационного критерия по результатам анализа термоусталостной прочности дисков газовых турбин	78
Керестень И.А., Войнов И.Б., Михайлов А.А., Боровков А.И. Рационализация процессов пуска и работы катушечного механизма. . . . .	82
Лавров К.И., Семёнов А.С., Бенин А.В. Моделирование нелинейного деформирования бетона при одноосном и многоосном монотонном нагружении. . . . .	85
Макаркин С.В., Логинов И.Н. Конечно-элементное моделирование корпуса ядерного реактора типа ввэр-1000 и изучение его напряженно-деформированного состояния . . . . .	88
Мамчиц Д.В., Немов А.С. Снижение коэффициента концентрации напряжений у края отверстия в композитной панели. . . . .	91
Марков А.О., Бурдаков С.Ф. Влияние быстрой динамики на качество управления квадрокоптером . . . . .	94
Марченко П.А., Новокшенов А.Д. Топологическая оптимизация модели кронштейна под установку звездного датчика. . . . .	97
Петренко С.Е., Фрейдин А.Б. Моделирование распространения фронтов химических реакций в упругих и вязко-упругих телах. . . . .	99
Пуделева О.А., Семёнов А.С. Влияние геометрических параметров на процесс поляризации пьезокерамических сенсоров и актюаторов при затвердевании алюминиевого корпуса. . . . .	103
Ривас Ф.Д., Семёнов А.С. Влияние давления на размер зон плавления контактных областей при спекании порошков пропусканием электрического тока . . . .	106
Третьяков Д.А., Модестов В.С., Штукин Л.В., Пивков А.В. Измерение акустической анизотропии в типовых образцах . . . . .	110
Федоров Д.Д., Яковис Л.М. Условия робастной управляемости в статике для многосвязного динамического объекта. . . . .	112
Шагниев О.Б., Бурдаков С.Ф. Использование многокомпонентного датчика в задаче управления силовым взаимодействием робота с поверхностью неопределенного профиля. . . . .	116



*Шевчук Р.Э., Гаев А.В.* Многоуровневое конечно-элементное моделирование элементов статоров, содержащих композитные материалы. . . . . 118

**Секция «Физика прочности и пластичности материалов»**

*Ржавцев Е.А., Гуткин М.Ю.* Динамика формирования малоугловых границ наклона при ударном нагружении ультрамелкозернистых металлов и сплавов. . . . . 122

*Красницкий С.А., Смирнов А.М., Гуткин М.Ю.* Граничная задача теории упругости для дилатационного включения в виде длинного параллелепипеда в цилиндре. . . . . 125

*Смирнов А.М., Young E.C., Бугров В.Е., Speck J.S., Романов А.Е.* Критические условия формирования дислокаций несоответствия путем призматического скольжения в плуполярных и неполярных III-нитридных гетероструктурах. . . . . 128

*Гузилова Л.И., Маслов В.Н., Васильева Е.С., Николаев В.И., Романов А.Е.* Исследование физико-механических характеристик монокристаллов  $\beta$ -Ga<sub>2</sub>O<sub>3</sub>, выращенных из собственного расплава. . . . . 130

*Ведров А.С., Волегов П.С.* Описание неупругого деформирования поликристаллов с учетом ротаций кристаллических решеток. . . . . 133

*Кравченко М.Ю., Панпурин С.Н.* Расчет кривизны кристаллической решетки на основе данных EBSD с использованием градиентной матрицы. . . . . 136

*Чернышев К.С., Филиппов С.А.* Анализ текстур в автомобильных сталях методом рентгеноструктурного анализа . . . . . 138

*Сизова В.С., Золоторевский Н.Ю., Ермакова Н.Ю.* Эволюция разориентировок на двойниковых границах в процессе пластической деформации. . . . . 141

**Секция «Биомеханика»**

*Ковалев О.О., Акульшин Ю.Д., Прядко А.И.* Разработка бионического протеза руки. . . . . 144

*Лысенкова А.С.* Биомеханический анализ состояния структур поясничного отдела позвоночника. . . . . 147

*Радченко Я.Ф., Гатаулин Я.А.* Уточнение формулы для измерения степени стеноза . . . . . 150

*Федорова Е.А., Гатаулин Я.А.* Исследование течения в модели сосуда со стенозом с использованием кросс-верификации расчетов и измерений. . . . . 153

*Фролов С.В., Синдеев С.В.* Численное и экспериментальное моделирование кровотока в церебральной аневризме . . . . . 156

*Хоробров С.В., Юхнев А.Д., Гатаулин Я.А.* Расчетно-экспериментальное исследование гидродинамических характеристик полнопроточного искусственного клапана сердца. . . . . 159

**Секция «Облачные технологии управления мобильными роботами»**

*Калугин Н.В., Домрачев Д.А., Лукашин А.А.* Разработка мультиагентной распределенной системы группового управления роботами. . . . . 162

*Тучков А.С., Попов С.Г.* Исследование сетевой синхронизации системных часов мультпротокольных киберобъектов в гетерогенных сетях. . . . . 165

*Калугин Н.В., Мулюха В.А.* Разработка метода синтеза агрегатно-модульного робота. . . . . 168

*Шарагин М.П., Попов С.Г.* Разработка алгоритмов управления данными о беспроводных локальных сетях телематической карты. . . . . 171

*Галимский В.В., Подгурский Ю.Е.* Методика нагрузочного тестирования

межсетевых экранов. . . . .	174
<i>Попов М.В., Рябинин М.А., Востров А.В.</i> Проблема помехоустойчивости штрихкода при распознавании экзаменационной ведомости. . . . .	176
<b>Секция «Механика и математическое моделирование»</b>	
<i>Антонов И.Д., Буслов В.А.</i> Применение экстремальных остовных лесов. . . . .	179
<i>Ванюшкина В.В.</i> Исследование колебаний углеродных наноструктур. . . . .	182
<i>Григорьева П.М., Вильчевская Е.Н.</i> Влияние диффузии под напряжением на кинетику фронта химической реакции в задачах механохимии. . . . .	184
<i>Ершов Д.С.</i> Разработка модели течения жидкости при бурении скважин с управляемым давлением. . . . .	188
<i>Житникова К.А., Баяндин Ю.В., Наймарк О.Б.</i> Математическое моделирование композиционных материалов, изготовленных намоткой. . . . .	191
<i>Азнабаев А.А., Бобин Д.Р., Коровина М.Д., Макаров А.Е., Почуева Е.В.</i> Сравнительный анализ эффективности совместной работы децентрализованных и центральной естественной систем вентиляции. . . . .	193
<i>Котельникова Н.В., Волегов П.С.</i> Описание упрочнения в монокристаллах при неупругом деформировании. . . . .	196
<i>Лоевец Д.А., Волегов П.С.</i> Математическое моделирование циклического нагружения представительного объема поликристалла. . . . .	199
<i>Марков Н.С., Кузькин В.А.</i> Исследование отрицательного теплового расширения цепочки, обладающей продольной и изгибной жесткостью. . . . .	202
<i>Мацюк К.В.</i> Исследование движения сплошной среды при сосредоточенной нагрузке . . . . .	205
<i>Мирошник Г.А.</i> Исследование влияния давления воздуха в пневмосети на работоспособность восьмипозиционного поворотного-фиксирующего механизма. . . . .	208
<i>Овчинников Е.И., Волегов П.С.</i> Исследование остаточных мезонапряжений в упруговязкопластической модели деформирования поликристалла. . . . .	211
<i>Пальков Р.С., Пояркин А.В.</i> Программа для выбора оптимальной формы прецизионной опоры поплавкового датчика угловой скорости по критерию минимума напряжений с учетом воздействия температуры. . . . .	214
<i>Рыжков А.В., Меленёв П.В., Райхер Ю.Л.</i> Магнитные и структурные свойства магнитополимерного композита: многочастичная модель. . . . .	216
<i>Светличная Е.Л.</i> Исследование и построение численного решения двумерных уравнений газовой динамики, полученного на основе разностных фиксированных шаблонов высокого порядка аппроксимации. . . . .	219
<i>Селуков Д.Г., Волегов П.С.</i> Исследование влияния размера зерна на предел текучести поликристалла. . . . .	222
<i>Симонов М.В., Кривцов А.М.</i> Тепловые колебания в одномерном кристалле. . . . .	224
<i>Стволова С.С., Зубко И.Ю.</i> Инвариантное представление тензора упругих модулей при дискретно-атомистическом моделировании. . . . .	227
<i>Черногорский В.К.</i> Моделирование молекулярной динамики олигонуклеотидов. . . . .	230
<i>Шубин А.В.</i> Разработка и реализация прототипа фонографа Эдисона в рамках CDIO программы. . . . .	232
<i>Григорьев М.Г., Авдеева Д.К., Казаков В.Ю., Наталинова Н.М.</i> Электродинамическая модель сердца для решения обратной задачи кардиографии. . . . .	235

## **НЕДЕЛЯ НАУКИ СПбПУ**

**Материалы научного форума с международным участием**

**30 ноября – 5 декабря 2015 года**

## **ИНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ**

Налоговая льгота – Общероссийский классификатор продукции  
ОК 005-93, т. 2; 95 3004 – научная и производственная литература

---

Подписано в печать 01.12.2015. Формат 60×84/16. Печать цифровая.  
Усл. печ. л. 15,25. Тираж 48. Заказ 13758b.

---

Отпечатано с готового оригинал-макета,  
предоставленного Издательством Политехнического университета,  
в Типографии Политехнического университета.  
195251, Санкт-Петербург, Политехническая ул., 29.  
Тел.: (812) 552-77-17; 550-40-14.