

# СБОРНИК ДОКЛАДОВ

молодежной научно-практической конференции  
в рамках Недели науки СПбПУ



Институт прикладной  
математики и механики

1 - 6 декабря 2014 года



Санкт-Петербург • 2014

Сборник молодежной научно-практической конференции в рамках Недели науки СПбПУ, Институт прикладной математики и механики – СПб. : Изд-во Политехн. ун-та, 2014. – 177 с.

В сборнике публикуются материалы докладов студентов и аспирантов отобранные по результатам проведения секционных заседаний молодежной научно-практической конференции Института прикладной математики и механики, проводимой в рамках Недели науки Санкт-Петербургского государственного политехнического университета. Доклады отражают современный уровень научно-исследовательской работы студентов и аспирантов в области прикладной математики и механики.

Представляет интерес для специалистов в различных областях знаний, учащихся и работников системы высшего образования и Российской академии наук

Редакционная коллегия Института прикладной математики и механики СПбПУ:

А.К. Беляев (директор института), Я.А. Гатаулин (отв. ред.), А.И. Боровков,  
А.В. Востров, В.С. Заборовский, Н.Г. Иванов, Д.А. Индейцев, А.М. Кривцов,  
А.С. Мурачев, А.С. Немов, А.С. Семенов, Е.М. Смирнов, М.Е. Фролов,  
А.А. Хрущенко

Печатается по решению редакционно-издательского совета  
Санкт-Петербургского государственного политехнического университета.

© Санкт-Петербургский государственный  
политехнический университет, 2014

МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРОЦЕССОВ НЕУПРУГОГО ДЕФОРМИРОВАНИЯ  
МОНОКРИСТАЛЛИЧЕСКИХ СПЛАВОВ НА НИКЕЛЕВОЙ ОСНОВЕ С УЧЕТОМ  
ЭВОЛЮЦИИ  $\gamma$  И  $\gamma'$  ФАЗ

С развитием газотурбинных двигателей (ГТД) все большее применение находят монокристаллические сплавы на никелевой основе. Их использование при изготовлении рабочих и сопловых лопаток позволяет существенно повысить рабочую температуру ГТД, что приводит к повышению эффективности и экономичности ГТД. Действующие на рабочие лопатки ГТД центробежные и газодинамические силы, вызывают в них растяжение, изгиб и кручение. Высокий уровень температур (до 1200 °С) и напряжений в совокупности с нестационарностью режимов нагрева и нагружения, возникновение резонансных колебаний делает лопатку наиболее ответственной деталью двигателя, что в свою очередь приводит к необходимости к разработке уточненных моделей неупругого деформирования монокристаллических сплавов для оценки прочности и долговечности лопаток. Целью исследований являлась разработка феноменологических моделей неупругого деформирования монокристаллических сплавов на никелевой основе, предсказывающих их поведение при высокотемпературных термомеханических воздействиях с учетом эволюции  $\gamma$  и  $\gamma'$  фаз.

На микроскопическом уровне монокристаллические сплавы на никелевой основе представляют собой структуру, состоящую из двух фаз:  $\gamma'$ -фазы, формирующуюся на основе  $Ni_3Al$ , которая в свою очередь рассеяна в матрице из  $\gamma$ -фазы – твердого раствора легирующих элементов в никеле. Частицы  $\gamma'$ -фазы представляют собой кубоиды со средним размером ~500 нм, разделенные нанопрослойками  $\gamma$  фазы с поперечным размером 50-90 нм, объемная доля  $\gamma'$  фазы составляет порядка 70 % [1,2]. Структура монокристаллических сплавов на микроскопическом уровне показана на рис. 1а. В качестве элементарного представительного объема (ЭПО) монокристаллического сплава рассматривалась ячейка периодичности, состоящая из матрицы ( $\gamma$ -фаза) и кубического включения ( $\gamma'$ -фаза) (рис. 1б).

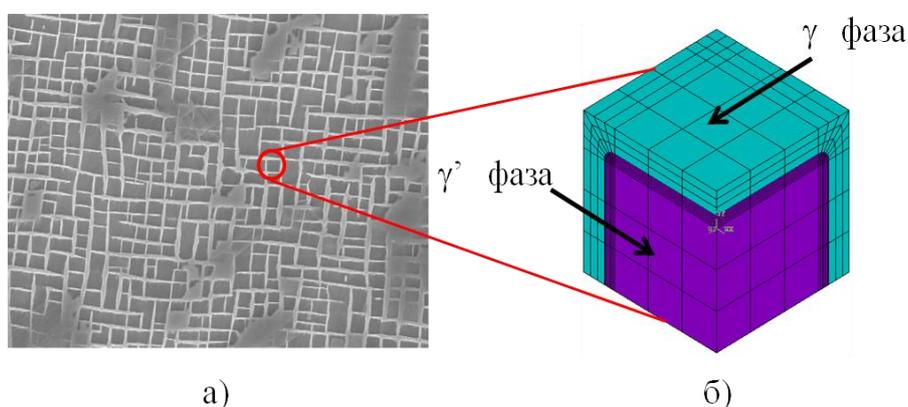


Рис. 1. Микроструктура монокристаллического сплава на никелевой основе: а) фото [3], б) ЭПО

При работе в режиме высокотемпературной ползучести монокристаллические сплавы на никелевой основе имеют тенденцию к изменению структурно-фазового состояния [2,4].

Исходно кубоидные частицы  $\gamma'$ -фазы сращиваются между собой в пластины, перпендикулярные к оси приложения нагрузки. Изменяется объемное соотношение фаз, так для монокристаллического сплава Nb [4] после длительных испытаний толщина прослоек  $\gamma$ -фазы возрастает в три раза [4].

Важной характеристикой для никелевых жаропрочных сплавов, особенно для монокристаллических, является несоответствие периодов кристаллических решеток фаз (мисфитом) [5,6]  $\gamma$ -матрицы и  $\gamma'$ -фазы. Мисфит вызывает появление дополнительных напряжений, обусловленных тем, что при затвердевании для обеспечения сплошности сплава  $\gamma$ -матрица вынуждена сжиматься, а более жесткая  $\gamma'$ - фаза вынуждена растягиваться.

На данный момент существует достаточно большое количество физических и феноменологических моделей неупругого деформирования, однако модели, учитывающие эволюцию  $\gamma$  и  $\gamma'$  фаз при высокотемпературной ползучести, находятся на стадии разработки.

С целью определения влияния объемной доли  $\gamma'$ -фазы на эффективные упругие модули всего сплава в целом выполнена серия численных экспериментов с различной объемной долей  $\gamma'$ , меняющейся в диапазоне от 20 % до 90 %. Установлено, что зависимость эффективных упругих свойств от объемной доли  $\gamma'$ -фазы имеет слабовыраженный характер, так при изменении объемной доли  $\gamma'$ -фазы с 70% до 90% модуль Юнга увеличился всего на 2 %. На рис. 2 представлены поля распределения интенсивностей деформации по Мизесу при растяжении ЭПО монокристаллического сплава на никелевой основе для референсного значения объемной доли  $\gamma'$  фазы - 70%. При проведении расчетов использовались силовые граничные условия, в дальнейшем предполагается использовать граничные условия периодичности [7].

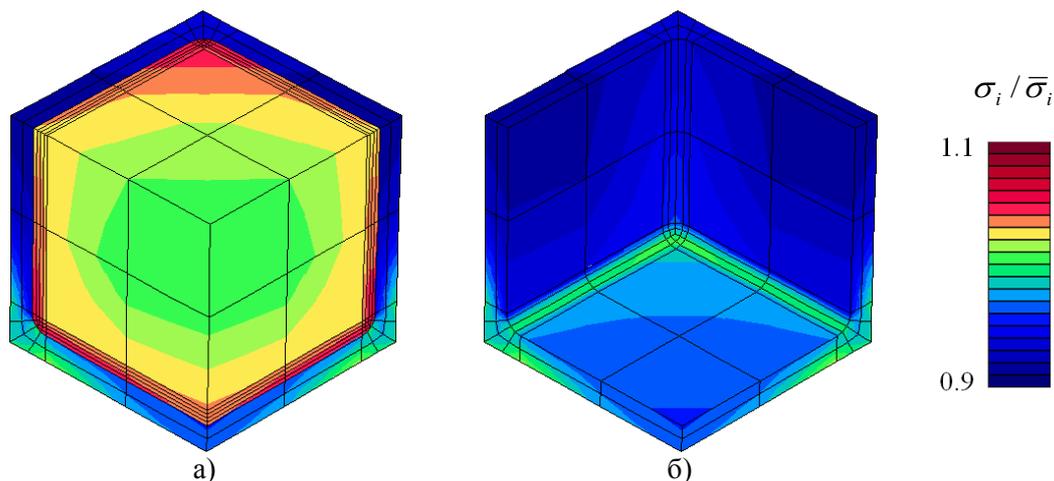


Рис. 2. Распределение поля интенсивности напряжений по Мизесу при растяжении ЭПО монокристаллического сплава Объемная доля  $\gamma'$  фазы - 70%

Получены результаты конечно-элементного (КЭ) моделирования процесса формирования преднапряжений, вызываемых мисфитом, путем введения в модель фиктивных коэффициентов температурного расширения для обеих фаз (отрицательного для  $\gamma$ -фазы, положительного для  $\gamma'$ -фазы) и анализом напряженного состояния ЭПО при нагреве до температуры, обеспечивающей соответствующее мисфиту расширение/сжатие  $\gamma$  и  $\gamma'$  фаз. Установлено, что мисфит вызывает напряжения, которыми нельзя пренебрегать при дальнейших расчетах.

Доля  $\gamma'$ -фазы в общем объеме монокристаллического сплава на никелевой основе является одним из основных параметров, влияющих на пластические свойства сплава. На рис. 3 представлены расчетные диаграммы деформирования монокристаллического сплава для различных долей  $\gamma'$ -фазы, полученные на основе прямой КЭ гомогенизации. В расчетах использовалась модель пластичности кристалла [8] с учетом систем скольжения  $\{111\}\langle 110\rangle$ .

Экспериментальные данные, применяемые в расчетах, были взяты из работы [9]. Результаты получены с использованием КЭ программы PANTOCRATOR [10].

На данном этапе использовалась одна из простейших аппроксимаций диаграммы пластического деформирования, а именно, для задания свойств отдельных компонент ЭПО монокристаллического сплава использовалась билинейная аппроксимация диаграммы деформирования, использовалась изотропная модель упрочнения. В дальнейшем предполагается использовать и более сложные аппроксимации, учитывающие нелинейное кинематическое упрочнение.

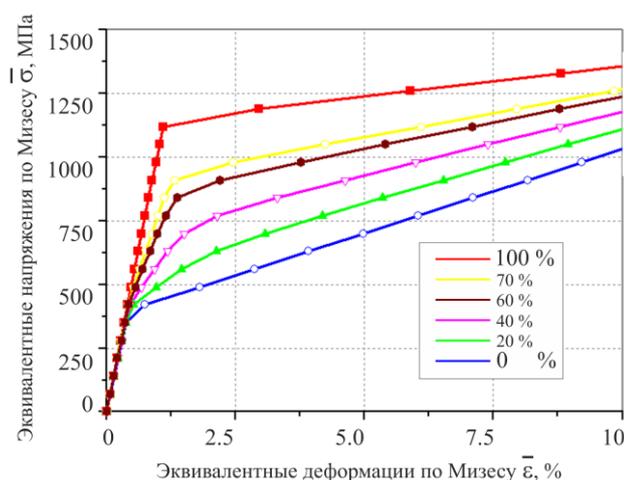


Рис. 3. Влияние доли  $\gamma'$  фазы на пластические свойства монокристаллического сплава

При увеличении доли  $\gamma'$ -фазы качественный характер диаграммы деформирования не меняется, однако происходит рост предела текучести и уменьшение упрочнения, что соответствует наблюдаемым в экспериментах [9] эффектам.

#### ЛИТЕРАТУРА:

1. Шалин Р.Е., Светлов И.Л., Качалов Е.Б. и др. Монокристаллы никелевых жаропрочных сплавов – М.: Машиностроение, 1997. – 336с.
2. Каблов Е.Н., Петрушин Н.В., Елютин Е.С. Монокристаллические жаропрочные сплавы для газотурбинных двигателей // Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. 2011. №2. С. 38–52.
3. Pollock T.M., Tin S. Nickel-Based Superalloys for Advanced Turbine Engines: Chemistry, Microstructure, and Properties // Journal of propulsion and power. 2006. Vol. 22, №. 2.
4. Епишин А.И., Светлов И.Л., Brueckner U., Link T., Portella P., Голубовский Е.Р. Высокотемпературная ползучесть монокристаллов никелевых жаропрочных сплавов с ориентацией [001] // Материаловедение. 1999. № 5. С. 32-42.
5. Самойлов А.И., Петрушин Н.В., Назаркин Р.М., Моисеева Н.С. Мисфит как характеристика уровня межфазных напряжений в монокристаллических никелевых жаропрочных сплавах / Известия РАН. Металлы. 2011. № 3. С. 71–77.
6. Петрушин Н.В. Исследование влияния размерного несоответствия периодов кристаллических решеток  $\gamma$ - и  $\gamma'$ -фаз на характеристики жаропрочности дисперсионно- твердеющих никелевых сплавов // Изв. АН СССР. Металлы. 1981. №6. С. 153–159.
7. Семенов А.С., Грищенко А.И., Мельников Б.Е. Конечно-элементное моделирование деформирования костной ткани на субмикроскопическом уровне // Научно-технические ведомости СПбГПУ. Физ.-мат. науки. 2014. №3 (201). С. 20-34.
8. Семенов А.С. Идентификация параметров анизотропии феноменологического критерия пластичности для монокристаллов на основе микромеханической модели // Научно-технические ведомости СПбГПУ. Физико-математические науки. 2014. № 2 (194). С. 15-29.
9. Estevez R., Hoinard G., Franciosi P. Hardening anisotropy of superalloy crystals – II. Numerical

Analysis of heterogeneity effects // Acta Materialia. 4(45), 1997. P. 1567-1584.

10. Семёнов А.С. PANTOCRATOR – конечно-элементный программный комплекс, ориентированный на решение нелинейных задач механики / Тр. V межд. конф. Научно-технич. проблемы прогноз. надежности и долговечн. конструкций и методы их решения. Изд-во СПбГПУ; 2003. С. 466-480.

УДК 539.3

Е.Р. Богданова, А.В. Бенин (ФГБОУ ВПО ПГУПС),  
М.О. Беляев, С.Г. Семенов, А.С. Семенов (Санкт-Петербургский государственный  
политехнический университет)

## ИССЛЕДОВАНИЕ ПРОЦЕССОВ ДЕФОРМИРОВАНИЯ И РАЗРУШЕНИЯ БЕТОННЫХ ЭЛЕМЕНТОВ, АРМИРОВАННЫХ СТЕКЛОПЛАСТИКОВОЙ АРМАТУРОЙ

В связи с возросшим в последние годы в России объемом производств, повышением спроса на применение стеклопластиковой арматуры (СПА) при армировании бетонных конструкций и введением в действие ГОСТ 31938, предусматривающего ряд испытаний для контроля качества арматуры, ведется активная научно-исследовательская работа по изучению свойств неметаллической арматуры и возможности применения её вместо стальной. Разработка композитной арматуры началась ещё в 1960-гг. [1,2]. Примерно в это же время в механической лаборатории им. проф. Н.А. Белелюбского ЛИИЖТ по заказу Ленинградского метрополитена проводились экспериментальные исследования работы элементов конструкций, армированных стеклопластиковой арматурой небольшого диаметра (3,5 и 5 мм). [3,4,5] В 2014 г. в ИЛ «Механическая лаборатория им. проф. Н.А. Белелюбского» ПГУПС была проведена серия сравнительных испытаний бетонных элементов, армированных стеклопластиковой арматурой диаметром 14 мм. [6].

Целью данной работы является экспериментальное исследование особенности работы СПА в изгибаемых бетонных элементах, сопоставление прочностных характеристик балок, армированных стеклопластиковыми стержнями с двумя типами навивки: плоской и спиралевидной. В задачи исследования входит проведение испытания балок различного вида армирования на четырехточечный изгиб, сбор данных с использованием различных аппаратных комплексов и анализ полученных результатов. Также в ходе исследования проводилось конечно-элементное (КЭ) моделирование разрушения бетонных образцов.

Схема испытаний, а также размеры бетонных балок и расположение арматуры представлены на рис. 1. Размеры испытуемого образца соответствуют ГОСТ 10180-2011. Балки были армированы четырьмя стержнями, уложенными симметрично. Нагрузка прикладывалась по схеме четырехточечного изгиба. Испытания проводились до разрушения ступенчато-возрастающей нагрузкой с выдержками (см. рис. 2). В эксперименте для всех образцов использовался бетон класса В35.

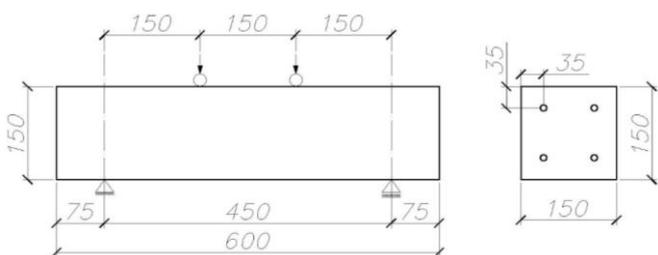


Рис. 1. Схема нагружения балок с основными размерами

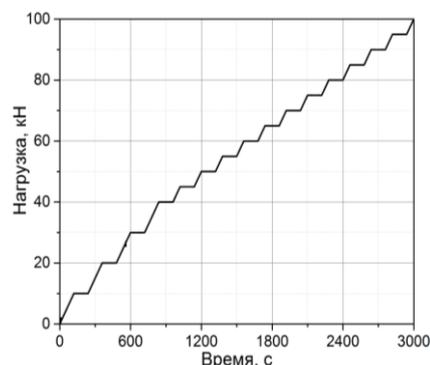


Рис. 2. Программа нагружения

Для измерения перемещений и деформаций было использовано следующее оборудование: оптическая система измерения полей деформаций Vic 3D Correlated Solutions, датчики перемещений LVDT, тензометрическая станция «Геркулес».

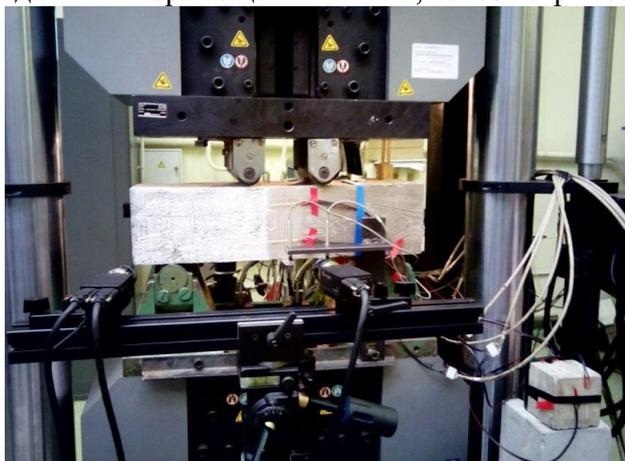


Рис. 3. Расстановка измерительной аппаратуры

Эксперимент проводился на универсальной испытательной машине Instron модели 1200KN серии SATEC™. Отсчеты с приборов снимались на каждом этапе нагружения после выдержки под нагрузкой. Общий вид установки для испытаний с установленным образцом приведен на рис. 3. Поведение испытываемых образцов изменялось в зависимости от наличия трещин, вида армирования, уровня нагружения. Момент появления трещин фиксировался визуально. Приращение деформаций в балках происходило после появления трещин. Обработка результатов испытаний представлена в виде графиков прогиб - нагрузка рис. 4.

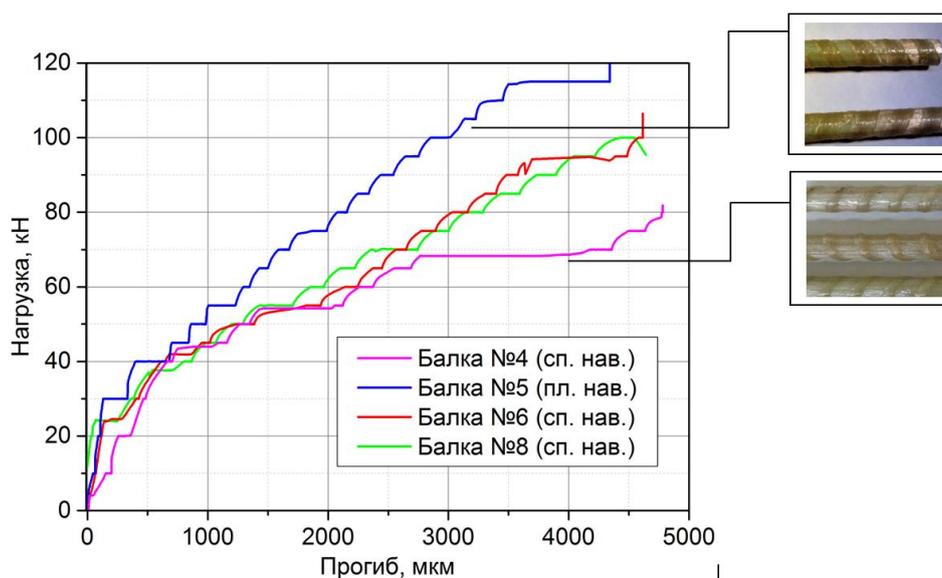


Рис. 4. Зависимость прогиба от приложенной нагрузки для балок с различным армированием



Рис. 5. Характер разрушения бетонной балки армированной СПА

КЭ моделирование процессов деформирования и разрушения балок производилось с использованием КЭ пакета ANSYS [7] и применением восьмиузлового трехмерного конечного элемента SOLID65, позволяющего учесть накопление повреждений вследствие микрорастрескивания. Детальное описание метода моделирования процессов разрушения бетона представлено в [8, 9, 10]. Результаты КЭ моделирования для момента зарождения центральной трещины и ее эволюции показаны на рис. 6 и 7.

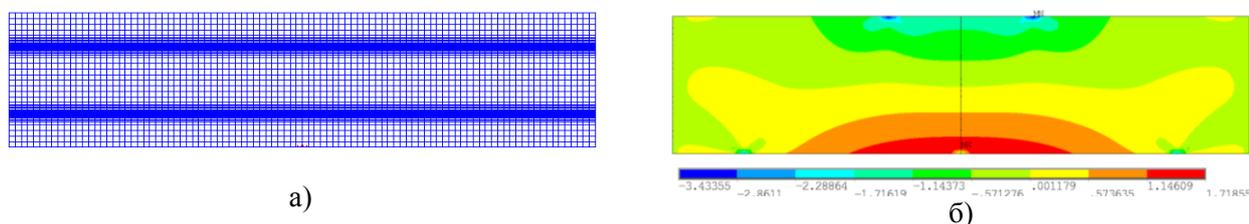


Рис. 6. Результаты КЭ моделирования: а) картина зарождения центральной трещины и б) соответствующее ей распределение поля осевых напряжений, МПа

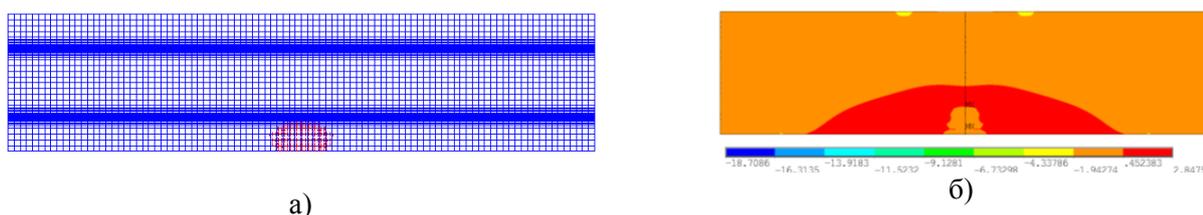


Рис. 7. Результаты КЭ моделирования: а) картина эволюции центральной трещины и б) соответствующее ей распределение поля осевых напряжений, МПа

На основе сопоставления значений прогибов испытанных образцов с различным видом армирования можно сделать вывод о том, что образцы, армированные СПА со спиралевидной навивкой, проявили повышенную деформативность по сравнению с балками со СПА с плоской навивкой. Во всех случаях разрушение балок, армированных СПА, происходило по наклонным трещинам вблизи опор в результате ослабления сцепления арматуры с бетоном (рис. 5). Несущая способность балок, армированных СПА, ограничивалась прочностью наклонных сечений.

#### ЛИТЕРАТУРА:

1. Степанова В.Ф., Степанов А.Ю., Жирков Е.П. Арматура композитная полимерная. М: ООО «Бумажник», 2013. 200 с.
2. Бенин А.В., Семенов С.Г. Особенности испытаний композитной полимерной арматуры // Промышленное и гражданское строительство. 2014. №9. С. 42-46.
3. Филин А.П., Иохельсон Я.Е., Александров П.Е., Донская З.И. Исследование работы элементов конструкций, армированных неметаллической арматурой. Л.: Институт инженеров железнодорожного транспорта, 1967. 59 с.
4. Елизаров С.В., Каптелин Ю.П., Бенин А.В. Механическая лаборатория им. проф. Н.А. Белелюбского. Страницы 155-летней истории. – СПб.: ПГУПС, 2009. – 75 с.
5. Елизаров С.В., Каптелин Ю.П., Бенин А.В. Механическая лаборатория им. проф. Н.А. Белелюбского (к 200-летию Петербургского государственного университета путей сообщения) // Alma mater (Вестник высшей школы). 2009. № 9. С. 58-64.
6. Бенин А.В., Гарбарук В.В. Планирование эксперимента. –СПб.: ПГУПС, 2010. –90 с.
7. ANSYS® Academic Research, Release 15.0.
8. Бенин А.В., Семёнов А.С., Семёнов С.Г., Фёдоров И.В. Конечно-элементное моделирование процессов неупругого деформирования и разрушения элементов железобетонных конструкций // Морские интеллектуальные технологии. 2011. № 3 (спецвыпуск). С.102-105.

9. Бенин А.В., Семенов А.С., Семенов С.Г., Мельников Б.Е. Математическое моделирование процесса разрушения сцепления арматуры с бетоном. Часть 1. Модели с учетом несплошности соединения // Инженерно-строительный журнал. 2013. № 5 (40). С. 86-99.
10. Бенин А.В., Семенов А.С., Семенов С.Г., Мельников Б.Е. Математическое моделирование процесса разрушения сцепления арматуры с бетоном. Часть 2. Модели без учета несплошности соединения // Инженерно-строительный журнал. 2014. № 1 (45). С. 23-40.

УДК 539.3

Р.В. Гучинский, С.В. Петин  
(Санкт-Петербургский государственный политехнический университет)

## РАСПРОСТРАНЕНИЕ ПРОСТРАНСТВЕННЫХ ТРЕЩИН УСТАЛОСТИ И ЕГО КОНЕЧНО-ЭЛЕМЕНТНОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ

Скорость роста трещины усталости при плоском напряженном состоянии хорошо описывается уравнением Пэриса, связывающим ее с обобщенной упругой характеристикой поля напряжений у вершины трещины – коэффициентом интенсивности напряжений (КИН). Использование метода конечных элементов позволяет моделировать дискретное подрастание трещин в пластинах, при этом сетка конечных элементов адаптивно перестраивается на каждом шаге роста трещины в соответствии с площадками наибольших главных напряжений.

Однако моделирование пространственных трещин усталости в формате линейной механики разрушения не всегда подтверждается экспериментальными данными. Целью настоящей работы является анализ публикаций, посвященных распространению пространственных трещин усталости и его КЭ моделированию.

Существует два подхода к моделированию развития пространственных трещин с применением КИН.

*Первый* подход базируется на одновременном интегрировании уравнения Пэриса по каждому направлению, перпендикулярному контуру фронта трещины. Для заданного числа циклов определяются приращения трещины в нескольких направлениях и выстраивается ее новый фронт, на каждом шаге сетка конечных элементов перестраивается. Современные вычислительные комплексы позволяют автоматизировать этот процесс и моделировать развитие трещин от произвольного плоского дефекта [1-3]. Экспериментальное подтверждение таких исследований практически не встречается. Напротив, было показано, что при моделировании развития полуэллиптической трещины в пластине, подвергнутой растяжению, фронт быстро теряет эллиптичность, что не подтверждается экспериментом [4].

*Второй* подход является, по сути, упрощением первого и основан на предположении, что фронт трещины сохраняет эллиптичность по мере ее роста, поэтому достаточно определять приращения трещины только по двум направлениям развития – внутреннему и поверхностному. Это предположение основано на экспериментальных работах, показывающих, что после некоторой начальной стадии развития трещины соотношение ее размеров  $a/b$  (рис. 1) стабилизируется, поэтому конфигурация начального плоского дефекта оказывает незначительное влияние на последующий рост трещины [5, 6].

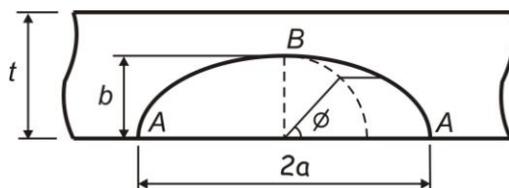


Рис. 1. Полуэллиптическая трещина

В работе [7] впервые показано, что константа  $C$  уравнения Пэриса не может считаться одинаковой для двух направлений развития трещины, т.к. в соответствии с экспериментальными данными для разных КИН на внутренней и поверхностных точках приращения трещины в обоих направлениях оказывались равными. В таком случае коэффициент  $C$  оказывается зависимым от параметрического угла  $\phi$  (рис.1), уровня нагрузки, размеров трещины, следовательно, его нельзя считать константой материала [8]. Для устранения зависимости коэффициента  $C$  от направления интегрирования было предложено использование среднеквадратических значений КИН [8,9]:

$$K_{rmsA}^2 = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} K^2(\phi) \sin^2(\phi) d\phi, \quad K_{rmsB}^2 = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} K^2(\phi) \cos^2(\phi) d\phi. \quad (1)$$

Для определения приращений трещины в каждый момент трещины необходимо располагать значениями КИН для всех контуров фронта трещины, реализующихся в процессе ее роста. Выражения для различных условий нагружения, а также соотношений размеров трещин и образца, обобщены в справочнике Ю. Мураками [10]. Зависимость  $K(\phi)$ , как правило, определяется в предположении плоской деформации во всех точках фронта, однако считать это справедливым можно только для внутренней точки В (рис. 1), в поверхностных точках А развивается плоское напряженное состояние. Кроме того, определение КИН методом конечных элементов показывает, что в поверхностных точках полуэллиптической трещины значения КИН стремятся к нулю при измельчении сетки [11, 12]. Следовательно применение зависимостей  $K(\phi)$ , полученных интерполяцией при малых значениях параметрического угла, нельзя считать обоснованным.

Эффект закрытия трещины существенно влияет на продвижение полуэллиптической трещины в обоих направлениях. Тем не менее, в большинстве работ по моделированию роста таких трещин он не учитывается. Связано это прежде всего со сложностью оценки параметра раскрытия трещины (ПРТ), введенным В. Элбером для учета этого эффекта при плоском напряженном состоянии. Для полуэллиптической трещины он оказывается зависимым не только от коэффициента асимметрии цикла нагружения, но и от параметрического угла, вида нагружения и размеров трещины. Кроме лидирующего воздействия пластичности на закрытие трещины, оно подвержено влиянию окружающей среды, образования продуктов окисления на берегах трещины, изменяющейся шероховатости берегов. Необходимо также принимать во внимание воздействие остаточных напряжений на раскрытие трещины, учитывая их перераспределение по мере ее роста. Из-за неравномерности распределения остаточные напряжения могут существенно исказить контур фронта трещины [13, 14].

Экспериментальное определение ПРТ довольно сложно, прежде всего из-за труднодоступности внутренних точек трещины. Немногочисленные экспериментальные исследования показывают, что при совместном растяжении и изгибе пластины с полуэллиптической трещиной ПРТ в поверхностных точках несколько меньше, чем во внутренней точке, по-видимому, из-за большего размера пластической области [15]. При пульсирующем изгибе пластины с полуэллиптической трещиной, поверхностные точки могут оставаться полностью открытыми [16].

Ввиду сложности экспериментального определения ПРТ, представляет интерес численное моделирование раскрытия трещин. Широкое распространение получила модель, предложенная в работе [17]. На основании конечно-элементного анализа перемещений берегов трещины при плоском напряженном состоянии было сделано заключение о том, что трещина закрывается в тот момент, когда знак узловой силы в вершине трещины меняет знак. При этом пренебрегалось влиянием всех факторов, за исключением пластичности.

Анализ работ, посвященных распространению пространственных трещин усталости и их моделированию показал наличие ряда недостатков, связанных с использованием линейно

упругого формата механики разрушения. При использовании КИН, характеристики поля напряжений в ближайшей окрестности вершины трещины, накопленные повреждения в пределах пластической зоны вследствие предшествующих циклов нагружения оказываются неучтенными. Следовательно, во-первых, при таком подходе невозможно принять во внимание историю нагружения. Во-вторых, в подход не используется пластическая деформация – ключевой фактор, связанный с необратимыми изменениями в материале. Влияние пластичности учтено лишь косвенно – посредством введения ПРТ в размах КИН. В-третьих, применение уравнения Пэриса не может быть обосновано на заключительном этапе ее распространения, при развитой пластической деформации. В-четвертых, моделирование слияния трещин с помощью КИН представляет значительные трудности, прежде всего из-за возрастающей пластической деформации в момент соединения трещин. Наконец, применение уравнения Пэриса требует для оценок КИН наличия начального дефекта в виде плоской трещины, поэтому фаза зарождения трещины остается за пределами рассмотрения.

Из-за возникающих трудностей при использовании КИН актуальной является разработка альтернативных методов моделирования распространения пространственных трещин усталости, в основе которых, по-видимому, должны лежать теории накопления повреждений и деформационные или энергетические критерии разрушения.

#### ЛИТЕРАТУРА:

1. Carter B.J., Wawrzynek P.A., and Ingraffea A.R.. Automated 3-D crack growth simulation. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 47: 2000, pp. 229–253.
2. Branco R. , Antunes F. V., Costa J. D., Barbosa J., Numerical modelling of fatigue crack growth in shafts under tension and bending, *Proceedings of the 3rd International conference on integrity, reliability and failure (IRF'2009)*, Integrity, Reliability and Failure, chap. XVIII, pp. 553-565,
3. Chipalo, M. I., Gilchrist, M. D. and Smith, R. A., A finite element technique for the investigation of the shape development of planar cracks with initially irregular profiles; *International journal of mechanical science*, 1990, Vol.32, No.3, pp. 243-251.
4. Lin, X.B. and Smith, R.A., Fatigue shape analysis for corner cracks at fastener holes. *Engineering Fracture Mechanics*, Vol. 59, 1998, pp. 73–87.
5. Soboyejo W. O. and Knott J. F., An investigation of crack closure and the propagation of semi-elliptical fatigue cracks in Q1N pressure vessel steel, *International Journal of Fatigue*, Vol. 17, pp. 577-581, 1995.
6. Toribio J., Matos J. C., González B. Escudra J., Modelling of crack path evolution in round bars under cyclic tension and bending, *Proceedings of 4th international conference on fatigue crack paths*, Gaeta, Italy, 2012, pp. 513-520
7. Raju, I. S. and Newman, J. C., Jr., Analyses of surface cracks in finite plates under tension or bending loads, *NASA TP-1578*, 1979, pp. 1-46
8. Chahardehi, A.; Brennan, F. P.; Han, S. K. Surface crack shape evolution modeling using an RMS SIF approach, *Int. J. Fatigue*, 32, 2010, pp. 297-301
9. Brennan, F.P.; Ngiam, S.S.; Lee, C.W. An experimental and analytical study of fatigue crack shape control by cold working *Engineering Fracture Mechanics* vol. 75 issue 3-4 February - March, 2008. p. 355-363
10. Murakami, Y. *et al.*, *Stress Intensity Factor Handbook*, The Society of Materials Science Japan. Pergamon Press, Oxford, 1989.
11. Newman, J. C., Jr., Raju, I. S. Stress-Intensity factor equations for cracks in three-dimensional finite bodies, *NASA TM 83200*, Langley Research Center, Hampton VA., 1981, pp. 1-54.
12. Fawaz, S. A., Börje Andersson and J. C. Newman, Jr. Experimental Verification of Stress Intensity Factor Solutions for Corner Cracks at a Hole Subject to General Loading. *Proc. of the 22nd Symposium of the International Committee on Aeronautical Fatigue*, 7-9 May 2003, Lucerne, CH, EMAS.
13. C.Q. Cai, C.S. Shin, A normalized area-compliance method for monitoring surface crack development in a cylindrical rod. *Int J Fatigue*, 27, 2005, pp. 801–809.
14. Timbrell C., Chandwani R., and Cook G., State of the art in crack propagation. In *Journee Scientifique 2004: Les methodes de dimensionnement en fatigue*, Fribourg, Switzerland, 2004, pp. 1-35.

15. Fleck, N. A., Smith, I. F. C. and Smith, R. A., Closure behaviour of surface cracks, 1983. Fatigue & Fracture of Engineering Materials & Structures, 6: pp. 225–239.
16. Reytier, M., Fatigue crack growth of large cracked plates of martensitic P91 steel at 550°C, OMMI, vol. 3, pp 1-10, 2004
17. Wu J., Ellyin F. A study of fatigue crack closure by elastic-plastic finite element analysis for constant-amplitude loading. // International Journal of Fracture. – 1996. – Vol. 82 – p. 43-65.

УДК 539.32

И.А. Игнатович, А.С. Семенов, С.Г. Семенов (Санкт-Петербургский государственный политехнический университет), Л.Б. Гецов (ОАО НПО ЦКТИ)

### КОНЕЧНО-ЭЛЕМЕНТНОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРОЦЕССОВ НЕУПРУГОГО ДЕФОРМИРОВАНИЯ И РАЗРУШЕНИЯ ДИСКОВ ТУРБИН ПРИ СЛОЖНОМ ТЕРМОМЕХАНИЧЕСКОМ ЦИКЛИЧЕСКОМ ВОЗДЕЙСТВИИ

Одной из основных причин разрушения дисков газотурбинных установок (ГТУ) является возникновение и развитие термоусталостных трещин на ободе диска, под действием термо-механической циклической нагрузки [1]. Расчет напряженно-деформированного состояния в точках с наибольшей концентрацией напряжений на ободе диска производился на основе прямого трехмерного конечно-элементного (КЭ) моделирования с использованием термо-упруго-вязко-пластической модели материала. Для определения числа циклов до появления макротрещин использовался деформационный критерий термо-усталостного разрушения [1-4], учитывающий циклическую и односторонне накопленные пластические деформации и деформации ползучести. Результаты расчета сравнивались с данными эксперимента проведенного ЦНИИТМАШ [5], в которых диски доводились до разрушения.

В использованной в расчетах модели термо-упруго-вязко-пластичности с нелинейным изотропно-кинматическим упрочнением (теория упрочнения с законом Нортона для ползучести совместно с моделью пластичности Шабоса) скорость полной деформации определяется суммой упругой, вязкой (ползучей), пластической и температурной составляющих:

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}} = \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^e + \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^c + \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p + \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^T. \quad (1)$$

Скорость деформации ползучести определяется степенным законом установившейся ползучести Нортона:

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^c = A \sigma_{eq}^n \frac{3\mathbf{s}}{2\sigma_{eq}}, \quad (2)$$

где  $\mathbf{s}$  - девиатор тензора напряжений,  $A$ ,  $n$ ,  $m$  - константы материала,  $\sigma_{eq}$  - эквивалентное по Мизесу напряжение.

Скорость пластической деформации определяется на основе ассоциированного закона пластического течения, с использованием в качестве функции нагружения  $f$  критерия Мизеса:

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p = \dot{\lambda} \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}}. \quad (3)$$

Решение краевой задачи термо-вязко-упруго-пластичности получено с использованием конечно-элементного (КЭ) вычислительного комплекса ABAQUS [6]. Ниже представлены результаты КЭ расчета для разгонного диска №138, изготовленного из сплава ЭИ765. Сектор диска (1/72 часть), включающий только один паз ёлочного замка под потенциальное

хвостовое соединение с лопаткой, для которого при решении задач непосредственно производилось КЭ разбиение показан на рис. 1а.

При проведении КЭ расчетов при нестационарных режимах работы ГТУ в качестве нагрузок на диск задавались: центробежное воздействие непосредственно на материал диска ( $\omega=0\div 12\,700$  об/мин); центробежное воздействие от грузов, вставленных в пазы ( $\omega=0\div 13\,000$ ), переменное во времени и по пространству поле температур ( $T(x,y,z,t)$ ) (рис. 1в, г).

На боковых сторонах сектора диска задавались условия циклической симметрии. На внутреннем радиусе, граничащем с валом задавались нулевые радиальные перемещения. Для исключения твердотельных перемещений задавались в одной точке на внутреннем радиусе нулевое осевое перемещение. Период термомеханического цикла составлял 130 минут.

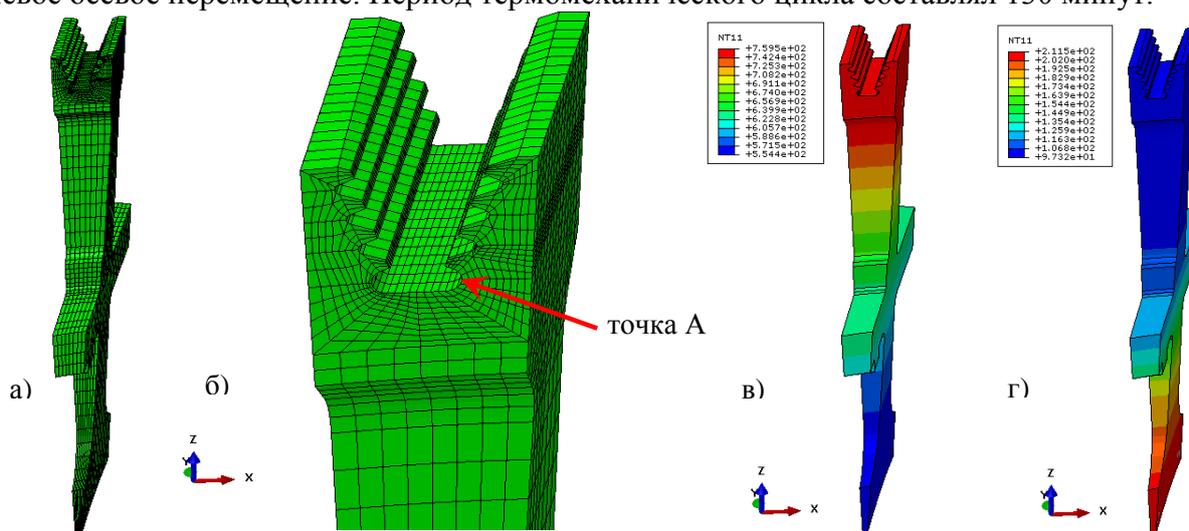


Рис. 1. а) КЭ модель сектора диска №138; б) Фрагмент обода КЭ модели диска; в) максимальная температура при циклической нагрузке; г) минимальная температура при циклической нагрузке

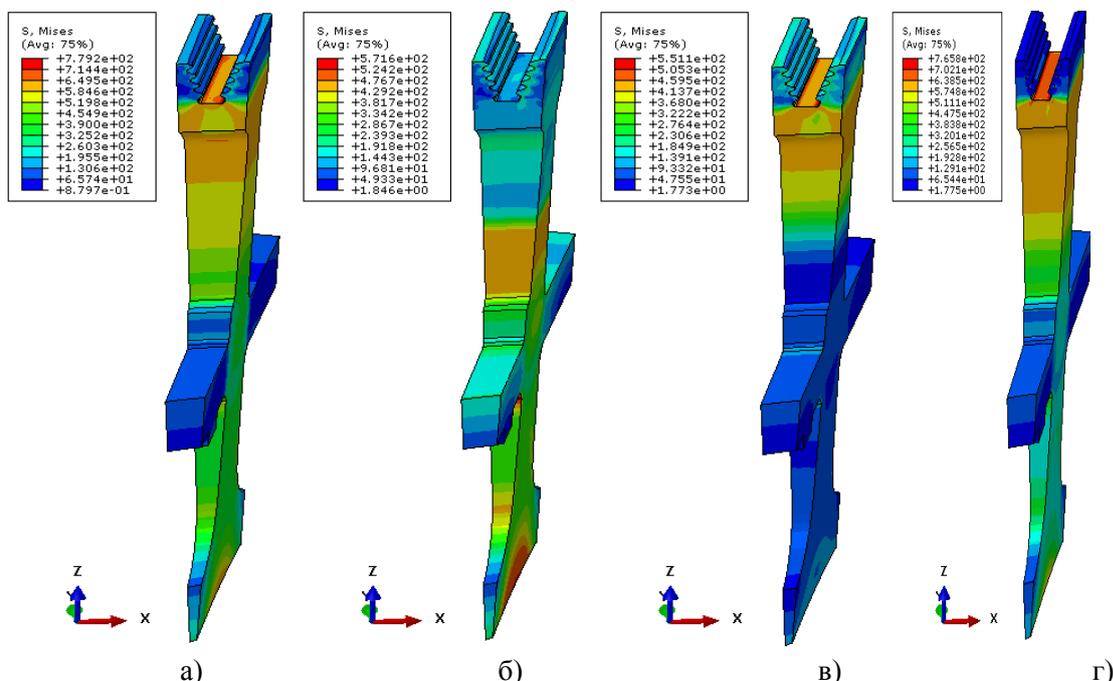


Рис. 2. Распределение полей интенсивности напряжений по Мизесу для четырех характерных моментов нагружения: а) 6 мин; б) 18 мин , в) 48 мин ; г) 113 мин.

КЭ анализ диска при сложной термо-механической циклической нагрузке показал, что наибольшие напряжения реализуются в зоне концентрации напряжений обода диска в нижней части паза (точка А на рис. 1б), что соответствует наблюдаемому в эксперименте месту зарождения трещины. Изменение полей интенсивности напряжений с течением времени для четырех характерных моментов цикла показаны на рис. 2.

Результаты расчета повреждений в рамках деформационного критерия разрушения [1-4]

$$D = \sum_{j=1}^N \left( \frac{\Delta \varepsilon_{eqj}^p}{\varepsilon_r^p(T)} \right)^k + \sum_{j=1}^N \left( \frac{\Delta \varepsilon_{eqj}^c}{\varepsilon_r^c(T)} \right)^m + \max_{0 \leq t \leq t_{\max}} \frac{\varepsilon_{eq}^p}{\varepsilon_r^p(T)} + \max_{0 \leq t \leq t_{\max}} \frac{\varepsilon_{eq}^c}{\varepsilon_r^c(T)} = 1 \quad (4)$$

с использованием моделей ползучести, пластичности и вязкопластичности представлены в табл. 1. Рассматривались 13 термоциклов нагружения, после которых в эксперименте наблюдалось возникновение макротрещины. Величины предельных деформаций пластичности и ползучести при одноосном растяжении принимались равными 6.5% умноженными на корректирующий множитель, учитывающий многоосность напряженного состояния [7]. При использовании модели ползучести результирующая поврежденность за 13 циклов достигла значения 0.915. Расчет с применением модели пластичности приводит к поврежденности 0.326. Суммарное значение поврежденностей этих двух расчетов приводит к величине поврежденности 1.241. Однако более корректный расчет с одновременным учетом в модели материала и ползучести и пластичности дает достаточно точный прогноз поврежденности равный 1.061. Отличие в 6% обеспечивает точность прогноза числа циклов до разрушения менее одного цикла, а приведенное значение поврежденности дает консервативную оценку.

Табл. 1. Результаты расчета поврежденности за 13 циклов для различных моделей материала

	$\overline{\Delta \varepsilon_{eq}^c}$ , %	$\overline{\Delta \varepsilon_{eq}^p}$ , %	$\varepsilon_{eq}^c$ , %	$\varepsilon_{eq}^p$ , %	$\varepsilon_r^*$ , %	$D_1$	$D_2$	$D_3$	$D_4$	$D$	$D_{\Sigma}$
Модель ползучести	0.53		1.26		5.3		0.677		0.238	0.915	1.241
Модель пластичности		0.57		0.97	4.8	0.124		0.202		0.326	
Модель вязко-пластичности	0.40	0.42	0.7	0.89	4.9	0.079	0.659	0.181	0.142	<b>1.061</b>	1.061

Дальнейшее предсказание долговечности диска может быть сделано на основе анализа кинетики роста трещины [8, 9].

#### ЛИТЕРАТУРА:

1. Гецов Л.Б. Материалы и прочность деталей газовых турбин. Т. 2. Рыбинск. Изд. Дом. Газотурбинные технологии, 2011.
2. Гецов Л.Б., Добина Н.И., Рыбников А.И., Семенов А.С., Старосельский А.А., Туманов Н.В. Сопротивление термической усталости монокристаллического сплава // Проблемы прочности. №5, 2008, С. 54-71.
3. Гецов Л.Б., Семенов А.С. Критерии разрушения поликристаллических и монокристаллических материалов при термоциклическом нагружении // Труды ЦКТИ, вып. 296, 2009, С.83-91.
4. Семенов А.С., Гецов Л.Б. Критерии термоусталостного разрушения монокристаллических жаропрочных сплавов и методы определения их параметров // Проблемы прочности. 2014, № 1. С. 50-62.
5. Анализ прочности газотурбинных дисков. Отчет ЦНИИТМАШ. 1970.
6. ABAQUS Analysis User's Manual, Version 6.10.

7. Гецов Л.Б., Марголин Б.З., Федорченко Д.Г. Вопросы определения запасов прочности элементов машиностр. констр. при расчетах МКЭ // Труды НПО ЦКТИ, вып. 296, Прочность материалов и ресурс элементов энергооборудования. СПб, 2009, С. 51-66.
8. Semenov A.S., Semenov S.G., Nazarenko A.A., Getsov L.B. Computational methods for determining the fatigue, creep and thermal fatigue crack growth rate in GTE blades // Materials and technology. – 2012. – № 3. – P. 197–203.
9. Гецов Л.Б., Семенов А.С., Семенов С.Г. Обеспечение надежности эксплуатации газотурбинных установок компрессорных станций // Газовая промышленность. 2013. № S700 (700). С. 72-77.

УДК 519.71

А.А. Иоселевский, А.А. Суханов  
(Санкт-Петербургский государственный политехнический университет)

### ИДЕНТИФИКАЦИЯ ПАРАМЕТРОВ ДИНАМИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ КАЧКИ СУДНА

С развитием технологий повышаются требования к процессам управления в различных областях техники. Для обеспечения качественного управления любой технической системой необходимо достаточно точное знание её математической модели. Построение математической модели объекта по наблюдаемым входным и выходным данным называется идентификацией и включает определение его структуры и параметров. Целью работы является исследование методов идентификации параметров модели применительно к процессу бортовой качки судна. Идентификация математической модели бортовой качки необходима для обеспечения оптимального управления судном с целью умерения качки (системы умерения качки). В качестве объекта исследования выбрано малое судно с двумя бортовыми рулями. Некоторые методы идентификации с использованием специальных сигналов, а также параметрические методы идентификации изложены в [1,2].

В рамках линейной теории бортовая качка судна рассматривается как изолированный колебательный процесс, описываемый дифференциальным уравнением второго порядка [3]:

$$\ddot{\theta} + a_1\dot{\theta} + a_2\theta = b_1\delta_R + b_2\alpha(t),$$

где  $\theta$  – угол крена;  $\delta_R$  – управление (угол перекадки бортовых рулей);  $\alpha$  – возмущение (угол волнового склона);  $a_1, a_2, b_1, b_2$  – неизвестные постоянные коэффициенты. Задача идентификации состоит в определении параметров  $a_1, a_2, b_1, b_2$  по заданному управлению  $\delta_R$  и измеряемому вектору состояния  $[\hat{\theta}; \hat{\dot{\theta}}]^T$  при наличии неизмеряемого случайного морского волнения и шумов датчиков измерения крена и угловой скорости. Результаты исследования применимы также к другим процессам, описываемым дифференциальным уравнением второго порядка.

Основной причиной качки судна является морское волнение. Для моделирования морского волнения использована методика на основе спектральных характеристик реального морского волнения [4]. Трехмерное нерегулярное морское волнение представляется как суперпозиция гармонических волн разных направлений, амплитуды, частоты и фазы. Распределение энергии этих волн по частоте и направлению определяется энергетическим спектром волнения. Для расчёта параметров волнения используются аппроксимационные частотные спектры Вознесенского-Нецветаева и Пирсона-Московица, а также аппроксимационный угловой спектр Артура [5]. Метод позволяет моделировать морское волнение заданной интенсивности и использовать его для ввода в математические модели движения судов.

Для фильтрации сигналов датчиков, содержащих высокочастотный шум, в работе используется метод фильтрации в частотной области, на основе дискретного преобразования Фурье. В отличие от фильтрации во временной области, фильтрация в частотной области не вносит запаздывания в выходной сигнал. Пример использования фильтрации представлен на рис. 1.

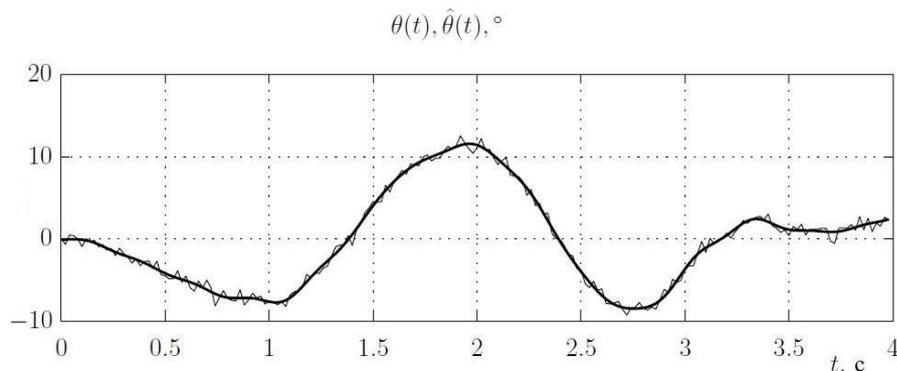


Рис. 1. Пример использования фильтрации в частотной области на основе дискретного преобразования Фурье

В ходе исследования установлено, что область применения методов идентификации, основанных на использовании специальных сигналов (ступенчатое и импульсное воздействие), ограничена условиями, близкими к штилю. Такие методы могут использоваться для приблизительной оценки параметров бортовой качки.

Среди параметрических методов идентификации рассмотрены метод наименьших квадратов (МНК), обобщенный метод наименьших квадратов (ОМНК) и метод инструментальных переменных (МИП).

### 1. Метод наименьших квадратов

Удовлетворительная оценка параметров возможна только при малом волнении (ошибка ниже 50%). Наличие постоянного ненулевого крена вносит смещение в оценку.

### 2. Обобщенный метод наименьших квадратов

Хорошая оценка параметров при волнении до I балла (ошибка ниже 20 %). Наличие постоянного ненулевого крена не вносит смещения в оценку.

### 3. Метод инструментальных переменных

Хорошая оценка параметров при волнении до III баллов (ошибка ниже 5 %). Наличие постоянного ненулевого крена не вносит смещения в оценку (ошибка ниже 10 %).

Наилучшие оценки параметров бортовой качки судна дает метод инструментальных переменных. МИП позволяет проводить идентификацию при волнении до III баллов и работает при наличии постоянного ненулевого крена. Ошибки оценок параметров при использовании МИП лежат в пределах 5 %.

### Выводы

В работе получена математическая модель бортовой качки судна на волнении. При моделировании движения судна учитывались морское волнение, шумы датчиков, модель электропривода бортовых рулей. Получена математическая модель морского волнения на основе спектральных характеристик реального морского волнения. Создано программное

обеспечение для расчета параметров волнения по заданной интенсивности. Указанное программное обеспечение зарегистрировано в Роспатенте (свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ № 2014616757).

Проведен сравнительный анализ методов идентификации параметров на примере бортовой качки судна на волнении. Выявлены границы применимости методов идентификации с использованием специальных сигналов, а также параметрических методов. На рис. 2-5 представлены истинная АЧХ системы и доверительные оценки, полученные тремя параметрическими методами на волнении разной интенсивности.

Получена методика идентификации параметров бортовой качки, позволяющая строить и применять более сложные законы управления, необходимые для более качественного управления судном на волнении.

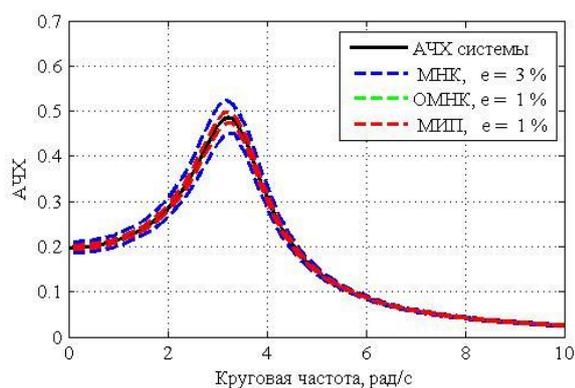


Рис. 2. Волнения нет

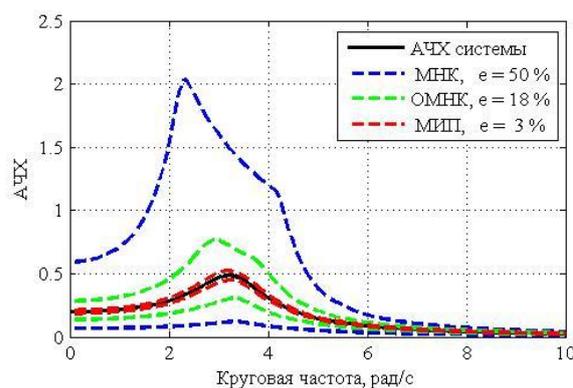


Рис. 3. Волнение I балла

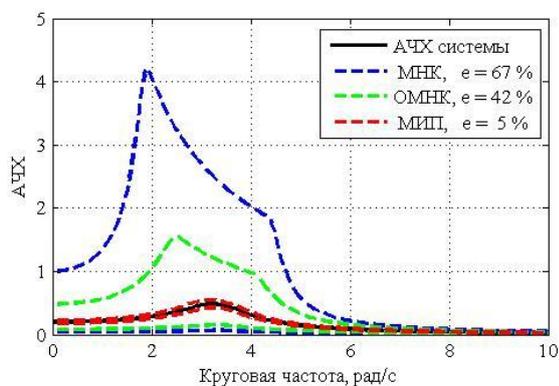


Рис. 4. Волнение II балла

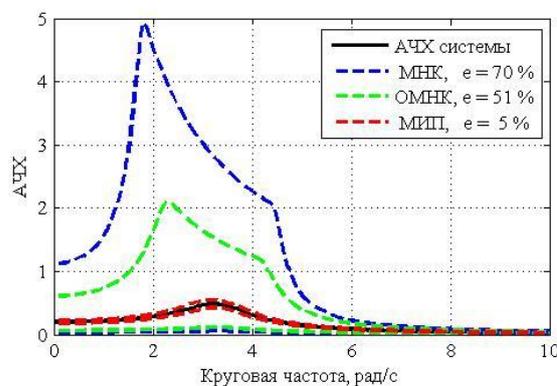


Рис. 5. Волнение III балла

#### ЛИТЕРАТУРА:

1. Льюнг Л. Идентификация систем. Теория для пользователя: Пер. с англ. / Под ред. Я.З. Цыпкина. – М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1991. – 432 с.
2. Гроп Д. Методы идентификации систем: Пер. с англ. / Под ред. Е.И. Кринецкого. – М.: Мир, 1979. – 303 с.
3. Луговский В.В. Качка корабля. Учебник. СПб.: Изд. центр СПбГМТУ, 1999. – 425 с.
4. Бородай И.К., Нецветаев Ю.А. Качка судов на морском волнении. – Л.: Судостроение, 1969. – 432 с.
5. Бородай И.К., Нецветаев Ю.А. Мореходность судов. – Л.: Судостроение, 1982. – 288 с.

РОБАСТНЫЕ НАСТРОЙКИ ТИПОВЫХ РЕГУЛЯТОРОВ ДЛЯ ДИНАМИЧЕСКИХ  
ОБЪЕКТОВ С ЗАПАЗДЫВАНИЕМ

В работе рассматривается проблема робастной настройки типовых регуляторов в условиях неточного знания параметров динамических объектов с запаздыванием [1]. Более конкретно, основная задача заключалась в разработке, сравнении и опробовании различных методов автоматизированной настройки ПИД-регуляторов по интервальным оценкам параметров модели инерционного объекта с запаздыванием. Наряду с методом «минимаксной» настройки, требующим большого по объему перебора вариантов и, как следствие, значительных затрат времени, рассматривались более простые способы робастной настройки регулятора: метод «приближенно-робастных» настроек и метод «комбинированно-робастных» настроек. Суть всех методов заключается в том, чтобы определить параметры регулятора, гарантирующие наилучшее качество управления при любых возможных значениях параметров объекта.

Рассматривается система «объект – регулятор», которая в отклонениях от номинальных значений выходной и управляющей переменных  $y(t)$  и  $u(t)$  имеет вид:

$$y = H(p)u + n, \quad u = -W(p)y,$$

причем динамика объекта описывается моделью инерционного звена первого порядка с запаздыванием, а для управления с обратной связью по отклонению от задания используется ПИД-регулятор, то есть

$$H(p) = \frac{Ke^{-p\tau}}{Tp + 1}, \quad W(p) = K_n + \frac{K_u}{p} + K_d p$$

(ПИ-регулятору соответствует частный случай, когда  $K_d = 0$ ).

Пусть также задан критерий, количественно оценивающий качество стабилизации на нулевом уровне выходной переменной  $y(t)$  в условиях действия возмущений  $n(t)$

$$J = f(K, T, \tau, K_u, K_n, K_d), \quad (1)$$

причем управление тем лучше, чем меньше значение данного показателя.

В [2] сформулирована задача определения «минимаксных» робастных настроек параметров регулятора, то есть задача нахождения такой тройки  $\tilde{K}_n, \tilde{K}_u, \tilde{K}_d$ , которая гарантирует наилучшее качество управления при наиболее неблагоприятных значениях параметров объекта  $K, T, \tau$ , принадлежащих заданным интервалам. Эта задача может быть решена путем реализации двухэтапной «минимаксной» процедуры. На первом этапе для каждой тройки настроек регулятора определяется наиболее сложный для управления из возможных объектов, то есть в области ограничений определяются значения  $K, T, \tau$ , максимизирующие показатель  $J$ . В результате формируется функция

$$\phi(K_n, K_u, K_d) = \max \{ f(K, T, \tau, K_u, K_n, K_d) \mid K^{\min} \leq K \leq K^{\max}, T^{\min} \leq T \leq T^{\max}, \tau^{\min} \leq \tau \leq \tau^{\max} \}. \quad (2)$$

На втором этапе путем минимизации этой функции определяются искомые «минимаксные» робастные настройки ПИ-регулятора

$$(\tilde{K}_n, \tilde{K}_u, \tilde{K}_d) = \text{Arg min } \phi(K_n, K_u, K_d). \quad (3)$$

Ввиду отсутствия методов аналитического решения поставленной задачи необходимо было воспользоваться методом имитационного моделирования замкнутой системы управления. Для этого был использован программный комплекс Matlab-Simulink.

Реализация рассмотренной минимаксной процедуры представляет определенные сложности, так как требует весьма значительного по объему перебора вариантов. Простое приближенное решение, при котором исключается перебор, может быть получено, если принять гипотезу, что для гарантии приемлемого качества управления следует выбирать достаточно слабые настройки регулятора, обеспечивая при этом определенную осторожность при выработке управляющих воздействий. Реализация такого «приближенно-робастного» метода базировалась на формулах компенсационного метода, рассмотренного в [3, 4, 5]. Для ПИД – регулятора эти формулы применительно к интегральному квадратичному показателю (1) принимают вид:

$$K_n = \frac{0.796T^{\min} + 0.453\tau^{\max}}{K^{\max} \tau^{\max}}, \quad K_u = \frac{0.796T^{\min}}{K^{\max} \tau^{\max}}, \quad K_d = \frac{0.453T^{\min}}{K^{\max}} \quad (4)$$

В качестве критерия сравнения методов использовалась максимальная относительная разница соответствующих значений показателя  $J$ , причем максимизация производилась по множеству возможных значений параметров объекта управления. В частности, для сравнения «приближенно робастного» и «минимаксного» способов использовался показатель

$$\delta J = \max \left\{ \frac{J_{\text{прибл.}} - J_{\text{мин. макс.}}}{J_{\text{прибл.}}} \times 100 \mid K^{\min} \leq K \leq K^{\max}, T^{\min} \leq T \leq T^{\max}, \tau^{\min} \leq \tau \leq \tau^{\max} \right\}.$$

Конкретные расчеты выполнялись на имитационной модели, реализованной средствами программного пакета Matlab-Simulink. При переборе возможных значений параметров  $K$ ,  $T$  и  $\tau$  был применен как регулярный метод перебора на сетке, так и вероятностный подход, когда эти значения генерировались с помощью датчика случайных чисел [1].

По результатам значительного числа имитационных экспериментов при различных значениях зоны неопределенности параметров модели объекта (до 70% от номинала) и различном отношении  $T/\tau$  (изменялось от 0.1 до 10) можно сделать следующие выводы. Метод «минимаксных» настроек ожидаемо обеспечивает наилучшие результаты. Метод «приближенно-робастных» настроек несколько уступает «минимаксному», хотя в худшем случае относительный проигрыш составляет не более 31%. Вместе с тем, он дает возможность отказаться от использования программ и моделей пакета Matlab-Simulink и ограничиться расчетом по простым формулам компенсационного метода.

В качестве альтернативы методу «приближенно-робастных» настроек был предложен метод «комбинированно-робастных» настроек, в котором регулятор настраивается по минимаксному принципу, но область поиска параметров регулятора ограничивается номинальными настройками, рассчитанными для множества возможных значений параметров модели объекта по формулам типа (4).

Для данного метода была разработана трехэтапная процедура нахождения параметров робастного регулятора. На первом этапе для возможных значений параметров объекта управления по формулам компенсационного метода рассчитываются значения параметров регулятора  $K_n, K_u, K_d$ .

На втором этапе путем имитационного моделирования для каждой найденной таким образом тройки (либо пары для ПИ-регулятора) решается задача (2), то есть при всех возможных комбинациях параметров модели объекта, определяется значение интегрального квадратичного критерия  $J$  и из найденных значений выбирается наибольшее. На третьем

этапе путем минимизации данной функции по всем найденным на первом этапе тройкам параметров регулятора находится наименьшее значение интегрального квадратичного критерия. Соответствующие ему значения параметров регулятора и будут искомыми.

Очевидно, что полученные с помощью метода «комбинированно-робастных» настроек регуляторы должны показывать, как минимум, не худшие, а во многих случаях и лучшие, результаты по сравнению с методом «приближенно-робастных» настроек, поскольку область возможных значений параметров регулятора для второго из названных методов целиком входит в область возможных значений параметров регулятора для первого метода.

В рамках выполненных исследований метод «комбинированно-робастных» настроек сравнивался с методами «минимаксных» и «приближенно-робастных» настроек для ПИ и ПИД-регуляторов при различном отношении  $T/\tau$  и различных значениях области неопределенности параметров модели объекта (до 90% от номинала). Полученные результаты позволяют сделать следующие выводы.

Для ПИД-регулятора максимальный относительный выигрыш по отношению к методу «приближенно-робастных» настроек составляет 60%, а максимальный относительный проигрыш по отношению к методу минимаксных настроек – 20%.

Для ПИ-регулятора максимальный относительный выигрыш в сравнении с методом «приближенно-робастных» настроек составляет 67%, а максимальный относительный проигрыш в сравнении с методом минимаксных настроек – 42%. С другой стороны, во многих рассмотренных случаях проигрыш по отношению к методу «минимаксных» настроек не превышает 1%.

Опробование трех рассмотренных методов робастной настройки было выполнено также для динамических объектов более сложной структуры, а именно: для моделей, представляющих собой последовательное соединение двух инерционных звеньев и звена запаздывания. Для этого варианта методика расчета робастных настроек ПИД-регулятора была дополнена этапом аппроксимации исходного динамического объекта инерционным звеном первого порядка с запаздыванием. Для аппроксимации использовалась встроенная в Matlab функция `linfit`. Генерация возможных значений параметров объекта управления производилась с помощью датчика случайных чисел в рамках заданной зоны неопределенности. Все регуляторы оказались устойчивы при любых рассмотренных комбинациях параметров модели объекта.

С помощью среды Guide, входящей в состав Matlab, был разработан пользовательский интерфейс, способный облегчить дальнейшее исследование рассмотренных методов робастной настройки регуляторов. Созданный программный продукт может быть положен в основу лабораторных работ по настройке регуляторов.

#### ЛИТЕРАТУРА:

1. Поляк Б.Т., Щербаков П.С. Робастная устойчивость и управление // М.: Наука, 2007.
2. Кибардин С.А., Яковис Л.М. Робастное управление инерционными объектами с запаздыванием // XXI Неделя науки СПбГПУ: Ч. V. СПб.: Изд-во СПбГПУ, 2012.
3. Яковис Л.М. Простые способы расчета типовых регуляторов для сложных объектов промышленной автоматизации // Автоматизация в промышленности №6, 2007.
4. Кондрат А.С., Яковис Л.М. Компенсационный метод настройки регуляторов для инерционных объектов с запаздыванием // XXXII Неделя науки СПбГПУ: Ч. IV. СПб.: Изд-во СПбГПУ, 2004.
5. Яковис Л.М., Спорягин К.В. Расчет регуляторов для инерционных объектов с запаздыванием // Автоматизация в промышленности, №12, 2009.

## МОДЕЛИРОВАНИЕ НЕЛИНЕЙНОГО МНОГООСНОГО ДЕФОРМИРОВАНИЯ БЕТОНА С УЧЕТОМ АНИЗОТРОПИИ ПРИ РАСТЯЖЕНИИ-СЖАТИИ

Основными причинами физически нелинейного поведения бетона являются процессы микрорастрескивания при растяжении и потери несущей способности при сжатии. Необходимость учета нелинейных свойств бетона [1] возникает при решении различных задач оценки прочности железобетонных конструкций. Поэтому в 2003 г. вместо СНиП 2.03.01-84 были утверждены и введены в действие новые Нормы проектирования бетонных и железобетонных конструкций — СНиП 52-01-2003, в которых основным методом расчета впервые в нашей стране декларируется расчет по нелинейной деформационной модели с использованием диаграмм деформирования бетона и арматуры. Ряд ответственных элементов железобетонных конструкций (приопорные участки коробчатых элементов пролетных строений, зоны анкеровки напрягаемой арматуры в балках пролетных строений, диафрагмы пролетных строений, пилоны вантовых мостов и т. д.) работают в условиях многоосного напряженного состояния. Создание трехмерной нелинейной анизотропной модели деформирования бетона является не до конца решенной задачей. В данном исследовании делается попытка учесть нелинейность, многоосность и анизотропию деформирования бетона на основе использования модели локально-ортотропного *гиперупругого* материала с осями ортотропии, совпадающими с направлениями главных напряжений. Рассматриваемая модель в силу существования потенциала обладает рядом преимуществ при численном решении краевых задач.

В модели ортотропного гиперупругого материала задание упругого потенциала полностью определяет вид определяющих уравнений и тензоров упругих модулей. Группа симметрии ортотропного материала включает отражения относительно трех ортогональных плоскостей, характеризуемых нормальными  $\mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2, \mathbf{n}_3$ . Предполагается, что упругий потенциал  $\psi$  является функцией инвариантов тензора деформации и тензоров, характеризующих анизотропные свойства материала  $\mathbf{M}_1 = \mathbf{n}_1 \otimes \mathbf{n}_1$ ,  $\mathbf{M}_2 = \mathbf{n}_2 \otimes \mathbf{n}_2$ ,  $\mathbf{M}_3 = \mathbf{n}_3 \otimes \mathbf{n}_3 = \mathbf{1} - \mathbf{M}_1 - \mathbf{M}_2$ . В общем случае система инвариантов включает 7 инвариантов [2]:  $I_1 = \text{tr} \boldsymbol{\varepsilon}$ ,  $I_2 = \frac{1}{2}(I_1^2 - \text{tr} \boldsymbol{\varepsilon}^2)$ ,  $I_3 = \det \boldsymbol{\varepsilon}$ ,  $I_4 = \mathbf{M}_1 \cdot \boldsymbol{\varepsilon} = \text{tr}(\mathbf{M}_1 \cdot \boldsymbol{\varepsilon})$ ,  $I_5 = \mathbf{M}_1 \cdot \boldsymbol{\varepsilon}^2 = \text{tr}(\mathbf{M}_1 \cdot \boldsymbol{\varepsilon}^2)$ ,  $I_6 = \mathbf{M}_2 \cdot \boldsymbol{\varepsilon} = \text{tr}(\mathbf{M}_2 \cdot \boldsymbol{\varepsilon})$ ,  $I_7 = \mathbf{M}_2 \cdot \boldsymbol{\varepsilon}^2 = \text{tr}(\mathbf{M}_2 \cdot \boldsymbol{\varepsilon}^2)$ . В данной работе рассматривается одно из простейших представлений потенциала  $\psi$  в виде:

$$\psi = \frac{1}{2} \lambda J_1^2 + \mu J_2 + f(J_4) + g(J_6), \quad (1)$$

где  $\lambda$  и  $\mu$  – параметры Ламе,  $f$  и  $g$  – функции, определяемые видом диаграммы деформирования при сжатии и растяжении.

Для гиперупругого материала тензор напряжения определяется соотношением  $\boldsymbol{\sigma} = \frac{\partial \psi(\boldsymbol{\varepsilon})}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}}$ .

При рассмотрении одноосного растяжения одна из осей ортотропии совпадает с осью нагружения -  $x$ ,  $I_1 = \varepsilon_{xx} + 2\varepsilon_{yy}$ ,  $I_4 = \varepsilon_{xx}$ ,  $I_6 = \varepsilon_{yy}$  и для продольной и поперечной компонент напряжения получается следующая система уравнений:

$$\begin{cases} \sigma_{xx} = \lambda(\varepsilon_{xx} + 2\varepsilon_{yy}) + 2\mu\varepsilon_{xx} + f'(\varepsilon_{xx}) \\ \sigma_{yy} = \lambda(\varepsilon_{xx} + 2\varepsilon_{yy}) + 2\mu\varepsilon_{yy} + g'(\varepsilon_{yy}) = 0 \end{cases} \quad (\text{растяжение}) \quad (2)$$

Подстановка значения  $\varepsilon_{yy}$ , как функции  $\varepsilon_{xx}$ , из второго уравнения системы (2) в первое позволяет получить зависимость  $\sigma_{xx} = h_p(\varepsilon_{xx})$ , представляющую собой диаграмму деформирования при растяжении.

При одноосном сжатии ось максимального главного напряжения ортогональна направлению сжатия,  $I_1 = \varepsilon_{xx} + 2\varepsilon_{yy}$ ,  $I_4 = \varepsilon_{yy}$ ,  $I_6 = \varepsilon_{xx}$  и для продольной и поперечной компонент напряжения получается следующая система уравнений:

$$\begin{cases} \sigma_{xx} = \lambda(\varepsilon_{xx} + 2\varepsilon_{yy}) + 2\mu\varepsilon_{xx} + g'(\varepsilon_{xx}) \\ \sigma_{yy} = \lambda(\varepsilon_{xx} + 2\varepsilon_{yy}) + 2\mu\varepsilon_{yy} + f'(\varepsilon_{yy}) = 0 \end{cases} \quad (\text{сжатие}) \quad (3)$$

Подстановка значения  $\varepsilon_{yy}$ , как функции  $\varepsilon_{xx}$ , из второго уравнения системы (3) в первое позволяет получить зависимость  $\sigma_{xx} = h_c(\varepsilon_{xx})$ , представляющую собой диаграмму деформирования при сжатии.

Функции  $f$  и  $g$ , определяющие упругий потенциал (1), могут быть найдены на основе (2) и (3) в виде:

$$\begin{aligned} f'' &= -2(\lambda + \mu) + \frac{1}{2} \left[ h_p' + \lambda - \sqrt{(h_p' + \lambda)^2 + 8\lambda^2 \frac{h_c' + \lambda}{h_p' + \lambda}} \right], \\ g'' &= -2(\lambda + \mu) + \frac{1}{2} \left[ h_c' + \lambda - \sqrt{(h_c' + \lambda)^2 + 8\lambda^2 \frac{h_p' + \lambda}{h_c' + \lambda}} \right], \end{aligned} \quad (4)$$

где  $h_p'$  и  $h_c'$  наклоны диаграмм растяжения и сжатия, считающиеся известными из опытов. Интегрирование (4) в общем случае затруднительно. Однако в ряде случаев это возможно, например, для кусочно-линейных аппроксимаций (табличное задание с постоянными наклонами  $h_p'$  и  $h_c'$  в пределах каждого интервала) диаграмм деформирования бетона получают кусочно-квадратичные представления функций  $f$  и  $g$  фигурирующих в (1)  $f(x) = \sum_i F_i x^2 [H(x - x_{i+1}) - H(x - x_i)]$  и  $g(x) = \sum_i G_i x^2 [H(x - x_{i+1}) - H(x - x_i)]$ , где  $H(x)$  - функция Хэвисайда. Важно отметить, что предложенный метод для любой аналитической аппроксимации диаграмм деформирования позволяет найти свободную энергию.

Рассмотрим простейшие аппроксимации диаграмм деформирования бетона. На рис. 1 представлены следующие, введенные в рассмотрение, нелинейные аппроксимации:

*кубический полином* [3]

$$\sigma_{xx} = A + B\varepsilon_{xx} + C\varepsilon_{xx}^2 + D\varepsilon_{xx}^3, \quad (5)$$

*экспоненциальная функция*

$$\sigma_{xx} = A\varepsilon_{xx} e^{-b\varepsilon_{xx}^2 - c\varepsilon_{xx}}, \quad (6)$$

*степенная функция (обобщение потенциала Леннарда-Джонса)*

$$\sigma_{xx} = A \left[ (1 + \varepsilon_{xx})^{-m} - (1 + \varepsilon_{xx})^{-m-l} \right]. \quad (7)$$

Для нахождения неизвестных констант используются условия прохождения кривых через начало координат и пик на диаграмме под известными углами, полученными из экспериментальных данных:

$$\sigma_{xx}(\varepsilon_{xx})|_{\varepsilon_{xx}=0} = 0, \frac{\partial \sigma_{xx}(\varepsilon_{xx})}{\partial \varepsilon_{xx}} \Big|_{\varepsilon_{xx}=0} = E_b, \sigma_{xx}(\varepsilon_{xx})|_{\varepsilon_{xx}=\varepsilon_{pick}^-} = \sigma_{pick}, \frac{\partial \sigma_{xx}(\varepsilon_{xx})}{\partial \varepsilon_{xx}} \Big|_{\varepsilon_{xx}=\varepsilon_{pick}^-} = 0.$$

Для аппроксимации была выбрана марка бетона В25 со следующими характеристиками [3]:  $R_b = 18.5$  МПа,  $R_{bt} = 1.55$  МПа,  $\varepsilon^+ = 0.000123$ ,  $\varepsilon^- = -0.001472$ ,  $E_0 = 30000$  МПа. Диаграммы деформирования бетона В25 при сжатии и растяжении заимствованы из работ [1] и [3].

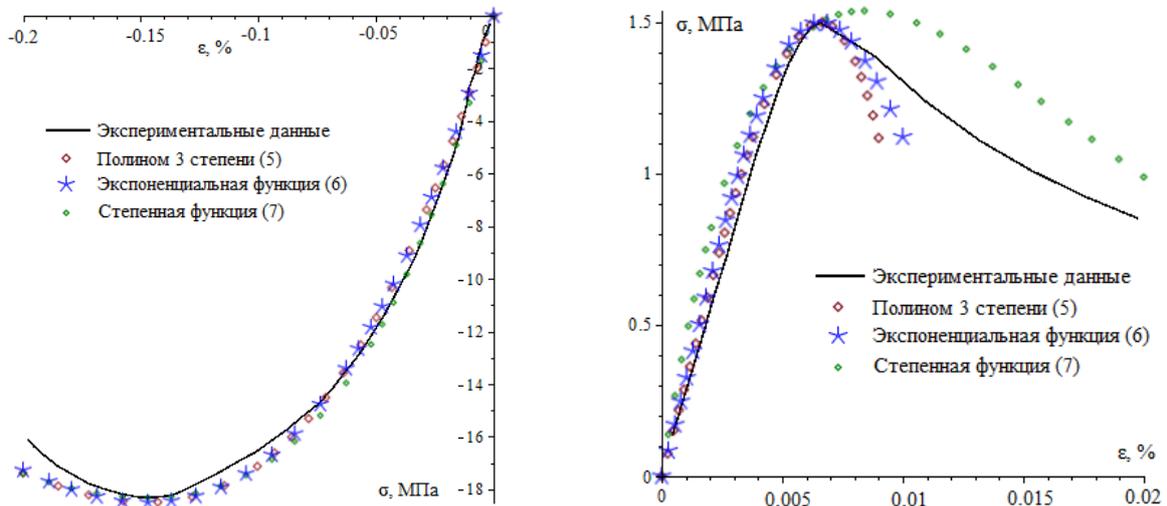


Рис.1. Аппроксимация экспериментальных данных различными нелинейными функциями

Следует отметить, что все рассмотренные аппроксимации в допиковой области хорошо описывают экспериментальные кривые (рис. 1), расхождения наблюдаются на ниспадающей ветви диаграммы. Для каждой введенной аппроксимации с использованием (4) могут быть определены в квадратурах соответствующие представления свободной энергии.

В дальнейшем планируется выполнить сравнение прогнозов предложенной модели с известными упругими и пластическими моделями деформирования бетона, а также получить решения ряда нелинейных краевых задач [4-7] с использованием предложенной модели материала.

#### ЛИТЕРАТУРА:

1. Карпенко Н.И. Общие модели механики железобетона. М.: Стройиздат, 1996. 416 с.
2. Spencer, A.J.M. Theory of invariants. In: Eringen, A.C. (Ed.), Continuum Physics, vol. 1. Academic Press, New York. 1971. P. 239–353.
3. Бенин А.В. Деформирование и разрушение железобетона: аналитические, численные и экспериментальные исследования. - СПб.: ПГУПС, 2006. - 127 с.
4. Бенин А.В., Семёнов А.С., Семёнов С.Г., Мельников Б.Е. Конечно-элементное моделирование процессов разрушения и оценка ресурса элементов автодорожного моста с учётом коррозионных повреждений // Инженерно-строительный журнал. 2012. № 7 (33). С. 32-42.
5. Benin A.V., Semenov A.S., Semenov S.G. Fracture simulation of reinforced concrete structures with account of bond degradation and concrete cracking under steel corrosion // Advances in Civil Engineering and Building Materials. 2012. P. 233-237.
6. Бенин А.В., Семенов А.С., Семенов С.Г., Мельников Б.Е. Математическое моделирование процесса разрушения сцепления арматуры с бетоном. Часть 1. Модели с учетом несплошности соединения // Инженерно-строительный журнал. 2013. № 5 (40). С. 86-99.
7. Бенин А.В., Семенов А.С., Семенов С.Г., Мельников Б.Е. Математическое моделирование процесса разрушения сцепления арматуры с бетоном. Часть 2. Модели без учета несплошности соединения // Инженерно-строительный журнал. 2014. № 1 (45). С. 23-40.

## СРАВНЕНИЕ ФЕНОМЕНОЛОГИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ СЕГНЕТОПЬЕЗОКЕРАМИКИ ПРИ ПОЛЗУЧЕСТИ В УСЛОВИЯХ ПОСТОЯННОГО И ЦИКЛИЧЕСКОГО НАГРУЖЕНИЯ

Сегнетоэлектрические поликристаллические керамики, такие как цирконат-титонат свинца (ЦТС), всё более широко используются в современной технике в качестве актуаторов и сенсоров в разнообразных электромеханических приборах, что приводит к необходимости разработки уточненных моделей деформирования и поляризации, учитывающих в том числе и эффекты вязкости. В данном исследовании осуществляется проверка возможности описания в рамках единой модели материала процессов ползучести при стационарном нагружении и циклическом нагружении с выдержками на основе анализа известных экспериментальных данных [1-4] для образцов, изготовленных из ЦТС.

В настоящее время предложен ряд одноосных феноменологических моделей, учитывающих зависящее от скорости нагружения поведение сегнетопьезокерамики. В данной работе вводится степенная функция упрочнения, которая много проще известных аналогов, и проводится сравнение её предсказаний с экспериментальными данными и другими моделями ползучести ЦТС при нагружении постоянным и циклическим электрическим полем. Сравнение выполняется с экспериментальными данными по ползучести керамики PZT PIC 151 [2,3]. Предсказания предлагаемой модели сравниваются также с прогнозами моделей Лиу-Хубера [4] и Белова-Креера [5].

Полная система определяющих уравнений для зависящего от скорости нагружения поведения сегнетопьезокерамики, использующая две внутренних переменных состояния (вектор поляризации  $\mathbf{P}^r$  и тензор остаточной деформации  $\boldsymbol{\varepsilon}^r$ ), записывается в следующем виде:

$$\begin{cases} \boldsymbol{\sigma} = {}^4 C^D \cdot (\boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\varepsilon}^r) - (\mathbf{D} - \mathbf{P}^r) \cdot {}^3 \mathbf{h}, \\ \mathbf{E} = -{}^3 \mathbf{h} \cdot (\boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\varepsilon}^r) + \boldsymbol{\beta} \cdot (\mathbf{D} - \mathbf{P}^r), \\ \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^r = \partial_{\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}} \Phi, \\ \dot{\mathbf{P}}^r = \partial_{\dot{\mathbf{E}}} \Phi, \\ \Phi = A \left[ \frac{\hat{\mathbf{E}} \cdot \hat{\mathbf{E}}}{E_H^2 \langle |\mathbf{P}^r| \rangle} + \frac{3}{2} \frac{\hat{\mathbf{s}} \cdot \hat{\mathbf{s}}}{\sigma_H^2 \langle \|\boldsymbol{\varepsilon}^r\| \rangle} + \frac{\hat{\mathbf{E}} \cdot \hat{\mathbf{s}} \cdot \hat{\mathbf{s}} \cdot \hat{\mathbf{E}}}{E_H^2 \langle |\mathbf{P}^r| \rangle \sigma_H^2 \langle \|\boldsymbol{\varepsilon}^r\| \rangle} \right]^{\frac{m+1}{2}}. \end{cases} \quad (1)$$

В работе учитывается изотропное упрочнение, определяемое функциями  $\sigma_H$  и  $E_H$ :

$$E_H \left( |\mathbf{P}^r| \right) = E_c \left[ \frac{m+1}{E_c h \left( |\mathbf{P}^r| \right)} \right]^{\frac{1}{m+1}}, \quad \sigma_H \left( \|\boldsymbol{\varepsilon}^r\| \right) = \sigma_c \left[ \frac{m+1}{\sigma_c f \left( \|\boldsymbol{\varepsilon}^r\| \right)} \right]^{\frac{1}{m+1}}, \quad (2)$$

где  $h$  и  $f$  – две функции, характеризующие упрочнение при ползучести.

В данном исследовании вводится степенная функция упрочнения, как упрощение функций, предложенных Лиу-Хубером [4] и Беловым-Креером [5], в виде:

$$h = A \left( \frac{|\mathbf{P}^r|}{P_0} \right)^n \left( 1 - \frac{|\mathbf{P}^r|}{P_0} \right)^k, \quad (3)$$

где  $P_0$  – уровень насыщения остаточной поляризации,  $n$  и  $k$  – константы материала. Второй множитель в правой части (3) характеризует упрочнение, третий – насыщение.

*Исследование ползучести поляризованного образца при постоянном нагружении.*

В работах Жу и Камла [3] представлены экспериментальные данные для предварительно поляризованных образцов пьезокерамического материала PZT PIC 151 для случаев нагружения с постоянным электрическим полем  $E=+1.5\text{МВ/м}$ , сонаправленным с электрическим полем предварительной поляризации, и нагружения электрическим полем  $E=-0.5\text{МВ/м}$ , в направлении противоположном, к направлению предварительной поляризации. Время выдержки при постоянной нагрузке составляло 600 секунд. В данной работе произведен анализ процесса ползучести для указанных двух экспериментов с использованием трех моделей функции упрочнения ([4], [5] и (3)). Параметры моделей материала PZT PIC 151, использованные в расчетах, представлены в табл. 1.

Табл. 1. Параметры материала PZT PIC 151 для трех моделей

	$E_c$ , [МВ/м]	$P_0$ , [Кл/м <sup>2</sup> ]	$A$ , [Кл/м <sup>2</sup> ]	$m$	$n$	$k$
Модель Лиу-Хубера [4]	0.82	-	3000	22	-	-
Модель Белова-Креера [5]	-	0.26	25	18	-	-
Предложенная модель (3)	0.82	0.26	0.8	26	-2.2	2.2

Результаты численного моделирования процессов ползучести для трех рассматриваемых моделей показаны на рис. 1 и 2. Поляризация ползучести, представленная на рис. 1 и 2 не учитывает остаточной поляризации, накопленной в результате предварительной поляризации. Расчеты выполнялись с использованием программы CES v.3.9 (Constitutive Equation Studio [6]) с применением эффективных методов интегрирования нелинейных определяющих уравнений [7].

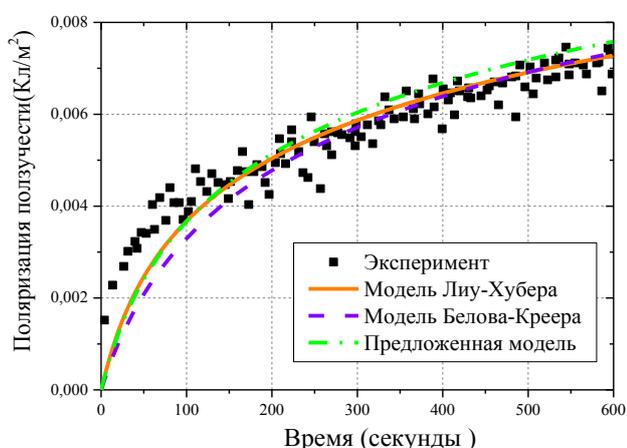


Рис. 1. Сравнение прогнозов трех моделей ползучести с экспериментом [3] при  $E=1.5\text{МВ/м}$

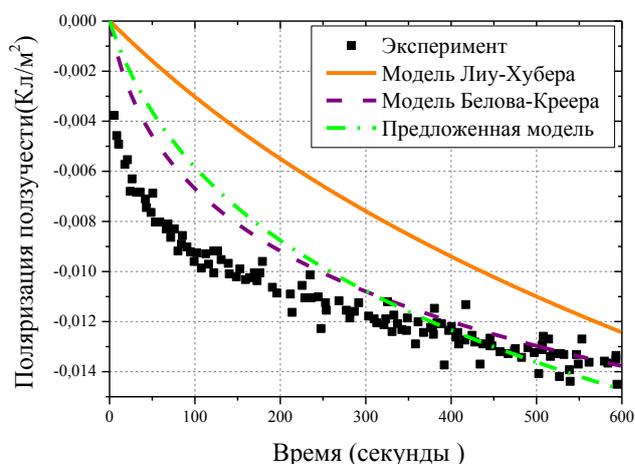


Рис. 2. Сравнение прогнозов трех моделей ползучести с экспериментом [3] при  $E=-0.5\text{МВ/м}$

Все модели продемонстрировали хорошее согласование с экспериментальными данными при нагружении постоянным электрическим полем  $E=+1.5\text{МВ/м}$  в направлении предварительной поляризации. Результаты численного моделирования при нагружении электрическим полем  $E=-0.5\text{МВ/м}$  в направлении, противоположном предварительной поляризации, хуже. Из рис. 1 и 2 видно, что модель Лиу-Хубера [4], показавшая наилучшее совпадение с экспериментом в случае  $E=+1.5\text{МВ/м}$ , представляет наихудший прогноз при  $E=-0.5\text{МВ/м}$ , демонстрируя заметное отклонение от экспериментальных данных. Модель Белова-Креера [5] и предложенная модель (3) показывают результаты, достаточно хорошо удовлетворяющие обоим экспериментам.

*Исследование ползучести неполяризованного образца при циклическом нагружении.*

В работе [2] представлены экспериментальные данные по ползучести неполяризованных предварительно образцов из пьезокерамического материала PZT PIC 151 при циклическом нагружении электрическим полем, скорость изменения которого 0.08 МВ/м/с. В ходе нагружения и разгрузки поле держалось постоянным по 300 с на величинах  $\pm 0.5$ ,  $\pm 1.0$ ,  $\pm 1.5$  и  $\pm 2.0$  МВ/м. Результаты численного моделирования процесса ползучести для трех моделей с параметрами моделей материала, указанными в табл. 1, показаны на рис. 3.

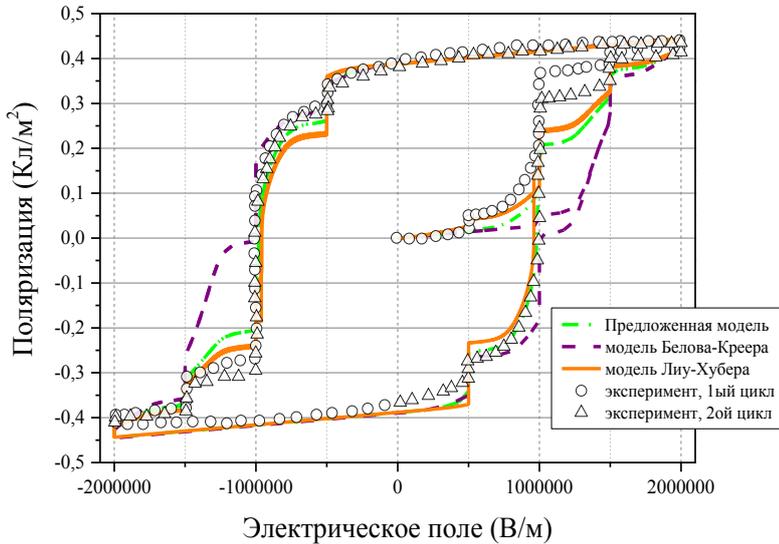


Рис. 3. Сравнение прогнозов трех моделей ползучести с экспериментом [2]. Циклическое нагружение

По мере приближения к насыщению все модели показывают лучшее согласование с экспериментальными данными. Общая проблема для всех моделей в этом численном эксперименте – недостаточный рост поляризации во время удержания нагрузки на уровне  $\pm 1.0$  МВ/с. С ней лучше всего справляется модель Лиу-Хубера [4], чуть хуже предложенная модель (3), а модель Белова-Креера [5] практически не реагирует на задержку на этом уровне электрического поля. Ещё один общий недостаток всех моделей – не удается получить изменение гистерезисной кривой на втором цикле нагружения.

Результаты проведенных вычислительных экспериментов показали, что предложенная феноменологическая модель сегнетоэластичного материала со степенной функцией упрочнения (3) дает результаты, хорошо согласующиеся с результатами двух ранее известных моделей и экспериментов для ЦТС при нагружении постоянным электрическим полем предварительно поляризованного образца и при циклическом нагружении предварительно неполяризованного образца.

ЛИТЕРАТУРА:

1. Fett, T., Thun, G. Determination of Room-temperature Tensile Creep of PZT // J. Materials Science Letter. – 1998. – №17. – С. 1929-1931.
2. Zhou, D., Kamlah, M. Determination of room-temperature creep of soft lead zirconate titanate piezoceramics under static electric fields // J. Appl. Phys. – 2005. – №98. – С. 104-107.
3. Zhou, D., Kamlah, M. Room-temperature creep of soft PZT under static electrical and compressive stress loading // Acta Materialia. – 2006. – №54. – С. 1389-1396.
4. Liu, Q.D., Huber, J.E. Creep in ferroelectrics due to unipolar electrical loading // Journal of the European Ceramic Society. – 2006. – №26. – С. 2799-2806.
5. Belov, A.Yu., Kreher, W.S. Creep in Soft PZT: The Effect of Internal Fields // Ferroelectrics. – 2009. – №391. – С. 12–21.
6. Семёнов, А.С. Вычислительные методы в теории пластичности. // Изд-во СПбГПУ. –2008. – 211 с.
7. Semenov, A.S., Liskowsky, A.C., Balke, H. Return mapping algorithms and consistent tangent operators in ferroelectroelasticity // Int. Journal for Numerical Methods in Engineering. – 2010. – №81. – С. 1298–1340.

### ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫЕ ИССЛЕДОВАНИЯ И КОНЕЧНО-ЭЛЕМЕНТНОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРОЦЕССА РАЗРУШЕНИЯ ПОЛИМЕРНОГО КОМПОЗИТА С КОРОТКИМИ УГОЛЬНЫМИ ВОЛОКНАМИ

В настоящее время полимерные композиты получают все большую и большую популярность в самых разнообразных отраслях промышленности. Они все активнее вытесняют традиционные конструкционные материалы благодаря своим высоким удельным характеристикам прочности и жесткости, стойкости к воздействию агрессивных сред, нетоксичности, износостойкости. Композиты с короткими волокнами получили наибольшее распространение при изготовлении относительно небольших деталей сложной формы (как правило, это различные корпусные, крепежные, соединительные или фиксирующие элементы).

Главной особенностью механического поведения подобных материалов является высокая степень анизотропии, определяемая набором параметров микроуровня (массовой (объемной) долей, длиной и степенью ориентации армирующих волокон [1-3]), которые формируются в строгой зависимости от режимов инъекционного литья. Параметры микроструктуры определяют также многообразие возможных форм разрушения. Поэтому исследование прочности подобных материалов является важной и актуальной задачей.

Целью данной работы является исследование прочности при растяжении полимерного композиционного материала марки РЕЕК90НMF20 с массовым содержанием угольных волокон 20 %. Для этого была проведена серия экспериментов на растяжение образцов, которые вырезались из отливаемых прямоугольных пластин под разными углами к направлению впрыска: «0°», «45°» и «90°» (рис. 1). Образцы имели форму лопатки (стандарт ISO-527-2-2012) и вырезались на гидроабразиве. Толщина образцов – 3.2 мм. В результате эксперимента определены диаграммы деформирования образцов для каждого из трех направлений (рис. 2).



Рис. 1. Образцы для испытаний относительно направления впрыска: а) «0°» б) «45°» в) «90°»

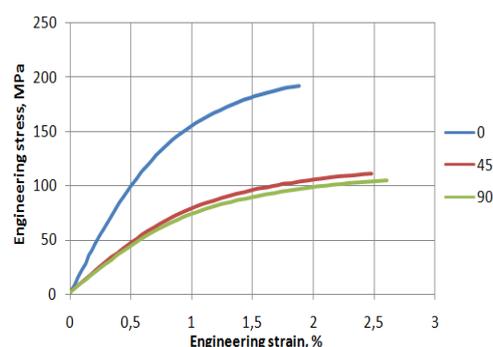


Рис. 2. Диаграммы деформирования образцов различных направлений

Качественная и количественная разница в диаграммах деформирования обусловлена разницей в ориентации угольных волокон относительно направления приложения нагрузки: в образцах «45°» и «90°» волокна выстроены преимущественно поперек оси образца, а в образце «0°» - вдоль. Как следствие этого, в данных образцах наблюдались различные механизмы разрушения. В образце «0°» доминирующей формой разрушения стал отрыв волокон от матрицы (рис. 3а), а в образцах «45°» и «90°» наблюдалось преимущественно разрушение полимерной матрицы, сопровождаемое интенсивным пластическим течением (рис. 3б).

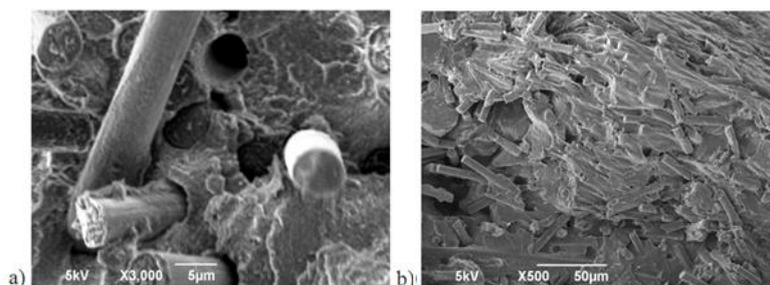


Рис. 3. Фотографии микрошлифа поверхности разрушения:  
а) адгезионное разрушение, б) разрушение матрицы

Для описания случайной ориентации волокон в полимерной матрице использовался тензор ориентации второго ранга  $\mathbf{a}$  [4]:

$$\mathbf{a} = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} \mathbf{p}(\theta, \varphi) \otimes \mathbf{p}(\theta, \varphi) \psi(\mathbf{p}(\theta, \varphi)) \sin \theta d\theta, \quad (1)$$

где  $\mathbf{p}$  - единичный вектор, характеризующий ориентацию отдельного волокна,  $\psi$  - вероятностная функция распределения случайного вектора  $\mathbf{p}$ .

Для определения тензоров ориентации испытанных образцов использовался программный комплекс Moldex3D, при помощи которого моделировался процесс инъекционного литья пластины и вырезки образцов. Усредненные по толщине значения компонент тензора ориентации представлены в табл. 1.

Табл. 1. Тензоры ориентации

Тип образца	«0°»	«45°»	«90°»
Тензор ориентации	$\begin{pmatrix} 0.72 & -0.03 & 0 \\ -0.03 & 0.19 & 0 \\ 0 & 0 & 0.09 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0.45 & 0.27 & 0 \\ 0.27 & 0.47 & 0 \\ 0 & 0 & 0.08 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0.2 & -0.01 & 0 \\ -0.01 & 0.72 & 0 \\ 0 & 0 & 0.08 \end{pmatrix}$

Приведенные значения тензоров ориентации использовались в качестве исходных данных для построения многоуровневой модели композиционного материала методом реверс-инжиниринга. Суть процедуры реверс-инжиниринга заключается в оптимизационном поиске свойств полимерной матрицы в составе композитной смеси, а также в нахождении оптимального набора констант для выбранного критерия разрушения исходя из свойств отдельных волокон и полученных экспериментально свойств всего композита. При этом предполагается, что изменяются только свойства матрицы, свойства же волокон остаются неизменными как в составе композита, так и отдельно.

Алгоритм оптимизационного поиска относится к группе прямых методов и реализован в коммерческом программном продукте Digimat [5]. Исходные данные – экспериментальные диаграммы деформирования, механические свойства волокон и матрицы, а также тензоры ориентации (1). На каждой итерации решения задачи оптимизации с помощью одного из методов гомогенизации происходит определение макросвойств композитной смеси и сравнение с экспериментом. В данной работе применялся метод гомогенизации Мори-Танака первого порядка, волокна предполагались упругими трансверсально-изотропными, полимерная матрица – упруго-пластической [6] с изотропным упрочнением и критерием пластичности Мизеса. Для предсказания момента разрушения использовалась

прогрессирующая модель разрушения на основе первого «псевдо-зерна» [7] с критерием разрушения Цая-Хилла для трансверсально-изотропных тел в деформационной постановке:

$$F(\boldsymbol{\varepsilon}) = \frac{\varepsilon_{11}^2}{X^2} - \frac{\varepsilon_{11}(\varepsilon_{22} + \varepsilon_{33})}{X^2} + \frac{\varepsilon_{22}^2 + \varepsilon_{33}^2}{Y^2} + \left(\frac{1}{X^2} - \frac{2}{Y^2}\right)\varepsilon_{22}\varepsilon_{33} + \frac{(2\varepsilon_{12})^2 + (2\varepsilon_{13})^2}{S^2} + \left(\frac{4}{Y^2} - \frac{1}{X^2}\right)(2\varepsilon_{23})^2 = 1. \quad (2)$$

где  $x, y, s$  - предельные деформации в продольном, поперечном направлении и трансверсальном сдвиге соответственно,  $\boldsymbol{\varepsilon}$  - тензор деформаций Коши-Грина.

Результаты реверс-инжиниринга в виде оптимизированных параметров упруго-пластической модели матрицы, коэффициента формы волокна и констант в критерии разрушения (2) приведены в табл. 2.

Табл. 2. Исходные и оптимизированные значения варьируемых параметров

Параметр	Исходные свойства матрицы (вне композита)	Оптимизированные свойства матрицы в составе композита
Модуль упругости [МПа]	3500	6130.25
Предел текучести [МПа]	60	9.15
Константа $k$ [МПа]	100	139.19
Константа $m$	0.25	0.30
Коэф. формы волокна	20	21.83
$X$ [%]		1.77
$Y$ [%]		2.88
$S$ [%]		3.60

Построенная многоуровневая модель композита использовалась для конечно-элементного моделирования в ANSYS v. 14.5 в качестве пользовательской модели материала. Методом конечных элементов моделировалось разрушение испытанных образцов. В результате решения максимальное отклонение расчетной и экспериментальной кривой наблюдалось для образца «0» и составило 8.3 %.

Таким образом, установлено, что описанная методика построения многоуровневой модели композиционного материала позволяет достоверно предсказывать предельное состояние тонкостенных конструкций, изготавливаемых методом инъекционного литья.

#### ЛИТЕРАТУРА:

1. Eskandari, J.J., Noorabadi, M., Namdaran, N., Taghavian, H., Mohammadi, M., Namdaran, N. Effect of Fiber Volume Fraction on Stress Distribution in Polypropylene Matrix Composites // Science and today's world, 2013, 2(2), pp. 214-225.
2. Rezaei, F., Yunus, R., Ibrahim, N.A. Effect of fiber length on thermomechanical properties of short carbon fiber reinforced polypropylene composites // Materials and Design, 2009, 30, pp. 260–263.
3. Thomason, J.L. The influence of fibre length and concentration on the properties of glass fibre reinforced polypropylene. 6. The properties of injection moulded long fibre PP at high fibre content // Composites Part A: Applied Science and Manufacturing, 2005. 36(7), pp. 995-1003.
4. Advani, S.G., Tucker, C.L. The use of tensors to describe and predict fiber orientation in short fiber composites // Rheology, 1987, 31, pp. 751-784.
5. Digimat 5.0.1. User's Manual.
6. Семёнов А.С. Совершенствование методов исследования процессов термо-упруго-пластического деформирования на основе многомодельного анализа и точного интегрирования определяющих уравнений // Автореферат дисс. на соиск. уч. степ. канд. физ.-мат. наук. С-Пб.: 1996.
7. Kammoun, S., Brassart, L., Robert, G., Doghri, I., Delannay, L. Micromechanical modeling of short glassfiber reinforced thermoplastics–Isotropic damage of pseudograins // AIP Conference Proceedings, 2011, 1353, pp. 972-977.

## ПОСТРОЕНИЕ ДВУХУРОВНЕВОЙ СИСТЕМЫ УПРАВЛЕНИЯ КВАДРОКОПТЕРОМ

Создание эффективных систем управления мультироторными летательными аппаратами стало возможно относительно недавно благодаря интенсивному развитию микроэлектроники, и они активно применяются для автономных малогабаритных беспилотных летательных аппаратов (БПЛА) в квадрокоптерных реализациях. Существует множество исследований и публикаций, предлагающих различные методы оптимизации и стабилизации движения квадрокоптеров. Все они, как правило, объединены единой концепцией построения многоуровневой системы управления [1; 2]. Основная идея заключается в том, что верхний уровень по данным о местоположении и ориентации квадрокоптера в пространстве просчитывает в некотором смысле оптимальную желаемую траекторию его движения на некоторое время вперед. Следующий уровень является компенсационным и выдает расчетные, эталонные значения управляющих воздействий, обычно ими являются силы и моменты, в соответствии с определенной ранее траекторией. Последний контур управления чаще всего бывает линейным и строится по принципу обратной связи для устранения ошибок управления, вызванных неконтролируемыми внешними возмущениями или иными неучтенными выше факторами, а также неточностью компенсационного уровня [3]. На этом этапе производится стабилизация желаемого режима движения квадрокоптера по малым отклонениям от заданной траектории.

Отдельный научно-практический интерес представляется в исследовании процессов управления на двух нижних уровнях, поскольку желаемые оптимальные траектории могут быть самыми разнообразными, в том числе и вводится оператором, а их выбор зависит от целого ряда специфических факторов. При этом работа нижних контуров управления по мере возможностей должна быть универсальной и обеспечивать качественное функционирование всей системы в целом.

Особенностью настоящего исследования является детальное изучение взаимодействия компенсационного и стабилизационного контуров управления с учетом динамики несущих винтов, ограничений на управление и измерительных ошибок переменных состояния [4], чему, по мнению авторов, не уделено должного внимания [5, 6].

Для построения схем управления в первую очередь необходимо составить динамическую модель объекта управления, то есть мультиротора, оснащенного четырьмя винтами. Общий вид геометрии такого типа БПЛА представлен на рисунке 1. Уравнения движения квадрокоптера могут быть получены с использованием законов механики Эйлера. Запишем их, переведя из тензорно-инвариантной формы записи в векторно-матричное представление:

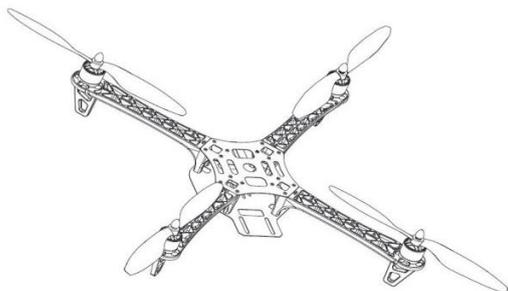


Рис. 1. Геометрия квадрокоптера

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{X} = V \\ m\dot{V} = F + P^T F_w''' + F_w + P^T F_w'''' + P^T F_u'''' \\ R\dot{\Phi} = \Omega \\ \Theta\dot{\Omega} + I = M''' + PM + M_w'''' + PM_w'''' + M_u'''' \end{array} \right. \quad (1)$$

Здесь  $X$  — вектор-столбец глобальных декартовых координат центра масс квадрокоптера ( $x; y; z$ );  $V$  — скорость центра масс;  $m$  — масса квадрокоптера;  $F$  и  $F_w$  — детерминированный и неизвестный векторы внешних сил, заданных в проекциях на неподвижные глобальные оси;  $F''$  и  $F_w''$  — векторы усилий, заданных в главных осях инерции, жестко связанных с рамой квадрокоптера;  $F_u''$  — вектор управляющих воздействий;  $P$  — матрица перехода от представления вектора в подвижной системе координат к записи в глобальной;  $\Phi$  — вектор, составленный из углов крена, тангажа и курса ( $\varphi; \theta; \psi$ );  $\Omega$  — угловая скорость квадрокоптера в проекциях на главные оси инерции;  $R$  — матрица преобразования обобщенных угловых скоростей в кинематическую угловую скорость;  $\Theta$  — тензор инерции относительно центра масс;  $I$  — вектор гироскопических моментов;  $M''$ ,  $M_w''$  и  $M$ ,  $M_w$  — внешние моменты и моменты сил относительно центра масс, заданные в подвижных и неподвижных осях соответственно;  $M_u''$  — управляющий момент.

Предположим, что траектория движения квадрокоптера задана следующим образом:

$$x = x_d(t); \quad y = y_d(t); \quad z = z_d(t); \quad \psi = \psi_d(t) \quad (2)$$

Заметим, что в точках разрыва траектории или ее производных значение управляющих усилий удерживается на уровне их предела слева, а в случае отсутствия просчитанной заранее траектории (например, при выдаче задания на высоту по рельефу местности) компенсационные воздействия могут вычисляться осреднением данных о предыстории движения или оставаться нулевыми.

Двухуровневая система управления с ПИД стабилизацией имеет вид:

$$\begin{aligned} F_d &= F_c + F_s = m\ddot{X}_d - F - P^T F'' + K_{PID}(X - X_d); \\ T_d &= F_{zd} \frac{1}{\cos(\varphi_d)\cos(\theta_d)}; \\ \varphi_d &= \arctan\left(\cos(\theta_d)\left(\frac{F_{xd}}{F_{zd}}\sin(\psi_d) - \frac{F_{yd}}{F_{zd}}\cos(\psi_d)\right)\right); \quad \theta_d = \arctan\left(\frac{F_{xd}}{F_{zd}}\cos(\psi_d) + \frac{F_{yd}}{F_{zd}}\sin(\psi_d)\right); \\ M_d'' &= M_c'' + M_s'' = \Theta R\ddot{\Phi}_d + \Theta \dot{R}\dot{\Phi} + I - M'' - PM + K_{PID}(\Phi - \Phi_d); \end{aligned} \quad (3)$$

$$U = U_c + U_s = \begin{bmatrix} T_d \\ M_{1d} \\ M_{2d} \\ M_{3d} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (m\ddot{X}_d - F - P^T F'' + K_{PID}(X - X_d))_z \frac{1}{\cos(\varphi_d)\cos(\theta_d)} \\ \Theta R\ddot{\Phi}_d + \Theta \dot{R}\dot{\Phi} + I - M'' - PM + K_{PID}(\Phi - \Phi_d) \end{bmatrix}$$

$$G = D^{-1}U$$

Где  $K_{PID}(e)$  — значение на выходе ПИД регулятора, вычисленное по ошибке  $e$ ;  $U=DG$  — статическая линеаризованная зависимость управляющих усилий от условных уровней газа, выдаваемых с микроконтроллера на электродвигатели с несущими винтами. Вообще говоря, структура матричных коэффициентов ПИД регуляторов может быть произвольной, но для развязки контуров управления по всем обобщенным координатам выбирается диагональной.

Как показывает практика и численный эксперимент, существуют проблемы, связанные с качеством переходных процессов при функционировании стабилизационного уровня управления с ПИД регулятором. Их проявление особенно заметно при одновременной выдаче больших заданий на углы и высоту.

Моделирование процессов управления описанной выше системы проведено при помощи средств вычислительного пакета MatLab.Simulink. В качестве объекта управления выбран малогабаритный квадрокоптер со следующими характеристиками: масса  $m=1$  кг; главные моменты инерции относительно центра масс  $J_1=0.0277$  кг·м<sup>2</sup>;  $J_2=0.0277$  кг·м<sup>2</sup>;

$J_3=0.0549$  кг·м<sup>2</sup>; плечи тангажа и крена  $L_1=0.2$  м;  $L_2=0.2$  м; постоянная времени формирования силы тяги  $\tau=0.05$  с; ограничение на условный уровень газа от 43 до 223; ограничения на скорость изменения газа от  $-50$  до  $25$  с<sup>-1</sup>. Нелинейная статическая связь силы тяги с уровнем газа получена экспериментально, и средний тангенс угла наклона кривой составляет  $k=0.0667$  Н.

Методом градиентного спуска получены оптимальные настройки ПИД регулятора по независимым реакциям на ступенчатые воздействия. Его применение на нелинейном объекте без учета компенсационного контура управления при выдаче заданий сразу по нескольким переменным выявило определенные потери качества переходных процессов:

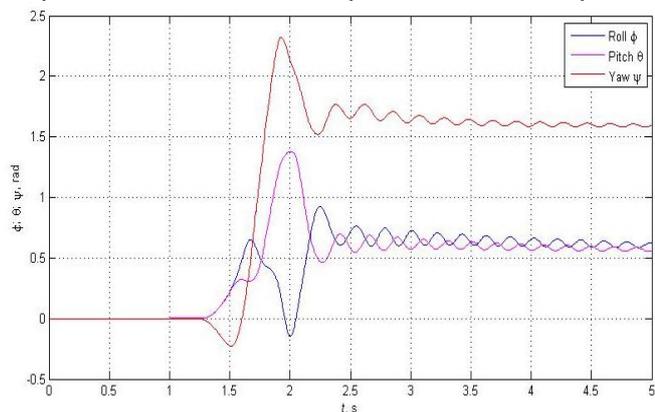


Рис. 2. Влияние гироскопического эффекта

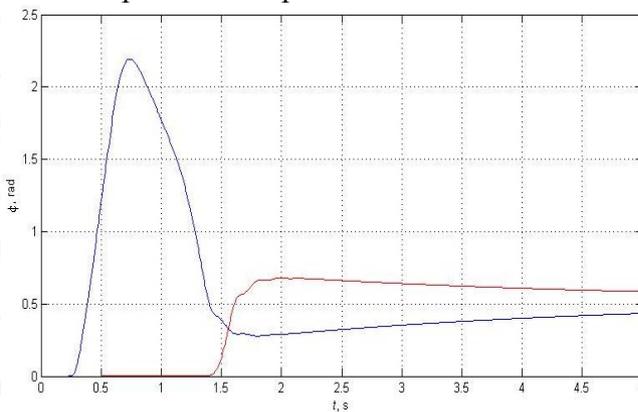


Рис. 3. Переполнение интегральной составляющей

Установлено, что введение компенсационного уровня управления действительно необходимо по причине значительной перевязки уравнений гироскопическими моментами. На рисунке 2 показано перекрестное влияние угловых координат при последовательной выдаче заданий на крен, тангаж и курс. Кроме того, при одновременной выдаче заданий на высоту и угол крена наблюдается задержка переходного процесса по крену с последующим неприемлемым перерегулированием (рис. 3). Данное обстоятельство вызвано выходом ПИД регулятора при стабилизации высоты на верхнее предельное значение уровня газа, что не позволяет совершать управление по остальным координатам. В связи с этим происходит избыточное накопление интегральной составляющей, которое затем приводит к запрокидыванию квадрокоптера. Здесь путей решения проблемы может быть несколько. Один из них заключается в построении схемы, ограничивающей интегральное слагаемое выхода регулятора, а другой — в отыскании оптимальных траекторий вывода системы на режим при выдаче ступенчатых заданий. Возможно также рассмотрение определения специальных настроек ПИД регулятора для различных режимов движения.

#### ЛИТЕРАТУРА:

1. M. Zare, J. Sadeghi, S. Farahat, E. Zakeri. Regulating and helix path tracking for UAV using fuzzy logic controllers // Journal of mathematics and computer science, № 13, 2014, с. 71 – 89.
2. Ф.Ю. Бакланов, В.М. Морозов. Стабилизация программного движения квадрокоптера // Известия РАН. Теория и системы управления, № 6, 2013, с. 114 – 121.
3. С.Л. Зенкевич, Н.К. Галустян. Разработка математической модели и синтез алгоритма угловой стабилизации квадрокоптера // Мехатроника, автоматизация, управление, № 3, 2014, с. 27 – 32.
4. O. Magnussen, K.E. Skjonhaug. Modeling, design and experimental study for a quadcopter system construction // University of Agder, 2011, с. 22 – 39.
5. T. Lee, M. Leok, N.H. McClamroch. Geometric tracking control of a quadrotor UAV on SE(3) // Proceedings of the IEEE conference on decision and control, 2010, с. 5420 – 5425.
6. С.А. Белоконь, Ю.Н. Золотухин, А.С. Мальцев, А.А. Нестеров, М.Н. Филиппов, А.П. Ян. Управление параметрами полета квадрокоптера при движении по заданной траектории // Автоматика, № 5, 2012, с.32 – 41.

И.А. Михайлов, А.С. Семенов (Санкт-Петербургский государственный политехнический университет), Л.Б. Гецов (ОАО НПО ЦКТИ), Е.А. Тихомирова (НПО им. Климova)

### КОНЕЧНО-ЭЛЕМЕНТНОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРОЦЕССОВ НАКОПЛЕНИЯ ТЕРМОУСТАЛОСТНЫХ ПОВРЕЖДЕНИЙ В КОРСЕТНЫХ ОБРАЗЦАХ ИЗ МОНОКРИСТАЛЛИЧЕСКОГО ЖАРОПРОЧНОГО СПЛАВА

Жаропрочные монокристаллические сплавы на никелевой основе [1] широко применяются для изготовления рабочих и направляющих лопаток современных газотурбинных авиадвигателей. Термоусталостная прочность подобных материалов с ярко выраженной анизотропией является в настоящее время не до конца изученной. В данной работе представлены результаты расчета напряженно-деформированного состояния корсетных образцов из монокристаллического жаропрочного сплава пятого поколения при термоциклическом нагружении с использованием микромеханических моделей пластичности и ползучести [2-4], учитывающей наличие октаэдрических систем скольжения. Также произведено сравнение результатов расчетов с экспериментальными данными, полученными в НПО ЦКТИ. Аналогичные исследования выполнялись ранее для монокристаллических сплавов предыдущих поколений ЖС36 [5] и ВЖМ4 [6]. Целью данной работы являлась проверка возможности применения деформационного критерия [5,7] для описания термоусталостного разрушения рассматриваемого монокристаллического сплава.

Геометрия корсетного образца для термоусталостных испытаний и условия его нагружения (циклическое изменение температур от 150°C до 900°C, инициированное пропусканием тока через образец) показаны на рис. 1. Образец фиксируется в осевом направлении, что приводит при нагреве к возникновению значительных напряжений, являющихся при циклическом изменении температуры причиной накопления термоусталостных повреждений.

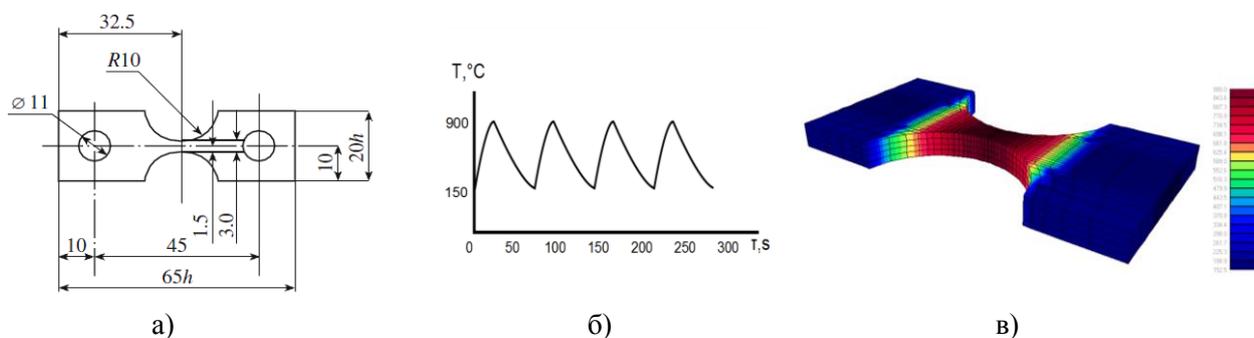


Рис. 1. Плоский образец для термоусталостных испытаний:  
а) геометрия, б) история нагружения, в) распределение полей температур

При проведении расчетов использовался конечно-элементный программный комплекс PANTOCRATOR [8], позволяющий производить расчеты с использованием "физических" моделей пластичности и ползучести, учитывающих, что неупругое деформирование монокристалла происходит по активным системам скольжения и в значительной мере определяется кристаллографической ориентацией. Результаты КЭ расчетов для образца В2 с ориентацией, близкой к [001], показаны на рис. 2. Наблюдается локализация полей повреждений в центральной части образца. Пластическая зона охватывает весь центральный перешеек корсетного образца.

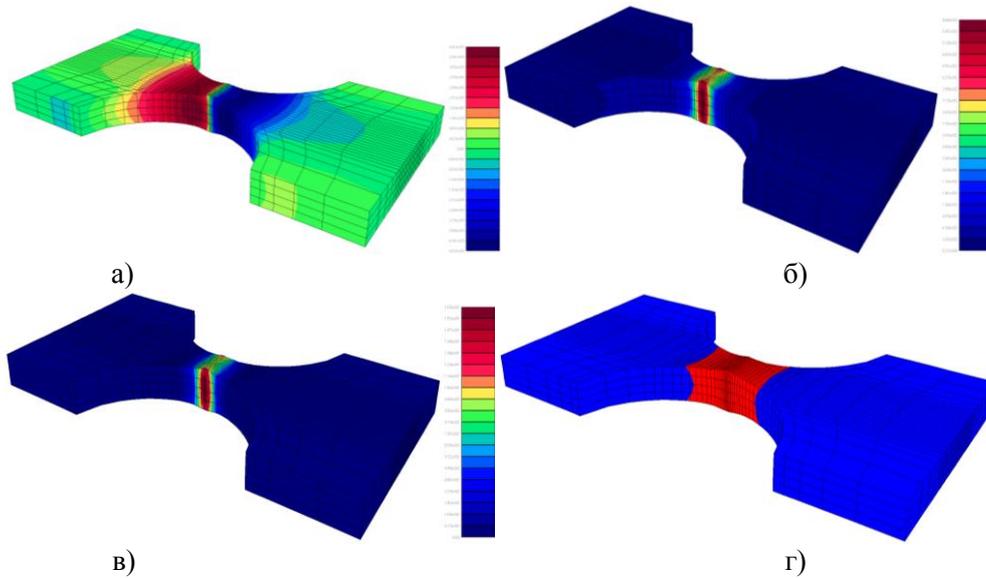


Рис.°2. Результаты КЭ расчетов образца V6 с ориентацией [001] при  $T_{\max} = 900^{\circ}\text{C}$  на 10 цикле:  
 а) распределение полей осевых перемещений; б) распределение интенсивности деформаций;  
 в) распределение полей повреждений; г) зона пластичности

Кривые циклического деформирования для центральной точки образца V2 с термоциклом от  $T_{\min} = 150^{\circ}\text{C}$  до  $T_{\max} = 900^{\circ}\text{C}$  и для V6 с термоциклом от  $T_{\min} = 500^{\circ}\text{C}$  до  $T_{\max} = 1050^{\circ}\text{C}$  представлены на рис.3. Увеличение максимальной температуры цикла приводит к росту односторонне накопленных деформаций. В случае большего размаха температуры для образца V6 петли гистерезиса получаются шире. Следует отметить существенную чувствительность полученных результатов к отклонению кристаллографической ориентации от направления [001] (рис. 4).

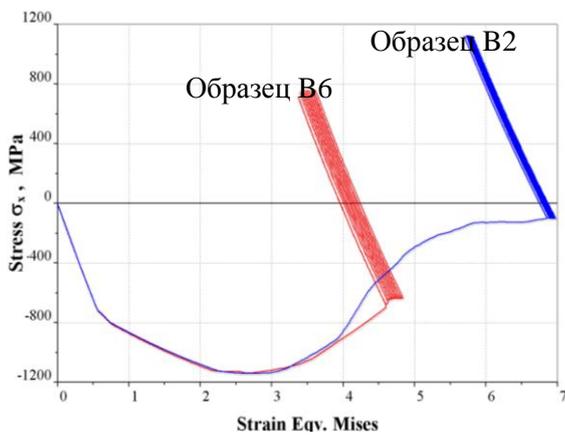


Рис.°3. Расчетные кривые циклического деформирования для центральной точки образца V6 ( $T_{\min} = 150^{\circ}\text{C}$ ,  $T_{\max} = 900^{\circ}\text{C}$ ) и образца V2 ( $T_{\min} = 500^{\circ}\text{C}$ ,  $T_{\max} = 1050^{\circ}\text{C}$ )

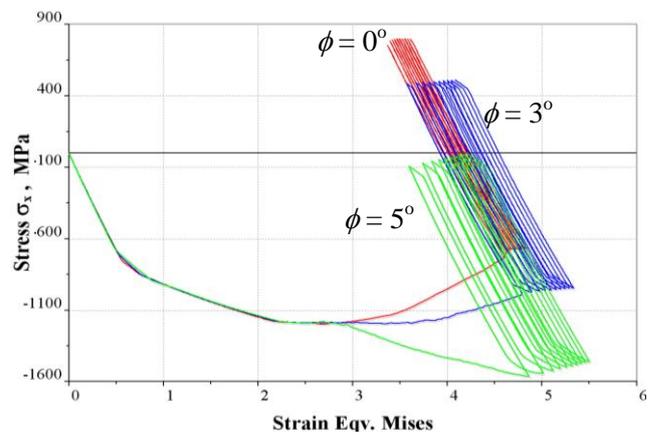


Рис.°4. Влияние отклонения кристаллографической ориентации образца V6 от направления [001] на вид кривых циклического деформирования

Расчет поврежденности и оценка числа циклов до образования макротрещины при термоциклическом нагружении производился на основе деформационного четырехчленного критерия [1, 2]:

$$D = \sum_{i=1}^N \frac{(\Delta \varepsilon_{eq_i}^p)^k}{C_1(T)} + \sum_{i=1}^N \frac{(\Delta \varepsilon_{eq_i}^c)^m}{C_2(T)} + \max_{0 \leq t \leq t_{max}} \frac{\varepsilon_{eq}^p}{\varepsilon_r^p(T)} + \max_{0 \leq t \leq t_{max}} \frac{\varepsilon_{eq}^c}{\varepsilon_r^c(T)}, \quad (1)$$

где первый член учитывает изменение пластической деформации в пределах цикла, второй член – изменение деформации ползучести в пределах цикла, третий член – односторонне накопленную пластическую деформацию (рэтчеттинг), четвёртый член – односторонне накопленную деформацию ползучести. Число циклов до образования макротрещины  $N$  определяется из условия  $D = 1$ . В качестве эквивалентной деформации рассматривается максимальная сдвиговая деформация  $\varepsilon_{eq} = \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\varepsilon} \cdot \mathbf{l}$  в системе скольжения с нормалью к плоскости скольжения  $\mathbf{n}$  и направлением скольжения  $\mathbf{l}$ .

Сравнение результатов КЭ расчетов с использованием критерия (1) и принятой модели деформирования для исследуемого монокристаллического сплава с экспериментами демонстрирует хорошую точность (рис. 5).

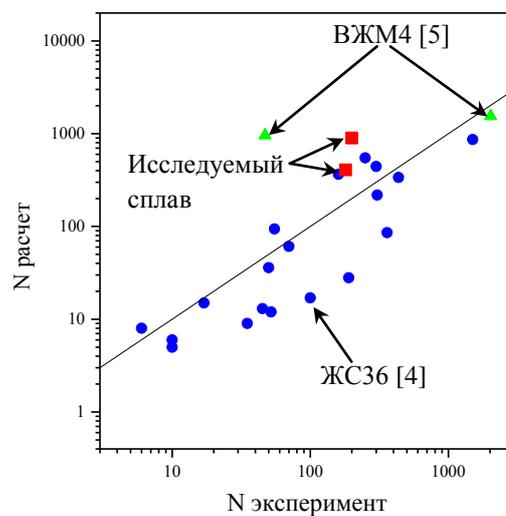


Рис. 5. Сопоставление расчетного числа циклов до образования магистральной трещины с использованием критерия (1) с результатами экспериментов

#### ЛИТЕРАТУРА:

1. Р.Е. Шалин, И.Л. Светлов, Е.Б. Качалов и др. Монокристаллы никелевых жаропрочных сплавов – М.: Машиностроение, 1997. – 336 с.
2. G.A. Cailletaud. Micromechanical approach to inelastic behaviour of metals, *Int. J. Plast.*, 1991, 8, 55-73.
3. Ш. Май, А.С. Семенов. Моделирование процессов неупругого циклического деформирования монокристаллических образцов // Материалы XXXIX Недели науки СПбГПУ. СПб. Изд-во Политехн. ун-та. 2010. Ч. V. С. 73-74.
4. А.С. Семенов. Идентификация параметров анизотропии феноменологического критерия пластичности для монокристаллов на основе микромеханической модели // Научно-технические ведомости СПбГПУ. Физико-математические науки. 2014. № 2 (194). С. 15-29.
5. А.С. Семенов, Л.Б. Гецов. Критерии термоусталостного разрушения монокристаллических жаропрочных сплавов и методы определения их параметров // Проблемы прочности. 2014, № 1. С. 50-62.
6. А.С. Семёнов, Л.Б. Гецов, С.Г. Семёнов, А.И. Грищенко. Сопротивление деформированию и разрушению монокристаллических жаропрочных сплавов при статическом и циклическом нагружении // Вестник СГАУ им. акад. С.П. Королёва. 2014. Выпуск 5 (47), Часть 3. С. 70-79.
7. L.B. Getsov, A.S. Semenov, A. Staroselsky. A failure criterion for single-crystal superalloys during thermocyclic loading. *Materials and technology*. 2008. Vol. 42, p. 3–12.
8. А.С. Семёнов. PANTOCRATOR - конечно-элементный программный комплекс, ориентированный на решение нелинейных задач механики / Труды V-ой Межд. конф. "Научно-техн. проблемы прогнозирования надежн. и долговечн. конструкций". СПб.: Изд-во СПбГПУ, 2003. С. 466-480.

## ИДЕНТИФИКАЦИЯ МОДЕЛЕЙ УПРАВЛЯЕМЫХ ДИНАМИЧЕСКИХ ОБЪЕКТОВ В РЕЖИМЕ НОРМАЛЬНОЙ ЭКСПЛУАТАЦИИ

Для обеспечения эффективной работы систем автоматического управления необходим расчет параметров регулирующих устройств, осуществляемый на основе математической модели управляемого объекта. Нахождение параметров математических моделей по данным эксплуатации объекта является предметом задач параметрической идентификации. Идентификация модели управляемого объекта необходима как при настройке системы управления в начальной стадии ее функционирования, так и при ее адаптации к постепенным или внезапным неконтролируемым изменениям статических и (или) динамических характеристик объекта управления в режиме функционирования технологического процесса (ТП).

Главная проблема идентификации заключается в том, что для определения математической модели объекта необходимо вывести его из стабильного состояния, а для того, чтобы обеспечить нормальный ход ТП, необходимо с помощью системы управления поддерживать его в стабильном состоянии в условиях действия разного рода случайных неконтролируемых возмущений. Компромисс может быть достигнут путем разработки методов расчета минимальных по амплитуде «раскачивающих» воздействий на объект, которые, тем не менее, достаточны для идентификации параметров модели объекта с требуемой точностью.

В основу исследования положен известный метод идентификации в замкнутой регулятором системе управления с использованием настраиваемых моделей [1]. Указанный метод был, однако, проверен на работоспособность лишь применительно к следящим системам, в то время как большинство ТП нуждаются в системах стабилизации.

Рассматриваемый метод заключается в подаче «раскачивающих» идентифицирующих воздействий  $u_{ид}$ , как на реальный объект управления, так и на его математическую модель в течение некоторого времени  $T_{ид}$  с последующим сравнением поведения выходной переменной объекта и модели. При этом, сравнивая контролируемый выход реального объекта  $y(t)$  с выходом модельного объекта  $y_{mod}(t)$ , стремятся минимизировать разницу между двумя указанными сигналами, мерой которой может служить интегральный показатель точности идентификации  $J_{ид}$

$$J_{ид} = \int_0^{T_{ид}} |y(t) - y_{mod}(t)| dt . \quad (1)$$

В [2, 3] применительно к инерционным объектам с запаздыванием, имеющим передаточную функцию

$$H(p) = \frac{Ke^{-p\tau}}{Tp + 1} \quad (2)$$

и подверженным ступенчатым возмущениям  $N$ , была разработана методика идентификации, в соответствии с которой «раскачивающие» воздействия имеют вид кусочно-постоянного сигнала с чередующимися знаками, который для краткости был назван «шестеренкой». Были получены соотношения для определения таких параметров идентификации, как ширина, высота и количество зубцов «шестеренки», а также были

определены рассчитываемые на основе [4] настройки ПИ-регулятора в период идентификационных циклов. Разработанная методика идентификации имеет, однако, следующие недостатки.

1. В отсутствие информации об актуальных значениях амплитуды возмущений  $N$  и коэффициента усиления объекта  $K$  амплитуда «раскачивающих» ступенчатых воздействий  $\lambda$  должна быть (в расчете на худшее) пропорциональна отношению  $N^{\max} / K^{\min}$  и может иметь весьма большое значение. Это, в свою очередь, может приводить к существенному снижению качества управления в период идентификации.
2. Компьютерное моделирование показало, что если возмущения имеют не ступенчатый характер, а представляют собой стационарные случайные процессы, то при некоторых неблагоприятных сочетаниях параметров модели объекта могут иметь место значительные погрешности идентификации.

Для преодоления указанных недостатков была разработана и опробована средствами компьютерного моделирования модифицированная методика идентификации в замкнутой системе, включающая несколько этапов.

1. При обнаружении необходимости в идентификации вследствие разладки системы управления производится изменение параметров типовых законов регулирования, а именно: для ликвидации опасности потери устойчивости настройки ПИ или ПИД-регуляторов меняются на более «осторожные», т.е. робастные. Для настройки робастных типовых регуляторов используются соотношения, полученные в работах [4, 5].
2. В течение некоторого времени, достаточного для грубой оценки корреляционной функции, производится запись значений выходной переменной. Статистическая обработка данного сигнала в условиях достаточно «слабого» робастного регулирования дает возможность оценки корреляционной функции высокочастотной составляющей приведенных к выходу возмущений. В частности, определяется амплитуда возмущений  $N$ .
3. Выполняется грубая оценка коэффициента усиления объекта управления  $K$ . Для этого производится короткая серия относительно сильных ступенчатых «раскачивающих» воздействий, амплитуда которых пропорциональна отношению  $N / K^{\min}$ . Длительность ступенек «шестеренки» должна быть согласована с настройками робастного регулятора, а именно: она должна быть не настолько большой, чтобы регулятор смог подавить ступенчатое воздействие, но достаточной для того, чтобы завершился выход объекта на новый уровень, соответствующий ступенчатому воздействию. На данном этапе должен быть учтен также эффект различных начальных условий реального объекта и сравниваемой с ним модели, для чего необходимо соответствующим образом сместить от нуля нижний предел интегрирования в (1).
4. Определяются параметры второй (окончательной) серии воздействий типа «шестеренка» – данная серия предназначена для оценки всех трех параметров модели (2). Амплитуда, длительность и число ступенек идентифицирующих воздействий определяются путем поисковой минимизации показателя (1) в процессе имитационного моделирования замкнутой робастным регулятором системы с дополнительными идентифицирующими воздействиями типа «шестеренка». При имитации с помощью датчика случайных чисел и соответствующим образом рассчитанного формирующего фильтра генерируется сигнал приведенных к выходу возмущений с корреляционной функцией, полученной на этапе 2. При моделировании проигрывается большое число различных вариантов, соответствующих всевозможным сочетаниям параметров объекта управления. Размерность задачи поисковой оптимизации может быть существенно снижена, если амплитуду и длительность идентифицирующих «раскачивающих» воздействий зафиксировать на определенных

уровнях. При этом амплитуда  $\lambda$  берется пропорциональной отношению  $N/K$ , а длительность – на уровне, используемом на этапе 3.

В ходе исследований был также рассмотрен вопрос о необходимой точности идентификации. Дело в том, что, как показало компьютерное моделирование, точность оценки параметров  $T$  и  $\tau$  модели (2) имеет тенденцию снижаться при  $T/\tau \ll 1$  или  $T/\tau \gg 1$ . Для поддержания относительно высокой точности идентификации в этих случаях необходимо сильно увеличивать число «раскачивающих» импульсов, что крайне нежелательно из-за снижения стабильности показателей ТП. Оказывается, однако, что если при настройке регуляторов в духе робастного управления определенным образом учесть погрешности идентификации, то требуемая точность идентификации в рассматриваемых крайних случаях может быть существенно снижена без заметного ущерба для качества управления.

Таким образом, на основе теоретического анализа и имитационного моделирования в среде MATLAB-SIMULINK разработаны методы активной идентификации с настраиваемой моделью и подачей идентифицирующего воздействия по каналу управления в виде многоступенчатого импульса, а также методы имитационного определения параметров многоступенчатого импульса. Эффективность разработанной методики продемонстрирована на примере конкретных динамических объектов с использованием компьютерного моделирования.

В среде графического пользовательского интерфейса *GUI MATLAB* разработан программный продукт, позволяющий произвести как настройку параметров идентификационных воздействий, так и идентификацию по одной из выбранных методик. Приведена подробная инструкция по работе с данным программным продуктом, который может быть использован для студенческих лабораторных работ.

#### ЛИТЕРАТУРА:

1. Репин А.И., Смирнов Н.И., Сабанин В.Р. Идентификация и адаптация САР с использованием эволюционных алгоритмов оптимизации. Промышленные АСУ и контроллеры. 2008. №03
2. Голоушин И.О., Яковис Л.М. Идентификация динамических объектов с использованием настраиваемой модели в замкнутой системе управления // XL Неделя науки СПбГПУ, Ч. V, СПб.: Изд-во СПбГПУ, 2011
3. Мусихин Д.А., Яковис Л.М. Идентификация динамических объектов с использованием настраиваемой модели в замкнутой системе управления // XLI Неделя науки СПбГПУ, Ч. V, СПб.: Изд-во СПбГПУ, 2012
4. Яковис Л.М., Простые способы расчета типовых регуляторов для сложных объектов промышленной автоматизации // Автоматизация в промышленности №6, 2007.
5. Матвейчев И.В., Яковис Л.М. Робастная настройка типовых регуляторов при управлении инерционными объектами с запаздыванием // XXXVI Неделя науки СПбГПУ. Материалы Всероссийской межвузовской научно-технической конференции студентов и аспирантов. Ч. IV. СПб.: Изд-во СПбГПУ, 2008

### КОНЕЧНО-ЭЛЕМЕНТНОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ РЕКОНСТРУКЦИИ СТАЛЬНОГО ВОДОВОДА ПРИ ПОМОЩИ СТЕКЛОВОЛОКОННОГО КОМПОЗИЦИОННОГО МАТЕРИАЛА

Стальные водоводы за время эксплуатации подвергаются воздействиям внешней среды, приводящим к коррозии и, как следствие этого, к уменьшению толщины стенок. что может вызвать потерю формы поперечного сечения водовода и его частичное или полное разрушение. В целях предотвращения аварий производится реконструкция водоводов. Одним из получивших в последнее время широкое распространение перспективных способов реконструкции является укрепление стенок стального водовода изнутри слоями стекловолоконного композиционного материала.

В работе исследуется напряженно-деформированное состояние и оценивается значение коэффициента запаса линейного участка стального водовода, реконструированного внутренним бесшовным многослойным стеклопластиковым покрытием.

Стеклопластик, использованный для реконструкции, представляет собой эпоксидную смолу, армированную стеклотканью Т-23. Данный композит принадлежит к классу ортотропных материалов [1], его упругие свойства симметричны относительно осей ортотропии 1, 2 и 3. Оси 1 и 2 совпадают с направлением нитей основы и утока стеклоткани. Методы определения упругих модулей для подобных материалов рассмотрены в [2]. Эффективные упругие модули данного композита были определены методом конечно-элементной гомогенизации [3] и представлены в табл. 1.

Табл. 1. Упругие модули композита, определенные методом КЭ гомогенизации

Величина	Значение, МПа	Величина	Значение	Величина	Значение, МПа
$E_1$	8417	$\nu_{12}$	0.160	$G_{12}$	2356
$E_2$	5511	$\nu_{13}$	0.217	$G_{13}$	1764
$E_3$	4257	$\nu_{23}$	0.225	$G_{23}$	1797

В качестве критерия прочности для композитной части трубы был выбран критерий Цай-Ву. В индексной форме критерий Цай-Ву выглядит следующим образом [4]:

$$F_i \sigma_i + F_{ij} \sigma_i \sigma_j = 1, \quad i, j = \overline{1,6}. \quad (1)$$

Константы критерия Цай-Ву вычисляются из соотношений:

$$F_1 = \frac{1}{\bar{\sigma}_{1t}} - \frac{1}{\bar{\sigma}_{1c}}, F_2 = \frac{1}{\bar{\sigma}_{2t}} - \frac{1}{\bar{\sigma}_{2c}}, F_3 = \frac{1}{\bar{\sigma}_{3t}} - \frac{1}{\bar{\sigma}_{3c}}, F_4 = F_5 = F_6 = 0, \\ F_{44} = \frac{1}{\bar{\tau}_{23}^2}, F_{55} = \frac{1}{\bar{\tau}_{13}^2}, F_{66} = \frac{1}{\bar{\tau}_{12}^2}, F_{12} = -2\sqrt{F_{11}F_{22}}, F_{13} = -2\sqrt{F_{11}F_{33}}, F_{23} = -2\sqrt{F_{22}F_{33}}, \quad (2)$$

где  $\bar{\sigma}_i, \bar{\tau}_{ij}$  предельные напряжения, определяемые экспериментально.

На основе критерия Цай-Ву также можно вычислить коэффициент запаса для композита [5]:

$$k_c = -\frac{V}{2S} + \sqrt{\left(\frac{V}{2S}\right)^2 + \frac{1}{S}}, \quad (3)$$

где

$$V = -F_{11}\sigma_1^2 - F_{22}\sigma_2^2 - F_{33}\sigma_3^2 + F_{12}\sigma_1\sigma_2 + F_{13}\sigma_1\sigma_3 + F_{23}\sigma_2\sigma_3 + F_{44}\tau_{23}^2 + F_{55}\tau_{13}^2 + F_{66}\tau_{12}^2, \quad (4)$$

$$S = F_1\sigma_1 + F_2\sigma_2 + F_3\sigma_3.$$

Для определения констант (2) были проведены эксперименты на растяжение и сжатие образцов из композиционного материала под углами  $0^\circ$ ,  $15^\circ$ ,  $30^\circ$ ,  $45^\circ$ ,  $60^\circ$ ,  $75^\circ$ ,  $90^\circ$  [3]. Значения предельных напряжений для композита приведены в табл. 2. Индекс  $c$  соответствует сжатию, индекс  $t$  – растяжению.

Табл. 2. Предельные напряжения для композиционного материала

Величина	Значение, МПа	Величина	Значение, МПа
$\bar{\sigma}_{1t}$	96.88	$\bar{\sigma}_3$	48.24
$\bar{\sigma}_{2t}$	65.32	$\bar{\tau}_{12}$	27.85
$\bar{\sigma}_{1c}$	93.72	$\bar{\tau}_{23}$	30.00
$\bar{\sigma}_{2c}$	68.02	$\bar{\tau}_{13}$	30.00

Остаточная толщина стенок реконструируемого водовода – 4.8 мм., толщина композитного слоя – 5 мм. Глубина залегания водовода – 6 м. На поверхности грунта задавалась сосредоточенная нагрузка 20 т. Внутреннее давление в трубе варьировалось от 0.1 до 0.8 МПа. Рассматривались три различных внутренних диаметра трубы: 1400, 1600 и 2000 мм. Двумерная конечно-элементная модель трубы в грунте показана на рис. 1. Элементы, соответствующие грунту окрашены белым цветом, стальной части трубы – светло-серым, композитной части трубы – темно-серым. Общее число степеней свободы КЭ модели – 13647. Параметр материалов модели указаны в табл. 3.

Табл. 3. Свойства материалов

Материал	$\rho$ , кг/м <sup>3</sup>	E, МПа	$\nu$	$\bar{\sigma}$ , МПа
Грунт	1500	20	0.4	-
Сталь	7800	$2.1 \cdot 10^5$	0.3	380
Композит	1700	См. Табл. 1	См. Табл. 1	См. Табл. 2

Распределения полей напряжений для всех рассматриваемых типоразмеров и уровней внутреннего давления имеют схожий характер. Максимальные напряжения возникают в стальной части трубы, вдоль границы материалов сталь-композит. Результаты КЭ-моделирования для труб различного диаметра представлены в табл. 4.

На рис. 2 представлена полученная зависимость минимального коэффициента запаса от величины внутреннего давления для трубы с внутренним диаметром 2000 мм. Для композитной части трубы коэффициент запаса вычислялся по (3), для стальной части трубы – как отношение предела прочности стали к интенсивности напряжений по Мизесу:

$$k_s = \frac{\bar{\sigma}_{steel}}{\sigma_i} = \frac{\bar{\sigma}_{steel}}{\sqrt{\frac{1}{2}[(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_1 - \sigma_3)^2]}}. \quad (5)$$

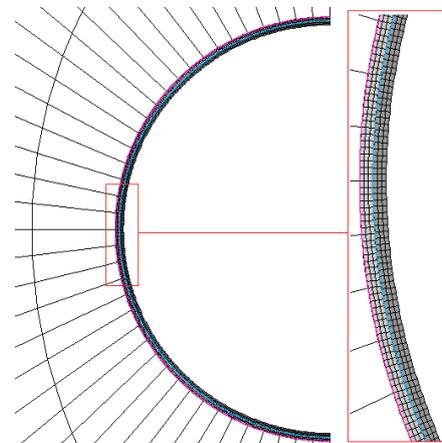


Рис. 1. КЭ модель водовода

Табл. 4. Результаты КЭ моделирования для труб различного диаметра в случае наличия в трубе внутреннего давления  $p = 0.1$  МПа

Внутренний диаметр $d$ , [мм]	1400		1600		2000	
	Сталь	Композит	Сталь	Композит	Сталь	Композит
Максимальная интенсивность напряжений по Мизесу $\sigma_i^{\max}$ , [МПа]	11.5	0.928	11.60	0.863	12.3	0.795
Максимальное по модулю окружное напряжение $ \sigma_1 ^{\max}$ , [МПа]	13.0	1.07	13.10	0.997	13.9	0.924
Минимальный коэффициент запаса $k_{\min}$	33.04	114.86	32.76	126.35	30.90	141.44

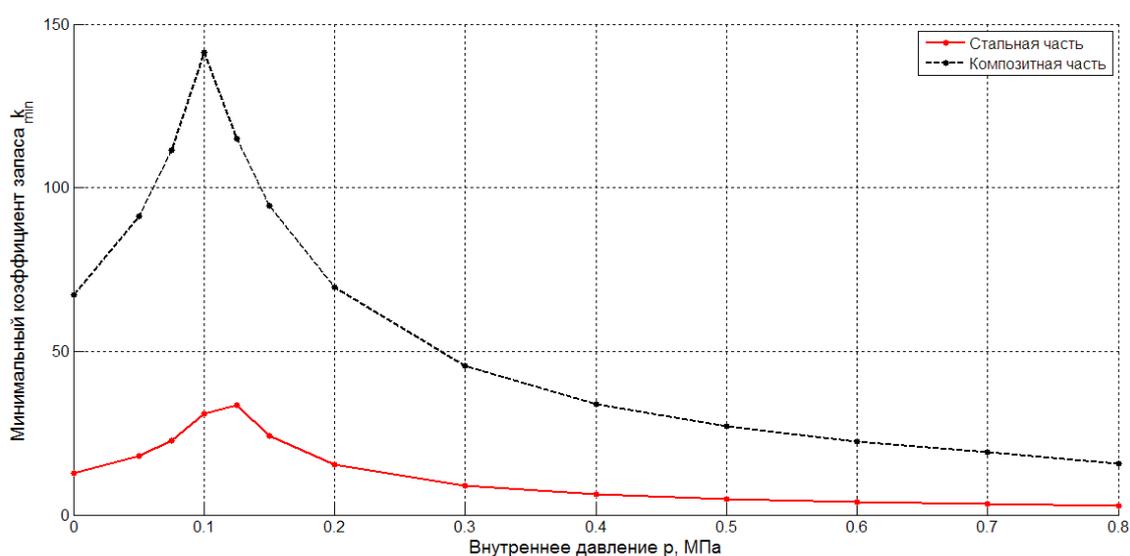


Рис. 2. Зависимость минимального коэффициента запаса от внутреннего давления

Как видно из табл. 4, наибольшие напряжения возникают в трубе с внутренним диаметром 2000 мм. На рис. 2 показано, что зависимость коэффициента запаса от внутреннего давления имеет немонотонный характер. Максимум соответствует рабочему давлению в водоводе. Немонотонность зависимости объясняется конкурентным действием внутреннего давления и весовой нагрузки от грунта. При давлении 0.8 МПа, соответствующему гидроудару, стальная часть трубы обладает двукратным запасом прочности.

#### ЛИТЕРАТУРА:

1. Vasiliev V.V., Morozov E.V. Mechanics and analysis of composite materials, Elsevier Science Ltd. Oxford, 2001. - 430 с.
2. Echaabi J., Trochu F., Gauvin R. Review of failure criteria of fibrous composite materials, Polymer Composites, № 6, 1996. - с. 786-798.
3. Nekliudova E.A., Semenov A.S., Melnikov B.E., Semenov S.G. Experimental research and finite element analysis of elastic and strength properties of fiberglass composite material, Magazine of Civil Engineering, №3(47), 2014. - с. 25-39.
4. Кристенсен Р.М. Введение в механику композитов: Пер. с англ. – М.: Мир, 1982. – 336 с.
5. Tsai S.W. Composites Design: Think Composites; 4th edition Dayton, USA, 1988.

## МОДЕЛИРОВАНИЕ И ИССЛЕДОВАНИЕ КОНСТРУКЦИИ УСТРОЙСТВА, ОБЕСПЕЧИВАЮЩЕГО БЕЗОПАСНОСТЬ ПАССАЖИРОВ В АВТОМОБИЛЯХ С ОТКРЫТЫМ ВЕРХОМ

В 2010 году количество автомобилей в мире превысило отметку в миллиард единиц, учитывая активный рост населения и количества автолюбителей в развивающихся странах, к 2050 году количество автомобилей на дорогах может составить 2.5 миллиарда. Это, кроме экологических и сырьевых проблем, влечет еще и проблему безопасности дорожного движения. Так, дорожные происшествия во всем мире являются самой большой угрозой здоровью людей. Проблема усугубляется тем, что по статистике пострадавшими в дорожно-транспортных происшествиях в основном оказываются молодые, до 35 лет, здоровые люди. Если же рассматривать различные типы аварий, то лидером как по летальности и травмоопасности, так и по размеру выплаченных страховых компенсаций являются аварии, при которых происходит опрокидывание автомобиля, (см. рис. 1.) особенно данный тип аварий опасен для пассажиров в автомобилях с открытым верхом.

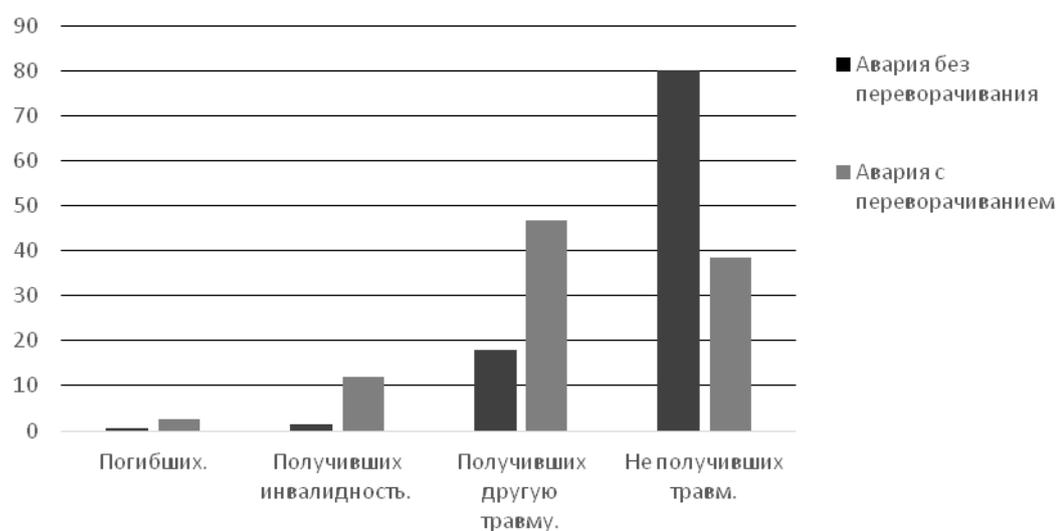


Рис. 1. Процент пассажиров, пострадавших в различной степени

Целью работы является исследование существующей конструкции системы защиты при переворачивании и её модернизация путем использования различных материалов, изменения толщин и способов изготовления деталей. Для оценки изменений, вносимых с модификациями в безопасность автомобиля для пассажиров, был решен ряд конечно-элементных задач, соответствующих тестам, используемым в автомобильной промышленности.

Для того чтобы иметь возможность сравнить безопасность различных автомобилей при авариях и для недопущения появления на рынке автомобилей, небезопасных для находящихся внутри людей, вводятся



Рис. 2. Проведение теста по исследованию безопасности автомобиля при переворачивании

рейтинги автомобилей и стандарты. Рейтинги, стандарты и соответствующие им тесты, регламентирующие безопасность автомобилей при переворачивании есть во многих странах. В США существует рейтинг безопасности автомобилей, составляемый Страховым Институтом Дорожной Безопасности (англ. NHTSA Insurance Institute for Highway Safety). Для оценки прочности крыши автомобиля при опрокидывании используется тест, по результатам которого автомобиль получает численную оценку прочности крыши [2]. Кроме рейтингов, для оценки безопасности автомобиля, в США введен стандарт, по которому проводятся испытания на прочность кузова при переворачивании (FMVSS 216). Стандарт безопасности, в отличие от рейтинга, не дает численную оценку безопасности, а лишь допускает или не допускает автомобиль к использованию на дорогах страны [3].

В основе приведенных тестов лежит давление плитой-импактором на жестко зафиксированный автомобиль (см. рис. 2,3.). При проведении теста NHTSA критерием служит максимальная выдерживаемая силовой конструкцией крыши автомобиля сила, а в случае теста FMVSS 216 – максимальное перемещение плиты.

Кроме данных тестов, существуют различные испытания автомобилей с открытым верхом, проводимые автопроизводителями для определения слабых мест конструкции на этапе разработки новых моделей автомобилей.

Для соответствия требованиям безопасности, на легковых автомобилях с открытым верхом используются системы защиты при переворачивании, монтирующиеся в кузове автомобиля за сидениями пассажиров (см. рис. 3.). Незаметные в не активированном положении данные системы являются действенной защитой находящихся в автомобиле пассажиров в случае его переворачивания.

Использование метода конечных элементов для моделирования испытаний автомобиля на безопасность прочно закрепилось в процессе разработки автомобиля ведущими мировыми производителями, [4] позволяя представлять для дорогостоящих сертификационных испытаний автомобиль, конечно-элементная модель которого уже успешно прошла данные испытания, значительно сокращая таким образом стоимость разработки.

Во всех вариантах модифицированной конструкции для удешевления её производства, литые детали оригинальной конструкции были заменены на штампованные, скрепленные точечной сваркой. Перед исследованием данных модификаций была рассмотрена модельная конечно-элементная задача (см. рис. 4.) по четырехточечному изгибу сварной балки [5] и на основании результатов произведено моделирование сварного соединения исследуемой конструкции автомобиля.

При постановке конечно-элементных задач по исследованию безопасности автомобилей при переворачивании, был использован метод субмоделирования. Это позволило до 20 раз снизить время счета (с 21 до 1 часа) при потере в точности не более двух процентов.

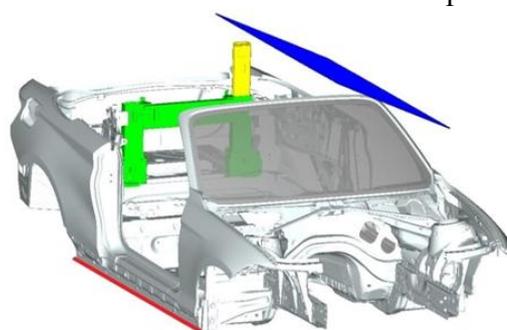


Рис. 3. Разработанная конечно-элементная модель рейтингового теста NHTSA (выделены система защиты, плита-импактор и линия жесткого закрепления кузова автомобиля)

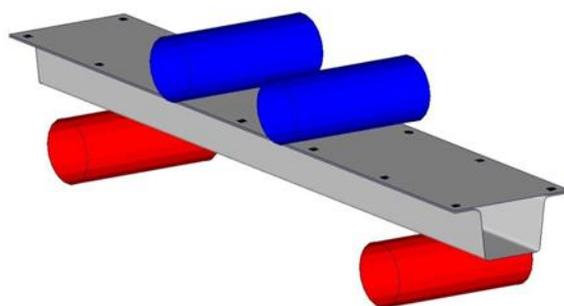


Рис. 4. Модельная задача

В ходе оценки модификаций, внесенных в систему защиты автомобиля с открытым верхом при переворачивании, наилучший результат в тестах был достигнут при использовании алюминиевой штампованной конструкции вместо оригинальной стальной литой. Неэффективным показало себя использование стальных штампованных деталей: конструкция либо показывает недостаточный результат в тестах, либо, с увеличением толщины деталей, при сопоставимых с оригинальной конструкцией результатах тестов, превосходила оригинальную по массе на 90 процентов.

Тем не менее, несмотря на хорошие результаты, показанные алюминиевой конструкцией в тестах, она требует дальнейшей доработки, в связи с обширной зоной пластических деформаций, охватывающих всё её сечение, вследствие чего использование её в текущем виде при производстве автомобилей невозможно.

#### ЛИТЕРАТУРА:

1. Official website US census: <http://www.census.gov/>
2. Official website Insurance Institute for Highway safety: <http://www.iihs.org/>
3. Official website National Highway Traffic Safety Administration:  
<http://www.nhtsa.gov/cars/rules/import/FMVSS/>
4. Lotus Engineering Inc., Evaluating the Structure and Crashworthiness of a 2020 Model-Year, Mass -Reduced Crossover Vehicle Using FEA Modeling, August 2012
5. Man-Shin Tan, Nozhan Sharifian Adhesively Bonded Steel Structures, 2011

УДК 539.3

О.А. Пуделева, А.С. Семёнов  
(Санкт-Петербургский государственный политехнический университет)

### МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРОЦЕССА ПОЛЯРИЗАЦИИ ПЬЕЗОКЕРАМИЧЕСКИХ СЕНСОРОВ И АКТЮАТОРОВ ПРИ ЗАТВЕРДЕВАНИИ АЛЮМИНИЕВОГО КОРПУСА

Пьезокерамика представляет собой поликристаллический сегнетоэлектрик, который используется в качестве элементов сенсоров и актюаторов (клапаны впрыска топлива, гасители вибрации, микромоторы, нанопозиционеры, датчики систем мониторинга целостности конструкций и сооружений и т. д.). Пьезокерамические элементы изготавливаются путем прессования и последующего спекания. Необходимым последующим этапом производства промышленной пьезокерамики традиционно является ее поляризация [1] - воздействие сильного электрического поля на изначально разориентированный поликристалл.

В данной работе рассматривается недавно предложенный альтернативный способ поляризации пьезокерамических элементов под действием механических нагрузок, возникающих при естественном затвердевании алюминиевого корпуса. Пьезокерамический элемент заливается под высоким давлением жидким алюминием и поляризуется при последующем затвердевании и остывании алюминия в форме [2]. Данный способ позволяет избежать затрат на создание сильного электрического поля и получать готовый поляризованный пьезокерамический элемент в отдельном алюминиевом корпусе или как встроенный смарт-элемент внутреннего слоя легковесных алюминиевых панелей, широко используемых в автомобильной или аэрокосмической промышленности.

Развитие данной технологии, продемонстрировавшей подобную возможность поляризации в ряде экспериментов, требует теоретического объяснения наблюдаемого явления, а также выбора оптимальных режимов литья и геометрии пьезоэлемента и корпуса для обеспечения достаточной поляризации без разрушения пьезоэлемента. Целью данной работы является решение вышеуказанных задач на основе простейших теоретических оценок

и прямого конечно-элементного (КЭ) моделирования процесса затвердевания и остывания алюминиевого элемента с пьезоэлектрическим включением.

#### *Теоретический анализ*

Определим уровень напряжений в пьезоэлектрике при остывании алюминия от гомологической температуры (ниже которой не наблюдаются эффекты релаксации напряжений) до комнатной температуры. Принимая во внимание тонкостенность рассматриваемого трехслойного композитного параллелепипеда  $(h_{Al} + h_{PZT}) \times L \times L$  задача будет решаться в предположении плоского напряженного состояния с использованием линейно упругой модели для рассматриваемых материалов. Выполнение условия сплошности на границе раздела пьезоэлектрика и алюминия приводит к равенству:

$$\varepsilon_{Al} = \varepsilon_{PZT}, \quad (1)$$

где  $\varepsilon_{Al}$  – деформация алюминия,  $\varepsilon_{PZT}$  – деформация пьезоэлектрика. Используя закон Гука и выражение для температурной деформации соотношение (1) можно переписать в виде:

$$\sigma_{Al} \frac{1 - \nu_{Al}}{E_{Al}} + \alpha_{Al}(T) \Delta T = \sigma_{PZT} \frac{1 - \nu_{PZT}}{E_{PZT}} + \alpha_{PZT}(T) \Delta T, \quad (2)$$

где  $\sigma_{Al}$  и  $\sigma_{PZT}$  – напряжения в алюминии и пьезоэлектрике,  $E_{Al}$  и  $E_{PZT}$  – соответствующие модули Юнга,  $\alpha_{Al}$  и  $\alpha_{PZT}$  – коэффициенты температурного расширения.

С использованием уравнения равновесия

$$\sigma_{Al} h_{Al} L + \sigma_{PZT} h_{PZT} L = 0 \quad (3)$$

где  $h_{Al}$  – суммарная высота слоев алюминия,  $h_{PZT}$  – высота слоя пьезоэлектрика, следствием (2) получим искомое выражение

$$\sigma_{PZT} = \frac{E_{PZT}}{1 - \nu_{PZT}} \cdot \frac{[\alpha_{Al}(T) - \alpha_{PZT}(T)] \Delta T}{1 + \frac{h_{PZT}}{h_{Al}} \cdot \frac{E_{PZT}}{E_{Al}} \cdot \frac{1 - \nu_{Al}}{1 - \nu_{PZT}}}, \quad (4)$$

Для пьезоэлектрика PZT-5Н [4] с  $E_{PZT} = 70$  ГПа,  $\nu_{PZT} = 0.3$ ,  $h_{PZT} = 0.6$  мм,  $\bar{\alpha}_{PZT} = 5 \cdot 10^{-6} \text{ } ^\circ\text{C}^{-1}$  и алюминия с  $E_{Al} = 70$  ГПа,  $\nu_{Al} = 0.3$ ,  $h_{Al} = 3.4$  мм,  $\bar{\alpha}_{Al} = 2.2 \cdot 10^{-5} \text{ } ^\circ\text{C}^{-1}$  для  $\Delta T = -130 \text{ } ^\circ\text{C}$  получается по (4) следующее значение напряжений  $\sigma_{PZT} = -188$  МПа. Полученное значение позволяет гарантировать отсутствие потери прочности пьезоэлектрика при остывании композита, а также обеспечение достаточного для поляризации уровня электрического поля.

#### *Конечно-элементный анализ*

Уточненный анализ процесса остывания композита был проведен с учетом не только упругих, но и пьезоэлектрических свойств PZT-5Н, анизотропии упругих модулей, экспериментально наблюдаемых нелинейных зависимостей  $\alpha_{PZT}$  и  $\alpha_{Al}$  от температуры, а также реальной геометрии датчика. Наличие симметрии позволяет при создании КЭ модели ограничиться рассмотрением одной восьмой части исследуемого композитного пьезокерамического устройства. Наряду с реальной геометрией датчика (рис. 1б) рассматривалась также и упрощенная трехслойная модель (рис. 1а) без бокового окаймления пьезокерамики алюминием.

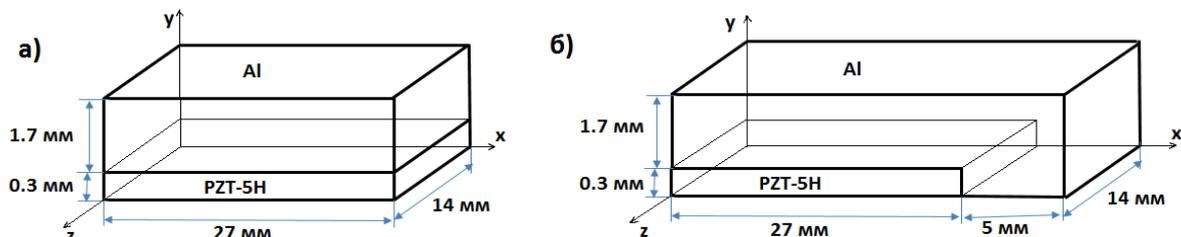


Рис. 1. Модели пьезокерамического устройства:  
 а) упрощенный вариант без окаймления; б) вариант с окаймлением.

В качестве граничных условий были приняты условия симметрии на гранях плоскостях  $XOY$ ,  $XOZ$ ,  $ZOY$  и отсутствие механических нагрузок и поверхностных зарядов на трех оставшихся гранях.

При решении краевых задач использовались 20-и узловые квадратичные объемные конечные элементы в форме гексаэдров. Конечно-элементное моделирование задачи проводилось в пакете ANSYS.

Результаты КЭ расчетов интенсивности напряжений по Мизесу для двух моделей композитного пьезокерамического устройства показаны на рис. 2. Максимальное значение уровня напряжений 186 МПа для упрощенной модели хорошо согласуется с результатами теоретического анализа. Учет окаймления приводит к понижению максимальных напряжений до 171 МПа. Расчеты интенсивности электрического поля (рис. 3) показали, что уровень коэрцитивного электрического поля (820 000 В/м для PZT-5H) превзойден в 2 раза, что обеспечивает поляризацию пьезокерамического элемента при остывании алюминия в исследуемом диапазоне температур. Кривая поляризации, полученная на основе решения нелинейной задачи сегнетоэластостатики с использованием КЭ программного комплекса PANTOCRATOR [4,5], показана на рис. 4. Наблюдается появление и насыщение остаточной поляризации, достаточной для дальнейшего использования пьезокерамического устройства.

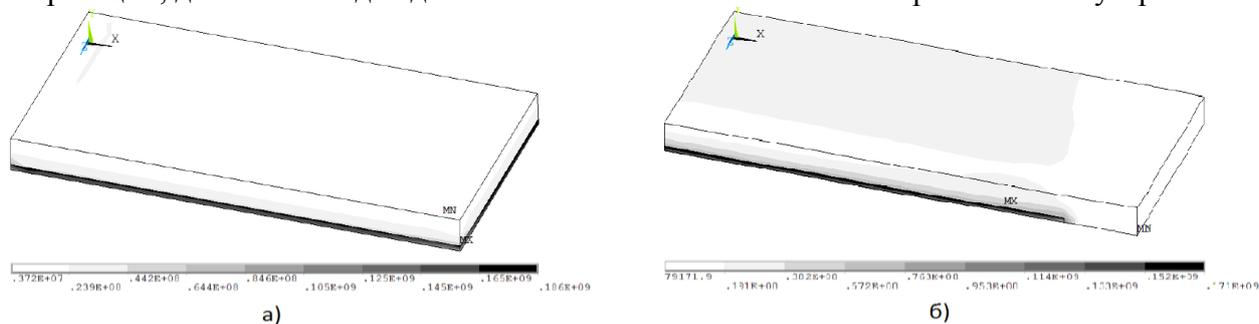


Рис.2. Распределение полей интенсивности напряжений в пьезокерамическом устройстве:  
 а) упрощенный вариант без окаймления; б) вариант с окаймлением

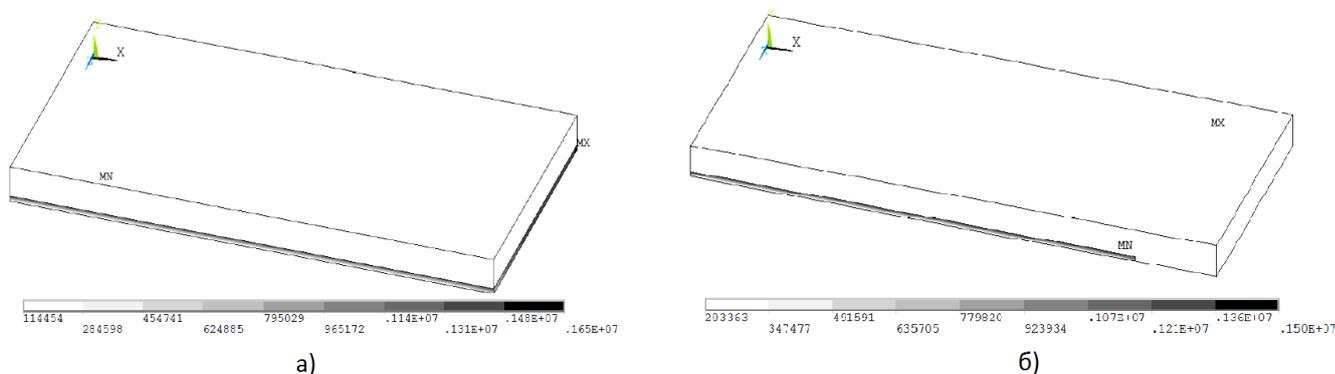


Рис. 3. Распределение напряженности электрического поля в пьезокерамическом устройстве:  
 а) упрощенный вариант без окаймления; б) вариант с окаймлением

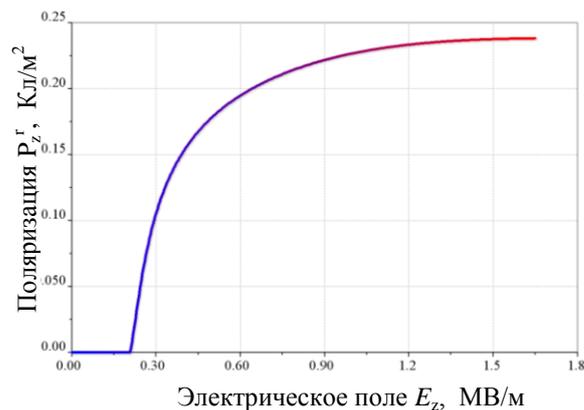


Рис. 4. Расчетная кривая поляризации

#### ЛИТЕРАТУРА:

1. Жуков, С.А. О пьезокерамике и перспективах ее применения // Мир техники и технологий: международный промышленный журнал. - 2009. - N 5. - с. 56-60.
2. Klassen, A., Rübner, M., Pfg, J., Rupitsch, S.J., Lerch, R., Körner, C., Singer, R.F. Integration of piezoceramic sensors and actuators into structural components via high pressure die casting / Proc. of the CRC/TR39 3rd Sci. Symp Integration of Active Functions into Structural Elements, Chemnitz, 2011, P. 45-50.
3. Тополов, В.Ю.; Панич, А.Е. Электромеханические свойства сегнетопьезокерамик на основе оксидов семейства перовскита // Электронный научный журнал «Исследовано в России», 2008. С. 8-26.
4. Семёнов А.С. PANTOCRATOR – конечно-элементный программный комплекс, ориентированный на решение нелинейных задач механики / Тр. V межд. конф. Научно-технич. проблемы прогноз. надежности и долговечн. конструкций и методы их решения. Изд-во СПбГПУ; 2003. С. 466-480.
5. Semenov, A.S., Liskowsky, A.C., Balke, H. Return mapping algorithms and consistent tangent operators in ferroelectroelasticity // Int. Journal for Numerical Methods in Engineering. – 2010. – №81. – P. 1298-1340.

УДК 539.376

О.М. Рыбакова, А.С. Семенов, С.Г. Семенов (Санкт-Петербургский государственный политехнический университет), Л.Б. Гецов (ЦКТИ), Е.А. Тихомирова (НПО им. Климова)

#### МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРОЦЕССОВ ПОЛЗУЧЕСТИ МОНОКРИСТАЛЛИЧЕСКИХ СПЛАВОВ С УЧЕТОМ ДЕЙСТВИЯ РАЗЛИЧНЫХ ОКТАЭДРИЧЕСКИХ И КУБИЧЕСКИХ СИСТЕМ СКОЛЬЖЕНИЯ

В настоящее время в качестве одного из основных конструкционных материалов для создания деталей горячего тракта газотурбинных двигателей применяются жаропрочные монокристаллические сплавы на никелевой основе [1,2]. В случае нагружения при высоких температурах в таких сплавах наблюдается ползучесть с ярко выраженной анизотропией свойств и чувствительностью к кристаллографической ориентации. Данный эффект важен при оценке длительной и термоусталостной прочности [3-5] лопаток газотурбинных установок. В целях улучшения прогнозов, следует совершенствовать модели, описывающие неупругое поведение монокристаллов с учетом их анизотропии. Целью данной работы является моделирование процессов ползучести жаропрочных монокристаллических сплавов и исследование влияния учета различных октаэдрических и кубической систем скольжения на ползучесть монокристаллических сплавов в зависимости от аксиальной ориентации образца.

В работе рассматривается ползучесть монокристаллических сплавов ВЖМ4 и ВИНЗ при одноосном нагружении. Для них на каф. Сопротивления Материалов СПбГПУ были экспериментально получены кривые кратковременной ползучести (см., например, рис. 1 и 2) при различных температурах в диапазоне от 850 °С до 1100 °С, различных уровней напряжений от 60 МПа до 450 МПа и различной кристаллографической ориентации в пределах 10° отклонения от ориентации [001]. Для проведения экспериментов использовалась рычажная испытательная машина АТS серии 2330.

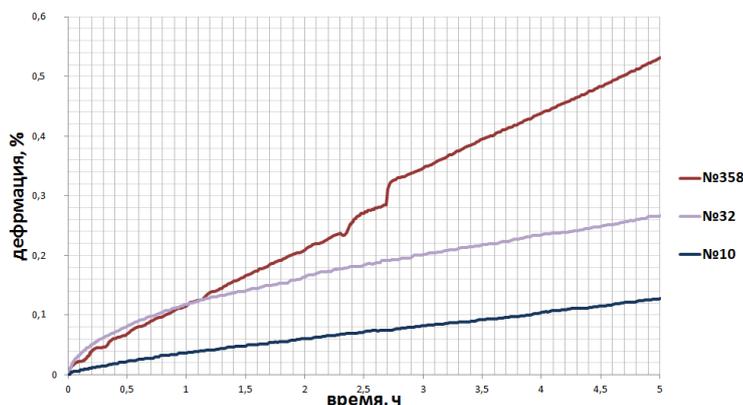


Рис. 1. Кривые ползучести при постоянном напряжении  $\sigma = 70 \text{ МПа}$  и температуре 1100°С для сплава ВИНЗ для образцов с аксиальными ориентациями: №358(2°), №32(8.9°), №10(8.7°)

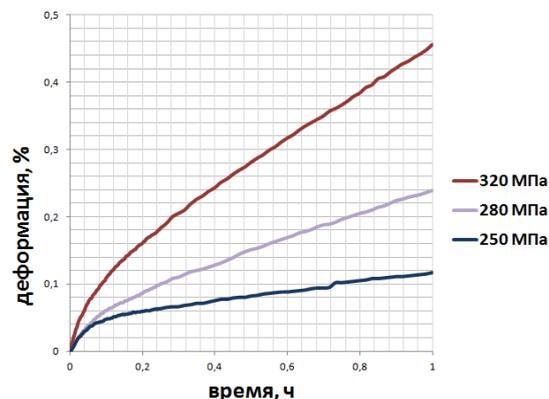


Рис. 2. Кривые ползучести при температуре 1050°С и постоянных напряжениях  $\sigma = 250 \text{ МПа}$ ,  $\sigma = 280 \text{ МПа}$ ,  $\sigma = 320 \text{ МПа}$  для сплава ВЖМ4

Для аппроксимации данных экспериментальных кривых ползучести применяется степенной закон Нортона [3,4]:

$$\varepsilon^{creep} = A^{phen} \sigma^{n^{phen}} t^{m^{phen}}, \quad (1)$$

где  $A^{phen}$ ,  $n^{phen}$ ,  $m^{phen}$  – феноменологические константы ползучести.

В данной работе рассматриваются микромеханические (физические) модели [6-8] неупругого деформирования кристалла и исследуется возможность описания наблюдаемых в экспериментах процессов с использованием различных комбинаций следующих систем скольжения:

- первичной октаэдрической системы  $\{111\}\langle 011\rangle$ ,
- вторичной октаэдрической системы  $\{111\}\langle 112\rangle$ ,
- кубической системы  $\{001\}\langle 011\rangle$ .

Октаэдрические системы скольжения включают в себя по четыре плоскости скольжения  $\{111\}$ , при этом в каждой из этих плоскостей существует три независимых направления скольжения ( $\langle 011\rangle$  и  $\langle 112\rangle$  соответственно для первичной и вторичной систем) (см. рис. 3 и 4). Для кубической системы скольжения характерны три плоскости  $\{001\}$  с двумя независимыми направлениями ( $\langle 011\rangle$ ) в каждой из этих плоскостей (рис. 5).

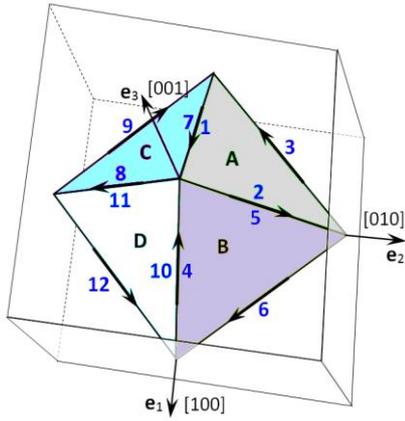


Рис. 3. Октаэдрические системы скольжения вида  $\{111\}\langle 011\rangle$

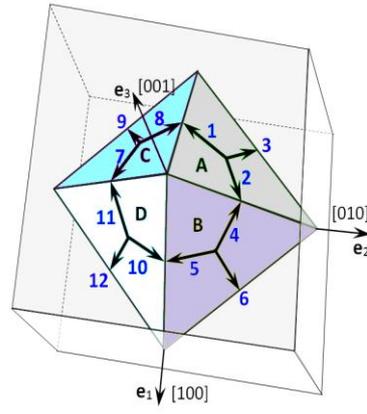


Рис. 4. Октаэдрические системы скольжения вида  $\{111\}\langle 112\rangle$

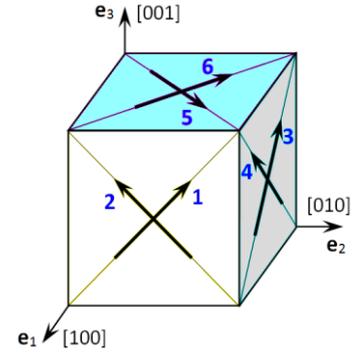


Рис. 5. Кубические системы скольжения вида  $\{001\}\langle 011\rangle$

Геометрия скольжения для каждой системы скольжения описывается тензором Шмида, определяемого выражением:

$$\mathbf{P}^{(i)} = \frac{1}{2} (\mathbf{n}^{(i)} \mathbf{l}^{(i)} + \mathbf{l}^{(i)} \mathbf{n}^{(i)}), \quad (2)$$

где  $\mathbf{n}^{(i)}$ ,  $\mathbf{l}^{(i)}$  – единичные векторы нормали к плоскости скольжения  $i$  и направления скольжения в этой плоскости соответственно. На его основе при малых деформациях в рамках микромеханической модели материала тензор деформации ползучести  $\boldsymbol{\varepsilon}^{creep}$  вычисляется следующим образом:

$$\boldsymbol{\varepsilon}^{creep} = \sum_{i=1}^{N_{SS}} A^{(i)} |\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{P}^{(i)}|^{n^{(i)}} t^{m^{(i)}} \mathbf{P}^{(i)}, \quad (3)$$

где  $\boldsymbol{\sigma}$  – тензор напряжений,  $N_{SS}$  – общее число систем скольжения (и октаэдрических, и кубических) в рассматриваемой физической модели,  $A^{(i)}, n^{(i)}, m^{(i)}$  – константы микромеханической модели ползучести.

Для связи кристаллографической и лабораторной систем координат (СК) вводим тензор поворота  $\mathbf{R}$ :  $\mathbf{R} = \mathbf{ii} + \cos\varphi(\mathbf{jj} + \mathbf{kk}) + \sin\varphi(\mathbf{jk} - \mathbf{kj})$ , где  $\varphi$  – угол поворота оси  $\langle 001 \rangle$  кристаллографической СК относительно оси OX образца, связанного с лабораторной СК. Тогда значения компонент тензора Шмида в лабораторной системе координат  $P'_{km}{}^{(i)}$  определяются из равенства:  $P'_{km}{}^{(i)} = R_{kj} R_{mq} P_{jq}^{(i)}$ , где  $P_{jq}^{(i)}$  компоненты тензора Шмида в кристаллографической системе координат.

Поскольку рассматривается одноосное напряженное состояние образцов (вдоль оси образца OZ), то тензор напряжений имеет только один ненулевой элемент  $\sigma_{33}$ . С учетом этого факта, а также при рассмотрении потенциально возможного наличия двух октаэдрических и кубической систем скольжения, соотношение (3), связывающее деформацию ползучести с временем, принимает вид:

$$\boldsymbol{\varepsilon}_{33}^{creep} = \sum_{\alpha=1}^{N_{O1}} A^{O1} / \sigma_{33} P_{33}'^{\alpha} / \sigma_{33}^{n^{O1}} t^{m^{O1}} P_{33}'^{\alpha} + \sum_{\beta=1}^{N_{O2}} A^{O2} / \sigma_{33} P_{33}'^{\beta} / \sigma_{33}^{n^{O2}} t^{m^{O2}} P_{33}'^{\beta} + \sum_{\nu=1}^{N_C} A^C / \sigma_{33} P_{33}'^{\nu} / \sigma_{33}^{n^C} t^{m^C} P_{33}'^{\nu}, \quad (4)$$

В данном выражении  $N_{o_1} = 12$ ,  $N_{o_2} = 12$  (первичная и вторичная октаэдрические системы скольжения),  $N_c = 6$  (кубическая система).

В работе определяются константы материалов уравнений (1) и (4) для всех рассматриваемых систем скольжения и производится анализ того, какие системы скольжения являются активными в зависимости от кристаллографической ориентации образца на основе сравнения прогнозов моделей с учетом различных систем скольжения и их комбинаций с результатами опытов на ползучесть рассматриваемых сплавов.

#### ЛИТЕРАТУРА:

1. Р.Е. Шалин, И.Л. Светлов, Е.Б. Качанов и др. Монокристаллы никелевых жаропрочных сплавов – М.: Машиностроение, 1997. – 336 с.
2. Л.Б. Гецов, В.Е. Михайлов, А.С. Семёнов, В.В. Кривоносова, Ю.А. Ножницкий, Б.С. Блинник, Л.А. Магераммова. Расчётное определение ресурса рабочих и направляющих лопаток ГТУ. Часть 2. Монокристаллические материалы // Газотурбинные технологии. 2011, №8, С. 18-25.
3. Л.Б. Гецов, А.С. Семёнов, А.И. Рыбников. Сопротивление термической усталости жаропрочных сплавов // Теплоэнергетика, 2009, № 5. С. 51-58.
4. L.B. Getsov, A.S. Semenov, A. Staroselsky. A failure criterion for single-crystal superalloys during thermocyclic loading, Materials and technology. 2008. Vol. 42, p. 3–12.
5. А.С. Семенов, Л.Б. Гецов. Критерии термоусталостного разрушения монокристаллических жаропрочных сплавов и методы определения их параметров // Проблемы прочности. 2014, № 1. С. 50-62.
6. G.A. Cailletaud. Micromechanical approach to inelastic behaviour of metals, Int. J. Plast., 1991, 8, 55-73.
7. Ш. Май, А.С. Семенов. Моделирование процессов неупругого циклического деформирования монокристаллических образцов // Материалы XXXIX Недели науки СПбГПУ. СПб. Изд-во Политехн. ун-та. 2010. Ч. V. С. 73-74.
8. А.С. Семенов. Идентификация параметров анизотропии феноменологического критерия пластичности для монокристаллов на основе микромеханической модели // Научно-технические ведомости СПбГПУ. Физико-математические науки. 2014. № 2 (194). С. 15-29.

УДК 62-529

Ф.К. Романов, А.А. Суханов

(Санкт-Петербургский государственный политехнический университет)

#### АВТОМАТИЧЕСКОЕ УПРАВЛЕНИЕ КВАДРОКОПТЕРОМ

Беспилотные летательные аппараты применяются в различных областях: в военной, в аэрофотосъёмке, в исследованиях животных, доставке грузов и медикаментов в труднодоступные места. Квадрокоптеры также можно использовать при обследовании воздушных линий (ВЛ) электропередач. Современные квадрокоптеры имеют возможность летать по координатам GPS, но точность движения в пространстве составляет  $\pm 1.5$  м. Это связано с точностью позиционирования с помощью GPS и с контуром управления с линейной обратной связью. Для движения вблизи ВЛ такой точности недостаточно, так как для рассмотрения интересующих дефектов необходимо приблизиться к элементам ВЛ на расстояние 1-2 м.

В связи с этим была поставлена задача построения математической модели квадрокоптера и разработка алгоритма нелинейного управления для его стабилизации.

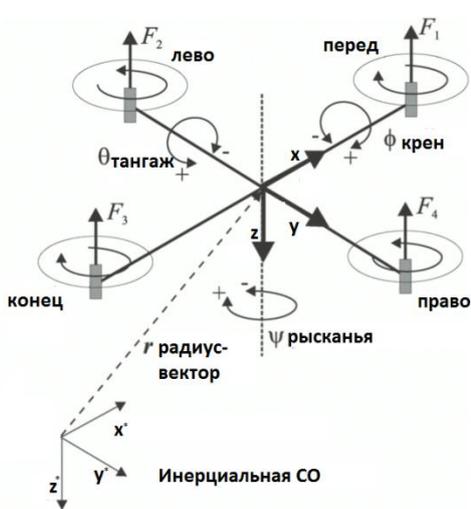
При построении математической модели квадрокоптера, были приняты следующие допущения:

1. Квадрокоптер является твердым телом
2. Центр масс располагается в геометрическом центре

### 3. Конструкция симметричная

### 4. Воздух вокруг квадрокоптера постоянной плотности

При данных допущениях математическая модель, описывающая динамику квадрокоптера, состоит из расчетной схемы (рис. 1) и системы из 12 дифференциальных уравнений:



$$\left. \begin{aligned}
 &V_x = \dot{x} \\
 &V_y = \dot{y} \\
 &V_z = \dot{z} \\
 &m\dot{V}_x = -C_x V_x |V_x| + (\cos\varphi \sin\theta \cos\psi - \sin\psi \sin\varphi) \cdot qu_1 \\
 &m\dot{V}_y = -C_y V_y |V_y| - (\cos\varphi \sin\theta \sin\psi + \cos\psi \sin\varphi) \cdot qu_1 \\
 &m\dot{V}_z = mg - \cos\theta \cos\varphi \cdot qu_1 - C_z V_x |V_z| \\
 &w_x = \dot{\varphi} - \sin\theta \dot{\psi} \\
 &w_y = \dot{\theta} \cos\varphi + \sin\varphi \cos\theta \dot{\psi} \\
 &w_z = \cos\varphi \cos\theta \dot{\psi} - \dot{\theta} \sin\varphi \\
 &I_x \dot{w}_x = w_y w_z (I_y - I_z) - I_r w_y \omega_g + Lqu_2 \\
 &I_y \dot{w}_y = w_x w_z (I_z - I_x) - I_r w_x \omega_g + Lqu_3 \\
 &I_z \dot{w}_z = w_y w_x (I_x - I_y) + \mu qu_4
 \end{aligned} \right\} (1)$$

Рис.1. Расчетная схема

Характеристикам квадрокоптера соответствует квадрокоптер, присутствующий на рынке. Масса квадрокоптера составляет 2 кг, а внешними габаритами является квадрат со стороной 60 см.

В качестве внешнего воздействия мы выбрали неупругий удар птицы о квадрокоптер. Моделирование удара производится ненулевыми начальными условиями. Удару соответствует возмущения в начальных линейных и угловых скоростях. В качестве начальной скорости были выбраны значения, соответствующие удару птицы массой 1 кг и с абсолютной скоростью около 50 км/час.

Для построения начального линейного управления мы линеаризовали систему (1) и представили ее в форме Коши  $\dot{X} = AX + BU$ . Далее мы ввели линейную обратную связь  $U = -KX$  и провели настройку коэффициентов ПИД-регулятора. В связи с симметрией конструкции коэффициенты по симметричным координатам были приняты одинаковыми. Из-за этого, контур обратной связи определяют четыре независимых коэффициента, отвечающих за перемещения, скорость, углы и угловую скорость.

Коэффициенты ПИД регулятора настроены по критериям уменьшения переходного процесса и максимального отклонения по координатам. Результатами компьютерного моделирования движения квадрокоптера при ударе птицы с линейным управлением является время переходного процесса 3,4 с., а максимальное отклонение составляет 1,2 м по горизонтальным координатам (рис. 2).

Для построения нелинейного управления был использован принцип коллинеарного управления, так как он отлично работает в консервативных системах, а наша система является квазиконсервативной. Основным примером использования коллинеарного управления является стабилизация вращения спутников на орбите. Основываясь на этом принципе, мы построили нелинейную обратную связь, которая наиболее эффективно воздействует на полную кинетическую энергию тела. Таким образом, мы имеем возможность увеличивать или уменьшать скорость, исходя из желаемого значения скорости. Так как целью работы является стабилизация по перемещениям и углу рысканья, то мы выбрали

желаемую скорость пропорциональной перемещениям. Настройка коэффициентов, участвующих в коллинеарном управлении, произведена по критериям наименьшего переходного процесса и минимального максимального отклонения. Так же контролировалось, чтобы нелинейное управляющее воздействие не превышало линейное. Результатами компьютерного моделирования движения квадрокоптера при ударе птицы с нелинейным коллинеарным управлением является время переходного процесса 2 с, а максимальное отклонение составляет 0,64 м по горизонтальной координате (рис. 2).

Результаты моделирования движения квадрокоптера при различных начальных условиях показывают значительное уменьшение времени переходного процесса и максимального отклонения при использовании разработанного нелинейного управления. Таким образом, разработанные алгоритмы управления позволили увеличить точность движения квадрокоптера в пространстве.

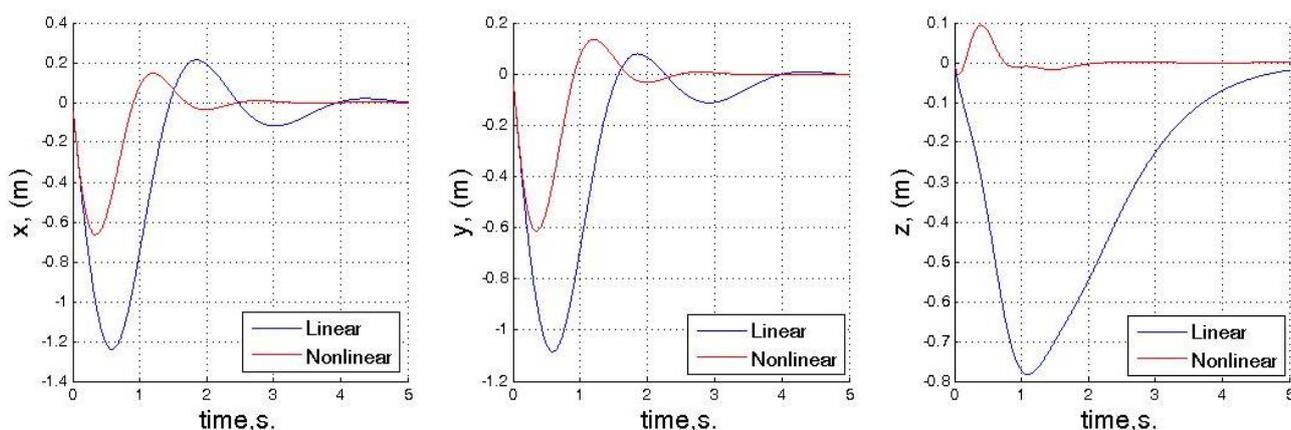


Рис. 2. Стабилизация квадрокоптера при различных начальных условия

#### ЛИТЕРАТУРА:

1. V. Martinez. Modelling of the Flight Dynamics of a quadrotor helicopter. Cranfield University. 2007.
2. M. J. Cutler. Design and Control of Autonomus Variable-Pitch Quadrotor helicopter. MIT. 2012.
3. A. Gibiansky. Quadcopter dynamics simulation and control. 2013.
4. Б.А. Смольников. Проблемы механики и оптимизации роботов. – М: Наука, 1991.
5. А.И. Лурье. Некоторые нелинейные задачи теории автоматического регулирования. – М: Государственное издание технико-теоретической литературы, 1951.

УДК 681.5

П.А. Сизов, С.Ф. Бурдаков  
(Санкт-Петербургский государственный политехнический университет)

#### УПРАВЛЕНИЕ ДВИЖЕНИЕМ КОЛЕСНОГО РОБОТА В ЗАДАЧЕ ПРЕСЛЕДОВАНИЯ

Задачи управления движением мобильных колесных роботов помимо теоретического, приобретают в последнее время все большее практическое значение в различных областях техники и технологий. Спектр решаемых задач при этом оказывается очень широким, от игровых задач до специальных задач обеспечения безопасности.

В настоящей работе с использованием кинематических моделей движения рассмотрена задача преследования одного робота другим. В отличие от известных постановок [1-4] в рассматриваемую задачу внесен элемент неопределенности, связанный с неполной информацией о характеристиках движения преследуемого робота. Использование метода

компенсации и классического представления об астатизме систем управления [5] позволило получить ряд новых нетривиальных результатов.

Рассмотрим систему, состоящую из двух мобильных колесных роботов, один из которых произвольно движется с линейной скоростью  $v_r$  и угловой скоростью  $\omega_r$ , а второй, управляя линейной скоростью  $v$  и угловой скоростью  $\omega$ , стремится его догнать. На рис. 1 показаны линейные и угловые координаты преследуемого  $x_r, y_r, \theta_r$  и догоняющего  $x, y, \theta$  роботов, а также координаты  $x_e, y_e, \theta_e$  преследуемого робота в системе координат, связанной с догоняющим роботом.

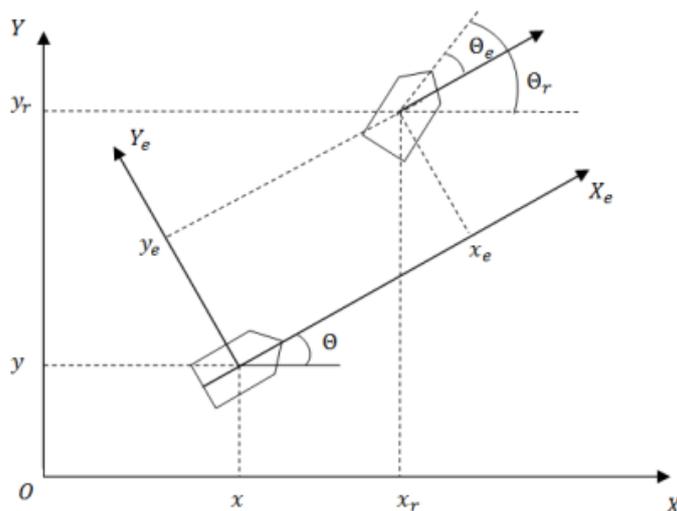


Рис. 1. Системы координат мобильных роботов

Пренебрегая инерцией, запишем кинематические уравнения движения роботов в опорной системе координат  $OXY$

$$\begin{aligned} \dot{x}_r &= v_r \cos \theta_r, & \dot{x} &= v \cos \theta, \\ \dot{y}_r &= v_r \sin \theta_r, & \dot{y} &= v \sin \theta, \\ \dot{\theta}_r &= \omega_r, & \dot{\theta} &= \omega. \end{aligned} \quad (1)$$

Переходя к связанной системе координат  $O_e X_e Y_e$ , получим уравнения

$$\begin{aligned} \dot{x}_e &= \omega y_e - v + v_r \cos \theta_e, \\ \dot{y}_e &= -\omega x_e + v_r \sin \theta_e, \\ \dot{\theta}_e &= \omega_r - \omega, \end{aligned} \quad (2)$$

которые можно рассматривать, как уравнения управляемого процесса с переменными состояниями  $x_e, y_e, \theta_e$ , характеризующими ошибки догоняющего робота в достижении цели, с управлениями  $v, \omega$  и с возмущениями  $v_r, \omega_r$ , так как заранее неизвестно, как будет двигаться преследуемый робот.

Будем считать, что для догоняющего робота доступны измерения переменных состояний  $x_e, y_e, \theta_e$ , а так же имеются оценки скоростей преследуемого робота  $\hat{v}_r, \hat{\omega}_r$ .

Требуется для догоняющего робота построить закон управления движением с обратной связью

$$\begin{aligned} v &= v(x_e, y_e, \theta_e, \hat{v}_r, \hat{\omega}_r), \\ \omega &= \omega(x_e, y_e, \theta_e, \hat{v}_r, \hat{\omega}_r), \end{aligned}$$

обеспечивающий для управляемого процесса (2) асимптотическое условие  $x_e \rightarrow 0, y_e \rightarrow 0, \theta_e \rightarrow 0$  при  $t \rightarrow \infty$ .

По имеющейся информации сформируем закон управления движением догоняющего робота компенсационного типа с обратными связями по переменным состояния и дополнительными интегральными составляющими

$$\begin{aligned} v &= \hat{v}_r \cos \theta_e + c_1 x_e + \alpha \psi_1, \\ \omega &= \hat{\omega}_r + c_2 y_e + c_3 \theta_e + \beta \psi_2, \end{aligned} \quad (3)$$

где  $c_1, c_2, c_3$  – настраиваемые коэффициенты обратных связей,  $\psi_1 = \int_0^t c_1 x_e dt$ ,

$\psi_2 = \int_0^t (c_2 y_e + c_3 \theta_e) dt$ ,  $\alpha$  и  $\beta$  – настраиваемые параметры, определяющие скорость смещения

положения равновесия к требуемому.

Подставляя соотношения (3) в уравнения управляемого процесса (2), получим уравнения замкнутой системы

$$\begin{aligned} \dot{x}_e &= (\hat{\omega}_r + c_2 y_e + c_3 \theta_e + \beta \psi_2) y_e - c_1 x_e - \alpha \psi_1 + \Delta v_r \cos \theta_e, \\ \dot{y}_e &= -(\hat{\omega}_r + c_2 y_e + c_3 \theta_e + \beta \psi_2) x_e + v_r \sin \theta_e, \\ \dot{\theta}_e &= \Delta \omega_r - c_2 y_e - c_3 \theta_e - \beta \psi_2, \\ \dot{\psi}_1 &= c_1 x_e, \\ \dot{\psi}_2 &= c_2 y_e + c_3 \theta_e. \end{aligned} \quad (4)$$

Замкнутая система (4) имеет следующее равновесное состояние

$$x_e = 0, \quad y_e = 0, \quad \theta_e = 0, \quad \psi_1 = \Delta v_r / \alpha, \quad \psi_2 = \Delta \omega_r / \beta.$$

Для системы (4) проведено исследование устойчивости при различных настройках закона управления (3) и исследование робастности при неполной информации о движении преследуемого робота.

Результаты компьютерного моделирования подтвердили теоретические выводы и позволили уточнить некоторые особенности движения догоняющего робота.

На рис. 2а представлены траектории движения  $y_r = y_r(x_r)$  преследуемого робота (пунктирная линия) и  $y = y(x)$  догоняющего робота в опорной системе координат  $OXY$  для следующего маневра преследуемого робота. В начальный момент времени  $t = 0$  он движется прямолинейно с постоянной скоростью  $v_r = \bar{v}_r = 0,1$ . Затем на пятой секунде движения он поворачивает влево на угол  $\pi/2$  с постоянной угловой скоростью  $\omega_r = \bar{\omega}_r = 1$ . Далее преследуемый робот три секунды движется прямолинейно со скоростью  $\bar{v}_r$ , а затем с угловой скоростью  $\bar{\omega}_r$  поворачивает в противоположную сторону на тот же угол  $\pi/2$  и выходит на траекторию, параллельную начальной. По результатам моделирования быстродействие определялось величиной  $t^* = 32,53$ . При этом управления  $v, \omega$  не превышали следующих максимальных значений

$$v_{\max} = 0,26, \quad \omega_{\max} = 0,80.$$

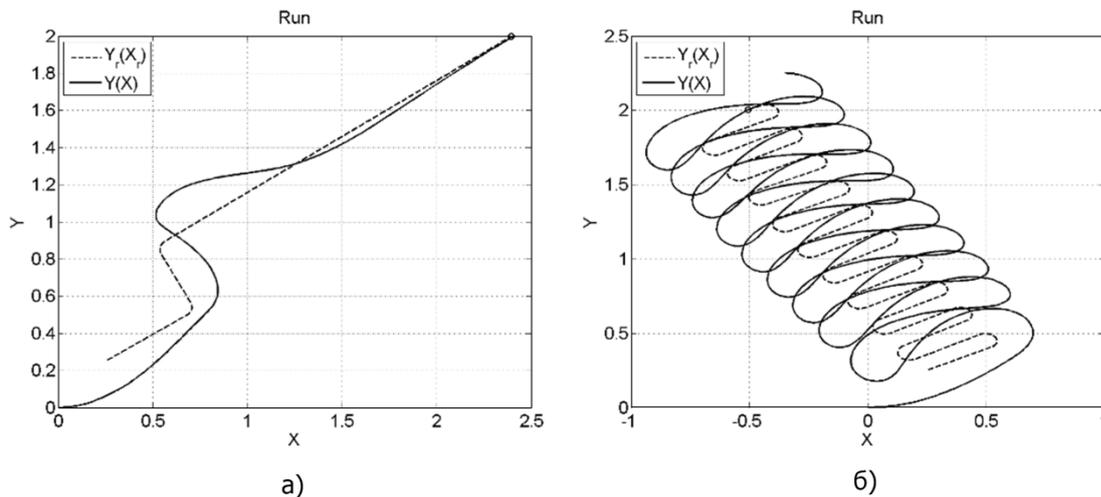


Рис. 2. Траектории движения роботов в опорной системе координат

При моделировании процессов в замкнутой системе (4) с некоторыми настройками закона управления (3), наблюдалась медленная сходимость процессов для круговых траекторий движения преследуемого робота. Это позволило предложить реверсивные траектории преследуемого робота, при которых догоняющий робот, не отработав предыдущих маневров, втягивался в периодическое движение, не приводящее к цели (рис. 2б).

#### ЛИТЕРАТУРА:

1. Aguilar L.E., Tamel T., Soueres P. Robust Path Following Control for Wheeled Robots via Sliding Mode Techniques // Proc. IEEE/RSI Int. Conf, Intell. Robot Syst. IROS'97. P. 1389-1395.
2. Dongkyoung Chwa, et al. Sliding Mode Tracking Control of Nonholonomic Wheeled Mobile Robots // Proc. ACC, May 2002. P. 3991-3996.
3. Jiang Zhong-Ping, Nijmeijer H. Tracking Control of Mobile Robots: A Case Study in Backstepping // Automatica. 1997, vol. 33, No 7. P. 1393-1399.
4. Усик Е.В. Синхронизация нелинейных систем Лурье на основе пассивации и бэкстеппинга // Автоматика и телемеханика. 2012, №8. С. 35-48.
5. Первозванский А.А., Фрейдович Л.Б. Об астатизме нелинейных систем // Автоматика и телемеханика. 1998, №7. С. 35-43.

УДК 534.1

А.С. Томилов, Л.В. Штукин, И.Е. Беринский  
(Санкт-Петербургский государственный политехнический университет)

#### МАКРОМАСШТАБНАЯ ЭЛЕКТРОМЕХАНИЧЕСКАЯ АНАЛОГИЯ ГРАФЕНОВОГО РЕЗОНАТОРА

Развитие нанотехнологий вновь вызвало интерес к механическим устройствам. Создание новых твердотельных структур с размерами от нескольких сотен до нескольких единиц нанометров открывает новую область научных и технологических исследований. В настоящее время большой интерес и развитие получил созданный физиками из США самый маленький в мире резонатор на основе графеновой пленки. Его можно использовать в качестве детектора массы, взвешивая с высокой точностью отдельные молекулы. В результате прилипания частицы к гибкой поверхности графена ее резонансная частота

меняется. Этот эффект позволяет определить массу прилипшей частицы. Серьезным недостатком при использовании резонатора на основе графена является его низкая добротность (порядка 100) [3].

В статьях [1,2], опубликованных в журнале «Доклады академии наук», резонатор на основе графенового слоя рассматривается как электромеханическая колебательная система, в которой механические колебания графенового слоя возбуждаются переменным электрическим полем в пространстве между графеновым слоем и проводящей поверхностью. Такая система представит собой конденсатор, емкость которого зависит от поперечной деформации графенового слоя. Электрическое поле создается внешним источником переменного напряжения. В отличие от использования линейной АЧХ, в настоящей работе предлагается учесть нелинейные эффекты, сопутствующие колебаниям в электрическом поле. Они приводят к "мягкой" АЧХ со срывом колебаний. Измерение частоты срыва возможно с большей точностью, чем нахождение максимума амплитуды линейной АЧХ.

Проведение эксперимента с реальным нанорезонатором является сложным и дорогостоящим процессом. Поэтому цель данной работы выявить принципиальную возможность построения макромасштабной электромеханической модели графенового резонатора, в которой можно было бы наблюдать эффекты, описанные в [1,2].



Главными задачами в работе являются: построение математической модели резонатора, численное решение уравнений и проведение эксперимента с макромасштабной моделью резонатора.

Рис. 1. Макромасштабная модель резонатора

Была разработана экспериментальная установка, которую можно увидеть на рис.1. В качестве резонатора используется стальная проволока диаметром 1 мм. Концы проволоки закреплены в тисках так, что они не смещаются в продольном и поперечном направлении. Тиски закреплены на столе. Возбуждение колебаний производится с помощью электромагнитной системы, которая состоит из стального Ш-образного магнитопровода, постоянного дискового магнита и катушки. Питание катушки осуществляется от генератора стандартного сигнала ГЗ-34.

При описании математической модели, рассматриваются вынужденные колебания струны под действием электромагнита. Установка представляет собой совокупность механической колебательной системы (струна) и электромагнитной системы. Механическую часть будем считать системой с одной степенью свободы. На рис.2 представлена модель механической системы. Электромагнитная система представлена в виде электрической схемы на рис.3.

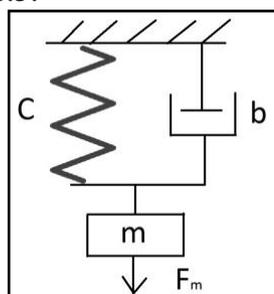


Рис. 2. Механическая модель

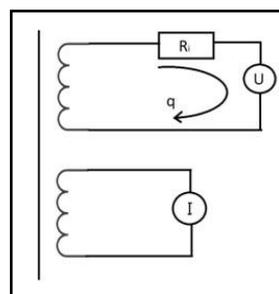


Рис. 3. Электрическая схема

В электромеханической системе оказываются взаимосвязанными механические, электрические и магнитные процессы. Уравнения движения этой электромеханической системы в форме уравнений Лагранжа-Максвелла [4] имеют вид:

$$m\ddot{y} + b\dot{y} + cy - \frac{1}{2} \frac{\partial L(y)}{\partial y} (n\dot{q} + I)^2 = 0$$

$$L(y)n^2\ddot{q} + \frac{\partial L(y)}{\partial y} n\dot{y}(n\dot{q} + I) + R\dot{q} - U(t) = 0$$
(1)

Первое уравнение из системы (1) описывает механические колебания струны под действием магнитного поля. Второе уравнение системы представляет собой уравнение баланса напряжений в электрической цепи.

Проведено численное решение уравнений. В случае статики были найдены устойчивое и неустойчивое положения равновесия при разных параметрах системы. В динамике были рассмотрены свободные колебания струны под действием постоянного магнита и вынужденные колебания струны вблизи резонансных режимов. Некоторые результаты представлены на рис.4 и рис.5.

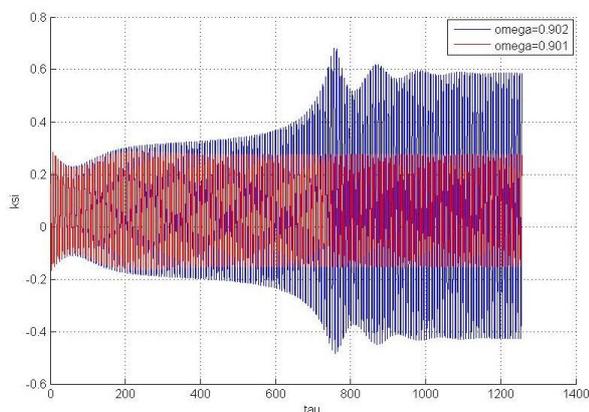


Рис. 4. Расчетная осциллограмма вынужденных колебаний

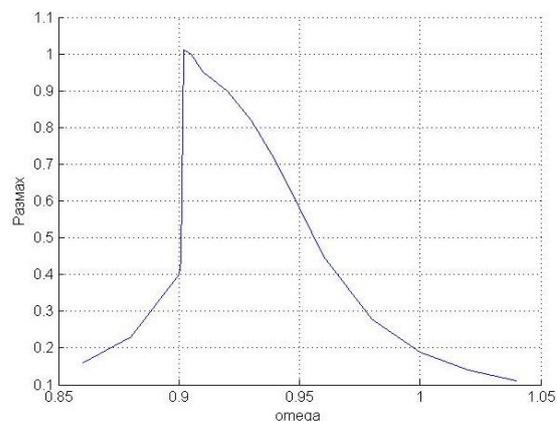


Рис. 5. Расчетная резонансная кривая

Проведенное численное решение показывает, что в рассматриваемой модели при некоторых параметрах возможно появление срыва на резонансной кривой аналогично тому, как это было показано в статье [1]. Так же как и в статье, это решение соответствует “мягкой” системе.

Был проведен эксперимент с макромасштабной моделью резонатора (рис.1). Установлено, что при плавном уменьшении частоты генератора от 70 Гц до 59 Гц увеличивалась амплитуда колебаний. При значении частоты 59.5 Гц произошел срыв колебаний, то есть резкое уменьшение амплитуды колебаний. После, при обратном увеличении частоты до значения 64.5 Гц, амплитуда колебаний не менялась. При частоте 64.5 Гц произошло резкое увеличение амплитуды (обратный срыв).

Для количественной оценки резонансного режима была проведена покадровая съемка и видеосъемка процесса колебаний струны с помощью скоростной камеры. В результате обработки покадровой съемки были получены осциллограммы при разных значениях частоты (пример рис.6). На основе осциллограмм, была построена резонансная кривая рис.7.

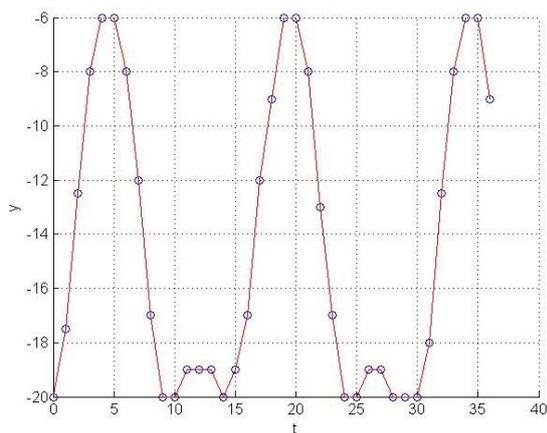


Рис. 6. Экспериментальная осциллограмма вынужденных колебаний

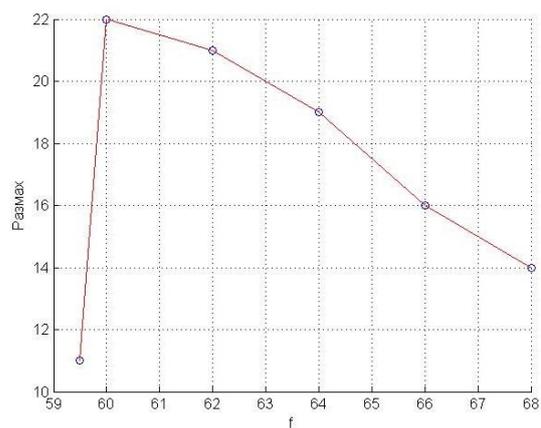


Рис. 7. Экспериментальная резонансная кривая

Резонансная кривая, полученная в результате проведенного эксперимента, качественно совпадает с результатами численного решения.

Проведенное расчетное и экспериментальное исследования показали, что есть принципиальная возможность использования макромасштабной электромеханической модели для моделирования работы графенового резонатора. Возможно дальнейшее исследование по усовершенствованию самой установки, например, учет возможности натяжения струны, усиление магнитного поля, использование в качестве колебательной системы других объектов (полос, пластин и т.д.). Так же возможен учет неравномерности магнитного поля в математической модели.

#### ЛИТЕРАТУРА:

1. Морозов Н.Ф., Белинский И.Е., Индейцев Д.А., Привалова О.В., Скубов Д.Ю., Штукин Л.В. Срыв колебаний графенового резонатора как способ определения его спектральных характеристик // Журнал «Доклады академии наук», 2014, том 456, №5, с. 537-540.
2. Морозов Н.Ф., Белинский И.Е., Индейцев Д.А., Привалова О.В., Скубов Д.Ю., Штукин Л.В. Дифференциальный графеновый резонатор // Журнал «Доклады академии наук», 2014, том 457, №1, с. 37-40.
3. Гринберг Я.С., Пашкин Ю.Я., Ильичев Е.В. // УФН. 2012. Т. 182. №4. с 407-436
4. Скубов Д.Ю., Ходжаев К.Ш. Нелинейная электромеханика. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2003. – 360 с.
5. Андросова В.Г., Банков В.Н., Дикиджи А.Н. Справочник по кварцевым резонаторам – М.: Связь, 1978 – 288 с.

УДК 539.3

М.И.Трибунский, О.И. Клявин, А.И. Боровков  
(Санкт-Петербургский государственный политехнический университет)

### ПАРАМЕТРИЧЕСКАЯ ОПТИМИЗАЦИЯ ПРОФИЛЯ РАСПРЕДЕЛИТЕЛЬНОГО ВАЛА ДВИГАТЕЛЯ ВНУТРЕННЕГО СГОРАНИЯ

Цель работы – увеличение ресурса работы распределительного вала двигателя внутреннего сгорания типа OHV за счет изменения профиля его кулачков. Преимуществом схемы OHV является ее относительно простая конструкция и обеспечиваемая ей конструктивная надёжность. Существенный минус газораспределительного механизма типа OHV — большая инерционность такого механизма, что приводит к сравнительно резкому падению ресурса двигателя при его эксплуатации на высоких оборотах.

Увеличение ресурса распределительного вала может быть достигнуто за счет уменьшения пиковых значений силы контакта  $F$  кулачка с передаточным звеном при выбранных режимах работы двигателя (3000 и 5000 об/мин распределительного вала). Для этого требовалось построить модель газораспределительного механизма и подобрать кривую, наилучшим образом описывающую профиль кулачка (рис.1, а). Коэффициенты кривой будут использованы в качестве параметров оптимизации[1]. В качестве целевой функции будет выбрано пиковое значение силы контакта  $F_{max}$ . Задача оптимизации – минимизация целевой функции  $min(F_{max})$ .

На первом этапе теоретических исследований была разработана математическая модель, описывающая силу контакта кулачков распределительного вала с передаточным звеном (штанга-толкатель) газораспределительного механизма (рис.1, б): .

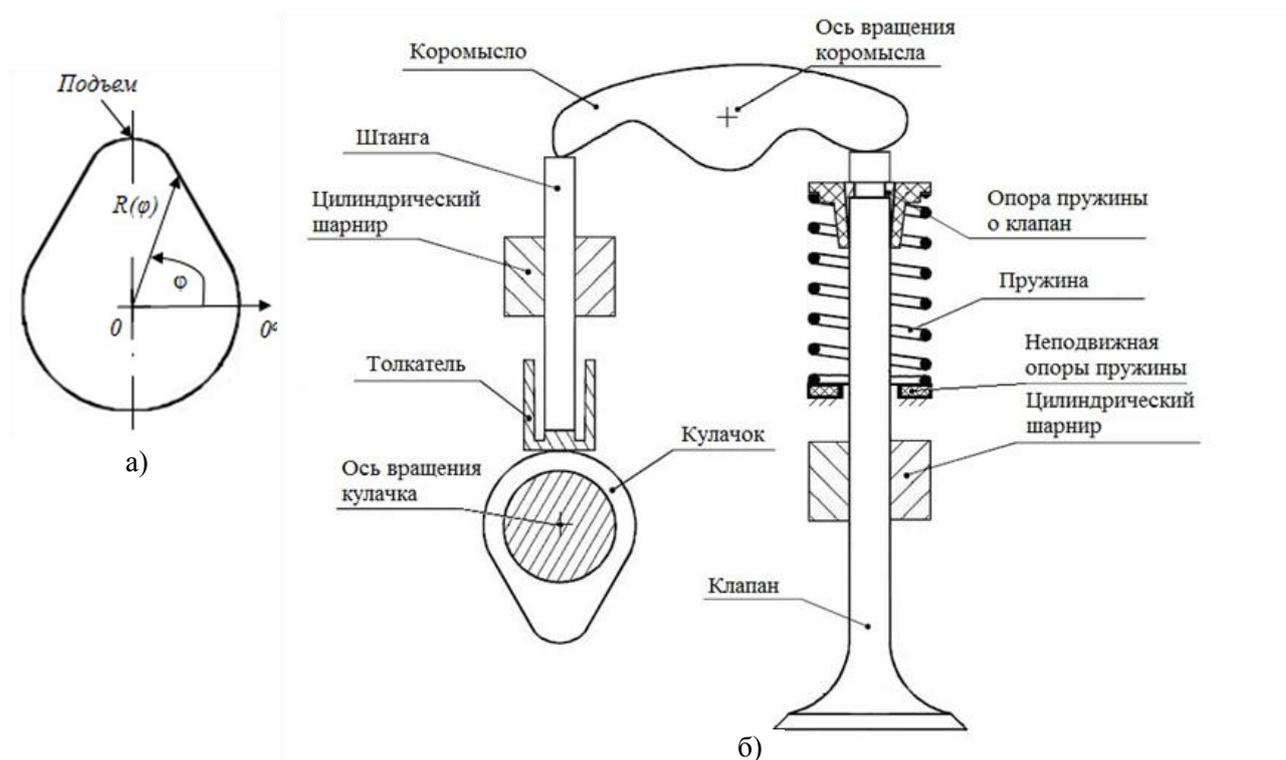


Рис. 1. Схемы: а) профиль кулачка, б) модель газораспределительного механизма

На втором этом этапе были выбраны кривые, с помощью которых был представлен профиль кулачка. Из соображений симметрии кривые подбирались для участка  $\varphi \in [0; \frac{\pi}{2}]$  (рис.1, а). Основным ограничением, накладываемым на выбор кривых, было условие гладкости поверхности кулачка. Одной из выбранных кривых был полином в полярной системе координат:

$$R = \sum_{i=0}^8 a_i \left( \frac{\varphi}{\pi/2} \right)^i, \quad (1)$$

причем вследствие вышеупомянутых ограничений независимыми являются только 5 коэффициентов  $a_i$ . В качестве базисных были выбраны  $a_j, j = \overline{2,6}$ . Пятимерный вектор  $X$ , компонентами которого являются  $a_j$ , будет искомым вектором параметров оптимизации.

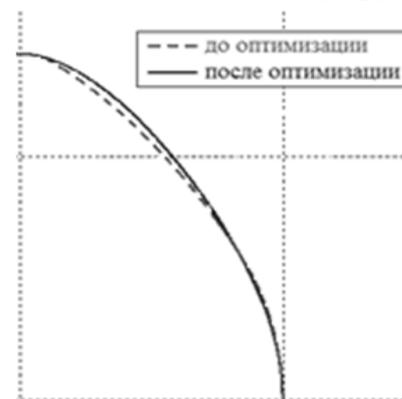


Рис. 2. Сравнение профилей кулачка до и после оптимизации

На третьем этапе была сформулирована задача оптимизации. В качестве целевой функции было использовано наибольшее значение силы контакта, наблюдаемой в течение одного периода колебания газораспределительного механизма при скорости оборота распределительного вала  $3000 \text{ об/мин}$ .

Тогда, обозначив целевую функцию символом  $F(X)$ , можно записать задачу просто как минимизацию  $F(X)$ .

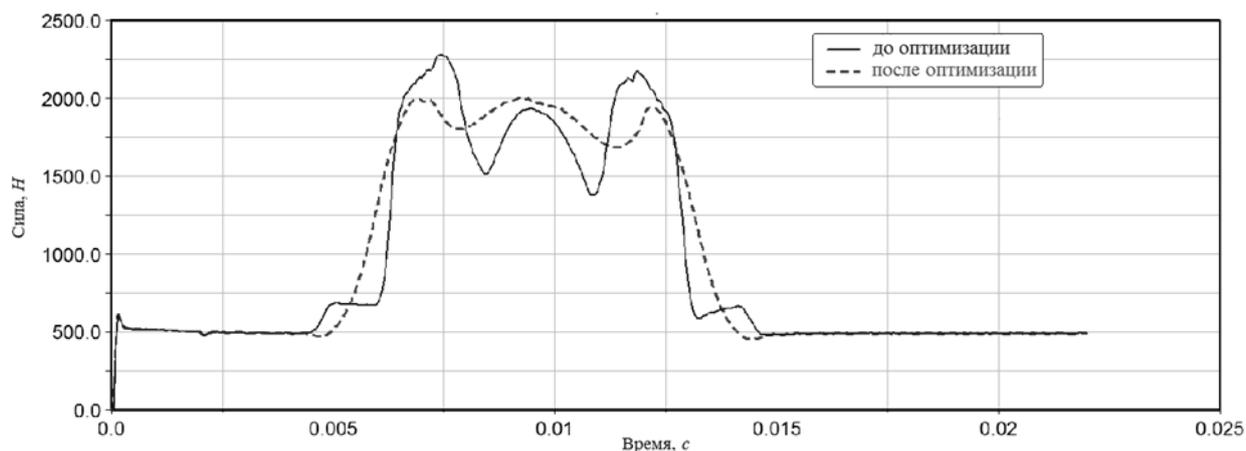


Рис. 3. Сравнение зависимостей силы контакта от времени при вращении распределительного вала со скоростью  $3000 \text{ об/мин}$  до и после оптимизации

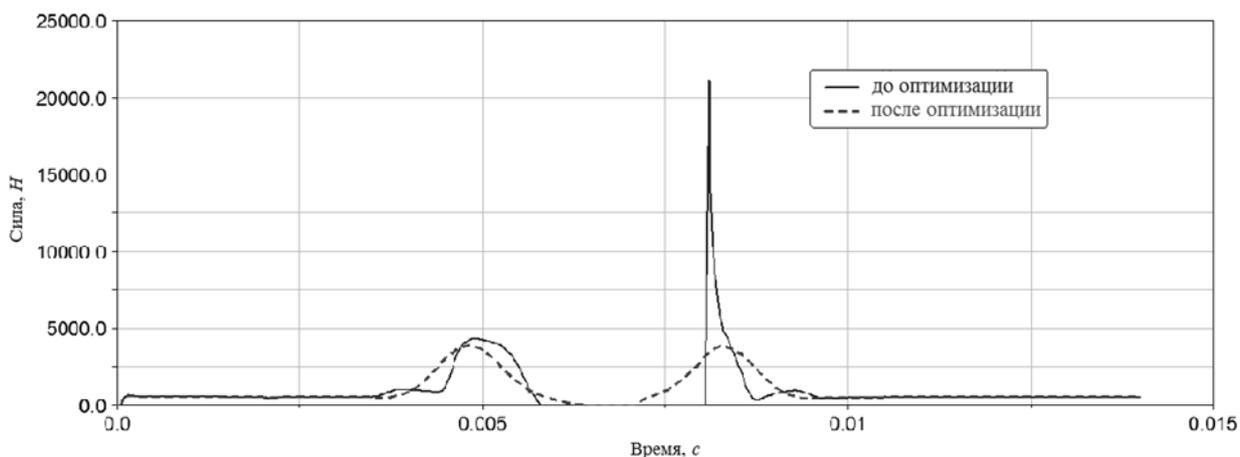


Рис. 4. Сравнение зависимостей силы контакта от времени при вращении распределительного вала со скоростью  $5000 \text{ об/мин}$  до и после оптимизации

Найти:

$$X^* \in R^n, \text{ такой что } F(X^*) = \min F(X^*), \quad (2)$$

при условии, что:

$$X_l \leq X^* \leq X_u, \quad (3)$$

где:

$$X_l \text{ — ограничение на выбор параметров снизу,} \quad (4)$$

$$X_u \text{ — ограничение на выбор параметров сверху.} \quad (5)$$

Наилучшие результаты оптимизации были получены при представлении профиля кулачка в виде кривой (1). Сравнение профилей кулачка до и после оптимизации представлено на рис.2.

В результате оптимизации при  $3000 \text{ об/мин}$  распределительного вала удалось снизить пиковые значения силы контакта на 12% (рис.3), и при  $5000 \text{ об/мин}$  распределительного вала удалось избавиться от жесткого удара и значительно сократить промежутки зависания

клапана (рис.4). Соответствующие изменения на практике приводят к увеличению ресурса распределительного вала в 1.5-2 раза.

#### ЛИТЕРАТУРА:

1. Леоро Л. — Конечно-элементный анализ динамических характеристик и многопараметрическая оптимизация многорычажной подвески легкового автомобиля (МР) — стр.36-37
2. Рикардо Г.Р. — Быстроходные двигатели внутреннего сгорания — М.: ГНТИ Машиностроительной литературы, 1960, стр.9-12
3. Brain A. — Cars — pp.59-64, 69-70
4. Singer C. J., Raper R. — A History of Technology: The Internal Combustion Engine — Clarendon Press, 1954-1978
5. Walter Hillier V.A., Coombes P., Thornes N. — Hillier's Fundamentals of Motor Vehicle Technology: Book 1. — 2004, pp.73-75

УДК 62-531.7

А.В. Федотов, А.К. Беляев (Институт Проблем Машиноведения РАН)

### ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ РАЗЛИЧНЫХ ПОДХОДОВ К УПРАВЛЕНИЮ РАСПРЕДЕЛЕННЫМИ СИСТЕМАМИ

Среди используемых человеком технических систем широко распространены системы с распределенными параметрами: это антенны, тросы, трубопроводы, различные балочные и стержневые конструкции и т. д. Такие системы обладают очень большим числом степеней свободы и склонны к резонансным колебаниям. Колебания в данных конструкциях могут приводить к таким негативным последствиям, как ухудшение их эксплуатационных характеристик, снижение срока службы и повреждение, а также возникновение нежелательных шумов. В связи с этим возникает задача создания систем управления, снижающих резонансные колебания данных объектов и обеспечивающих им заданное движение.

Стандартным является локальный подход к управлению распределенными системами: датчики и актуаторы располагаются попарно, и воздействие каждого актуатора зависит только от показаний соответствующего датчика. Фазовые сдвиги, связанные с поведением объекта управления, компенсируются за счет все более сложной структуры локальных регуляторов. При их синтезе широко используется оптимальное управление [1-5]. При таком подходе все контуры обратной связи оказываются связаны между собой через объект управления, что делает очень сложной задачу их совместной настройки.

Альтернативой локальному является модальный подход [6,7]: его основная идея состоит в том, что каждый контур управления должен соответствовать определенной форме колебаний объекта. Такое соответствие достигается за счёт правильного задания контуров управления, в каждом из которых задействуются множество датчиков и актуаторов. Данный подход позволяет независимо контролировать разные формы колебаний объекта управления, при этом есть возможность менять число форм в зависимости от требований точности.

Считается, что в задачах управления распределенными системами локальный подход является более эффективным, чем модальный. Цель данной работы состоит в том, чтобы экспериментально исследовать и сравнить эффективность двух указанных подходов к управлению распределенными динамическими системами. Для этого решается задача подавления вынужденных изгибных колебаний балки в некотором частотном диапазоне, содержащем несколько резонансных частот данной балки.

Постановка экспериментальной задачи была выбрана из соображений удобства практической реализации. Алюминиевая балка длиной 70 см с сечением 3×35 мм в вертикальном положении была закреплена на опоре с помощью болтов. Точка закрепления находится на расстоянии 10 см от нижнего конца балки. Внешним возмущением служит вибрация опоры, вызываемая приложением переменного электрического напряжения на пьезоэлектрический стержень - толкатель, входящий в конструкцию опоры (рис. 1).



Рис. 1. Внешний вид установки

Для управления изгибными колебаниями балки используются по два пьезоэлектрических сенсора и актуатора. Они расположены попарно по обеим сторонам балки, таким образом измерение изгиба балки и воздействие на нее происходят в одних и тех же точках. Поскольку в такой системе используются всего два сенсора и два актуатора, возможности модального управления для нее ограничиваются независимым контролем двух собственных форм колебаний балки.

Задача управления была сформулирована следующим образом: необходимо максимально эффективно подавить вынужденные изгибные колебания балки в области низких частот (от 0 до 50 Гц), включающей первые две резонансные частоты данной балки. Исходя из этого были выбраны места расположения пьезоэлементов: они были закреплены на тех участках балки, которые имеют максимальную кривизну при колебаниях балки по первой и второй формам. Это позволяет сенсорам наиболее эффективно отслеживать, а актуаторам – воздействовать на указанные формы колебаний балки. Для определения эффективности работы тестируемых систем управления с помощью лазерного виброметра измерялась амплитуда колебаний точки на верхнем конце балки. Этот выбор обусловлен тем, что при колебаниях балки по первой и второй формам амплитуда колебаний в данной точке – наибольшая.

### Создание локальных систем управления

Локальная система управления состоит из двух контуров, в каждом из которых задействована одна локальная пара сенсор - актуатор. Для каждого контура необходимо задать закон управления – зависимость управляющего сигнала от измеренного. Для синтеза законов управления использовался метод желаемых логарифмических амплитудно- и фазочастотных характеристик разомкнутой системы [8,9]. Данный метод позволяет как оптимизировать работу системы управления на подавляемых резонансных режимах колебаний, так и обеспечить устойчивость замкнутой системы. Эффективность каждого из полученных алгоритмов управления проверялась экспериментально, при этом варьировались коэффициенты усиления в контурах.

В результате были получены две наиболее оптимальных локальных системы управления: первая наилучшим образом подавляет колебания балки на первом резонансе, а вторая – на втором. АЧХ системы с управлением и без вблизи резонансов, показывающие амплитуду колебаний точки на верхнем конце балки, приведены на рис. 2. Разные кривые соответствуют разным значениям коэффициентов усиления в контурах управления.

Система №1 оказалась довольно эффективной на первом резонансе – она позволяет снизить амплитуду резонансных колебаний на 77%, однако на втором резонансе она не только не подавляет колебания балки, но и усиливает их. Система №2 хорошо работает на втором резонансе (снижение амплитуды на 88%), но малоэффективна на первом – снижение амплитуды всего на 45%. Создать локальную систему управления, с высокой эффективностью подавляющую колебания на обеих резонансных частотах, не удалось.

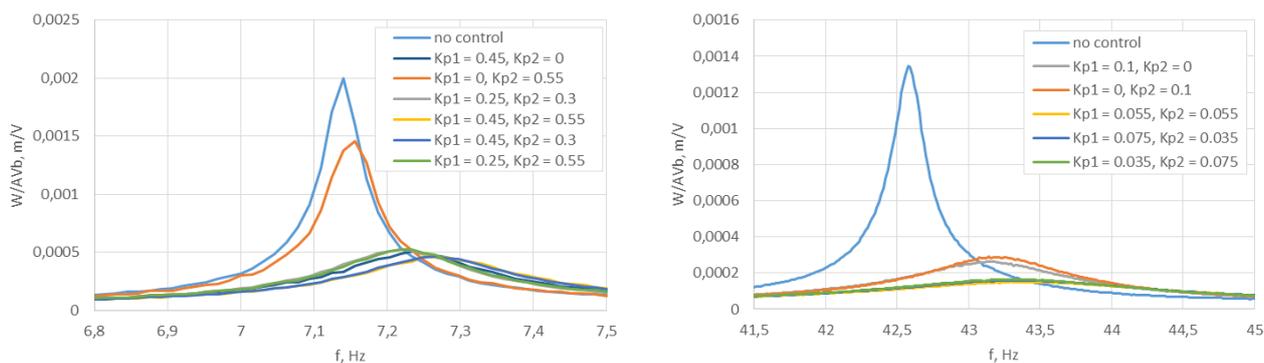


Рис. 2. Сравнение АЧХ системы без управления и с управлением: показана работа локальной системы №1 вблизи первого резонанса и локальной системы №2 вблизи второго резонанса

### Создание модальной системы управления

На первом этапе создания модальной системы для каждого контура управления задаются комбинации сигналов сенсоров и актуаторов. При этом требуется выполнить условия: на первый контур не должна поступать информация о колебаниях балки по второй собственной форме, и его действие также не должно возбуждать вторую форму колебаний; аналогично – для второго контура и первой формы. Это обеспечит независимость контуров управления. Далее каждый из контуров настраивается методом ЛАХ таким образом, чтобы наиболее эффективно подавлять колебания на соответствующей резонансной частоте.

Созданная модальная система управления эффективна как на первом, так и на втором резонансе: снижение амплитуды колебаний составляет соответственно 84% и 87% (рис. 3).

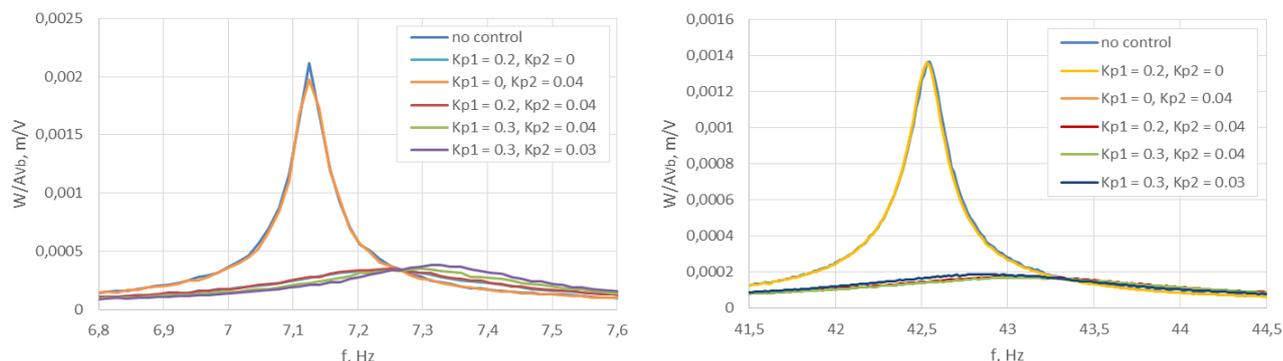


Рис. 3. Сравнение АЧХ системы без управления и с модальным управлением вблизи резонансов

Итак, в данной работе было экспериментально исследовано применение локального и модального подходов к управлению в задаче подавления вынужденных колебаний балки. Показано, что модальный подход имеет преимущество перед локальным в случаях, когда необходимо бороться с колебаниями на нескольких резонансных частотах упругого объекта. Данный результат можно объяснить тем, что модальный подход обеспечивает четкое разделение ролей контуров управления, каждый из которых настраивается из условия оптимальной работы на соответствующей резонансной частоте.

### ЛИТЕРАТУРА:

1. G.E. Stavroulakis, G. Foutsitzi, E. Hadjigeorgiou, D. Marinova, C.C. Baniotopoulos. Design and robust optimal control of smart beams with application on vibrations suppression//Advances in Engineering Software 36 (2005) 806–813.
2. W. Shia, M. Alsarheed, E. Schuster, M.L. Walker, J. Leuer, D.A. Humphreys, D.A. Gates. Multivariable model-based shape control for the National Spherical Torus Experiment (NSTX) Fusion Engineering and Design 86 (2011) 1107–1111.

3. G.E. Stavroulakis, D.G. Marinova, E. Hadjigeorgiou, G. Foutsitzi, C.C. Baniotopoulos. Robust active control against wind-induced structural vibrations J. Wind Eng. Ind. Aerodyn. 94 (2006) 895–907.
4. N.R. Fisco, H. Adeli. Smart structures: Part II — Hybrid control systems and control strategies Scientia Iranica, Transactions A: Civil Engineering 18 (2011) 285–295.
5. I. Kucuk, et al. Optimal control of a distributed parameter system with applications to beam vibrations using piezoelectric actuators, Journal of the Franklin Institute. (2012), <http://dx.doi.org/10.1016/j.jfranklin.2012.10.008>.
6. L.A. Gould and M.A. Murray-Lasso. On the modal control of distributed parameter systems with distributed feedback. In Transactions on Automatic Control, volume 11, page 79. IEEE, 1966.
7. А.К. Беляев, В.В. Котов, В.А. Полянский, Н.А. Смирнова Биоморфное управление в задаче об активном подавлении колебаний // Вестник Санкт-Петербургского университета. Серия 1: Математика. Механика. Астрономия. 2014. Т. 1. № 1. С. 96-106.
8. Gene F. Franklin, J. David Powell, Abbas Emami-Naeini. Feedback control of dynamic systems, 5-th ed. Pearson-Prentice Hall, New Jersey.
9. M. Nader. Compensation of vibrations in smart structures: shape control, experimental realization and feedback control. Schriften der Johannes-Kepler-Universitat Linz, 2008.

УДК 539.3

К.А. Хакало, Д.А. Индейцев, Д.С. Вавилов, О.И. Клявин  
(Санкт-Петербургский государственный политехнический университет)

### РАСПРОСТРАНЕНИЕ ТЕРМОУПРУГИХ ВОЛН В МЕТАЛЛАХ И ДИЭЛЕКТРИКАХ

В работе [1] был описан ряд экспериментов, которые проводились в Санкт-Петербургском Государственном Университете совместно с Институтом Проблем Машиноведения РАН и Ливерморской национальной лабораторией (США). В ходе экспериментов образцы диаметром 20–40 mm и толщиной  $h = 2–10$  mm из различных материалов подвергались субмикросекундному лазерному облучению. На тыльной стороне образцов были расположены пьезодатчики, которые фиксировали перемещение поверхности. Воздействие осуществлялось лазером с  $\lambda = 1.06 \mu\text{m}$  и длительностью излучения  $\tau = 12$  ns.

Результаты экспериментов показали принципиальное различие формы импульсов термоупругих напряжений в тепло- и нетеплопроводящих материалах (рис.1). В случае диэлектрика акустический сигнал представляет собой двуполярный импульс сжатия–растяжения с соразмерными значениями амплитуды и длительности фаз, а в случае металла можно видеть короткую фазу сжатия и наполненный импульс растяжения.

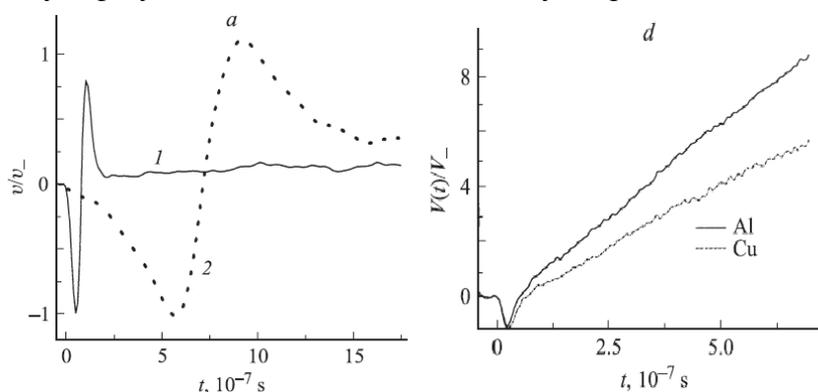


Рис. 1. Импульсы напряжений: а) в цветном стекле (1) и эбоните (2); д) в алюминии и меди

Целями этой работы было описать данный эксперимент аналитически и численно и понять причины возникновения наполненного импульса в металлах. Стоит отметить, что впервые задача о тепловом ударе была рассмотрена в работах В.И. Даниловской [2,3].

В первой части работы при помощи преобразования Лапласа была аналитически решена несвязанная задача термоупругости, а также получено численное решение данной задачи при помощи пакета КЭ анализа ABAQUS. Анализ результатов показал совпадение полученных решений с высочайшей степенью точности. Ниже представлены графики изменения температуры и скорости для различных сечений.

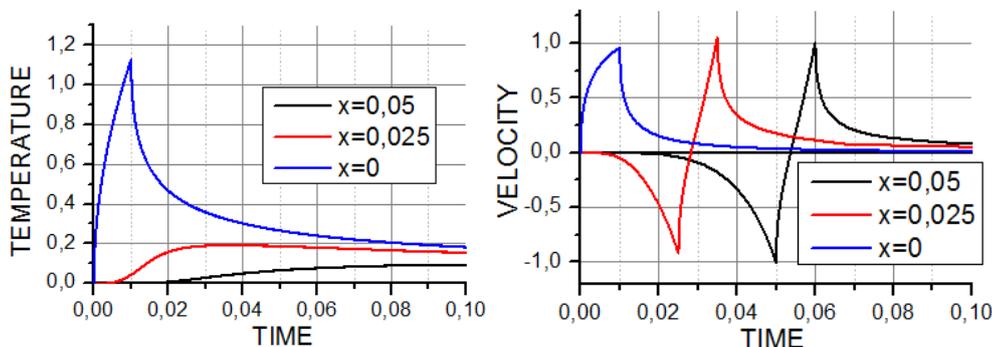


Рис. 2. Изменение температуры и скорости во времени в различных сечениях

Из рис. 2 можно сделать вывод, что акустический сигнал, формирующийся в результате решения классического уравнения теплопроводности, представляет собой двуполярный импульс, напоминающий по форме импульс, полученный экспериментально в результате облучения образцов из нетеплопроводящих материалов. Однако у металлов форма акустического сигнала при импульсном лазерном воздействии в экспериментах существенно отличается от формы, прогнозируемой классической теорией. Следовательно, возникает необходимость усложнить модель распространения тепла в металлах. В данной работе мы будем использовать двухтемпературную модель.

Представим металл, как систему из электронов и атомной решетки. Если данная система подвергается нагреванию короткими лазерными импульсами, то температура электронов будет существенно выше температуры решетки на протяжении достаточно малого промежутка времени. То есть энергия лазерного облучения сначала перейдет к электронам, распространится вглубь материала, а затем от электронов перейдет к атомам решетки. Данная ситуация может описываться следующими уравнениями эволюции температур электронов  $T_e$  и решетки  $T_l$  [4]:

$$\begin{cases} C_e \frac{\partial T_e}{\partial t} = \nabla \cdot (\lambda_e \nabla T_e) - G(T_e - T_l) & H.y.: T_e(x,0) = 0; T_l(x,0) = 0 \\ C_l \frac{\partial T_l}{\partial t} = G(T_e - T_l) & \Gamma.y.: \frac{\partial T_e}{\partial x}(0,t) = -f(t) \end{cases} \quad (1)$$

Константа  $G$  описывает электрон-фотонную связь, которая учитывает перенос энергии от электронов к решетке,  $C_e$ ,  $C_l$  - удельные теплоемкости электронов и решетки на единицу массы,  $\lambda_e$  - теплопроводность электронного газа.

Перемещения точек полупространства удовлетворяют уравнению

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\rho}{E} \ddot{u} = \alpha \frac{\partial T_l}{\partial x} \quad (2)$$

Получить точное аналитическое решение данной системы не представляется возможным, поэтому построим асимптотики решений для малых времен ( $t \rightarrow 0$ ).

Кроме того, чтобы исследовать свойства двухтемпературной модели, решим данную задачу методом конечных элементов.

В настоящее время в ABAQUS нет встроенной двухтемпературной модели. Однако, в статье [5] описан метод создания такой модели с помощью пользовательской подпрограммы UMATHT. Идея метода состоит в решении задачи на двух независимых геометрических областях, которые взаимодействуют друг с другом с точки зрения теплового поведения материала. Одна область соответствует кристаллической решетке, а вторая электронному газу.

На рис. 3 представлены изменения температуры и скорости для различных сечений.

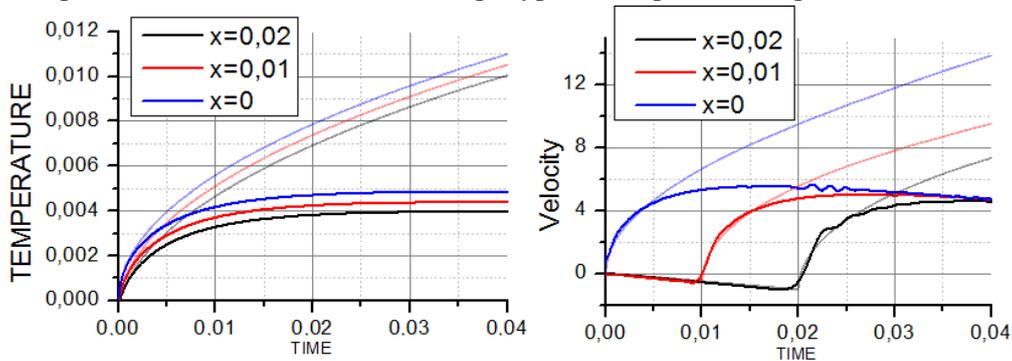


Рис. 3. Изменение температуры и скорости во времени в различных сечениях

Здесь полупрозрачными линиями показаны асимптотики решений, которые были получены аналитически. Видно, что для малых времен асимптотики хорошо ложатся на решения, полученные численно.

Оценим влияние коэффициента связности решетки и электронного газа  $\mu = \frac{G\lambda_e}{C_e C_l a^2}$  на полученные решения. Рассмотрим два сечения. Первое расположено вблизи начала координат  $\bar{x} = \frac{C_e a}{\lambda_e} x < 1$ . Второе расположено вдали от начала координат  $\bar{x} = \frac{C_e a}{\lambda_e} x > 1$ .

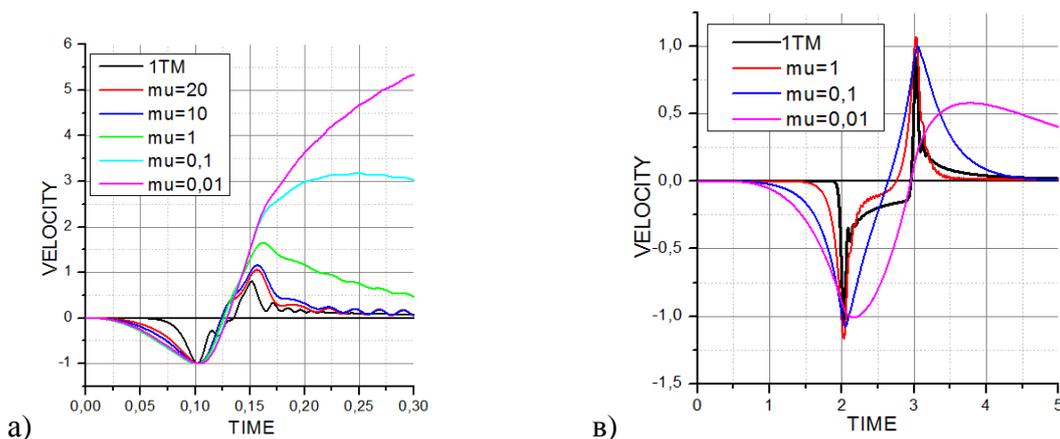


Рис. 4. Изменение скорости сечения во времени для различных  $\mu$  в сечениях А)  $\bar{x} = 0,1$ , В)  $\bar{x} = 2$

Из рис. 4 видно, что для сечений вблизи начала координат с уменьшением коэффициента связности двухтемпературной модели наблюдается наполнение акустического сигнала, что хорошо сходится с экспериментом. Но в сечениях, расположенных вдали от начала координат, акустический сигнал уже имеет форму двуполярного импульса со сравнимыми по амплитуде и длительности фазами растяжения и сжатия. Это можно связать с тем, что в системе (1) мы пренебрегли теплопроводностью кристаллической решетки,

полагая, что передача тепла по решетке осуществляется в основном за счет теплообмена с электронами, однако очевидно, что в сечениях, расположенных вдали от начала координат слагаемое  $G(T_e - T_l)$  будет крайне мало. В связи с этим предполагается провести дальнейшие исследования.

Таким образом, использование двухтемпературной модели теплопроводности для описания распространения тепла в металлах позволило лучше описать эксперимент по сравнению с классической моделью теплопроводности.

#### ЛИТЕРАТУРА:

1. Н.В. Вовненко, Б.А. Зимин, Ю.В. Судьенков. Экспериментальные исследования термоупругих напряжений в тепло- и нетеплопроводящих твердых телах при субмикросекундных длительностях лазерного нагрева // Журнал технической физики, 2011, том 81, вып. 6
2. Даниловская В.И. Температурные напряжения в упругом полупространстве, возникающие вследствие внезапного нагрева его границы // Прикл. мат. и мех. 1950 Т 14, № 3 С 316-318
3. Даниловская В. И. Об одной динамической задаче термоупругости // Прикл. мат. и мех. 1952 Т 16, № 3 С 342-344
4. Д. Жоу, Х. Касас-Баскес, Дж. Лебон. Расширенная необратимая термодинамика / М.; Ижевск: Науч.-издат. центр "Регулярная и хаотическая динамика", 2006.
5. D. Lee, "Feasibility study on laser microwelding and laser shock peening using femtosecond laser pulses," Ph.D. thesis (University of Michigan, 2008).

УДК 539.3

П.С. Цветков, А.И. Боровков, О.И. Клявин  
(Санкт-Петербургский государственный политехнический университет)

### КОНЕЧНО-ЭЛЕМЕНТНЫЙ РАСЧЁТ ПОДРАМНИКА И ПЕРЕДНЕЙ ПОДВЕСКИ АВТОМОБИЛЯ ПРИ РАЗЛИЧНЫХ ВАРИАНТАХ НАГРУЖЕНИЯ И ОПТИМИЗАЦИЯ КОНСТРУКЦИИ

В настоящее время, автомобильная промышленность развивается достаточно большими шагами. Это характеризуется жесткой конкуренцией между концернами-производителями [1]. Каждый производитель стремится с помощью своих инженерных и технических служб повысить различные качества, выпускаемых ими автомобилей. Одним из таких качеств является безопасность автомобиля [2].

Активная безопасность — это совокупность конструктивных и эксплуатационных свойств автомобиля, направленных на предотвращение дорожно-транспортных происшествий и исключение предпосылок их возникновения, связанных с конструктивными особенностями автомобиля.

Пассивная безопасность — совокупность конструктивных и эксплуатационных свойств автомобиля, направленных на снижение тяжести дорожно-транспортного происшествия. Включает в себя такие элементы, как: ремни безопасности, подушки безопасности, сминаемые мягкие элементы передней панели, бамперы, подголовники и прочее.

Неотъемлемой частью безопасности является прочность кузова и несущих конструкций автомобиля, таких как подрамник, элементы подвески и основной силовой элемент кузова современного автомобиля — лонжероны.

Целью работы является конечно элементное моделирование передней подвески автомобиля с различными вариантами нагружения, анализ напряжений возникающих в кузове автомобиля и доработка конструкции.

В качестве модельной задачи рассмотрен изгиб консольно закреплённой балки под действием приложенной силы. Проведено сравнение аналитического решения данной задачи с результатами конечно-элементного моделирования, полученного в программном комплексе Abaqus [3]. Расхождение в величине прогиба балки составило 2%.

Объект исследования представляет собой переднюю часть автомобиля, включающую в себя лонжероны, подрамник, переднюю подвеску типа MacPherson и упрощённый вариант привода (рис. 1). Все остальные части кузова были отброшены для ускорения расчётов в силу принципа Сен-Венана [4].

Передняя подвеска типа макферсон включает в себя такие элементы как : амортизационная стойка, амортизатор, пружина амортизатора, поворотный кулак со ступицей, рычаг подвески с сайлент-блоками и шаровой опорой, штанга амортизатора поперечной устойчивости, привод колеса, рулевая тяга и подрамник. Такое строение является наиболее распространённым и простым в исполнении [5].

Все штампованные элементы конструкции были смоделированы при помощи shell-элементов. Из модели были убраны колеса, тормозная система, шарнирные соединения моделировались с помощью кинематических связей, ограничивающих те или иные степени свободы и связывающие элементы. Пружины подвески моделировались beam-элементами, так же как и рычаги подвески. В качестве материала использовалась математическая модель упругой стали, так как при исследуемых сценариях нагружения, возникающие напряжения не должны превышать предела упругости стали. Болтовые соединения моделировались как абсолютно жёсткое соединение соответствующих узлов между собой.

К готовой конечно-элементной модели были приложены граничные условия в виде отсутствия перемещений для узлов находящихся на границе отреза передней части кузова.

Полученная модель была рассчитана с двумя вариантами нагружения: торможение с замедлением в  $1.1g$  и правый поворот с нормальным ускорением  $1g$ .

Анализ результатов показал, что максимальные напряжения концентрируются в местах крепления подрамника к лонжеронам и треугольных рычагах подвески (рис. 2).

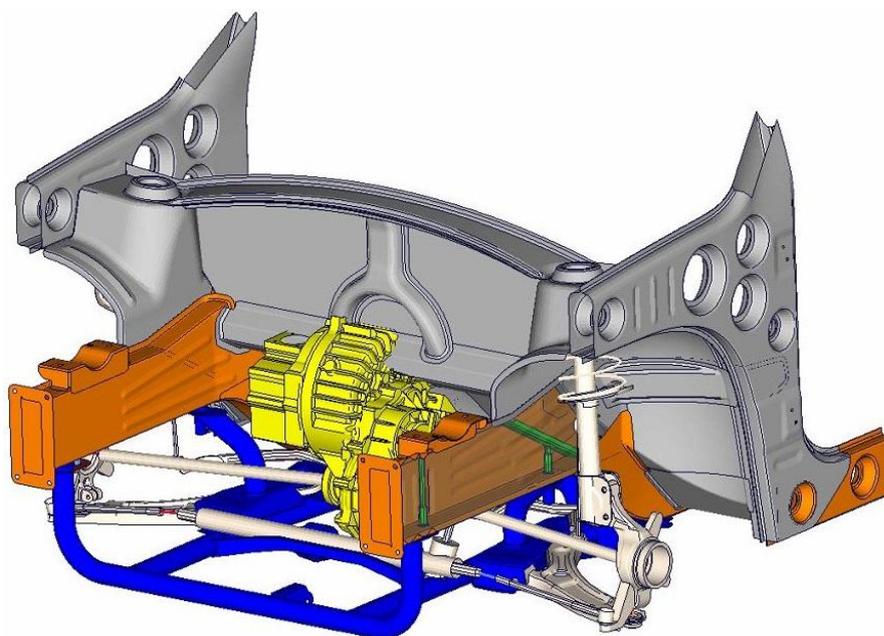


Рис. 1. КЭ модель передней части кузова

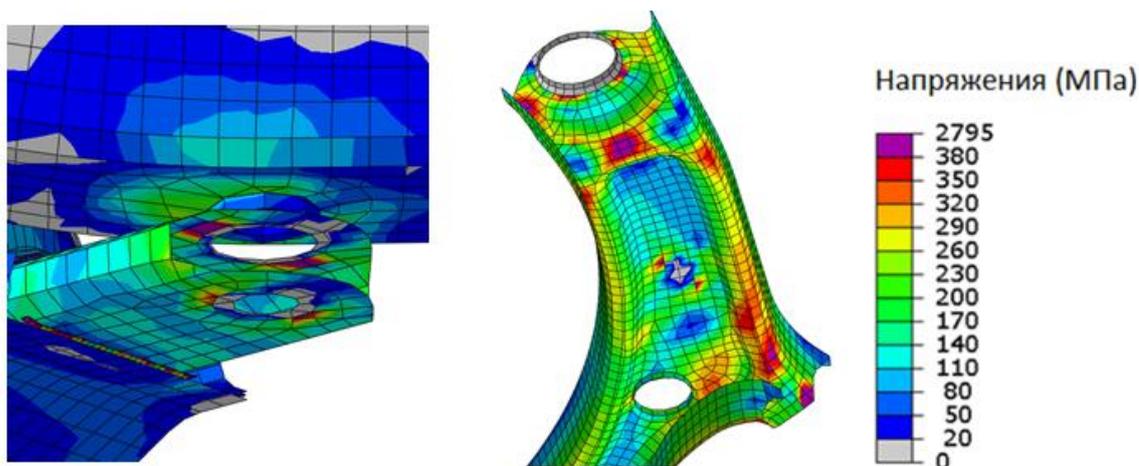


Рис. 2. Распределение напряжений с элементах подвески и кузова

После оптимизации конструкции буксы и добавления ребер жесткости в треугольный рычаг (рис. 3) удалось снизить максимальные напряжения в подрамнике с 320 МПа до 35 МПа, в лонжероне с критических 800 МПа до 140 МПа, а в треугольном рычаге удалось убрать локализации напряжений. При этом масса детали, удерживающей буксу в лонжероне, уменьшилась на 45%.

Краткие итоги настоящей работы: создана КЭ модель передней части кузова автомобиля, описаны все принятые допущения, рассмотрены нагрузки возникающие при торможении автомобиля и прохождении им правого поворота. Предложены возможные варианты усиления конструкции высоконагруженных узлов, и

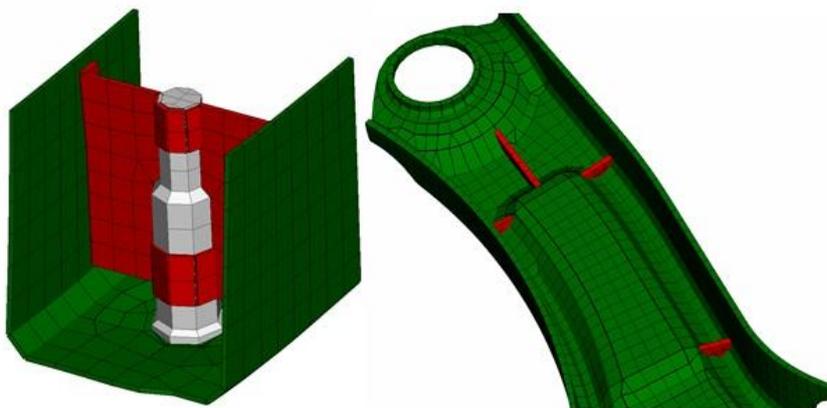


Рис. 3. Предлагаемые изменения конструкции элементов

проведены повторные расчеты. Анализ результатов показал, что подобные изменения положительно сказываются прочностных характеристиках элементов подвески и кузова.

#### ЛИТЕРАТУРА:

1. Official website OICA: <http://www.oica.net/>.
2. Official website EuroNCAP: <http://www.euroncap.com>.
3. Abaqus Theory Manual.
4. Тимошенко С.П., Гудьер Дж. Теория упругости. 560с.
5. Раймпель, Й. Шасси автомобиля. Москва: Машиностроение, 1983г.

СТАБИЛИЗАЦИЯ СИЛОВОГО ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ РОБОТА С ПОВЕРХНОСТЬЮ  
НЕОПРЕДЕЛЁННОГО ПРОФИЛЯ

Использование информации о силах взаимодействия манипулятора робота с объектом существенно расширяет круг задач, которые можно решить с помощью роботов [1,2,3]. Это в свою очередь позволяет снизить требования к точности позиционирования робота, что является крайне важным фактором в различных технологических процессах [4,5].

Рассматривается робот с тремя взаимно-перпендикулярными степенями подвижности. Для такого робота динамическое взаимовлияние степеней подвижности отсутствует. Поэтому в качестве управляемого будем рассматривать движение по вертикали. Движение в горизонтальной плоскости считается заданным. Робот оснащён датчиком положения, связанным с ротором двигателя по координате  $y$ , и силовым сенсором, установленным на конце звена робота. Расчётная схема робота приведена на рис. 1.

Введены следующие обозначения:  $m_1$  - приведённая масса ротора двигателя;  $m_2$  - масса звена,  $c$  - жёсткость кинематической передачи;  $m_s$ ,  $c_s$  - масса и жёсткость сенсора. Уравнения движения робота по вертикали имеют вид:

$$m_1 \ddot{y}_1 + b_1 \dot{y}_1 + c(y_1 - y_2) = u - m_1 g$$

$$m_2 \ddot{y}_2 + b_2 \dot{y}_2 + c(y_2 - y_1) + c_s(y_2 - y_s) = -m_2 g$$

$$m_s \ddot{y}_s + b_s \dot{y}_s + c_s(y_s - y_2) = -m_s g$$

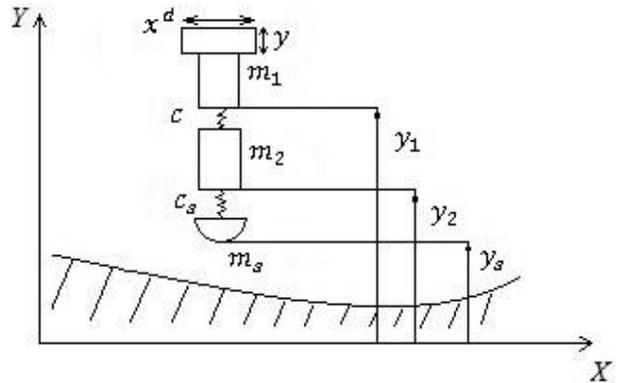


Рис. 1. Расчётная схема робота

Требуется вывести робот на контакт с поверхностью и обеспечить при заданном перемещении робота  $x^d = x^d(t)$  вдоль оси  $X$  постоянное значение  $F^d = \text{const}$  силы прижатия сенсора к поверхности неизвестного профиля. При выходе на контакт робот обрабатывает задание  $y^d = 0$  с помощью PID-регулятора  $u = \frac{k_d p^2 + k_p p + k_i}{p(y^d - y)}$ . При достижении контакта

вводится дополнительная обратная связь по силе упругости сенсора  $F_s = c_s(y_2 - y_s)$  со своим регулятором  $F_s^* = \frac{k}{p(F^d - F_s)}$  при неопределённом возмущении  $y_s = y_s(t)$ .

Зададимся некоторыми предположениями, характерными для задач рассматриваемого типа:  $(m_1 + m_2) \geq 10m_s$ ;  $\omega_c \geq 10T_m^{-1}$ ; где  $\omega_c$  определяет полосу рабочих частот,  $T_m = \frac{m_1 + m_2}{b_1 + b_2}$  -

механическая постоянная времени;  $\omega_s \leq \omega_c$ , где  $\omega_s \approx \sqrt{\frac{c}{m_s}}$  - собственная частота сенсора;  $\omega_0 \geq \omega_c$ , где  $\omega_0 \approx \sqrt{\frac{c}{m_1} + \frac{c}{m_2}}$  - собственная частота робота.

При отсутствии контакта PID-регулятор с обратной связью по координате  $y$  настраивается на максимум полосы рабочих частот. Однако, при появлении контакта из-за неопределённости профиля сила взаимодействия робота с поверхностью может превысить

допустимую. Кроме того, существенно ухудшается динамика замкнутой системы (рис. 2). Это приводит к необходимости, перед введением обратной связи по  $F_s$ , компенсации “плохой” динамики. Для этого воспользуемся методом обратного оператора.

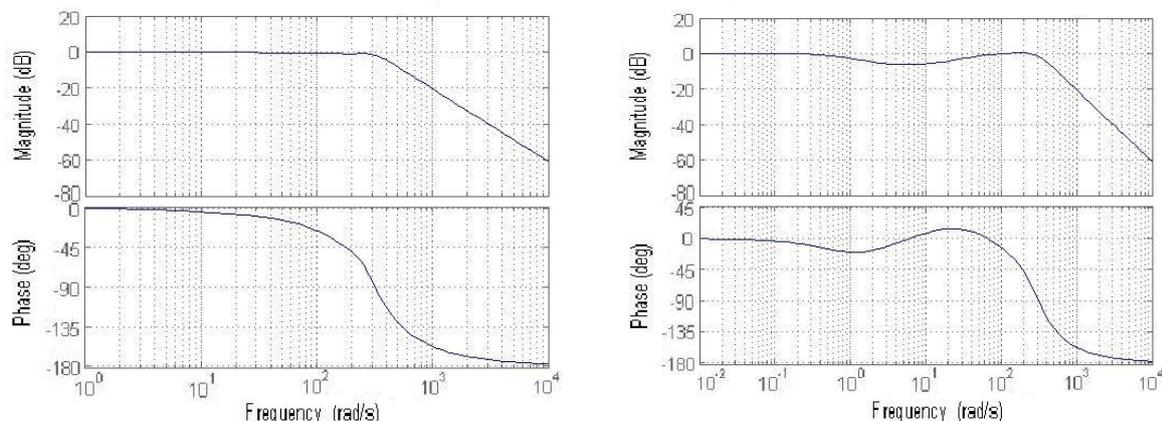


Рис. 2. Диаграммы Бode замкнутой системы по координате  $y$  без контакта(слева) и с контактом(справа)

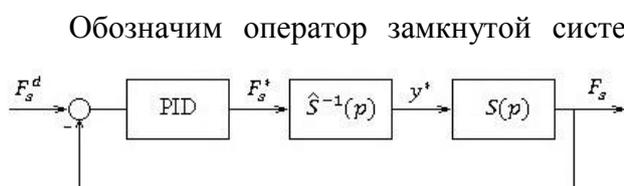


Рис. 3. Структурная схема системы с дополнительной обратной связью по силе

Обозначим оператор замкнутой системы от задания по координате  $y^*$  до силы контакта  $F_s(t)$  через  $S(p)$ . На рис. 3 приведена структурная схема системы с дополнительной обратной связью по силе и физически реализуемым обратным оператором  $\hat{S}^{-1}(p)$ .

Соответствующие диаграммы Бode для разомкнутой (без учёта регулятора) и замкнутой системы (рис. 3) приведены на рис. 4. Для замкнутой системы с дополнительной обратной связью по силе использован интегральный регулятор.

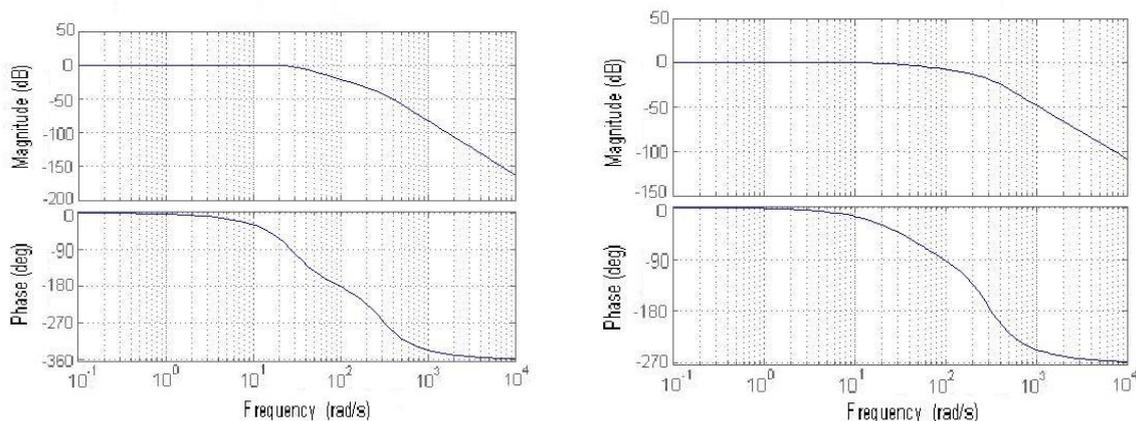


Рис. 4. Диаграммы Бode разомкнутой(слева) и замкнутой(справа) систем с обратной связью по силе

На рис. 5 приведены переходные процессы при отсутствии и наличии контакта. Моделирование процессов проводилось в пакете Matlab/Simulink. Дополнительно учитывалось неточное знание параметров системы и упругость кинематической передачи работа.

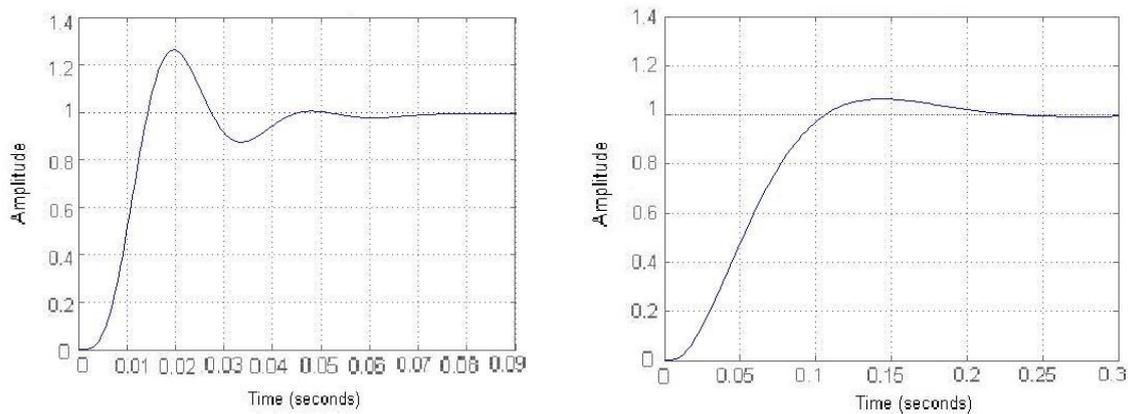


Рис. 5. Переходные процессы  $y_s(t)$  без контакта(слева) и  $F_s(t)$  в случае контакта и обратной связи по силе(справа)

При неопределённом профиле переход от одного режима управления к другому и обратно должен происходить автоматически. Эта задача является предметом дальнейшего исследования.

#### ЛИТЕРАТУРА:

1. Гориневский Д.М., Формальский А.М. Об устойчивости движения упругого манипулятора с обратной связью по силе.// Изв. АН СССР. МТТ, 1985, №3. С. 49-57.
2. Гурфинкель В.С., Девянин Е.А., Ленский А.В., Можжевелов С.Б., Формальский А.М., Шнейдер А.Ю. Силовая обратная связь в системе управления манипулятором// Изв. АН СССР. МТТ, 1987, №6. С. 56-64.
3. Бурдаков С.Ф. О синтезе алгоритмов управления движением робота в условиях неопределённости траектории// Изв. АН СССР. МТТ, 1989, №2. С. 54-59.
4. Fisher W.D., Mujtaba M.S. Hybrid position/force control: a correct formulation// Robotics research, 1992, vol.11, number 4. P.299-311.
5. An C.H., Hollerbach J.M. Kinematic stability issues in force control of manipulators// IEEE Conference on robotics and automation(Raleigh, NC), 1987, p.897-903.

## ПРИМЕНЕНИЕ КОНЕЧНО-ЭЛЕМЕНТНОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ ПРИ РАЗРАБОТКЕ КЛАВИШ ИЗ ГИПЕРУПРУГИХ МАТЕРИАЛОВ

Трудно переоценить значение клавиатур в жизни современного человека, на настоящий момент они являются, пожалуй, самым надежным устройством ввода данных и управления техническими системами, с точки зрения соотношения эксплуатационных характеристик и удобства использования. По типу выключателя различают магнитные, мембранные, механические, резиновые, резинопленочные и некоторые другие клавиатуры. В сфере компьютерных технологий наибольшее распространение получили резинопленочные клавиатуры, использующиеся практически во всех современных настольных ПК и ноутбуках. В клавиатурах, изготовленных по резинопленочной технологии, под пластиковой оболочкой располагается клавиша из гиперупругого материала (как правило, силикона), состоящая из трех основных компонент (рис. 1): толкателя, являющегося ее подвижной частью, мембраны, обеспечивающей отклик клавиши и основания, неподвижной части.

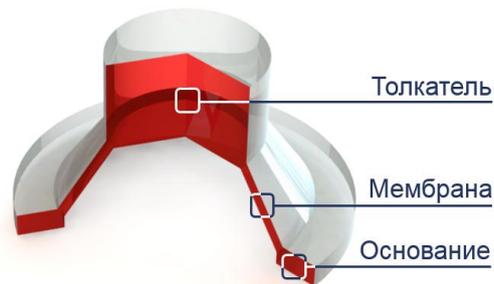


Рис. 1. Клавиша из гиперупругого материала

Тактильные характеристики клавиши определяются ее откликом, выражающимся в зависимости прикладываемого к толкателю усилия нажатия  $F$  от его перемещения  $u$  (рис. 2). Поскольку в процессе нажатия наибольшие деформации достигаются в области тонкой мембраны, отклик в первую очередь будет определяться ее геометрическими параметрами.

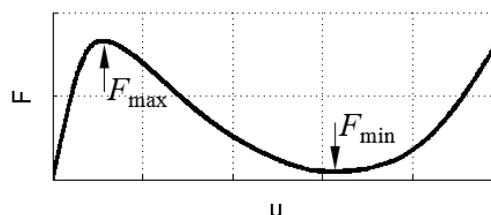


Рис. 2. Типичный график отклика клавиши

На графике (рис. 2) имеют место две характерные точки – максимума  $F_{\max}$  и минимума  $F_{\min}$  этого функционала. Они, в свою очередь, определяют величину «прощелкивания»  $T$  (1):

$$T = \frac{F_{\max} - F_{\min}}{F_{\max}} \cdot 100\% . \quad (1)$$

Для большинства силиконовых клавиш, рекомендуемое значение  $T$  составляет 30 – 40% для обеспечения оптимального тактильного эффекта [1, 2].

График отклика клавиши напоминает решение классической задачи о ферме Мизеса [3]. В последней исследуются формы равновесия (в первую очередь, симметричные) двухстержневого шарнирно опертого узла, к которому приложена внешняя сила (рис. 3). Если считать, что стержни, образующие систему, линейно деформируемы в большом диапазоне перемещений, то в терминах «внешнее усилие»  $F$  – «перемещение центрального узла»  $u$  решение приобретет вид (2):

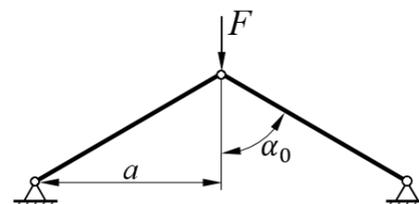


Рис.3. Ферма Мизеса

$$F(u) = 2EA \left[ 1 - \frac{u}{a} \tan \alpha_0 \right] \left[ \left( \tan^2 \alpha_0 + \left( 1 - \frac{u}{a} \tan \alpha_0 \right)^2 \right)^{-0.5} - \cos \alpha_0 \right], \quad (2)$$

где  $E$  – модуль Юнга материала стержней,  $A$  – площадь поперечного сечения,  $a$  – половина расстояния между опорами,  $\alpha_0$  – угол отклонения стержней от вертикали в состоянии покоя.

Задача о ферме Мизеса является простейшей механической моделью, где проявляется эффект «прощелкивания». Для конструкции с параметрами  $E = 210$  ГПа,  $A = 1$  см<sup>2</sup>,  $a = 0.87$  м,

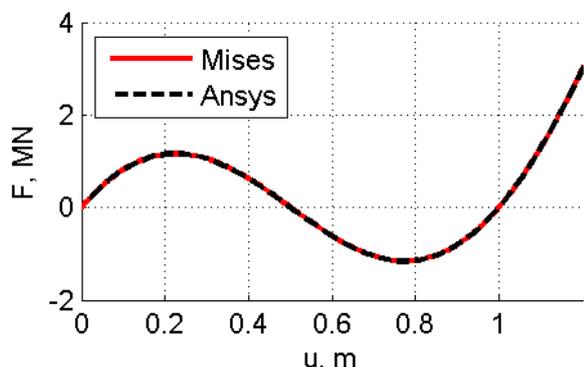


Рис. 4. Теоретический (Mises) и численный (Ansys) графики отклика центрального узла фермы Мизеса

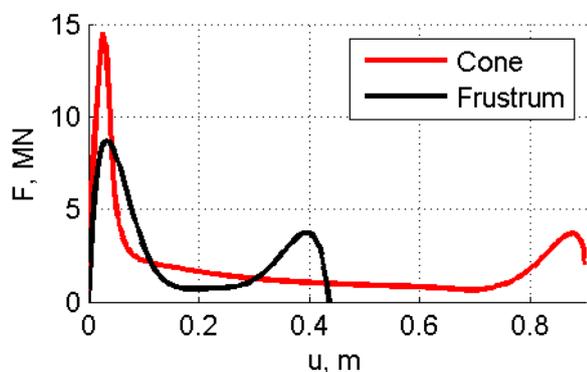


Рис. 5. Графики отклика полной (Cone) и усеченной (Frustrum) конических оболочек

получим проблему о нагружении усеченной конической оболочки. На соответствующем графике отклика (рис. 5) первый пик становится более гладким и пологим ввиду отсутствия жесткой вершины, форма второго остается без существенных изменений. Данная задача представляет собой аналогию нагружения тонкой осесимметричной мембраны (рис. 1, 2), но для линейно-упругого (в большом диапазоне деформаций) материала. Стоит отметить, в литературе для задач такого класса существуют теоретические оценки критических усилий нагружения (напр., [4], [5]), однако получение кривой отклика аналитическими методами представляется крайне затруднительным.

При переходе к задаче о нажатии клавиши, изготовленной из гиперупругого материала, получение кривой отклика осложняется также необходимостью учета больших перемещений, принципиально нелинейным поведением материала и появлением областей контакта мембраны с собой (результат гофрообразования) и другими частями клавиши в процессе нажатия при определенных соотношениях геометрических параметров.

Таким образом, при разработке клавиш из гиперупругих материалов, актуальной проблемой является разработка методики, позволяющей по заданным геометрическим параметрам и материалу клавиш проводить многовариантные расчеты с определением кривой отклика и общего напряженно-деформированного состояния в процессе нагружения.

Обычно для определения НДС, тактильных и др. характеристик клавиш прибегают к проведению натуральных испытаний. Недостатками такого подхода является дороговизна, необходимость наличия определенного оборудования, а также существенные временные

$\alpha_0 = 60^\circ$  теоретически и численно (в системе конечно-элементного анализа Ansys) получены кривые отклика  $F(u)$  центрального узла (рис. 4). Отклонение графиков составило много менее 1% на всем исследуемом участке перемещений  $u$  центрального узла ( $0 \leq u \leq 1.2$  м), иными словами, результаты совпадают с высокой степенью точности.

Представим, что стержни являются образующими, а ось нагружения – осью вращения, в таком случае перейдем от плоской задачи к осесимметричной – о нагружении линейно-упругой конической оболочки в ее вершине. Форма кривой отклика существенно меняется (рис. 5), так, в рассматриваемом диапазоне перемещения вершины, на графике наблюдаются уже две точки максимума. Острота первого пика связана с большой жесткостью вершины, второй пик обусловлен достижением внешним усилием величины, при которой волна деформирования доходит до опор.

Срезав верхнюю часть конуса,

затраты на подготовку моделей для реализации эксперимента. Альтернативой и весомым приложением к натурным испытаниям подчас выступает численное моделирование.

В целях валидации КЭ решения задач такого класса, для осесимметричной клавиши с заданной геометрией, изготовленной из силиконового материала Silastic-T4, экспериментально было определено значение максимального усилия нажатия  $F_{\max}$ . По результатам моделирования, полученное численно значение  $F_{\max}$  совпало с экспериментальным в пределах точности измерения приборов.

В работе проанализировано влияние геометрических параметров клавиш на их тактильные характеристики; предложены модели гиперупругих материалов, наиболее подходящих для КЭ моделирования подобного класса задач (также на основании [6]).

В рамках исследуемой проблемы, на базе системы КЭ анализа Ansys разработан пользовательский интерфейс Keysol, позволяющий проводить многовариантные расчеты процесса нажатия гиперупругой клавиши с построением кривой отклика и НДС (рис. 6). В среде программы также предусмотрено проведение процедуры оптимизации геометрических параметров с точки зрения выбора желаемого максимального усилия нажатия и (или) величины тактильного эффекта.

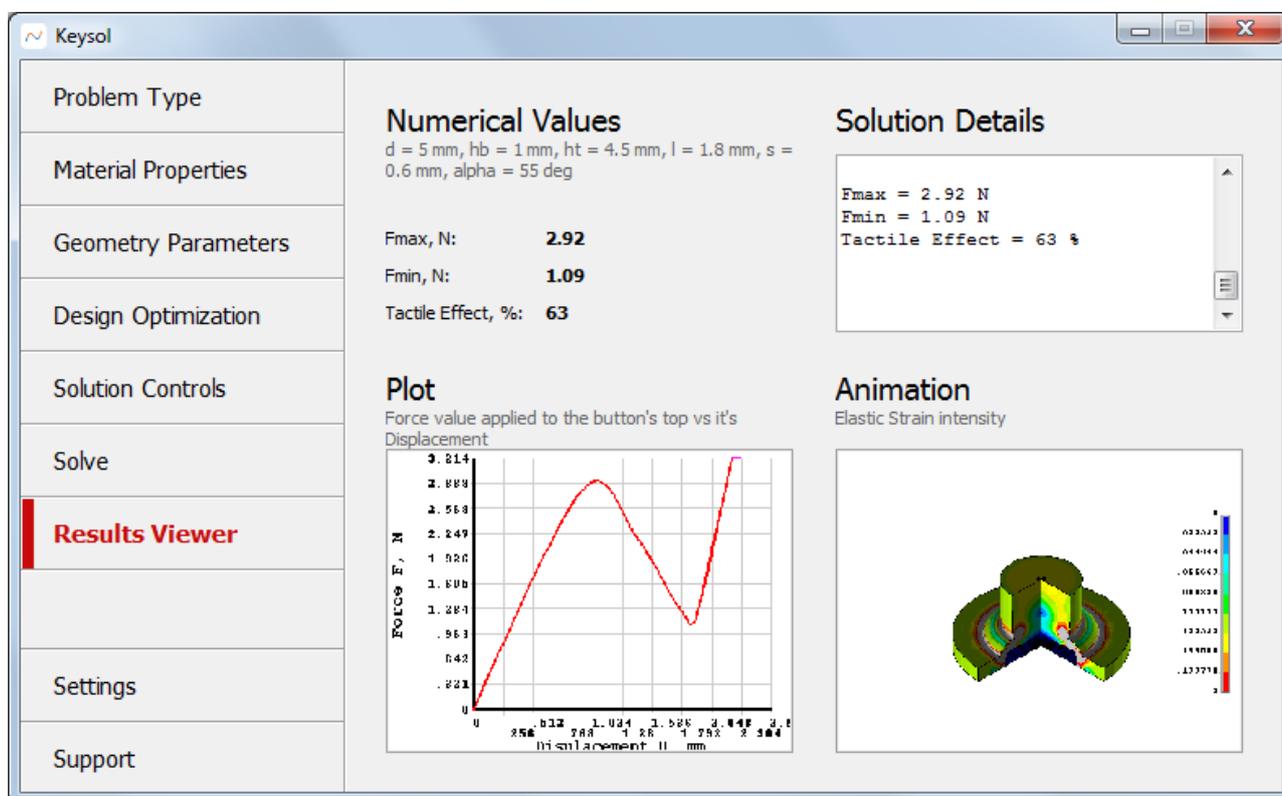


Рис. 6. Интерфейс программы Keysol

#### ЛИТЕРАТУРА:

1. Abatek. Silicone Keypad Design Guide.
2. Diamond Electronics Ltd, Technical Component Distribution. Rubber Keypad Designer's Guide.
3. Я.Г. Пановко, И.И. Губанова. Устойчивость и колебания упругих систем. Современные концепции, парадоксы и ошибки. М.: Наука, 1987.
4. А.С. Вольмир. Устойчивость деформируемых систем. М.: Наука, 1967.
5. Э.И. Григолюк, В.В. Кабанов. Устойчивость оболочек. М.: Наука, 1978.
6. P. Altidis, B. Warner. Analyzing Hyperelastic Materials. // IMPACT Engineering Solutions, Inc. – 2005. [Электронный ресурс]. URL: <http://ewp.rpi.edu/hartford/~ernesto/F2010/EP2/Materials4Students/Hill/ANSYSUsersGroupHyperelasticMaterials.pdf> (дата обращения: 06.10.2014).

**ЧИСЛЕННОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ ВЛИЯНИЯ ФОРМЫ ЗАДНЕЙ КРОМКИ  
КРЫЛОВОГО ПРОФИЛЯ НА ФОРМИРОВАНИЕ ДОРОЖКИ КАРМАНА**

Проводится численное моделирование турбулентного обтекания двумерного крылового профиля НАСА 0007 с усеченной задней кромкой. Исследование выполнено на кафедре гидроаэродинамики СПбПУ в рамках серии работ по изучению процесса формирования вихревой дорожки на задней кромке лопасти гидротурбины (см., например, [1, 2]). При определенных условиях с задней кромки профиля осуществляется попеременный сход крупномасштабных вихрей, формирующих так называемую вихревую дорожку Кармана [3], что оказывает сильное динамическое воздействие на профиль. В работе [3], посвященной влиянию геометрии задней кромки профиля на динамику следа, проводились экспериментальные исследования, в результате которых оказалось, что оптимальной с точки зрения подавления крупномасштабных вихрей формой задней кромки следует признать эллиптическую форму. Придать задней кромке такую форму, однако, технологически сложно. Профиль с усеченной задней кромкой создать гораздо проще, но при этом влияние способа скоса задней кромки на формирование вихревой дорожки Кармана может оказаться неоднозначным. Определение условий, при которых вихревая дорожка Кармана за профилем с усеченной задней кромкой может быть ослаблена или даже полностью подавлена, представляет несомненный практический интерес.

Рассмотрены пять вариантов геометрии усеченной задней кромки, варьируемыми параметрами являются угол скоса задней кромки  $\alpha$  и высота задней кромки  $h$  (рис. 1, слева): 1)  $h = 0,0025 L$ ,  $\alpha = 20^\circ$ ; 2)  $h = 0,005 L$ ,  $\alpha = 10^\circ$ ; 3)  $h = 0,005 L$ ,  $\alpha = 20^\circ$ ; 4)  $h = 0,005 L$ ,  $\alpha = 40^\circ$ ; 5)  $h = 0,0075 L$ ,  $\alpha = 20^\circ$ . Значения числа Рейнольдса, определенного по скорости набегающего потока и длине хорды исходного (не усеченного) профиля  $L$ , выбирались из диапазона  $5 \times 10^5 \leq Re \leq 2 \times 10^7$ . Расчеты проводились на основе модели несжимаемой вязкой жидкости с постоянными физическими свойствами.

Решались нестационарные уравнения Рейнольдса, замыкаемые полуэмпирической моделью турбулентности  $k-\omega$  SST в версии, учитывающей кривизну линий тока и вращение [4]. Расстояние от входной границы расчетной области до носовой точки профиля и от задней кромки профиля до выходной границы принималось равным  $2L$ . На входе в расчетную область задавалось однородное поле скорости и характеристик турбулентности. На выходе ставилось мягкое граничное условие в предположении постоянства давления вдоль границы. На поверхности профиля задавалось условие прилипания. На верхней и нижней границах расчетной области ставилось условие симметрии.

Расчеты выполнены с использованием программного комплекса SINF, разрабатываемого на кафедре гидроаэродинамики СПбПУ [5]. Программный комплекс позволяет проводить двумерные и трехмерные расчеты стационарных и нестационарных течений несжимаемой жидкости или газа, при этом могут использоваться одноблочные или многоблочные структурированные неравномерные сетки, согласованные с границами области течения. Для численного решения уравнений Рейнольдса пакет SINF использует метод конечных объемов. Расчеты проводились со вторым порядком точности дискретизации по пространству и времени.

Использовались блочно-структурированные расчетные сетки. Построение двумерных сеток осуществлялось при помощи разработанной на кафедре программы FLOS. Сетки сгущались к поверхности профиля, обеспечивая во всем диапазоне чисел Рейнольдса величину безразмерного расстояния от центра первой пристенной ячейки до стенки,  $y^+$ , меньше единицы. Было проведено исследование влияния размерности расчетной сетки на получаемое решение, на основании которого типичные размерности сеток составили порядка 80 000 ячеек.

В ходе работы исследовалось влияние шага по времени на получаемое решение. Оказалось, что достаточным является такой шаг, при котором на каждый период колебаний приходится от 80 до 150 шагов по времени, в зависимости от варианта.

В результате расчетов оказалось, что формирование и интенсивность дорожки Кармана, сходящей с задней кромки профиля, существенно зависит от конкретной реализации скоса. В качестве примера на рис. 1 для пяти рассмотренных вариантов геометрии приведены поля завихренности, при  $Re = 2 \times 10^7$ , на которых видно, что изменение формы задней кромки сильно влияет на течение за профилем.

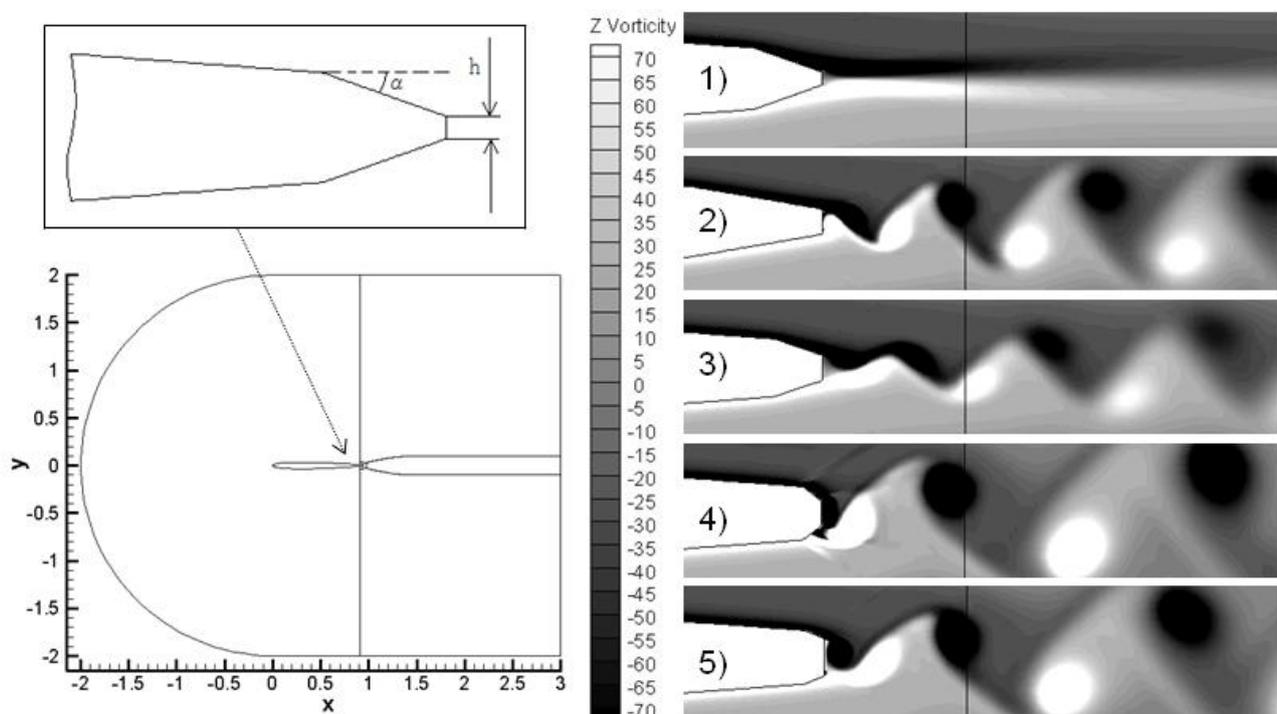


Рис. 1. Геометрия расчетной области (слева) и поля z-компоненты завихренности для пяти вариантов формы задней кромки при  $Re = 2 \times 10^7$  (справа)

Для всех рассмотренных вариантов формы задней кромки влияние числа Рейнольдса на поведение дорожки Кармана, сходящей с задней кромки профиля, показано на рис. 2. На рисунке приводятся распределения амплитуды колебаний давления. Указанная величина рассчитывается как разница между максимальным и минимальным значениями давления в данной точке за период нестационарного процесса. Отметим, что распределение амплитуды давления вдоль поверхности профиля характеризует динамическое воздействие потока на профиль.

Как видно из полей, представленных на рис. 2 для вариантов 2), 4) и 5) вихревая дорожка явно выражена при  $Re = 10^6$  и увеличивает свою интенсивность с ростом числа Рейнольдса. Это означает существенный рост циклической нагрузки на заднюю часть

профиля. Напротив, в варианте 3) осцилляции с ростом  $Re$  несколько снизились. Наконец, при задании геометрических параметров  $h = 0,0025 L$ ,  $\alpha = 20^\circ$  (вариант 1) вихревая дорожка полностью подавляется в диапазоне  $Re 10^6 - 2 \times 10^7$ .

В целом можно заключить, что, изменяя форму задней кромки профиля можно влиять на развитие крупномасштабных нестационарных структур. При определенных условиях вихревая дорожка Кармана за профилем с усеченной задней кромкой может быть полностью подавлена, что означает заметное ослабление динамического воздействия на профиль.

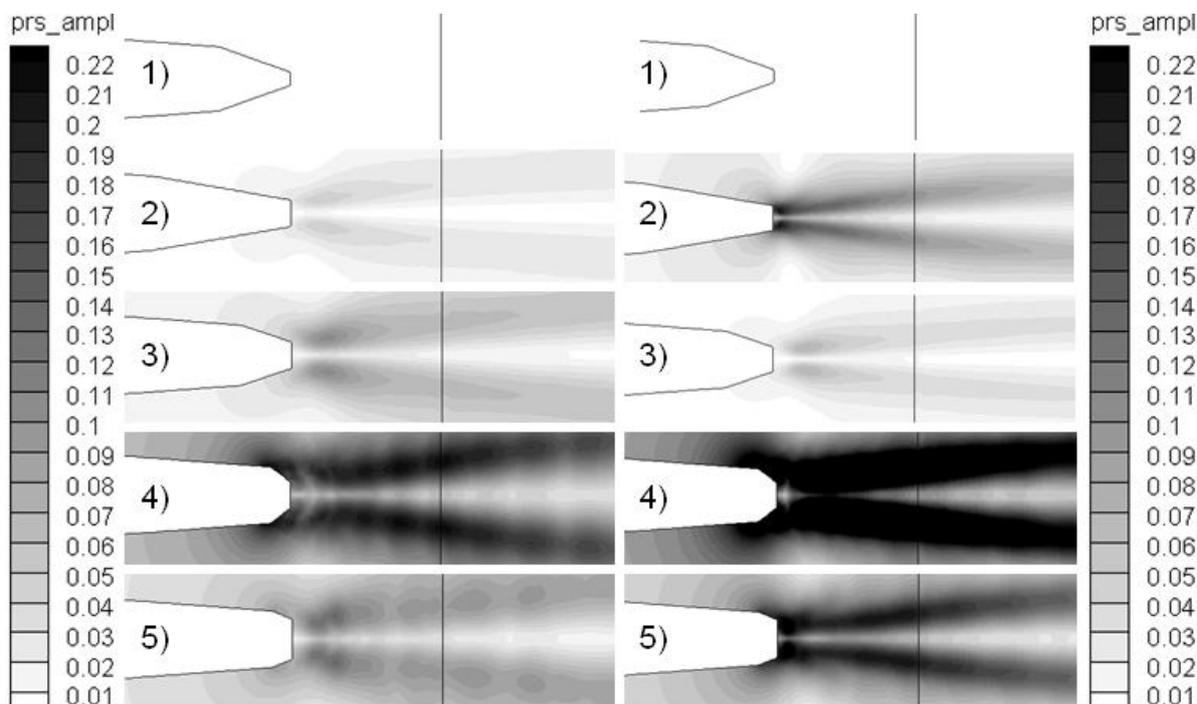


Рис. 2. Поля амплитуды давления при  $Re = 10^6$  (слева) и при  $Re = 2 \times 10^7$  (справа) для пяти вариантов формы задней кромки

#### ЛИТЕРАТУРА:

1. Щур Н.А., Юркина Н.С. Численное исследование силового воздействия вихревой дорожки Кармана на гидропрофиль: влияние геометрии задней кромки / Доклады XIX Школы-семинара молодых ученых и специалистов под руководством академика РАН А.И.Леонтьева. Москва: Издательский дом МЭИ, 2013. С 149-150.
2. Смирнов Е.М., Сыралева М.Н., Щур Н.А. Влияние формы задней кромки гидродинамического профиля на интенсивность вихрей в дорожке Кармана: численное исследование в рамках RANS-подхода / Тезисы докладов Международной научной конференции по механике «VI Поляховские чтения», СПб, 2012, с. 186-187.
2. Zobeiri A. Effect of hydrofoil trailing edge geometry on the wake dynamics. PhD Thesis. Ecole polytechnique federale de Lausanne. Suisse, 2012. 112 p.
4. Smirnov P., Menter F. Sensitization of the SST turbulence model to rotation and curvature by applying the Spalart-Shur correction term // J.of Turbomachinery, Vol.131, Oct.2009. 8 p.
5. Смирнов Е.М., Зайцев Д.К. Метод конечных объемов в приложении к задачам гидрогазодинамики и теплообмена в областях сложной геометрии // Научно-технические ведомости СПбГПУ, №2 (36), 2004, с.70-81.

МОДЕЛИРОВАНИЕ ТЕПЛООВОГО СОСТОЯНИЯ МЕТАЛЛОБЕТОННОГО КОНТЕЙНЕРА  
ДЛЯ ХРАНЕНИЯ И ТРАНСПОРТИРОВАНИЯ ОТРАБОТАВШИХ  
ТЕПЛОВЫДЕЛЯЮЩИХ СБОРОК ЯДЕРНЫХ РЕАКТОРОВ

По данным МАГАТЭ каждый год со всех действующих атомных реакторов мира выгружается порядка 10 – 11,5 тыс. тонн отработавшего ядерного топлива. Менее трети из всего выгруженного топлива перерабатывается и в среднем ежегодно 8 тыс. тонн отработавшего ядерного топлива (ОЯТ) необходимо переводить на длительное хранение. Согласно прогнозам [1], к 2020 году общее количество ОЯТ в мире вырастет до значения в 445 тыс. тонн.

Хранение ОЯТ является необходимым этапом топливного цикла АЭС. После выгрузки из реактора выдержка (хранение) ОЯТ в водной среде в приреакторных бассейнах обеспечивает снижение остаточного тепловыделения и распад наиболее активных короткоживущих радионуклидов, таких как иод-131, ксенон-133 и др.

Время необходимое для этого составляет 1 - 3 года в зависимости от вида ядерного топлива и типа реактора. Первоначально предполагалось, что после окончания требуемого срока выдержки, отработавшее ядерное топливо будет транспортироваться на завод по радиохимической переработке.

Отсутствие по экономическим причинам переработки ОЯТ реакторов РБМК-1000 привело к необходимости увеличения объемов хранения ОЯТ и к увеличению сроков хранения, который в настоящее время достигает 30 – 35 лет, в зависимости от времени выгрузки из реактора.

Обращение к контейнерам как к средствам для «сухого» хранения ОЯТ было обусловлено несколькими обстоятельствами: возможностью их размещения прямо на территории АЭС, или на непосредственно прилегающей к ней территории, низкими капитальными затратами на сооружение контейнерного хранилища, возможностью поэтапного ввода мощностей (изготовления требуемого количества контейнеров в течение определенного периода времени) [2].

Металлобетонные контейнеры, входящие в состав комплекта хранения УКХ-109, разработаны для длительного (до 40 – 50 лет) «сухого» способа хранения ОЯТ реактора РБМК-1000. Эти контейнеры отвечают как нормам безопасного хранения и транспортирования ОЯТ в Российской Федерации, так и требованиям МАГАТЭ [3]. Одновременно с разработкой конструкции контейнеров были выполнены работы по созданию отечественной технологии подготовки ОЯТ РБМК к «сухому» контейнерному хранению, учитывающей конструктивные особенности транспортно-упаковочных комплектов и конкретного вида топлива, а также условия обращения с ним.

Действующие требования к ОЯТ РБМК-1000, подлежащему к переводу на сухое хранение, сформулированы в отраслевом стандарте "Отработавшие тепловыделяющие сборки энергетических реакторов. Сухое хранение ОТВС РБМК-1000 и ВВЭР-1000. Технические требования". ОСТ 95-10585-2003 [4], согласно которому минимальное время хранения ОТВС в воде, предшествующее постановке на сухое хранение, должно составлять 10 лет. Мощность остаточного тепловыделения одного пучка твэлов не должна превышать 54 Вт. Температура оболочек твэлов в процессе хранения не более 300 °С. При этих условиях установлен допустимый срок сухого хранения 50 лет.

В настоящее время в бассейнах выдержки ХОЯТ ЛАЭС хранится около 30 000 отработавших тепловыделяющих сборок реакторов РБМК-1000. Приблизительно одну треть из них составляет топливо со сроком выдержки менее 10 лет. От 10 до 25 % (по различным оценкам) оставшихся ОТВС, срок выдержки которых превышает 10 лет, являются некондиционными и не подлежат переводу на «сухое» хранение.

Из приведенных данных следует, что при соблюдении требований ОСТ 95-10585-2003 через 5 - 6 лет после выхода отделения разделки на проектную мощность 3600 ОТВС в год [5] (что может быть достигнуто на Ленинградской атомной станции в текущем году) возникнет вероятность остановки производственного и технологического цикла по причине исчерпания подлежащего переводу на «сухое» контейнерное хранение кондиционного топлива. При этом в бассейнах ХОЯТ ЛАЭС останется еще значительное число кондиционных ОТВС со сроком выдержки от 9-ти до 3-х лет.

Решению данной проблемы может способствовать обоснованное снижение требований к максимальной мощности остаточного тепловыделения ОЯТ, допускаемого к контейнерному хранению. В связи с чем актуальным является исследование теплового состояния металлобетонного контейнера ТУК-109, загруженного ОЯТ с суммарным остаточным тепловыделением более 7,7 кВт на контейнер.

В настоящей работе с помощью программного пакета ANSYS FLUENT построена математическая модель и выполнен расчетный анализ теплового состояния металлобетонного контейнера ТУК-109, загруженного ОЯТ с различными сроком выдержки от 5-ти до 10-ти лет.

Решены следующие задачи:

1. найдено стационарное распределение температуры в МБК, загруженном отработавшим ядерным топливом со сроками выдержки: 5, 7,5 и 10 лет;
2. определен темп разогрева контейнера, загруженного отработавшим ядерным топливом со сроком выдержки 7,5 лет;
3. выполнен сравнительный анализ условий транспортирования и длительного промежуточного хранения металлобетонного контейнера, загруженного ОЯТ менее 10-летнего срока выдержки.

Созданная в программном пакете ANSYS FLUENT численная модель позволяет получить информацию, необходимую для понимания проходящих в МБК тепловых процессов. Это особенно важно в условиях, когда отсутствуют экспериментальные данные о температурном распределении внутри контейнера.

В работе показано, что при загрузке контейнера отработавшим ядерным топливом с выдержкой от 7 до 10 лет, расчетная стационарная температура оболочек твэлов не превышает допустимого значения, заданного исходя из требований безопасного хранения ОЯТ.

Согласно результатам расчета, перегрев ампул с ОЯТ выше 300°C в штатных условиях эксплуатации МБК вероятен только в транспортном положении контейнера при его загрузке отработавшим ядерным топливом 5-летней выдержки.

Результаты расчетов показали возможность использования данного типа контейнеров для хранения ОЯТ со сроком выдержки семь и более лет. Полученные данные могут быть учтены при разработке новых проектных требований и стандартов для перевода ОЯТ РБМК-1000 с «мокрого» на «сухое» контейнерное хранение.

#### ЛИТЕРАТУРА:

1. IAEA-TECDOC-1532 Operation and Maintenance of Spent Fuel Storage and Transportation Casks/Containers. Vienna, Austria, 2007.
2. Multi-purpose container technologies for spent fuel management. IAEA-TECDOC-1192, December 2000, Vienna, Austria.

3. Гуськов В.Д. Опыт создания Российских двухцелевых упаковочных комплектов на основе металлобетонных контейнеров // Материалы 3-й Межд. выст. и конф. «Радиационная безопасность: транспортирование радиоактивных материалов», 31 октября – 4 ноября 2000 г., Санкт-Петербург. – С. 111-114.
4. Отработавшие тепловыделяющие сборки энергетических реакторов. Сухое хранение ОТВС РБМК-1000 и ВВЭР-1000. Технические требования. - ОСТ 95-10585-2003.
5. Отделение разделки ОТВС и загрузки ОЯТ в МБК. Технологический процесс и комплекс оборудования. Пояснительная записка к техническому проекту // ЦКБМ. 1621-00-0005 ПЗ. Для ЛАЭС, 2001, СПб.

УДК 536.46

Е.С. Коковина, А. С. Цой, А. Ю. Снегирёв  
(Санкт-Петербургский государственный политехнический университет)

### СОВМЕСТНОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ТУРБУЛЕНТНОГО ПЛАМЕНИ И ПИРОЛИЗА ГОРЮЧЕГО МАТЕРИАЛА

Современное состояние теории и методов моделирования динамики пожара характеризуется раздельным рассмотрением процессов в газофазном пламени и горючем материале. Несмотря на значительный опыт теоретического анализа и численного моделирования как турбулентного диффузионного горения, так и пиролиза горючих материалов, их совместное рассмотрение применительно к практически важным материалам в условиях пожара остаётся нерешённой задачей [1].

Цель данной работы – интеграция существующего опыта моделирования каждого из перечисленных процессов в рамках комбинированной модели и отработка методических аспектов совместного моделирования [2]. В работе рассматривается нагрев, пиролиз, воспламенение и горение полностью газифицирующегося термопластика (полиметилметакрилат). Результаты совместного численного моделирования сравниваются с опубликованными экспериментальными данными. На основании результатов расчётов делается заключение о точности расчётов самоподдерживающегося горения материала с учётом тепловой обратной связи. Кроме того, выполняется сравнение современных средств численного моделирования пожаров, а именно двух версий компьютерного кода FDS [3, 4].

Для расчёта трёхмерных турбулентных течений, возникающих при горении и распространении дыма, в FDS численно решается система уравнений Навье-Стокса, записанная в существенно дозвуковом приближении. В основе численного алгоритма лежит процедура расчёта поля модифицированного давления, обеспечивающего выполнение уравнения неразрывности. Для моделирования турбулентности применяется метод крупных вихрей с использованием статической модели Смагоринского (FDS 5.5 [3]) и модели Дидорфа (FDS 6 [4]). Скорости расходования реагентов и локальная мощность тепловыделения в турбулентном пламени определяются с помощью подсеточной модели диссипации вихрей. Концентрации реагентов выражаются через пассивный скаляр - смесевую долю, для которой решается специальное уравнение переноса. Рассматривается одностадийная необратимая реакция окисления горючего газа, в которой задаётся доля атомов углерода, переходящая в сажу и монооксид углерода. Эмиссия, перенос и поглощение теплового излучения моделируется уравнением переноса энергии излучения. Спектральные свойства продуктов сгорания описываются в рамках приближения серой среды или метода широкой полосы.

Используемые расчётные коды имеют существенные отличия используемых компонентов модели (разные подсеточные модели турбулентности, методы расчёта эмиссии

теплового излучения и др.) и численных алгоритмов (прежде всего – методы монотонной аппроксимации конвективных членов).

В данной работе рассматривается турбулентное диффузионное горение над горизонтальной поверхностью квадратной пластины полиметилметакрилата (ПММА). Нагрев поверхности пластины осуществляется внешним радиационным тепловым потоком и тепловым потоком из пламени. По мере нагрева материала происходит его термическое разложение с образованием горючего газа. Ширина пластины  $D$  принимает значения от 0.1 до 2 м. Толщина пластины выбрана достаточно большой, чтобы исключить влияние теплообмена на тыльной поверхности. Нагреваемая поверхность пластины находится в центре нижней грани кубической расчётной области. Данная грань представляет непроницаемую твёрдую поверхность, температура которой остаётся равной начальному значению  $T_0$ . Остальные грани расчётной области открыты для движения газа. В данной работе расчёты выполнялись в расчётной области с размерами от  $0.7 \times 0.7 \times 0.7$  м до  $5.8 \times 5.8 \times 5.8$  м (в зависимости от размеров очага) на блочно-структурированных декартовых расчётных сетках со сгущением в зоне пламени и теплового факела. Размер ячеек определяли с учётом известных требований по разрешению структуры естественно-конвективного пламени [3, 4]. Общее число ячеек составляло 512 тысяч.

С учётом имеющихся экспериментальных данных, в работе представлены результаты моделирования следующих сценариев.

1. Турбулентное диффузионное пламя над поверхностью горючего материала с фиксированным расходом горючего газа. В данной серии вычислений исследуется влияние размера очага на расчётные распределения осреднённой по времени температуры вдоль оси пламени и на расчётные значения теплового потока, падающего на поверхность горючего материала.

2. Моделирование условий натуральных испытаний квадратной пластины горючего материала в коническом калориметре. При этом выполняется расчёт зависимости времени задержки зажигания, температуры нагреваемой поверхности в момент зажигания и скорости выгорания от внешнего теплового потока в диапазоне  $20 - 100$  кВт/м<sup>2</sup>.

3. Моделирование самоподдерживающегося горения в отсутствие внешнего теплового потока. Анализируется зависимость установившейся скорости выгорания от размера очага, а также выполняется сравнение с данными измерений.

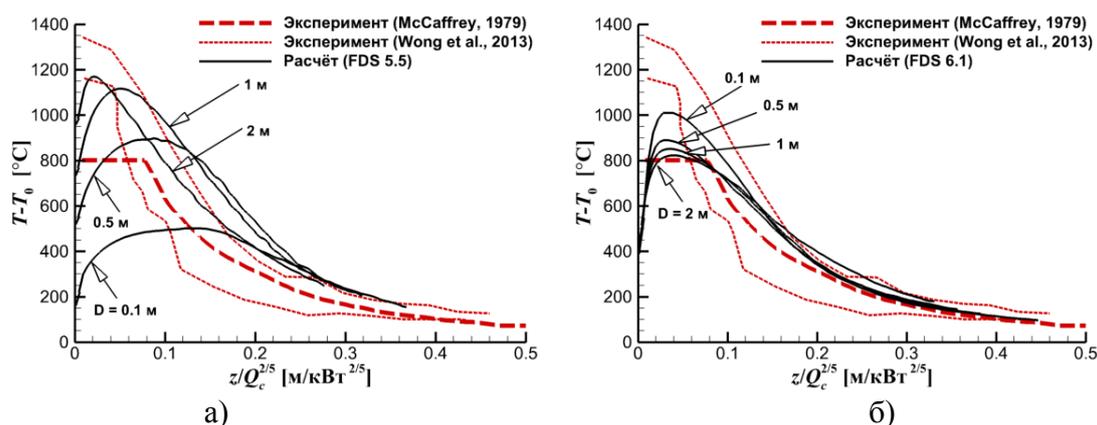


Рис. 1. Осреднённая по времени температура на оси пламени. Пунктирные линии – экспериментальные данные [5, 6], сплошные линии – численный расчёт с помощью: а) – FDS 5.5, б) – FDS 6.1. Приведены размеры очага, использованные в расчётах

При моделировании турбулентного диффузионного пламени над поверхностью материала с фиксированной скоростью выгорания (сценарий 1,  $500 \text{ кВт/м}^2$ ) получены средние по времени значения температуры и скорости на оси пламени, а также средняя высота пламени и средний тепловой поток, падающий на поверхность образца. Сравнение результатов расчётов с имеющимися экспериментальными данными, приведённое на рис. 1, показывает, что использование модели и кода FDS 5.5 приводит к значительно заниженным расчётным значениям температуры в зоне пламени при малых размерах очага (рис. 1, а). В то же время, результаты расчётов с помощью FDS 6.1 оказываются значительно менее чувствительными к размерам очага и лучше согласуются с результатами измерений (рис. 1, б). Это указывает на то, что отличия в используемых моделях и расчётных алгоритмах имеют существенное значение.

При моделировании зажигания ПММА внешним тепловым потоком (сценарий 2) выявлено, что рассчитанные значения температуры поверхности пластины и времени задержки зажигания согласуются с экспериментальными данными. При этом в случае использования FDS 5.5 оказалось, что, несмотря на адекватное воспроизведение значения скорости выгорания при установившемся горении в области средних значений теплового потока, скорость выгорания при малых тепловых потоках занижена. Это приводит к тому, что FDS 5.5 не позволяет воспроизвести самоподдерживающееся горение очагов малых размеров (менее 1 м) в отсутствие внешнего теплового потока.

Расчёты самоподдерживающегося горения (сценарий 3) более крупных очагов ( $D = 2 \text{ м}$ ) с помощью FDS 5.5 показали, что расчётная средняя массовая скорость выгорания значительно больше экспериментальной [2].

Основной причиной выявленного рассогласования между результатами численного моделирования и экспериментальными данными является трудность моделирования пламени вблизи поверхности очага. В этой области пламя не является полностью турбулентным, а основным механизмом теплопередачи из оптически тонкого пламени к поверхности очага является теплопроводность. В связи с этим в приповерхностной области требуется высокое пространственное разрешение тонкой зоны реакции, где достигается максимальная температура. В свою очередь, разрешение внутренней структуры диффузионного пламени требует учесть конечную скорость реакций, протекающих при горении.

Требования к пространственному разрешению зоны реакции ламинарного диффузионного пламени значительно превышают те, которые позволяют воспроизводить осреднённые характеристики турбулентного пламени и теплового факела вдали от горящей поверхности. Это значит, что существующие рекомендации по пространственной дискретизации расчётной области [3, 4] недостаточны для совместного моделирования турбулентного горения и пиролиза горючего материала.

В данной работе установлено, что усовершенствования, внесённые в модель и код FDS 6.1, приближают результаты расчётов к экспериментальным данным.

#### ЛИТЕРАТУРА:

1. McGrattan K., McDermott R., Floyd J., Hostikka S., Forney G., Baum H. Computational Fluid dynamics modelling of fire // Int. J. of Computational Fluid Dynamics, Vol. 26, No 6-8, 2012, pp. 349-361.
2. Коковина Е.С. Совместное моделирование пиролиза горючих материалов и турбулентного горения продуктов газификации. Выпускная работа бакалавра по направлению 140400.62 – Техническая физика. СПбГПУ, 2014. – 61 с.
3. McGrattan K., McDermott R., Hostikka S., Floyd J. Fire Dynamics Simulator (Version 5). Technical Reference Guide. NIST Special Publication 1019-5, 2010. – 108 p.
4. McGrattan K., Hostikka S., McDermott R., Floyd J., Weinschenk C., Overholt K. Fire Dynamic Simulator Technical Reference Guide. NIST Special Publication 1018 Sixth Edition, 2014. – 151 p.

5. Wong W.C.-K., Dembsey N.A., Alston J., Lautenberger C. A multi-component dataset framework for validation of CFD flame spread models // J. of Fire Protection Engineering, Vol. 23, No 2, 2013, pp. 85–134.
6. McCaffrey B.J. Purely buoyant diffusion flames: some experimental results. NBSIR 79-1910, National Bureau of Standards, Washington D.C. 1979. – 49 p.

УДК 532.517

Е.В. Колесник, Д.О. Панов, Е.М. Смирнов  
(Санкт-Петербургский государственный политехнический университет)

## ПРИМЕНЕНИЕ МНОГОУРОВНЕВОГО АЛГОРИТМА ОПТИМИЗАЦИИ ДЛЯ МИНИМИЗАЦИИ ГИДРАВЛИЧЕСКИХ ПОТЕРЬ В ПЛОСКОМ КАНАЛЕ С ПОВОРОТОМ

Целью исследования является накопление опыта использования методов математической оптимизации в сочетании с технологиями вычислительной гидродинамики. Рассматривается численное моделирование двумерного ламинарного течения в плоском канале с поворотом на 90 градусов. Решение задачи оптимизации осуществляется с целью минимизации гидравлических потерь, что важно, например, при конструировании теплообменников или проектировании систем охлаждения лопаточных машин.

В работе применяется метод строгой математической оптимизации, включающий в себя параметризацию геометрии, выбор целевой функции, а затем поиск минимума целевой функции на заданном множестве параметров. Используется двухуровневый алгоритм оптимизации [1] – сочетание алгоритма случайного поиска [2] и алгоритма аппроксимации на основе теории случайных функций [3]. Выбор столь сложного алгоритма оптимизации связан со спецификой задач вычислительной гидродинамики, для которых расчет одного значения целевой функции требует длительного времени. Для таких задач наиболее перспективными представляются многоуровневые алгоритмы оптимизации (рис. 1). В начале, с помощью методики планирования эксперимента, генерируется начальный набор параметров и рассчитывается значение целевых функций для них. После этого получившаяся база данных аппроксимируется специальной универсальной функцией, осуществляется поиск минимума функции аппроксимации, где рассчитывается значение целевой функции, и получившаяся точка добавляется в базу данных. Для нахождения глобального минимума делается  $N$  итераций описанного выше процесса. Такой алгоритм оптимизации позволяет существенно сократить необходимое количество точек для получения решения.

Для реализации алгоритма случайного поиска и алгоритма аппроксимации на основе теории случайных функций была написана программа на языке C++, позволяющая проводить оптимизационные расчеты в автоматическом режиме. Программа имеет графический интерфейс и позволяет пользователю контролировать процесс оптимизации. Таким образом, задача оптимизации формы канала решается с минимальным участием пользователя.

Целевая функция в расчетах определялась как коэффициент полного гидравлического сопротивления  $\xi = \Delta p_0 / (\rho U^2)$  где  $\Delta p_0$  – изменение полного давления на всем участке трубы. Поиск оптимального решения идет одновременно и для целевой функции, равной коэффициенту местного сопротивления  $\xi_m = \xi - (L/h) \cdot 24/Re$ , где  $L$  длина канала,  $h$  высота канала,  $Re$  – число Рейнольдса, построенное по средней скорости и высоте канала  $h$ . В рассмотренном диапазоне значений  $Re$  режим течения может быть как стационарным, так и нестационарным; при реализации нестационарного режима значение коэффициента сопротивления определялось путем осреднения по продолжительной выборке.

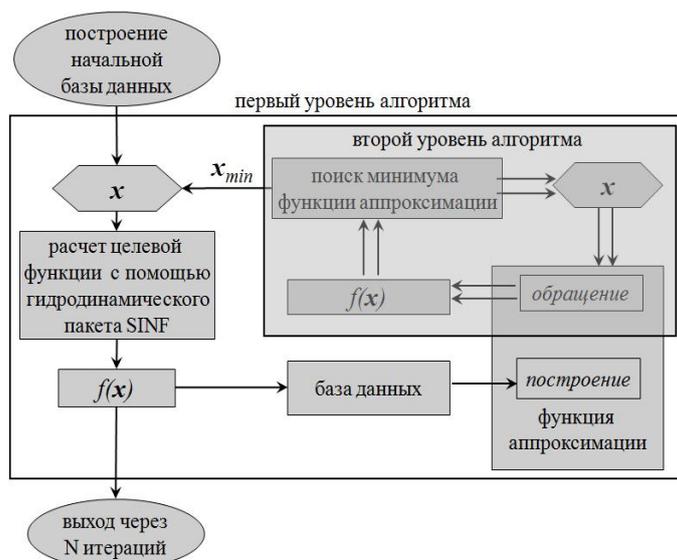


Рис. 1. Схема алгоритма оптимизации

Расчеты стационарных и нестационарных течений в канале с поворотом проводились с использованием программного комплекса SINP, разрабатываемого на кафедре гидроаэродинамики СПбПУ [4]. Численное решение уравнений Навье-Стокса осуществлялось со вторым порядком точности дискретизации по пространству и времени. Были проведены исследования сеточной независимости решения, влияния границ расчетной области и шага по времени.

Для уменьшения коэффициента сопротивления необходимо менять форму канала в повороте и за поворотом, что позволит влиять на значение коэффициента трения, максимальное значение которого наблюдается на внутренней стенке канала в повороте, и на формат зоны рециркуляции за поворотом. Поэтому для деформации канала был выбран фиксированный участок, в который входил сам поворот, небольшой участок до поворота и участок канала за поворотом, длина которого больше длины зоны рециркуляции. Форма канала менялась за счет изменения формы его внутренней стенки (рис.2).

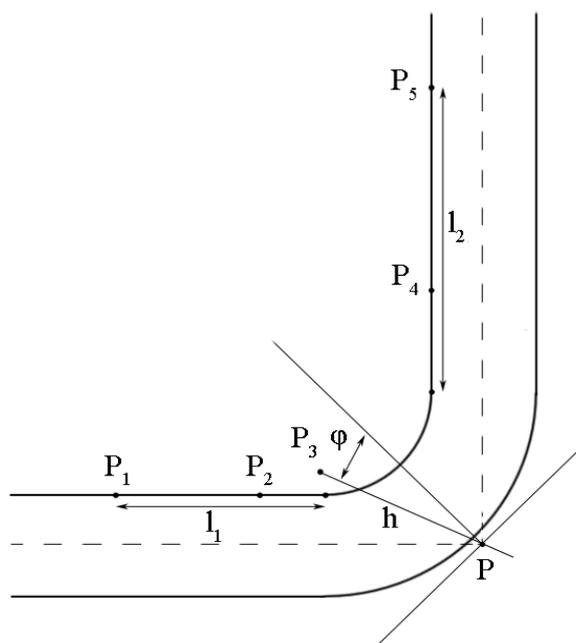


Рис.2. Построение опорных точек для кривой Безье

Для деформации внутренней стенки канала использовались кривые Безье четвертого порядка [5] – параметрические кривые, для построения которых необходимо задать пять опорных точек:  $\mathbf{B}(t)=(1-t)^4 \cdot \mathbf{P}_1 + 4t(1-t)^3 \cdot \mathbf{P}_2 + 6t^2(1-t)^2 \cdot \mathbf{P}_3 + 4t^3(1-t) \cdot \mathbf{P}_4 + t^4 \cdot \mathbf{P}_5$ , для изменения формы менялось расположение только одной опорной точки  $\mathbf{P}_3$ . Положение точки  $\mathbf{P}_3$  определяется двумя параметрами  $h$  и  $\varphi$  (рис. 2). Этот подход позволил описать широкий диапазон форм всего двумя параметрами. Деформация исходной структурированной сетки осуществлялась в автоматическом режиме с помощью специально написанной утилиты.

В результате многовариантных оптимизационных расчетов в широком диапазоне  $Re$  для каналов с различными радиусами поворота  $r$  были получены поля функции аппроксимации. Пример решения для  $Re=600$ ,  $r=0.25$  представлен на рисунке 3, где показано поле функции аппроксимации и график сходимости к оптимальному решению – зависимость значения  $\xi$  от числа итераций. На поле функции аппроксимации обозначены точки начальной базы данных (база данных размером  $4 \times 4$  была построена методом полных факториалов [6] в области  $-2 \leq h \leq 5$ ,  $-60 \leq \varphi \leq 60$ ), точки, которые добавляются в ходе применения алгоритма оптимизации (черные точки) и найденный минимум (белая точка). Начальный участок графика сходимости соответствует значению  $\xi$  в точках начальной базы данных.

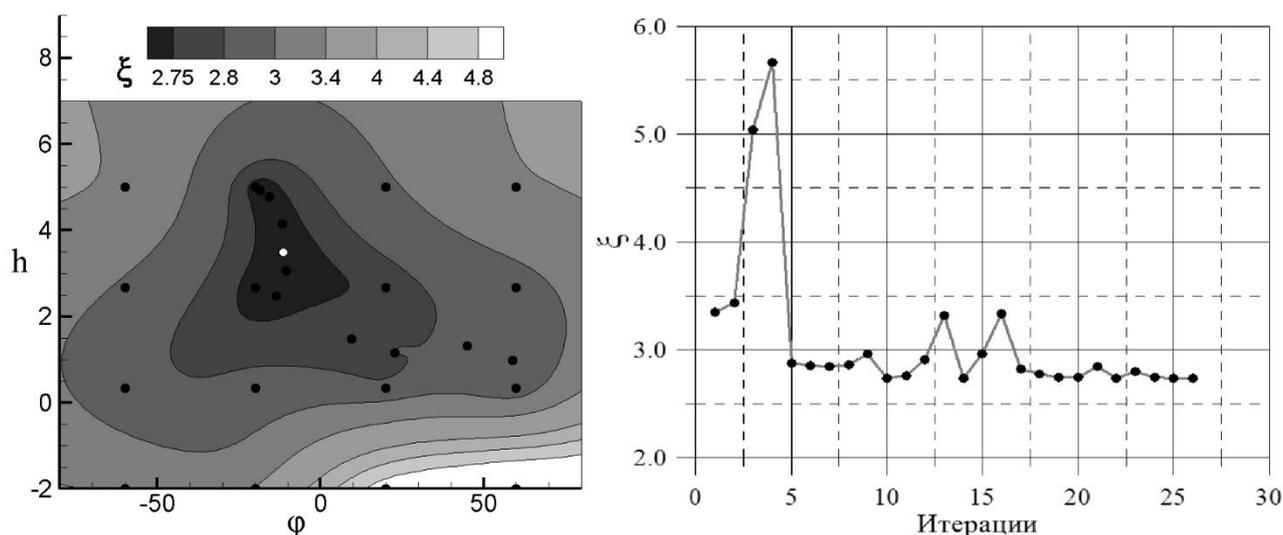


Рис.3. Поле функции аппроксимации (слева) и график сходимости к оптимальному решению (справа) для  $Re=600$ ,  $r=0.25$

Для всех рассмотренных вариантов в результате оптимизации удалось существенно снизить значение местного коэффициента сопротивления, при этом во всех случаях оптимальная форма была получена расширением канала в повороте. Результаты показали высокую эффективность алгоритма применительно к задачам гидродинамики: во всех случаях получить точный минимум целевой функции удавалось, рассчитывая течение лишь для нескольких вариантов (почти для всех вариантов требовалось меньше 30 расчетов для получения точного минимума).

#### ЛИТЕРАТУРА:

1. Thevenin D., Janiga G. Optimization and Computational Fluid Dynamics. – Springer, 2008. – 293 p.
2. Абакаров А.Ш., Сушков Ю.А. О численном подходе к получению Парето-оптимальных альтернатив. – Наука в образовании: Электронное научное издание, 2008.
3. Бахвалов Ю.Н. Многомерная интерполяция и аппроксимация на основе теории случайных функций. – <http://www.machinelearning.ru> (дата обращения: 10.11.2014).

4. Смирнов Е.М., Зайцев Д.К. Метод конечных объемов в приложении к задачам гидрогазодинамики и теплообмена в областях сложной геометрии // Научно-технические ведомости, №2(36). – 2004. – С.70-81.
5. Роджерс Д., Адамс Дж. Математические основы машинной графики. – М.: Мир, 2001. – 555 с.
6. Isight 4.0 User Guide. Dassault Systemes, 2009. – 178p.

УДК 536.25

И.М. Колесник, Н.Г. Иванов  
(Санкт-Петербургский государственный политехнический университет)

### ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ СВОБОДНОЙ КОНВЕКЦИИ В ПРЯМОУГОЛЬНЫХ ПОЛОСТЯХ: ЭФФЕКТ ЧАСТИЧНОГО НАГРЕВА НИЖНЕЙ СТЕНКИ

Свободноконвективные течения являются неотъемлемыми элементами многих природных процессов, наблюдаемых в атмосфере и океанах Земли, а также течений, реализуемых в различных технологических устройствах (системы охлаждения, отопления и т.д.). Исследование особенностей свободноконвективных течений и конвективного теплообмена представляется весьма актуальной задачей. Свободная конвекция широко изучается как экспериментально, так и численно. Экспериментальные исследования обычно требуют более существенных затрат по сравнению с расчетами. Кроме того, численное моделирование предоставляет большие возможности для проведения модельных исследований, направленных на изучение влияния того или иного параметра, определяющего течение.

Одна из распространенных модельных постановок для задач свободной конвекции – течение в прямоугольной полости. В такой геометрической постановке можно выделить два основных способа подогрева: свободная конвекция в полости с разнонагретыми вертикальными стенками, обычно поддерживающимися при постоянной температуре [1-3]; свободная конвекция в полости с подогреваемой нижней и охлаждаемой верхней стенками [1, 4]. Кроме этого, в литературе встречаются и другие, менее распространенные способы подогрева: объемный источник тепла [5]; подогрев нижней стенки и охлаждение одной из вертикальных стенок [6]; подогрев одной из вертикальных стенок и охлаждение нижней стенки [7] и др.

В работе рассматриваются квадратные полости, в которых нижняя стенка полностью или частично подогревается, а одна из вертикальных стенок охлаждается. Мотивом к постановке и выполнению данного исследования послужили статья Cianfrini et al. [6], где используется такой способ задания тепловых граничных условий при изучении свободной конвекции воздуха (число Прандтля  $Pr = 0.71$ ). В настоящей работе, наряду с воздухом, изучается свободная конвекция жидкого металла (галлия,  $Pr = 0.0208$ ). Исследование свободной конвекции в жидких металлах представляется весьма актуальным применительно к задачам ядерной энергетики. Жидкие металлы применяются в качестве теплоносителя в перспективных атомных реакторах. Это связано с тем, что у жидких металлов есть ряд преимуществ по сравнению с традиционными теплоносителями: высокая теплопроводность и температуропроводность, высокая температура кипения, радиационная стойкость и т.д.

Цель настоящей работы – параметрическое исследование структуры конвекции и характеристик теплоотдачи в квадратных полостях, в которых нижняя стенка полностью или частично подогревается, а одна из вертикальных стенок охлаждается, при двух различных значениях числа Прандтля.

Геометрия рассматриваемой области и тепловые граничные условия представлены на рис. 1. Прямоугольная полость с отношением длин сторон  $W/H = 1$ , заполнена воздухом или жидким галлием. Область нагрева длиной  $L$  (дискретный источник тепла), размещенная симметрично относительно центра нижней стенки, поддерживается при температуре  $T_h$ , а охлажденная левая вертикальная стенка – при температуре  $T_c$ . Остальные части нижней стенки, а также верхняя и правая вертикальная стенки полости, считаются теплоизолированными.

Расчет свободной конвекции и предварительная постпроцессорная обработка проводились с помощью разработанного на кафедре гидроаэродинамики СПбПУ программного пакета Flow Studio (FLOS), в основе которого лежит гидродинамический решатель общего назначения SINF [8]. Программный комплекс позволяет проводить двумерные или трехмерные расчеты стационарных и нестационарных течений несжимаемой жидкости или газа с использованием метода конечных объемов. Область покрыта неравномерной структурированной сеткой. Было проведено предварительное исследование влияния на получаемое решение размерности расчетной сетки: выполнена оценка сеточной сходимости по локальному распределению числа Нуссельта на холодной стенке. Признано, что для рассматриваемого класса течений сетка размерностью  $60 \times 60$  ячеек обеспечивает достаточную точность.

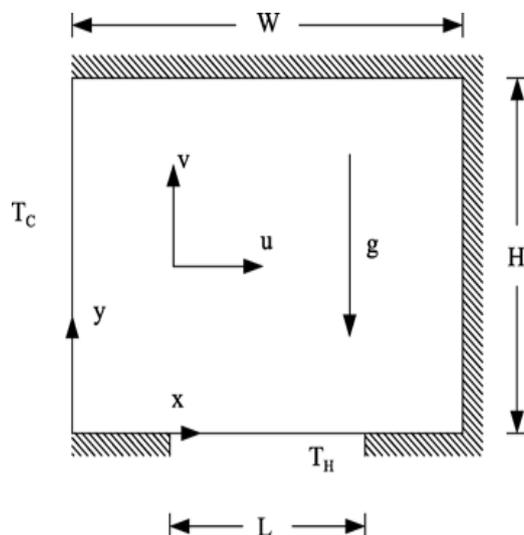


Рис. 1. Геометрия расчетной области и тепловые граничные условия

Параметрические расчеты были проведены для  $L/H$  в диапазоне от 0.2 до 1.0. Число Релея варьировалось и принимало значения, равные  $Ra = 10^4, 10^5, 10^6$  для воздуха и  $Ra = 6.757 \times 10^5, 10^5, 10^4$  для жидкого металла. Для малого  $Pr$  рассмотренный диапазон  $Ra$  включает в себя как стационарные, так и нестационарные режимы течения.

На основе полученных в расчетах данных были проанализированы поля температуры, скорости, распределения векторов скорости, а также локальные и интегральные значения числа Нуссельта. Данные были обработаны с использованием пакета визуализации физических полей Tecplot. Ниже, на рис. 2 и рис. 3, для стационарного режима течения галлия при  $Ra = 10^5$  представлены распределения температуры и полной скорости для случая  $L = 0.4$ . На рис. 4 и рис. 5 также для галлия даны распределения  $Nu$  вдоль холодной и горячей стенок: для нестационарного режима  $Ra = 6.757 \times 10^6$  представлены данные для всех вариантов длины нагретого участка (данные осреднены по времени за период колебаний).

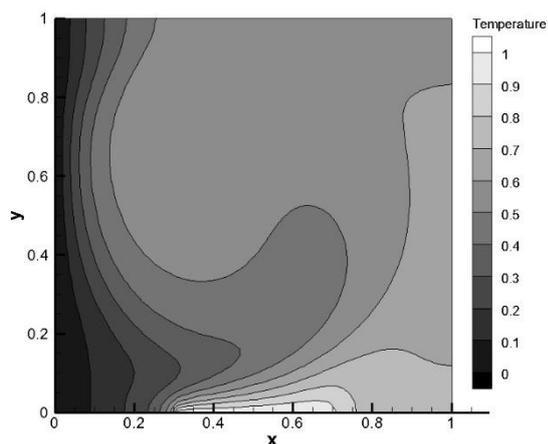


Рис. 2. Распределение температуры при числе  $Ra=10^5$ , числе  $Pr=0.0208$  и длине нагретого участка  $L=0.4$

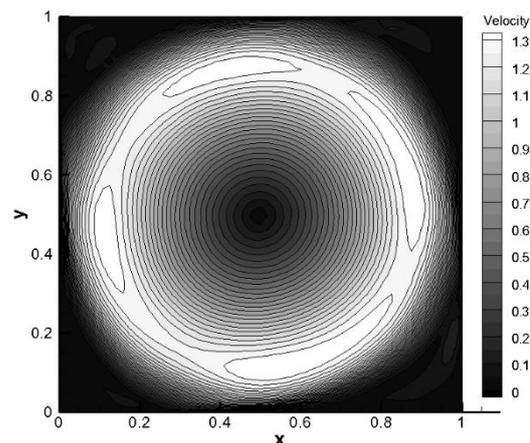


Рис. 3. Распределение полной скорости при числе  $Ra=10^5$ , числе  $Pr=0.0208$  и длине нагретого участка  $L=0.4$

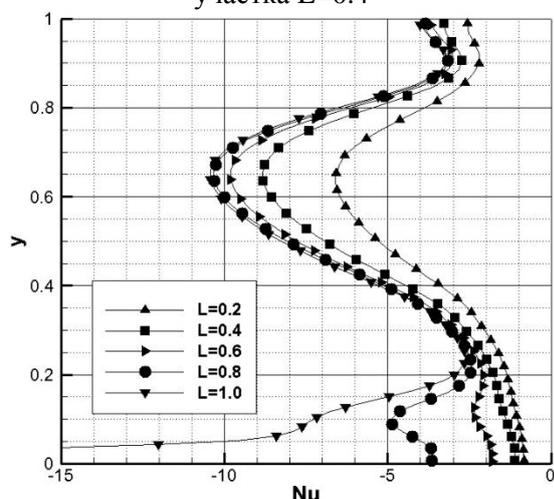


Рис. 4. Распределения числа  $Nu$  вдоль холодной стенки при  $Pr = 0.0208$  и  $Ra = 6.757 \times 10^6$

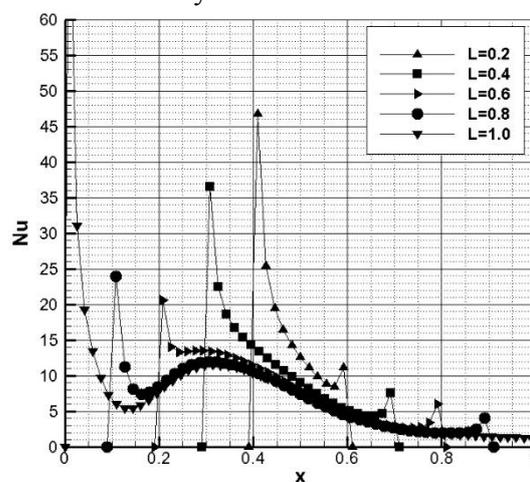


Рис. 5. Распределения числа  $Nu$  вдоль горячей стенки при  $Pr = 0.0208$  и  $Ra = 6.757 \times 10^6$

На основе проведенных расчетов можно сделать следующие выводы:

1. Увеличение числа Релея приводит к увеличению сил плавучести по отношению к силам вязкости, что, в свою очередь, определяет рост интенсивности конвективного переноса тепла в полости. При увеличении размера нагреваемого участка нижней стенки возрастает интенсивность теплопередачи, однако на структуру конвекции увеличение длины не влияет.

2. При числе  $Ra = 10^5$  и длине нагретого участка  $L = 0.8$  свободноконвективное течение нестационарное, аналогичная ситуация при числе  $Ra = 6.757 \cdot 10^5$ . Максимумы осредненного во времени распределения числа Нуссельта на стенках, наблюдаются в тех местах, где конвективный поток ударяется в стенку.

3. Структура конвекции при числе  $Pr = 0.71$  и  $Pr = 0.0208$  заметно различается: интенсивность конвективного течения в жидком металле в разы выше.

#### ЛИТЕРАТУРА:

1. Гебхарт Б., Джалурия Й., Махаджан Р., Саммакия Б. Свободноконвективные течения, тепло- и массообмен: В 2-х книгах: Пер. с англ. – М.: Мир, 1991. Том 2, с. 251-279.
2. Wolff F., Beckermann C., Viskanta R. Natural Convection of Liquid Metals in Vertical Cavities // Experimental Thermal and Fluid Science, №1, 1988, pp. 83-91.

3. Шеремет М.А. Ламинарные и турбулентные режимы сопряженной естественной конвекции в квадратной области // Вычислительная механика сплошных сред. – 2012. – Т. 5, № 3. – С. 327-338.
4. Rossby Н.Т. A study of Benard convection with and without rotation // J. Fluid Mech., Vol. 36, Iss. 2, 1969, pp 309-335.
5. Arcidiacono S., Di Piazza I., Ciofalo M. Low-Prandtl number natural convection in volumetrically heated rectangular enclosures // Int. J. Heat and Mass Transfer, Vol. 44, 2001, pp. 537-550.
6. Cianfrini C., Corcione M., Habib E., Quintino A. Convective Transport in Rectangular Cavities Partially Heated at the Bottom and Cooled at One Side // J. Thermal Science, Vol.22, No.1, 2013, pp 55-63.
7. Kimura S., Bejan A. Natural convection in a differentially heated corner region // Phys. Fluids, Vol. 28, No 10, 1985, pp. 2980-2989.
8. Смирнов Е.М., Зайцев Д.К. Метод конечных объемов в приложении к задачам гидрогазодинамики и теплообмена в областях сложной геометрии // Научно-технические ведомости СПбГПУ, №2 (36), 2004, с.70-81.

УДК 533.9

Е.А. Кузнецов (Санкт-Петербургский государственный политехнический университет),  
С.А. Поняев (ФТИ им. А.Ф. Иоффе РАН)

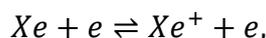
### ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ТЕЧЕНИЯ ДВУХТЕМПЕРАТУРНОЙ ПЛАЗМЫ В УДАРНОЙ ТРУБЕ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ ПАКЕТА OPENFOAM

Полёт тел со сверхзвуковой скоростью связан с высокими значениями температуры вблизи поверхности тела, что вызывается мощным сжатием газа перед головной частью движущегося тела и выделением тепла вследствие внутреннего трения в газе, увлекаемом телом при полёте. Высокие температуры, в свою очередь, создают неравновесные химические свойства потока, которые заключаются в диссоциации и рекомбинации молекул газа, ионизации атомов, химическим реакциям в потоке и с поверхностью аппарата. Таким образом, при изучении сверхзвуковых течений газа необходимо учитывать данные процессы и изменения свойств газа от температуры [1-5].

При проектировании высокоскоростных летательных аппаратов (ЛА) особое внимание уделяется выбору материалов корпуса, способных выдерживать высокие температуры, которые пагубно влияют на конструкцию ЛА [1]. В связи с этим возникает проблема правильной оценки величины теплового потока на поверхности ЛА, для чего возможно применение современных численных методов.

Целью данной работы было моделирование течения плазмы инертного газа, которые часто используются при экспериментальном моделировании сверхзвуковых течений, в ударной трубе и оценка теплового потока на ее стенках, а также сравнение полученных результатов с экспериментальными данными [2].

В настоящей работе рассматривается инертный газ ксенон, в состав плазмы которого входят нейтральные атомы, электроны и ионы того же вещества, то есть имеется всего три компоненты. Температура электронного газа  $T_e$  отличается от температуры тяжелых частиц  $T$  (атомов и ионов). Основными процессами, определяющими концентрацию заряженных частиц в плазме, являются ионизация электронным ударом и трехчастичная рекомбинация [6]:



тогда скорость изменения концентрации электронов  $\dot{n}_e$  можно найти по формуле:

$$\dot{n}_e = k_i n_e n_a - k_r n_e^3,$$

где  $k_i$  и  $k_r$  – коэффициенты ионизации и рекомбинации, которые вычисляются в результате совместного рассмотрения кинетики ионизации, рекомбинации и заселения

возбужденных состояний. Коэффициент рекомбинации  $k_r$  является функцией температуры электронов. Коэффициент ионизации  $k_i$  находится из коэффициента рекомбинации с помощью константы равновесия  $K$  [6]:

$$k_i = Kk_r$$

$$K = 1.936 \cdot 10^{22} \cdot T_e^{\frac{3}{2}} \cdot \exp\left(-\frac{140363}{T_e}\right)$$

Для вычисления средних частот столкновений между частицами, входящими в состав плазмы, существует множество моделей [6], работающих в разных диапазонах температур. В данной работе были приняты следующие хорошо зарекомендовавшие себя выражения для нахождения средних частот электрон-ионных и электрон-атомных столкновений:

$$v_{ei} = n_e \frac{4\sqrt{2\pi}}{3} \left(\frac{m_e}{kT_e}\right)^{\frac{3}{2}} \left(\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 m_e}\right)^2 \ln\Lambda \cong 3.64 \cdot 10^{-6} n_e \frac{\ln\Lambda}{T_e^{\frac{3}{2}}}$$

$$\Lambda = 1.24 \cdot 10^7 \left(\frac{T_e^3}{n_e}\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$v_{ea} = n_a \frac{4}{3} \left(\frac{8kT_e}{\pi m_e}\right)^{\frac{1}{2}} \sigma_{ea}$$

где  $\sigma_{ea}$  – радиус сечения столкновения определяемый по формуле:

$$\sigma_{ea} = a_0^2 (-1.82 + 2.2 \cdot 10^4 T_e^{-1} + 3.8 \cdot 10^{-7} T_e^2),$$

$a_0 = 0.529 \cdot 10^{-10}$  м – радиус первой Боровской орбиты.

Каждую компоненту газовой смеси можно представить как отдельную среду, взаимодействующую с другими компонентами. Каждая однокомпонентная среда описывается системой уравнений, выражающих законы сохранения для сплошных сред и по структуре аналогичных уравнениям сохранения. В данные уравнения следует добавить члены, описывающие взаимодействие между однокомпонентными средами. В итоге система уравнений запишется следующим образом:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \vec{V}) = 0$$

$$\frac{\partial n_e}{\partial t} + \nabla \cdot (n_e \vec{V}) = \dot{n}_e$$

$$\frac{\partial (\rho \vec{V})}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \vec{V} \vec{V} + P) = 0$$

$$\frac{\partial E}{\partial t} + \nabla \cdot (E \vec{V}) = -P \nabla \cdot \vec{V} - \nabla \cdot \vec{q} + \dot{n}_e \epsilon_i + 3 \frac{m_e}{m_a} k n_e (v_{ei} + v_{ea})(T_e - T)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{3}{2} p_e\right) + \nabla \cdot \left(\frac{5}{2} p_e \vec{V}\right) - \vec{V} \cdot \nabla p_e = -\nabla \cdot \vec{q}_e - \dot{n}_e \epsilon_i - 3 \frac{m_e}{m_a} k n_e (v_{ei} + v_{ea})(T_e - T)$$

Для решения полученной системы уравнений использовался свободно распространяемый пакет численного моделирования OpenFOAM [7], который в рамках метода конечных объемов позволяет проводить операции со скалярными, векторными и тензорными полями.

Одной из важных особенностей OpenFOAM является возможность создавать свои решатели и утилиты. В составе OpenFOAM есть солверы для решения однотемпературных течений газа, которые используются и хорошо себя зарекомендовали. Поэтому солвер для решения течения двухтемпературной плазмы был построен путем добавления необходимых уравнений к одному из существующих решателей для однотемпературной модели.

Для сравнения численного моделирования с экспериментальными данными был проведен расчет сверхзвукового течения ксенона (с числом ударной волны  $M = 6$ ) в ударной

трубе диаметром 10 см и длиной 0.5 м. Расчет проводился в двумерной осесимметричной постановке, а граничные и начальные условия брались из работы [1]. В камере низкого давления ударной трубы параметры газа составляли: скорость 0 м/с, давление 2235 Па, температура  $T = T_e = 293$  К,  $n_e = 0$  м<sup>-3</sup>. За ударной волной после прохождения процесса ионизации параметры газа становятся: скорость 770 м/с, давление 100000 Па,  $T = T_e = 3552$  К,  $n_e = 2.17 \cdot 10^{17}$  м<sup>-3</sup>.

Численное моделирование течения ксенона в ударной трубе и расчет теплового потока в разных точках поверхности трубы показали хорошее совпадение по уровню теплового потока на торце с экспериментальными данными, при этом тепловой поток достигал 1400 кВт/м<sup>2</sup>. Совпадение же по временному поведению не удовлетворительное, это может быть из-за того, что при численном моделировании процессы в конце трубы более быстрые, чем в эксперименте.

Результаты численного расчета показали, что написанный солвер может применяться при оценке импульсных тепловых потоков, например, при обтекании тел потоком газа из сопла, когда ударная труба выступает в качестве средства, создающего сверхзвуковое течение. Обычно в этих случаях используют модельные газы, такие как аргон и ксенон, и учет неравновесности и двухтемпературности оказывает большое влияние на тепловые потоки на поверхность тела.

#### ЛИТЕРАТУРА:

1. Edney В.Е. // AIAA Journ. 1968. V. 6. N 1. P. 16-24.
2. Сапожников С.З., Митяков В.Ю., Митяков А.В. и др. // ЖТФ. 2004. Т. 30. В. 2. С. 76-80.
3. Friedman H.S., Fay J.A. Heat Transfer from Argon and Xenon to the End Wall of a Shock Tube // Physics of Fluids, Vol. 8, No. 11, 1965, pp. 1968-1975.
4. Nowak R.J., Yuen M.C. Heat Transfer to a Hemispherical Body in a Supersonic Argon Plasma // AIAA J., Vol. 11, No. 11, 1973, pp. 1463-1464.
5. Dillion R.E., Nagamatsu H.T. Heat Transfer and Transition Mechanism on a Shock-Tube Wall // AIAA J., Vol. 22, No. 11, 1982, pp. 1524-1528.
6. Митчнер М., Кругер Ч. Частично ионизованные газы // Journ. of Turbom., Willey and Sons, 1973.
7. OpenFOAM: the open source CFD toolbox. – <http://www.openfoam.com/> (дата обращения: 19.11.2014)

УДК 532.517

Е.В. Котов, А.В. Гарбарук  
(Санкт-Петербургский государственный политехнический университет)

### К ВОПРОСУ ИСПОЛЬЗОВАНИЯ ПРИСТЕННЫХ ФУНКЦИЙ ПРИ РАСЧЕТЕ ОТРЫВНЫХ ТЕЧЕНИЙ

В последнее время в практике расчетов турбулентных течений все шире используются пристенные функции, основанные на законе стенки [1]. В этой связи возникают обоснованные опасения снижения точности расчета отрывных течений, в которых закон стенки может нарушаться.

Целью работы является исследование применимости расширенных пристенных функций программного пакета ANSYS FLUENT [2] к отрывным течениям на примере расчета аэродинамических профилей при углах атаки вплоть до срыва потока. В работе рассматривается обтекание крылового профиля S809 потоком несжимаемой жидкости при числе Рейнольдса  $Re = 2 \times 10^6$ . Расчеты в широком диапазоне углов атаки (0°-30°) были

выполнены с использованием стационарных уравнений Рейнольдса (RANS), замкнутых при помощи полуэмпирической  $k-\omega$  SST модели турбулентности Ментера [3].

Оценка применимости пристенных функций проводилась путем сравнения результатов, полученных на наборе сеток С-типа с различным первым по нормали к поверхности пристенным шагом, с эталонной сеткой M1 (411×181), обеспечивающей разрешение вязкого подслоя (предварительные расчеты показали, что она обеспечивает сеточно-независимое решение). Сетки H1 и H2, имеющие одинаковый размер (411×85), были получены путем перестроения сетки по нормали к поверхности так, чтобы первый пристенный шаг изменялся пропорционально толщине пограничного слоя, что обеспечивает не менее 12 и 8 точек внутри пограничного слоя, соответственно.

На входной границе расчетной области задавался однородный профиль скорости при различных углах атаки ( $u = U_0 \cos \alpha$ ,  $v = U_0 \sin \alpha$ ) и характеристики турбулентности набегающего потока, обеспечивающие полностью турбулентное обтекание (уровень турбулентности  $I = 0.1\%$  и отношение турбулентной вязкости к молекулярной  $\nu_t/\nu = 0.1$ ). На выходной границе задавался постоянный уровень давления, а остальные переменные экстраполировались изнутри расчетной области. На поверхности профиля были использованы расширенные пристенные функции, обеспечивающие условие прилипания на низкорейнольдсовой сетке M1.

На расчетной и экспериментальной [4] зависимостях коэффициента подъемной силы  $C_L$  от угла атаки (рис. 1) виден линейный рост при углах атаки меньших  $7^\circ$ , что соответствует безотрывному обтеканию. При дальнейшем увеличении угла атаки ( $7^\circ < \alpha < 20^\circ$ )  $C_L$  практически не меняется, что объясняется постепенным смещением вверх по потоку отрыва на верхней поверхности профиля в сторону передней кромки. Причиной существенного (20÷30%) отличия расчета от эксперимента является неправильное предсказание положения отрыва. При дальнейшем росте угла атаки происходит срыв потока, характеризующийся резким падением коэффициента подъемной силы ( $20^\circ < \alpha < 25^\circ$ ) вплоть до массивного отрыва с передней кромки ( $\alpha > 25^\circ$ ).

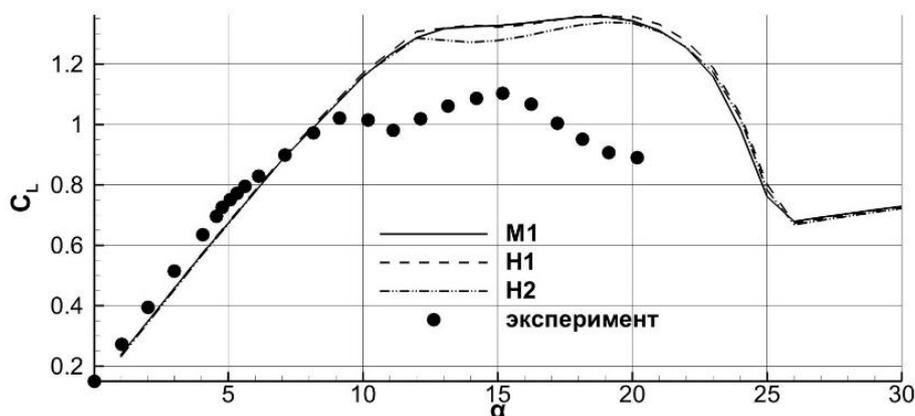


Рис. 1. Сопоставление с экспериментальными данными рассчитанных на разных сетках графиков зависимости коэффициента подъемной силы крылового профиля S809 от угла атаки

Результаты, полученные на различных сетках, практически не отличаются друг от друга (разница в коэффициенте подъемной силы не превышает 4%), что свидетельствует о применимости расширенных пристенных функций в широком диапазоне значений первого пристенного шага  $\Delta y_1^+$ .

Результаты выполненных исследований позволяют заключить, что расширенные пристенные функции применимы к расчету отрывных течений при наличии 10 точек внутри

пограничного слоя. При этом потеря точности в расчете коэффициента подъемной силы не превышает 4%.

#### ЛИТЕРАТУРА:

1. Wilcox D.C. Turbulence Modeling for CFD. DCW Industries Inc: La Canada, CA, 1998.
2. Menter F., Carregal Ferreira J., Esch T., Konno B. The SST Turbulence Model with Improved Wall Treatment for Heat Transfer Predictions in Gas Turbines / Proceedings of the International Gas Turbine Congress 2003 Tokyo, 7 p.
3. Menter F.R. Two-equation eddy-viscosity turbulence models for engineering applications // AIAA J., 1994. - Vol. 32. - № 8. - P. 1598 -1605.
4. Eswara Rao Anjuri. Comparison of Experimental results with CFD for NREL Phase VI Rotor with Tip Plate // International Journal of Renewable Energy Research. Vol. 2, No 4, 2012. P. 46-58.

УДК 532.517

А.С. Стабников, А.В. Гарбарук  
(Санкт-Петербургский государственный политехнический университет)

### О ПОПРАВКЕ НА КРИВИЗНУ ЛИНИЙ ТОКА И ВРАЩЕНИЕ ДЛЯ МОДЕЛЕЙ ТУРБУЛЕНТНОЙ ВЯЗКОСТИ

Чаще всего для замыкания уравнений Рейнольдса, обычно применяемых для расчета турбулентных течений, используются полуэмпирические модели турбулентной вязкости (EVM), основанные на гипотезе Буссинеска, постулирующей линейную связь между производными средних значений скорости и тензором рейнольдсовых напряжений. Полуэмпирические модели не универсальны [1], однако некоторые их дефекты носят систематический характер и могут быть исправлены при помощи введения в модели соответствующих поправок. В частности, именно так обстоит дело с течениями, в которых вращение потока или кривизна линий тока оказывают существенное влияние на характеристики турбулентности.

Важным обстоятельством является то, что эффекты вращения и кривизны линий тока имеют единую природу. В работе [2] предложено выражение, позволяющее свести влияние кривизны линий тока к эквивалентному эффекту вращения, т.е. связывающее локальные характеристики потока со скоростью его вращения. Использование предложенного в [2] выражения позволяет успешно использовать для расчета течений с существенной кривизной линий тока модели с поправками, учитывающими влияние вращения потока. Такие поправки могут быть выведены на основе явных алгебраических моделей рейнольдсовых напряжений (EARSM). В частности, в настоящей работе на основе модели Gatski, Speziale [3] была получена поправка на кривизну и вращение для  $k-\omega$  модели Ментера SST [4].

Извлечь из EARSM [3] влияние вращения на турбулентность можно, рассмотрев коэффициенты при линейном слагаемом (которое является аналогом турбулентной вязкости в гипотезе Буссинеска), полученные при помощи двух версий EARSM, одна из которых учитывает вращение системы координат, а другая – не учитывает. Отношение этих двух коэффициентов можно рассматривать как меру влияния вращения на турбулентную вязкость:

$$f_r(\vec{\omega}^r) = \left( 2\zeta_0^2 + \frac{1+\eta^2/3}{1+\eta^2} \right) / \left( 2\zeta_1^2 + \frac{1+\eta^2/3}{1+\eta^2} \right), \quad (1)$$

здесь  $\zeta_1^2 = (g(1-\frac{1}{2}C_4))^2 (\Omega_{ij} + (1-\frac{1}{2}C_4)^{-1} e_{mji} \omega_m^r) (\Omega_{ij} + (1-\frac{1}{2}C_4)^{-1} e_{mji} \omega_m^r)$ ,  $\omega^r$  – вектор угловой скорости вращения системы координат,  $\zeta_0^2 = (g(1-\frac{1}{2}C_4))^2 \Omega_{ij} \Omega_{ij}$ ,  $\eta = \sqrt{S_{ij}^* S_{ij}^*}$  – инвариант

модифицированного тензора скоростей деформаций  $S_{ij}^* = g(1 - \frac{1}{2}C_3)S_{ij}$ , а  $e_{mji}$  – символ Леви-Чивиты. Величина  $g$  определяется соотношением генерации и диссипации кинетической энергии турбулентности  $g = (0.7 + 1.9P_k/\varepsilon)^{-1}$ . Наконец, константы модели определяются как  $C_1' = 1.8, C_2 = 0.8 - 1.3\sqrt{b_{ij}b_{ij}}, C_3 = 1.25, C_4 = 0.4$ .

Также в работе представлен новый метод тестирования поправок, основанный на решении задачи о развитии однородной турбулентности в поле однородного сдвига. В рамках метода при различных числах Россби  $Ro = \Omega/S$ , характеризующих скорость вращения течения, решение уравнений Рейнольдса, замкнутых при помощи модели SST, сравнивается с решением методом LES. Такое сравнение позволяет подобрать оптимальное значение поправки при каждом значении числа Россби и сравнить его как с предлагаемой поправкой, так и с поправкой [5], которая наиболее часто используется с моделью SST (см. рис. 1). Видно, что предлагаемая поправка хорошо согласуется со значениями, полученными на основе LES, в то время как поправка [5] выступает скорее в качестве «переключателя» между граничными значениями.

Тестирование предложенной поправки путем решения нескольких тестовых задач (течение во вращающемся плоском канале и плоском канале с поворотом на  $180^\circ$ ) показало, что для них предложенная поправка успешно описывает влияние эффектов кривизны и вращения и в ряде случаев превосходит поправку [5]. Таким образом, предложенная в работе новая поправка может быть предложена для внедрения в программные комплексы вычислительной гидрогазодинамики и использования при решении практических задач.

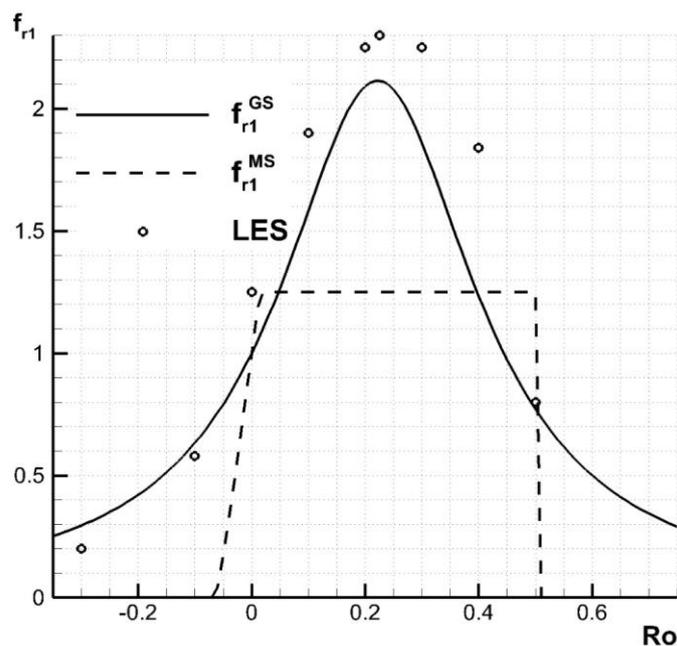


Рис. 1. Сравнение поправочных функций для моделей RANS со значениями, полученными на основе LES; сплошная линия – предлагаемая новая поправка, пунктирная линия – поправка [5], символы – результаты, полученные на основе LES.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Wilcox D. C. Turbulence modeling for CFD. 2006.
2. Wallin S., Johansson A.V. Modelling streamline curvature effects in explicit algebraic Reynolds stress turbulence models // Int. J. of Heat and Fluid Flow, Vol 23(5), 2002, pp. 721–730.
3. Gatski T.B., Speziale C.G. On explicit algebraic stress models for complex turbulent flows // Journal of Fluid Mechanics, Vol. 254, 1993, pp. 59-78.

4. Menter F.R. Zonal two equation  $k-\omega$  turbulence models for aerodynamic flows // AIAA Paper, 93-2906, 1993.

5. Smirnov P.E., Menter F.R. Sensitization of the SST turbulence model to rotation and curvature by applying the Spalart–Shur correction term // Journal of Turbomachinery, Vol. 131, 2009.

УДК 661.531

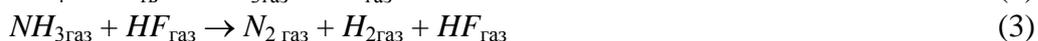
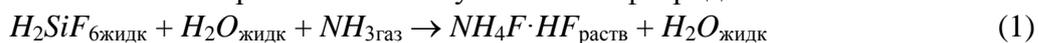
К.В. Лисин, Д.С. Пашкевич

(Санкт-Петербургский государственный политехнический университет)

## РАСЧЕТ ТЕПЛОФИЗИЧЕСКИХ ХАРАКТЕРИСТИК МНОГОКОМПОНЕНТНОЙ СМЕСИ ПОЛЯРНЫХ ГАЗОВ

При производстве фосфатных удобрений из фторапатита  $Ca_5(PO_4)_3X_2$ , где  $X$  – это обычно фтор, в качестве отходов образуется значительное количество гексафторкремниевой кислоты  $H_2SiF_6$  (ГФКК), которую целесообразно перерабатывать, получая из неё товарный безводный фторид водорода  $HF$  (БФВ). БФВ находит широкое применение в современной промышленности в качестве сырья для производства хладонов, фторполимеров, гексафторида урана в ядерном топливном цикле и т.д.

Одним из направлений разработки технологии получения БФВ из ГФКК является аминирование её водного раствора, фильтрование, сушка и последующее термокаталитическое разложение получаемого бифторида аммония по схеме:



Каталитическое разложение аммиака



хорошо изучено. Его проводят в аппаратах со стационарным слоем металлического катализатора при температуре 450-500°C, подводя тепло в реагирующую среду, т.к. реакция (4) является эндотермической.

В тоже время процесс каталитического разложения аммиака в присутствии фторида водорода (3) современной промышленностью не освоен.

Для построения модели теплового состояния промышленного реактора для реализации процесса (3) необходимо знать теплофизические параметры смесей газов, присутствующих в реакторе. В общем случае эта смесь будет состоять из аммиака, водорода, азота и фторида водорода. При этом по мере движения по реактору смесь будет менять состав – концентрации азота и водорода будут увеличиваться концентрация аммиака будет уменьшаться.

Аммиак, водород, азот и фторид водорода имеют существенно различающиеся значения основных теплофизических параметров – теплопроводности, вязкости, теплоёмкости и плотности. Так, вязкость водорода при 293К составляет 8.8 мкПа·с, а вязкость газообразного фторида водорода при 320К – 13.5 мкПа·с. Ещё сильнее различаются теплопроводности – 0.19 и 0.07 Вт·м<sup>-1</sup>·К<sup>-1</sup> при 320К для водорода и фторида водорода соответственно [1,2]. Кроме того, аммиак и фторид водорода являются веществами полярными – дипольные моменты составляют 1,46 и 1,91 Дебай соответственно. Фторид водорода при определённых условиях в газовой фазе образует ассоциаты.

Целью настоящей работы является определение теплопроводности, вязкости и теплоёмкости двух-, трёх и четырёхкомпонентных смесей перечисленных газов для различного их соотношения, температуры и давления. Для достижения поставленной цели был решен ряд задач.

Во-первых, были проанализированы литературные данные по теплофизическим свойствам азота, водорода, аммиака, фторида водорода и их смесей [1-4].

Во-вторых, рассмотрены различные методы расчёта теплофизических свойств газовых смесей [5-7].

В-третьих, с помощью этих методов были рассчитаны теплофизические свойства двух-, трёх и четырёхкомпонентных смесей азота, водорода, аммиака и фторида водорода для различных соотношений компонентов, температуры и давления.

В-четвертых, было проведено сравнение полученных расчётных данных друг с другом и с имеющимися литературными данными. На основе проведенного анализа были выданы рекомендации по выбору теплофизических свойств указанных смесей для расчёта теплового состояния реактора по термическому каталитическому разложению газифицированного бифторида аммония.

Для расчета вязкости газовых смесей при атмосферном давлении использовали три метода – метод Уилки, Гиршфельдера и Голубева 1 [6], а также правило аддитивности. Для расчета вязкости газовых смесей при давлении 1-10 МПа использовали метод Энскога с интерпретацией Торна и метод Голубева 2 [6].

Для расчета теплопроводности газовых смесей при атмосферном давлении использовали методы Мэсона и Саксены, Брокау и Линдсея и Бромли [5] и правило аддитивности. Для расчета теплопроводности газовых смесей при давлении 1-10 МПа использовался метод Стила-Тодоса [5].

Теплоемкость и плотность были рассчитаны по правилу аддитивности [7].

Результаты работы показали, что при расчёте теплопроводности и вязкости газовых смесей, в состав которых входит фторид водорода, общепринятые методы для смесей полярных газов дают противоречивые результаты. Для оценки причин этого необходимо уточнять значения вязкости и теплопроводности фторида водорода.

Для расчёта теплофизических свойств трёх- и четырёхкомпонентных смесей в системе  $N_2-H_2-NH_3-HF$  целесообразно использовать правило аддитивности.

При построении модели теплового состояния реактора по конверсии газифицированного бифторида аммония для газовой смеси  $N_2-H_2-NH_3-HF$  при температуре 750К и давлении порядка 1 МПа можно использовать следующие теплофизические характеристики в направлении от входа к выходу реактора:

1. Теплопроводность можно полагать изменяющейся от 150 до 220 мВт·м<sup>-1</sup>·К<sup>-1</sup>;
2. Вязкость можно полагать изменяющейся от 25 до 30 мкПа·с;
3. Теплоемкость изменяется в диапазоне от 2 до 6 кДж·кг<sup>-1</sup>·К<sup>-1</sup>;
4. Плотность смеси газов целесообразно рассчитывать прямо пропорционально давлению и выбирать после определения диапазона изменения давления в конкретном промышленном аппарате.

#### ЛИТЕРАТУРА:

1. Справочник по теплофизическим свойствам газов и жидкостей. 2 издание / Н.Б. Варгафтик – 1972. – 472с.
2. Физические величины. Справочник / И.С. Григорьев, Е. З. Мейлихова – М.: Энергоатомиздат, 1990. – 365 с. Табл.16.1.
3. Simons J.H. Fluorine chemistry. – Vol.1, New York, 1950 – 506 p.
4. Максимов Б.Н., Барабанов В.Г., Серушин И.Л. Справочник. Промышленные фтор-органические продукты, 1990 г., стр. 448
5. Рид Р., Праусниц Дж., Шервуд Т. Справочное пособие. Свойства газов и жидкостей, 3-е изд. Химия, 1982 г. – 592 с.
6. Голубев И.Ф., Гнездилов Н.Е. Вязкость газовых смесей. Москва, 1971 г. – 330 стр.
7. Глушко В.П., Гурвич Л.В. и др. Термодинамические свойства индивидуальных веществ. Том 1, книга 2. Москва, 1978 г. – 329 стр.

ИССЛЕДОВАНИЕ ВЛИЯНИЯ ЗАКРУЧЕННОГО ПОТОКА НА ВИХРЕВОЕ ДВИЖЕНИЕ  
В ТРУБКЕ С ЛОКАЛЬНЫМ СУЖЕНИЕМ

Многочисленные клинические исследования и численные эксперименты указывают на сложный характер течения крови на отдельных участках сердечно-сосудистой системы человека, в особенности в сосудах со стенозами [1,2]. До сих пор остается невыясненной роль закрученного течения крови на атеросклеротические процессы [3].

Цель настоящей работы – изучить влияние закрученного потока на структуру течения в трубке с локальным сужением с помощью метода численного моделирования и ультразвукового доплеровского метода.

Расчеты и измерения проводились для закрученного и незакрученного течений. Для проведения численного исследования была построена модель сосуда со стенозом. Модель представляла собой трубку диаметром  $D = 6$  мм. На расстоянии 25 мм от входного сечения трубки располагалось начало локального сужения (модель стеноза). Длина стеноза - 12 мм, проходной диаметр в самом узком месте (горлышко стеноза) - 3 мм. В любом поперечном сечении на участке несимметричного сужения просвет сосуда имел форму круга. Степень стеноза, рассчитанная по площади, составляла 75%. Закрутка течения создавалась скрученной лентой. Отношение максимальных окружной и осевой скоростей в течении на выходе из ленты близко к зарегистрированному клинически физиологическому значению 0,2 [4]. Учитывая результаты проведенных экспериментов [5], свидетельствовавших о наличии интенсивных пульсаций скорости за сужением, расчеты были проведены на основе уравнений Навье-Стокса, осредненных по Рейнольдсу. Для замыкания задачи была выбрана широко используемая модель турбулентности  $k-\omega$  SST.

На входе в расчетную область задавался параболический профиль скорости и постоянные по сечению параметры турбулентности очень малой интенсивности. На стенках ставилось условие прилипания, а на выходе – условие постоянного давления. Расчеты проводились для среднерасходной скорости  $V_{cp} = 11$  см/с. Задавались динамический коэффициент вязкости  $\mu = 0,001$  Па·с и плотность жидкости  $\rho = 1000$  кг/м<sup>3</sup>. Соответствующее число Рейнольдса  $Re = \rho V_{cp} D / \mu = 660$ . Расчеты по методу контрольных объемов проводились с использованием программного пакета ANSYS CFX 14.0, со вторым порядком точности пространственной дискретизации.

Измерения скорости проведены ультразвуковым сканером LogicScan 64 с помощью линейного датчика с рабочей частотой 5 МГц в режиме цветного доплеровского картирования. Для измерения распределения поперечной скорости датчик устанавливался перпендикулярно к оси трубки. Красный цвет изображения показывал поток, направленный к датчику, синий цвет - от датчика.

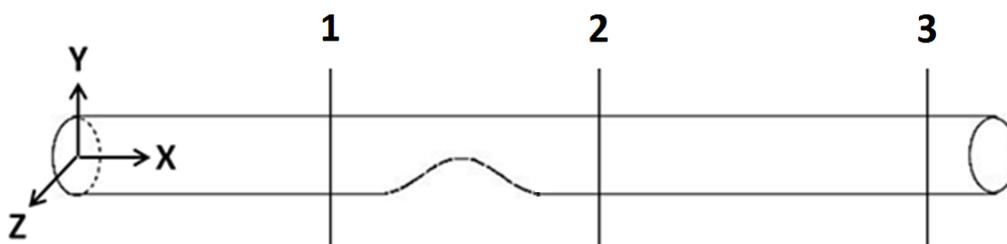


Рис. 1. Трубка с локальным сужением (с обозначением поперечных сечений)

На рис. 1 представлена трубка с локальным сужением и три поперечных сечения, построенных на расстоянии 10 мм до центра сужения и 10 и 40 мм от центра сужения.

На рис. 2 в разных сечениях изображена тангенциальная проекция вектора скорости в расчетах без закрутки потока (слева) и с закруткой потока (справа). В первом сечении, которое находится до сужения, в незакрученном потоке вихревого движения нет, в закрученном потоке виден один концентрический вихрь, заполняющий все поперечное сечение сосуда. Во втором сечении, которое находится сразу за сужением, для незакрученного и закрученного потока хорошо заметны парные вихри Дина. Но в закрученном течении появляется еще третий вихрь, который образуется за счет закрученного течения перед локальным сужением. Данный вихрь приводит к искажению вихрей Дина – один из них заметно уменьшается, а второй увеличивается в размерах. В третьем сечении в первоначально незакрученном течении вихревое движение исчезает, а в первоначально закрученном – заметна слабая закрутка потока.

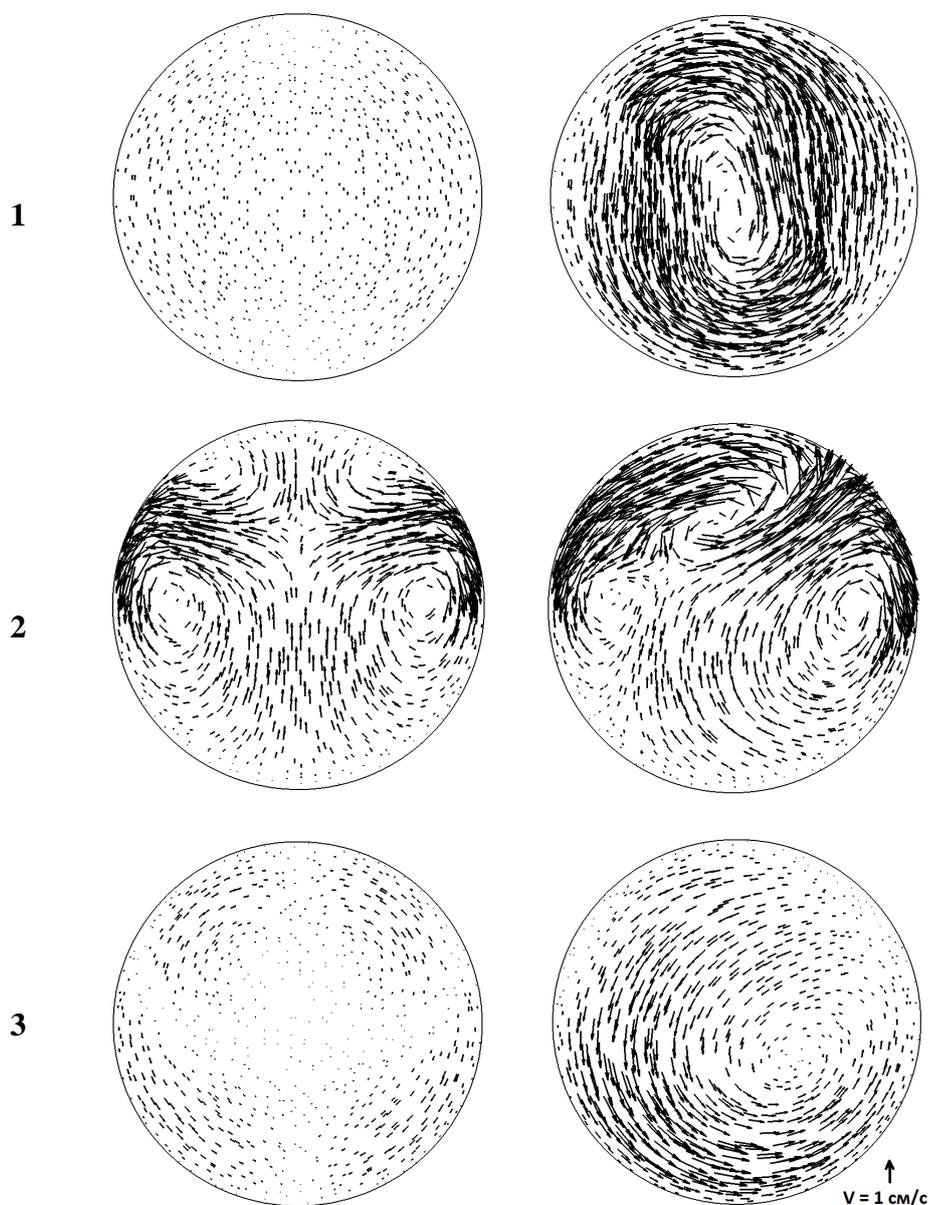


Рис. 2. Поле тангенциальной проекции скорости в поперечных сечениях трубки с локальным сужением, полученное с помощью численного моделирования ( $V_{cp} = 11 \text{ см/с}$ )

Наличие вихрей Дина и закрученного течения после сужения было экспериментально подтверждено с помощью ультразвуковой доплерографии. На рис. 3 представлены распределения поперечной составляющей скорости в разных сечениях в трубке с локальным сужением в закрученном течении, полученные с помощью ультразвукового доплеровского метода и численного моделирования. Видно, что форма областей противоположного движения жидкости примерно совпадает в расчете и эксперименте.

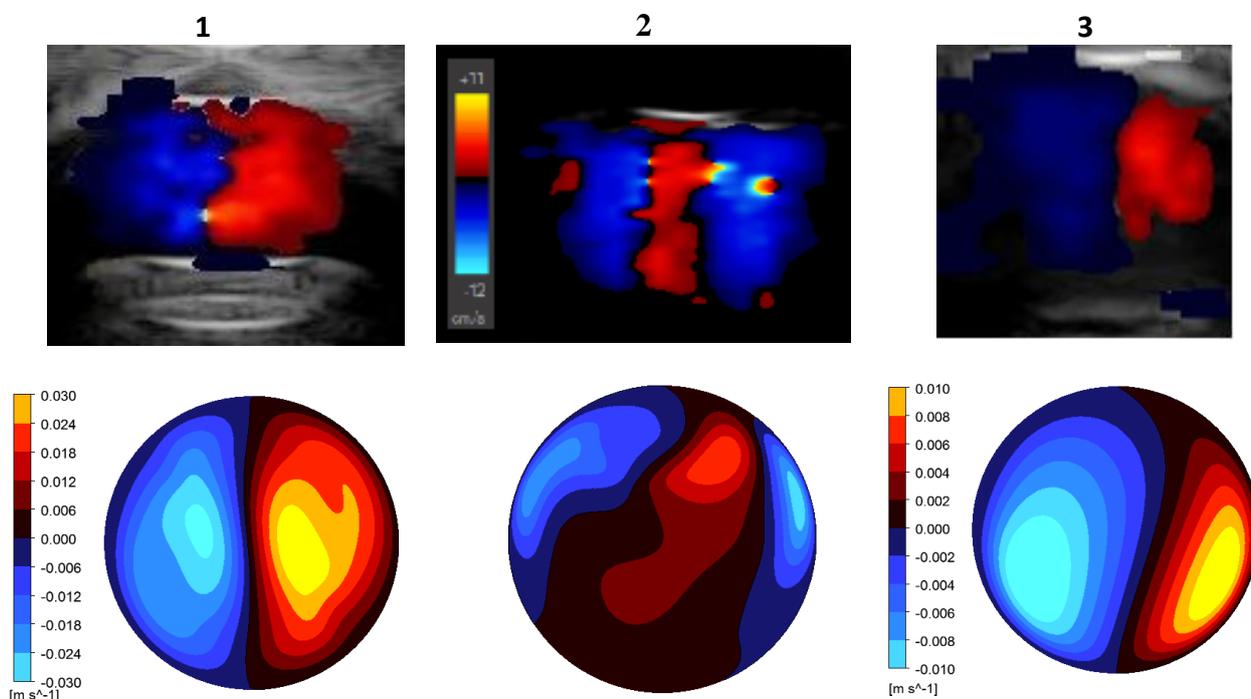


Рис. 3. Поле поперечной составляющей скорости в закрученном течении в трубке с локальным сужением, полученная с помощью ультразвукового доплеровского метода (сверху) и с помощью численного моделирования (снизу) ( $V_{cp} = 11$  см/с)

В результате численного и экспериментального исследования было установлено, что за локальным сужением появляется вторичное течение (вихри Дина). В сочетании с закруткой потока течение становится более сложным, приводя к образованию вихревой структуры, состоящей из трех вихрей, далее вниз по потоку превращающихся в закрученное движение с единственным вихрем.

#### ЛИТЕРАТУРА:

1. Vetel J., Garon A., Pelletier D., Farinas M.-I. Asymmetry and transition to turbulence in a smooth axisymmetric constriction // *Journal of Fluid Mechanics*, 2008, Vol. 607, pp. 351-398.
2. Varghese S.S., Frankel S.H., Fisher P.F. Direct numerical simulation of stenotic flows. Part 1. Steady flow // *Journal of Fluid Mechanics*, 2007, Vol. 582, pp. 253-280.
3. Liu X., Sun A., Fan Y. et al. Physiological significance of helical flow in the arterial system and its potential clinical application // *Annals of Biomed. Eng.*, 2014, pp. 1-13.
4. Кирсанов Р.И., Куликов В.П. Винтовое (вращательно-поступательное) движение крови в сердечнососудистой системе // *Успехи физиологических наук*, Т. 44, №2, 2013, с. 62-78.
5. Ha H., Lee S.-J. Effect of swirling inlet condition on the flow field in a stenosed arterial vessel model // *Medical engineering & physics*, 2014, Vol. 36, Issue 1, pp. 1119-1128.

### СРАВНИТЕЛЬНОЕ ГИДРОДИНАМИЧЕСКОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ СОВРЕМЕННЫХ МЕХАНИЧЕСКИХ ПРОТЕЗОВ АОРТАЛЬНОГО КЛАПАНА

Искусственные клапаны сердца – механические или биологические протезы, задача которых – обеспечить однонаправленный пульсирующий поток крови. У механических протезов по сравнению с биологическими больший срок службы, но в то же время, повышенный риск тромбообразования и травмирования форменных элементов крови. Однако, у механических клапанов нового типа – полнопроточных – этот риск меньше за счет того, что запирающие элементы клапана в открытом состоянии практически не вносят возмущения в поток. Этим полнопроточные механические клапаны подобны естественным клапанам сердца (рис. 1).

Цель работы – исследовать гидродинамические характеристики нового отечественного полнопроточного искусственного клапана сердца МедИнж-СТ в аортальной позиции и сравнить их с характеристиками отечественных клапанов предыдущих поколений: двустворчатого МедИнж-2 и дискового ЛИКС-2.

Для проведения данного исследования на кафедре гидроаэродинамики запущен новый аппаратно-программный комплекс ViVitro Labs Inc. для исследования искусственных клапанов сердца. В состав комплекса входит пульсодупликатор с компьютерным управлением, трехканальная система измерения давления, электромагнитный расходомер, АЦП/ЦАП и компьютер с программным обеспечением ViViTest для регистрации и обработки данных.

Отличительной особенностью комплекса является более точное моделирование работы клапана в организме, по сравнению с пульсодупликатором кафедры, на котором были проведены предыдущие исследования [1,2]. Физиологическая форма кривой расхода задаётся поршневым насосом, который управляется компьютером. Форма кривых давления в камерах левого желудочка и аорты (рис. 2) регулируется воздушными демпферами и плавным регулятором периферического сопротивления. Испытуемый клапан закреплен в эластичную модель корня аорты, изготовленную методом отливки из силикона [2].

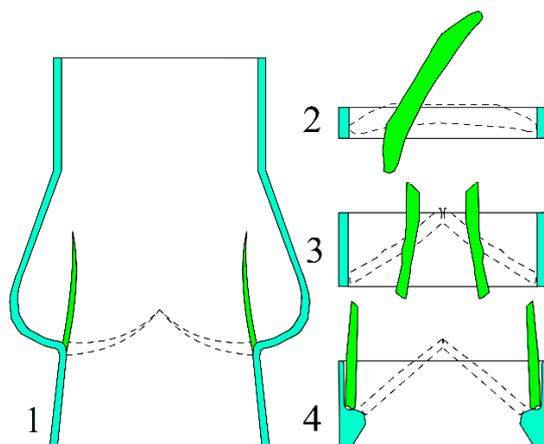


Рис. 1. Схема аортального клапана человека (1) и механических аортальных протезов ЛИКС-2 (2), МедИнж-2 (3), МедИнж-СТ (4)

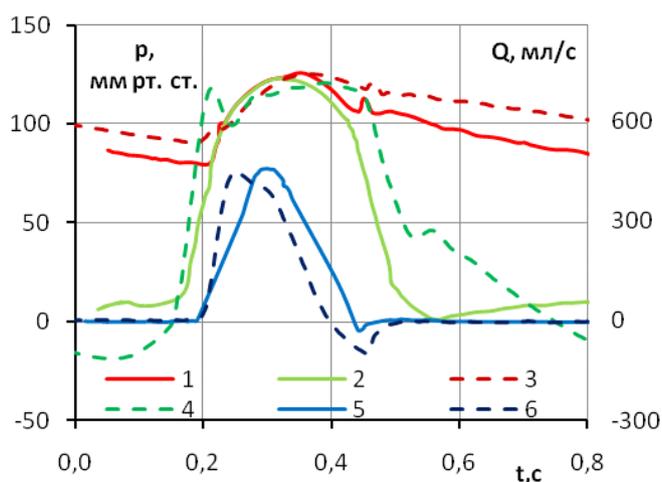


Рис. 2. Кривые аортального давления (1,2), желудочкового давления (3,4), аортального расхода (5,6). Пунктир - эксперимент, сплошная линия - физиологические кривые [1]

Искусственные клапаны сердца исследованы при изменении ударного объема в диапазоне от 20 до 120 мл при частоте 70 уд/мин. Для каждого клапана измерены следующие гидродинамические характеристики: средневладратичный прямой расход  $Q$  ср.кв., средний положительный перепад давления на клапане  $\langle \Delta P \rangle$  (трансаортальный перепад давления) и объем регургитации  $V_{рег}$  (сумма обратного перетока и утечек через закрытый клапан). Кривая трансаортального перепада давления (рис. 3) имеет характерный пик, совпадающей с фазой роста расхода через аортальный клапан. Форма кривой трансаортального перепада идентична для всех трёх клапанов. Средние значения трансаортального перепада давления на полнопроточном клапане МедИнж-СТ меньше значений на клапанах ЛИКС-2 и МедИнж-СТ на 15% и 10%, соответственно (рис. 4).

Минимальные утечки наблюдаются у дискового клапана ЛИКС-2, запирающий элемент которого плотно прилегает к корпусу протеза, тогда как у клапанов МедИнж-2 и МедИнж-СТ шарниры запирающих элементов специально сделаны омываемыми, чтобы понизить риск тромбообразования. Такая конструкция шарниров предполагает наличие щелей между створками и корпусом клапана при полном закрытии створок.

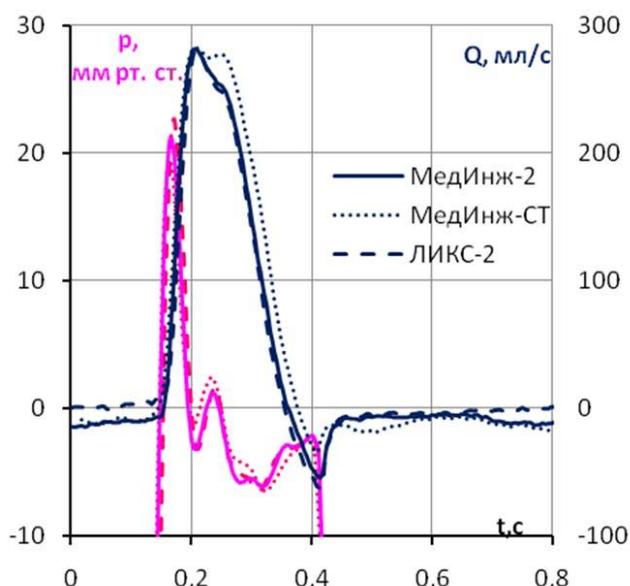


Рис. 3. Зависимость трансаортального перепада давления и аортального расхода от времени для трех клапанов

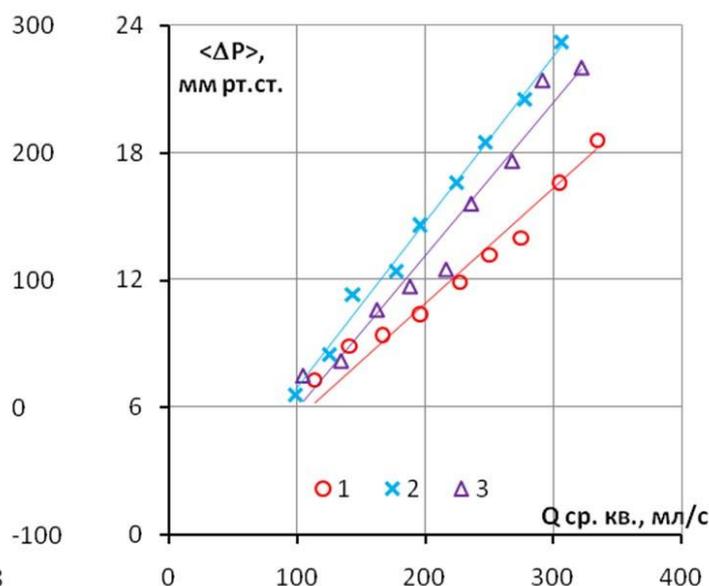


Рис. 4. Зависимость трансаортального перепада от средневладратичного расхода (1 – МедИнж-СТ, 2 – ЛИКС-2, 3 – МедИнж-2)

В таблице 1 приведено сопоставление результатов измерений с литературными данными при близких значениях минутного объема кровообращения  $Q$ . Отличие от экспериментальных данных [1] объясняется разницей в конструкциях пульсдубликаторов, а от результатов клинических исследований [3] – применением в них косвенного метода измерения перепада давления с использованием ультразвукового доплеровского прибора.

Табл. 1. Гидродинамические характеристики трёх искусственных клапанов сердца

Источник	Q л/мин	Ликс-2		МедИнж-2		МедИнж-СТ	
		$\langle \Delta P \rangle$ мм рт. ст.	$V_{рег}$ мл	$\langle \Delta P \rangle$ мм рт. ст.	$V_{рег}$ мл	$\langle \Delta P \rangle$ мм рт. ст.	$V_{рег}$ мл
	5	12.4	3.7	11.7	6.3	10.4	8.0
Орловский и др., 2007 [1]	5	5.2	7.5	3.8	8.7	-	-
Белостоцкий и др., 2001 [3]	$5.6 \pm 1.8$	-	-	5.0	9.0	-	-

Таким образом, новый полнопроточный клапан МедИнж-СТ характеризуется наименьшим сопротивлением прямому потоку жидкости. При этом он имеет максимальные из исследованных клапанов обратные утечки, которые, впрочем, не выходят за рамки допустимых значений. Максимальным перепадом и минимальными утечками характеризуется дисковый клапан ЛИКС-2.

#### ЛИТЕРАТУРА:

1. Орловский П.И., Гриценко В.В., Юхнев А.Д., Евдокимов С.В., Гавриленков В.И. Искусственные клапаны сердца / Под ред. акад. РАМН Шевченко Ю.Л. - СПб: ЗАО «ОЛМА-медиа групп», 2007. - 448 с. - ISBN 978-5-373-00314-8.
2. Сеницына Д.Э., Коннов Е.И., Юхнев А.Д. Исследование гидродинамических характеристик протезов клапанов сердца // XLI Неделя науки СПбГПУ, Материалы научно-практической конференции с международным участием. - Санкт-Петербург: 2012. - Т. V (Физико-механический факультет). - с. 27-28.
3. Белостоцкий В.Э., Новиков В.К. Клиническое использование отечественного двустворчатого искусственного клапана сердца «МедИнж» // Вестник аритмологии. - Санкт-Петербург: 2001. - вып. 21. - с. 63-68. - ISSN 1561-8641.

УДК 532.5.013.13

Е.Ф. Храпунов, Ю.С. Чумаков  
(Санкт-Петербургский государственный политехнический университет)

### ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ СТРУКТУРЫ СВОБОДНОКОНВЕКТИВНОГО ПОТОКА ОТ ЛОКАЛЬНОГО ИСТОЧНИКА ТЕПЛА

Восходящие или, так называемые, свободноконвективные течения различной природы являются объектом изучения на протяжении десятков и даже сотен лет. Повышенный интерес к подобным течениям связан, прежде всего, с вековой мечтой человечества научиться правильно и надежно предсказывать погоду, формирование которой, в первую очередь, определяется образованием и взаимодействием циклонов и антициклонов. Понимание этих процессов невозможно без всестороннего изучения особенностей свободноконвективных течений. Умение рассчитывать свободноконвективные течения, особенно в случае турбулентного режима, имеет большое значение при решении различных прикладных задач, например, выброс и распространение загрязняющих веществ в атмосфере, формирование микроклимата в различных помещениях, расчет процессов теплообмена, а также большой класс задач по проблемам неустойчивости подобных течений.

Изучение свободноконвективных потоков возможно несколькими методами, к примеру: аналитическое решение уравнений баланса массы, количества движения и энергии [1], численные методы моделирования турбулентных течений [2,3], экспериментальные методы [2-5].

Авторы всех перечисленных работ акцентируют внимание на существенной турбулентности течения, что, несомненно, заметно усложняет исследования. Тем не менее, за прошедшие годы были достигнуты значительные успехи по обнаружению и объяснению отдельных эффектов. При решении уравнений с помощью интегральных методов были найдены автомодельные решения для осредненных величин в развитой части потока. Автомодельность профилей подтверждается в экспериментальных исследованиях, а коэффициенты в описывающих их зависимостях уточняются с помощью новых данных. Полученные результаты хорошо иллюстрируют отдельные особенности течения, однако не позволяют представить его структуру в целом. Некоторые современные экспериментальные

методы лишены этого недостатка. Так в работе [5] используется метод PIV (Particle Image Velocimetry), который позволяет экспериментально определить поля векторов скорости. При численных исследованиях свободноконвективных течений были достигнуты определенные успехи в применении прямого численного моделирования (DNS) и метода моделирования крупных вихрей (LES) [2,3].

Стоит отметить, что аналитическими решениями уравнений занимались многие исследователи в середине XX века, и сейчас этот метод применяется на практике все реже, так как он не позволяет в полной степени описать сложную структуру течения. Численное моделирование помогает провести комплексный анализ особенностей течения. Несмотря на то, что численные исследования проводятся уже достаточно давно, информация о «тонких» характеристиках турбулентности (корреляционные и спектральные моменты скоростных и температурных полей) остается весьма ограниченной, а нередко носит и противоречивый характер. Таким образом, продолжает оставаться актуальным дальнейшее накопление экспериментальных результатов для создания обширной базы данных, на основе которой можно будет создавать новые и совершенствовать существующие модели турбулентности.

Целью данной работы является экспериментальное исследование структуры свободноконвективного потока от локализованного источника тепла (подобное течение иногда называют свободноконвективным факелом). Задачи работы – исследовать течение с использованием методов визуализации и получить количественную информацию об особенностях потока, измерив температурные профили.

Для исследования свободноконвективного потока был разработан экспериментальный стенд (рис. 1), позволяющий воспроизводить течение в лабораторных условиях. Источником свободноконвективного факела служил массивный металлический диск диаметром 18 см, нагреваемый электричеством до необходимой температуры, за постоянство которой отвечала контролирующая система. Диск был размещен в камере больших размеров ( $1.15 \times 0.90 \times 1.50 \text{ м}^3$ ), что позволяло уменьшить влияние на поток внешних возмущений. Нагреваемая поверхность располагалась на одном уровне с основанием камеры. Для локализации источника тепла была установлена охлаждающая камера. Использовалась цилиндрическая сетка, создающая однородные граничные условия на периферии. Сетка также устраняла нежелательные возмущения, так как защитная камера не являлась непроницаемой.



Рис. 1. Экспериментальный стенд:  
1 – источник тепла, 2 – изолирующая камера,  
3 – траверсная система, 4 – система подачи  
воды, 5 – верхняя часть



Рис. 2. Картина течения вблизи источника тепла

Для визуализации использовалась оптическая система, позволяющая развернуть сфокусированный лазерный луч в плоскость, и генератор дыма. Визуализация осуществлялась несколькими способами: либо заполнением дымом всей камеры для наблюдения за эволюцией факела в целом, либо подачей дыма через тонкую трубочку в конкретную точку камеры для наблюдения за отдельными линиями тока. Точечные измерения температуры внутри факела производились с помощью термометра сопротивления, датчик которого представляет собой тонкую вольфрамовую нить длиной 3 мм и диаметром 5 мкм. По полученным значениям были построены профили температуры в различных сечениях факела.

На небольшой высоте над источником была обнаружена зона горизонтального пристенного течения, т.е. реализуется ситуация, при которой линии тока параллельны основанию камеры (и частично нагревательному элементу) и появление вертикальной компоненты скорости происходит лишь вблизи центра источника (рис. 2).

Было установлено, что имеется «эффективный» диаметр источника тепла – такой диаметр нагревательного элемента, над которым имеется восходящее течение. Стоит отметить, что «эффективный» диаметр не является постоянным (рис. 3).

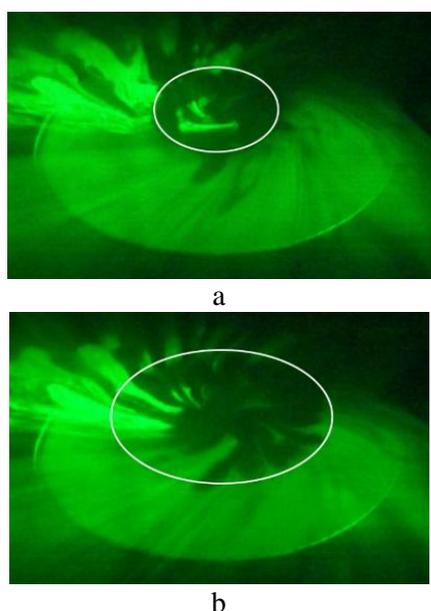


Рис. 3. Трансформации потока во времени на расстоянии 0.02 м над источником: а – стадия сужения; б – стадия расширения

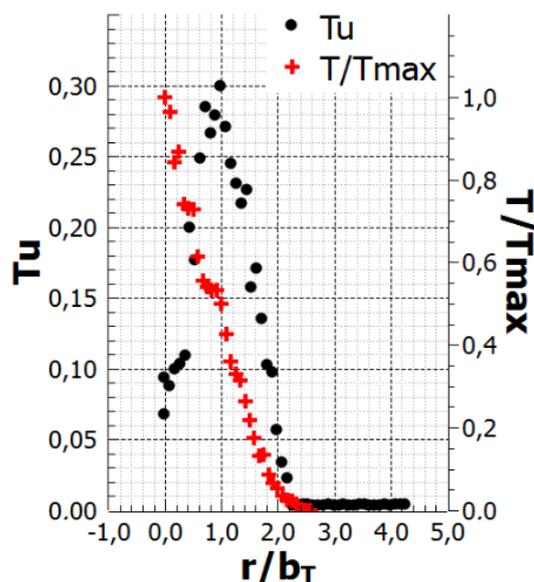


Рис. 4. Температурный профиль и пульсации температуры в области развитого течения

При исследовании температурного поля была найдена область автомодельности где все безразмерные профили осредненной температуры совпадают и удовлетворяют экспоненциальному закону. На рис. 4 представлен такой профиль температуры. Масштабом для продольной координаты  $r$  является температурный радиус струи ( $b_T$ ) – такое расстояние от центра источника в радиальном направлении, при котором  $T(b_T) = 0.5 \cdot T_{MAX}$ . Также на рисунке представлены пульсации температуры, график которых хорошо согласуется с аналогичными зависимостями, полученными другими исследователями [4].

В дальнейшем планируется продолжить исследование в нескольких направлениях: провести анализ влияния особенностей экспериментального стенда на формирование

течения, продолжить изучение формирующихся структурных особенностей, а также провести численное моделирование.

#### ЛИТЕРАТУРА:

1. Гебхарт Б., Джалурия Й., Махаджан Р., Саммакия Б. Свободноконвективные течения, тепло- и массообмен: В 2-х книгах: Пер. с англ. – М.: Мир, 1991.
2. Apichart Chaengbamrung. Turbulent plumes generated by a horizontal area source of buoyancy / PhD thesis, University of Wollongong, 2005.
3. Bastiaans R.J.M., Rindt C.C.M., Nieuwstadt F.T.M., Steenhoven, A.A. Direct and large-eddy simulation of the transition of two- and three-dimensional plane plumes in a confined enclosure // Int. J. Heat Mass Transfer, Vol. 43, 2000, pp. 2375-2393.
4. George W.K., Alpert R.L., Tamanini F. Turbulence measurements in an axisymmetric buoyant plume // Int. J. Heat Mass Transfer, Vol. 20, 1977, pp. 1145-1154.
5. Pham M.V., Plourde F., Kim S.D. Three-dimensional characterization of a pure thermal plume // Journal of Heat Transfer, Vol. 127, 2005, pp. 624-636.

УДК 532.517

А.И. Дьякова, А.М. Левченя  
(Санкт-Петербургский государственный политехнический университет)

#### ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ОСЕСИММЕТРИЧНОГО ОБТЕКАНИЯ ТОРА

Одной из актуальных задач гидроаэродинамики является задача о течении в окрестности плохообтекаемого тела, например, круглого цилиндра. Для нее характерно наличие концевых эффектов, искажающих вид течения в следе за телом, что было подтверждено в работе [1]. Чтобы их избежать, предложено рассматривать замкнутое тело в форме кольца.

Тор представляет универсальную фигуру с простой геометрией, описываемой отношением  $Ag$  среднего диаметра тора  $D$  к диаметру его поперечного сечения  $d$ . При изменении этого коэффициента тор может выродиться либо в сферу, либо в круглый цилиндр.

В данной работе проведено численное моделирование осесимметричного стационарного и нестационарного ламинарного обтекания тора потоком вязкой несжимаемой жидкости. Течение определяется системой уравнений Навье-Стокса [2]. Цель работы – исследовать влияние режимного параметра задачи (числа Рейнольдса  $Re$ , построенного по диаметру  $d$  и скорости набегающего потока  $V$ ) на режим обтекания тора.

Значение  $Ag$  тора, форма и размеры прямоугольной расчетной области соответствуют работе [3]. Размеры расчетной области достаточны для того, чтобы разрешить особенности течения в следе за кольцом, и само наличие внешних границ не влияет на обтекание тора. Граничные условия: слева задан равномерный профиль скорости, на верхней границе – касательная составляющая скорости, справа – выходная граница ( $P=0$ ), нижняя граница – ось вращательной симметрии тора, а на его поверхности задано условие прилипания. На рисунке 1 схематично изображена схема течения, геометрия, а также отражены некоторые граничные условия.

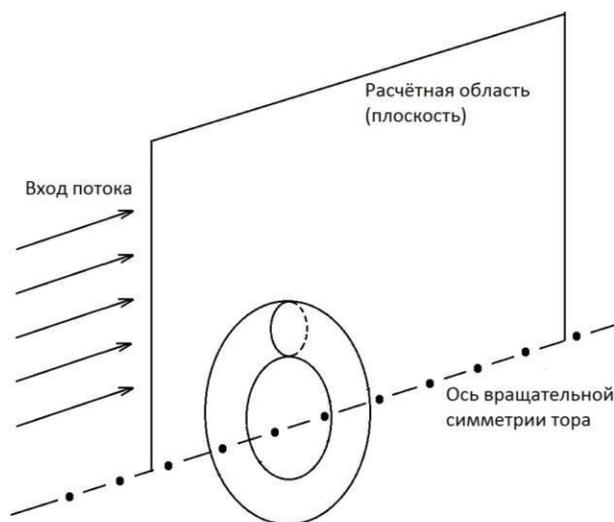


Рис.1. Схема течения и расчетная область

Для анализа эволюции решения во времени фиксируются точки мониторинга на расстоянии одного и четырех калибров вниз по потоку от тора. В них выводятся колебания осевой компоненты скорости на каждом шаге по времени. По колебаниям определяется амплитуда  $A$  как разница между максимальным и минимальным значением скорости за период.

Расчеты течения с использованием вычислительного пакета ANSYS Fluent [4] производились по методу SIMPLE, дискретизация уравнений осуществлялась со вторым порядком точности по пространству и времени. Изначально в качестве шага по времени  $\Delta t$  была выбрана одна десятая от времени, за которое поток проходит через кольцо. Далее величина  $\Delta t$  уменьшалась в четыре раза. Ее снижение привело к изменению амплитуды  $A$  менее чем на 1%, и все дальнейшие расчеты проводились с исходным значением  $\Delta t$ .

Для выполнения расчетов использовалась блочно-структурированная неравномерная сетка, построенная с помощью сеточного генератора ANSYS Gambit. Расчетная сетка состояла из 62 тысяч ячеек и имела 128 ячеек вдоль поверхности тора.

С целью показать наличие гистерезиса основные расчеты проводились в две серии: в качестве начального приближения использовалось либо решение с большим значением  $Re$ , либо решение с меньшим  $Re$ . Число Рейнольдса в расчетах менялось в диапазоне от 40 до 150, потому что при меньших скоростях течение заведомо стационарно, а при значении  $Re > 150$  может перейти в трехмерное. Варьирование величины  $Re$  в размерной постановке вычислительной задачи осуществлялось изменением скорости набегающего потока  $V$ . На приведенных ниже полях величины представлены в системе СИ.

Сначала получено стационарное осесимметричное решение при  $Re = 40$ . Колебания осевой скорости, возникающие в начале расчетов, затухают. В следе за тором образуется неподвижная зона рециркуляции, изображенная на рис. 2. Такое обтекание похоже на течение за круглым цилиндром, но возникает некоторое «искривление» зоны рециркуляции по направлению к оси вращения тора. Сходные картины стационарного течения получены при  $Re < 60$ .

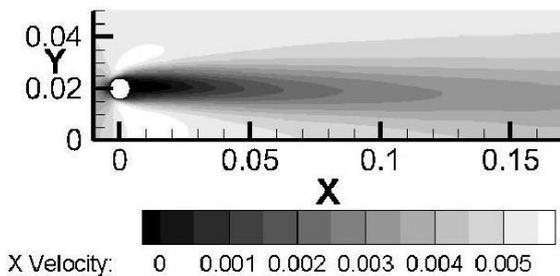


Рис. 2. Поле осевой скорости при  $Re=40$

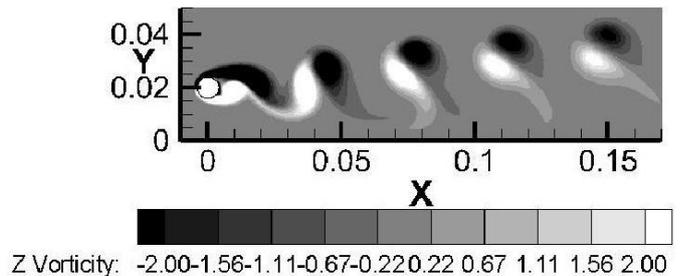


Рис. 3. Поле завихренности при  $Re=150$

Принципиально другим является нестационарное решение, полученное при  $Re = 150$ . Колебания осевой скорости входят в установившийся режим. В следе возникает осесимметричная дорожка Кармана, вихри в которой под действием градиента давления смещаются в сторону от оси вращения, что можно увидеть на рис. 3. Так же, в нестационарном режиме с формированием дорожки Кармана, течение происходит при  $Re$  от 70 до 125.

Из всего набора расчетов наиболее интересны результаты, полученные при  $Re = 60$  и  $Re = 65$ . При обтекании с  $Re = 65$  колебания осевой скорости достаточно заметны, что говорит о нестационарности, но в следе образуется некая структура, похожая на зону рециркуляции, которая показана на рис. 4. Эта структура отличается от «настоящей» зоны рециркуляции тем, что в ней присутствуют возмущения, приводящие к несимметричности. Наблюдается также зарождение вихрей, заметных в поле завихренности, представленном на рис. 5, что указывает на некоторую степень нестационарности течения. Для первой и второй серии расчетов картины течения практически совпадают, что говорит о слабом влиянии начальных условий. При  $Re = 60$  возникает тот же эффект, что и при  $Re = 65$ , но менее выраженный. Возможно, при большем времени расчета обтекание полностью перешло бы в стационарный режим. Здесь также можно сделать вывод о слабом влиянии начальных условий.

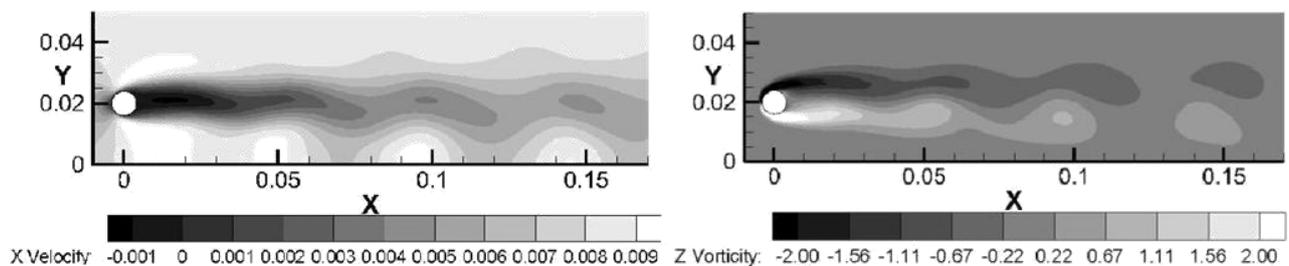


Рис. 4. Поля осевой скорости (слева) и завихренности (справа) при  $Re = 65$

Обобщение результатов расчетов показало наличие незначительной области гистерезиса решения (явление, которое состоит в том, что физическая величина, характеризующая состояние тела, неоднозначно зависит от физической величины, характеризующей внешние условия [5]) в диапазоне чисел Рейнольдса от 58 до 75, которую можно увидеть на рис. 6 (для удобства была использована логарифмическая ось ординат). Критическое значение  $Re$  перехода от стационарного режима обтекания тора к нестационарному равно 65.

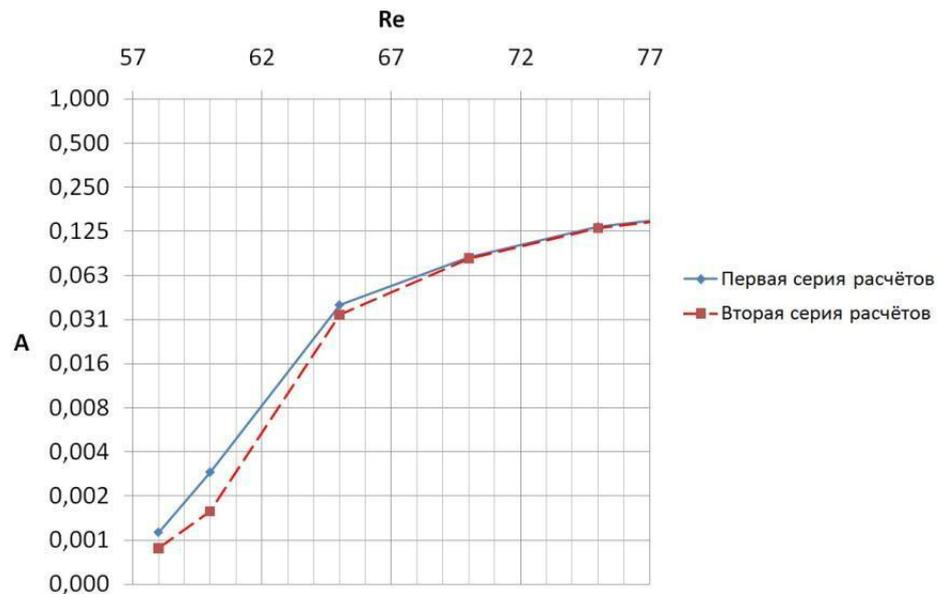


Рис. 5. Зона гистерезиса решения

#### ЛИТЕРАТУРА:

1. Williamson. H.K. Defining a universal and continuous Strouhal-Reynolds number relationship for the laminar vortex shedding of a circular cylinder // *Phys. Fluids* 31, 1988, p. 2742.
2. Лойцянский Л. Г. *Механика жидкости и газа*. – Изд. 7-е. М.: Дрофа, 2003, 840 с.
3. Sheard G.J. et al. The evolution of a subharmonic mode in a vortex street // *J. Fluid Mech*, vol. 534, 2005, pp. 23-38.
4. ANSYS FLUENT Theory Guide. Release 14.0. Ansys Inc. 2011.
5. *Физический энциклопедический словарь*. Главный редактор А.М. Прохоров. Изд. «Советская энциклопедия», Москва, 1983. 927 с.

УДК 681.5

И.И. Борисов, С. В. Кривошеев, Р. В. Олейник, С.С. Резников  
(Санкт-Петербургский НИУ информационных технологий, механики и оптики)

### РАЗРАБОТКА КОНСТРУКЦИИ ЭЛЕКТРОМЕХАНИЧЕСКОЙ РУКИ, ЕЁ СИСТЕМЫ УПРАВЛЕНИЯ И ОБРАТНОЙ СВЯЗИ

Одно из перспективных направлений развития робототехники и мехатроники является разработка андроидных роботов. В будущем они могут быть интегрированы повсеместно, помогая людям, например, с монотонной и рутинной деятельностью или работой в опасной или вредной среде, кроме того такие роботы могут быть использованы для изучения космоса и строительства лунной базы. Многие писатели фантасты представляют будущее человечества в виде интеграции живого и не живого, человека и машины, что будет способствовать усилению людей. Создание гуманоидного робота, как и любого сложного мехатронного устройства, носит комплексный характер, включающий в себя разработку конструкции, системы управления, а также обратной связи.

Данная работа посвящена разработке мехатронной руки, которая может быть использована в качестве электромеханического протеза кисти, а также в качестве захвата человекоподобного робота. Была разработана и изготовлена конструкция протеза (Рис.1). Фаланги и корпус изготовлены из ABS пластика, а шкив, самая ответственная деталь, с помощью которой приводится палец в движение, был выточен из дюралюминия Д13.

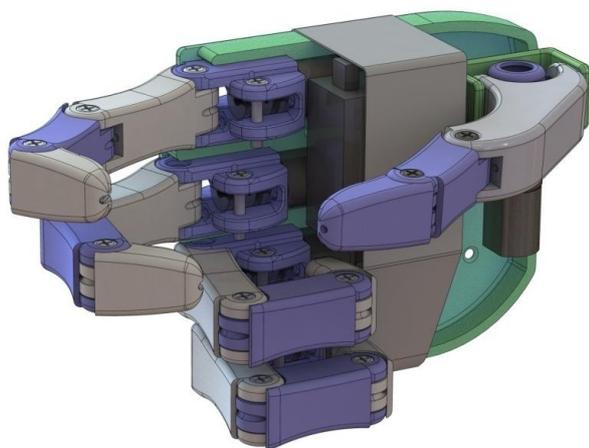


Рис. 1. Конструкция электромеханической руки

Шкив устанавливался на вал двигателя с помощью шпонки. Принцип сгибания пальцев протеза основан на системе тросов (Рис.2). Задачу сухожилий и мышц выполняли два нейлоновых троса, расположенные с внешней и внутренней стороны пальца. Тросы одним концом крепились за шкив, расположенный на валу двигателя, а вторым концом связывались на конце дистальной фаланги. При движении вала двигателя по часовой стрелке трос с внутренней части пальца наматывался на шкив, а трос с внешней стороны разматывался, тем самым приводя в движение палец. Каждый палец приводился в движение собственным двигателем ДПТ. Движение большого пальца осуществлялось двумя двигателями, а именно ДПТ и сервоприводом для возможности противопоставлять большой палец [1]. Компоновка составляющих, благодаря которой двигатели расположены внутри ладони протеза, и небольшой вес делают возможным установку устройства на культю пациента за счет своей компактности.

При разработке конструкции были проведены структурный, кинематический и динамический анализы. Один конец, являющийся дистальной фалангой, свободен, другой конец является неподвижной стойкой, относительно кисти. Степень свободы одного пальца равна 3, но степень подвижности равна 1. Степень подвижности всей конструкции равна 6, так как большой палец имеет 2 степени подвижности.

Решенная прямая задача кинематики помогла определить зависимость между координатами кончиков пальца и углами сгибания пальцев:

$$\begin{cases} l_1 \cos(\varphi_1) + l_2 \cos(\varphi_2) + l_3 \cos(\varphi_3) = x_c \\ l_1 \sin(\varphi_1) + l_2 \sin(\varphi_2) + l_3 \sin(\varphi_3) = y_c \end{cases} \quad (1)$$

где  $l_1, l_2, l_3$  – длины каждой из фаланг, а  $x_c$  и  $y_c$  – координаты крайней точки пальца. Но так как фаланги сгибаются на одинаковые углы относительно друг друга, то систему уравнений (1) можно переписать в следующем виде:

$$\begin{cases} l_1 \cos(\varphi_1) + l_2 \cos(2\varphi_1) + l_3 \cos(3\varphi_1) = x_c \\ l_1 \sin(\varphi_1) + l_2 \sin(2\varphi_1) + l_3 \sin(3\varphi_1) = y_c \end{cases} \quad (2)$$

Кроме того есть зависимость между вращением шкива и поворотом проксимальной фаланги. Эмпирически было определено, что полному сгибанию проксимальной фаланги на  $90^\circ$  соответствует 1,5 поворота катушки вокруг своей оси, т.е.  $540^\circ$ . В итоге получаем, что для сгибания проксимальной фаланги на угол  $\varphi_1$  шкив должен повернуться на угол  $6\varphi_1$ :

$$\alpha = 6\varphi_1 \quad (3)$$

Проведенный динамический анализ помог рассчитать длины фаланг, обобщенную силу натяжения троса, по значению которой был подобран двигатель. Относительно каждого сустава можно составить систему уравнений моментов:

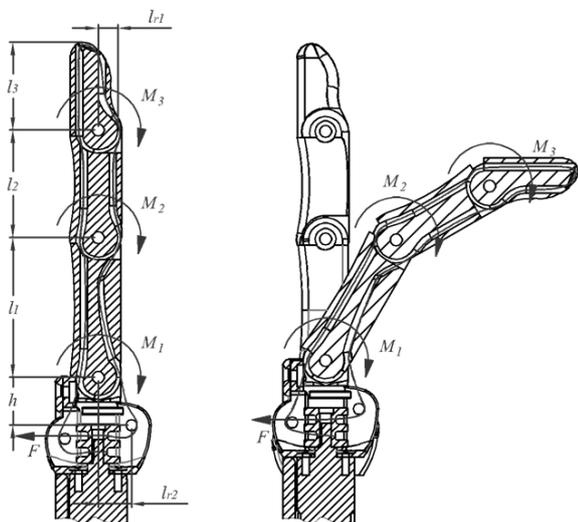


Рис. 2. Схема принципа сгибания

$$\begin{cases} M_3 = G_3 \frac{l_3}{2} \cos(\varphi) + F_3 l_3 + F_3 l_{r1} - M_T - P l_3 \\ M_2 = G_2 \frac{l_2}{2} \cos(\varphi) + F_2 (l_2 + l_{r1}) - M_T \\ M_1 = G_1 \frac{l_1}{2} \cos(\varphi) + F_1 (l_2 + \sqrt{(l_{r2}^2 + h^2)}) - M_T \end{cases} \quad (4)$$

где  $G_i$  – сила тяжести  $i$ -ой фаланги;  $F_i$  – составляющая обобщенной силы, действующая только на  $i$ -ю фалангу;  $M_T$  – момент трения в суставах;  $P$  – внешняя нагрузка. Из системы уравнений (4) можно выразить значения сил  $F_i$ , суммировать и получить обобщенную силу натяжения троса. В результате было получено значение момента вращения вала двигателя, наматывающего трос на шкив, равное 2 (кг · см). В конструкцию был установлен мотор-редуктор с моментом 4,8 (кг · см).

В самом абстрактном смысле управление является набором алгоритмов по обработке входных сигналов, их преобразованию и передаче выходных сигналов. На данный момент был разработан алгоритм анализа входных сигналов и их преобразования, данные значения будут управляющими сигналами. В качестве входных сигналов протез будет использовать мышечные токи, значения которых будут сниматься электродами с культи пользователя. Различаться они будут длительностью и «направлением» сокращения [2], например, при написании алгоритма были использованы следующие сокращения: единичное мышечное сокращение длительностью менее 1,5 с; два единичных мышечных сокращения с интервалом менее 2 с; единичное длительное мышечное сокращение, длительностью более 1,5 с. Алгоритм анализировал и сравнивал входные сигналы, преобразуя их в выходной сигнал. Длительное мышечное сокращение было условно приравнено к двум, единичное мышечное сокращение к одному, а двойное мышечное сокращение к трем [3].

Как говорилось ранее, разрабатываемое устройство можно будет использовать не только в качестве протеза, но и захвата человекоподобного робота. В таком случае система управления может быть реализована иным способом, давая больше возможностей оператору,

чем использование вышеописанного способа. Здоровый оператор, без ампутаций может использовать специальную перчатку [4], передающую значения положений его пальцев роботу, т.е. человек может управлять «телом» робота, как своим. На перчатке установлены тензометрические датчики, контроллер и Bluetooth передатчик. При сгибании пальцев человека сопротивление тензодатчиков меняется пропорционально углам поворота фаланг. Эти данные передаются по Bluetooth на искусственную руку, которая сгибает пальцы синхронно с оператором на те же углы. На данный момент эта система реализована и испытана на разработанном прототипе.

Третья составляющая разработки электромеханической руки – создание обратной связи. Обратная связь, реализуемая с помощью датчиков, имеет важное значение как для пациента, использующего протез, так и для разработчиков. Протез должен автоматически подстраиваться к форме схватываемого объекта (адаптивный захват) и обеспечивать крепкий захват без проскальзывания.

Согласно классификации Шеррингтона[5], для максимального сходства с человеческими чувствами датчики должны обеспечивать два типа "искусственных ощущений": проприоцептивные и экстроцептивные. Проприоцептивные ощущения помогают человеку ориентировать части своего тела относительно друг друга в пространстве, т. е. датчикам необходимо обеспечивать протез и пациента информацией о положении и перемещении пальцев искусственной руки. Изменение положения пальцев протеза может фиксироваться с помощью потенциометров с отрицательной обратной связью. Экстроцептивные ощущения предоставляют человеку информацию о внешнем мире через рецепторы, расположенные на поверхности тела, т. е. необходимо датчикам сообщать о взаимодействии руки с объектами и окружающей средой. Используя гибкие датчики давления, расположенные на рабочей поверхности дистальной фаланги, совместно с датчиком, регистрирующим изменение напряжения на двигателе, можно реализовать экстроцептивную систему датчиков.

В ходе проведенной работы был изготовлен прототип конструкции электромеханической руки. При разработке протеза были проведены кинематический и динамический анализы. Компоновка составляющих конструкции, благодаря которой двигатели расположены внутри ладони протеза, и небольшой вес делают возможным установку устройства на культю пациента за счет своей компактности. На данный момент был разработан алгоритм анализа ЭМГ сигналов и их преобразования, данные значения будут управляющими сигналами. Кроме того была реализована и испытана система управления протезом с помощью перчатки с тензодатчиками. Помимо этого был проведен поиск датчиков, которые можно установить на устройство для обеспечения обратной связи.

#### ЛИТЕРАТУРА:

1. Борисов И.И., Кривошеев С.В., Резников С.С. Моделирование движения пальца протеза кисти // Альманах научный работ молодых ученых Университета ИТМО. – 2014. – С. 55–58.
2. Qi Huang, Li Jiang, Dapeng Yang, and Hong Liu: A Novel EMG Control Method for Multi-DOF Prosthetic Hand with Electrical Stimulation Feedback. 6th International Conference, ICIRA 2013
3. Кривошеев С.В., Орманов Д.Р. Управление моделью многозвенного манипулятора с помощью значения электрических токов, снятых с поверхности руки // Автоматизация и современные технологии. – 2014. – No 2. – С. 41–44;
4. Jose Gonzalez, Hirokazu Soma, Masashi Sekine, Wenwei Yu: Psycho-physiological assessment of a prosthetic hand sensory feedback system based on an auditory display: a preliminary study. Journal of NeuroEngineering and Rehabilitation 2012.
5. M. C. Carrozza· G. Cappiello· S. Micera· Design of a cybernetic hand for perception and action 11 © Springer-Verlag 2006;

СМЕШАННОЕ МАТЕРИАЛЬНО-ПРОСТРАНСТВЕННОЕ ОПИСАНИЕ ДЛЯ  
МОДЕЛИРОВАНИЯ ДВУХКОМПОНЕНТНЫХ СРЕД

Течения смеси через деформируемое твердое тело – чрезвычайно широкий класс задач, который включает в себя движение смеси через пористые структуры, рост и развитие трещин в твердом теле под воздействием на него смеси и пр. Режимы течения при этом очень разнообразны и определяются огромным числом факторов: вид смеси (жидкость, суспензия, газовзвесь), плотность, вязкость, характерные скорости и размеры, наличие химических реакций и фазовых переходов и т.д. Первая сложность, которая возникает при исследовании такого рода задач, - определение напряженно-деформированного состояния твердой и жидкой составляющих, которые существенно отличаются от моделей жидкости или деформируемого твердого тела. Так, для описания кинематики деформируемых твердых тел, как правило, используется материальный (Лагранжев) подход, а для описания жидкости – пространственный (Эйлеров). Для описания твердого тела пространственный подход представляется более трудоемким, для описания жидкости материальный подход имеет ряд ограничений, связанных с тем, что движение жидкости может сопровождаться перемешиванием частиц, и, следовательно, нарушением гипотезы о сохранении локальной топологии, положенной в основу материального подхода.

Второй проблемой, которая возникает при моделировании двухкомпонентных сред, является описание взаимодействия твердой и жидкой компонент. Существующие законы взаимодействия учитывают только вязкие эффекты (закон Дарси, закон Фика). Однако в некоторых случаях упругие силы могут вносить существенный вклад в процессы движения обеих компонент.

Одной из первых работ, посвященных построению моделей двухкомпонентных сред, является работа [4]. Теория Био опирается на представление твердой и жидкой компонент как единого континуума, вследствие чего уравнения имеют ту же общую структуру, что и уравнения для однокомпонентной среды: они представляют собой систему уравнений движения сплошной среды и определяющих уравнений. Определяющие соотношения двухкомпонентной среды сформулированы на основе феноменологического подхода механики сплошных сред. Вилмански [5] также использует идею о представлении насыщенного жидкостью пористого твердого тела как единого целого. Отметим, что в основу моделей Био и Вилмански положен материальный подход: все соотношения строятся в отсчетной конфигурации, что существенно ограничивает область применения моделей. Помимо этого, существуют работы, в основу которых положен пространственный подход [3].

В данной работе предлагается альтернативный подход, объединяющий в себе материальный и пространственный способы описания движения сплошной среды, что позволяет избежать ограничений, возникающих при использовании каждого из этих подходов в отдельности. С использованием смешанного подхода сформулированы уравнения баланса массы, количества движения, кинетического момента и энергии. Получены определяющие соотношения для упругих и неупругих составляющих тензоров силовых и моментных напряжений каждой компоненты, а также сил и моментов, характеризующих взаимодействие между компонентами.

Рассмотрим движение среды, состоящей из жидкости и твердого тела. Пусть  $V$  есть некоторый контрольный объем деформируемого твердого тела, находящийся в текущей конфигурации в точке с радиус-вектором  $\mathbf{r}$ , определенным как функция соответствующего ему радиус-вектора  $\mathbf{R}$  в отсчетной конфигурации и времени  $t$ . Контрольный объем движется со скоростью  $\mathbf{V}_s$ . Граница контрольного объема  $\partial V$  — это замкнутая поверхность. Жидкость движется через границу  $\partial V$  (рис.1). Все переменные для жидкости определены как функции вектора  $\mathbf{r}$  и времени  $t$ . Таким образом, удается избежать необходимости определения отсчетной конфигурации для жидкости.

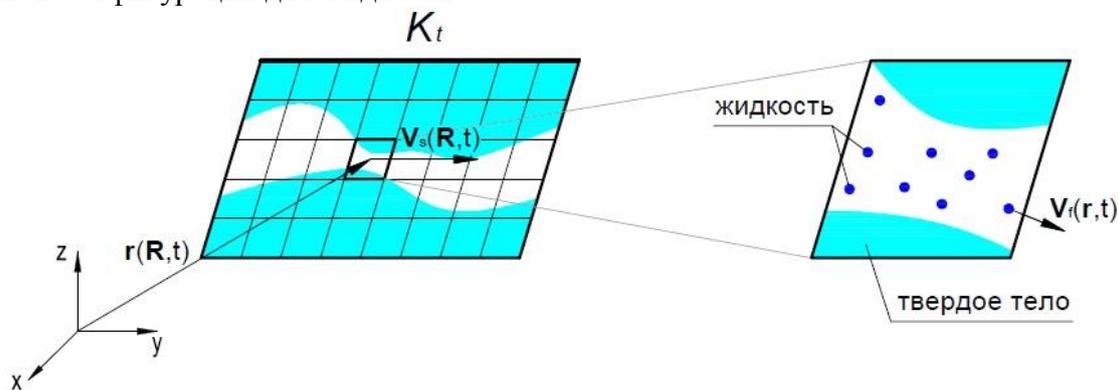


Рис. 1. Схематическое представление смешанного материально-пространственного описания двухкомпонентной среды

При построении уравнений баланса массы работе вводятся операторы материальной производной для жидкой компоненты и среды в целом относительно движущегося контрольного объема. Данные операторы обобщают понятие классической материальной производной [2] с помощью подхода П.А. Жилина.

В работе предложена модель течения жидкости через насыщенные пористые неупругие среды. Для описания относительного движения жидкости через твердое тело введен контрольный объем, связанный с частицами твердого тела. Описание движения жидкости через твердое тело осуществляется с помощью пространственного подхода. Предполагается, что такой подход является более физичным, чем материальное описание, и более приемлемым с точки зрения эволюции твердого тела, чем пространственное описание.

В работе приведена система балансовых и определяющих уравнений.

Сформулированы уравнения балансы массы, количества движения и момента количества движения для жидкости и твердого тела. Помимо этого, построено уравнение баланса энергии. С использованием подхода Жилина [1] записаны определения энтропии твердого тела и жидкости, а также для неупругих компонент тензоров напряжений и сил и моментов взаимодействия.

Получены соотношения Коши-Грина для упругих составляющих тензоров силовых и моментных напряжений. Записаны уравнения для определения векторов силового и моментного упругого взаимодействия между компонентами. Эти определяющие соотношения для записываются в актуальной конфигурации.

#### ЛИТЕРАТУРА:

1. Жилин П. А. Рациональная механика сплошных сред: учеб. пособие / Жилин. П. А. – Санкт-Петербург: Изд-во Политехн. ун-та, 2012. 584 с.
2. Лойцянский Л. Г. Механика жидкости и газа / Лойцянский Л. Г. - М.: Наука, 1987. 840 с.
3. Нигматулин Р.И. Динамика многофазных сред, часть 1. М.: Наука, 1987. 464 с.
4. Biot, M.A. General theory of three-dimensional consolidation // J. Appl. Phys. – 1941. V. 12. p. 155-164.
5. Wilmanski K. Continuum thermodynamics. Part 1: Foundations. Singapore: World Scientific, 2008. 403 p.

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ВЛИЯНИЯ КЛЕЕВОЙ ПРОСЛОЙКИ НА  
МАГНИТОЭЛЕКТРИЧЕСКИЙ ЭФФЕКТ В МАГНИТОСТРИКЦИОННО-  
ПЬЕЗОЭЛЕКТРИЧЕСКИХ СТРУКТУРАХ

Представлено математическое моделирование теории магнитоэлектрического (МЭ) эффекта в магнитоэлектрично-пьезоэлектрической (МП) структуре с учетом межслоевой клеевой прослойки. В качестве предмета исследования была выбрана двухслойная структура никель – цирконат-титанат свинца приклеенная эпоксидным клеем. Представлены теоретические зависимости смещений в магнитоэлектричной и пьезоэлектрической фазе по толщине образца при разных значениях толщины клея между слоями. Зависимости имеют нелинейный характер, и их учет приводит к заметному вкладу в величину эффекта. На основе совместного решения уравнений эластодинамики и электростатики для магнитоэлектричной, клеевой и пьезоэлектрической фаз получено выражение для частотной зависимости МЭ эффекта в области электромеханического резонанса. Полученные соотношения в предельном случае, когда толщина клея стремится к нулю, переходят в соотношения, полученные ранее для случая идеальной связи.

Недавно, в работах [1,2] была построена теория МЭ эффекта в слоистых МП структурах с учетом клеевого соединения магнитоэлектричной и пьезоэлектрической компонент. Однако в этих работах не было представлено пространственное распределение смещений и влияние толщины клея на величину смещений в магнитоэлектричной и пьезоэлектрической фазе.

В данной работе рассмотрено влияние клеевой прослойки на величину МЭ эффекта в двухслойной МП структуре. В качестве модели рассмотрена структура, представляющая клеевое соединение феррита и пьезоэлектрика в форме прямоугольной пластинки. Будем считать, что длина пластинки  $L$  много больше ее ширины  $W$ , в то время как толщину магнетика  $^m t$  пьезоэлектрика  $^p t$  и клея  $^G t$  будем считать конечной величиной. Система координат выбрана таким образом, чтобы начало совпадало с границей раздела клей-пьезоэлектрик, а ось  $Z$  направлена вертикально вверх, перпендикулярно границе раздела.

Пьезоэлектрический слой предварительно поляризована перпендикулярно плоскости контактов (ось  $Z$ ). Ограничимся рассмотрением продольного эффекта. В этом случае магнитные поля (подмагничивающее  $H_{bias}$  и переменное  $H$ ) совпадают с направлением вектора поляризации.

Полагая пластинку узкой, в первом приближении можно считать, что вдоль оси  $Y$  смещения будут однородными и отличными от нуля компонентами будут только компоненты напряжений  $T_{xx}$  и  $T_{xz}$ . Уравнение движения для  $x$  – проекции вектора смещения среды  $^{\alpha} u_x$  запишем в виде:

$$^{\alpha} \rho \frac{\partial^2 {}^{\alpha} u_x}{\partial t^2} = \frac{\partial {}^{\alpha} T_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial {}^{\alpha} T_{xz}}{\partial z}, \quad (1)$$

где индекс  $\alpha$  равен соответственно  $m$  для магнитоэлектричного,  $p$  для пьезоэлектрического и  $G$  для клеевого слоя,  $^{\alpha} \rho$  – плотность феррита, пьезоэлектрика или клея соответственно,  ${}^{\alpha} T_{ij}$  – тензор напряжений.

Уравнения для тензора деформаций  ${}^{\alpha}S_{ij}$  для магнитоэлектрической, клеевой и пьезоэлектрической фазы имеют следующий вид:

$${}^mS_{xx} = \frac{1}{mY} {}^mT_{xx} + {}^mq_{xx,z} {}^mH_z, \quad (2) \quad {}^pS_{xx} = \frac{1}{pY} {}^pT_{xx} + {}^pd_{xx,z} {}^pE_z, \quad (6)$$

$${}^mS_{xz} = \frac{1}{mG} {}^mT_{xz}, \quad (3) \quad {}^pS_{xz} = \frac{1}{pG} {}^pT_{xz}, \quad (7)$$

$${}^GS_{xx} = \frac{1}{GY} {}^GT_{xx}, \quad (4) \quad {}^pD_z = {}^p\varepsilon_{zz} {}^pE_z + {}^pd_{xx,z} {}^pT_{xx}. \quad (8)$$

$${}^GS_{xz} = \frac{1}{GG} {}^GT_{xz}, \quad (5)$$

Здесь  ${}^mq_{xx,z}$  – пьезомагнитный тензор,  ${}^pd_{xx,z}$  – пьезоэлектрический тензор,  ${}^p\varepsilon_{zz}$  – тензор диэлектрической проницаемости пьезоэлектрика,  ${}^{\alpha}Y, {}^{\alpha}G$  – модули Юнга и модули сдвига,  ${}^pE_z$  и  ${}^mH_z$  –  $z$ - проекция вектора напряженности электрического и магнитного полей в пьезоэлектрике и магнетике соответственно.

Так как имеется неоднородность вдоль оси  $Z$ , решение уравнение для вектора смещения среды представим в виде плоских волн, амплитуда которых изменяется по толщине образца

$${}^{\alpha}u(x, z) = {}^{\alpha}g(z) \left[ {}^{\alpha}A \cos(\omega t - kz) + {}^{\alpha}B \sin(\omega t - kz) \right], \quad (9)$$

где  ${}^{\alpha}A$  и  ${}^{\alpha}B$  – постоянные интегрирования,  $\omega$  – угловая частота,  $k$  – волновое число,  ${}^{\alpha}g(z)$  – некоторая функция.

Условия механического равновесия на свободных боковых поверхностях образца в точках  $x = \mp L/2$  дают следующие граничные условия:

$$\int_{-p_t}^0 {}^pT_{xx}(\pm L/2, z) dz + \int_0^{G_t} {}^GT_{xx}(\pm L/2, z) dz + \int_{G_t}^{m_t+G_t} {}^mT_{xx}(\pm L/2, z) dz = 0. \quad (10)$$

Используя эти граничные условия и уравнение (9), для смещения магнитоэлектрической и пьезоэлектрической среды получим следующие выражения:

$${}^mu_x = \left[ \exp(-2{}^m\kappa - 2{}^m\chi^G t) \exp({}^m\chi z) + \exp(-{}^m\chi z) \right] B \sin(kx), \quad (11)$$

$${}^pu_x = \frac{\exp(-{}^m\chi^G t) (1 + \exp(-2{}^m\kappa))}{1 - \operatorname{tg}^p \kappa \frac{{}^pY^p \chi^G}{G Y^G} \kappa} \left[ \cos({}^p\chi z) - \operatorname{tg}({}^p\kappa) \sin({}^p\chi z) \right] B \sin(kx), \quad (12)$$

где

$$B = \frac{{}^mY^m {}^mq_{xx,z} \langle {}^mH_z \rangle + {}^pY^p {}^pd_{xx,z} \langle {}^pE_z \rangle}{k \cos(\kappa) \left( {}^mY^m t \frac{\operatorname{th}({}^m\kappa)}{{}^m\kappa} \left( 1 - \operatorname{tg}^p \kappa \frac{{}^pY^p \chi^G t}{G Y^G} \right) + {}^pY^p t \frac{\operatorname{tg}({}^p\kappa)}{{}^p\kappa} - \operatorname{tg}^p \kappa \frac{{}^pY^p \chi^G t^2}{2} \right)}; \quad \kappa = kL/2 \quad \text{и}$$

$${}^{\alpha}\kappa = {}^{\alpha}\chi^{\alpha} t \quad \text{безразмерные параметры; } {}^m\chi^2 = -2(1+\nu) \left[ \frac{\omega^2}{mV_L^2} - k^2 \right], \quad {}^p\chi^2 = 2(1+\nu) \left[ \frac{\omega^2}{pV_L^2} - k^2 \right],$$

$${}^G\chi^2 = 2(1+\nu) \left[ \frac{\omega^2}{GV_L^2} - k^2 \right]; \quad \frac{1}{\alpha V_L^2} = \frac{\alpha \rho}{\alpha Y}, \quad \alpha V_L - \text{ скорости продольных волн, } \nu - \text{ коэффициент}$$

Пуассона. Как видно из уравнений (11) и (12) решения представляют собой плоские волны, амплитуда которых изменяется по толщине образца. Это зависимость имеет нелинейный характер и в общем случае зависит не только от частоты колебаний, но и от толщины клея.

Легко показать, что в случае низких частот, когда безразмерные параметры  $\alpha_k$  меньше единицы, амплитуда перестает зависеть по толщине образца.

Представлены, рассчитанные по уравнениям (11) и (12), теоретические зависимости смещений магнитострикционной и пьезоэлектрической фазы для двухслойной структуры никель – цирконат-титанат свинца (Ni-PZT) приклеенная эпоксидным клеем, толщина которой меняется. Частота переменного магнитного поля  $f = 300$  кГц.

Как следует из этих зависимостей, амплитуда колебаний магнитострикционной фазы практически не изменяется по толщине слоя магнетика. Это объясняется тем, что переменное магнитное поле возбуждает колебания магнитострикционной среды одновременно по всей толщине слоя магнетика. В пьезоэлектрическом слое колебания возбуждаются посредством сдвиговых деформаций через границу раздела клей–пьезоэлектрик. Это приводит к тому, что амплитуда колебаний пьезоэлектрического слоя значительно уменьшается с глубиной.

Магнитоэлектрический коэффициент по напряжению определяется как отношение среднего значения напряженности электрического поля в структуре к среднему значению напряженности внешнего магнитного поля, ее вызвавшей т.е.:  $\langle \alpha_E \rangle = \langle E \rangle / H$ , где  $\langle E \rangle = U / ({}^m t + {}^p t)$  – среднее значение напряженности электрического поля в структуре,  $U$ -возникающая разность потенциалов между электродами.

Подставляя в уравнение (8) тензор напряжения из (6), с использованием условия разомкнутой цепи для МЭ коэффициента по напряжению, при продольном эффекте получим следующее выражение:

$$\alpha = \frac{{}^p Y^p d_{xx,z} \cdot {}^m q_{xx,x}}{\varepsilon_{zz} \Delta} \frac{{}^m Y^m t \cdot \text{tg}^p k / k \cdot \text{tg}^p k / {}^p k}{{}^m Y^m t \cdot \frac{th^m k}{{}^m k} \left( 1 - \text{tg}^p k \frac{{}^p Y^p k}{G Y} \frac{G t}{{}^p t} \right) + {}^p Y^p t \cdot \frac{\text{tg}^p k}{{}^p k} - \text{tg}^p k \cdot {}^p Y^p \chi \frac{G t^2}{2} \frac{{}^m t + G t + {}^p t}{{}^m t + G t + {}^p t}}, \quad (13)$$

где

$$\Delta = 1 - K_p^2 \left( 1 - \frac{{}^p Y^p t \cdot \text{tg}^p k / k \cdot \text{tg}^p k / {}^p k}{{}^m Y^m t \cdot \frac{th^m k}{{}^m k} \left( 1 - \text{tg}^p k \frac{{}^p Y^p k}{G Y} \frac{G t}{{}^p t} \right) + {}^p Y^p t \cdot \frac{\text{tg}^p k}{{}^p k} - \text{tg}^p k \cdot {}^p Y^p \chi \frac{G t^2}{2}} \right), \quad K_p^2 = \frac{{}^p Y ({}^p d_{xx,z})^2}{{}^p \varepsilon_{zz}}$$

- квадрат коэффициента электромеханической связи.

Как следует из выражения (13) частотная зависимость МЭ коэффициента по напряжению в одинаковой мере зависит от параметров магнитострикционного, клевого и пьезоэлектрического слоев. Легко показать, что в случае, когда толщина клея стремится к нулю, выражение для МЭ коэффициента переходит в выражение для МЭ коэффициента по напряжению для случая идеальной связи. Таким образом, представленное уравнением (14) выражение для МЭ коэффициента по напряжению является более общим, чем выражения, полученные ранее.

#### ЛИТЕРАТУРА:

1. Галичан Т.А., Филиппов Д.А. Учет клеевой прослойки в теории магнитоэлектрического эффекта в двухслойных магнитострикционно-пьезоэлектрических структурах // Вестник НовГУ., 2013, Т. 2, № 75, С. 82-86.
2. Filippov D.A., Galichyan T.A., Laletin V.M. Influence of an interlayer bonding on the magnetoelectric effect in the layered magnetostrictive-piezoelectric structure // Appl. Phys. A, 2014, Vol. 116, № 4, P. 2167-2171.

И.О. Гладков (Санкт-Петербургский государственный политехнический университет),  
М.С. Коробейникова (IMWF Uni Stuttgart)

## ИЗУЧЕНИЕ СКОЛЬЖЕНИЯ ОДИНОЧНОЙ КРАЕВОЙ ДИСЛОКАЦИИ В МОНОКРИСТАЛЛЕ ЖЕЛЕЗА, УПРОЧНЁННОГО НАНОРАЗМЕРНЫМИ ПЛАСТИНАМИ ГРАФЕНА

Представлены результаты моделирования движения краевой дислокации в металлической матрице альфа-железа методом молекулярной динамики при разных скоростях деформации и температурах. Продемонстрирована общая схема для симуляции с одиночной краевой дислокацией. Рассматривается влияние наличия пластины графена на высокоскоростное движение дислокации.

### 1. Введение

При изучении пластических свойств нанокompозитов вследствие малых характерных размеров включений важно детальное рассмотрение физических процессов на масштабном уровне носителей пластической деформации – дислокаций.

Одним из способов повысить прочность материала является дисперсионное упрочнение. В данной работе изучается возможность упрочнения железа нанопластинами графена, которые могут образовываться за счёт диффузии атомов углерода в однослойные зоны Гинье-Престона.

Метод молекулярной динамики (МД) позволяет подробно рассматривать физические процессы на микроуровне. В том числе он активно применяется для исследования дислокационного скольжения, дополняя натурный эксперимент или являясь звеном в иерархии более сложных многомасштабных моделей. К примеру, в работе [7] показана возможность определения энергии активации дислокационного скольжения в МД-модели для дальнейшего использования в симуляции динамики дискретных дислокаций. В работе [2] используется двухуровневая модель для изучения поведения динамического предела текучести в алюминии.

### 2. Расчётная схема

Расчётная область представляет из себя параллелепипед с физическими размерами  $l_x \times l_y \times l_z = 14.7 \times 12.0 \times 8.4 \text{ нм}$  (см. рис. 1). Внутри области расположен монокристалл железа, ориентированный специальным образом. Монокристалл содержит дислокацию с вектором Бюргера  $\mathbf{b} = \frac{1}{2}[111]$  и вектором нормали  $\mathbf{n} = [\bar{1}10]$ , которые соответствуют системе наиболее лёгкого скольжения для ОЦК кристалла. На рисунке 2 продемонстрирована методика генерации краевой дислокации в кристалле.

Выделяются две области: L и H, содержащие по три приграничных атомных плоскости. Накладывая определённые связи на атомы в этих областях можно контролировать деформацию. В направлении оси Z (то есть в направлении линии дислокации) и оси X применяются периодические граничные условия. Это значит, что схема соответствует модели периодического массива бесконечно протяжённых дислокаций. Такая модель является достаточно распространённой и эффективной [4]. В направлении оси Y граничные условия полагаются свободными. В отличие от классического подхода с жёсткой фиксацией приграничных рядов атомов [5], такой подход позволяет избежать некоторых искусственных эффектов, например, действия дополнительной периодической силы на дислокацию [7].

Рассматриваются две схемы деформации: с приложением постоянной сдвиговой нагрузки и с постоянной скоростью сдвига. Для контроля сдвиговых напряжений можно добавить силы вдоль оси X, равномерно распределённые по атомам в приграничных областях L и H. Для контроля постоянной скорости относительного сдвига можно добавить такие равномерно распределённые по L и H силы, которые бы компенсировали силы, действующие на центры масс этих областей [7]. После этого центры масс будут двигаться равномерно, их скорость мы можем задать в начале симуляции.

### 3. Результаты

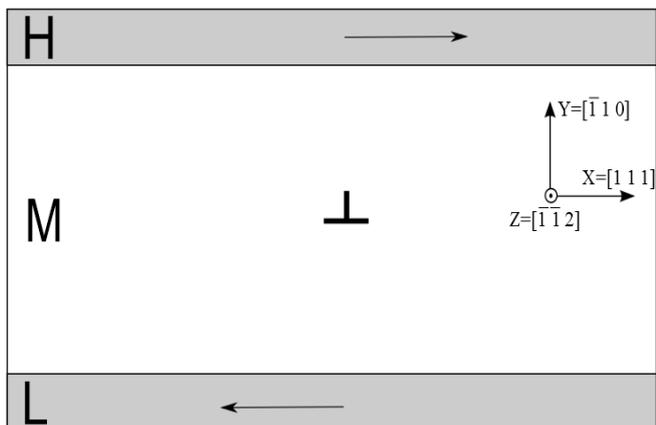


Рис. 1. Схема расчётной области

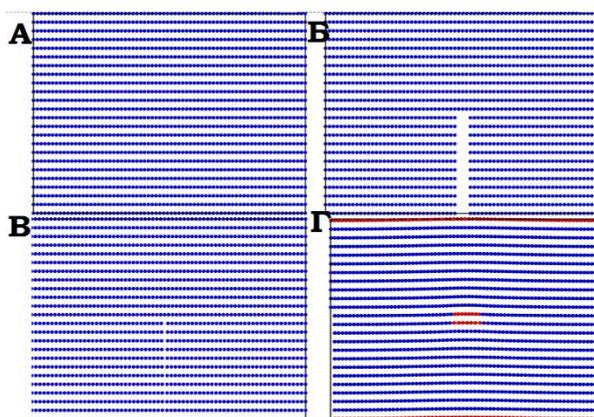


Рис. 2. Четыре этапа генерации дислокации: А) идеальный кристалл; Б) вырез; В) сближение границ выреза; Г) релаксация ядра

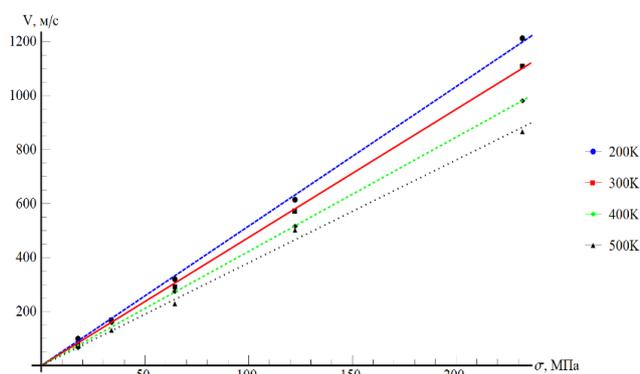


Рис. 3. Зависимости скорости движения дислокации от сдвигового напряжения при различных температурах

#### 3.1 Скольжение дислокации в кристалле без дополнительных препятствий

Получены зависимости скорости движения дислокации от приложенного сдвигового напряжения в области быстрого движения дислокации, при котором основной вклад в сопротивление скольжению вносит фоновое

трение [1]. Для этого была реализована схема с контролем сдвиговых напряжений.

Вплоть до скорости, равной приблизительно половине предельной скорости, связь хорошо описывается известным линейным соотношением  $\sigma b = B_0(T)V$  (рисунок 3) [6]. При дальнейшем увеличении напряжений зависимость приобретает нелинейный характер с выходом на предельные скорости в диапазоне 2000-2300 м/с, сравнимые с предельной скоростью поперечных волн (около 3000 м/с).

Для описания движения дислокации при скоростях, близких к предельной, могут использоваться, к примеру, псевдорелятивистские модели зависимости коэффициента динамического торможения:  $B(V, T) = \frac{B_0(T)}{(1 - (V/c_0)^2)^n}$  [3]. Неизвестные константы в подобных

моделях можно определять, приводя модели в соответствие с предсказаниями молекулярной динамики.

### 3.2 Скольжение дислокации с препятствием

Наличие пластины графена на пути дислокации оказывает на неё сильное воздействие, и в динамическом режиме преодоления препятствия приводит к большим пиковым напряжениям (рисунок 4). На рисунке 5 изображена дислокация, остановленная такого рода барьером. Анализ зависимости пиковых напряжений от температуры и скорости деформации позволяет сделать вывод о том, что дополнительный упрочняющий эффект от пластины можно рассматривать отдельно от вязкого фонного трения, при динамическом режиме преодоления он слабо зависит от температуры и скорости деформации. Поэтому, если можно оценить вклад фонного трения в торможение используя некоторую ранее полученную эмпирическую зависимость, то можно также оценить и полное критическое напряжение скольжения дислокации при высокоскоростном нагружении. В данном случае мы получаем оценку критических напряжений около 700 МПа, что можно рассматривать как некоторую оценку сверху для упрочнения системы скольжения дислокации в динамическом режиме.

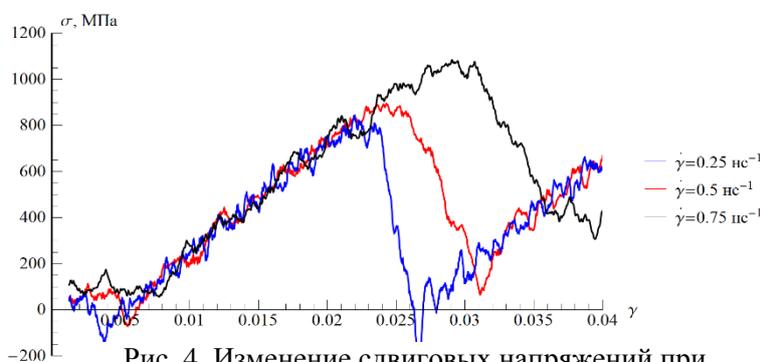


Рис. 4. Изменение сдвиговых напряжений при движении дислокации около пластины графена диаметром 2 нм при постоянных скоростях сдвига и температуре 300К

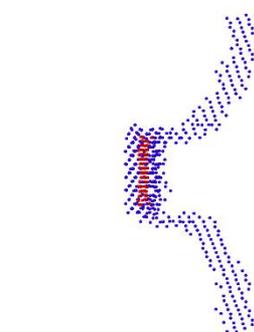


Рис. 5. Дислокация, преодолевающая барьер-пластинку

### ЛИТЕРАТУРА:

1. Альшиц В.И., Инденбом В.Л. Динамическое торможение дислокаций // Успехи физических наук/ - 1975. т.115, вып. 1.
2. Красников и др. Пластическая деформация при высокоскоростном нагружении алюминия: многомасштабный подход // Физика твёрдого тела/ - 2010. т. 52, вып. 7.
3. Куksин и др. Молекулярно-динамическое моделирование динамики краевой дислокации в алюминии// Доклады Академии наук/ - 2008. т. 420, №4.
4. Bacon et al. Dislocation-Obstacle Interactions at the Atomic Level// Dislocations in Solids/ - 2009. vol. 115. pp. 1-90.
5. Osetsky, Bacon An atomic-level model for studying dynamics of edge dislocations in metals// Modelling and Simulation in Materials Science and Engineering/ - 2003. vol. 11. pp. 427-446
6. Olmsted et al. Atomistic simulations of dislocation mobility in Al, Ni and Al/Mg alloys// Modelling and Simulation in Materials Science and Engineering/ - 2005. vol. 13. p. 371
7. Rodney D. Activation enthalpy for kink-pair nucleation on dislocations: Comparison between static and dynamic atomic-scale simulations// Physical Review B/ - 2007. vol. 76, 144108

АЛГОРИТМЫ ПОДГОТОВКИ И ОРГАНИЗАЦИИ ПРОЦЕССОВ УПРАВЛЕНИЯ  
АКТИВНОЙ САМООБОРОНЫ КОРАБЛЯ

Статья посвящена изложению алгоритмов подготовки и организации процессов активной самообороны корабля с применением антиобъектов, используемых защищаемым кораблем для уничтожения атакующих подводных средств противника.

**Постановка задачи**

Процесс активной защиты корабля с применением антиобъектов, предназначенных для уничтожения атакующих подводных средств противника, по своему существу является принципиально стохастическим процессом. Это обстоятельство вызвано следующими основными причинами:

1. Особенности получения информации в морской воде с применением гидроакустических средств.
2. Особенности, сопровождающими применение алгоритмов вторичной фильтрации для определения компонентов векторов координат и параметров движения целей.
3. Особенности поведения носителей и другими факторами.

Несмотря на отмеченные обстоятельства, следует рассмотреть детерминированную постановку организации процесса защиты, учитывающую кинематические и информационные аспекты поведения всех участников рассматриваемого процесса защиты, - защищаемого носителя, атакующего объекта и антиобъекта, что легко позволит осуществить переход к рассмотрению особенностей организации имитационного эксперимента, необходимого для определения потенциальной эффективности процесса защиты.

Будем предполагать, что за счет совместной работы аппаратуры гидроакустического комплекса защищаемого носителя и систем вторичной обработки на борту носителя осуществляется выработка оценок координат и параметров движения атакующих объектов (КПО):

- $\hat{D}_n$  – оценка величины текущей дистанции между носителем и атакующим объектом,
- $\hat{V}_0$  – оценка скорости хода объекта,
- $\hat{q}_k$  – оценка курсового угла в горизонтальной плоскости,
- $\hat{\mu}_k$  – оценка угла носителя в вертикальной плоскости,
- $\hat{H}_1$  – оценка разности величины глубины хода защищаемого носителя и объекта.

Рассмотрим *рисунок 1*, на котором представлены следующие кинематические и временные параметры объекта:

О – точка, соответствующая положению центра величины защищаемого носителя в момент времени  $t_1$ ;

В – точка, соответствующая положению центра величины объекта в момент времени  $t_1$ ;

$t_1$  – момент времени, в который дистанция между точками А и В соответствует  $D_{min}$ ;

$D_{min}$  – минимальное значение дистанции между защищаемым носителем и объектом, обеспечивающей возможность практической реализации эффективных мероприятий защиты для выбранных наилучших условий процесса защиты и определенных технических характеристик структуры контура обороны;

$t_2$  – момент времени, в который прекращается накопление информации об особенностях изменения взаимного положения объектов и подготовки стартовых данных для ввода в антиобъект;

$t_3$  – момент времени завершения ввода информации в антиобъект и старта антиобъекта;  
 $t_4$  – момент времени завершения участка переходных процессов после выхода антиобъекта из ПУ,  
 $t_5$  – момент времени завершения участка начального маневрирования до выхода на участок прямолинейного движения,  
 $t_6$  – момент времени завершения движения антиобъекта на участке прямолинейного движения,  
 $t_7$  – момент времени завершения второго участка маневрирования перед включением аппаратуры самонаведения.

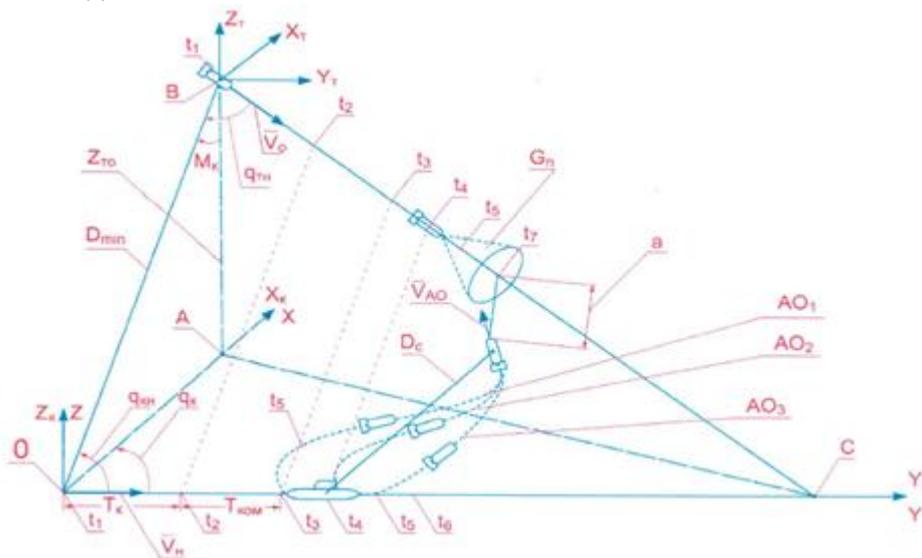


Рис. 1. Расчетная схема организации и исследования процесса защиты

Для создания условий выхода АО после завершения участка программного движения в область пространства, расположенную перед объектом, на расстояние меньшее или равное радиусу действия аппаратуры самонаведения, необходимо выполнение условия:

$$D_{\text{но}} \geq D_{\text{min}}, \quad (1)$$

где  $D_{\text{но}}$  – дистанция, соответствующая дистанции начального обнаружения аппаратурой гидроакустического комплекса носителя,

$D_{\text{min}}$  – минимально допустимая дистанция, определяющая границу зоны защиты при использовании АО с заданными характеристиками. При нарушении условия (1) организация защиты невозможна.

Величина  $D_{\text{min}}$  может быть определена с помощью выражения:

$$D_{\text{min}} = \frac{\sum_{i=1}^{i=4} S_i}{1 - B_1 C_1}, \quad (2)$$

### Выводы

1. Активная самооборона защищаемого корабля может быть организована при надлежащей организации контура самообороны, включающего в свой состав гидроакустические подсистемы, системы подготовки необходимой начальной информации, стартовые установки и антиобъекты.
2. Траектория движения антиобъектов должна содержать два характерных участка:

- участок программного движения от момента старта антиобъектов до прихода в зону самонаведения,
- участок самонаведения антиобъектов на атакующее подводное средство противника.

#### ЛИТЕРАТУРА:

1. Кузин В. П., Никольский В. И. Военно-морской флот СССР 1945-1991 гг. История морских обществ. - СПб: Историч. мор. о-во. 1996. 653 с.
2. Петросян Л. А., Рехсиев Б. Б. Преследование на плоскости. – М: Наука, 1991.
3. Абчук В. А., Суздаль В. Г. Поиск объектов. – М: Сов. Радио, 1977.
4. Ким Д. П. Методы поиска и преследования подвижных объектов. – М: Наука, 1989.
5. Локк А. С. Управление снарядами. – М: Изд. ТТЛ, 1957

УДК 539.3

К.В. Мацюк

(Санкт-Петербургский государственный политехнический университет)

### МОДЕЛЬ НЕУПРУГОГО ДЕФОРМИРОВАНИЯ ГПУ–ПОЛИКРИСТАЛЛА

Актуальность создания моделей физических теорий пластичности (ФТП) обусловлена необходимостью прогнозировать физико–механические характеристики материала на макроуровне, а также возможностью разработки технологий получения материалов с заданными свойствами, необходимыми для эксплуатации.

Рассматриваемая модель относится к статистической конститутивной модели неупругого деформирования поликристаллических агрегатов. С точки зрения решения реальных технологических задач данный класс многоуровневых моделей наиболее востребован в настоящее время. Использование многоуровневого подхода с явным введением в модель описания механизмов деформирования и их носителей, позволяет отражать структуру естественным образом, предоставляет возможность более корректного определения связи макронапряжений и макродеформаций [4, 5].

В данной работе будет использована упруговязкопластическая модель. Использование именно упруговязкопластической модели позволяет избежать проблемы неединственности определения скоростей сдвигов [4, 5].

Рассматривается конститутивная модель поликристалла с ГПУ решеткой, в рамках которой на мезоуровне используются несимметричные меры напряженно-деформированного состояния. Однако из уравнения баланса момента количества движения с учетом отсутствия на макроуровне внутренних и поверхностных распределенных моментов, тензор напряжений на верхнем масштабном уровне должен быть симметричным.

На мезоуровне ОС имеет вид:

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}} = \mathbf{p} : (\boldsymbol{\zeta} - \boldsymbol{\zeta}_r^{in} - \boldsymbol{\omega}) - \boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\omega} + \boldsymbol{\omega} \cdot \boldsymbol{\sigma}.$$

Отметим, что на верхнем (макро) уровне используется определяющее соотношение вида:  $\dot{\boldsymbol{\Sigma}} = \mathbf{P} : (\mathbf{Z}_r - \mathbf{Z}_r^{in}) - \boldsymbol{\Sigma} \cdot \boldsymbol{\Omega} - \boldsymbol{\Omega}^T \cdot \boldsymbol{\Sigma}$ , где  $\mathbf{Z}_r = \mathbf{Z} - \boldsymbol{\Omega}$ , или:

$$\dot{\boldsymbol{\Sigma}} = \mathbf{P} : (\mathbf{Z} - \boldsymbol{\Omega} - \mathbf{Z}_r^{in}) - \boldsymbol{\Sigma} \cdot \boldsymbol{\Omega} - \boldsymbol{\Omega}^T \cdot \boldsymbol{\Sigma},$$

Производится одновременная симметризация тензора напряжений с помощью вводимого ниже тензора  $\mathbf{S}$ . Все величины мезоуровня можно представить суммой некоторых средних и флуктуаций относительно средних, которые затем подставляются в ОС мезоуровня. После этого определяющие соотношения мезоуровня осредняются по представительному объему макроуровня, полученные соотношения сопоставляются с априори сформулированными ОС макроуровня.

После проведения процедуры согласования система разрешающих уравнения макроуровня записывается в следующем виде [1, 3]:

$$\begin{cases} \dot{\Sigma} = \Pi : (\mathbf{Z} - \Omega - \mathbf{Z}_r^{in}) - \Sigma \cdot \Omega - \Omega^T \cdot \Sigma, \\ \Pi = \langle \mathbf{S} : \mathbf{n} \rangle, \Sigma = \mathbf{S} : \langle \sigma \rangle, \Omega = \langle \omega^{(n)} \rangle, \\ \mathbf{Z}_r^{in} = \langle \zeta_r^{in} \rangle + \Pi^{-1} : \langle \mathbf{S} : \mathbf{n}' : (\zeta_r^{in'} + \omega') \rangle - \\ - \Pi^{-1} : \left( \mathbf{S} : \left( \langle \omega' \cdot \sigma' \rangle - \langle \sigma' \cdot \omega' \rangle \right) \right). \end{cases}$$

Была проведена процедура идентификации и верификации модели на основе экспериментальных данных по одноосному нагружению поликристаллов  $\alpha - Ti$ . На стадии идентификации модели используются экспериментальные данные на простой сдвиг в плоскости  $Ox_1x_2$  поликристалла  $\alpha - Ti$  [6]. Отметим, что в настоящее время не существуют экспериментальных данных, учитывающих несимметричные свойства на мезоуровне, таким образом, идентификация и верификация параметров проводилась с использованием симметричных мер НДС.

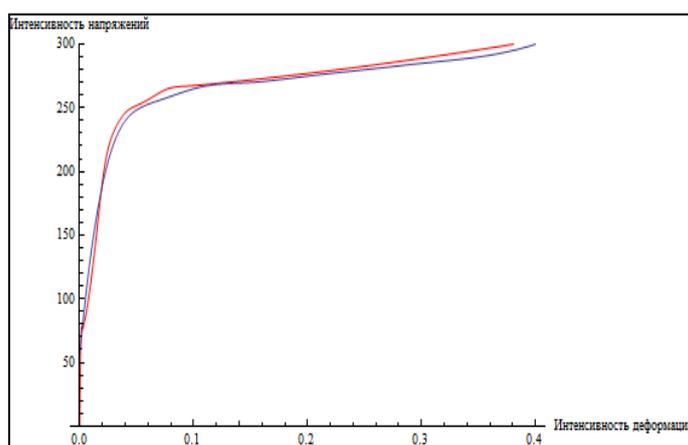


Рис. 1. Зависимость интенсивности деформаций от интенсивности напряжений при простом сдвиге в плоскости  $Ox_1x_2$  (экспериментальная кривая – синий цвет, модельная кривая – красный цвет)

Модель показывает удовлетворительное соответствие с экспериментальными данными (рис.1).

Рассматривалось применение модели для описания процесса одноосного нагружения и стесненной осадки. Поликристалл представляет собой совокупность хаотично ориентированных (ориентация определяется законом равномерного распределения) кристаллитов (1000 зерен). Краевая задача не ставится и не решается. Моделирование производилось с учетом упрочнения, ротации решетки и несимметрии на мезоуровне.

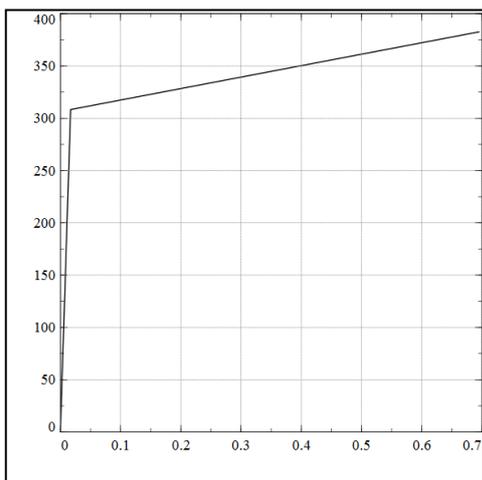


Рис. 2. Зависимость интенсивности напряжений от интенсивности деформаций при одноосном сжатии поликристалла вдоль оси  $Ox_3$

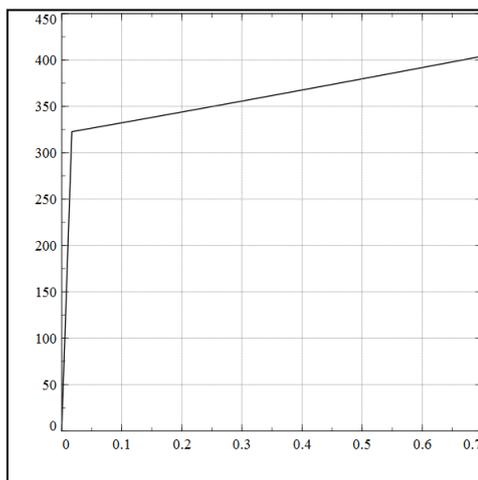


Рис. 3. Зависимость интенсивности напряжений от интенсивности деформаций при одноосном растяжении поликристалла (1000 зерен) вдоль оси  $Ox_3$

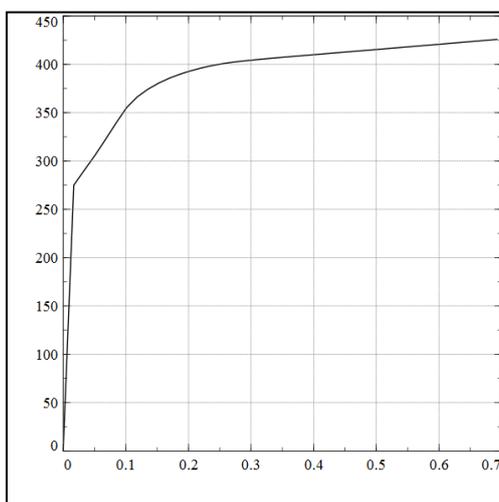


Рис. 4. Зависимость интенсивности напряжений от интенсивности деформаций при стесненной осадке поликристалла

Постановка модели мезоуровня с использованием несимметричных мер на мезоуровне и результаты моделирования приведены в работе [2].

Разработан алгоритм реализации упруговязкопластической модели, на основе которого создана вычислительная программа. Проведен ряд вычислительных экспериментов, показано удовлетворительное соответствие теоретических результатов экспериментальным данным.

#### ЛИТЕРАТУРА:

1. Лурье А.И. Нелинейная теория упругости. – М.: Наука, 1980. – С. 512.
2. Мацюк К.В., Трусов П.В. Модель для описания упруговязкопластического деформирования ГПУ–кристаллов: несимметричные меры напряженно-деформированного состояния, законы упрочнения. Вестник ПНИПУ. Механика. Пермь: Изд-во ПНИПУ, 2013. – №4. – С. 75-105.
3. Нечаева Е.С., Трусов П.В. Конститутивная модель частично кристаллического полимерного материала. Алгоритм реализации модели мезоуровня// Вычислительная механика сплошных сред. – 2011. – Т. 4, № 1. – С. 74–89.

4. Трусов П.В., Швейкин А.И. Многоуровневые физические модели моно- и поликристаллов. Прямые модели // Физическая мезомеханика / Ин-т физики прочности и материаловедения СО РАН. – Томск, 2011. – Т. 14, №5. – С. 5–30.
5. Трусов П.В., Швейкин А.И. Теория пластичности: учебное пособие. – Пермь: Изд. Перм. гос. техн. ун – та. 2011. 419 с.
6. Wu X. Prediction of crystallographic texture evolution and anisotropic stress-strain response during large plastic deformation in high-purity  $\alpha$ -titanium/ Wu X., Kalidindi S.R. // Вопросы материаловедения/ — 2007, № 4 (52). – pp. 97-103.

УДК 539.3

К.В. Мацюк

(Санкт-Петербургский государственный политехнический университет)

### МОДЕЛЬ НЕУПРУГОГО ДЕФОРМИРОВАНИЯ ГПУ–КРИСТАЛЛИТОВ. НЕСИММЕТРИЧНЫЕ МЕРЫ НАПРЯЖЕННО–ДЕФОРМИРОВАННОГО СОСТОЯНИЯ НА МЕЗОУРОВНЕ

При моделировании поведения кристаллита на мезоуровне, следует учитывать роль ротационной моды при интенсивных пластических деформациях. При описании ротационной моды в уравнении баланса момента количества движения появляются моментные напряжения, тензор напряжений становится несимметричным [3, 4]. С другой стороны, для описания основных мод неупругой деформации (скольжения краевых дислокаций и двойникования) требуется введение несимметричной меры деформации, согласованной с механизмами деформирования [3, 4].

Вопрос об особенностях описания неупругого деформирования с использованием несимметричных свойств кристаллитов и несимметричных мер напряжений и деформаций на сегодняшний день остается открытым. Поэтому изучение данной проблемы и создание соответствующих математических моделей является актуальным.

Целью работы является описание модели мезоуровня, как важнейшей составляющей разрабатываемой двухуровневой модели поликристалла. Обсуждаются важные особенности построения и результаты реализации конститутивной модели кристаллита с гексагональной плотноупакованной (ГПУ) решеткой, позволяющей описывать упруговязкопластическое деформирование.

В качестве определяющего соотношения используется закон Гука, при этом учитывается анизотропия кристаллической решетки. Система разрешающих уравнений для кристаллита имеет следующий вид [1, 2, 5]:

$$\begin{aligned} \dot{\boldsymbol{\sigma}} &= \mathbf{n} : (\boldsymbol{\zeta}_r - \boldsymbol{\zeta}_r^{in}) + \boldsymbol{\omega} \cdot \boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\omega}, \\ \boldsymbol{\zeta}_r &= \hat{\nabla} \mathbf{v}^T - \boldsymbol{\omega}, \\ \boldsymbol{\omega} &= \mathbf{w}^* - \frac{1}{2} \sum_{k=1}^K \dot{\gamma}^{(k)} (\hat{\mathbf{b}}^{(k)} \hat{\mathbf{n}}^{(k)} - \hat{\mathbf{n}}^{(k)} \hat{\mathbf{b}}^{(k)}), \\ \boldsymbol{\zeta}_r^{in} &= \sum_{k=1}^K \dot{\gamma}^{(k)} \hat{\mathbf{b}}^{(k)} \hat{\mathbf{n}}^{(k)} + \sum_{s=1}^S \gamma_{tw}^{(s)} \dot{f}^{(s)} \hat{\mathbf{b}}_{tw}^{(s)} \hat{\mathbf{n}}_{tw}^{(s)}, \\ \dot{\gamma}_s^{(k)} &= H \left( \tau_s^{(k)} - \tau_{sc}^{(k)} \right) \dot{\gamma}_0 \left( \frac{\tau_s^{(k)}}{\tau_{sc}^{(k)}} \right)^m, \quad \dot{f}^{(s)} = H \left( \tau_{tw}^{(s)} - \tau_{twc}^{(s)} \right) \frac{\dot{\gamma}_0}{\gamma_{tw}^{(s)}} \left( \frac{\tau_{tw}^{(s)}}{\tau_{twc}^{(s)}} \right)^m, \end{aligned}$$

$$\dot{\tau}_{sc}^{(k)} = (1-f) \sum_s h^{(ks)} \dot{\gamma}^{(s)} + f \sum_p h_{nv}^0 \gamma_{nv}^{(p)} \dot{f}^{(p)}, \quad \dot{\tau}_{twc}^{(k)} = a^{(k)} \dot{f}^{(k)} + \sum_s a^{(ks)} (1-m^{(ks)}) \dot{f}^{(s)}.$$

Существуют различные критерии пластичности, рассмотрим закон Шмида, который выступает в качестве условия активации  $k$ -й СС при достижении касательного напряжения в ней некоторого критического напряжения  $\tau_c^{(k)} : \mathbf{m}^{(k)} : \mathbf{s} = \tau_c^{(k)}$ .

В работе рассматривается начальная поверхность текучести и принимается, что критические напряжения на системах скольжения не меняются. Интерес представляет рассмотрение интенсивности напряжений для вершин многогранника текучести в симметричном и несимметричном случае.

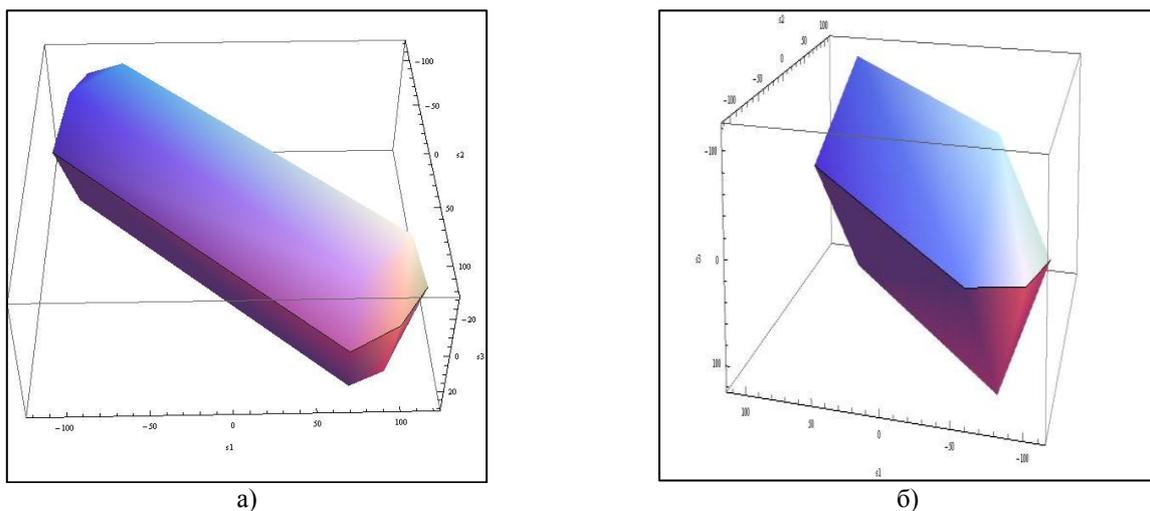


Рис.1. Поверхность текучести в трехмерном случае: а) симметричный и б) несимметричный случай

Анализируя полученные результаты, можно заметить, что в несимметричном случае поверхность текучести отличается от симметричного случая формой, координатами вершин и интенсивностями. Предлагается возможным объяснить этот факт несимметричностью девиатора напряжений и ориентационного тензора, и как следствие – различием полученных уравнений.

Целью моделирования являлось исследование модели мезоуровня, в частности – влияние несимметрии мер напряжений, скоростей деформаций и упругих свойств на характер деформирования. Проведена серия численных экспериментов на простой сдвиг монокристаллических образцов. При моделировании рассматриваются небольшие степени деформации, в связи с чем пренебрегается ротациями решетки.

Ниже приведены значения независимых модулей тензора упругих свойств; рассматривались отклонения друг от друга компонент  $\Pi_{1313}, \Pi_{1331}, \Pi_{2323}$  и  $\Pi_{2332}$ . Будем использовать следующие обозначения вычислительных экспериментов: эксперимент №1с – упрочнение отсутствует, симметричный случай; эксперимент №1н/сс – упрочнение отсутствует, несимметричные меры НДС и симметричный тензор упругих свойств; эксперимент №1н/с – упрочнение отсутствует, несимметричные меры и тензор упругих характеристик; эксперименты №2с, №2н/сс, №2н/с – деформирование с учетом упрочнения, симметричный и несимметричный случай, соответственно. Во всех вычислительных экспериментах в качестве моделируемого материала рассматривался монокристалл альфа-титана.

Независимые компоненты тензора модулей упругости:

$$\begin{aligned} \pi_{1111} &= 16,24 \cdot 10^4 \text{ МПа}, \pi_{3333} = 18,07 \cdot 10^4 \text{ МПа}, \pi_{1122} = 9,2 \cdot 10^4 \text{ МПа}, \\ \pi_{1133} &= 6,9 \cdot 10^4 \text{ МПа}, \pi_{1313} = 4,67 \cdot 10^4 \text{ МПа}. \end{aligned}$$

На рис.2–4 показаны зависимости интенсивности напряжений от интенсивности деформаций при простом сдвиге в плоскости  $Ox_1x_2$  (рис.2),  $Ox_1x_3$  (рис.3),  $Ox_2x_3$  (рис.4) с учетом упрочнения, №2с (сплошная линия), №2н/сс (— · — · — ·), №2н/с (---).

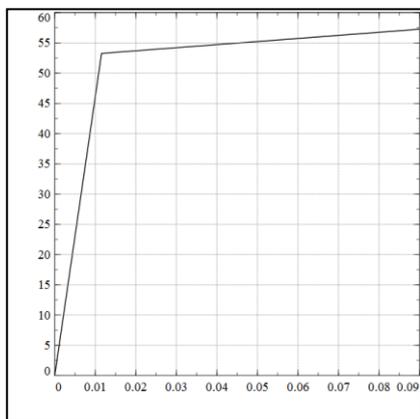


Рис. 2.

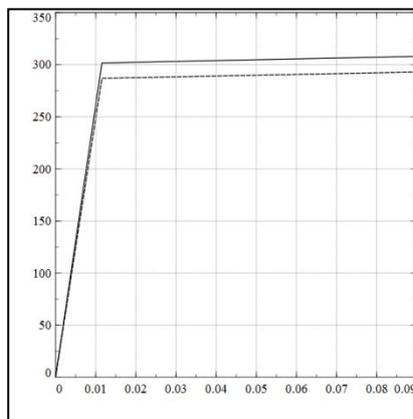


Рис. 3.

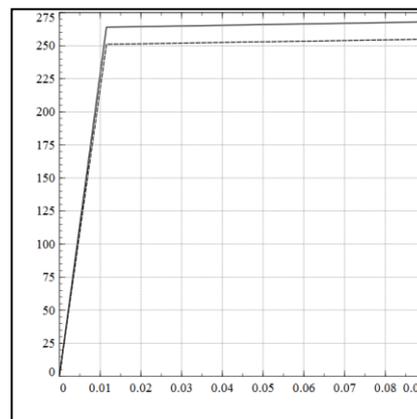


Рис. 4.

Результаты моделирования показывают, что использование несимметричных мер НДС и тензора упругих свойств существенно влияет на результаты описания деформирования кристаллита. Это находит свое отражение как на интегральной кривой зависимости интенсивности напряжений от накопленных деформаций, так и в количественных мерах, характеризующих скольжение дислокаций и двойникование. Таким образом, возможная несимметричность тензора упругих свойств кристаллита и использование несимметричных мер НДС вносят весьма существенные изменения в результаты решения задачи.

#### ЛИТЕРАТУРА:

1. Трусов П.В., Ашихмин В.Н., Швейкин А.И. Анализ деформирования ГЦК–металлов с использованием физической теории пластичности // Физическая мезомеханика. – 2010. – Т.13, № 3. – С. 21–30.
2. Трусов П.В., Волегов П.С. Определяющие соотношения с внутренними переменными и их применение для описания упрочнения в монокристаллах // Физическая мезомеханика. – 2009. Т.12, №5. – С. 65-72.
3. Трусов П.В., Волегов П.С., Янц А.Ю. Описание внутризеренного и зернограничного упрочнения моно- и поликристаллов // Научно-технические ведомости СПбГПУ. Физико-математические науки. – СПб, 2010. – №2(98). – С.110-119.
4. Трусов П.В., Швейкин А.И. Многоуровневые физические модели моно- и поликристаллов. Статистические модели // Физическая мезомеханика / Ин-т физики прочности и материаловедения СО РАН. – Томск, 2011. – Т. 14, №4. – С. 17–28.
5. Wu X. Prediction of crystallographic texture evolution and anisotropic stress-strain response during large plastic deformation in high-purity  $\alpha$ -titanium/ Wu X., Kalidindi S.R. // Вопросы материаловедения/ — 2007, № 4 (52). – Pp. 97-103.

## РАЗРАБОТКА ЗАЖИМНОГО УЗЛА АДАПТИВНОГО ЗАХВАТНОГО УСТРОЙСТВА

Данная работа является частью проекта по созданию адаптивного захватного устройства и посвящена разработке и анализу основного рабочего органа зажимного узла – пальцу захватного устройства. В ней представлены аналоги, на основе которых ведётся разработка, анализ работы пальца в программе MatLab, а также макетная модель, созданная в SolidWorks.

Промышленные роботы — универсальное средство комплексной автоматизации производственных процессов, с помощью которого обеспечивается быстрая переналадка последовательности, скорости и видов манипуляционных действий. Поэтому применение промышленных роботов наиболее эффективно в условиях частой смены объектов производства, а также для автоматизации ручного низкоквалифицированного и монотонного труда. Особое место занимают роботы в автоматизации операций, протекающих в экстремальных, вредных для здоровья человека или опасных условиях.

Среди проблем, возникающих при внедрении роботов в производство, очевидно, наиболее актуальной является проблема создания рабочего органа, пригодного для решения конкретных задач.[2]

На сегодняшний день существует большое разнообразие захватных устройств. Они выполняют множество операций по схватыванию, сжатию и т.д. Но зачастую набор выполняемых функций отдельного захвата достаточно ограничен. В связи с этим своё развитие получили адаптивные захватные устройства. (Адаптивная система – самоприспосабливающаяся система, которая сама может изменять алгоритм своего функционирования, а иногда и структуру, с целью сохранения или достижения оптимального состояния системы при изменении внешних условий.[1])

Решение проблемы функциональной ограниченности захватных устройств является очень актуальной. Применение захвата, способного заменить собой несколько устройств (каким является адаптивное захватное устройство), позволит сэкономить не только место, но и время, и ресурсы.

Обзор существующих аналогов.

Для выбора прототипов для разработки были выбраны четыре захвата: трёхпальцевый адаптивный захват компании ROBOTIQ, захват SDH компании SCHUNK, захват DHDG компании FESTO, захват SARAH канадского университета LAVAL. Для трёх из них была составлена сравнительная таблица 1 по параметрам: масса, грузоподъёмность, рабочие температуры.

Табл. 1. Сравнительная таблица основных характеристик аналогов [4],[5],[6]

Параметр	ROBOTIQ	FESTO	LAVAL	
			SARAH-P1	SARAH-M1
Масса	2.2 кг	460 г	5 кг	25 кг
Грузоподъёмность	До 10 кг	До 1 кг	До 7 кг	До 100 кг
Рабочие температуры	0 - 50 <sup>0</sup> C	5 – 60 <sup>0</sup> C	0 - 55 <sup>0</sup> C	0 - 55 <sup>0</sup> C

Самыми подходящими по массе и грузоподъёмности захватами оказались захват от Robotiq и SARAH. Они и были выбраны прототипами для разработки и обладают следующими преимуществами:

- Во-первых, своими габаритами, что обеспечивает им мобильность при работе.
- Во-вторых, достаточной грузоподъёмностью.
- В-третьих, использование рычагов в пальцах зажимного узла.

В процессе конструирования производился их синтез для достижения поставленных целей.

Анализ рычажной системы.

Для анализа использовался пакет Simulink / SimMechanics программы MatLab. Первый этап исследования заключался в построении схемы из блоков SimMechanics. В результате была получена модель, имитирующая палец захватного устройства, состоящий из трёх фаланг и параллельной системы рычагов.

Следующий шаг - настройка механизмов движения, чтобы обеспечить имитацию действия пальца зажимного узла захватного устройства.

После всех подготовительных работ, группировки блоков и их настройки было проведено несколько экспериментов. Результатами стали графики изменения углов поворота фаланг в зависимости от усилий, прикладываемых к каждой из них и входных усилий на рычаги. Пример одного из графиков представлен на рисунке 1.

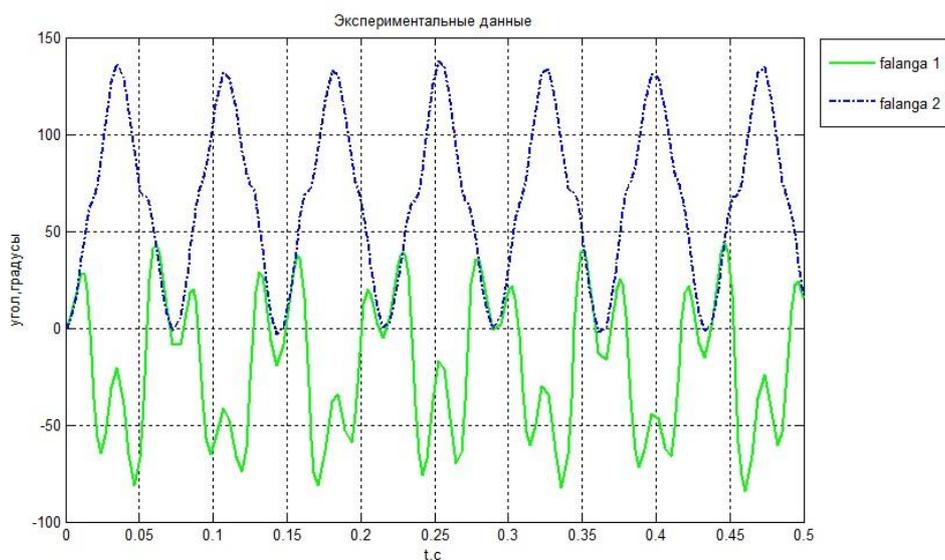


Рис. 1. График зависимости угла поворота фаланг от времени движения пальца

Самых графиков было получено несколько. Характер их оставался неизменным, менялась амплитуда. Это связано с изменением значений сил сопротивления, прикладываемых к фалангам.

Синтез механической части.

Важным этапом разработки является создание трёхмерной модели. В качестве среды для проектирования была выбрана программа SolidWorks. Результат работы виден на рисунке 2. Палец состоит из трёх фаланг и параллельной системы рычагов.

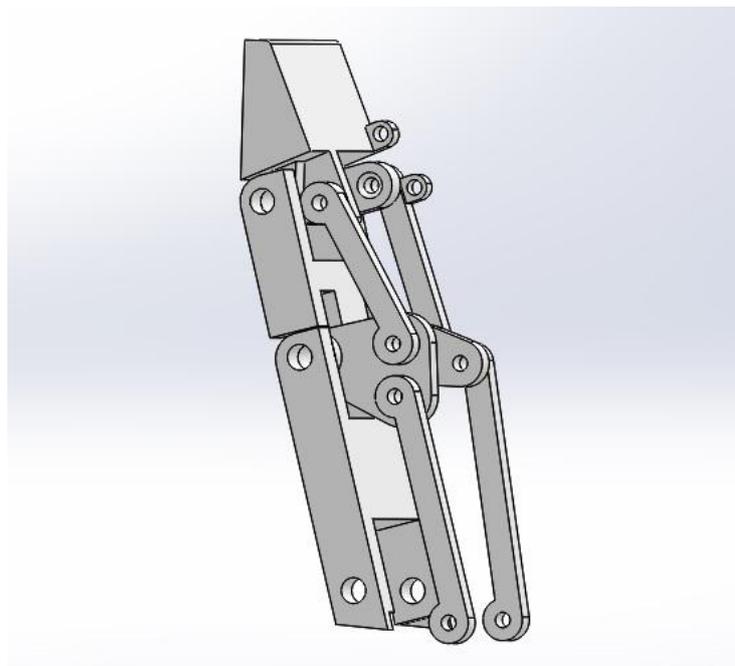


Рис. 2. Модель пальца в программе SolidWorks

По мере проектирования отдельные детали печатались на 3D-принтере из АБС пластика. После изготовления всех элементов была осуществлена сборка пальца зажимного узла.

Итоги работы:

1. Рассмотрены аналоги захватных устройств и выбраны прототипы для разработки зажимного узла
2. Создана модель зажимного узла для анализа рычажной системы в программе MATLAB
3. Разработана конструкция пальца зажимного узла захватного устройства
4. Созданы предпосылки для дальнейшей работы, т.е. проектирования полного зажимного узла из трёх пальцев и основания, а также объединения с двигателем.

#### ЛИТЕРАТУРА:

1. Попов Е.П., В.В. Клюев. Системы оцувствления и адаптивные промышленные роботы. – М.: Машиностроение, 1985. – 256 с.
2. Козырев Ю.Г. Захватные устройства и инструменты промышленных роботов: учебное пособие. – М.: КРОНУС, 2013. – 318 с.
3. Мусалимов В.М., Г.Б. Заморуев, И.И. Калапышина, А.Д. Перечесова, К.А. Нуждин. Моделирование мехатронных систем в среде MATLAB (Simulink / SimMechanics): учебное пособие для высших учебных заведений. – СПб: НИУ ИТМО, 2013. – 114 с.
4. FESTO. Adaptive gripper DHDG instruction manual.
5. ROBOTIQ INC. Robotiq 3-finger adaptive robot gripper instruction manual. 2013.
6. Clement Gosselin, Thierry Laliberte. Underactuated Versatile Gripper for the Cleaning of Nuclear Sites . – 1st International Conference on Applied Robotics for the Power Industry Delta Centre-Ville Montréal, Canada, October 5-7, 2010

Р.В. Олейник, С.С. Резников  
(Санкт-Петербургский национальный исследовательский университет  
информационных технологий, механики и оптики)

## ПРОЕКТИРОВАНИЕ АНТРОПОМОРФНОЙ СИСТЕМЫ ДЛЯ ИССЛЕДОВАНИЯ КИНЕМАТИКИ РУКИ ЧЕЛОВЕКА

Объектом исследований в данной работе является кисть человека. До сих пор считается, что человеческая кисть является самым лучшим "биоманипулятором" среди аналогичных приспособлений позвоночных животных. Причем она одновременно и самый универсальный манипулятор — мы можем совершать с ее помощью множество разнообразных и одновременно высокоточных движений. Эволюция потратила тысячелетия на то, чтобы довести это весьма полезное устройство до совершенства, хотя, без сомнения, люди и сами ей в этом помогали. Традиционная точка зрения по поводу формирования этой части тела выглядит так: унаследовав от древесных предков гибкую и приспособленную к хватательным движениям кисть, древние люди начали использовать ее для манипуляций с предметами в процессе изготовления орудий труда. Это способствовало развитию гибкости пальцев и ладони, а также противопоставлению большого пальца всем остальным. В какой-то момент естественный отбор стал благоприятствовать особям с именно такой кистью, и, обеспечивающие подобное строение данной части тела, гены стали доминирующими в человеческой популяции. Проще говоря, еще со времен Фридриха Энгельса ученые считали, что развитие кисти шло по пути повышения ее способности к манипуляции с предметами.

Непосредственно, задачей, которая была поставлена, является проектирование антропоморфного механического манипулятора на основе встроенного микроконтроллера и системы управления им с целью описания движения кисти человека. Суть исследования состоит в изучении процесса управления движением сервоприводов манипулятора, по средствам удаленной передачи данных, фиксируемых с движущейся человеческой кисти и дальнейшей их обработке.

В работе были рассмотрены методы и способы биомеханических исследований, существующие проблемы в области протезирования, а также механизм движений верхних конечностей. Исходя из полученных сведений, можно подвести итог: большинство бионических протезов на сегодняшний день имеет существенно высокую стоимость, а также недостатки в виде отсутствия или неполноценности обратной связи между протезом и человеком.

В качестве метода описания движения верхней конечности человека в данной работе решено использовать анализ с помощью механической модели кисти, управляющего манипулятора с тензорезистивными датчиками в качестве чувствительных элементов и необходимых программных пакетов.

В ходе работ была спроектирована, запрограммирована и испытана рука-манипулятор, в основе управляющей схемы которой находится микроконтроллер ArduinoUno (рис. 1).



Рис. 1. «Механическая модель»

«Рука» представляет собой пятипалую «кисть» с подвижными «пальцами» из полимера (резины), «ладонь» из пластика, «запястье» являющееся кронштейном из двух соединённых сервоприводов, а также «предплечье», выполненное в домашних условиях из алюминиевого профиля и деревянных подкладок. Каждый «палец» привязан натянутым тросиком к отдельному сервоприводу, в свою очередь, сервоприводы закреплены в «предплечье» и подключены к управляющей плате (ArduinoUno). На управляющей плате установлен дополнительный элемент, так называемый Bluetooth-адаптер, на который поступает управляющий сигнал от «управляющей перчатки» (рис. 2).



Рис. 2. «Управляющая перчатка»

Перчатка является обычной бытовой перчаткой с нашитыми на неё гибкими датчиками, или же тензорезисторами. Каждому пальцу, соответствует свой датчик. Датчики подключены к управляющей плате, как и в случае механической «руки» Arduino Uno, на которую, в свою очередь, установлен Bluetooth Shield фирмы Seeeduno. Аналоговый сигнал датчиков передаётся на плату, с платы сигнал поступает в Bluetooth-модуль, а оттуда, без взаимодействия с компьютером, в Bluetooth-приёмник на механической «руке».

Система управления устройством представляет собой два микроконтроллера, первый из которых отвечает за прием, обработку и передачу по беспроводному каналу связи данных получаемых от тензодатчиков, а второй — за прием обработанных данных и отправки управляющего сигнала в сервоприводы, отвечающие за движение механической модели.

Рассмотрим подробнее первую часть системы, то есть так называемую «Управляющую перчатку». Пять датчиков подключены к аналоговым выходам контроллера, питанию и земле. Аналоговый сигнал представляет собой напряжение в цепи, которое регистрирует контроллер. В процессе изгиба датчиков, то есть их деформации происходит изменение сопротивления в цепи, из-за этого меняется напряжение. На входе контроллера появляется значение напряжения, изменяющееся в некоем диапазоне соответственно деформации каждого датчика. Полученные таким образом данные обрабатываются, и им присваивается

значение угла поворота для дальнейшей передачи в сервоприводы. Обработанные данные отправляются через последовательный порт сначала в Bluetooth-модуль, а после по заранее запрограммированному каналу связи между парными модулями во второй контроллер.

Теперь перейдем ко второй части — «Механической модели». Поступивший сигнал от первого устройства передается через беспроводной канал связи, затем сразу же отправляется в сервопривод. Для работы с сервоприводами используются специальные библиотеки в программном коде. Получив данные в виде готовых значений углов поворота, сервоприводы выполняют движение, то есть тянут тросики. В следствие этого «пальцы» начинают сгибаться-разгибаться соответственно заданному значению угла.

В итоге, в данной работе был исследован механизм движений верхней конечности человека на основе методов биомеханики. Также был сделан подробный обзор существующих на данный момент бионических протезов и рассмотрены наиболее современные системы со своими преимуществами и недостатками, в результате чего сформулированы требования к разрабатываемой системе и выбраны необходимые устройства.

Благодаря полученным сведениям была спроектирована конструкция, создан макет механической модели руки человека, а также разработана система управления созданной моделью. В основе управляющей системы находятся микроконтроллеры, для которых был разработан алгоритм, написана и испытана программа в среде программирования Arduino.

В качестве дальнейших путей развития системы можно указать разработку способов передачи обратного сигнала человеку, с целью повышения управляемости механической модели, то есть оснащение системы функциями обратной связи, а также улучшение конструкции и дизайна для обеспечения большего подобия руке человека и обеспечение компактности устройства. Также можно рассмотреть такие варианты улучшений, как использование сервоприводов постоянного вращения, двигателей постоянного тока или, например, пневмомускулов. Отдельно можно выделить такое улучшение системы управления, как обеспечение управления механической моделью посредством нейроимпульсов, так как не исключен вариант использования разработанного манипулятора и системы управления в создании бионического протеза.

#### ЛИТЕРАТУРА:

1. Биомеханика двигательного аппарата человека/Зацисорский В.М., Аруин А.С., Селуянов В.Н. – М.: Физкультура и спорт. 1981. - 143 с., ил. – ( Наука - спорту).
2. Основы биомеханики/Бранков Г.: [Пер. с болгарского] Джупанова В., [Под редакцией] Кнетса И.В. – М.: Издательство "Мир" Москва 1981 – 256 с.: ил.
3. BugaBooks [Электронный ресурс]: УЧЕБНИК ДЛЯ ВУЗОВ. В.И. ДУБРОВСКИЙ, В.Н. ФЕДОРОВА БИОМЕХАНИКА – Режим доступа: – <http://bugabooks.com/book/22-biomexanika/2-annotaciya.html> – Загл. с экрана. – Яз. рус.
4. Соммер У. — Программирование микроконтроллерных плат Arduino/Freduino — Спб.: БХВ-Петербург, 2012. 256 с. ил — (Электроника) ISBN 978-5-9775-0727-1
5. Методы биомехатроники тренажёра руки человека / А.К.Платонов [и др.] // Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша. 2012. № 82. 40 с.  
URL: <http://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2012-82>

## НЕЛИНЕЙНЫЕ ПЛОСКИЕ ВОЛНЫ В МАТЕРИАЛЕ С КВАДРАТНОЙ РЕШЁТКОЙ

Исследования в области описания динамики распространения плоских волн в различных кристаллических решётках связаны, в первую очередь, с именем М.Борна, чьи работы датируются началом XX века и не теряют актуальности и по сей день в связи с развитием нанотехнологий и наноэлектроники. Так, задача о распространении линейной волны в одномерной монокристаллической цепочке является классической [1], [2]. Модификации этой задачи, а также её обобщения на двумерные решётки рассматривались множеством учёных, в частности, в работах [3], [4]. В работе [5] рассматривалось распространение нелинейных плоских волн в треугольной решётке.

Целью данной работы является описание динамики плоских волн в материале, который на микроуровне представляет собой квадратную решётку с одинаковым типом частиц. Рассматривается квадратная решётка (рис.1), для которой в работе [6] получены уравнения движения.

В работах [3] и [5] показано, что дисперсионный анализ позволяет выделить 2 разных спектра колебаний частиц, высокочастотный и низкочастотный. В случае низкочастотных колебаний все частицы на графике зависимости перемещения от времени лежат на одной гладкой кривой. В этом случае континуальные уравнения можно получить разложением в ряд Тейлора. Такой подход получил название однополевой модели.

В случае высокочастотных колебаний зависимость перемещений от времени является быстро меняющейся функцией, поэтому нельзя провести стандартную процедуру разложения в ряд. Однако если разделить все частицы на чётные и нечётные [3] и рассматривать колебания этих групп отдельно, то для каждой из них станет возможным разложение в ряд.

При исследовании движения частиц в решётках подразумевается, что атомы можно считать материальными точками, соединёнными между собой линейными пружинами.

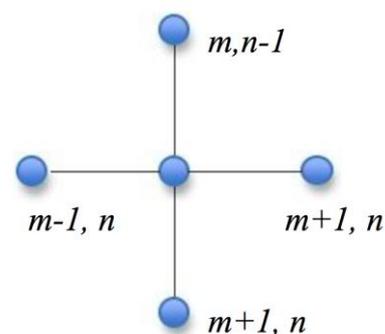


Рис.1. Фрагмент квадратной решётки

**Однополевая модель**

Рассмотрим квадратную решётку с периодом  $a$ . Рассматривается взаимодействие центральной частицы  $(m, n)$  с четырьмя соседними частицами:  $(m + 1, n)$ ;  $(m - 1, n)$ ;  $(m, n + 1)$ ;  $(m, n - 1)$ . Взаимодействие между частицами с одинаковыми массами  $m$  моделируется посредством пружин жесткостью  $C$ . Рассмотрим распространение плоской волны, полагая  $y_m = 0$ . Тогда уравнение для центральной частицы будет иметь вид:

$$m\ddot{x}_m = C[x_{m+1} - 2x_m + x_{m-1}] \quad (1)$$

Представим смещение по горизонтали как непрерывную функцию  $u(x, t)$ . Разложим смещения соседних с центральной  $m$  частиц в ряд Тейлора:

$$x_{m\pm 1} = u \pm u_x a + u_{xx} \frac{a^2}{2!} \pm u_{xxx} \frac{a^3}{3!} + u_{xxxx} \frac{a^4}{4!} \quad (2)$$

Подставив разложение в определяющее уравнение, получим:

$$m\ddot{u} = C \left[ u_{xx} a^2 + u_{xxxx} \frac{a^4}{12} \right] \quad (3)$$

Для того, чтобы решить данное уравнение, будем искать решение в виде бегущей волны, для чего необходимо прибегнуть к следующей замене [5]:

$\theta = x - vt$ , где  $v$  - фазовая скорость.

Решением будет являться функция:

$$u(\theta) = \alpha + \beta + \gamma e^{i\theta\sqrt{A}} + \sigma e^{-i\theta\sqrt{A}},$$

где  $\alpha, \beta, \gamma$  и  $\sigma$  - константы, зависящие от граничных условий, а

$$A = \frac{12}{a^2} (mv^2 - Ca^2)$$

### Двухполевая модель

Положим в уравнении (1) за  $w$  смещение чётных частиц,  $z$  - нечётных. Уравнения динамики будут иметь следующий вид:

$$m\ddot{w}_m = C [z_{m+1} - 2w_m + z_{m-1}]; m = 0, 2, \dots, 2N - 2 \quad (4)$$

$$m\ddot{z}_m = C [w_{m+1} - 2z_m + w_{m-1}]; m = 1, 3, \dots, 2N - 1 \quad (5)$$

Положим  $w_m = u(x, t)$ ,  $z_m = v(x, t)$ . Разложения смещений соседних с  $(m, n)$  частиц в ряд Тейлора для каждой компоненты примут вид:

$$w_{m\pm 1} = u \pm u_x a + u_{xx} \frac{a^2}{2!} \pm u_{xxx} \frac{a^3}{3!} + u_{xxxx} \frac{a^4}{4!} \quad (6)$$

$$z_{m\pm 1} = v \pm v_x a + v_{xx} \frac{a^2}{2!} \pm v_{xxx} \frac{a^3}{3!} + v_{xxxx} \frac{a^4}{4!} \quad (7)$$

После подстановки разложений (6), (7) в уравнения (4) и (5) соответственно, получим:

$$m\ddot{u}_{tt} = 2C \left[ (v - u) + v_{xx} a^2 + v_{xxxx} \frac{a^4}{24} \right] \quad (8)$$

$$m\ddot{v}_{tt} = 2C \left[ (u - v) + u_{xx} a^2 + u_{xxxx} \frac{a^4}{24} \right] \quad (9)$$

Чтобы получить решение, введём новые переменные  $U = \frac{u(x,t)+v(x,t)}{2}$  и  $V = \frac{u(x,t)-v(x,t)}{2}$

Нетрудно видеть, что если положить  $u=v$ , останется только акустическая компонента (U), а если  $u = -v$  — оптическая (V). Таким образом, из (8) и (9) получим:

$$m\ddot{U}_{tt} = C[a^2U_{xx} + \frac{a^4}{12}U_{xxxx}] \quad (10)$$

$$m\dot{V}_{tt} = -C[4V + a^2V_{xx} + \frac{a^4}{12}V_{xxxx}] \quad (11)$$

Тогда первое уравнение аналогично уравнению (3) однополевой модели, а решением второго при замене [5] является функция:

$V(\theta) = \mu e^{\sqrt{\lambda_1}\theta} + \delta e^{\sqrt{\lambda_2}\theta} + \xi e^{\sqrt{\lambda_3}\theta} + \eta e^{\sqrt{\lambda_4}\theta}$ , где  $\mu, \xi, \eta$  и  $\delta$  - константы, а  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \text{ и } \lambda_4$  — корни уравнения

$\lambda^4 + A\lambda^2 + B = 0$ , где:

$$A = \frac{12(Ca^2 + mv^2)}{Ca^4}$$

$$B = \frac{48}{a^4}$$

В результате проведённых исследований были получены уравнения распространения плоских волн в материалах, чья структура описывается моделью квадратной кристаллической решётки. Рассматривались отдельно случаи длинных и коротких волн, и показано, что в первом случае эффективно использование однополевой, а во втором — двухполевой модели.

#### ЛИТЕРАТУРА:

1. М.Борн, Х.Кунь «Динамическая теория кристаллических решёток» М.: Издательство иностранной литературы, 1958. С.70-77
2. А.Н.Ашкрофт, Н.Мермин. «Физика твёрдого тела» М.: Мир, 1979. (том 2) С. 122-130.
3. N. Zabusky, G. Deem. «Dynamics of nonlinear lattices» Journal of computational physics, V.2, 1967. P.126-131.
4. A.V.Porubov, I.V.Andrianov «Nonlinear waves in diatomic crystals» Wave Motion V.50, Issue 7, 2013, P. 1153–1160.
5. A.V. Porubov, I.E. Berinskii.«Nonlinear plane waves in materials having hexagonal structure» International Journal of Non-Linear Mechanics, V. 67, 2014. P. 27–33.
6. А.Е. Осокина, И.Е. Беринский. «Уравнения динамики треугольной и квадратной кристаллических решёток» Неделя науки СПбГПУ. Материалы конференции, 2014. С. 241.

УДК 51-72

К.В. Остапович, И.Ю. Зубко, В.И. Кочуров  
(Пермский национальный исследовательский политехнический университет)

#### ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДОВ АТОМАРНОЙ СТАТИКИ К ИССЛЕДОВАНИЮ ТЕМПЕРАТУРНЫХ ЗАВИСИМОСТЕЙ ПОВЕРХНОСТНЫХ И ОБЪЕМНЫХ УПРУГИХ СВОЙСТВ МОНОКРИСТАЛЛОВ

Характерной особенностью наноструктурированных материалов является существенное отличие многих демонстрируемых ими физико-механических свойств от соответствующих характеристик классических аналогов [1, 2]. Возникает задача

моделирования такого поведения, решение которой на континуальном уровне требует определенных модификаций используемых методов. Один из способов решения проблемы состоит в учете поверхностных напряжений. Основанные на этом теоретические оценки эффективного модуля Юнга пористого стержня показывают повышение его жесткости с увеличением количества нанопор внутри него и уменьшением их радиуса [4]. Изучение влияния размерных эффектов на механические свойства наноструктур представляет собой одну из наиболее актуальных проблем наномеханики [3]. Отметим, что прямое экспериментальное определение этих свойств или затруднительно, или невозможно, в связи с чем повышается роль методов дискретно-атомистического моделирования.

Основная цель работы состоит в исследовании поверхностных и объемных упругих свойств монокристаллов, в частности - в построении качественных зависимостей этих свойств от температуры. Перечень задач включает в себя разработку дискретно-атомистической модели, описывающей термомеханические свойства монокристаллических тел, и проведение с ее помощью численных экспериментов по установлению температурных зависимостей упругих модулей.

Тело с поверхностными напряжениями представляется в работе в виде объединения материального объема и материальной поверхности. Каждый из указанных континуумов рассматривается как отдельное тело со своими значениями удельной энергии и упругих констант, для вычисления которых используется метод атомарной статики [5-6]. В рамках данного подхода выделенный объем тела рассматривается как система атомов, при этом учитываются парные центральные взаимодействия, описываемые двухпараметрической моделью Леннарда-Джонса:

$$\varphi(r^2) = \beta \left[ \left( \frac{\alpha}{r} \right)^{12} - 2 \left( \frac{\alpha}{r} \right)^6 \right].$$

Здесь  $\varphi$  - потенциал взаимодействия пары частиц,  $r$  - расстояние между взаимодействующими частицами,  $\alpha$  и  $\beta$  - параметры, зависящие от конкретного типа вещества.

В качестве объемных конфигураций атомов рассматриваются кубические образцы монокристаллов с гранецентрированными и объемно-центрированными кубическими решетками. Размер образца задается количеством  $n_e$  частиц, приходящихся на ребро ограничивающего его куба. Величина  $a$  равновесного периода кристаллической решетки для каждой конфигурации определяется из условия минимума ее потенциальной энергии. Для моделирования поверхностного слоя указанные образцы расширяются – со стороны одной из граней к ним присоединяется  $N$  дополнительных атомных монослоев. Тем самым генерируются поверхностные конфигурации атомов. При этом уравнивание каждой полученной системы осуществляется минимизацией ее потенциальной энергии по положениям  $z^{(l)}$ ,  $l = \overline{1, N}$  присоединяемых монослоев. Таким образом, полная конфигурация атомов задается параметрами  $n_e$  и  $N$  и характеризуется величинами равновесных межатомных расстояний  $a, z^{(1)}, \dots, z^{(N)}$  с соответствующими им значениями объемной и поверхностной энергий. На основе указанных характеристик определяются параметры, задающие образец монокристалла (с поверхностным слоем), принимаемый в работе за представительный:

$$n_e = 30; \quad N = 2.$$

Все дальнейшие расчеты проводятся для таких образцов.

Влияние температуры учитывается исходя из статистических соображений аналогично [7], при этом монокристалл как термодинамическая система рассматривается в

гармоническом приближении. В исследуемых конфигурациях для каждого атома задается случайное смещение относительно положения равновесия. Направления смещений предполагаются равновероятными, а их величины генерируются при помощи функции распределения, описывающей, по существу, вероятность обнаружения гармонического осциллятора в некотором положении  $x > h$  в случайно фиксируемый момент времени:

$$F(h) = \begin{cases} 0, & h < -A, \\ \frac{1}{\pi} \arcsin h + \frac{1}{2}, & -A \leq h < A, \\ 1, & h \geq A, \end{cases}$$

Здесь  $A$  - амплитуда тепловых колебаний, связанная с температурой  $\theta$  соотношением  $\theta = \gamma A^2$ ,

где параметр  $\gamma$  предполагается зависящим от конкретного типа рассматриваемого материала. Для конфигураций атомов со случайными смещениями определяются новые равновесные межатомные расстояния. При этом решаются задачи минимизации потенциальных энергий, аналогичные сформулированным ранее. Генерируется независимая повторная выборка уравновешенных конфигураций, на основе которой оцениваются физические значения удельных энергий и упругих констант.

В ходе численного эксперимента были найдены параметры равновесного состояния образца монокристалла, получены оценки их макроскопических значений и проанализированы температурные зависимости. Зарегистрировано разуплотнение поверхностного слоя относительно объема. Обнаружены точки структурного и фазового переходов, на основе которых могут быть оценены неизвестные параметры разработанной модели.

#### ЛИТЕРАТУРА:

1. Nanotribology and nanomechanics. An Introduction / Ed. By Bhushan. – Berlin: Springer-Verlag, 2005. 1148 p.
2. Springer Handbook of Nanotechnology / Ed. By Bhushan. – Berlin: Springer-Verlag, 2007. 1916 p.
3. Андриевский Р.А., Глезер А.М. Прочность наноструктур // УФН. 2009. Т. 179. С. 337-358.
4. Еремеев В.А., Иванова Е.А., Морозов Н.Ф. Некоторые задачи наномеханики // Физическая мезомеханика. 2013. Т. 16. № 4. 7 с.
5. Зубко И.Ю., Трусов П.В. Определение упругих постоянных ГЦК-монокристаллов с помощью потенциала межатомного взаимодействия // Вестник Пермского национального исследовательского политехнического университета. Механика. 2011. № 1. – С. 147-169.
6. Зубко И.Ю., Мелентьева О.В., Морозова В.П., Кочуров В.И. Вывод упругого закона монокристаллов металлов из потенциала межатомного взаимодействия // «Вестник Нижегородского университета им. Н.И. Лобачевского». – Н. Новгород: Изд-во ННГУ им. Н.И. Лобачевского, 2011. №4. Ч.5. – С. 2181-2183.
7. Зубко И.Ю., Кочуров В.И., Симонов М.В. Атомистический подход к определению зависимости от температуры потенциальной энергии и равновесных межатомных расстояний для монокристаллических образцов с ГПУ-решеткой // Известия Самарского НЦ РАН. – 2012. – Т. 14, № 4(5). С. 1403-1409.

ВЛИЯНИЕ СВОЙСТВ МЕЖФАЗНОГО СЛОЯ НА ЭФФЕКТИВНЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ  
КОМПОЗИЦИОННЫХ МАТЕРИАЛОВ

Создание конкурентоспособных изделий в различных отраслях машиностроения на сегодняшний день является важной задачей государства. Подтверждением этому является документ: «Приоритетные направления развития науки, технологий и техники РФ», утвержденный президентом России. В рамках этого направления реализуется сразу несколько стратегически важных технологий. Одним из главных направлений в машиностроении является разработка и освоение технологий изготовления деталей из новых композиционных материалов, обладающих более высокими технико-экономическими показателями, такими как: прочностные характеристики и стоимость используемых в производстве материалов.

Как известно, для полимерных композиционных материалов было указано, что межфазная область [1, 2] толщины  $h$  нано метрового масштаба возникает в результате сложных взаимодействий на границе включений и полимерной матрицы. Для наполнителя с радиусом порядка микрометров вклад такой тонкой межфазной области в упругие свойства композита является незначительным. Однако, для включений с радиусом порядка нанометров, этот потенциальный вклад повышается из-за увеличения площади межфазной поверхности. Например, для  $h/r_0$ , где  $r_0$  – радиус включения, межфазная объемная доля превышает 200% от объемной доли включения, так, что упругие свойства межфазного слоя доминируют над свойствами включения.

Для произвольного закона изменения свойств межфазного слоя по его толщине интересная методика была предложена в [3]. Согласно этой методике толщина межфазного слоя считается постепенно возрастающей и происходит гомогенизация на каждом шаге. В результате для эффективных характеристик структуры «включение - межфазный слой» выводится дифференциальное уравнение. Эта идея, с изменениями, использована в работе [4].

При очень малой толщине межфазного слоя замена структуры включения – межфазный слой на некоторое волокно с эффективными характеристиками исключает плохую обусловленность системы уравнений МКЭ и, как результат, большие ошибки в решении или вообще невозможность получения этого решения.

В работе проводится расчет по МКЭ, когда параметры межфазного слоя считаются постоянными и равными своим средним значениям.

Далее индексы  $m, f, i$  у величин  $E, G, k, \nu$  означают модуль Юнга, модуль сдвига, объемный модуль упругости и коэффициент Пуассона матрицы, включения и межфазного слоя соответственно. Пусть известен закон изменения модуля Юнга  $E_i(r)$  по толщине межфазного слоя  $r \in [r_0, r_1]$ , где  $r_0$  – радиус включения,  $r_1$  – радиус волокна вместе с межфазным слоем толщины  $h = r_1 - r_0$ . На рис. 3 приведена представительная ячейка композиционного материала. Обозначим средние значения  $E_i(r)$  через  $\bar{E}_i$  и вычислим их по соотношению

$$\bar{E}_i = \frac{1}{h} \int_{r_0}^{r_1} E_i(r) dr.$$

Значения коэффициента Пуассона межфазного слоя  $\nu_i$  примем равными среднему арифметическому коэффициентов Пуассона матрицы  $\nu_m$  и включения  $\nu_f$ . Обозначим соответствующие эффективные модули композита как  $E_e, G_e, k_e, \nu_e$ . При моделировании было рассмотрено три возможных закона изменения модуля Юнга межфазного слоя по толщине слоя:

$$E_i(r) = E_f e^{-k(r-r_0)}, \quad (1)$$

где

$$k = -\frac{1}{h} \ln \frac{E_m}{E_f}; \quad (2)$$

$$E_i(r) = E_m \left[ 1 + D \left( \frac{r_1 - r}{h} \right)^Q \right], \quad (3)$$

где  $D = (E_f - E_m)/E_m$  и  $Q$  принимает значения от 0,2 до 5;

$$E_i(r) = E_m + (E_f - E_m) \left( \frac{r}{r_0} \right)^{\beta(r)}, \quad (4)$$

где

$$\beta(r) = \frac{1}{\ln(1+h/r)} \cdot \ln \left[ \frac{\delta E_m}{|E_f - E_m|} \right] \quad (5)$$

и  $\delta$  – достаточно малый параметр.

Для закона (1) изменения  $E_i(r)$ , как легко показать,  $\bar{E}_i$  не зависит от толщины межфазного слоя  $h$  и для  $r_0 = 0,2523$ , что соответствует концентрации 5%,  $\bar{E}_i = 154 \cdot 10^9$  Па. Аналогично, для закона (3) изменения  $E_i(r)$ , среднее значение также не зависит от  $h$ , а зависит лишь от показателя степени  $Q$ . В частности для  $Q = 0,5$  получаем  $\bar{E}_i = 667 \cdot 10^9$  Па, а для  $Q = 2$   $\bar{E}_i = 334 \cdot 10^9$  Па. Для закона (16) изменения  $E_i(r)$  при  $\delta = 0,1$  среднее значение  $\bar{E}_i$  изменяется от  $\bar{E}_i = 109 \cdot 10^9$  Па при  $h = 0,1r_0$  до  $\bar{E}_i = 115 \cdot 10^9$  Па при  $h = 0,001r_0$ . На рис. 1а показаны графики  $E_i(r)$ : а) для закона (3) при  $Q = 0,5$  - пунктирная кривая и  $Q = 2$  сплошная кривая для  $h = 0,2r_0$ ; на рис. 1б показаны графики изменения  $E_i(r)$  для закона (4) и значения  $h = 0,1r_0$ .

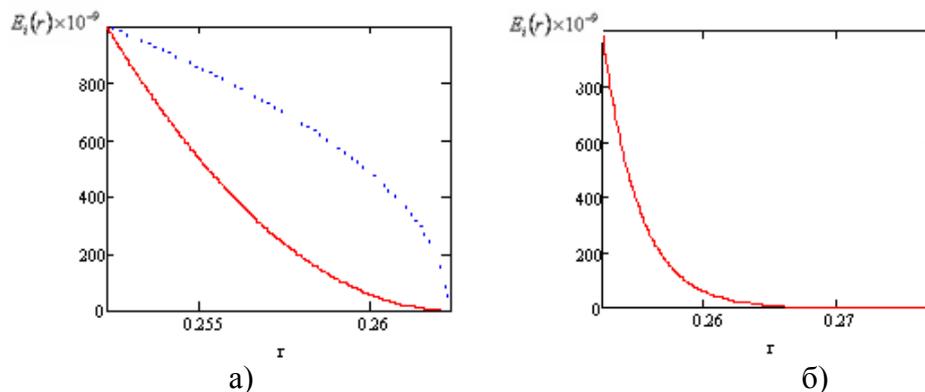


Рис. 1. Кривые зависимости  $E_i(r)$ : а) для закона (3); б) для закона (4).

Результаты для различных значений толщины приведены в табл. 1-3 для трех законов изменения модуль Юнга по толщине межфазного слоя. В первой строке приведены

результаты для закона (1), во второй строке для закона (3) при  $Q = 0,5$  и в третьей строке для закона (4) и  $\delta = 0,1$  для концентрации включения 5%. При очень малой толщине равной  $h = 0,001r_0$  вычисления по МКЭ провести невозможно из-за особенности системы уравнений.

Здесь  $E_e/E_m$  – отношение эффективного модуля Юнга к модулю Юнга основного материала (матрицы),  $G_e/G_m$  – отношение эффективного модуля сдвига в поперечном направлении к модулю сдвига основного материала (матрицы),  $k_e/k_m$  – отношение эффективного объемного модуля к объемному модулю основного материала (матрицы) и  $\nu_e$  – эффективный двумерный коэффициент Пуассона.

Табл. 1. Толщина межфазного слоя  $h = 0,01r_0$

Закон изменения $E_i(r)$	$E_e/E_m$	$G_e/G_m$	$k_e/k_m$	$\nu_e$	Радиус $r_0$ включения
(1)	1,089101	1,092105	1,059950	0,813	0,2523
(3)	1,089118	1,092121	1,059973	0,813	0,2523
(4)	1,089095	1,092098	1,059940	0,813	0,2523

Табл. 2. Толщина межфазного слоя  $h = 0,1r_0$

Закон изменения $E_i(r)$	$E_e/E_m$	$G_e/G_m$	$k_e/k_m$	$\nu_e$	Радиус $r_0$ включения
(1)	1,105456	1,108928	1,071902	0,812	0,2523
(3)	1,105653	1,109119	1,072156	0,813	0,2523
(4)	1,105355	1,108829	1,071772	0,812	0,2523

Табл. 3. Толщина межфазного слоя  $h = 0,2r_0$

Закон изменения $E_i(r)$	$E_e/E_m$	$G_e/G_m$	$k_e/k_m$	$\nu_e$	Радиус $r_0$ включения
(1)	1,125339	1,129345	1,086786	0,812	0,2523
(3)	1,125795	1,129790	1,087349	0,812	0,2523
(4)	1,125063	1,129076	1,086449	0,812	0,2523

Анализ полученных результатов показывает, что для концентрации 5% эффективные характеристики совпадают с точностью до трех знаков после запятой для всего диапазона толщин и всех рассмотренных законов изменения (табл. 1-3).

#### ЛИТЕРАТУРА:

1. Stickney P.B. and Falb R.D., Carbon black-rubber interactions and bound rubber, Rubber Technol.,37, 1299-1340, 1964.
2. Briggs A. Acoustic microscopy. -Oxford: Clarendon Press, 1992. -317 p.
3. Lianxi Shen, Jackie Li, Effective elastic moduli of composites reinforced by particle or fiber with an inhomogeneous interphase, International Journal of Solids and Structures 40 (2003) 1393–1409.
4. Igor Sevostianov, Mark Kachanov, Effect of interphase layers on the overall elastic and conductive properties of matrix composites. Applications to nanosize inclusion, International Journal of Solids and Structures 44 (2007) 1304–1315

ИССЛЕДОВАНИЕ ВЛИЯНИЯ УЧЕТА ГЕОМЕТРИЧЕСКИ НЕОБХОДИМЫХ  
ДИСЛОКАЦИЙ В РАМКАХ ГРАДИЕНТНЫХ ФИЗИЧЕСКИХ ТЕОРИЙ ПЛАСТИЧНОСТИ

Для описания неупругого деформирования металлов с учетом изменения их микроструктуры в настоящее время широко используются физические теории пластичности, в которых явно вводятся механизмы деформирования на микро- и мезоуровне. Однако большинство известных физических теорий основано на понятии простого материала. Эти подходы основаны на использовании простого деформационного градиента (аффинора) и том или ином его разложении на упругую и неупругую составляющие. В последнее время также используются модели, основанные на использовании «градиентов места» высоких порядков. Они позволяют более корректно описывать локализацию пластических деформаций в численных расчетах. В моделях данного типа появляется возможность учитывать большие градиенты скоростей сдвига [4].

Классификация различных градиентных физических моделей пластичности и установление связи между ними приводятся в статьях М. Куроды [1,2,3]. Предложенная ими модель строится с помощью введения плотности геометрически необходимых дислокаций (ГНД) и «возвратных напряжений».

Во всех разновидностях градиентных физических теорий неупругого деформирования металлов для описания кинематики принято разложение Крёнера-Ли деформационного градиента, вводится плотность ГНД на различных системах скольжения, и приводятся соотношения для их эволюции. Для замыкания набора уравнений записывается соотношения для скорости сдвигов по системам скольжения.

Как в цитированных работах в докладе принимается, что на микроуровне нельзя пренебречь возвратными напряжениями, при этом вводится закон течения, учитывающий эти напряжения. Для вычисления возвратных напряжений поле напряжений отдельной дислокации взвешивается с функцией плотности ГНД в окрестности рассматриваемой точки. Градиент плотности ГНД приводит к ненулевым значениям возвратных напряжений. Раскладывая в степенной ряд плотность ГНД, и оставляя члены до первого порядка, получается соотношение тензора для возвратных напряжений.

В соответствии с предложенными выше соотношениями предложена математическая постановка задачи об определении НДС монокристалла ГПУ:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\sigma}^r &= \mathbf{P} : (\boldsymbol{\xi} - \boldsymbol{\xi}^{\text{in}}), \\ \boldsymbol{\xi}^{\text{in}} &= \sum_{k=1}^K \dot{\gamma}^k \mathbf{b}^k \mathbf{n}^k, \\ \dot{\gamma}^k &= \dot{\gamma}_0 \text{sign}(\tau^k - \tau_b^k) \left( \frac{|\tau^k - \tau_b^k|}{\tau_c} \right)^{1/m}, \\ \dot{\tau}_b^k &= b \tau_0 L^2 \nabla \dot{\rho}^k \cdot \mathbf{b}, \\ \dot{\tau}_c^k &= \sum_{l=1}^K h^{kl} |\dot{\gamma}^l|, \\ \dot{h}^{kl} &= \alpha^k \dot{\rho}^k + \alpha^l \dot{\rho}^l + \beta^{kl} \dot{\rho}^k \dot{\rho}^l, \end{aligned}$$

$$\dot{\rho}^k = -\frac{1}{b} \nabla \dot{\gamma}^k \cdot \mathbf{b}^k$$

Здесь в определении матрицы упрочнения учитывается взаимодействие дислокаций из разных систем скольжения. В такой форме закона упрочнения, если нет дислокаций одной системы скольжения, то возможно только самоупрочнение по  $k$ -ой системе. И наоборот. Причем, чем больше дислокаций в данной системе, тем сложнее им двигаться. При наличии дислокаций разных систем скольжения начинаются дислокационные реакции. Винтовые дислокации вклад в упрочнение не дают.

В качестве объекта был выбран именно ГПУ – кристалл [6], так как он обладает наибольшей степенью анизотропии как упругих, так и пластических свойств. Данный факт может существенно повлиять на возможность появления градиентов скоростей сдвига. Параметры для монокристалла ГПУ взяты из работы [5].

Далее было определено напряженно-деформированного состояния ГПУ-монокристалла, при сдвиговом нагружении. Также была определена суммарная плотность ГНД в кристаллите в зависимости от интенсивности деформаций.

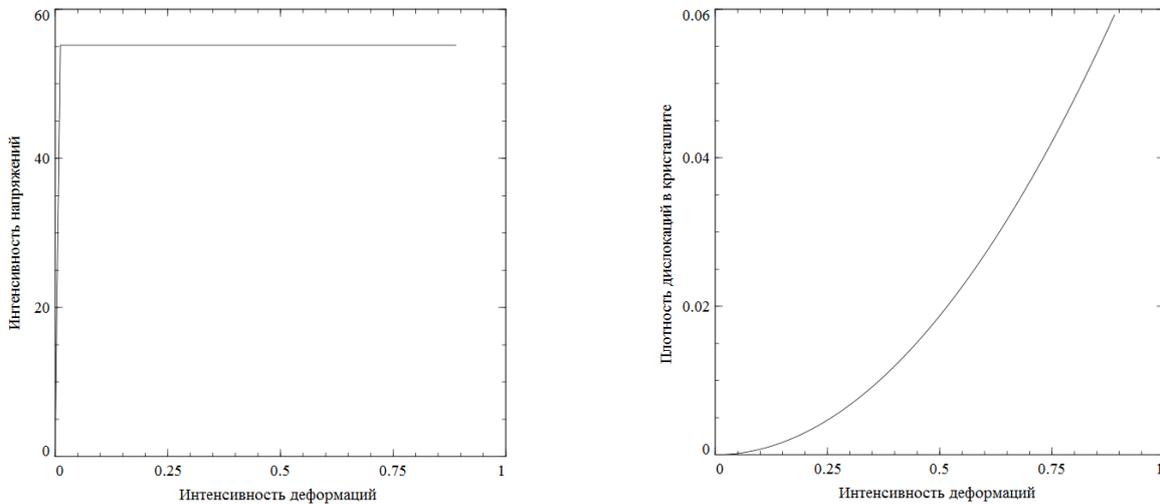


Рис. 1. Зависимость интенсивности напряжений и плотностей дислокаций в кристалле от интенсивности деформаций при сдвиге вдоль оси  $Ox^1x^2$

Далее рассматривались два кристаллита с различной ориентацией кристаллографической системы координат (КСК) относительно ЛСК (лабораторной системы координат). Первый кристалл ориентирован на  $45^\circ$  относительно оси  $Ox^3$ , второй на  $30^\circ$  градусов относительно оси  $Ox^3$ . В качестве нагружения рассматривается сдвиг в плоскости  $Ox^1x^3$ .

В отличие от результатов, где ориентация кристаллитов совпадала, было получено, что интенсивности напряжений отличаются в среднем на 5 %, а плотности ГНД на 10%. Также было показано, что различия в ориентации кристаллитов приводит к повышению плотности ГНД. Повышенная плотность дислокаций приводит к уменьшению напряжений, вызванных увеличением значения возвратных напряжений.

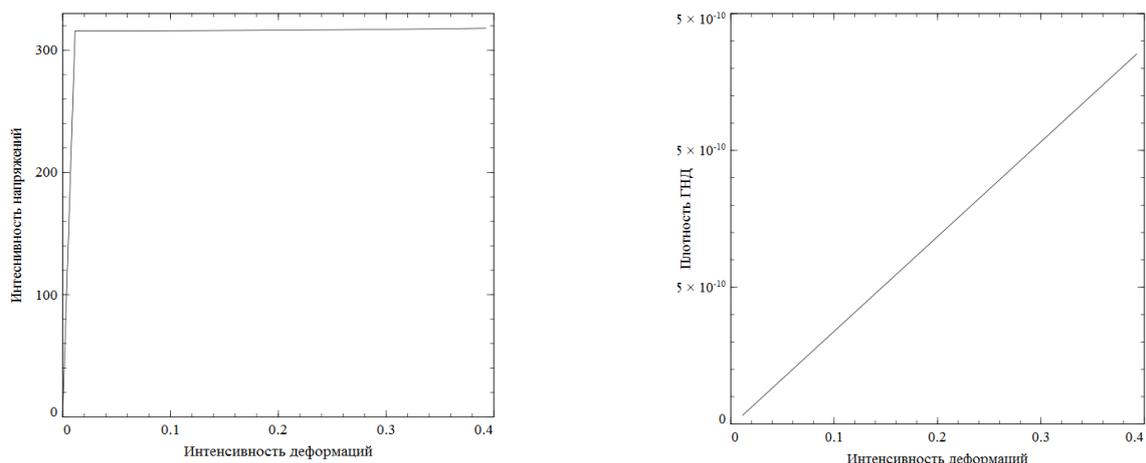


Рис. 2. Зависимость интенсивности напряжений и плотности ГНД от интенсивности деформаций при совпадающей ориентации ЛСК и КСК

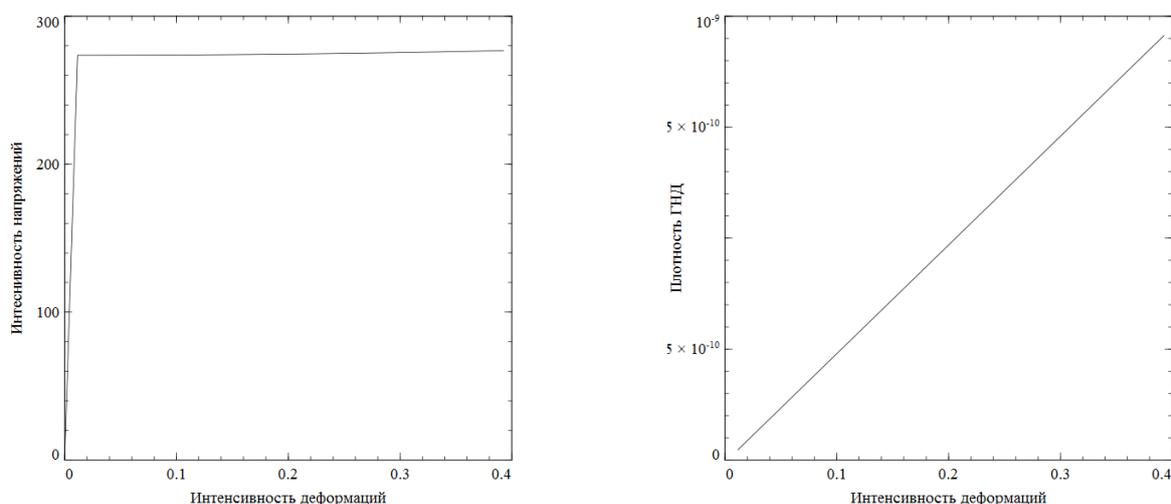


Рис. 3. Зависимость интенсивности напряжений и плотности дислокаций от интенсивности деформаций при различной ориентации кристаллитов относительно ЛСК

В данной работе проведен анализ серии работ по градиентным теориям пластичности. Для построения модели градиентной теории пластичности был выбран физический подход, в явном виде учитывающий механизмы неупругого деформирования. В основу модели положена модель М. Куроды. Предложена соответствующая математическая постановка модели мезоуровня с учетом градиентов скоростей сдвигов и изменения плотностей дислокаций. Представлены результаты численных экспериментов при сдвиговом нагружении ГПУ-монокристалла. Рассмотрены два кристаллита различной ориентации относительно ЛСК. Показаны отличия, появляющиеся в НДС, при различной ориентации кристаллитов. Выявлено, что различия в ориентации кристаллитов вызывает увеличение ГНД, в связи с увеличением влияния границы между кристаллитами.

#### ЛИТЕРАТУРА:

1. Kuroda M., Tvergaard V. An alternative treatment of phenomenological higher-order strain-gradient plasticity theory. // International Journal of Plasticity 26 (2010) 507–515.
2. Kuroda M., Tvergaard V. A finite deformation theory of higher-order gradient crystal plasticity. // Journal of the Mechanics and Physics of Solids 56 (2008) 2573– 2584.

3. Kuroda M., Tvergaard V. On the formulations of higher-order strain gradient crystal plasticity models. // Journal of the Mechanics and Physics of Solids 56 (2008) 1591–1608
4. Shu J.Y., Fleck N. Strain gradient crystal plasticity. Size-dependent deformation of bicrystals. // Journal of the Mechanics and Physics of Solids, 1999. V. 47. Pp. 297-324.
5. Wu X. Modeling anisotropic stress-strain response and crystallographic texture evolution on  $\alpha$ -titanium during large plastic deformation using Taylor-type models: influence of initial texture and purity / Wu X., Kalidindi S.R., Necker C., Salem A.A. // Metallurgical and materials transactions/ — 2008. Vol. 39A. – Pp. 3046-3054.
6. С.П. Тимошенко, Дж. Гудьер, Теория упругости. Изд. «Наука», г. Москва, 1975. с. 576.

УДК 538.911, 539.32

М.В. Симонов  
(Санкт-Петербургский государственный политехнический университет)

### ИССЛЕДОВАНИЕ МЕХАНИЧЕСКИХ СВОЙСТВ ОБРАЗЦОВ КОНЕЧНЫХ РАЗМЕРОВ С ГПУ-РЕШЕТКОЙ

В современной науке особое место занимают работы посвященные изучению атомарной структуры материалов. Зная атомарную структуру материала, появляется возможность создания материалов с требуемыми свойствами. Особый интерес представляет создание материалов с конечным числом атомов, который могут сильно отличаться по своим механическим свойствам, например, графен. Но свойства таких материалов затруднительно изучать экспериментально, а также отсутствует достаточное количество теоретических исследований механических свойств материалов, состоящих из конечного числа атомов.

В большинстве научных работ, посвященных теоретическому исследованию механических свойств металлических кристаллов, рассматривают бесконечный набор атомов кристаллической решетки [6, 7, 9]. В работах [1, 2] посвященных исследованию упругих свойств образцов конечного размера с ГЦК- и ОЦК- решетками было показано, что для них наблюдается зависимость механических характеристик от размера образца.

Для металлов наряду с гранецентрированной (ГЦК) и объемцентрированной кубической (ОЦК) кристаллической решеткой одним из наиболее распространенных типов является гексагональная плотноупакованная (ГПУ) решетка [5, 10]. Такое строение имеют титан, цинк, цирконий, бериллий, магний и ряд других металлов. Поэтому необходимо создавать математические модели для описания металлов с ГПУ решеткой.

Целью данной работы является исследование механических свойств конечноразмерных образцов с ГПУ-решеткой и их зависимости от размеров образца.

Задачи исследования: определение устойчивости конфигурации выбранного образца ГПУ - решетки, определение зависимости упругих модулей от числа атомов для образцов с ГПУ - решеткой и сравнение потенциальной энергии для образцов конечного размера с ГПУ и ГЦК - решеткой.

При исследовании механических свойств образца с ГПУ-решеткой конечных размеров для исключения влияния на результат наложения классов симметрий образца и решетки рассматривается тело, имеющее оси симметрии такого же порядка, что и сама кристаллическая решетка [3, 8].

Для моделирования взаимодействия атомов в металлах с ГПУ-строением выбирается степенной потенциал Леннард-Джонсовского типа, потенциал Ми [3, 4]:  $\varphi(\mathbf{x}) = \beta \left( n(\alpha/|\mathbf{x}|)^m - m(\alpha/|\mathbf{x}|)^n \right) / (m - n)$ ,  $m, n \in N$  (1). Известно, что материалы с ГПУ-строением имеют два параметра кристаллической решетки — расстояние между эквивалентными

слоями атомов  $b$  и межатомное расстояние  $a$  для слоя. В работе [4] был разработан алгоритм для определения параметров потенциала в соответствии с параметрами решетки. В дальнейших исследованиях все параметры потенциала берутся из данной работы.

Для образцов конечного размера с ГПУ - решеткой необходимо определить, является ли его конфигурация устойчивой. Для этого, необходимо исследовать тензор жесткости на положительную определенность. Ограничения на значения упругих модулей, обеспечивающие выполнение условия положительной определенности тензора линейно-упругих свойств  $\mathbf{C}$  ( $\mathbf{e}:\mathbf{C}:\mathbf{e} > 0$ ,  $\forall \mathbf{e} \neq \mathbf{0}$ ;  $\mathbf{e}:\mathbf{C}:\mathbf{e} = 0 \Leftrightarrow \mathbf{e} = \mathbf{0}$ ). Из этого условия следуют условия для отдельных компонент:  $C_{1111} > 0$ ,  $C_{1212} > 0$ ,  $2C_{1111} > C_{1122}$ ,  $C_{2323} > 0$ ,  $C_{2233} > 0$ ,  $2C_{2233}^2 - (C_{1111} + C_{1122})C_{3333} < 0$ ,  $C_{3333} > 0$ . (2). Таким образом для определения является ли выбранная конфигурация устойчивой, необходимо определить значения компонент тензора линейно-упругих свойств.

Для решения задачи об определении упругих свойств образца конечных размеров с ГПУ-решеткой задается вид деформационного градиента и определяется текущая конфигурация кристалла. Для расчета упругих модулей в текущей конфигурации кристалла вычисляется полная потенциальная энергия образца, отнесенная к его объему. Приравнивая квадратичные слагаемые в ее разложении в степенной ряд по параметрам деформирования упругому потенциалу, определяются упругие модули образца. При повторении расчетов для различного числа атомов в решетке упругие модули образуют числовые последовательности, быстро сходящиеся с ростом размеров образца.

Получено, что упругие модули ГПУ-кристалла зависят от размеров образца. Эта зависимость имеет горизонтальную асимптоту, соответствующую макроскопическому монокристаллическому телу с известными упругими свойствами, что позволяет провести идентификацию параметров потенциала взаимодействия атомов.

Далее были проведены серия численных экспериментов для  $\alpha$ -Ti. Значения упругих констант полученных при моделировании (число атомов устремлено к бесконечности):  $C_{2233} = 8909.19\beta / \alpha^3$ ,  $C_{1122} = 1716.72\beta / \alpha^3$ ,  $C_{2323} = 12223.57\beta / \alpha^3$ ,  $C_{1111} = 20484.01\beta / \alpha^3$ ,  $C_{3333} = 70784.67\beta / \alpha^3$ . (3)

Подставляя полученные значения компонент тензора упругих свойств в (3), можно определить, что выбранная конфигурация образца с конечным числом атомов для  $\alpha$ -Ti является устойчивой.

Из экспериментов [11] для  $\alpha$ -Ti известны значения упругих модулей, из которых можно определить параметр  $\beta$  потенциала Ми. Принимая, что  $C_{1111}^{Ti} = C_{1111}^{\infty}$ , получим  $\beta = 2.93$  (Дж), тогда  $\beta / \alpha^3 = 7.928$  (ГПа), то есть:  $C_{1111}^{\infty} = 16.24$  (ГПа),  $C_{1122}^{\infty} = 13.6$  (ГПа),  $C_{2233}^{\infty} = 70.63$  (ГПа),  $C_{3333}^{\infty} = 96.99$  (ГПа),  $C_{2323}^{\infty} = 70.63$  (ГПа),  $C_{1212}^{\infty} = 14.88$  (ГПа). (4)

Наибольшее отклонение в вычисленных с помощью указанных параметров модулях (4) от экспериментальных значений составляет 23%. Такое отклонение связано с недостаточной точностью предельного перехода и с тем, что расчеты проводились для идеально чистого металла, а экспериментальные данные получены для технически чистого  $\alpha$ -Ti, содержащего примеси.

Также была проанализирована удельная потенциальная энергия двух кристаллов ГПУ и ГЦК с одинаковым числом атомов на ребре. Для ГПУ и ГЦК кристаллов определялась удельная потенциальная энергия для образцов с 3, 4 и т.д. до 30 атомами на ребре образца и далее строилась аппроксимирующая функция. В качестве материалов для численного эксперимента выбирались кобальт и медь соответственно. Выбор именно таких материалов обусловлен тем, что два параметра потенциала Ми и параметр  $\alpha = 1$  для них идентичны.

Отличаются только параметр  $\beta$ . Параметры потенциала для кобальта взяты из таблицы 1. Для меди из [4].

При этом появляется возможность определить значение удельной, отнесенной к числу атомов в образце, потенциальной энергии для макрообразца, при устремлении числа атомов к бесконечности. Предельное значение составляет:  $E/\beta = -8.28213$ .

Аналогичные эксперименты были проведены для ГЦК кристалла меди. Предельное значение удельной потенциальной энергии для ГЦК – кристалла меди составляет:  $E/\beta = -4.40467$ . Далее возможно сопоставить потенциальные энергии для образцов конечного размера ГЦК и ГПУ решетки.

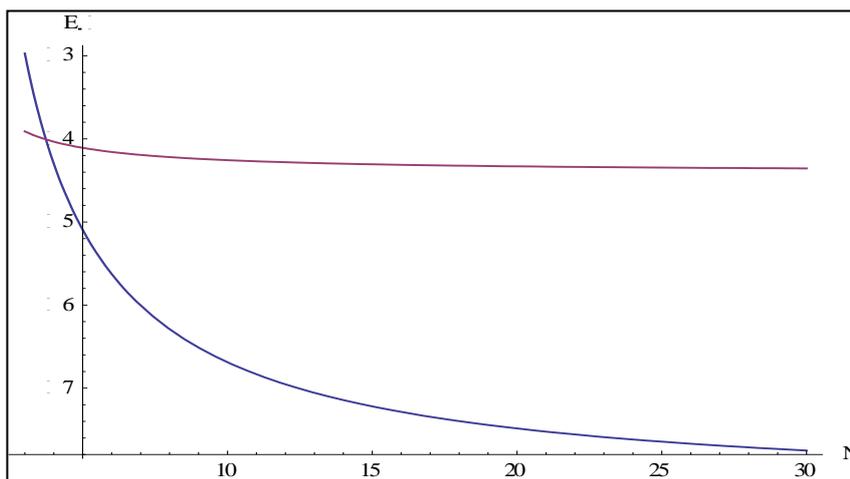


Рис. 1. Зависимость потенциальной энергии от числа атомов на ребре образца для ГЦК (красный) и ГПУ – кристаллов (синий)

Таким образом, получено, что удельная потенциальная энергия ГЦК больше, чем для ГПУ – кристаллов. Из этого можно сделать предположение, что ГПУ – кристалл более выгоден с энергетической точки зрения.

В результате в работе было получено условие устойчивости для образца конечного размера ГПУ - кристалла, определены упругие модули  $\alpha$ -Ti и получена их зависимость от размера образца. Была проанализирована удельная потенциальная энергия образцов конечного размера ГПУ и ГЦК кристаллов и показано, что энергетически более выгодной является ГПУ структура.

#### ЛИТЕРАТУРА:

1. Зубко И.Ю., Трусов П.В. Определение упругих постоянных ГЦК-монокристаллов с помощью потенциала межатомного взаимодействия // Вестник Пермского национального исследовательского политехнического университета. Механика. 2011. № 1. С. 147-169.
2. Зубко И.Ю., Мелентьева О.В., Морозова В.П., Кочуров В.И. Вывод упругого закона монокристаллов металлов из потенциала межатомного взаимодействия // «Вестник Нижегородского университета им. Н.И. Лобачевского». – Н. Новгород: Изд-во ННГУ им. Н.И. Лобачевского, 2011. №4. Ч.5. – С. 2181-2183.
3. Симонов М.В., Зубко И.Ю. Определение равновесных параметров решетки различных ГПУ-монокристаллов с помощью потенциала межатомного взаимодействия Ми // Вестник Пермского национального исследовательского политехнического университета. Механика. 2012. № 3. С. 204-217.
4. Симонов М.В., Зубко И.Ю. Исследование применимости потенциала Ми к оценке равновесных параметров ГПУ-решетки // Вестник Пермского университета. Серия: Физика. 2012. № 4 (22). С. 178-182.
5. Васильев Д.М. Физическая кристаллография. – М.: Металлургия, 1981. – 248 с.

6. Кривцов А.М. Деформирование и разрушение твердых тел с микроструктурой. – М.: Физматлит, 2007. – 304 с.
7. Кривцов А.М. Упругие свойства одноатомных и двухатомных кристаллов: Учебное пособие. – СПб.: Изд. СПбГПУ, 2010. – 144 с.
8. Черных К.Ф. Введение в анизотропную упругость. – М.: Наука, 1988. – 190 с.
9. Баранов М.А., Дубов Е.А., Дятлова И.В., Черных Е.В. Атомно-дискретное описание влияния анизотропных межатомных взаимодействий на упругие свойства ГПУ-металлов // Физика твердого тела. 2004. Т. 46. № 2. С. 212–217.
10. Кривцов А.М., Подольская Е.А. Моделирование упругих свойств кристаллов с гексагональной плотноупакованной решеткой // Механика твердого тела, № 3, 2010. С. 77-86.
11. Келли А., Гровс Г. Кристаллография и дефекты в кристаллах. М.: Мир, 1974. 504 с.

УДК 539.3

К.П. Фролова, О.С. Лобода  
(Санкт-Петербургский государственный политехнический университет)

### МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ЛУКА

Наличие спортивных луков на современном рынке неустанно растет. Большим спросом пользуются и классические охотничьи луки. Б.А. Виноградский проанализировал состояние и перспективы развития стрельбы из лука в мире по результатам XXVIII Олимпийских игр [1]. Резюмируя, он отметил, что развитие стрельбы из лука как вида спорта на международной арене можно оценить как стабильное и подчеркнул, что отмечается рост спортивного результата, ужесточение спортивной борьбы и повышение конкуренции.

И.Ф. Заневский отметил «эволюцию» моделей лука, созданных рядом ученых [2]. С.Н. Хикман описал лук, плечи которого являются прямыми и недеформируемыми, между которыми располагаются идеальные шарниры с пружиной Архимеда, а концы которых соединены нерастяжимой тетивой [2,3]. Б.В. Куи и Дж.А. Спаренберг в своей модели рассмотрели плечо лука в качестве упругой полосы [2,4]. Среди российских работ в области создания математической модели лука можно подчеркнуть работу А.А. Лужина [5], который смоделировал плечи пластинами Кирхгофа – Лява, тетиву - нерастяжимой нитью, а стрелу – сосредоточенной массой. При этом задача решалась в линейной постановке для малых прогибов плеч. Разработка модели блочного лука представляет наибольший интерес в современном мире. Особое внимание уделяется азиатскому луку. Особенностью его конструкции являются негнущиеся концы плеч, благодаря которым усилие натяжения лука резко увеличивается в начале и более плавно - в конце. Б.В.Куи и Дж.А. Спаренберг описали с помощью математической модели такой лук [4]. По сути дела описанная конструкция лука является прообразом современного блочного лука. Математическую модель последнего предложил Дж.Л. Парк [6].

Целью данной работы является описание механической конструкции лука с помощью математического аппарата. Необходимо, найти зависимость силы натяжения лука от смещения тетивы и, основываясь на полученном решении, построить соответствующую ему динамическую кривую (график данной зависимости); определить начальную скорость, придаваемую снаряду и энергию лука. В качестве оценки адекватности полученных результатов необходимо провести сравнение с экспериментальными данными. Конструкцию лука следует описать двумя моделями: в одном случае плечи лука рассмотреть как абсолютно жесткие стержни, в другом - предположить, что у них имеется характеристика на изгиб. Необходимо сопоставить решения, полученные для обеих моделей, друг с другом и с экспериментальными данными, после чего выяснить, какая модель точнее описывает конструкцию, а также какая из них соответствует более мощному луку. В качестве еще

одной задачи в работе нужно рассмотреть конструкцию блочного лука. Определить принцип действия, провести эксперимент и построить зависимость усилия натяга от смещения тетивы, на основании чего сделать умозаключение об эффективности применения эксцентричных блоков в системе.

В качестве первой модели рассматривается лук, плечи которого принимаются за абсолютно жесткие стержни, между которыми располагается пружина, имеющая конечную жесткость; тетива моделируется нерастяжимой нитью. В качестве недеформированного рассматривается положение статического равновесия в момент, когда тетива натянута на лук, не деформирована и не оттянута. При оттягивании тетивы силой, приложенной к ее середине, происходит отклонение плеч лука на некоторый угол. Силу, прикладываемую к середине тетивы, необходимо выразить через геометрические параметры конструкции (длину плеча лука и базу (величину начального смещения тетивы)), а также через величину жесткости спиральной пружины. В ходе решения задачи используя тот факт, что конструкция лука находится в статическом равновесии в каждом положении, которое она принимает при оттягивании тетивы. Оказалось, что зависимость силы натяжения лука от смещения тетивы выражается формулой (1):

$$F(x) = \frac{12c(l^2 - 2x_0^2)}{3!l^2x_0^2(l^2 - x_0^2)} x^3, \quad (1)$$

где  $F$  – сила натяжения лука,  $c$  – жесткость пружины,  $l$  – длина плеча лука,  $x_0$  – база тетивы,  $x$  – смещение тетивы.

Во второй модели плечи являются упругими и моделируются балками Бернулли – Эйлера. Тетива принимается нерастяжимой. Задача решается в линейном приближении – предполагается, что перемещения, возникающие в плечах лука, малы по сравнению с размерами оных. В недеформированном состоянии плечи лука представляют собой прямые стержни, находящиеся под некоторым углом к горизонту. Считается, что внешние моменты отсутствуют, также можно пренебречь инерцией вращения. Решается система уравнений равновесия стержней. Граничные условия задаются следующим образом: один конец плеча лука жестко заделан (моделируется место крепления плеча лука на рукояти), а на другой действует сосредоточенная сила, постоянная по величине и направлению. Находится зависимость перемещения конца плеча лука от силы в сечении стержня. Далее получаем

зависимость (2) смещения тетивы от силы натяжения лука:

$$x = \sqrt{p^2 - \left(l \sin \alpha - \frac{l^3}{6c_1} F \operatorname{ctg} \alpha\right)^2} + l \cos \alpha + \frac{l^3}{6c_1} F - x_0, \quad (2)$$

где  $p$  – длина рассматриваемого участка тетивы,  $c_1$  – жесткость плеча,  $F$  – сила натяжения лука.

На основе полученных зависимостей (1),(2), а также по экспериментальным данным были построены динамические кривые (рис. 1). Эксперимент проводился с классическим прямым луком, материал плеч – стеклотекстолит. Построены графики зависимости энергии, накапливаемой в конструкции лука, и начальной скорости стрелы от величины смещения тетивы (рис. 2,3).

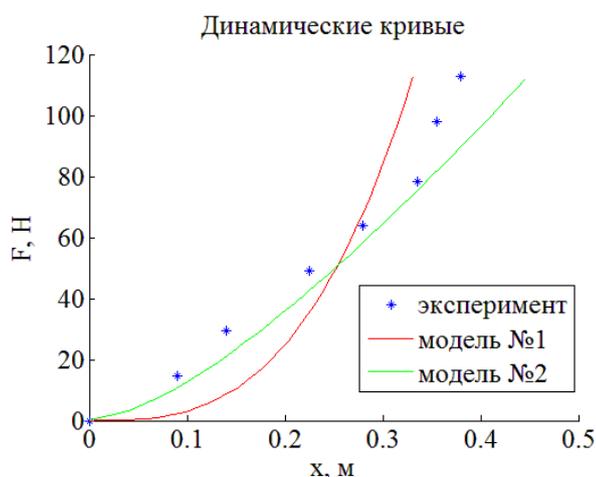


Рис. 1. Динамические кривые

конструкции лука, и начальной скорости стрелы от величины смещения тетивы (рис. 2,3).

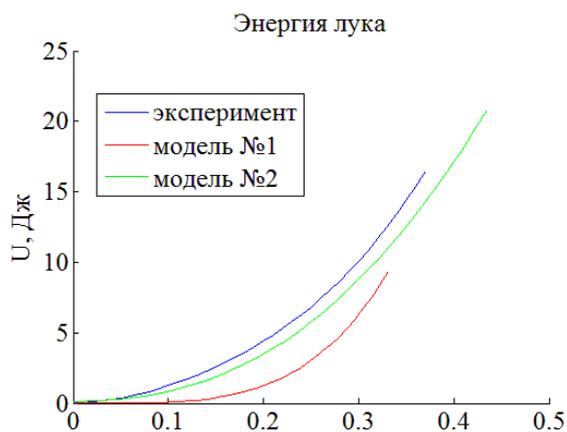


Рис. 2. Энергия лука

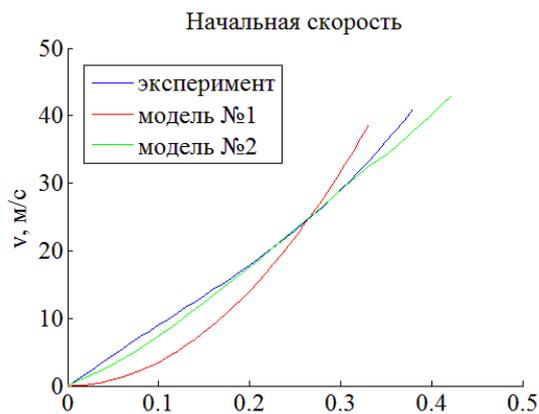


Рис. 3. Начальная скорость стрелы

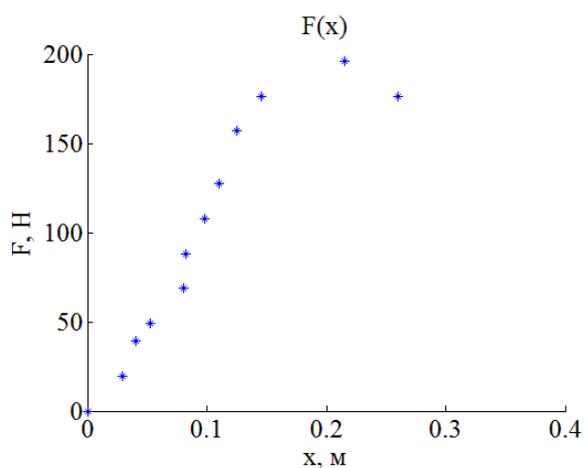


Рис. 4. Зависимость усилия натяга от смещения тетивы

Для исследуемого блочного лука «Ястреб» построена зависимость усилия натяжения лука от смещения тетивы («см. рисунок 4»). У графика имеется пик в точке, где сила натяжения лука является максимальной. После прохождения пика усилие, ощущаемое стрелком, падает.

В качестве заключения стоит отметить, что по всем исследуемым характеристикам конструкция модели лука с упругими плечами лучше описывает реальный лук, чем модель с абсолютно жесткими плечами. Более того, лук с упругими плечами является эффективнее лука с жесткими плечами, т.к. он обладает большей мощностью. Показано, что

система блоков позволяет удерживать в натянутом состоянии более мощные луки, что, в свою очередь, позволяет применять на практике более мощные конструкции.

#### ЛИТЕРАТУРА:

1. Б.А. Виноградский. Анализ состояния и перспективы развития стрельбы из лука в мире с учетом результатов 28 Олимпийских игр в Афинах // Наука в олимпийском спорте – 2005 - № 2 - с. 60 – 68.
2. И.Ф. Заневский. Компьютерная модель внутренней баллистики стрелы лука // Сборник научных трудов "Вестник НТУ "ХПИ": Информатика и моделирование – 2011 - №36 - с. 78 – 86.
3. С.N. Hickman. Dynamics of a bow and arrow // Journal of Applied Physics – 1937 - V. 8 - p. 404-409.
4. В.W. Kooi, J.A. Sparenberg. On the static deformation of a bow // Journal of Engineering Mathematics – 1980 - V. 14, № 1 - p. 27-45.
5. А.А. Лужин. Моделирование выстрела из лука: дис. на соискание ученой степени к.ф.-м.н. – Москва, 2008 - 103 с.
6. J.L. Park. The behaviour of an arrow shot from a compound archery bow // Proc. Of the IMechE, Part P: Journal of Sports Engineering and Technology. – 2011. – V. 225, № 8. – p. 8 - 21.

## ПОИСК ЗНАКОВ ДОРОЖНОГО ДВИЖЕНИЯ

Распознавание знаков дорожного движения стало одной из классических задач цифровой обработки изображений. На настоящий момент предложено множество решений этой задачи, некоторые из которых внедрены и используются в системах помощи водителю на автомобилях бизнес-класса. Лучшие алгоритмы позволяют находить на изображениях около 90% знаков. Однако результаты работы многих алгоритмов сильно зависят от условий съемки, наличия помех на изображениях, а также набора тестовых изображений, что не позволяет говорить о том, что эта задача полностью решена.

Большинство существующих методов поиска знака опираются на цветовые характеристики или используют алгоритмы распознавания образов. Данные методы не позволяют точно определять положение знака, что приводит к потере точности на этапе распознавания.

Целью работы было разработать алгоритм поиска знаков дорожного движения, относящихся к группе запрещающих и предупреждающих, имеющего высокую (>90%) точность поиска, а также исследовать скорость и качество работы метода не основывающегося на цветовых характеристиках в отличие от методов их использующих, реализации которых были представлены в более ранних исследованиях.

В данной работе мы предлагаем алгоритм поиска, основанный на выделении границ и внутренних областей знаков дорожного движения, их сопоставления и точного позиционирования.

### *Обзор существующих решений*

Существующие подходы к поиску знаков дорожного движения можно разделить на три группы: методы основывающиеся на цветовых критериях, критериях формы объекта и совмещенные критерии.

Методы основанные на цветовых характеристиках можно разделить на несколько групп по типу использования цвета, как признака. Это методы использующие пороговое отсечение для построения бинарной маски[1], методы строящие сегментацию на основе данных о расстоянии между цветами соседних пикселей[2], динамическое определение цвета в локальной области в пространстве HSV (Hue Saturation Value)[3].

В методе Piccioli[4] с помощью алгоритма Кэнни строится карта ребер, которая подвергается геометрическому анализу для определения положения и формы знака. Gavril[5] использовал для поиска знаков distance transform на поле границ, для поиска окружностей и треугольников.

H.Fleyeh[6] рассматривал исходное изображение в пространстве HSV где выделял цветовые компоненты 4 типов (красные, желтые, белые и синие) для предупреждающих и запрещающих знаков рассматривались красные и белые компоненты, регион считался кандидатом на знак, в случае, если две компоненты дополняли друг друга.

### *Поиск знаков дорожного движения*

Задачей исследования было построение эффективного алгоритма поиска определенной группы знаков дорожного движения, без использования информации о цвете составляющих частей дорожного знака и не имеющего настраиваемых параметров, т.е. метод полностью автоматизирован.

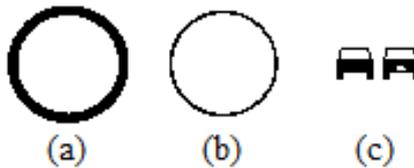


Рис. 1. (а) контур знака, (b) фон знака, (с) пиктограмма знака

Знаки дорожного движения из группы запрещающих и предупреждающих можно разложить на три составляющих, как показано на рис. 1. Были выработаны следующие признаки этих знаков:

1. Внутренний фон знака контрастен по отношению к контуру
2. Внутренний фон всегда ярче контура и не менее ярк, чем окружающий знак общий фон
3. Фон знака и контур знака соприкасаются по всему периметру.

На основе данных признаков был сформирован метод поиска знаков дорожного движения. Для определения границы контраста был использован алгоритм поиска границ Canny, результат работы которого содержит внутреннюю границу контура знака. Внутренний фон знака обладает свойством повышенной освещенности, что хорошо отделять модифицированным методом пороговой классификации изображения Sauvola [7], модификация заключается в автоматизации выбора параметра “смещения” в оригинальном алгоритме, отвечающего за “пересвет” или “недосвет” выделяемых регионов. Для каждого изображения признаков производилась фильтрация компонент связности по признакам размера, степени заполненности компоненты и отношения ширины к высоте. Два конечных, отфильтрованных набора признаков сопоставлялись, с целью определить близкие по расстоянию компоненты, интерпретируемые, как знаки.

#### *Результаты*

Метод работает за линейное время, где длиной входа является размер изображения, дополнительные расходы по памяти составляют не более 4 копий исходного изображения. Полученное решение было протестировано на двух множествах изображений, это собственная база из 300 изображений снятых на камеру регистратора в г. Санкт-Петербург SPbSS (Saint-Petersburg Sign Set). И база GSDB (German Sign Detection Benchmark) [8] которая состоит из 900 изображений со знаками дорожного движения.

Табл. 1. Результаты работы приложения

База	Найдено знаков, %	Ложные срабатывания, %	Количество знаков	Время обработки кадра, с
SPbSS	94.6	10.2	315	0.075
GSDB[8]	84.7	10.9	1213	0.039

В таблице 1 указаны данные о качестве работы приложения, реализующего описанный нами подход. Разница почти на 10% для снимков из разных баз вызвана тем, что изображения в SPbSS имеют разрешение FullHD(1920x1080 пикселей), а GSDB имеют разрешение 1360x800 пикселей, по этой причине удаленные знаки содержали меньше информации о себе и не были найдены. Данный подход применим для построения системы распознавания знаков дорожного движения, как модуль поиска знаков дорожного движения.

Получен метод, который не опирается на данные о цвете знака, инвариантен относительно освещенности, погодных условий и небольших повреждений целостности знака. Также найдена модификация метода Sauvola, которая в рамках заданной задачи позволяет автоматизировать выбор параметров метода.

#### ЛИТЕРАТУРА:

1. D. Ghica, S. Lu, and X. Yuan, "Recognition of traffic signs by artificial neural network," presented at IEEE Inter. Conf. Neural Networks, Perth, W.A., 1995.
2. A. Yuille, D. Snow, and M. Nitzberg, "Signfinder, Using color to detect, localize and indentify informational," presented at Sixth Inter. Conf. on Computer Vision, Bombay, India, 1998.
3. A. de la Escalera, J. Armingol, and J. Pastor, "Visual sign information extraction and identification by deformable models for intelligent vehicles," IEEE Trans. on Intelligent Transportation Systems, vol. 5, pp. 57-68, 2004.
4. G. Piccioli, E. De Micheli, P. Parodi, and M. Campani, "Robust method for sign detection and recognition," J. Image and Vision Computing, vol. 14, pp. 209-223, 1996.
5. D. Gavrilu, "Multi-feature Hierarchical template matching using distance transforms," presented at Fourteenth Inter. Conf. on Pattern Recognition, Brisbane, Qld Australia, 1998.
6. H. Fleyeh, "Traffic and Road Sign Recognition," presented at 2008 IEEE Conf. on Cybernetics and Intelligent Systems, Singapore, 2008
7. J. Sauvola, M. PietikaKinen "Machine Vision and Media Processing Group," Infotech Oulu, University of Oulu, 21 January 1999
8. GSDB url:<http://benchmark.ini.rub.de/>

УДК 538.911, 539.32

Р.С. Городилов, И.Ю. Зубко

(Пермский национальный исследовательский политехнический университет)

### ИССЛЕДОВАНИЕ УПРУГИХ СВОЙСТВ МОНОСЛОЯ ГРАФЕНА С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ СТЕПЕННЫХ ПОТЕНЦИАЛОВ В ПОДХОДЕ АТОМАРНОЙ СТАТИКИ

Для теоретического исследования механических свойств тел с кристаллическим строением применяются различные модификации дискретного подхода, основанного на прямом моделировании движения атомов кристалла, при использовании которого для каждой частицы решаются уравнения движения (уравнения баланса количества движения и момента количества движения). Эти уравнения содержат силы и моменты взаимодействия выбранной частицы со всеми остальными частицами тела или с частицами из некоторой ее окрестности [1, 2]. Силы взаимодействия частиц вводятся с помощью потенциалов взаимодействия частиц. Это приближенный способ описания основного свойства атомов притягиваться на больших и отталкиваться на малых расстояниях.

Актуальность задачи состоит в том, что экспериментальные методы исследования физико-механических свойств таких объектов затруднены, а расчеты по прогнозированию свойств композиционных материалов на основе графена необходимо проводить. Такие исследования связаны с перспективой разработки композиционных материалов, армированных углеродными нанотрубками и другими наночастицами.

Целью данной работы является разработка модели, позволяющей находить упругие характеристики кристалла с решеткой графена в опытах на различных видах нагружения, и проводить теоретическое исследование механических свойств графена. В качестве аппарата реализации модели и проведения исследования выбирается подход атомарной статике.

Для достижения цели необходимо решить следующие задачи: определить начальную равновесную конфигурацию кристалла; разработать алгоритм вычисления напряжений в деформированной конфигурации кристалла; по заданным деформациям и найденным напряжениям найти упругие модули графена; определить параметры потенциала межатомного взаимодействия для кристалла графена от размеров образца.

В работе рассматривается модификация метода частиц [3, 4], позволившая провести идентификацию параметров потенциала межатомного взаимодействия для образцов с кубической решеткой металлов по равновесному межатомному расстоянию и упругому модулю сдвига. В основе этой методики лежит рассмотрение статики взаимодействующих частиц при явном задании структуры кристаллической решетки. В расчетах использовался степенной потенциал Ми:

$$\varphi(r) = \beta \left( n(\alpha/r)^m - m(\alpha/r)^n \right) / (m-n), \quad (1)$$

где  $\alpha$  — равновесное расстояние для изолированной пары атомов,  $\beta$  — энергия, соответствующая глубине потенциальной ямы при взаимодействии двух таких атомов. Параметры потенциала считались произвольными. В работе рассматривался слой материала с решеткой графена в форме правильного шестиугольника с различным числом атомов на грани. Такая форма образца позволяет избежать влияния формы на изотропию упругих свойств графена. Параметры решетки также считались произвольными. Само движение атомов в результате их взаимодействия не исследуется, вопрос об устойчивости решетки графена не ставится.

Для определения упругих модулей задавался аффинор, переводящий исследуемый слой графена из равновесной начальной конфигурации в текущую конфигурацию. Рассматривались деформации в виде простого сдвига и чистого растяжения-сжатия вдоль одной из двух взаимно ортогональных кристаллографических осей. Для определения упругих модулей использовалось два подхода — силовой и энергетический.

Для того чтобы определить упругие модули необходимо исследовать симметрию тензора напряжений. Группа симметрии кристалла с решеткой графена помимо преобразования центральной симметрии и отражения относительно двух ортогональных осей содержит одну ось симметрии третьего порядка [5]. Исследуемый материал считался линейно-упругим по Коши с несимметричным тензором напряжений. Для решетки графена с учетом общих свойств тензора упругих свойств и симметрии решетки получается 4 независимые компоненты. Остальные компоненты выражаются через указанные или равны нулю.

В силовом подходе для моделирования взаимодействия атомов использовался степенной потенциал Леннард-Джонса. В текущей конфигурации с помощью межатомного потенциала определялись результирующие силы, действующие на атомы деформированных сторон, делились на длины этих сторон и определялись компоненты тензора напряжений. Для определения упругих модулей компоненты тензора напряжений раскладывались в ряд Тейлора по параметру деформации (интенсивности сдвига или кратности удлинения) в текущей конфигурации.

В энергетическом подходе в текущей конфигурации кристалла вычисляется полная потенциальная энергия образца, отнесенная к его объему. Приравнявая квадратичные слагаемые в ее разложении в степенной ряд по параметрам деформирования упругому потенциалу, определяются упругие модули образца. Рассматривался закон Гука в несимметричной постановке

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{C} : (\mathbf{F} - \mathbf{I} - \mathbf{w}_\#), \quad (2)$$

где  $\mathbf{C}$  — несимметричный тензор линейно-упругих свойств материала,  $\mathbf{I}$  — единичный тензор,  $\mathbf{w}_\#$  — тензор поворотов решетки. Показано, что решетка графена не может при

заданной аффинной кинематике деформироваться однородно. Для обеспечения минимума потенциальной энергии кристалла графена в текущей конфигурации необходимо задавать относительное смещение подрешеток, зависящее от параметров деформирования. Для вектора внутренних смещений  $\delta$  получено представление в виде

$$\delta = \delta(\mathbf{e}_1\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_1\mathbf{e}_2\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2\mathbf{e}_1\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2\mathbf{e}_2\mathbf{e}_2) : (\mathbf{F} - \mathbf{I} - \mathbf{w}_\#), \quad (3)$$

где  $\delta$  — дополнительный материальный параметр графена. Получено, что зависимость упругих модулей от размеров образца имеет горизонтальную асимптоту. Это позволяет провести идентификацию параметров потенциала взаимодействия атомов. Получено, что при значениях параметров  $m = 5$ ,  $n = 3$ ,  $\alpha = 1.30 \times 10^{-10}$  (м),  $\beta = 1.15 \times 10^{-22}$  (Дж) получается значение коэффициента Пуассона  $\nu = 0.12$ , наиболее близко соответствующее экспериментальным значениям, а модуль Юнга в точности равен известному из экспериментов [6]. Заметим, что без учета внутренних смещений (3) в статическом подходе наблюдается заметное отклонение вычисляемых упругих модулей от значений, полученных в экспериментах.

В данной работе изучается связь параметров, описывающих поведение вещества на атомарном уровне, и макроскопических характеристик материала. В работе разработан способ теоретического исследования равновесных параметров решетки кристалла графена с помощью степенного потенциала межатомного взаимодействия Ми. В работе использовались два подхода — силовой и энергетический. Были вычислены упругие характеристики — модуль Юнга и коэффициент Пуассона. Для того чтобы найти упругие характеристики ставился вопрос о нахождении всех коэффициентов тензора упругих свойств с несимметричной мерой Коши. Тензор упругих свойств оказался симметричным.

Все вычисления в работе выполнены в символьном виде с помощью пакета Wolfram Research “Mathematica”.

#### ЛИТЕРАТУРА:

1. Кривцов А.М. Деформирование и разрушение твердых тел с микроструктурой. – М.: Физматлит, 2007. – 304 с.
2. Метод молекулярной динамики в физической химии. Под редакцией Ю.К. Товбина – М.: М54 Наука, 1996. – 334 с.
3. Зубко И.Ю., Трусов П.В. Определение упругих постоянных ГЦК-монокристаллов с помощью потенциала межатомного взаимодействия. Вестник Пермского национального исследовательского политехнического университета. Механика. 2011. № 1. С. 147-169.
4. Зубко И.Ю., Мелентьева О.В., Морозова В.П., Кочуров В.И. Вывод упругого закона монокристаллов металлов из потенциала межатомного взаимодействия. «Вестник Нижегородского университета им. Н.И. Лобачевского». – Н. Новгород: Изд-во ННГУ им. Н.И. Лобачевского, 2011. №4. Ч.5. – С. 2181-2183.
5. Черных К.Ф. Введение в анизотропную упругость. – М.: Наука, 1988. – 190 с.
6. Blakslee O.L., Proctor D.G., Seldin E.J. Elastic constants of compression annealed pyrolytic graphite // J. Appl. Phys. 1970. V. 41. № 8. P. 3373–3389.

ИССЛЕДОВАНИЕ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ МАТЕМАТИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ ВБЛИЗИ  
СПЕКТРА ФУЧИКА

В данной работе рассматриваются математические модели колебательных систем, возникающих при описании критических колебания тяжелых горизонтальных балок (мост), MEMS – резонаторов и т.д. К исследованию спектра Фучика сводятся многочисленные математические модели, описывающие реальные процессы, не поддающиеся изучению классическими методами. Эта тематика в данное время очень актуальна. Спектр Фучика дает возможность определить, когда в таких системах будет резонанс. Учет резонанса очень важен, так в механических системах (мост) резонанс может привести к разрушению всей системы, в других же системах (резонатор) резонанс играет основополагающую роль в работе прибора. В своей работе я использовала математические методы исследования моделей колебательных систем.

Рассмотрим математическую постановку в виде двухточечной краевой задачи.

$$\begin{cases} u''(x) + \alpha u^+(x) - \beta u^-(x) = f(x, u, u') + g(x), \\ u(0) = u(\pi) = 0, \end{cases} \quad (1)$$

где  $x \in [0; \pi]$ ,  $(\alpha, \beta) \in R^2$ ,  $u^+ = \max\{u, 0\}$ ,  $u^- = \max\{-u, 0\}$ ,  $f(x, u, u')$  – функция, удовлетворяющая условиям Каратеодори,  $g(x)$  – заданная функция. С точки зрения механики:  $u(x)$  – вертикальное перемещение,  $f(x, u, u')$  – функция перемещения, учитывающая демпфирование и жесткость системы,  $g(x)$  – вынуждающая сила, обеспечивающая вынужденные колебания.

Вместе с задачей (1) рассмотрим также следующую задачу

$$\begin{cases} u''(x) + \mu u(x) = f(x, u, u') + g(x), \\ u(0) = u(\pi) = 0 \end{cases} \quad (2)$$

Задачи вида (1) возникают во многих математических моделях реальных процессов, например. Особенность уравнения задачи (1) состоит в присутствии слагаемого вида  $\alpha u^+ - \beta u^-$ .

К изучению двухточечной краевой задачи вида (2), приводит ряд проблем вариационного исчисления, механики, баллистики и др. Эта задача привлекала к себе внимание многих исследователей, начиная с классических работ С.Н. Бернштейна, Биркгофа – Келлога и т.д. Ряд дальнейших результатов получен М.А. Красносельским и его учениками [1,2].

Критическими случаями для задач (1) и (2) являются те значения параметров  $\alpha, \beta, \mu$ , при которых соответствующие однородные задачи имеют нетривиальные решения. Для задачи (1) совокупность таких значений  $(\alpha, \beta) \in R^2$  образует множество на плоскости, которое известно в литературе как спектр Фучика [3]. Для задачи (2) критический случай принято называть резонансным (или говорят о наличии параметрического резонанса).

Совокупность значений параметров  $(\alpha, \beta) \in R^2$ , образующих спектр Фучика задачи

$$\begin{cases} u''(x) + \alpha u^+(x) - \beta u^-(x) = 0, \\ u(0) = u(\pi) = 0, \end{cases} \quad (3)$$

представляет собой семейство линий, называемых квазигиперболами, расположенных в первой и третьей четвертях [4,5]. Иными словами, спектр Фучика задачи (3) описывается соотношениями:

1.  $\beta = 1, \alpha$  - любое,
2.  $\alpha = 1, \beta$  - любое,
3.  $\alpha > 1, \beta > 1, \omega_1(\alpha, \beta) = \frac{\sqrt{\alpha}\sqrt{\beta}}{\sqrt{\alpha} + \sqrt{\beta}} \in N,$
4.  $\alpha > 1, \beta > 1, \omega_2(\alpha, \beta) = \frac{\sqrt{\beta}(\sqrt{\alpha} - 1)}{\sqrt{\alpha} + \sqrt{\beta}} \in N,$
5.  $\alpha > 1, \beta > 1, \omega_3(\alpha, \beta) = \frac{\sqrt{\alpha}(\sqrt{\beta} - 1)}{\sqrt{\alpha} + \sqrt{\beta}} \in N.$

Как известно, для задачи (2) параметрический резонанс возникает при значениях  $\mu = n^2$ , где  $n = \pm 1, \pm 2, \dots \in \mathbb{Z}$ .

Для реальных краевых задач вида (1) или (2) исследование спектра Фучика или параметрического резонанса представляется весьма актуальным. Задачи (1) и (2) можно рассмотреть как возмущения критических случаев нелинейным слагаемым  $f(x, u, u')$ , а также «входным воздействием»  $g(x)$ . В этом смысле можно говорить, что соответствующие задачи исследуются вблизи критических значений параметров.

В качестве вспомогательной задачи для исследования задач (1) и (2) выбрана задача, которая позволяет, в том числе, рассматривать критические значения задачи (1) вблизи спектра Фучика.

$$\begin{cases} u''(x) + \alpha u(x) = (\beta - \alpha)u^-(x) + g(x), \\ u(0) = u(\pi) = 0. \end{cases} \quad (4)$$

Введем в рассмотрение следующие функциональные пространства:

$L_2 = L_2[0; \pi]$  - пространство суммируемых по Лебегу с квадратом функций

$u: [0; \pi] \rightarrow \mathbb{R}$  с нормой  $\|u\| = \left( \int_0^\pi (u(s))^2 ds \right)^{1/2}$ ;

$W = W[0; \pi]$  - пространство абсолютно непрерывных вместе со второй производной функций  $u: [0; \pi] \rightarrow \mathbb{R}$  таких, что  $u'' \in L_2$ . Норму в пространстве  $W$  определим равенством  $\|u\|_W = |u(0)| + |u'(\pi)| + \|u''(t)\|$ .

Определим пространство  $W^0$ , в котором будем искать решения рассматриваемых задач. Обозначим через  $W^0$  пространство  $W^0 = \{u \in W / u(0) = u(\pi) = 0\}$ , являющееся подпространством  $W$ . Тогда каждую из перечисленных задач на пространстве  $W^0$  можно записать в виде одного операторного уравнения

$$Lu = Fu,$$

с соответствующими операторами  $L, F: W^0 \rightarrow L_2$ . Для задачи (4) эти операторы определяются равенствами

$$(Lu)(x) = u''(x) + \alpha u(x),$$

$$(Fu)(x) = (\beta - \alpha)u^-(x) + g(x).$$

Аналогично для других задач.

Приведем одно из утверждений о разрешимости задачи (1) в критическом случае.

Положим  $\alpha = n^2$ , где  $n = \pm 1, \pm 2, \dots \in Z$ .

**Теорема.** Пусть выполнены условия

$$1) \int_0^\pi \sin(ns)g(s)ds = 0,$$

$$2) \lim_{|u| \rightarrow +\infty} \frac{\mu u^-(x) + f(x, u, u')}{u} = 0 \text{ равномерно по } x \in [0; \pi] \text{ и } u, v \in R^1, \text{ где } \mu = (\beta - \alpha),$$

$$3) \text{ существует } u_0 > 0 \text{ такая, что } \text{sign}[u f(x, u, v)] - \|g\|_{L_x} < 0, \text{ при } |u| > u_0 \text{ и } u, v \in R^1.$$

Тогда существует хотя бы одно решение задачи (1), в пространстве  $W^0$ .

Аналогичные результаты о разрешимости получены для задач (3) и (4). Кроме того, установлена взаимосвязь между параметрическим резонансом в задаче (2) с критическим значением параметра в смысле спектра Фучика. Данную теорему можно трактовать и с точки зрения механики, но это требует дальнейшего изучения проблемы.

#### ЛИТЕРАТУРА:

1. Красносельский М.А. Изв. АН СССР, 20, №2 1956
2. Семенов М.П. Матем. сб. 66 (108) №1, 1965.
3. В.В. Филиппов, "О спектре Фучика и периодических решениях", Матем. заметки, 73:6 (2003), С. 910–922
4. S. Fucik, Solvability of nonlinear equations and boundary value problems, Mathematics and its applications, Vol. 4, Reidel, Dordrecht/Boston, 1980.
5. Caryl Ann Margulies and William Margulies. An example of the Fučik spectrum. Nonlinear Anal., 29(12):1373–1378, 1997.

УДК 531/524: [57+61]

Е.В. Феоктистова, М.С. Куюкина, М.А. Осипенко, Е.В. Рубцова  
(Пермский национальный исследовательский политехнический университет)

#### МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ФОРМИРОВАНИЯ БАКТЕРИАЛЬНЫХ КЛАСТЕРОВ В СИСТЕМЕ ВОДА-БАКТЕРИИ-УГЛЕВОДОРОД

Рассматривается математическая модель формирования плёнки бактерий рода *Rhodococcus* на границе раздела клеточной суспензии и жидкого углеводорода. Это формирование приводит к своеобразной временной зависимости межфазного натяжения, когда наряду с участками плавного снижения имеется участок нерегулярной зависимости. В модели, с использованием метода Монте-Карло, эта зависимость объясняется на основе предположений о накоплении клеток на межфазной границе, об образовании единого кластера клеток и о случайном разрушении его измерительным прибором.

Актинобактерии рода *Rhodococcus* являются представителями группы микроорганизмов, окисляющих природные и антропогенные углеводороды и, следовательно, участвующих в различных биогеохимических процессах и формировании углеводородной атмосферы Земли [1].

Бактерии рода *Rhodococcus* способны к окислению углеводородов нефти, смол, фенольных и полихлорированных соединений, гумусовых веществ, лигнина и его производных, восков, пестицидов и др. Некоторые родококки способны усваивать непредельные углеводородные соединения. Отдельные виды родококков, обладающие способностью ассимилировать в качестве единственного источника питания газообразные углеводороды, являются важным компонентом "бактериального фильтра" районов углеводородных скоплений. Они также находят широкое применение в качестве чувствительных индикаторных организмов при поиске газовых и нефтяных месторождений [1]. Способность родококков разлагать различные ксенобиотики эффективно используется в природоохранных целях; на основе представителей рода *Rhodococcus* создаются различные биопрепараты для биоремедиации земель и воды [2].

Реализация биотехнологического потенциала родококков предусматривает всестороннее изучение механизмов их адгезии к различным веществам. При этом характерным явлением, которое в настоящее время интенсивно исследуется, оказывается формирование биопленок [3], в особенности на границе раздела жидких фаз [4–6]. В частности, в лаборатории алканотрофных микроорганизмов Института экологии и генетики микроорганизмов УрО РАН (г. Пермь) изучаются закономерности адгезии клеток родококков к жидким *n*-алканам. С помощью установки *Sigma 701* проведен эксперимент по измерению методом отрыва кольца межфазного натяжения в системе «*n*-гексадекан – клеточная суспензия *R. ruber* ИЭГМ 123». Эксперимент показывает, что с течением времени межфазное натяжение в среднем уменьшается (за счет адгезии клеток к межфазной границе), но в определенном временном интервале его изменение имеет случайный, быстроосциллирующий характер.

Построена математическая модель, объясняющая эту своеобразную зависимость. По мере накопления клеток на межфазной границе, межфазное натяжения постепенно уменьшается, причём процесс его измерения с помощью кольца не оказывает влияния на структуру скопления граничных клеток. При достаточно большой концентрации возникают качественно новые явления. Во-первых, за счёт межклеточного взаимодействия формируются клеточные кластеры (рис. 1), которые при некотором критическом значении концентрации объединяются в один кластер. Это приводит к быстрому снижению межфазного натяжения. Во-вторых, измерительное кольцо при каждом измерении случайным образом разрушает этот кластер. В отсутствие измерений межфазное натяжение снижалось бы плавно. При наличии упомянутого случайного разрушения межфазное натяжение меняется случайно и скачкообразно (рис. 2). При дальнейшем увеличении концентрации кольцо уже не может разрушить кластер, и возобновляется плавное снижение межфазного натяжения. Практически моделирование указанных случайных процессов проводилось методом Монте-Карло. Полученная математическая зависимость полностью соответствует имеющимся экспериментальным данным. Дальнейшее развитие модели должно состоять в уточнении механизма межклеточного взаимодействия, приводящего к образованию кластеров.

Исследования поддержаны грантами НШ-5589.2012.4 и РФФ 14-14-00643.

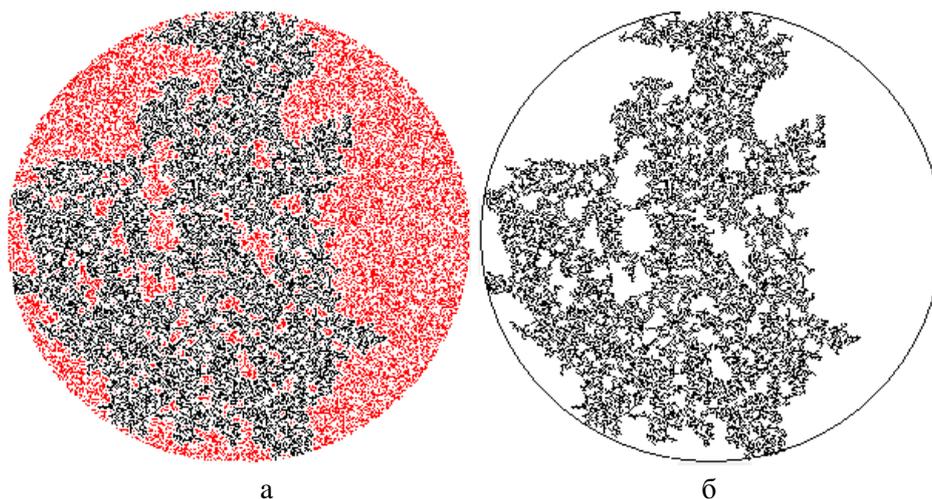


Рис.1. а – скопление бактерий; б – наибольший кластер

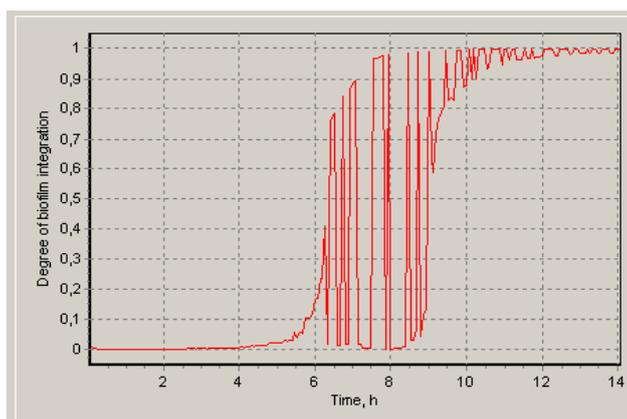


Рис.2. Степень разрушения кольцом пленки бактерий

#### ЛИТЕРАТУРА:

1. Ившина И.Б., Пшеничников Р.А., Оборин А.А. Пропан-окисляющие родококки. – Свердловск: УНЦ АН СССР, 1987, 125 с.
2. Kuykina M.S., Ivshina I.B. Application of Rhodococcus in bioremediation of contaminated environments // Microbiology Monographs / Ed. A. Steinbuchel. – Springer-Verlag, Dordrecht, London, New York, 2010. – Vol. 16. – P. 231-262.
3. Николаев Ю.А., Плакунов В.К. Биопленка – «город микробов» или аналог многоклеточного организма? // Микробиология, 2007, Т.76, № 2, С. 149–163.
4. Kang Z., Yeung A., Foght J.M., Gray M.R. Mechanical properties of hexadecane–water interfaces with adsorbed hydrophobic bacteria // Colloids and Surfaces B: Biointerfaces, 62 (2008), P. 273–279.
5. Kang Z., Yeung A., Foght J.M., Gray M.R. Hydrophobic bacteria at the hexadecane–water interface: examination of micrometre scale interfacial properties // Colloids and Surfaces B: Biointerfaces, 67 (2008), P. 59–66
6. Klein B., Bouriat P., Goulas P., Grimaud R. Behavior of *Marinobacterhydrocarbonoclasticus* CP17 cells during initiation of biofilm formation at the alkane–water interface // Biotechnology and Bioengineering, Vol. 105, No. 3, February 15, 2010, P. 461–468.

## РАЗРАБОТКА МЕТОДА СИНТЕЗА АГРЕГАТНО-МОДУЛЬНОГО РОБОТА

Развитие теории автоматического управления, методов искусственного интеллекта, информационных, телекоммуникационных и сетевых технологий, достижения в микросистемной технике, мехатронике и других научно технических направлениях на рубеже XX века вызвали резкую активизацию поисковых исследований в области применения роботов, в том числе в изучении космоса и космических объектов.

В данный момент исследования, направленные на освоение и колонизацию Луны с помощью роботов, включены в космические программы многих государств, в том числе и Российской Федерации [1]. Согласно принятым нормативным документам, основной составляющей роботизированной лунной базы должен стать парк напланетных роботов, достаточный для решения задач, возникающих в ходе исследования, освоения и колонизации Луны.

К таким задачам можно отнести: манипулирование объектами, перевозку крупногабаритных грузов по поверхности планеты, обеспечение строительно-монтажных работ, проведение научных исследований, добычу полезных ископаемых и прочее [1].

Существуют два основных подхода к формированию парка робототехнических объектов:

1. Малое число многофункциональных, сложных в изготовлении и обслуживании роботов, каждый из которых выполняет широкий спектр задач;
2. Большое число разнотипных, простых в изготовлении и эксплуатации роботов, каждый из которых выполняет ограниченный класс задач.

Преимуществом второго подхода является простота в изготовлении роботов и отдельных функциональных модулей, а также, как следствие, более высокая надёжность системы в целом, что в условиях космических исследований является критическим показателем.

Одним из наиболее распространённых методов реализации данного подхода является агрегатно-модульный принцип построения робототехнических объектов [2].

Основной целью работы является изучение возможности создания алгоритма автоматического построения оптимальной конфигурации робота из набора унифицированных узлов для реализации конкретной задачи. Предполагается, что такие унифицированные модули обладают едиными механическими и программными интерфейсами. Основными задачами работы являются:

1. Разработка математической модели агрегатно-модульного робота;
2. Разработка математической модели задачи, поставленной перед роботом;
3. Разработка метода автоматического построения конфигурации робота, обладающего наименьшей избыточностью характеристик по отношению к поставленной перед ним задачей;
4. Проверка корректности предложенного подхода на примере конкретной задачи.

В рамках первого этапа работы была предложена математическая модель агрегатно-модульного робота [3], описывающая сборку робота в виде графовой сети, узлами которой являются унифицированные модули. Данная модель позволяет учитывать влияние всех модулей, присоединённых к родительскому модулю, на характеристики этого модуля, а также достаточно легко рассчитать часть характеристик всей сборки в целом, однако она не

позволяет учесть синергетические характеристики, возникающих при совместной работе однотипных модулей. Также в части работы была предложена математическая модель целевой функции робота, которая представляет собой классическую задачу оптимизации. Были проведены исследования алгоритмической сложности данной задачи и приведены математические выкладки, показывающие, что данная задача относится к классу NP-полных задач.

В рамках второго этапа работы был разработан метод синтеза модели агрегатно-модульного робота. При решении задачи комплексного синтеза структуры и алгоритмов управления агрегатно-модульного робота возникает ряд проблем:

1. При отсутствии алгоритмов управления невозможно в автоматическом режиме оценить эффективность разработанной конструкции робота;
2. При отсутствии функциональной модели робота невозможно синтезировать алгоритмы управления в связи с отсутствием объекта управления;
3. Очень большое пространство поиска решений не позволяет перебрать все возможные решения.

Таким образом, синтез модели робота и алгоритмов её управления является не тривиальной задачей и требует глубокой проработки и анализа подходов к её решению.

В рамках данной работы задача была решена, основываясь на следующих принципах:

1. Конструкция и алгоритмы управления роботом должны синтезироваться и оцениваться комплексно. При этом процесс синтеза алгоритма управления роботом должен производиться в рамках конкретного задания, поставленного перед роботом;
2. Полученное решение должно решать поставленную задачу, но не обязано быть лучшим из всех возможных. Это связано с тем, что невозможно за приемлемое время перебрать все возможные решения в поисках наилучшего в связи с практически не ограниченным пространством поиска.

Поиск решений задачи синтеза функциональной модели и алгоритма управления агрегатно-модульного робота предлагается осуществлять по схеме, приведённой на рис. 1.

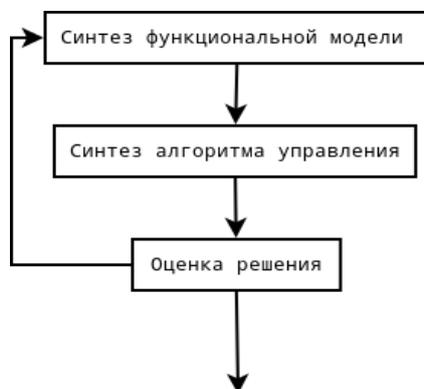


Рис. 1. Схема комплексного поиска решений задачи синтеза функциональной модели и алгоритмов управления агрегатно-модульного робота

Формирование программы управления агрегатно-модульного робота, модель которого может включать различные типы унифицированных узлов предполагает построение целесообразной в рамках поставленной задачи последовательности элементарных действий, доступных узлам, входящих в состав данной модели, обеспечивающей успешное выполнение роботом поставленной задачи.

Таким образом, рассматриваемая задача автоматического синтеза алгоритма управления агрегатно-модульным роботом сводится к организации автоматического поиска комбинации элементарных действий, допустимых для данной модели агрегатно-модульного робота, обеспечивающих решение поставленной перед роботом

задачи.

Для реализации поиска возможного алгоритма решения предлагается использовать модифицированные генетические алгоритмы с хромосомами переменной длины [4]. Для улучшения сходимости генетических алгоритмов был предложен механизм использования схем при синтезе хромосом [5]. В качестве схемы для хромосомы переменной длины было предложено использовать регулярные выражения, поражающие в общем случае цепочки бесконечной длины с заданной структурой, что позволило значительно ускорить поиск оптимального алгоритма управления.

Последним этапом данной работы является детализация предложенных алгоритмов и методов решения задачи синтеза модели агрегатно-модульного робота на примере задачи перевозки грузов. В данной части предложен переборный алгоритм, позволяющий построить все возможные корректные сборки робота, для их последующего использования при построении алгоритма управления.

Предложены операции скрещивания, мутации, инициализации, использующие механизм регулярных выражений в качестве схем, для генетического алгоритма. Функция оценивания качества функционирования сборки робота была построена с использованием методов имитационного моделирования, т.к. единственным способом надёжной оценки полученного решения является проведение серии модельных экспериментов, которая должна дать количественную оценку пригодности полученного решения задачи синтеза модели агрегатно-модульного робота, для решения конкретной поставленной перед роботом задачи.

В заключительном этапе работы представлены практические результаты решения задачи синтеза модели агрегатно-модульного робота, синтезируемого для задачи перевозки грузов, а также приведены зависимости числа возможных алгоритмов управления от суммарных затрат энергии необходимых для их реализации, при различных параметрах генетического алгоритма, показывающие, что число алгоритмов, имеющих наименьшее значение суммарных затрат энергии, составляет в среднем 80% от общего числа сгенерированных алгоритмов, что позволяет говорить о корректности предложенного подхода к построению модели агрегатно-модульного робота.

#### ЛИТЕРАТУРА:

1. Луна - шаг к технологиям освоения Солнечной системы / Под научной редакцией В.П. Легостаева и В.А. Лопоты. - М.: РКК 'Энергия'. 2011. - 584 с. - Тираж 2000 экз. - ISBN 978-5-91820-046-9.
2. Промышленные роботы агрегатно-модульного типа/ Е. И. Воробьев, Ю. Г. Козырев, В. И. Царенко; Под общ. ред. Е. П. Попова. —М.: Машиностроение, 1988.— 240 с.: ил. — (Автоматические манипуляторы и робототехнические системы).ISBN 5-217-00166-6
3. Калугин Н.В., Мулюха В.А. Разработка методов представления функциональной модели агрегатно-модульных роботов // Неделя науки СПбГПУ Материалы научно-практической конференции с международным участием – 2013. – С. 303 - 306.
4. Гладков Л.А., Курейчик В.В., Курейчик В.М. Генетические алгоритмы: Учебное пособие / Под ред. В.М. Курейчика. — Ростов-на-Дону: ООО «Ростиздат», 2004 — 320 с.
5. Рутковская Д., Пилиньский М., Рутковский Л. Нейронные сети, генетические алгоритмы и нечёткие системы. — М.: Горячая линия — Телеком, 2004. — 385 с.

В.В. Галимский, Ю.Е. Подгурский  
(Санкт-Петербургский государственный политехнический университет)

## МЕТОДИКА НАГРУЗОЧНОГО ТЕСТИРОВАНИЯ МЕЖСЕТЕВЫХ ЭКРАНОВ

Наравне со стремительным развитием информационных технологий, все большее значение принимает вопрос производительности сетевых устройств. Любое сетевое устройство подвергается нагрузке проходящим через него трафиком, а также внутренними параметрами. Поэтому, важной задачей является разработка надежного ПО, адекватно реагирующего на большую нагрузку. Основным способом определения степени надежности ПО относительно производительности является нагрузочное тестирование.

Межсетевой экран является достаточно сложным и многофункциональным программно-аппаратным комплексом. Поэтому, как и любое другое сложное оборудование, межсетевой экран нуждается в тестировании. На сегодняшний день направление нагрузочного тестирования еще плохо проработано. Каждая организация проводит тестирование по своим методикам. По этой причине достаточно сложно и, иногда, невозможно сравнить устройства различных организаций. Требуется разрабатывать универсальные методики к тестированию ПО для упрощения классификации и сравнения устройств.

Разработка универсальной методики нагрузочного тестирования является очень сложной задачей [1]. Её сложность объясняется большим количеством разнообразных критериев нагрузки и параметров оценки.

Целью данной статьи является описание методики нагрузочного тестирования межсетевых экранов проходящим через него трафиком на примере тестирования МЭ линейки ССПТ. Приведенная методика позволяет упростить проектирование и реализацию тестов для нагрузочного тестирования межсетевых экранов.

В частности, предлагается решение следующей задачи: разработка методики нагрузочного тестирования межсетевых экранов проходящим через него трафиком на основе существующих и разработанных методов, которая будет включать:

- Определение критериев нагрузки и показателей оценки тестируемого устройства;
- Разработка стенда тестирования.

На основе анализа различных существующих подходов к нагрузочному тестированию [2; 3] определены виды тестирования и методы построения нагрузки, которые могут быть использованы в нагрузочном тестировании межсетевых экранов.

Используемые виды тестирования:

- Тестирование нагрузкой;
- Тестирование производительности;
- Тестирование используемых ресурсов;
- Стресс тестирование;
- Тестирование на больших объемах данных;
- Тестирование длительной нагрузкой.

Используемые методы построения нагрузки:

- Пользовательский;
- Компонентный.

Опираясь на используемые методы, выделены критерии нагрузки и показатели оценки объекта тестирования. С помощью различных комбинаций критериев нагрузки и показателей

оценки разработаны тесты.

Критерии нагрузки позволяют задать нагрузку на тестируемое устройство для определения производительности. Для удобства использования критерии разделены на внешние и внутренние.

Критерии нагрузки тестируемого устройства:

- Внешние (параметры проходящего через МЭ трафика);
  - Количество пакетов в секунду;
  - Параметры пакета.
- Внутренние (параметры настройки функционала МЭ) [4];
  - Механизм фильтрации;
  - Зеркалирование трафика;
  - Механизм защиты от flood атак;
  - Механизм регистрации пакетов, сессий;
  - Изменение конфигурации МЭ;
  - NAT.

Показатели оценки позволяют определить производительность межсетевого экрана. Они также разделены на внешние показатели и внутренние.

Показатели оценки тестируемого устройства:

- Внешние (характеристики проходящего через МЭ трафика);
  - Пропускная способность устройства относительно "идеальной" пропускной способности, которая замеряется при подключении стенда напрямую;
  - Доля потерянных пакетов;
  - Число новых сеансов в секунду;
  - Зависимость пропускной способности от числа сеансов.
- Внутренние (характеристики аппаратной части МЭ);
  - Загруженность ЦП;
  - Объем используемой оперативной памяти;
  - Размер занятого буфера очереди пакетов.

Учитывая все критерии нагрузки и параметры оценки, разработан универсальный стенд для нагрузочного тестирования межсетевых экранов (рис. 1). Этот стенд позволяет создать разнообразную нагрузку и измерить различные показатели оценки производительности.

На основе сформированных критериев нагрузки и показателей оценки был составлен набор тестов для проведения нагрузочного тестирования межсетевых экранов линейки ССПТ. Данный набор тестов был успешно внедрен в компании НПО РТК во время нагрузочного тестирования ССПТ-2 [5].

Также сформирована общая методика нагрузочного тестирования межсетевых экранов проходящим через него трафиком:

1. Определение применимости обозначенных внешних критериев нагрузки межсетевого

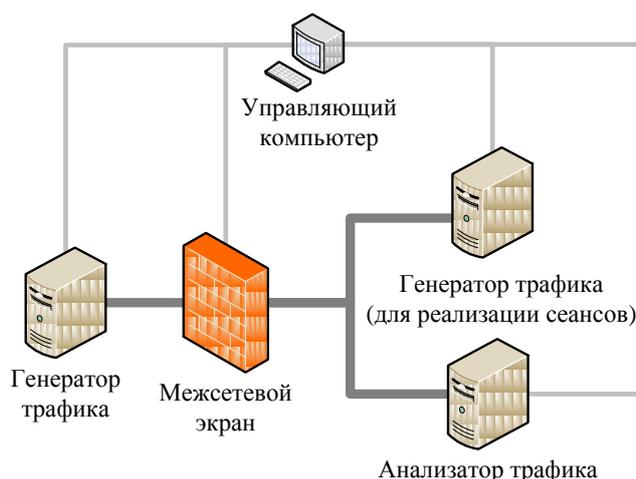


Рис. 1. Универсальная логическая схема стенда нагрузочного тестирования.

экрана.

2. Добавление дополнительных внешних критериев нагрузки МЭ при надобности.
3. Формирование внутренних критериев нагрузки МЭ, опираясь на функциональные возможности. При этом в список внутренних критериев нагрузки добавляется только тот функционал, который достаточно сильно может влиять на производительность устройства в целом. Достаточность влияния того или иного функционала определяет тестирующий.
4. Определение применимости обозначенных параметров оценки.
5. Добавление дополнительных параметров оценки работоспособности МЭ при необходимости.
6. Определение применимости стенда нагрузочного тестирования. Добавление изменений в стенд при необходимости.
7. Разработка набора тестов с помощью комбинации критериев нагрузки и показателей оценки. Набор тестов, приведенный в приложении 3, можно использовать как образец.

#### ЛИТЕРАТУРА:

1. Галимский В.В. Разработка методики нагрузочного тестирования межсетевых экранов: Выпускная работа бакалавра / Галимский В.В., 2014. – 57 с.
2. Про Тестинг – Тестирование ПО // Режим доступа: <http://www.protesting.ru/> (дата обращения: 12.11.2014 г.)
3. Основы тестирования программного обеспечения // Режим доступа: <http://www.intuit.ru/studies/courses/48/48/info> (дата обращения: 12.11.2014 г.)
4. Межсетевой экран ССПТ-2 версии 1.3: Руководство администратора: Изд-во НПО РТК, 2013.- 237 с.
5. НПО РТК. Официальный сайт // Режим доступа: <http://www.npo-rtc.ru/> (дата обращения: 12.11.2014 г.)

УДК 519.7; 004.8

Е.А. Синельщиков, С.Г. Попов  
(Санкт-Петербургский государственный политехнический университет)

### ИССЛЕДОВАНИЕ СТРАТЕГИЙ ДЕЙСТВИЙ ГРУППЫ РОБОТОВ В ПРОЦЕССЕ ПОСТРОЕНИЯ ПЛАНА ПОМЕЩЕНИЯ

**Цель работы:** Построить ситуационный план помещения N роботами на основе, ими полученных, данных.

Важным приложением построения планов помещения являются спасательные и ремонтные операции при работе в условиях последствий природных и техногенных катастроф. Важным фактором успешного выполнения является время построения плана помещения автономными роботами.

Классическим способом уменьшения времени является работа группой. При этом возникает проблема повторного выполнения роботами сделанной работы. Для решения этой проблемы предлагается осуществлять разделение полученных каждым роботом данных остальным роботам.

#### **Постановка задачи:**

*Дано:*

- Помещение с неизвестным числом комнат, соединённых открытыми проемами;
- Точки входа и выхода в помещение;
- N однотипных роботов оснащённых двумя дальномерами и одним компасом.

*Требуется:* Разработать алгоритм обследования помещения группой роботов, позволяющий собрать данные для построения плана помещения.

План помещения состоит из планов комнат помещения. План комнаты – это произвольный многоугольник с заданными размерами сторон. Многоугольник задается связным списком координат вершин в заданной системе координат.

Ход работы:

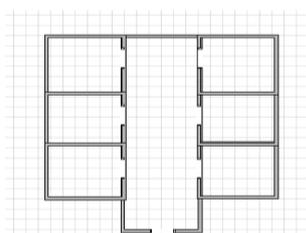
Сформулировано две стратегии обследования помещения:

*Стратегия 1:* Последовательное обследование. Группа роботов движется цепочкой, первый в цепочке робот производит сбор данных. При встрече проема роботы разделяются на две. Первая группа роботов продолжает обследование текущей комнаты, вторая отправляется в следующую.

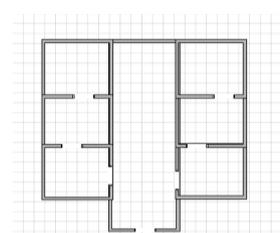
*Стратегия 2:* Параллельное обследование. Группа роботов делится на две части и одна подгруппа начинает обследование цепочкой по часовой стрелке, вторая группа начинает обследование против часовой стрелки. Дальнейшие действия каждой подгруппы соответствуют Стратегии 1.

Оценка стратегий обследования помещений производилась на двух типах помещения.

- Тип А - это помещение с  $K$  комнатами, каждая из которых имеет выход в коридор (изолированные).
- Тип В - помещение в котором через каждый проем из коридора можно попасть в  $n$  количество комнат (смежные).



Помещение типа А



Помещение типа В

Для получения оценки времени построения плана группой роботов были сформулированы аналитические выражения:

	Помещения типа А	Помещения типа В
Стратегия 1	$t = t_{\text{кор}} + \left( \frac{(K - \left( \frac{t_{\text{кор}}}{t_{\text{ком}} + 2t_{\text{п}}} \right))}{(t_{\text{ком}} + 2t_{\text{п}})} \right)$	$\frac{t_{\text{кор}}}{K} + \left( \frac{(t_{\text{ком}} + n * t_{\text{п}}) * n * K}{N} \right)$
Стратегия 2	$t = \frac{t_{\text{кор}}}{K} + \left( \frac{\left( \frac{t_{\text{ком}}}{2} + 2t_{\text{п}} \right) * K * 2}{N} \right)$	$t = \frac{t_{\text{кор}}}{K} + \left( \frac{\left( \frac{t_{\text{ком}}}{2} + nt_{\text{п}} \right) * K * n}{N} \right)$

Где  $t$  – время обследования помещения;  $t_{\text{кор}}$  - время обследования коридора;  $t_{\text{ком}}$  - время обследования комнаты;  $t_n$  - среднее время перехода из одной комнаты в другую;  $N$  – число роботов;  $K$  – число комнат имеющих выход в коридор;  $n$  – число смежных комнат имеющих 1 выход в коридор на всех.

### Результаты:

При использовании полученных аналитических выражений были получены следующие графики зависимости времени обследования помещения от числа роботов (рис.1 и рис.2):

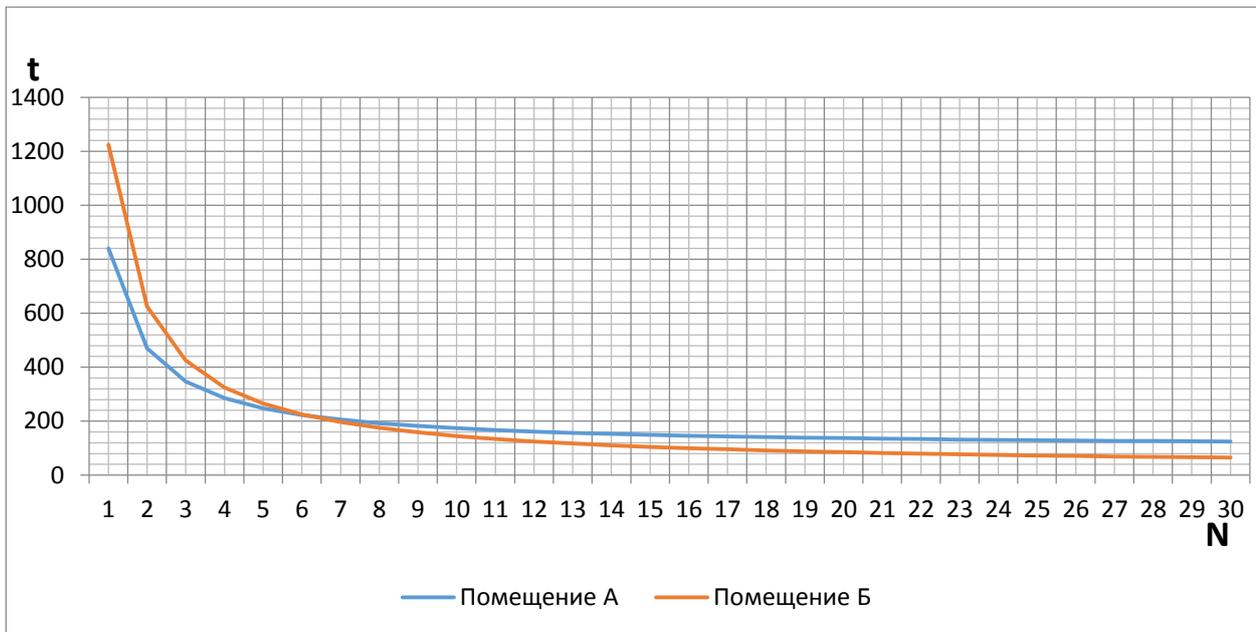


Рис. 1. Зависимость времени обследования помещения от числа роботов в соответствии со стратегией 1

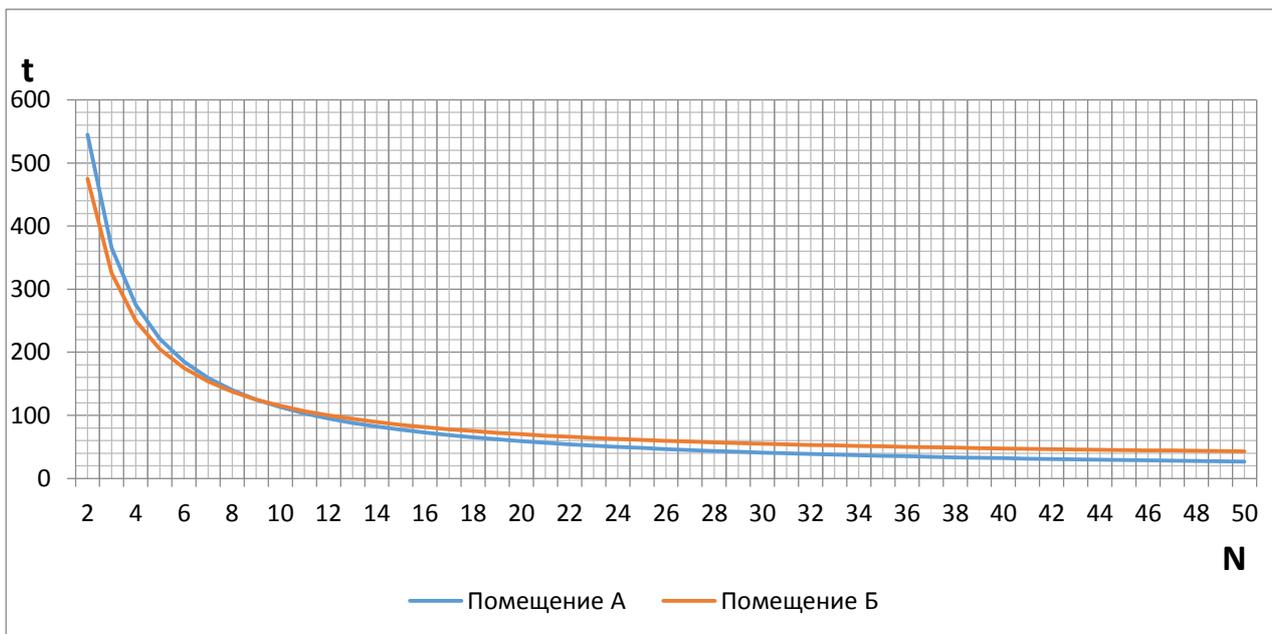


Рис. 2. Зависимость времени обследования помещения от числа роботов в соответствии со стратегией 2

Так как, стратегия 2 включает себя стратегию 1, то был разработан алгоритм обследования помещения по стратегии 1, позволяющий произвести тестовые испытания и сравнить их результаты с результатами аналитической оценки.

В результате работы получен алгоритм, который позволяет осуществлять построения плана помещения используя несколько однотипных автономных роботов с простой, а значит дешевой, конфигурацией. А использование нескольких роботов вместо одного, согласно аналитической оценке, позволит существенно сократить время построения плана помещения.

#### ЛИТЕРАТУРА:

1. Применение мобильных роботов в условиях техногенных катастроф и в экстремальных условиях. Режим доступа: <http://vuz.exponenta.ru/PDF/art2.htm> Дата обращения 29.11.2013
2. Распределенное мультиагентное управление робототехническими системами. Режим доступа: <http://www.intelligent-systems.ru/app.php?shortcuts=articles&item=12> (дата обращения 1.12.2013)
3. Каляев И. А. Капустян С. Г. Самоорганизующиеся распределенные системы управления группами интеллектуальных роботов, построенных на основе сетевой модели. Управление большими системами: сборник трудов, 2010
4. Гуревич Л.А. Мультиагентные системы. Computer Science, 2005
5. Федоров, В. Б.; Козлов, А. В. Постановка задач математического моделирования летательного аппарата с изменяемыми массогеометрическими характеристиками. Вестник ЮУрГУ, № 33, 2012

УДК 004.896

Т.Ш. Салахетдинов, М.А. Курочкин  
(Санкт-Петербургский государственный политехнический университет)

#### СИСТЕМНАЯ ИНТЕГРАЦИЯ БЕСПИЛОТНЫХ И НАЗЕМНЫХ РОБОТОВ ДЛЯ РАБОТЫ В ЭКСТРЕМАЛЬНЫХ УСЛОВИЯХ

Исследования в области организации взаимодействия беспилотных летающих аппаратов с группами роботов ведутся многими странами для решения важнейших прикладных задач. В последнее время на первый план выходят задачи устранения последствий экологических, техногенных и климатических катастроф. Экономически развитые страны ставят задачи освоения территорий близлежащих планет, монтажа научно-исследовательских станций, оборудования временных и постоянных поселений. Немалый интерес к этим исследованиям проявляют военные ведомства, например в США ДАРПА (DARPA - Defense Advanced Research Projects Agency, проекты "Программное обеспечение для распределенных робототехнических систем" и "Программное обеспечение автономных мобильных роботов" (Mobile Autonomous Robot Software (MARS) и MARS-2020), программы разработки беспилотных боевых и разведывательных летательных аппаратов «Northrop Grumman X-47 Pegasus» («X-47 Pegasus», «Икс-47 Пегас». В настоящее время использование технологии автоматической дозаправки позволяет беспилотному самолету находиться в воздухе от 50 до 100 часов – что в 5 - 10 раз больше, чем время полета пилотируемых самолетов. Достоинством группировки роботов, объединенных в одноранговую сеть с децентрализованным управлением, является высокая надежность, поэтому их использование в экстремальных условиях исключительно эффективно. Экстремальные условия характеризуются высоким уровнем неопределенности, одновременным воздействием известных и неизвестных агрессивных факторов, непредсказуемым изменением ситуации, которые могут разрушить систему управления группой и сделать ее неработоспособной [1]. В этих условиях беспилотные летающие аппараты выполняют главную задачу – снижение уровня неопределенности при принятии решения конкретным роботом. Беспилотный летающий аппарат ориентирован на следующие подзадачи:

- разведку маршрута движения робота (лучшие участки);
- определение угроз, препятствующих выполнению задания;
- поиск неисправных роботов;
- поиск дополнительных ресурсов.

Целью интегрированной группировки является минимизация потерь (материальных или временных) при решении поставленной задачи. Таким образом, актуальной является задача группового управления интеллектуальными роботами, функционирующими

автономно в условиях сложной, недетерминированной, динамической среды [2]. Успешное решение этой задачи позволит расширить область применения роботов, повысит безопасность людей, уменьшит негативные последствия катастроф, уменьшит риск космонавтов при освоении новых планет [3].

В данной работе исследуются проблемы размещения грузов группой роботов, действующих в экстремальных условиях. Перед группой поставлена задача развезти множество грузов, расположенных в известном месте по разным адресатам (местоположения адресата и распределение груза по адресатам известны) [4].

Работа (передвижение роботов) в экстремальной среде связана с непредсказуемым изменением параметров роботов (скорости и грузоподъемности). В этих условиях возможны ситуации останова роботов (поломка ходовой части), замедления передвижения (сильное изменение рельефа местности), невозможность движения с номинальной нагрузкой (частичная деформация корпуса или узлов робота). В зависимости от степени агрессивности среды эти события могут проявиться у одного или большинства роботов группы [5]. Оперативный учет этих событий и компенсация их негативного влияния на решение задачи, поставленной перед группой, выдвигает необходимость разработки эффективных методов мониторинга среды пребывания роботов и перераспределения локальных задач, решаемых каждым роботом.

### **Основные определения**

- Робот – автономное устройство, способное перемещаться по поверхности и перевозить грузы. Характеристиками робота являются скорость и грузоподъемность.
- Грузоподъемность робота ( $P$ ) определяет максимальную массу грузов, которую может перевозить робот.
- $P = n \times k$ , где  $n$  – вес единичного груза,  $k$  – целое число.
- Скорость робота ( $V$ ) измеряется в м\сек.
- Модуль ( $S$ ) – единица груза, обладающая массой. Масса модуля принимает одно из трех значений:  $n$ ,  $2*n$ ,  $3*n$ , где  $n$  – вес единичного груза.
- Плановое задание – вариант загрузки робота и маршрут его движения (последовательность посещения адресатов).
- Внешние воздействия – события независимые от поведения группы роботов, негативно сказывающиеся на характеристиках конкретного робота.

### **Постановка задачи**

#### **Задача 1**

#### **Дано:**

- Множество беспилотных летающих аппаратов  $L = \{l_1, l_2, \dots, l_j\}$ , каждый аппарат характеризуют параметры:  $W$  – номинальный расход топлива,  $FT$  – максимальное время полета.
- Множество подвижных роботов  $R = \{r_1, r_2, \dots, r_n\}$ , каждый робот характеризуют два параметра  $V$  – скорость,  $P$  – грузоподъемность,
- Все роботы расположены в точке  $B$  с географическими координатами  $(x, y)$ .
- Множество адресатов  $A = \{a_1, a_2, \dots, a_m\}$ , каждый адресат характеризуют два параметра:
- $G(x_i, y_i)$  – географические координаты адресата  $a_i$ ,
- $S_i = \{s_1, s_2, \dots, s_k\}$ , перечень модулей, которые необходимо привезти конкретному адресату  $a_i$ .
- Все модули расположены в точке с географическими координатами  $(x_1, y_1)$ .

**Требуется:**

Перевести всем адресатам А заданный перечень модулей S к указанному моменту времени T.

**Ограничения:**

минимизировать число роботов, участвующих в перевозках, и расход топлива летающих аппаратов.

Данная постановка соответствует варианту решения плановых задач размещения грузов. При ее решении рассматриваются два случая:

- число роботов меньше числа адресатов ( $n < m$ );
- число роботов больше числа адресатов ( $n > m$ ).

В первом случае один робот может иметь более одного маршрута посещения адресатов и если суммарное время движения по ним больше T, задача не имеет решения.

Во втором случае время решения всей задачи определяется расстоянием до самого удаленного адресата.

**Задача 2**

Исходные данные полностью соответствуют первой задаче.

**Требуется:**

Перевести всем адресатам А заданный перечень модулей S, минимизируя время доставки всех модулей.

Как и в первой задаче рассматриваются два случая:

- число роботов меньше числа адресатов ( $n < m$ );
- число роботов больше числа адресатов ( $n > m$ ).

Эта постановка соответствует режиму срочной доставке модулей, которая свойственна чрезвычайным ситуациям.

Особенностью этих задач, является учет воздействия факторов экстремальной среды (полному или частичному отказу робота от выполнения планового задания).

Компенсацией этих факторов будет реализация методов перераспределения плановых заданий между роботами, методов резервирования участников перевозок (если это возможно), используя данные мониторинга летающих аппаратов.

**Результаты работы.**

Предложен механизм взаимодействия беспилотных летающих аппаратов с группировкой наземных роботов.

Предложен протокол передачи данных между наземными и летающими роботами.

**ЛИТЕРАТУРА:**

1. Каляев И.А. Проблемы группового управления роботами - Мехатроника, автоматизация, управление. – 2009. - №6.
2. Юревич Е.И. Принципы группового управления роботами. Экстремальная робототехника-2003: материалы научной молодежной школы. – Таганрог: Изд-во ТРТУ, 2003. С.165-171.
3. Юревич Е. И. О проблеме группового управления роботами - Мехатроника, автоматизация, управление, 2004, №2. С.9-13.
4. Юревич Е.И. Управление роботами и робототехническими системами: учеб. пособие. - СПб.: Изд-во СПбГТУ, 2001. 168 с.
5. Поспелов Д.А. Ситуационное управление: теория и практика. - М.: Наука, 1986.

СОЗДАНИЕ ТРЁХМЕРНЫХ СЦЕН С АНИМАЦИЕЙ,  
ИМИТИРУЮЩЕЙ ХОДЬБУ РОБОТА ПО ТРАЕКТОРИИ**Цель работы:**

Создание анимации ходьбы робота по траектории с поворотом и анимацию «приветствие». Под анимацией «приветствия» понимается поднятие руки, затем движение влево-вправо, а после её опускание.

**Описание анимации:**

В центре сцены находится «беговая дорожка» с поворотом оранжевого цвета с белыми границами, фон сцены зеленый. В левом верхнем углу находится модель мультипликационного персонажа робота с поднятой немного согнутой в колене левой ногой и стоящей правой. Руки робота также немного согнуты в локтях.

При запуске анимации робот начинает идти вдоль беговой дорожки, осуществляя соответствующие движения руками и ногами. Примерно в середине анимации робот делает «приветствие»: поднятие руки, затем движение влево-вправо, а возврат её в исходное положение. После чего робот продолжает ходьбу, делая такие же движения, что и до этого.

Технология создания анимации:

## 1. Создание скелета персонажа

Во всей работе используем относительную систему координат (рис.1).

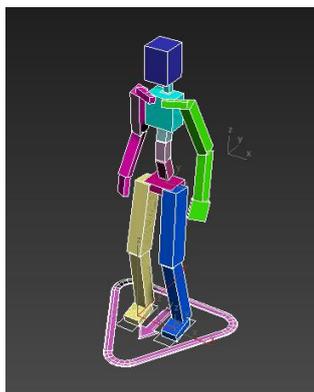


Рис. 1. Скелет, используемый для анимации

## 2. Создание модели персонажа

## 2.1. Построение головы

Построим «голову» с помощью примитива OilTank. Антенну наверху создадим, используя три примитива: OilTank для нижней части, Cone для средней и Sphere для верхушки. Фигуру вокруг «глаз» создаем с помощью примитива ChampferBox, с модификаторами Edit Poly, TurboSmooth и Shell. Глаза создаем с помощью примитива Sphere, а зрачки создаем с помощью примитивов Vox.

## 2.2. Построение туловища

Теперь построим туловище персонажа. Используем примитив Cylinder, плечи туловища получим с помощью примитива Sphere с включенным AutoGrid, размещаем левое плечо слева и, используя функцию Mirror, смещаем по оси x.

## 2.3. Построение рук и ног

Конечности за исключением кистей и стоп делаются одинаковым образом, меняется

только размер примитива (рис.2). Для их создания используем примитив Cylinder, кисти создаем, используя примитив Cone с модификатором FFD(box) 4x4x4. Строим пальцы примитивом Cylinder с включенным AutoGrid, группируем каждую кисть с её пальцами, меняем цвет на серый и привязываем к костям Base HumanLPalm и Base HumanRPalm. Все последующие действия при создании анимации будут производиться только со скелетом.

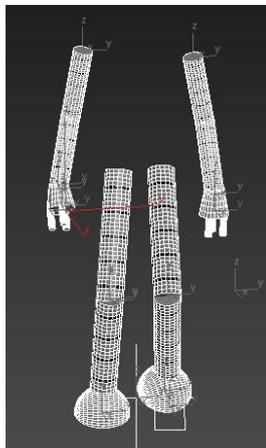


Рис.2. Конечности персонажа

### 3. Создание анимации

Создадим траекторию движения персонажа с помощью примитива Line с параметром smooth. Выделяем точку и поворачиваем ее методом Select and Rotate так, чтоб персонаж стоял перпендикулярно линии движения. В итоге получили ходьбу персонажа по заданной траектории (рис. 3). Стандартное число кадров анимации в 3ds Max 80 кадров.

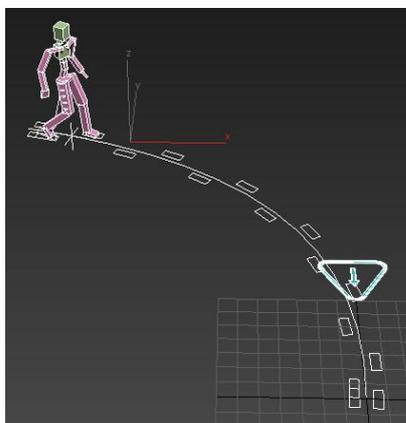


Рис. 3. Ходьба скелета по траектории

В ходе выполнения данной работы была спроектирована и реализована трехмерная сцена с анимацией, имитирующей ходьбу робота по заданной траектории.

### ЛИТЕРАТУРА:

1. Юревич Е.И. Управление роботами и робототехническими системами: учеб. пособие. - СПб.: Изд-во СПбГТУ, 2001. 168 с.
2. Поспелов Д.А. Ситуационное управление: теория и практика. - М.: Наука, 1986.

## СОДЕРЖАНИЕ

Стр.

<b>ИНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ . . . . .</b>	<b>3</b>
<b><i>Секция «Механика и процессы управления»</i></b>	
<i>Грищенко А.И., Семенов А.С.</i> Моделирование процессов неупругого деформирования монокристаллических сплавов на никелевой основе с учетом эволюции $\gamma$ и $\gamma'$ фаз . . . . .	3
<i>Богданова Е.Р., Бенин А.В., Беляев М.О., Семенов С.Г., Семенов А.С.</i> Исследование процессов деформирования и разрушения бетонных элементов, армированных стеклопластиковой арматурой . . . . .	6
<i>Гучинский Р.В., Петин С.В.</i> Распространение пространственных трещин усталости и его конечно-элементное моделирование . . . . .	9
<i>Игнатович И.А., Семенов А.С., Семенов С.Г., Гецов Л.Б.</i> Конечно-элементное моделирование процессов неупругого деформирования и разрушения дисков турбин при сложном термомеханическом циклическом воздействии . . . . .	12
<i>Иоселевский А.А., Суханов А.А.</i> Идентификация параметров динамической модели качки судна . . . . .	15
<i>Кибардин С.А., Яковис Л.М.</i> Робастные настройки типовых регуляторов для динамических объектов с запаздыванием . . . . .	18
<i>Лавров К.И., Семенов А.С., Бенин А.В.</i> Моделирование нелинейного многоосного деформирования бетона с учетом анизотропии при растяжении-сжатии . . . . .	21
<i>Лобанов С.М., Семенов А.С.</i> Сравнение феноменологических моделей сегнетопьезокерамики при ползучести в условиях постоянного и циклического нагружения . . . . .	24
<i>Маняк И.С., Мельников Б.Е., Семенов А.С.</i> Экспериментальные исследования и конечно-элементное моделирование процесса разрушения полимерного композита с короткими угольными волокнами . . . . .	27
<i>Марков А.О., Бурдаков С.Ф.</i> Построение двухуровневой системы управления квадрокоптером . . . . .	30
<i>Михайлов И.А., Семенов А.С., Гецов Л.Б., Тихомирова Е.А.</i> Конечно-элементное моделирование процессов накопления термоусталостных повреждений в корсетных образцах из монокристаллического жаропрочного сплава . . . . .	33
<i>Мусихин Д.А., Яковис Л.М.</i> Идентификация моделей управляемых динамических объектов в режиме нормальной эксплуатации . . . . .	36
<i>Неклюдова Е.А., Семенов А.С., Семенов С.Г.</i> Конечно-элементное моделирование реконструкции стального водовода при помощи стекловолоконного композиционного материала . . . . .	39
<i>Николаев Д.В., Боровков А.И., Клявин О.И.</i> Моделирование и исследование конструкции устройства, обеспечивающего безопасность пассажиров в автомобилях с открытым верхом . . . . .	42
<i>Пуделев О.А., Семенов А.С.</i> Моделирование процесса поляризации пьезокерамических сенсоров и актюаторов при затвердевании алюминиевого корпуса . . . . .	44
<i>Рыбакова О.М., Семенов А.С., Семенов С.Г., Гецов Л.Б., Тихомирова Е.А.</i> Моделирование процессов ползучести монокристаллических сплавов с учетом действия различных октаэдрических и кубических систем скольжения . . . . .	47
<i>Романов Ф.К., Суханов А.А.</i> Автоматическое управление квадрокоптером . . . . .	50
<i>Сизов П.А., Бурдаков С.Ф.</i> Управление движением колесного робота в задаче	

преследования . . . . .	52
<i>Томилов А.С., Штукин Л.В., Беринский И.Е.</i> Макромасштабная электромеханическая аналогия графенового резонатора. . . . .	55
<i>Трибунский М.И., Клявин О.И., Боровков А.И.</i> Параметрическая оптимизация профиля распределительного вала двигателя внутреннего сгорания. . . . .	58
<i>Федотов А.В., Беляев А.К.</i> Экспериментальное исследование различных подходов к управлению распределенными системами . . . . .	61
<i>Хакало К.А., Индейцев Д.А., Вавилов Д.С., Клявин О.И.</i> Распространение термоупругих волн в металлах и диэлектриках . . . . .	64
<i>Цветков П.С., Боровков А.И., Клявин О.И.,</i> Конечно-элементный расчёт подрамника и передней подвески автомобиля при различных вариантах нагружения и оптимизация конструкции . . . . .	67
<i>Шагннев О.Б., Бурдаков С.Ф.</i> Стабилизация силового взаимодействия робота с поверхностью неопределенного профиля . . . . .	70
<i>Шевчук Р.Э., Гаев А.В.</i> Применение конечно-элементного моделирования при разработке клавиш из гиперупругих материалов . . . . .	73
 <b>Секция «Гидроаэродинамика, горение и теплообмен»</b>	
<i>Засимова М.А., Иванов Н.Г.</i> Численное исследование влияния формы задней кромки крылового профиля на формирование дорожки Кармана . . . . .	76
<i>Капустин В.В., Плетнев А.А.</i> Моделирование теплового состояния металлобетонного контейнера для хранения и транспортирования отработавших тепловыделяющих сборок ядерных реакторов . . . . .	79
<i>Коковина Е.С., Цой А.С., Снегирев А.Ю.</i> Совместное моделирование турбулентного пламени и пиролиза горючего материала . . . . .	81
<i>Колесник Е.В., Панов Д.О., Смирнов Е.М.</i> Применение многоуровневого алгоритма оптимизации для минимизации гидравлических потерь в плоском канале с поворотом . . . . .	84
<i>Колесник И.М., Иванов Н.Г.</i> Численное моделирование свободной конвекции в прямоугольных полостях: эффект частичного нагрева нижней стенки . . . . .	87
<i>Кузнецов Е.А., Поняев С.А.</i> Численное моделирование течения двухтемпературной плазмы в ударной трубе с использованием пакета OpenFOAM . . . . .	90
<i>Котов Е.В., Гарбарук А.В.</i> К вопросу использования пристенных функций при расчете отрывных течений . . . . .	92
<i>Стабников А.С., Гарбарук А.В.</i> О поправке на кривизну линий тока и вращение для моделей турбулентной вязкости . . . . .	94
<i>Лисин К.В., Пашкевич Д.С.</i> Расчет теплофизических характеристик многокомпонентной смеси полярных газов . . . . .	96
<i>Федорова Е.А., Гатаулин Я.А.</i> Исследование влияния закрученного потока на вихревое движение в трубке с локальным сужением . . . . .	98
<i>Хоробров С.В., Юхнев А.Д.</i> Сравнительное гидродинамическое исследование современных механических протезов аортального клапана . . . . .	101
<i>Храпунов Е.Ф., Чумаков Ю.С.</i> Экспериментальное исследование структуры свободноконвективного потока от локального источника тепла . . . . .	103
<i>Дьякова А.И., Левченя А.М.</i> Численное моделирование осесимметричного обтекания тора . . . . .	106

**Секция «Механика и математическое моделирование»**

*Борисов И.И., Кривошеев С. В., Олейник Р. В., Резников С.С.* Разработка

конструкции электромеханической руки, её системы управления и обратной связи . . .	110
<i>Бразгина О.В., Вильчевская Е.Н., Иванова Е.А.</i> Смешанное материально-пространственное описание для моделирования двухкомпонентных сред . . . . .	113
<i>Галичян Т.А.</i> Математическое моделирование влияния клеевой прослойки на магнитоэлектрический эффект в магнитострикционно-пьезоэлектрических структурах	115
<i>Гладков И.О., Коробейникова М.С.</i> Изучение скольжения одиночной краевой дислокации в монокристалле железа, упрочнённого наноразмерными пластинами графена . . . . .	118
<i>Курдова А.В., Скобов Е. Д.</i> Алгоритмы подготовки и организации процессов управления активной самообороны корабля. . . . .	121
<i>Мацюк К.В.</i> Модель неупругого деформирования ГПУ–кристаллов . . . . .	123
<i>Мацюк К.В.</i> Модель неупругого деформирования ГПУ–кристаллитов. Несимметричные меры . . . . .	126
<i>Монич Д.С., Нуждин К.А.</i> Разработка зажимного узла адаптивного захватного устройства . . . . .	129
<i>Олейник Р.В., Резников С.С.</i> Проектирование антропоморфной системы для исследования кинематики руки человека . . . . .	132
<i>Осокина А.Е., Беринский И.Е.</i> Линейные плоские волны в материале с квадратной решёткой . . . . .	135
<i>Остапович К.В., Зубко И.Ю., Кочуров В.И.</i> Применение методов атомарной статики к исследованию температурных зависимостей поверхностных и объемных упругих свойств монокристаллов . . . . .	137
<i>Пояркин А.В., Пальков Р.С.</i> Влияние свойств межфазного слоя на эффективные характеристики композиционных материалов . . . . .	140
<i>Симонов М.В.</i> Исследование влияния учета геометрически необходимых дислокаций в рамках градиентных физических теорий пластичности . . . . .	143
<i>Симонов М.В.</i> Исследование механических свойств образцов конечных размеров с ГПУ-решёткой . . . . .	146
<i>Фролова К.П., Лобода О.С.</i> Математическая модель лука . . . . .	149
<i>Савчук Д.А., Талалов О.В.</i> Поиск знаков дорожного движения . . . . .	152
<i>Городилов Р.С., Зубко И.Ю.</i> Исследование упругих свойств монослоя графена с использованием степенных потенциалов в подходе атомарной статики . . . . .	154
<i>Житникова К.А.</i> Исследование краевых задач математических моделей вблизи спектра Фучика . . . . .	157
<i>Феоктистова Е.В., Куюкина М.С., Осипенко М.А., Рубцова Е.В.</i> Математическая модель формирования бактериальных кластеров в системе вода-бактерии-углеводород	159
 <b>Секция «Облачные технологии управления мобильными роботами»</b>	
<i>Калугин Н.В., Мулюха В.А.</i> Разработка метода синтеза агрегатно-модульного робота . . . . .	162
<i>Галимский В.В., Подгурский Ю.Е.</i> Методика нагрузочного тестирования межсетевых экранов . . . . .	165
<i>Синельщиков Е.А., Попов С.Г.</i> Исследование стратегий действий группы роботов в процессе построения плана помещения . . . . .	167
<i>Салахетдинов Т.Ш., Курочкин М.А.</i> Системная интеграция беспилотных и наземных роботов для работы в экстремальных условиях . . . . .	170
<i>Балуев Д.В., Курочкин М.А.</i> Создание трёхмерных сцен с анимацией, имитирующей ходьбу робота по траектории . . . . .	173