Министерство образования и науки Российской Федерации Санкт-Петербургский государственный политехнический университет

# НЕДЕЛЯ НАУКИ СПОГПУ

Материалы научно-практической конференции с международным участием



# ИНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ



Санкт-Петербург•2014



УДК 51;531 ББК 22.1;22.2 Н 42

Неделя науки СПбГПУ : материалы научно-практической конференции с международным участием. Институт прикладной математики и механики СПбГПУ. – СПб. : Изд-во Политехн. ун-та, 2014. – 316 с.

В сборнике публикуются материалы докладов студентов, аспирантов, молодых ученых и сотрудников Политехнического университета, вузов Санкт-Петербурга, России и других стран, а также учреждений РАН, представленные на научно-практическую конференцию, проводимую в рамках ежегодной Недели науки Санкт-Петербургского государственного политехнического университета. Доклады отражают современный уровень научно-исследовательской работы участников конференции в области прикладной математики и механики.

Представляет интерес для специалистов в различных областях знаний, учащихся и работников системы высшего образования и Российской академии наук.

# Редакционная коллегия Института прикладной математики и механики СПбГПУ:

А.К. Беляев (директор института), Я.А. Гатаулин (отв. ред.), А.И. Боровков, А.В. Востров, В.С. Заборовский, Н.Ю. Золоторевский, Н.Г. Иванов, А.М. Кривцов, С.В. Лупуляк, А.С. Мурачев, А.С. Немов, А.С. Семенов, Е.М. Смирнов, М.Е. Фролов, А.А. Хрущенко

Конференция проведена при финансовой поддержке Комитета по науке и высшей школе Правительства Санкт-Петербурга.

Печатается по решению редакционно-издательского совета Санкт-Петербургского государственного политехнического университета.

© Санкт-Петербургский государственный политехнический университет, 2014

ISBN 978-5-7422-4352-6

### ИНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ

### СЕКЦИЯ «ГИДРОГАЗОДИНАМИКА»

УДК 519.65

## Е.В. Колесник, Д.О. Панов (Санкт-Петербургский государственный политехнический университет)

## ОПЫТ ИСПОЛЬЗОВАНИЯ АЛГОРИТМА ПОИСКА ЭКСТРЕМУМОВ СЛОЖНЫХ ФУНКЦИЙ С ПРИМЕНЕНИЕМ ВСПОМОГАТЕЛЬНЫХ АППРОКСИМАЦИЙ

Пусть есть множество  $X = \{x | g_i(x) \le 0, i = 1, ..., m\} \subset \mathbb{R}^n$ , здесь  $g_i(x) \le 0$  – функции, ограничивающие множество X. На множестве X задана функция  $f(x) \to \mathbb{R}$ , называемая целевой функцией. Целью задачи оптимизации [1] является поиск минимума целевой функции на множестве X. В данной работе будет рассмотрен наиболее простой способ задания граничных условий для описания области X:  $x_{min}^i \le x^i \le x_{max}^i$ . Для удобства представления материала введем следующие термины: точка – вектор x; база данных – множество точек и значений целевой функции в них.

В зависимости от задачи расчет одного значения целевой функции может занимать различное время и требовать различное количество ресурсов. Примирительно к задачам гидродинамики это время может достигать десятков и даже сотен часов на одну точку. В этих условиях наиболее перспективны многоуровневые алгоритмы оптимизации, рассмотренные в книге [2], позволяющие существенно сократить необходимое количество точек для получения решения. В данной работе тестируется двухуровневый алгоритм оптимизации (рис. 1):

- на заранее построенной базе данных целевая функция аппроксимируется с помощью специальной мета-функции [3];
- 2. находится минимум мета-функции;
- 3. производится расчет целевой функции в точки минимума мета-функции;
- 4. полученное значение целевой функции добавляется в базу данных;
- 5. для обновленной базы данных производятся все вышеперечисленные действия.



Рис. 1. Схема алгоритма оптимизации

Начальная база данных подбирается с помощью методики планирования эксперимента [3]. Таким образом, алгоритм оптимизации состоит из трех блоков: методики планирования эксперимента; алгоритма поиска минимума функции [4]; алгоритма аппроксимации целевой функции или алгоритма построения мета-функции [5].

Целью данной работы является тестирование алгоритма аппроксимации, алгоритма поиска минимума и алгоритма оптимизации в целом. Для тестирования использовались функции двух переменных, взятые из работы [6] (табл. 1).

Two in the reaction of the second sec			
N⁰	функция	минимум	ограничения
1	$f(x) = x_1^2 + x_2^2$	$x_{\min} = (0.0, 0.0)$	$-3.4 \le x_{1,x_2} \le 6.8$
2	$f(x) = x_1^2 + 2x_2^2$	$x_{\min} = (0.0, 0.0)$	$-3.4 \le x_{1,x_2} \le 6.8$
3	$f(x) = 100(x_2 - x_1^2)^2 + (1 - x_1)^2$	$x_{min} = (1.0, 1.0)$	$-2.0 \le x_{1,x_{2}} \le 2.0$
4	$f(x) = 20 + (x_1^2 - 10\cos(2\pi x_1)) + $	$x_{min} = (0.0, 0.0)$	$-3.4 \le x_{1,x_{2}} \le 6.8$
	$+(x_2^2-10\cos(2\pi x_2))$		
5	$f(x) = -x_1 \sin( x_1 ^{0.5}) - x_2 \sin( x_2 ^{0.5})$	$x_{\min} = (420.97, 420.97)$	$-500 \le x_{1,x_{2}} \le 500$
6	$f(x) = (x_1^2 + x_2^2)/4000 - $	$\mathbf{x} = (0, 0, 0, 0)$	400 < x x < 800
	$\cos(x_1)\cos(x_2/2^{0.5}) + 1$	$x_{\min} = (0.0, 0.0)$	$-400 \le x_{1,x_{2}} \le 800$
7	f(x) = 20 + e -		
	$-20\exp(-0.2(0.5(x_1^2 + x_2^2))^{0.5}) -$	$x_{min} = (0.0, 0.0)$	$-21.8 \le x_{1,x_2} \le 43.7$
	$-\exp(0.5(\cos(2\pi x_1) + \cos(2\pi x_2)))$		

Табл. 1. Тестовые функции

В качестве алгоритма поиска минимума использовался стохастический алгоритм – метод случайного поиска [4]. Так как алгоритм основан на стохастическом подходе, требуется статистика, позволяющая оценить вероятность нахождения минимума. Число запуска алгоритма *N* = 1000, для каждого запуска делалось 10<sup>5</sup> расчетов целевой функции. Алгоритм оказался способным находить глобальный минимум всех функций в 100% случаях, кроме функции №4 (в 54% случаях). Существенным недостатком алгоритма является его скорость и время сходимости. Алгоритм требует до 10<sup>5</sup> итераций для получения глобального минимума. Тем не менее, в реальных задачах временные затраты на получение глобального минимума (менее минуты) несоизмеримы со временем, затраченным на получение одной точки (несколько часов). Для функций больших размерностей это обстоятельство может оказаться слабым местом алгоритма оптимизации.

В качестве аппроксимирующего алгоритма использовался алгоритм, построенный на основе теории случайных функций [5]. Результаты тестов показали, что алгоритм позволяет быстро получить результаты, адекватно аппроксимирует значение функции в любой точке, не вызывает осцилляций, позволяет работать с функциями любого количества переменных. Недостатков метода выявлено не было.

При тестировании алгоритма оптимизации, для всех функций строились три начальных базы данных на основе методик планирования эксперимента [3]: параметрического исследования (ПИ, размер базы – 9 точек), метода центральных композиций (ЦК, размер базы – 13 точек), метода полных факториалов (ПФ, размер базы – 36 точек). Результаты представлены в виде полей и графиков истории сходимости метода (рис. 2). Истории сходимости при определении начальной базы методами ПИ и ЦК оказались очень похожи для всех функций. Можно сделать вывод, что метод ЦК не дает преимуществ по сравнению с методом ПИ. Метод построения начальной базы ПФ позволяет существенно увеличить скорость сходимости и добиться решения более близкого к глобальному минимуму. Эти обстоятельства обусловлены более точным построением мета-функции за счет большего

количества точек в начальной базе данных. К сожалению, в реальных задачах количество параметров существенно больше двух, что делает метод ПФ практически неприменимым.

Было выявлено несколько особенностей метода оптимизации. Для простых функций (функции №1, №2) при любом определении базы данных решение оказывается близким к глобальному минимуму, но для методов ПИ и ЦК отмечено существенное замедление сходимости. Тот же результат получен для функции №3 во всех вариантах определения начальной базы данных. Для более сложных функций (функции №№ 4-7) метод имеет тенденцию сходиться к локальному минимуму. Причина этих особенностей состоит в неточном описании мета-функцией реальной целевой функции в области глобального минимума. Для улучшения работы алгоритма оптимизации требуется изменить стратегию поиска. Наиболее перспективным выглядит стратегия с уточнением мета-функции в области минимума:

1. расчет начальной базы данных методом ПИ;

2. проведение итераций методом оптимизации до момента, пока сходимость не замедлится;

3. уточнение базы данных в области предполагаемого минимума (либо должны быть построены одна-две дополнительные точки, либо вокруг предполагаемого минимума должна быть построена дополнительная база данных методом ПИ);

4. повторение первых трех операций.



Рис. 2. История сходимости алгоритма для функции №3: сверху показаны итоговые базы данных (точки) вместе с целевой функцией (изолинии) для трех начальных баз данных; снизу представлено изменение значения целевой функции с ходом итераций

#### ЛИТЕРАТУРА:

1. Miettinen K. Nonlinear multiobjective optimization. Kluwer Academic Publishers, 1999. 293 p.

2. Thevenin D., Janiga G., Optimization and Computational Fluid Dynamics. Springer, 2008. 293 p.

3. Isight 4.0 User Guide. Dassault Systemes, 2009. 178 p.

4. Абакаров А.Ш., Сушков Ю.А. О численном подходе к получению Парето-оптимальных альтернатив. Наука в образовании: Электронное научное издание, 2008.

5. Бахвалов Ю.Н., «Многомерная интерполяция и аппроксимация на основе теории случайных функций» http://www.machinelearning.ru (дата обращения: 15.11.2013).

6. Molga M., Smutnicki C. Test functions for optimization needs, 2005. 43 p.

УДК 66.074.2

Е.В. Котов, С.А. Галаев (Санкт-Петербургский государственный политехнический университет)

### ВЛИЯНИЕ ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ ПАРАМЕТРОВ ЦИКЛОНА С ТАНГЕНЦИАЛЬНЫМ ПОДВОДОМ ГАЗА НА ЭФФЕКТИВНОСТЬ РАБОТЫ УСТРОЙСТВА

Циклоны относятся к устройствам, в которых вращательное движение потока газа и инородных частиц осуществляется от периферии к центру. Под действием центробежных сил обеспечивается отделение частиц, плотность которых больше, чем плотность газа. Эффективность их сепарации зависит от геометрических параметров и конструкции циклона; свойств частиц пыли (плотности, формы, распределения частиц по размеру, суммарной массы частиц в потоке газа); свойств газа (скорости, плотности, вязкости, температуры, давления); а также от свойств материала стенок циклона, формы выхлопной трубы, эксцентриситета выхлопной трубы [1].

Для исследования процессов движения потока в циклоне используются экспериментальные и математические методы.

Экспериментальные методы исследования дают исчерпывающую информацию о процессах, происходящих в исследуемой конструкции циклона, но не могут быть распространены на все типы циклонов.

Значительно более общие результаты можно получить, используя математические методы исследования гидроаэродинамических процессов в циклонах, позволяющие оценить влияние указанных факторов на показатели работы циклона.

Все известные математические методы исследования движения потока газа в циклоне можно условно разделить на три группы: интегральные модели; модели с тангенциальной скоростью, зависящей как от радиуса, так и от осевой координаты; модели с тангенциальной скоростью, зависящей только от радиуса.

Интегральные модели [2] позволяют выявить общие закономерности, но, зачастую, дают результаты, далекие от экспериментальных данных. Модели с тангенциальной скоростью, зависящей как от радиуса, так и от осевой координаты [3], позволяют получить лишь качественные результаты, и часто неоднозначны. Поэтому возникает необходимость упрощения уравнений движения исходя из физических соображений и результатов экспериментальных исследований. К таким упрощенным моделям относятся модели течения в циклоне, в которых тангенциальная скорость зависит только от радиуса и не изменяется по высоте циклона [4].

Целью настоящего исследования является оценка влияния геометрических параметров циклонов с тангенциальным подводом на эффективность работы циклона посредством применения наиболее известных математических моделей с тангенциальной скоростью, зависящей от радиуса, а также сопоставление расчетных данных с экспериментальными.

Исследование выполнено с использованием моделей Барта, Мушелькнауца, Иозиа-Лейта, Лэппла [4, 5], основанных на балансе сил, действующих на частицу, и существовании равновесной орбиты частицы диаметром *d<sub>p</sub>*, при превышении которого она сойдет с орбиты и осядет на стенках циклона. Этот параметр (cut-off diameter) позволяет оценить эффективность работы циклона, при котором обеспечивается 50% эффективность сепарации частиц –  $d_{50}$ , и установить его зависимость от геометрических параметров циклона. К ним относятся: внутренний диаметр цилиндрической части корпуса циклона D; ширина a и высота b входного патрубка; диаметр  $D_x$  и внутренняя длина S выхлопной трубы; высота циклона, включая цилиндрическую и коническую части  $H_t$ , высота цилиндрической части h; диаметр наконечника конуса  $B_c$  (рис. 1).



Рис. 1. Геометрия циклона

По данным экспериментальных исследований и результатам вычислений построены графики эффективности циклона  $\eta$  для рассматриваемых моделей (рис. 2). Под эффективностью понимается отношение разности концентраций пыли в газе до и после очистки к концентрации пыли на входе в циклон. Результаты моделирования сравнивались с аналогичными параметрами циклона высокой эффективности Стэйрмэнда [4].



Рис. 2. Зависимость эффективности циклона от соотношения  $(d_p/d_{50})$ 

Проведенный анализ показал, что основное влияние на  $d_{50}$  оказывают ширина и высота входного патрубка, диаметр выхлопной трубы, общая высота циклона. С увеличением этих параметров возрастает  $d_{50}$ , а, следовательно, ухудшается эффективность очистки. Наибольшее влияние на эффективность работы циклона оказывает ширина входного патрубка. Влияние таких геометрических параметров циклона как высота цилиндрической части, внутренняя длина выхлопной трубы и диаметр наконечника конуса практически не сказываются на эффективности работы циклона.

Рассмотренные математические модели вихревого движения в циклоне с тангенциальным подводом газа пригодны для инженерных расчетов. Среди них выделяется модель Мушелькнауца – в результате применения данной модели обеспечено лучшее совпадение с экспериментальными данными.

#### ЛИТЕРАТУРА:

1. Ветошкин А.Г. Процессы и аппараты пылеочистки. Учебное пособие. Пенза: Изд-во Пенз. гос. унта, 2005. 210 с.

2. Гольдштик М.А. Вихревые потоки. Новосибирск: Наука. Сиб. отд-ние, 1981. 366 с.

3. Гринспен Х.П. Теория вращающихся жидкостей. Л.: Гидрометеоиздат. 1975. 340 с.

4. Hoffmann A.C., Stein L.E. Gas cyclones and swirl tubes: Principle, Design and Operation. Springer, 2nd edition, 2008. 325 p.

5. Gimbun J., Chuah T., Choong T.S.Y., Fakhru'l-Razi A. Evaluation on empirical models for the prediction of cyclone efficiency // IEM Journal, 2006, Vol. 67, No 3, P. 29 – 33.

#### УДК 629.7.015, 616.12-089

К.А. Скворцов, В.А. Клементьев (Самарский государственный аэрокосмический университет им. С.П. Королева), А.В. Филиппенко (ЗАО АВФ, Санкт-Петербург)

# ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫЕ ИССЛЕДОВАНИЯ КЛАПАНОВ СИСТЕМЫ ЖИДКОСТНОГО ДЫХАНИЯ

Система жидкостного дыхания может быть использована для спасения экипажей подводных лодок терпящих аварию на большой глубине [1], а также в противоперегрузочных системах нового типа на пилотируемых летательных аппаратах [2]. В составе аппарата жидкостного дыхания предполагается использовать У-образный трубопровод, для подвода и отвода фторуглеродной жидкости (и газов) из легких.

При вдохе «свежая» дыхательная фторуглеродная жидкость (с необходимым содержанием  $O_2$ ) через впускной клапан поступает к легким, при этом выпускной клапан закрыт. «Отработанная» жидкость (с диффундирующим в нее в легких  $CO_2$ ) при выдохе удаляется через выпускной клапан в выпускную магистраль, для удаления в дальнейшем  $CO_2$ , насыщения  $O_2$  и последующего использования. Впускной и выпускной клапан идентичны, и в данном исследовании представляют собой искусственный клапан сердца (ИКС). Были начаты исследования двухстворчатых и трёхстворчатых ИКС применительно к трём режимам работы системы (газы, жидкость и их смесь).

Следует отметить, что обширные исследования по определению гидродинамических характеристик ИКС проводились ранее как в России [3], так и за рубежом [4], но только на жидкостях. Наши исследования гидродинамических характеристик проводилось как на пневматических установках, так и на универсальном гидравлических стенде (рис. 1).

Методика проведения экспериментов заключалась в измерении перепада давления между мерными сечениями. Первое мерное сечение располагалось перед клапаном (1), второе подбиралось экспериментальным способом на таком расстоянии за клапаном, где

заканчивалась область вихреобразования. Исследования были проведены в широком диапазоне чисел Re – от 2 000 до 46 000. Результаты экспериментов обрабатывались по общепринятой методике определения коэффициентов потерь в местных гидравлических сопротивлениях. Проведенные на стенде тестовые эксперименты с диафрагмами показали хорошее совпадение с аналогичными экспериментами, выполненными H.B. Левкоевой [5]. Все результаты экспериментов представлялись в виде зависимостей безразмерного коэффициента гидравлического сопротивления  $\zeta$  от числа Re. Это позволит перенести результаты, полученные на модельных жидкостях, на натурные фторуглеродные жидкости.



Рис. 1. Схема универсального гидравлического стенда

На рис. 2 в качестве примера приведены экспериментальные значения коэффициента сопротивления  $\zeta$  двухстворчатого ИКС от числа Рейнольдса, полученные на пневматической установке и гидростенде.



Рис. 2. Экспериментальные значения коэффициента гидравлического сопротивления двухстворчатого клапана от числа Рейнольдса

Во время проведения экспериментов осуществлялась фото- и видеозапись процесса течения жидкости и положения створок клапанов. Изображение фиксировалось с помощью цифровой камеры "c270 Logitech"(3) через герметичное стекло (2).

В связи с выявленной несимметричной картиной положения створок клапана, зависящей от расхода жидкости и положения клапана в пространстве, были проведены

эксперименты, позволяющие учесть влияние данного явления на потери гидродинамического напора. Для изучения сложной картины течения при симметричном и несимметричном открытии створок клапана была применена методика определения параметров воздушного потока с использованием лазерной измерительной системы Dantec Dynamics. Применение метода цифровой трассерной визуализации (PIV-метод) [6] позволило измерить мгновенные поля скоростей за клапаном с высоким пространственным разрешением. В дальнейшем это позволит провести верификацию результатов численных расчетов течения газового потока через клапаны. На рис. 3 представлена визуализация воздушного потока за двустворчатым клапаном при горизонтальном расположении осей вращения его створок, полученные данным методом.



Рис. 3. Визуализация воздушного потока за двухстворчатым ИКС PIV-методом (верхняя створка клапана открыта, нижняя приоткрыта)

Проведенные эксперименты показали, что двухстворчатый клапан имеет меньшие гидродинамические потери, чем трехстворчатый. При низких расходах наблюдается разброс результатов из-за несимметричности раскрытия створок клапана. В целом зависимости  $\zeta$  от Re, полученные на гидравлических и пневматических стендах практически совпадают, что соответствует теории подобия. Необходимо продолжить исследования гидродинамического сопротивления клапана в случае двухфазного потока.

Авторы выражают благодарность профессору В.Г.Шахову, аспиранту Р.В.Бирюкову и к.т.н. А.В.Ивченко за помощь, оказанную в ходе выполнения работ.

### ЛИТЕРАТУРА:

1. Филиппенко А.В. Концепция спасения с затонувшей подводной лодки: жидкостная вентиляция легких плюс безотлагательное свободное всплытие. Оборонный заказ, 2007, №15.

2. Бирюков Р.В., Клементьев В.А., Филиппенко А.В. Исследование гидродинамических характеристик клапанов для системы жидкостного дыхания /Симпозиум с международным участием Самолетостроние России. Проблемы и перспективы: Тезисы докладов. Самара: СГАУ. 2012. С. 78 – 79.

3. Орловский П.И., Гриценко В.В., Юхнев А.Д. и др. Искусственные клапаны сердца / Под редакцией академика РАМН Шевченко Ю.Л. СПб.: ЗАО «Олма-медиа групп», 2007. 448 с.

4. Yoganathan A.P., Chaux A., Gray R.J., Woo Y., Williams F.P., Matloff J.M. Bileaflet, Tilting Disc and Porcine Aortic Valve Substitutes: In Vitro Hydrodynamic Characteristics // JACC (Journal of American College of Cardiology), 1984, Vol. 3, No. 2, P. 313 – 320.

5. Некрасов Б.Б. Гидравлика и её применение на летательных аппаратах. М.: Машиностроение, 1967. 367 с.

6. Raffel M., Willert C., Kompenhans J. Particle Image Velocimetry: a practical guide. Berlin: Springer, 1998. 253 p.

### РАЗРАБОТКА ПОПРАВКИ НА КРИВИЗНУ ЛИНИЙ ТОКА И ВРАЩЕНИЕ НА ОСНОВЕ АЛГЕБРАИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ РЕЙНОЛЬДСОВЫХ НАПРЯЖЕНИЙ

Несмотря на появление в последние годы множества гибридных методов расчета турбулентных течений, на практике по-прежнему наиболее широко применяется решение уравнений Рейнольдса. Этот подход, используя доступные вычислительные ресурсы, зачастую позволяет достаточно точно предсказать требуемые характеристики течений. Для замыкания уравнений Рейнольдса используются полуэмпирические модели турбулентности, основанные, как правило, на гипотезе Буссинеска, определяющей линейную связь между производными средних значений скорости и тензором рейнольдсовых напряжений. Популярность таких моделей обусловлена их простотой, устойчивостью, а также экономичностью в плане вычислительных ресурсов. К сожалению, используемые на практике модели турбулентности не универсальны [1], однако некоторые их дефекты носят систематический характер и могут быть исправлены при помощи введения в модели соответствующих поправок.

В частности, именно так обстоит дело с течениями, в которых вращение системы координат или кривизна линий тока оказывают существенное влияние на характеристики турбулентности. Даже лучшие из известных моделей турбулентности, в частности, модель Спаларта-Аллмареса SA [2] и модель Ментера SST [3], сталкиваются с проблемами при описании течений с такими особенностями, поэтому сами авторы предлагают соответствующие полуэмпирические поправки. Так, поправка Спаларта-Шура [4], разработанная для модели SA, была позднее адаптирована Ментером и Смирновым для модели SST [5].

Важным обстоятельством является то, что эффекты вращения системы координат и кривизны линий тока имеют единую природу. В работе [6] предложено выражение, позволяющее свести влияние кривизны линий тока к эквивалентному эффекту вращения системы координат, т.е. связывающее локальные характеристики потока в неподвижной системе координат со скоростью вращения подвижной системы координат.

Влияние вращения системы координат на характеристики турбулентности может быть точно учтено в рамках дифференциальных моделей переноса рейнольдсовых напряжений (DRSM) в том случае, если уравнения модели получены из уравнений Навье-Стокса во вращающейся системе координат с учетом силы Кориолиса [7]. Полученные из таких DRSM явные алгебраические модели рейнольдсовых напряжений (EARSM), использующие нелинейную связь между тензором Рейнольдса и производными средних значений скорости, также способны описать влияние вращения на турбулентность, например, модель GS [8]. Поскольку в большинстве течений нелинейные слагаемые не вносят определяющего вклада, можно предположить, что способность EARSM учитывать эффекты вращения по большей части обусловлена изменением коэффициента при главном (линейном) слагаемом – аналоге турбулентной вязкости в гипотезе Буссинеска.

Таким образом, представляется возможным извлечь из EARSM влияние вращения на этот коэффициент и, воспользовавшись уже упоминавшийся связью кривизны линий тока с вращением [6], построить поправку на кривизну и вращение для моделей турбулентной вязкости. Сделать это можно, например, следующим образом: рассмотрим коэффициенты при линейном слагаемом, полученные при помощи двух версий EARSM GS [8], одна из которых учитывает вращение системы координат, а другая – не учитывает. Отношение этих двух коэффициентов можно рассматривать как меру влияния вращения системы координат на турбулентную вязкость.

Таким образом, целью данной работы является вывод поправки на вращение системы координат и кривизну линий тока на основе EARSM GS [8] и связи между вращением и кривизной [6], а также всестороннее тестирование полученной поправки.

Следуя предложенному выше принципу, поправочная функция может быть представлена в следующем виде

$$f_{r}(\vec{\omega}^{r}) = \left(2\zeta_{0}^{2} + \frac{1+\eta^{2}/3}{1+\eta^{2}}\right) / \left(2\zeta_{1}^{2} + \frac{1+\eta^{2}/3}{1+\eta^{2}}\right),$$
(1)

где  $\zeta_1^2 = (g(1 - \frac{1}{2}C_4)\Omega_{ij} + e_{mji}\omega_m^r)(g(1 - \frac{1}{2}C_4)\Omega_{ij} + e_{mji}\omega_m^r)$ , а  $e_{mji}$  – символ Леви-Чевитта,  $\zeta_0^2 = (g(1 - \frac{1}{2}C_4))^2 \Omega_{ij}\Omega_{ij}$ ,  $\eta = g(1 - C_3/2)\sqrt{S_{ij}^*S_{ij}^*}$ ,  $\Omega_{ij} = (C_\mu\omega)^{-1} [\frac{1}{2}(\partial \overline{v}_i/\partial x_j - \partial \overline{v}_j/\partial x_i) + e_{mji}\Omega_m]$  и  $S_{ij} = (C_\mu\omega)^{-1} \frac{1}{2}(\partial \overline{v}_i/\partial x_j + \partial \overline{v}_j/\partial x_i)$  – безразмерные тензоры завихренности и скоростей деформаций. Величина  $g = (0.7 + 1.9 P/\varepsilon)^{-1}$  определяется соотношением генерации и диссипации кинетической энергии турбулентности, приближенная формула для которого взята из [9]. Локальная скорость вращения  $\omega_m^r$  вычисляется по предложенной в [6] зависимости:

$$\omega_m^r = A_{mj}^{-1} S_{pl} \left( \frac{DS}{Dt} \right)_{lq} \varepsilon_{pqj}, \text{ где } A_{ij}^{-1} = \frac{II_s^2 \delta_{ij} + 12III_s S_{ij} + 6II_s S_{ik} S_{kj}}{2II_s^3 - 12III_s^2}, \quad II_S = S_{ij} S_{ji}, III_S = S_{ij} S_{jk} S_{ki}.$$

Наконец, константы модели определяются как  $C_3 = 1.25$ ,  $C_4 = 0.4$ .

Тестирование поправки проводилось совместно с k- $\omega$  моделью SST [3], которая, как было показано в [1], является лучшей моделью турбулентности с двумя уравнениями. Дополнительным обстоятельством, определившим выбор данной модели для совместного тестирования с предложенной поправкой, является возможность непосредственного сравнения с поправкой Ментера-Смирнова [5], разработанной специально для модели SST.

Предложенная поправка была реализована в рамках NTS кода [10]. Для тестирования поправки были рассмотрены две задачи, характеризующиеся влиянием вращения системы координат и кривизны линий тока, соответственно: установившееся течение во вращающемся канале при различных числах Россби Ro [11] и течение в канале с поворотом на 180° [12].

Из результатов расчетов (рис. 1) видно, что предложенная поправка (1) успешно предсказывает влияние вращения и кривизны линий тока на профили скорости. Более того, поправка Ментера-Смирнова, специально разработанная и откалиброванная для модели SST, немного превосходит предложенную поправку только при расчете течении во вращающемся канале с самой высокой скоростью вращения (Ro = 0.5), а в остальных случаях результаты расчетов с обеими поправками очень близки.

Таким образом, разработана новая поправка на кривизну линий тока и вращение системы координат, применимая к любой дифференциальной модели с двумя уравнениями. Полученная поправка в сочетании с моделью турбулентности SST была протестирована на установившемся течении во вращающемся канале и течении в канале с поворотом на 180°. Результаты расчетов показали, что поправка успешно описывает эффекты кривизны и вращения, практически не уступая при этом поправке Ментера-Смирнова для модели SST. Следует, однако, признать, что тестирование поправки на двух течениях является недостаточным, поэтому работа по тестированию и, возможно, калибровке поправки должна быть продолжена.



Рис. 1. Сравнение профилей скоростей во вращающемся канале (а) и канале с поворотом (b), полученных без поправки (по CC), с использованием предложенной поправки (SG CC) и поправки Ментера-Смирнова (MS CC), с результатами DNS [11] и эксперимента [12]

#### ЛИТЕРАТУРА:

1. Гарбарук А.В., Стрелец М.Х., Шур М.Л. Моделирование турбулентности в расчетах сложных течений. СПб: Изд-во Политехн. ун-та, 2012. 88 с.

2. Spalart P.R., Allmaras S.R. A one-equation turbulence model for aerodynamic flows. AIAA Paper 92-0439, 1992.

3. Menter F.R. Zonal Two Equation k-w Turbulence Models for Aerodynamic Flows. AIAA Paper 93-2906, 1993.

4. Spalart P.R., Shur M.L. On the sensitization of turbulence models to rotation and curvature. Aerospace Science and Technology, 1997, 1(5), P. 297 – 302.

5. Smirnov P.E., Menter F.R. Sensitization of the SST Turbulence Model to Rotation and Curvature by Applying the Spalart–Shur Correction Term. Journal of Turbomachinery, 2009, 131, 041010.

6. Wallin S., Johansson A.V. Modelling streamline curvature effects in explicit algebraic Reynolds stress turbulence models. Int. J. Heat and Fluid Flow, 2002, 23(5), P. 721 – 730.

7. Speziale C.G., Sarkar S. Gatski T.B. Modelling the pressure–strain correlation of turbulence: an invariant dynamical systems approach. J. Fluid Mech., 1991, vol. 227, P. 245 – 272.

8. Gatski T.B., Speziale C.G. On explicit algebraic stress models for complex turbulent flows. J. Fluid Mech., 1993, vol. 254, P. 59 – 78.

9. Wallin S., Johansson A.V. An explicit algebraic Reynolds stress model for incompressible and compressible turbulent flows. J. Fluid Mech., 2000, vol. 403, P. 89 – 132.

10. Strelets M.K. Detached Eddy Simulation of Massively Separated Flows. AIAA Paper 2001-0879, 2001.

11. Kristoffersen R., Andersson H.I. Direct simulations of low-Reynolds-number turbulent flow in a rotating channel. J. Fluid Mech., 1993, vol. 256, P. 163 – 197.

12. Monson D.J., Seegmiller H.L., McConnaughey P.K., Chen Y.S. Comparison of experiment with calculations using curvature-corrected zero and two equation turbulence models for a two-dimensional U-duct. AIAA Paper 1990-1484, 1990.

# ИССЛЕДОВАНИЕ ЗАКРУЧЕННОГО ТЕЧЕНИЯ ЗА ДВОЙНЫМ ПОВОРОТОМ МЕТОДОМ ЦВЕТНОГО ДОПЛЕРОВСКОГО КАРТИРОВАНИЯ

Анализ публикаций последних лет показывает, что закрученные течения привлекают к себе все более пристальный интерес исследователей [1]. Многие исследования теоретически указывают на существование закрученного (вращательно-поступательного) течения крови в организме человека, но впервые экспериментально при помощи ультразвуковых доплеровских технологий феномен закрученного движения крови был зарегистрирован в общих сонных артериях [2]. Интерес исследования закрученного течения крови можно объяснить тем, что, во-первых, не до конца изучены механизмы, приводящие к формированию закрутки, а, во-вторых, не известна роль такого течения в физиологии человека.

Решить указанные проблемы невозможно без применения достаточно точной неинвазивной методики измерения закрученного течения крови. Существующая и давно используемая методика ультразвукового доплеровского измерения скорости кровотока касается только измерения осевой компоненты, но не подходит для измерения окружной компоненты скорости. Известна новая методика ультразвуковых доплеровских измерений всех трех компонент скорости закрученного течения крови [3].

Цель работы – исследовать закрученное течение жидкости в цилиндрическом канале за двойным поворотом ультразвуковым доплеровским методом (методом цветного доплеровского картирования).

Задачи – измерить с помощью ультразвукового сканера максимальные осевую и окружную скорости, а также профили осевой и окружной скорости закрученного течения за двойным поворотом.

Использованная конструкция двойного поворота как способа закрутки течения наиболее близка к физиологии, поскольку реальные кровеносные сосуды имеют извитости, напоминающие двойные повороты цилиндрических каналов [4]. Закрутка в двойном повороте создается за счет совместного действия центробежной силы и силы давления. На первом повороте в поперечном сечении канала возникают два одинаковых по размерам и интенсивности вихря Дина, а на втором повороте один из вихрей (тот, которые имеет то же направление вращения, что и двойной поворот) увеличивается в размерах и вытесняет второй. В результате на выходе двойного поворота имеет место закрученный поток [5].

Для экспериментального исследования закрученного течения была собрана установка, состоящая из центробежного насоса, создающего течения с постоянным расходом, и силиконовой модели сосуда – цилиндрического канала с внутренним диаметром D = 6 мм и толщиной стенки h = 1.5 мм. Цилиндрический канал в установке имел закручивающее поток устройство в виде трубки с двойным поворотом. Оба поворота имели одинаковую геометрию, а именно радиус кривизны r = 6.5 мм и расстояние между поворотами L = 13.5 мм. В качестве рабочей жидкости использовалась вода, содержащая соль (20 грамм соли на 1 литр воды), которая необходима для работы датчика электромагнитного расходомера, и частицы краски, которые необходимы для работы ультразвукового сканера.

Измерения расхода проводились с помощью датчика электромагнитного расходомера. Расходомер был предварительно прокалиброван прямым объемным методом, и коэффициент чувствительности датчика расходомера равен 17.7 мл/(с·В).

Эксперимент проводился для течений со средними скоростями 20 и 30 см/с. Соответствующие числа Рейнольдса  $\text{Re} = \rho V_{cp} D / \mu$  равны 1200 и 1900, числа Дина Dn =  $\text{Re} \sqrt{D/r} - 1100$  и 1750.

В качестве измерительного прибора использовался ультразвуковой сканер LogicScan64. Измерения максимальной осевой и окружной скорости проводились по известной методике [3], которая заключается в измерении максимума окружной скорости при положении оси датчика под углом 90° к оси сосуда, максимума осевой скорости – под углом 60°. При этом датчик ультразвукового сканера устанавливался поперек сосуда. Измерительный объем размером 5 мм помещался в зону максимальных скоростей в режиме цветного доплеровского картирования, затем по верхней огибающей спектра в режиме импульсного доплера находилась максимальная осевая скорость. Для получения максимальной окружной скорости также использовался измерительный объем размером 5 мм, но он был поставлен в режиме цветного доплеровского картирования сначала в зону максимальных скоростей, затем в зону минимальных скоростей и из каждой зоны в режиме импульсного доплера извлечена максимальная по модулю скорость. За максимальную окружную скорость считали среднее между этими двумя скоростями.

Для измерения профиля осевой и окружной скорости ультразвуковой датчик устанавливался так же, как и при измерении максимальных скоростей: под углом 60° к оси сосуда для профиля осевой скорости, под углом 90° для измерения профиля окружной скорости. Центр измерительного объема размером 1 мм последовательно перемещался с известным шагом вдоль диаметра сосуда, и по средней огибающей спектра на каждом шаге измерялось значение скорости, которое приписывалось центру измерительного объема.

В закрученном течении, судя по распределению максимальной осевой скорости, можно выделить два участка: на первом участке максимальная осевая скорость уменьшается вдоль модели сосуда, на втором – увеличивается. Длина первого участка для чисел Рейнольдса Re = 1200-1900 составляет примерно 8 калибров (рис. 1). На первом участке максимальная осевая скорость достаточно быстро уменьшается вдоль оси сосуда, пока центробежная сила является преобладающей в потоке. Второй участок – это участок постепенного восстановления течения, когда центробежная сила становится меньше силы трения.

При удалении от двойного поворота закрутка затухает – максимальная окружная скорость монотонно уменьшается вдоль канала (рис. 2). Сразу за двойным поворотом на расстоянии примерно 6 калибров закрутка затухает наиболее быстро, далее затухание не такое интенсивное.

За двойным поворотом формируется течение с существенно неравномерным профилем осевой скорости (рис. 3), поскольку поток из-за поворота выходит со смещением к внешней стенке. Из-за этого максимум осевой скорости сдвинут от оси к внешней стенке канала. Ниже по течению наблюдается М-образный профиль осевой скорости, характерный для закрученных течений. С удалением от двойного поворота профиль скорости постепенно становится более пологим.

Ещё одна особенность закрученного течения за двойным поворотом – смещенный к внутренней стенке канала центр вихря. Это хорошо видно по полученным ультразвуковым изображениям и по измерениям профиля окружной скорости, которые показывают разного размера участки противоположно направленных скоростей (рис. 4). При удалении от двойного поворота центр вихря смещается к оси сосуда.

В дальнейшем планируется исследовать с помощью метода цветного доплеровского картирования пульсирующее закрученное течение за двойным поворотом.



Рис. 1. Распределение максимальной осевой скорости вдоль модели сосуда



Рис. 3. Профиль осевой скорости для течения со средней скоростью V<sub>cp</sub> = 30 см/с в трех сечениях модели сосуда



Рис. 2. Распределение максимальной окружной скорости со средней скоростью V<sub>cp</sub> = 30 см/с вдоль модели сосуда





#### ЛИТЕРАТУРА:

1. Митрофанова О.В. Гидродинамика и теплообмен закрученных потоков. М.:Физматлит, 2010. 288 с. 2. Куликов В.П., Кирсанов Р.И., Засорин С.В. Допплерографическая регистрация феномена винтового движения крови в общих сонных артериях у людей // Ультразвуковая и функциональная диагностика № 2, 2006, С. 96 – 100.

3. Куликов В.П., Кирсанов Р.И. Метод измерения скорости кровотока в артериях человека. Патент RU № 2380040, 27.07.2008.

4. Nakamura M., Wada S., Yokosawa S. et al. Measurement of Blood Flow in the Left Ventricle and Aorta Using Clinical 2D Cine Phase-Contrast Magnetic Resonance Imaging // Journal of Biomechanical Science and Engineering, Vol. 2, No. 2, 2007, P. 46 – 58.

5. Alastruey J., Siggers J., Peiffer V. et al. Reducing the data: Analysis of the role of vascular geometry on blood flow patterns in curved vessels // Phys. Fluids 24, 2012, 24 p.

# ИССЛЕДОВАНИЕ ЗАКРУЧЕННОГО ПУЛЬСИРУЮЩЕГО ТЕЧЕНИЯ ЗА СКРУЧЕННОЙ ЛЕНТОЙ УЛЬТРАЗВУКОВЫМ ДОПЛЕРОВСКИМ МЕТОДОМ

Сердечно-сосудистая система человека настолько сложный объект, что описать все ее законы, оставаясь в какой-либо одной области (механики, биологии, химии), просто невозможно. Гидродинамика предлагает представление о сердечно-сосудистой системе как системе, состоящей из сердца - насоса и связанных с ним сосудов - эластичных трубок. Несмотря на это упрощенное представление, гидродинамические исследования течений крови в сердце и сосудах помогают находить связи состояния сосудов и характера течения, что способствует изучению развития и диагностики заболеваний сердечно-сосудистой системы. Обнаруженные закрученные течения крови привлекают все больший интерес гидродинамиков, пытающихся объяснить механизмы формирования закрутки и ее роль в жизнедеятельности организма.

Факт закрученного течения крови в организме был подтвержден клинически с помощью рентгеноконтрастной киноангиокардиографии [1], ультразвуковой цветовой допплерографии [2], магнитно-резонансной фазово-контрастной ангиографии [3].

Закрученный характер течения крови обусловлен работой сердца, которое во время выброса крови в аорту совершает небольшое вращение, тем самым закручивая кровоток, а также извитостью сосудов [4]. Извитость сосудов обеспечивает действие центробежной силы, а вместе с пульсирующим характером кровотока она приводит к появлению центробежной неустойчивости течения, вызывая вторичное течение – концентрированный вихрь, который называется закрученным течением. В настоящее время одним из самых распространенных неинвазивных методов для изучения характера кровотока является ультразвуковой доплеровский метод [5]. Суть эффекта Доплера, используемого в медицине, заключается в том, что частота падающей и отраженной от эритроцитов ультразвуковой волны не одинаковая и зависит от скорости движения частиц крови. При их приближении к датчику частота увеличивается, при удалении – уменьшается по сравнению с частотой, излучаемой датчиком. По величине сдвига частоты можно определить скорость движения частиц.

Цель работы – применить ультразвуковой доплеровский метод для исследования закрученного пульсирующего течение в прямой трубке за скрученной лентой.

Задачи работы – исследовать течение и измерить профили осевой и окружной компонент скорости пульсирующего закрученного течения за скрученной лентой в разные моменты времени пульсации и в разных сечениях.

Для исследования пульсирующего закрученного течения была создана экспериментальная установка, которая представляла собой центробежный насос и подсоединенный к нему замкнутый гидравлический контур в виде силиконовой трубки. Насос работал в пульсирующем режиме – кривая расхода показана на рис. 1. Для того чтобы создать закрученное течение, в контур была вставлена скрученная лента, длина которой 2 см, толщина 0.4 мм, угол между входной и выходной кромками 180° (рис. 2). Измерения проводились в прямой трубке диаметром 6 мм и толщиной стенки 1.5 мм, которая была расположена после скрученной ленты вниз по потоку и находилась в акустической ванночке, заполненной водой.

Измерения проводились ультразвуковым сканером LogicScan 64 с помощью линейного сосудистого датчика с рабочей частотой 5 МГц. Доплеровского спектр скоростей выводился

в реальном времени на экран компьютера через интерфейс программы EchoWave II. По средней огибающей спектра – кривой, показывающей среднюю в измерительном объеме скорость потока в проекции на ось датчика, записывались значения скорости в моменты пульсации - примерно 0.3 и 0.4 с (рис. 2). Для измерения расхода использовался электромагнитный расходомер. Сигнал, получаемый с электродов расходомера, передавался на АЦП и обрабатывался с помощью компьютера и программы PowerGraph. Жидкость, циркулирующая по контуру, – дистиллированная вода с солью и краской. Соль необходима для работы датчика электромагнитного расходомера, частицы краски – для работы ультразвукового сканера.



Рис. 1. Кривая расхода, полученная с помощью электромагнитного расходомера



Для измерения профиля осевой скорости ультразвуковой датчик закреплялся поперек сосуда под углом 60° к оси трубки. В программе EchoWave II размер измерительного объема устанавливался минимальным (1 мм), а сам измерительный объем помещался на стенку трубки. Далее измерительный объем передвигался вдоль диаметра к противоположной стенке трубки с известным шагом. При этом на каждом шаге проводились измерения осевой скорости по средней огибающей доплеровского спектра в моменты пульсации 0.3 с и 0.4 с. Для измерения профиля окружной скорости датчик закреплялся под углом 90° к оси трубки. Порядок измерений тот же, что и для измерения профиля осевой скорости.

Измерения показали, что за скрученной лентой формируются достаточно сложное течение в виде двух струй жидкости. Это можно заметить по профилю осевой скорости, который имеет два характерных максимума (рис. 3). Структура потока с двумя струями за скрученной лентой сохраняется в течение всей пульсации, при удалении от ленты струи соединяются в один поток (рис. 4).

При относительно сильной закрутке, которая имеет место вблизи от ленты, а также в момент максимальной скорости пульсации (0.3 с), профиль окружной скорости имеет несимметричный вид (рис. 5). С уменьшением расхода и с удалением от скрученной ленты закрутка затухает, и профиль становится симметричным (рис. 6).

В дальнейшем планируется продолжить исследования и провести численное моделирование закрученных пульсирующих течений за скрученной лентой.



Рис. 3. Профили осевой скорости в различные моменты пульсации на расстоянии 1,8 см от ленты







Рис. 4. Профили осевой скорости в различные моменты пульсации на расстоянии 7,8 см от



Рис. 6. Профили окружной скорости в различные моменты пульсации на расстоянии 5,8 см от ленты

#### ЛИТЕРАТУРА:

1. Бураковский В.И. Характер потока крови в левом желудочке сердца (экспериментальное исследование) // Экспер. хирургия. – 1976. – №3 – С. 13 – 16.

2. Frazin L.J., Lanza G., Mehlman D. et al. Rotational blood flow in the thoracic aorta // Clin. Res. – 1990. – Vol. 38. – 331 p.

3. Kilner P. J., Yang G.Z., Wilkes A. J. et al. Asymmetric redirection of flow through the heart // Nature. – 2000. Vol. 404. – P. 759 – 761.

4. Каро К., Педли Т., Шротер Р. и др. Механика кровообращения: Пер. с англ. / М.: Мир, 1981. – 624 с.

5. Осипов Л.В. Ультразвуковые диагностические приборы – М.: Видар, 1999. – 234 с.

#### УДК 532.54

С.Е. Шалыгин, Р.Н. Кулеш, В.Ю. Половников (Томский политехнический университет), С.В. Долгов (МУП «Теплоснабжение»)

# ИССЛЕДОВАНИЕ ХАРАКТЕРИСТИК НОВОГО УНИВЕРСАЛЬНОГО ДРОССЕЛЬНОГО УСТРОЙСТВА

Возросшие требования к надежности регулирующей арматуры и другим техникоэкономическим показателям в различных отраслях промышленности обусловили необходимость постоянного поиска новых конструктивных решений, материалов и технологий изготовления, направленных на создание высоконадежных, долговечных, малошумных дроссельно-регулирующих устройств [1], обладающих необходимыми динамическими характеристиками. Одним из примеров таких устройств являются регулируемые дроссельные шайбы [2–5], которые позволяют быстро и качественно провести наладку сети без разгерметизации всей системы.

С целью создания универсальной, надежной, простой в эксплуатации и изготовлении регулируемой дроссельной шайбы, для оптимизации гидравлических и расходных характеристик транспортируемых сред трубопроводных систем разработана новая конструкция [5] рассматриваемой регулирующей арматуры (рис. 1). Для выявления границ возможного применения предлагаемого устройства в различных отраслях промышленности, была поставлена задача экспериментального исследования характеристик регулируемой дроссельной шайбы. Эксперименты проводились на лабораторном стенде. В качестве рабочей среды использовали водопроводную воду.



Рис. 1. Регулируемая дроссельная шайба: 1 – корпус, 2 – проходные отверстия, 3 – регулировочный болт, 4 – сальниковый болт, 5 – сальниковая набивка

Коэффициент гидравлического сопротивления  $\xi$  рассчитывался по формуле [6]:

$$\xi = \frac{g\Delta h}{V^2/2},$$

где g – ускорение свободного падения, м/с<sup>2</sup>;  $\Delta h$  – разность высот столбов жидкости, м; V – скорость в трубе, м/с.

Анализ результатов исследований позволяет сделать закономерный вывод о том, что с увеличением количества открытых отверстий, а следовательно, и с увеличением суммарной площади проходного сечения, коэффициент гидравлического сопротивления снижается. Так, для отверстий 1...9 (рис. 2) диапазон изменения коэффициента гидравлического сопротивления  $\xi$  составляет от 21138 до 670 (доверительный интервал ± (8–10 %)). Также следует отметить, что при регулировании расхода газовой среды (CH<sub>4</sub>) анализ среды на

загазованность в пределах установленной шайбы подтвердил отсутствие содержания CH<sub>4</sub> в воздухе, что характеризует универсальность применения регулируемой дроссельной шайбы для различных сред.



Рис. 2. Результаты исследования коэффициента гидравлического сопротивления (цифрами обозначено количество открытых отверстий)

За счет сравнительной простоты и универсальности предложенного устройства, можно сделать вывод о перспективности его применения для регулировки расхода жидкостей или газов в различных системах.

Для более глубокого анализа характеристик предлагаемой регулируемой дроссельной шайбы необходимо проведение дальнейших экспериментальных исследований устройства в широком диапазоне изменения геометрических характеристик и расходов рабочей среды.

Следует отметить, что в настоящее время проводятся испытания шайбы на производстве в МУП «Теплоснабжение» г. Нижневартовска. Предварительные результаты этих испытаний подтверждают описанные выше положения и свидетельствуют о целесообразности применения шайбы в системах теплоснабжения.

#### ЛИТЕРАТУРА:

1. Манюк В.И., Каплинский Я.И., Хиж Э.Б., Манюк А.И. Наладка и эксплуатация водяных тепловых сетей: справочник. М.: Стройиздат, 1988. 432 с.

2. Дроссельная шайба: авторское свидетельство 779700 СССР. № 2697255; заявл. 13.12.1978; опубл. 15.11.1980, Бюл. № 42. 2 с.

3. Дроссельная шайба: авторское свидетельство 429237 СССР. № 1809873/25-8; заявл. 17.07.1972; опубл. 25.05.1974, Бюл. № 19. 2 с.

4. Интернет-сервис «Гидравлический расчет тепловой сети». URL: http://www.tesey.listkom.ru / (дата обращения: 12.11.2013)

5. Регулируемая дроссельная шайба: пат. 127140. Рос. Федерация. № 2012147980/12; заявл. 12.11.2012; опубл. 20.04.2013, Бюл. № 11. 2 с.

6. Идельчик И.Е. Справочник по гидравлическим сопротивлениям. М.: Машиностроение, 1975. 559 с.

# РАСЧЕТ СТРУЙНОГО ИСТЕЧЕНИЯ ЖИДКОСТИ ИЗ МОДЕЛИ ПОВРЕЖДЕННОЙ ВЕНЫ В СИМУЛЯТОРЕ ВНУТРЕННЕГО КРОВОТЕЧЕНИЯ

Предсказание развития внутреннего кровотечения для установления необходимости хирургического вмешательства представляет одну из задач виртуальной хирургии (virtual surgery) – относительно новой практической области, возникшей на стыке медицинских знаний и знаний, связанных с математическим моделированием физических явлений [1]. В виртуальной хирургии используются современные численные методы расчета сложных процессов при внутренних кровотечениях – например, метод SPH (Smooth Particle Hydrodynamics), дающий возможность в широком диапазоне механических свойств моделировать протекание крови через ткани [1, 2]. С другой стороны, для определения параметров внутреннего кровотечения возможно применение ультразвука. Методы ультразвукового воздействия позволяют измерять скоростные характеристики течений жидкостей и широко применяются для исследования течений крови в медицинских целях [3]. Предполагается, что совместное применение ультразвуковых измерений, медицинской информации и численного моделирования может помочь в решении задач виртуальной хирургии.

В настоящее время разрабатывается устройство, называемое симулятором внутреннего кровотечения. Принцип работы симулятора заключается в создании движения моделирующей кровь жидкости, качественно схожего с движением крови при настоящем внутреннем кровотечении. Основное предназначение симулятора – отработка методики применения ультразвуковых измерений к диагностике внутренних кровотечений. Устройство представляет собой модель кровеносного сосуда с повреждением стенки, помещенную в модель окружающей сосуд ткани. На данном этапе разработки симулятора можно отказаться от модели окружающей ткани в пользу более простой модели гематомы. Гематомой обычно называют область вокруг повреждения сосуда, заполненную кровью, где не присутствует ткань. Образование гематомы характерно для широкого класса внутренних кровотечений. Моделью гематомы может служить полость вокруг повреждения, ограниченная однородным пропускающим материалом.

что симулятор позволит моделировать режимы Предполагается, внутреннего кровотечения. различающиеся по геометрии сосуда и гематомы, а также по гидродинамическим характеристикам течения – расходу в кровеносном сосуде, расходу крови через повреждение, пульсациям расхода (обычно интенсивные пульсации характерны для артериального кровотока, а в венозном кровотоке они малозаметны). Симулятор должен создавать образцовые течения с известными гидродинамическими полями для сопоставления с результатами ультразвуковых измерений. Наша задача состояла лишь в разработке методики поиска образцовых решений для характерного режима работы симулятора. Для численное моделирование, этой цели использовалось как наиболее доступный, информативный и точный метод.

Была построена вычислительная модель стационарного течения в симуляторе внутреннего кровотечения, характерная для венозного кровотока. Трехмерная геометрия модели изображена на рис. 1. Рассматривается прямой канал круглого сечения длиной L и диаметром d (толщина стенки канала не учитывается). Модель повреждения стенки канала имеет форму эллипса с осями a и b с центром, принадлежащим центральному сечению

канала, при этом ось *а* направлена параллельно оси канала. Гематома имеет форму сферы диаметром *D* с центром, совпадающим с центром канала.



Рис. 1. Геометрия расчетной области







Рис. 3. Поля безразмерной величины скорости: а) – сетка G1, б) – сетка G4







Рис. 5. Визуализация течения

Введем также следующие обозначения:  $g_1$  – входной расход в канале,  $g_2$  – расход через моделирующее повреждение отверстие,  $g_3$  – расход через поверхность сферы, S – площадь поверхности сферы,  $V_n$  – нормальная к поверхности сферы составляющая скорости,  $V_{in}$  – средняя скорость на входе в канал. В силу стационарности задачи  $g_2 = g_3$ . Принимается условие постоянства удельного расхода по поверхности сферы, эквивалентное условию  $V_n = g_2/S$ . Касательная к поверхности сферы составляющая скорости принимается равной нулю.

Для фиксированной геометрии безразмерными критериями подобия, полностью характеризующими течение, являются соотношение расходов  $g_2/g_1$  и число Рейнольдса Re, которое определим как  $Re = V_{in}d/v$ , где v – коэффициент кинематической вязкости жидкости.

Рассчитывался режим течения, характеризующийся следующими определяющими параметрами: Re = 300; a = d; d/D = 0.12; a/b = 1.5; L/D = 3;  $g_2/g_1 = 0.3$ . Такой выбор параметров модельной задачи обусловлен характерными биологическими масштабами и соответствует, например, течению крови в симуляторе для канала диаметром d = 6 мм со скоростью на входе  $V_{in} = 200$  мм/с при диаметре гематомы D = 50 мм.

Решение поставленной задачи производилось по схемам второго порядка аппроксимации уравнений движения несжимаемой жидкости с использованием конечнообъемного пакета Fluent 6.3.26 [4]. Построение геометрии и разработка сеток выполнены средствами программы Gambit 2.4.6 [5]. Были построены четыре различные сетки, названные G1, G2, G3, G4. Все четыре сетки имеют схожую структуру в канале, где дискретизация преимущественно структурированная. G1 – неструктурированная во всем объеме гематомы грубая сетка (см. рис. 2а), количество ячеек ~ 600 тыс. G2 – также неструктурированная во всей гематоме, но более мелкая, и имеет одинаковые элементы, количество ячеек ~ 4 млн. G3, G4 (см. рис. 2б) – сетки, имеющие конусовидную структурированную часть в гематоме, количество ячеек: G3 ~ 2 млн., G4 ~ 1 млн. G4 – наиболее аккуратная и рациональная сетка.

Решение на сетке G1 позволило сделать выводы о струйном характере течения в небольшом объеме гематомы и о малоинтенсивном течении в основном объеме гематомы (см. рис. 3а). Была разработана методика построения сеток, имеющих крупные ячейки в области малоинтенсивного течения, но обеспечивающих подробное разрешение в структурированном конусовидном блоке, ограничивающем область интенсивного струйного течения, построенном по данным грубого решения (см. рис. 2б). Поле скорости для решения на сетке G4 изображено на рис. 3б.

На рис. 4 показаны результаты исследования сеточной зависимости решения. Решения на сетках G3 и G4 достаточно близки. Это говорит о том, что нам удалось получить достаточно точное решение модельной задачи и отработать методику построения сеток для подобных задач. Трехмерная визуализация решения с использованием линий тока представлена на рис. 5. В дальнейшем планируется построить более точную вычислительную модель симулятора, учитывающую толщину стенки канала, подробнее отработать вопрос о протекании жидкости через границу гематомы и рассмотреть нестационарную задачу.

#### ЛИТЕРАТУРА:

1. Yang C., Guo J., Han J., et al. Coupled Tissue Bleeding Simulation in Virtual Surgery / Lecture Notes in Computer Science. Volume 7995, 2013, P. 331 – 338.

2. Zatoniy J., Paget R., Szekely G., et al. Real-time Synthesis of Bleeding for Virtual Hyseroscopy / Lecture Notes in Computer Science. Volume 2878, 2003, P. 67 – 74.

3. Shung K. Ultrasound: Past, Present and Future / The Third International Conference on the Development of Biomedical Engineering in Vietnam IFMBE Proceedings Volume 27, 2010, P. 10 - 13.

4. FLUENT 6.3 User's Guide. Fluent Inc., 2006.

5. GAMBIT 2.4 User's Guide. Fluent Inc., 2007.

### ИССЛЕДОВАНИЕ ВОЗМОЖНОСТЕЙ МЕТОДА ЧАСТИЧНОГО ОСРЕДНЕНИЯ УРАВНЕНИЙ НАВЬЕ-СТОКСА

Широко признано, что гибридные RANS-LES подходы к моделированию турбулентных течений обеспечивают разумный компромисс между точностью расчета и вычислительными затратами [1]. В то время как одни подходы, такие как DES и SAS, к настоящему времени хорошо изучены и широко распространены, другие пока остаются в тени. К последним относится, в частности, метод частичного осреднения уравнений Навье-Стокса (Partially-Averaged Navier-Stokes, PANS), предложенный Girimaji [2].

В нем, в отличие от традиционного LES, разделение турбулентных пульсаций на разрешенную и моделируемую части не определяется шагом сетки, а задается управляющим параметром метода – соотношением моделируемой и полной кинетических энергий турбулентности  $f_k = k_u/k$ . Следуя этому принципу, авторы разработали методику получения уравнений для характеристик моделируемой турбулентности на базе любой полуэмпирической модели с двумя уравнениями. Меняя в полученных уравнениях параметр  $f_k$ , можно регулировать степень разрешения от RANS ( $f_k = 1$ ) до DNS ( $f_k = 0$ ).

Поскольку в оригинальном методе  $f_k$  не связано с шагом сетки, при использовании PANS возникает проблема выбора этого параметра. Очевидно, что количество турбулентных пульсаций, которые могут быть разрешены, ограничено шагом сетки, поэтому в [3] была предложена формула для оценки минимально допустимого для данной сетки значения  $f_k$ :

 $f_k = C(\Delta/\Lambda)^{2/3}$ , (1) где  $\Lambda = k^{1.5}/\epsilon$  – линейный масштаб турбулентности, основанный на полных кинетической энергии турбулентности и диссипации,  $\Delta$  – минимальная сторона ячейки, С – константа, требующая калибровки.

Следует отметить, что использование формулы (1) в практических расчетах сопряжено с трудностями, поскольку поле масштаба турбулентности не может быть получено на основе моментальных характеристик потока. Для его определения необходимо либо проводить предварительный RANS расчет, который может дать неточный результат, либо применять какое-либо осреднение, что сильно усложнит технологию расчета.

Таким образом, вопрос выбора  $f_k$  является ключевым при использовании PANS. Целью данной работы является исследование зависимости результатов PANS от выбора параметра  $f_k$  на примере базовых задач: задачи о вырождении однородной изотропной турбулентности и о развитом течении в плоском канале.

Для исследований была выбрана *k*-*w* версия PANS [4]:

$$\frac{\partial k_u}{\partial t} + U_j \frac{\partial k_u}{\partial x_j} = P_u - \beta^* k_u \omega_u + \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \frac{\nu_u}{\sigma_{ku}} \frac{\partial k_u}{\partial x_j} \right), \tag{2}$$

$$\frac{\partial \omega_u}{\partial t} + U_j \frac{\partial \omega_u}{\partial x_j} = \alpha \frac{P_u \omega_u}{k_u} - \beta' \omega_u^2 + \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \frac{v_u}{\sigma_{\omega u}} \frac{\partial \omega_u}{\partial x_j} \right).$$
(3)

Здесь  $P_u = \left( v_u \left( \frac{\partial U_i}{\partial x_j} + \frac{\partial U_j}{\partial x_i} \right) - \frac{2}{3} k_u \delta_{i,j} \right) \frac{\partial U_i}{\partial x_j}$  – генерация моделируемой кинетической энергии  $k_u$ ,  $v_u = k_u \omega_u$  – турбулентная вязкость,  $\omega_u = \varepsilon_u (\beta^* k_u)$  – моделируемая удельная диссипация,  $\beta' = \alpha \beta^* - (\beta - \alpha \beta^*) f_\omega$ ,  $\sigma_{ku}$ ,  $\sigma_{\omega u}$  – коэффициенты диффузии.

Фильтрационные параметры k- $\omega$  версии PANS представляют собой долю моделируемой кинетической энергии  $f_k = k_u/k$  и моделируемой удельной диссипации

 $f_{\omega} = \omega_u / \omega$ . Заметим, что последняя величина может быть выражена через долю истинной диссипации  $f_{\varepsilon} = \varepsilon_u / \varepsilon$  следующим образом:  $f_{\omega} = \omega_u / \omega = (\varepsilon_u / (\beta^* k_u)) / (\varepsilon / (\beta^* k)) = f_o / f_k$ . Согласно [3], при высоких числах Рейнольдса, когда энергосодержащие и диссипативные масштабы сильно отличаются,  $f_{\varepsilon} = 1$  (что соответствует  $f_{\omega} = 1/f_k$ ), а коэффициенты диффузии модифицируются:  $\sigma_{ku} = \sigma_k f_k^2$ ,  $\sigma_{\omega u} = \sigma_{\omega} f_k^2$ .

Наконец, константы модели равны  $\beta^* = 0.09$ ,  $\alpha = 5/9$ ,  $\beta = 0.075$ ,  $\sigma_k = 2.0$ ,  $\sigma_{\omega} = 2.0$ .

Все расчеты были проведены в NTS коде [5] с использованием центральноразностной схемы Роджерса-Квака четвертого порядка для конвективных слагаемых.

Задача о вырождении однородной изотропной турбулентности (ВОИТ) рассматривалась при условиях, соответствующих эксперименту Comte-Bellot & Corrsin [6]. Начальное поле скорости соответствовало экспериментальному спектру  $E_0(k)$  [6], а для турбулентных характеристик задавались однородные поля  $k_u = f_k K_0$  и  $\omega_u = f_{\varepsilon} \varepsilon_0 / (\beta^* k_u)$ 

$$(K_{0} = \int_{-\infty}^{+\infty} E_{0}(k) dk, \varepsilon_{0} = \int_{-\infty}^{+\infty} 2\nu k^{2} E_{0}(k) dk)$$

Первая серия расчетов была проведена на сетке  $32^3$ , шаг которой позволяет разрешить пульсации, содержащие примерно 60% кинетической энергии турбулентности. Результаты расчетов (рис. 1) показали, что параметр  $f_k$  существенно влияет на результат, а наилучшее совпадение с экспериментальными данными было получено при  $f_k = 0.4$ , т.е. при значении, соответствующем рассматриваемой сетке. На основе этого расчета была определена константа C = 0.9 в формуле (1).



Рис. 1. Сравнение результатов расчета ВОИТ по методу PANS, полученных на сетке  $32^3$  при различных  $f_k$  с данными расчета по модели Смагоринского и экспериментом: энергетический спектр в момент времени T = 2 (а), эволюция энергии (b) и турбулентной вязкости (c)

Результаты PANS расчетов на сетках  $64^3$  и  $128^3$  с параметром  $f_k$ , определенным по формуле (1) (0.25 и 0.16 соответственно) близки к эксперименту и расчетам по модели Смагоринского (рис. 2), что подтверждает справедливость формулы (1). Следует, однако, отметить, что турбулентная вязкость падает в методе PANS несколько медленнее, чем при использовании модели Смагоринского (см. рис. 1 и рис. 2).

Для расчета развитого течения в плоском канале ( $\text{Re}_{\tau} = 395$ ) использовалась сетка 81×81×61, сгущенная в направлении стенок, с размером первой пристенной ячейки  $\Delta y^+ = 0.3$ . Оценка  $f_k$  по формуле (1) показала, что для такого течения на рассматриваемой сетке  $f_k \approx 0.2$ . Результаты расчета методом PANS с  $f_k = 0.2$  хорошо согласуются с результатами DNS [7] как по профилю скорости, так и по турбулентным характеристикам (рис. 3).

Таким образом, можно констатировать, что выбор параметра  $f_k$  существенно влияет на результаты расчетов. Оптимальное значение  $f_k$  зависит как от используемой сетки, так и от макромасштаба турбулентности  $\Lambda$ , что создает сложности при его определении. И, хотя при

использовании оптимального  $f_k$  результаты PANS для рассмотренных течений обнадеживают, для определения области его применимости требуются дополнительные исследования.



Рис. 2. Сравнение результатов расчета ВОИТ по методу PANS, полученных на сетках 64<sup>3</sup>, 128<sup>3</sup>, с данными расчета по модели Смагоринского и экспериментом: энергетический спектр в момент времени *T* = 2 (а), эволюция энергии (b) и турбулентной вязкости (c)



Рис. 3. Результаты расчета по методу PANS установившегося течения в канале при Re<sub>т</sub> = 395 в сопоставлении с данными DNS: профиль скорости (а), разрешенные нормальные (b) и касательные (c) напряжения

#### ЛИТЕРАТУРА:

1. Гарбарук А.В., Стрелец М.Х., Шур М.Л. Моделирование турбулентности в расчетах сложных течений. СПб: Изд. Политехн. ун-та, 2012. 88 с.

2. Girimaji S.S. Partially-averaged Navier-Stokes model for turbulence: A Reynolds-averaged Navier-Stokes to direct numerical simulation bridging method // Journal of Applied Mechanics-Transactions ASME, 2006, 73(3), P. 413 - 421.

3. Girimaji S.S., Abdol-Hamid K.S. Partially-Averaged Navier-Stokes model for Turbulence: Implementation and Validation, AIAA Paper 2005-0502, 2005.

4. Lakshmipathy S., Girimaji S.S. Partially-averaged Navier-Stokes method for turbulent flows: k-ω model implementation. AIAA Paper 2006-119, 2006.

5. Strelets M.K. Detached Eddy Simulation of Massively Separated Flows. AIAA Paper 2001-0879, 2001.

6. Comte-Bellot G., Corrsin S. Simple Eulerian time correlation of full- and narrow-band velocity signals in grid-generated, 'isotropic' turbulence // J. Fluid Mech., 1971, vol. 48, P. 273 – 337.

7. Moser R.D., Kim, J., Mansour, N.N. Direct numerical simulation of turbulent channel flow up to  $Re_{\tau} = 590$ , Physics of Fluids, 1999, vol. 11, P. 943 – 945.

# ИССЛЕДОВАНИЕ ГИДРОДИНАМИЧЕСКИХ ХАРАКТЕРИСТИК НОВОГО ПОЛНОПРОТОЧНОГО ИСКУССТВЕННОГО КЛАПАНА СЕРДЦА

Восстановление замыкательной и пропускной функции патологически измененного клапана сердца человека возможно путем его замещения протезом или трансплантантом. Сердце содержит два близких по строению входных клапана (митральный и трикуспидальный) и два схожих выходных (аортальный и пульмональный) клапана.

Существует два основных вида искусственных клапанов сердца: механические и биопротезы. Представителя каждого вида обладают как преимуществами, так и недостатками. Основными недостатками механических искусственных клапанов сердца является тромбообразование за счет взаимодействия физиологического потока с искусственными материалами конструкции клапана [1]. Главным недостатком биологических протезов является их недолговечность, причинами которой выступает тканевая дегенерация и кальцификация створок из-за деформации биологической ткани [2]. Основные требования, предъявляемые к искусственным клапанам сердца: надежность протеза должна обеспечивать долговечность его работы в течение жизни пациента; гемодинамические свойства протеза должны быть близки к естественным и сохраняться во времени (поток должен быть ламинарным, запирающий элемент должен обладать минимальной инерционностью, сопротивление и регургитация на протезе должны быть не выше, чем у естественных клапанов). Клапаны должны быть биоинертными, не травмировать форменные элементы крови, обладать минимальным объемом и массой, быть удобными для хирурга при имплантации в любых анатомических условиях [3].

Проведены испытания двух клапанов сердца: естественного необработанного аортального клапана (гомографта) и нового двухстворчатого механического искусственного клапана сердца Мединж-СТ, относящиеся к новому типу полнопроточных клапанов, первые имплантации которых проведены в 2012 – 2013 гг. [4]. В ходе испытаний исследованы их гидродинамические характеристики и кинематика работы створок.

Исследования проводились на пульсдубликаторе кафедры гидроаэродинамики СПбГПУ. Гидродинамический стенд предназначен для испытаний механических искусственных клапанов сердца, гомографтов, каркасных и бескаркасных биопротезов в митральной и аортальной позициях, а также визуализации движения жидкости и запирающих элементов клапана с помощью видеосъемки. Пульсирующий поток создается в эластичной камере, моделирующей размеры и форму левого желудочка сердца. Задающим устройством является источник пульсирующего давления. Величина и форма кривых давления приближены к физиологическим, ударный объем изменяется от 50 до 180 мл. В качестве рабочей жидкости используется вода.

Экспериментальный стенд оснащен измерительно-вычислительным комплексом, который включает в себя измерительные преобразователи (медицинские тензодатчики давления, которые применяются для инвазивного измерения давления, датчик перепада давлений, датчики 4-х канального электромагнитного расходомера MF-46 (Nihon Konden)), системы визуализации элементов клапана (видеокамера Sony Nex-5N), компьютер с устройствами ввода сигналов датчиков и изображений (12-ти битный аналого-цифровой преобразователь L-154 (L-Card)), а также компьютерные программы вывода и обработки данных (PGraph, MovaviVideo, EchoWaveII).

Программа испытаний клапанов включала измерение пульсирующего расхода через

клапан Q(t) и давлений в камерах желудочка  $P_{x}(t)$ , аорты  $P_{a}(t)$ , перепада давлений  $\Delta P(t) = P_{x}(t) - P_{a}(t)$ . Синхронно с измерением пульсирующих давлений и расхода проводилась видеорегистрация движения створок со стороны выхода клапана через оптическое окно при стандартных условиях работы сердца, находящегося в покое: частота сокращений 70 уд/мин, ударный объем 70 мл, средний расход 300 мл/с.

Расчет площади открытия створок клапана проводился с помощью программы MovaviVideo, которая разделяла видеозапись пульсаций работы клапана по кадрам. Полученные изображения обрабатывались в программе ImagePro: для определения площади открытия створок клапана обводились свободные кромки створок в последовательные фазы их работы (рис. 1). Программа рассчитывала площадь, заключенную в этот контур.



Рис. 1. Визуализация движения створок двухстворчатого полнопроточного протеза клапана сердца Мединж-СТ (верхний ряд) и гомографта (нижний ряд)

Результаты проведенного эксперимента сопоставлены с литературными данными [5] для трех современных моделей искусственных клапанов сердца: механического двухстворчатого St. Jude Medical Regent<sup>TM</sup> (SJM), каркасного биопротеза Edwards Perimount Model 2800 (EP) и механического трехстворчатого Lapeyre Industries Triflo (Triflo). Испытания проводились на гидродинамическом стенде фирмы VivitroLabs. Площадь открытия клапанов в течение цикла сокращений регистрировалась оптическим сенсором, на котором фокусировался прошедший через клапан световой поток.

На рис. 2 изображены зависимости площадей открытия створок от времени (Q = 300 мл/c). Площади открытия обезразмерены на площадь посадочного отверстия протеза  $(S_{noc})$ , равного площади фиброзному кольцу гомографта при интрааннулярной имплантации искусственного клапана. В качестве масштаба времени  $(T^+)$  используется время, открытого состояния створок клапана. Видно, что площади открытия протезов составляют примерно половину площади открытия гомографта, оставшуюся часть площади фиброзного кольца гомографта занимает кольцо корпуса искусственного клапана. Систолическое перемещение створок гомографта можно разделить на пять периодов: подготовительный период к открытию, быстрое открытие, пик открытия, устойчивое открытие, быстрое закрытие. Динамика открытия створок клапана Мединж-СТ близка к работе естественного клапана – наблюдается пиковое увеличение площади, призакрытие и плавное закрытие створок. В отличие от него двухстворчатый протез SJM характеризуется отсутствием пика открытия и более коротким временем закрытия створок.

Оценка сопротивления протеза Мединж-СТ при двух способах имплантации проводится по индексу производительности  $PI = (Q/S)(\rho/2\Delta P)^{0.5}$ , где  $\Delta P$  – средний прямой перепад давления,  $\rho$  – плотность жидкости, Q – средний прямой расход, S – площадь проходного отверстия (S<sub>0</sub>) протеза при супрааннулярной имплантации или площадь, построенная по внешнему диаметру манжеты клапана (S<sub>noc</sub>), при интрааннулярной имплантации. Средний прямой расход обезразмерен на значение, соответствующее стандартному режиму работы сердца без нагрузки (300 мл/с). Индекс производительности протеза Мединж-СТ при интрааннулярной имплантации индексы производительности механического протеза и гомографта близки (рис. 3). В первом случае каркас протеза расположен внутри фиброзного кольца аортального клапана, а во втором – над ним.



Рис. 2. Зависимость безразмерной площади открытия клапанов от времени



Таким образом, испытания показали, что клапан Мединж-СТ близок к естественному по кинематике работы створок, а при супрааннулярной имплантации и по сопротивлению.

Работа выполнена в рамках проекта УМНИК 10011R/16805 от 01.02.2012 Фонда содействия развитию малых форм предприятий в научно-технической сфере.

#### ЛИТЕРАТУРА:

1. Sun J.C.J, Davidson M.J, Lamy A., Eikelboom J.W. Antithrombotic management of patients with prosthetic heart valves: current evidence and future trends // Lancet, 2009, Vol. 374, P. 565 – 576.

2. Simionescu D.T. Prevention of calcification in bioprosthetic heart valves: challenges and perspectives // Expert Opin. Biol. Ther., 2004, Vol.4, №12, P. 1971 – 1985.

3. Орловский П.И., Гриценко В.В., Юхнев А.Д. и др. Искусственные клапаны сердца / Под ред. акад. РАМН Ю.Л. Шевченко. СПб.: ЗАО «Олма-медиа групп», 2007. 448 с.

4. Бокерия Л.А., Бокерия О.Л., Фадеев А.А. и др. Оценка конструктивного стеноза механических клапанов сердца у взрослых в аортальной позиции: преимущество полнопроточного протеза клапана сердца // Вестник РАМН, 2013, №3, С. 51 – 58.

5. Scotten L.N., Siegel R. Importance of Shear in Prosthetic Valve Closure Dynamics // J. Heart Valve Dis., 2011, Vol.20, №6, P. 664 – 672.

### РАСЧЕТ ТУРБУЛЕНТНОГО ОБТЕКАНИЯ ПОЛОГО КРЫЛОВОГО ПРОФИЛЯ С ЗАТЕКАНИЕМ ПОТОКА ВО ВНУТРЕННЮЮ ПОЛОСТЬ

В работе рассматривается задача о турбулентном обтекании полого крылового профиля. Задачи такого рода встречаются, например, при проектировании крыльев конструкции «парафойл». Парафойл – это мягкое тканевое оболочковое крыло, надувающееся через воздухозаборники набегающим потоком воздуха для создания несущего каркаса и заданной при проектировании аэродинамической формы. Крылья конструкции «парафойл» весьма распространены и встречаются в таких средствах передвижения, как парапланы и кайты.

Цель исследования – провести расчеты турбулентного обтекания профиля кайта конструкции «парафойл», подробно описанного в [1], для определения его основных аэродинамических характеристик с учетом затекания потока через воздухозаборник во внутреннюю полость. Задача работы – найти угол атаки в зените (нейтральный угол атаки), при котором все силы, действующие на профиль, находятся в равновесии.

При характерной скорости ветра 10 м/с число Рейнольдса составляет  $0.9 \times 10^6$ . Для моделирования турбулентности использовалась высокорейнольдсовая модель k- $\omega$  [2] с обобщенными пристенными функциями.



Рис. 1. Расчетная область и сетка

Расчеты выполнялись на многоблочной сетке, которая состояла из четырех блоков (рис. 1). Блок №1 представляет собой внешнюю область, на его внешних линиях задаются граничные условия. Дуга AB – вход в область при угле атаки  $\alpha = 0^{\circ}$ . Для остальных углов атаки часть дуги остается входом, а другая, в зависимости от угла атаки, становится выходной границей. На AD при  $\alpha = 0^{\circ}$  задается мягкое граничное условия, в других случаях граница AD является входной. ВС и CD – выходные границы. Блок №2 используется для

получения более точных данных о течении вблизи профиля, и позволяет разрешить течение в пограничном слое. Блок №3 введен как связующий блок для частей блока №1, и включает область следа позади профиля. Блок №4 представляет собой внутренний блок профиля, где EF – линия воздухозаборника.

На входных границах были заданы параметры однородного потока: безразмерная скорость |U| = 1, интенсивность турбулентности Tu = 0,01% и отношение турбулентной вязкости к молекулярной 12,6.

Расчеты проводились с использованием исследовательского программного пакета общего назначения FLOS [3], разработанного на кафедре гидроаэродинамики СПбГПУ. Программный пакет FLOS для численного решения системы уравнений Навье-Стокса использует метод конечных объемов.

При исследовании сеточной независимости решения, оказалось, что измельчение сетки не приводит к ожидаемому повышению точности расчетов, но вызывает появление новых вихрей внутри профиля. Это связано с тем, что измельчение сетки позволяет разрешить возмущения в потоке, для чего на более грубой сетке не хватало детализации. Новые возмущения в свою очередь влияют на весь поток, что приводит к увеличению количества вихрей, и изменению поведения потока в целом. Это также было показано в работе [4].

Расчеты проведены для значений α от 0° до 10°, с шагом в 1°. Для контроля сходимости использовался мониторинг невязок, кроме того контролировался баланс расхода между входной и выходной границами, который для окончательных решений не превышал уровень 0,004%. Для визуализации течения использовалась программа Tecplot.



Рис. 2. Линии тока внутри и снаружи профиля при разных углах атаки

На рис. 2 показаны картины течения в окрестности профиля и во внутренней полости для разных значений α. Картина внешнего безотрывного обтекания слабо меняется при изменении направления внешнего потока, смещается только лобовая критическая точка. Для

течения внутри профиля характерно медленное по отношению к скорости набегающего потока вращение жидкости с образованием цепочки рециркуляционных зон. При небольших значениях угла атаки поток практически не затекает внутрь. При  $\alpha = 4^{\circ}$  поток из внешней области инициирует в полости профиля появление нового вихря. С ростом угла атаки новый вихрь вблизи воздухозаборника увеличивается в размерах и становится самым большим, так что при  $\alpha > 8^{\circ}$  направление циркуляции жидкости в левой части полости меняется на противоположное.

Отмечено, что при углах атаки 6° и 7° поток наименее стабилен: происходит перестроение течения, что, в свою очередь, может сказаться на форме профиля, так как в реальности это не твердая стенка, а эластичная непроницаемая ткань.



Рис. 3. Аэродинамическое качество в зависимости от угла атаки

Проанализированы интегральные характеристики профиля кайта. На основе коэффициентов лобового сопротивления и подъемной силы определен наиболее выгодный угол атаки, который составил 8° (рис. 3). Также проведено сравнение с результатами программы XFLR5, разработанной в Массачусетском технологическом институте [5], с помощью данной программы определялись характеристики цельного профиля без внутренней полости. Как видно из рис. 3, результаты при  $\alpha > 6^{\circ}$  градусов заметно отличаются друг от друга, что связано с менее качественной аэродинамической конструкцией профиля с воздухозаборником.

Анализ течения при наличии воздухозаборника в области внутри профиля показал, что сложения профиля не произойдет из-за большого давления внутри. Однако наличие вихревых структур может привести к волнообразным изменениям поверхности профиля, а для минимизации такого волнового эффекта необходимо тщательно продумать строповую систему креплений, которая будет держать ткань в достаточном натяжении.

#### ЛИТЕРАТУРА:

1. Денисов Г.К. Конструирование кайта NH-3 / Отчет по практике. Кафедра гидроаэродинамики СПБГПУ. 2012. 23 с.

2. Wilcox D.C. A two-equation turbulence model for wall-bounded and free-shear flows // AIAA Paper, AIAA-93-2905, 1993.

3. Смирнов Е.М., Зайцев Д.К. Метод конечных объемов в приложении к задачам гидрогазодинамики и теплообмена в областях сложной геометрии // Научно-технические ведомости СПбГПУ, №2 (36), 2004, С. 70 – 81.

4. Левченя А.М., Смирнов Е.М. Численное моделирование трехмерного потока, обтекающего круговой цилиндр в области его сочленения с гладкой стенкой // В кн.: Всероссийский семинар по аэрогидродинамике, посвященный 90-летию со дня рождения С.В. Валландера: избранные труды всероссийского семинара, СПб, 2008. С. 64 – 69.

5. Xfoil с интерфейсом XFLR5 v6.07. Описание функциональных возможностей программы, руководство пользователя. http://www.xflr5.com/xflr5.htm (дата обращения: 15.11.2013).

### РАСЧЕТ ОБТЕКАНИЯ ВЯЗКОЙ ЖИДКОСТЬЮ ПЕРЕДНЕЙ КРОМКИ ПРОДОЛЬНО ОБТЕКАЕМОЙ ПЛАСТИНЫ

Объектом исследования в данной работе является ламинарный участок пограничного слоя, развивающегося на плоской пластине. Цель работы – провести расчеты обтекания потоком вязкой жидкости начального участка пластины конечной толщины с определенной формой передней кромки при изменении углов атаки в небольшом диапазоне. Интерес в данному исследованию вызван тем, что при проведении лабораторной работы «Экспериментальное исследование пограничного слоя пластине» В малой на аэродинамической трубе кафедры гидроаэродинамики СПбГПУ [1] имеет место заметное рассогласование измеренных профилей скорости на ламинарном участке [2] с теорией Блазиуса [3]. Была выдвинута гипотеза, о том, что на экспериментальные результаты может оказывать заметное влияние угол установки пластины относительно набегающего потока.

На рис. 1 показана схема расчетной области. Рассматривался участок пластины длиной L = 10 см и толщиной h = 0,71 см, при характерной скорости набегающего потока  $V_{in} = 15$  м/с. Форма пластины полностью соответствует используемой в экспериментах [1, 2]. Число Рейнольдса, построенное по величине L, составляет  $10^5$ .



Рис. 1. Рассматриваемый участок пластины (а) и общий вид расчетной области (б)

Система нестационарных уравнений Навье-Стокса решалась численно в безразмерной постановке с использованием гидродинамического пакета FLOS, разработанного на кафедре гидроаэродинамики СПбГПУ [4]. В качестве визуализатора полученного решения применялась программа Tecplot.

На входе в расчетную область AOD задается равномерный профиль скорости, направление которой соответствует углу атаки  $\alpha$ ; были проведены расчеты с углами атаки в диапазоне  $-5^{\circ} \le \alpha \le 5^{\circ}$ . Отметим, что внешние границы расчетной области наклонены под углом 7°, поэтому при любом угле атаки они являются входными. На выходных границах AB, CD задается нормированное давление p = 0. Контур пластинки – твердая стенка, на которой ставится условие прилипания. Размер пристенной ячейки подобран таким образом, чтобы пограничный слой разрешался примерно на 20 ячейках. Обеспечена ортогональность сеточных линий у поверхности пластины.

Расчетная область была составлена из трех блоков, межблочные границы показаны на рис. 1 пунктирными линиями. Наличие трех блоков в окончательном варианте сетки обусловлено тем, что при использовании одно- или двухблочной области на удалении от пластины образуются сильно скошенные ячейки. Выбор размера расчетной области обоснован серией предварительных расчетов: при приближении внешней границе к пластине наблюдалось заметное ускорение потока внутри расчетной области.

В ходе параметрических расчетов показано, что при нулевом значении угла атаки быстрое утолщение ламинарного пограничного слоя на начальном участке пластины приводит к раннему отрыву в области передней кромки. В результате отрыва формируются нестационарные вихревые структуры, которые движутся вдоль пластины вниз по потоку, искажая картину течения и, в частности, влияя на осредненный профиль скорости в пограничном слое. При увеличении угла атаки явления нестационарности и, соответственно, искажение осредненного профиля скорости усиливаются – интенсивные вихри показаны на рис. 2 для  $\alpha = 5^{\circ}$ . Нестационарный отрыв ослабляется при отрицательных углах атаки, так как пограничный слой «прижимается» набегающим потоком к пластине. Отметим, что при всех рассмотренных значениях угла атаки, кроме  $\alpha = -2^{\circ}$  и  $\alpha = -3^{\circ}$ , в окрестности передней кромки пластины образуются замкнутые отрывные зоны.





Рис. 2. Картина завихренности при  $\alpha = 5^{\circ}$ 

Рис. 3. Форма профилей нормированной скорости при различных значениях угла атаки; поперечная координата нормирована на 99% толщину пограничного слоя

На рис. 3 представлены осредненные по времени профили скорости вблизи выходной границы в зависимости от условной толщины слоя для разных углов атаки. Видно, что для неотрицательных значений угла атаки форма профиля заметно отличается от профиля Блазиуса [5]. При отрицательных значениях угла атаки, когда поток направлен к верхней поверхности пластины, возмущения, вносимые внешним потоком, ослабляются, и искажения профиля скорости минимальны.

Полученные в ходе работы результаты можно рекомендовать к использованию в качестве методических указаний к лабораторной работе по общему курсу гидродинамики: при ее проведении следует устанавливать пластину под небольшим отрицательным углом атаки. В таком случае влияние нестационарного отрыва будет минимизирована, а измеренные профили скорости на начальном участке пластины будут соответствовать ламинарному пограничному слою.

#### ЛИТЕРАТУРА:

1. Акатнов Н.И., Повх И.Л., Сизьмина Е.П., Степанянц Л.Г. Руководство к лабораторным работам по общему курсу гидродинамики. 1976. 72 с.

2. Куняшева З.Ф. Исследование пограничного слоя на пластине. Отчет по лабораторной работе. Кафедра гидродинамики СПБГПУ. 2012. 16 с.

3. Лойцянский Л.Г. Механика жидкости и газа. Изд. 7-е. М.: Дрофа, 2003. 840 с.

4. Смирнов Е.М., Зайцев Д.К. Метод конечных объемов в приложении к задачам гидрогазодинамики и теплообмена в областях сложной геометрии // Научно-технические ведомости СПбГПУ, №2 (36), 2004, С. 70 – 81.

5. Шлихтинг Г. Теория пограничного слоя. М.: Наука, 1974. 712 с.

### ПРИМЕНЕНИЕ МНОГОСЕТОЧНОГО МЕТОДА ДЛЯ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ НА СЕТКАХ С ПОЛИЭДРАЛЬНЫМИ ЯЧЕЙКАМИ

Процессы теплопроводности играют исключительно большую роль как в природе, так и в современной технике. В настоящее время задачи теплопроводности в подавляющем большинстве случаев решаются численно.

Применение многосеточных методов позволяет значительно увеличить скорость сходимости итерационного процесса при численном решении задач теплопроводности. Идея метода основывается на использовании для решения задачи нескольких расчетных сеток разного пространственного разрешения. Многосеточные методы широко используются при расчетах на структурированных сетках. Главная трудность применения данного подхода на неструктурированных сетках заключается в построении сеток для грубых уровней. Одним из наиболее перспективных является метод, в рамках которого ячейки мелкой сетки объединяются между собой и образуют меньший набор ячеек, имеющих более сложную (полиэдральную) форму [1]. Вопрос о наиболее эффективном способе агломерации ячеек до сих пор остается открытым и является предметом ряда современных исследований [2-4]. Настоящая работа посвящена сравнению двух способов агломерации неструктурированных сеток с различными типами ячеек (тетраэдральные, призматические, полиэдральные).

В качестве основы для выполнения работы был использован учебный программный код BPS (Basic Parallel Solver), предназначенный для численного решения уравнения теплопроводности на сетках с произвольными полиэдральными ячейками. Аппроксимация уравнений выполнена по методу конечных объемов со вторым порядком точности.

В рамках настоящей работы в коде BPS был реализован многосеточный метод, за основу которого взята так называемая схема полной аппроксимационной памяти (FAS) [1]. Применяется многосеточный V-цикл с одной сглаживающей итерацией после каждой процедуры ограничения и пролонгации и с одной дополнительной итерацией на базовой сетке после окончания многосеточного цикла. Используется линейный оператор ограничения и оператор пролонгации нулевого порядка.

Реализованы два способа агломерации ячеек. Первый способ, предложенный в данной работе, чрезвычайно прост и основывается только на связях между элементами сетки. В нем последовательно просматриваются все внутренние грани расчетной сетки и, если ни одна из двух ячеек, примыкающих к рассматриваемой грани, еще не была объединена с какой-либо другой ячейкой, то эти две ячейки объединяются. Понятно, что при таком способе агломерации могут оставаться необъединенные ячейки, а число ячеек сокращается не более чем в 2 раза.

Второй способ, детально описанный в работе [2], использует дополнительные критерии для повышения качества получаемой сетки. Он состоит из следующих этапов:

0. Создается очередь ячеек, в которую включаются все приграничные ячейки.

1. Ячейка из очереди объединяется с двумя (для двумерного случая) или тремя (для трехмерного случая) соседними ячейками. Если имеется несколько вариантов объединения, то поступаем следующим образом:

- В двумерном случае берем ячейки, которые присоединены к граням, имеющим общее ребро. В трехмерном случае набор из трех граней должен состоять из двух пар граней, имеющих общее ребро.
- Если этому требованию удовлетворяет несколько наборов ячеек, то выбираем тот, который содержит большее количество уже находящихся в очереди ячеек.

- Если вариантов по-прежнему несколько, то выбираем первый из них.

2. Строится вторая очередь, состоящая из ячеек, соседствующих с полученным агломератом. Если в этой очереди есть ячейка, соседствующая не менее чем с двумя ячейками из агломерата, то добавляем эту ячейку в агломерат; иначе переходим к шагу 4. Если подходящих ячеек несколько, то выбираем ту, добавление которой приведет к меньшему значению параметра  $A = S^{3/2}/V$ , где V – объем получаемого агломерата ячеек, S – площадь поверхности ограничивающей агломерат.

3. Если число ячеек, вошедших в агломерат, меньше 3 (двумерный случай) или 7 (трехмерный случай), то возвращаемся к шагу 2; иначе переходим к шагу 4.

4. Ячейки, которые соседствуют с полученным агломератом и еще не были объединены с другими ячейками, добавляются в основную очередь, если они еще не были в нее добавлены. Затем переходим к рассмотрению следующей ячейки из очереди (шаг 1).

Описанный процесс продолжается до тех пор, пока очередь не опустеет. Однако при этом могут остаться необъединенные ячейки и/или агломераты, содержащие слишком мало ячеек. Для решения данной проблемы вводится дополнительная процедура, которая состоит из следующих двух этапов:

5. Добавляем все агломераты, содержащие меньше 2 (двумерный случай) или 4 (трехмерный случай) ячеек, в очередь.

6. Выбранный из очереди агломерат объединяется с соседним агломератом, обеспечивающим наименьшее значение параметра А. Если полученный агломерат попрежнему содержит недостаточное количество ячеек, то шаг 6 повторяется.

Процесс агломерации заканчивается, когда вся очередь будет обработана. При использовании данного способа агломерации общее число ячеек в двумерном случае сокращается примерно в 3 раза, в трехмерном - примерно в 7 раз.

В качестве тестовой задачи было рассчитано поле температуры между двумя концентрическими изотермическими сферами (рис. 1). Коэффициент теплопроводности имеет постоянное значение. Задача решалась в трехмерной постановке; с учетом условий симметрии расчетная область занимала четвертую часть сферического слоя. Аналитическое решение имеет вид: T = (10 - r)/9r.



Рис. 1. Безразмерная постановка задачи

Рис.2. Расчетные сетки а) с тетраэдральными и призматическими ячейками, б) с полиэдральными ячейками

Расчетная сетка создавалась с помощью генератора Gambit. Вблизи стенок использовались призматические ячейки, остальное пространство заполнялось тетраэдрами. Исходная тетраэдральная сетка конвертировалась в полиэдральную средствами пакета Fluent. Расчеты проводились на обеих сетках для сравнения эффективности многосеточного метода. Расчетные сетки представлены на рис. 2, характеристики сеток – в табл. 1.



Табл. 1. Характеристики расчетных сеток

Рис. 3. История сходимости уравнения теплопроводности

На рис. 3 представлена история сходимости для расчетов на обеих сетках, как с применением многосеточного метода с разными способами агломерации, так и без него. Количество сеточных уровней полагалось равным 7 для первого способа агломерации и 3 – для второго, что обеспечивало примерно одинаковое число ячеек на самой грубой сетке (около 500 для тетраэдральной и около 100 для полиэдральной базовой сетки).

Видно, что применение многосеточного метода позволило уменьшить общее время счета примерно в 4 раза в случае тетраэдральной базовой сетки, и примерно в 3 раза в случае полиэдральной. При этом, как при использовании многосеточного метода, так и без него, время расчета на полиэдральной сетке в несколько раз меньше, чем на тетраэдральной, что согласуется с выводами работы [5].

Вопреки ожиданиям, второй способ агломерации в данном случае оказался менее эффективным, чем первый. При более подробном рассмотрении было обнаружено, что, при применении второго алгоритма агломерации, в слоях из тонких призматических ячеек вблизи стенок образуются сильно вытянутые вдоль стенки ячейки, что вполне могло отрицательно сказаться на скорости сходимости.

В целом можно сделать вывод, что применение многосеточного метода позволяет ускорить решение уравнения теплопроводности на неструктурированных сетках в несколько раз даже при использовании простейшего алгоритма агломерации. Потенциально более эффективный алгоритм агломерации [2] требует дальнейшей доработки.

#### ЛИТЕРАТУРА:

1. Mavriplis D. J. Multigrid Techniques for Unstructured Meshes / ICASE Report No 95-27, 1995.

2. Patel A. Development of an adaptive RANS solver for unstructured hexahedral meshes / Ph.D. Thesis, VUB, Brussels, Belgium, March 2003. 266 p.

3. Nishikawa H., Diskin B., Thomas J. L. Critical Study of Agglomerated Multigrid Methods for Diffusion // AIAA Journal, April 2010, Vol. 48, No. 4, P. 839 – 847.

4. Marmignon C., Cantaloube B., et al. Development of an agglomeration multigrid technique in the hybrid solver elsA-H // 7<sup>th</sup> Int. Conf. on Comput. Fluid Dynamics (ICCFD7), Big Island, Hawaii, July 9-13, 2012.
5. Пожилов А.А., Зайцев Д.К. Решение трехмерных задач теплопроводности на сетках с полиэдральными элементами // XLI Неделя науки СПбГПУ: материалы научно-практической конференции. Часть V. СПб.: Изд-во Политехн. ун-та, 2012. 212 с. С. 23 – 25.

## УДК 532.529.6

К.Н. Пялов (Санкт-Петербургский государственный политехнический университет), Н.В. Петров (ФТИ им. А.Ф. Иоффе РАН)

# МОДЕЛИРОВАНИЕ ПОВЕДЕНИЯ КАВИТАЦИОННОГО ПУЗЫРЯ ПРИ ИЗМЕНЕНИИ ВНЕШНИХ ПАРАМЕТРОВ С УЧЕТОМ ЭНЕРГО- И МАССООБМЕНА

Процесс образования пузырей и динамика их поведения играют важную роль как в решении большого круга прикладных задач, так и в фундаментальных исследованиях течения жидкости. Среди многообразия таких задач можно выделить вскипание перегретой жидкости, а также взаимодействие двухфазной пузырьковой среды с ударными волнами.

В данной работе рассматривается пузырь, образованный в результате вскипания жидкости в сильных волнах разрежения при падении давления ниже уровня насыщения и переходе в метастабильное состояние. Критерием дальнейшего поведения пузыря (роста или схлопывания) является отношение его размера и критического радиуса, величина которого определяется поверхностным натяжением и глубиной провала давления ниже уровня насыщения. При уменьшении пузыря давление и температура пара растет, что вызывает его расширение и приводит к пульсациям. Время жизни пузыря зависит от уровня внешнего давления, его внутренней энергии, его размера и интенсивности массо- и энергообмена.

Целью настоящей работы является формулировка математической модели динамики пузыря, разработка алгоритма расчета и его реализация, анализ динамики пузыря. Моделирование динамики кавитационного пузыря является частью более общей задачи описания течения, вызванного подводным взрывом вблизи свободной поверхности. В работе рассматривается кавитационный пузырь, помещенный в бесконечную область, заполненную жидкостью. При описании пузыря было принято несколько допущений: пузырь сохраняет сферическую форму, распределения параметров внутри пузыря (p, T,  $\rho$ ) однородно, пузырь полностью заполнен только парами окружающей его жидкости, состояние пара описывается с помощью уравнения идеального газа.

Для описания динамики пузыря используется система уравнений, приведенная в работе Р.И.Нигматулина [1], состоящая из уравнения баланса массы, баланса энергии и уравнение Рэлея-Плессе, выполняющее роль уравнения баланса импульса [2]. Необходимо отметить, что в качестве окружающей жидкости рассматривается невязкая нетеплопроводящая вода, вязкостные свойства которой проявляются только на границах пузырька. Для описания ее состояния используется баротропное уравнение Тейта. Для решения системы уравнений применяется неявный итерационный метод Адамса, обладающий вторым порядком аппроксимации по времени [3].

В качестве начальных условий задается давление и температура пара ( $P_v$  и  $T_v$ ); начальный радиус пузырька R; скорость движения его межфазной границы.

Для верификации полученных результатов было проведено сопоставление рассчитанного значения времени первой пульсации пузырька с аналитическим значением, вычисляемым по формуле  $T_{\text{bubble}} = 0.915(\rho_1 R_0^{-2}/(p_{\infty}^{*} - p_{\nu}))^{0.5}$  [4]. Различие составило 6%.

Было проведено сравнение результатов расчета с экспериментальными данными, опубликованными в [5], где рассматривалось схлопывание пузыря в воде при температурах 70, 75, 80 °C. Так как экспериментально можно измерить только радиус пузыря, в рассматриваемой постановке требуется доопределить значения давления и температуры в начальный момент времени. Следует заметить, что численные расчеты начинаются с момента, когда пузырь имеет максимальный радиус, так как его значение наиболее точно определяется из экспериментальных графиков [5]. Для давления в начальный момент времени после серии численных экспериментов использовалось выражение  $p_{0v} = 0.31P_{sat}(T_l)$ .



Рис. 1. Эволюция пузыря при температуре воды 70°С: сравнение рассчитанного изменения радиуса пузыря с экспериментом [5] (а); динамика массы, температуры и радиуса пузыря (б), расчет проводился, начиная с первого максимума радиуса пузыря

В ходе работы были проведены методические исследования по выбору коэффициента аккомодации  $\eta$ , характеризующего массо- и энергообмен. В работе [6] величина этого коэффициента принималась равной 0.04, в работах других авторов эта величина меняется в широком диапазоне. Сравнение результатов расчетов с экспериментальными данными показало, что расчет, выполненный при значении коэффициента аккомодации 0.029, лучше совпадает с экспериментом (рис. 1а). При сопоставлении результатов, полученных с использованием двух разных коэффициентов аккомодации, видно, что основное отличие заключается в описании максимума второй пульсации, величина которой сильно зависит от процессов массо- и энергообмена.

Наиболее сложным является схлопывание пузыря. Ускорение межфазной границы достигает 10<sup>7</sup> м/с<sup>2</sup>, что приводит к росту внутренних давления и температуры. При таких условиях правомерен вопрос о применимости используемого уравнения состояния идеального газа в момент схлопывания.

На рис. 1б представлены эволюция массы, радиуса и температуры пузыря. Данный расчет проведен при тех же условиях, что и расчет на рис. 1а. Видно, что экстремальное значение температура принимает в точке схлопывания пузыря. Масса пузырька, несмотря на периоды непродолжительного роста, падает с течением времени, что приводит к его схлопыванию и исчезновению.

В целом, используемая система уравнений и реализованный алгоритм адекватно описывают динамику кавитационного пузыря. Решение данной задачи представляет важный этап при рассмотрении большого комплекса задач, связанных с кавитацией, в том числе и задачи о подводном взрыве вблизи свободной поверхности

## ЛИТЕРАТУРА:

1. Нигматулин Р.И. Основы механики гетерогенных сред. М.: Наука, 1978. 335 с.

2. Maeno K., Kouchi T., Sato H. Behavior of pulse-laser-induced cavitation bubble in liquid nitrogen / Proc. of the ISSW'21, Marcel, 1995.

3. Oran E.S., Boris J.P. Numerical simulation of reactive flows. CUP, 2000. 550 p.

4. Plesset M.S., Prosperetti A. Bubble dynamics and cavitation // Ann. Rev. Fluid Mech., 1977. Vol. 9, P. 145 – 185.

5. Koch S., Garen W., Hegedus F., Neu W., Reuter R., Teubner U., Time-resolved measurements of shock-induced cavitation bubbles in liquids // Applied Physics B, 2012. Vol.108, Is. 2, P. 345 – 351.

6. Nigmatulin R.I., Akhatov I.Sh, Vakhitova N.K. Forced oscillations of a gas bubble in a spherical volume of a compressible liquid // J. Appl. Mech. and Tech. Physics, 1999. Vol. 40, No. 2, P. 285 – 291.

# С.И. Смирнов, Н.Г. Иванов (Санкт-Петербургский государственный политехнический университет)

# ЧИСЛЕННОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ ВЛИЯНИЯ РЕЗКОГО ИЗМЕНЕНИЯ ДИАМЕТРА ЦИЛИНДРА НА РАЗВИТИЕ ДОРОЖКИ КАРМАНА

Известно, что при обтекании тел с затупленной кормовой частью позади обтекаемого тела образуется последовательность вихрей, называемая вихревой дорожкой Кармана [1]. Сход вихрей обычно приводит к существенной нестационарности ближнего следа, которая может проявляться в заметном динамическом воздействии на обтекаемое тело. В связи с этим большой практический интерес представляет изучение механизмов управления вихревой дорожкой и, в конечном итоге, возможностей подавления схода вихрей. Так, в последние годы активно изучается формирование вихревой дорожки за задней кромкой лопастей гидротурбины. В работе [2] предложено придавать задней кромке трапециевидную форму, что представляет пример практически реализуемого способа подавления вихрей.

В качестве тела с затупленной кормовой частью наиболее часто рассматривается круглый цилиндр. В литературе предложен ряд механизмов управления дорожкой Кармана при обтекании цилиндра. Так, в работе [3] предложено разместить в окрестности цилиндра второй (управляющий) цилиндр меньшего диаметра, причем в зависимости от углового положения управляющего цилиндра можно усиливать или ослаблять воздействие на вихревую дорожку. Другую возможность управления, рассмотренную в [4], представляет нагрев поверхности цилиндра. При умеренных числах Рейнольдса (40 < Re < 90) нагрев может полностью подавить вихреобразование. Наконец, на формирование дорожки Кармана может оказывать заметное влияние плавное [5] или ступенчатое [6] изменение диаметра цилиндра: в обоих случаях были зафиксированы изменения вихревой дорожки по сравнению с исходным случаем цилиндра постоянного диаметра.

В настоящей работе рассматривается обтекание бесконечного цилиндра, состоящего из периодически повторяющихся участков с большим диаметром  $D_1$  и меньшим диаметром  $D_2$ . Число Рейнольдса, построенное по скорости набегающего однородного потока и диаметру участка с большим диаметром, варьируется в диапазоне 100 – 200.

Пример рассматриваемой геометрии показан на рис.1, где представлена базовая конфигурация, в которой отношение диаметров  $D_2/D_1 = 0.5$ , половина длины участка с большим диаметром составляет  $L_1 = 0.5D_1$ , а половина длины участка с меньшим диаметром  $L_2 = 0.5D_1$ . Помимо базового, были рассмотрены варианты, в которых значения  $D_2/D_1$  варьировались в диапазоне 0.5 - 0.75, а  $L_1/D_1$  и  $L_2/D_1 - в$  диапазонах 0.25 - 0.5. Таким образом, в отличие от постановки, принятой в [6], в настоящей работе отношение длины участка с меньшим или большим диаметром к диаметру составило величины порядка единицы.

На рис. 1 также для базовой конфигурации показана вся расчетная область диаметром 40*D*<sub>1</sub>. На входе в расчетную область задавалось однородное поле скорости. На выходе ставилось мягкое граничное условие в предположении постоянства давления вдоль границы. На поверхностях цилиндра задавались условия прилипания. На торцевых границах расчетной области ставилось условие симметрии.

Отдельная серия методических расчетов была направлена на изучение влияния на получаемое решение протяженности расчетной области в осевом направлении. Базовый вариант (рис. 1) включал один участок со ступенчатым изменением диаметра; помимо него рассматривались постановки, включающие два и четыре участка.

Расчеты выполнены с использованием новой версии программного кода SINF, разработанного на кафедре гидроаэродинамики СПбГПУ [7]. Программный комплекс позволяет проводить двумерные и трехмерные расчеты стационарных и нестационарных течений несжимаемой жидкости или газа в областях различной геометрической конфигурации, при этом могут использоваться одноблочные или многоблочные структурированные неравномерные сетки, согласованные с границами области течения. Расчеты проводились со вторым порядком точности дискретизации по пространству и времени.

Использовались блочно-структурированные расчетные сетки. Построение трехмерных сеток осуществлялось при помощи разработанной на кафедре программы GROT. Сетки сгущались к поверхностям цилиндра в радиальном и осевом направлении, в окружном направлении использовались равномерные распределения узлов. Было проведено предварительное методическое исследование влияния на получаемое решение размерности расчетной сетки в окружном и радиальном направлениях, на основании которого типичные размерности сеток составили порядка 300 – 400 тысяч ячеек.

Для всех вариантов был достигнут статистически установившийся режим колебаний, продолжительность выборки составляла не менее 20 периодов.



Рис. 1. Пример расчетной области для исследования обтекания цилиндра с периодически меняющимся диаметром:  $D_2/D_1 = 0.5$ ;  $L_1/D_1 = 0.5$ ;  $L_2/D_1 = 0.5$ 



Рис. 2. Мгновенные поля нормированной продольной компоненты скорости (сверху) и z-компоненты завихренности (снизу) в следе за цилиндром, показано срединное горизонтальное сечение;  $Re = 100, D_2/D_1 = 0.5; L_1/D_1 = 0.5; L_2/D_1 = 0.5$ 



Рис. 3. Эволюция продольной скорости в точке мониторинга, расположенной на расстоянии одного калибра вниз по потоку: результаты для  $D_2/D_1 = 0,5$ ;  $L_1/D_1 = 0,5$ ;  $L_2/D_1 = 0,5$  сопоставлены с данными для цилиндра с постоянным диаметром; Re = 100



Рис. 4. Поле нормированной продольной компоненты скорости в следе за цилиндром, показано срединное горизонтальное сечение; Re = 200,  $D_2/D_1 = 0.5$ ;  $L_1/D_1 = 0.5$ ;  $L_2/D_1 = 0.5$ , реализован стационарный режим течения

В результате проведенных расчетов были получены следующие результаты:

1. Показано, что в рассмотренном диапазоне чисел Рейнольдса достаточно использовать расчетную область, содержащую половину участка цилиндра большего диаметра и половину – меньшего, с выставлением условий симметрии на торцевых границах. Рассмотрение большего числа участков с меняющимся диаметром (до четырех) не приводит к изменению результатов.

2. Увеличение длины участка цилиндра с большим диаметром по сравнению с участком цилиндра с меньшим диаметром может приводить к заметному уменьшению амплитуды колебаний. Напротив, при уменьшении длины большего цилиндра и соответствующем удлинении меньшего цилиндра колебания интенсифицируются.

3. При  $D_2/D_1 = 0.75$  влияние изменения диаметра на пульсации оказывается слабым во всем рассмотренном диапазоне числа Рейнольдса и отношения длин участков с меньшим и большим диаметром.

4. Для конфигурации с геометрическими параметрами  $D_2/D_1 = 0.5$ ;  $L_2/D_1 = 0.5$ ;  $L_1/D_1 = 0.5$  при числе Рейнольдса в диапазоне 100 < Re < 170 наблюдается колебательный характер движения (рис. 2-3). При увеличении числа Рейнольдса со 170 до 190 происходит полное подавление дорожки Кармана. Сформировавшийся трехмерный стационарный режим течения сохраняется, по крайней мере, до Re = 200 (рис. 4). Следует отметить, однако, что в ходе проведенных исследований не изучалось влияние пространственного разрешения вдоль оси цилиндра; данные расчеты запланированы на будущее.

#### ЛИТЕРАТУРА:

1. Шлихтинг Г. Теория пограничного слоя. М.: Наука, 1974. 712 с.

2. Щур Н.А., Юркина Н.С. Численное исследование силового воздействия вихревой дорожки Кармана на гидропрофиль: влияние геометрии задней кромки / Доклады XIX Школы-семинара молодых ученых и специалистов под руководством академика РАН А.И.Леонтьева. Москва: Издательский дом МЭИ, 2013, С. 149 – 150.

3. Sakamoto H., Haniu H. Optimum suppression of fluid forces acting on a circular cylinder // Journal of Fluids Engineering, June 1994. Vol. 116, P. 221 – 227.

4. Lecordier J. C., Hamma L., Paranthoen P. The control of vortex shedding behind heated circular cylinders at low Reynolds numbers // Experiments in Fluids, 1991. Vol. 10, P. 224 – 229.

5. Narasimhamurthy V.D., Andersson H.I., Pettersen B. Cellular vortex shedding behind a tapered circular cylinder // Phys. Fluids, 2009. Vol. 21, Iss. 4, 044106, 13 p.

6. Lewis C. G., Gharib M. An exploration of the wake three dimensionalities caused by a local discontinuity in cylinder diameter // Phys. Fluids A 4 (1), January 1992, P. 104 - 117.

7. Смирнов Е.М., Зайцев Д.К. Метод конечных объемов в приложении к задачам гидрогазодинамики и теплообмена в областях сложной геометрии // Научно-технические ведомости СПбГПУ, №2 (36), 2004, С. 70 – 81.

# ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ СТАЦИОНАРНЫХ И НЕСТАЦИОНАРНЫХ ЕСТЕСТВЕННОКОНВЕКТИВНЫХ ТЕЧЕНИЙ В ВЕРТИКАЛЬНОМ КАНАЛЕ СО СТЕНКАМИ РАЗЛИЧНОЙ ТЕМПЕРАТУРЫ

Явление естественной (свободной) конвекции широко распространено в природе, и, наравне с явлением вынужденной конвекции, играет большую роль также и в технике. Закономерности распространения тепла в жидких средах, связанные со свободной конвекцией, могут быть использованы, например, в создании кулеров охлаждения компьютерных процессоров.

Целью данной работы было многопараметрическое исследование ламинарного свободноконвективного течения в плоском канале, возникающего из-за нагрева расположенной внизу и по центру канала нагреваемой стенки ВС (см. рис. 1). Исследовались течения (при внезапном нагреве стенки ВС) при различной длине и ширине канала, а также разных числах Рейнольдса. Число Прандтля во всех расчетах принималось равным 0,71. Получены и проанализированы интегральные характеристики потока: число Нуссельта, массовый расход и коэффициент трения на ВС. В работе уделено особое внимание типу граничных условий (г.у.) для температуры на проницаемых границах.

Рассматривалось плоское, в общем случае нестационарное течение воздуха между вертикальными изотермическими пластинами (безразмерная температура стенки ВС принята за 1, стенки ЕF – за 0). АВ, CD – линии симметрии. Температура среды вне расчетной области равна температуре холодной стенки. Задача решалась в допущениях об отсутствии вязкой диссипации, постоянстве коэффициентов вязкости и теплопроводности. Перенос тепла описывался только конвекцией и теплопроводностью, а уравнения Навье-Стокса записывались в приближении Буссинеска (см. [1]).

На твердых стенках ставились г.у. прилипания для компонент скорости и постоянства температуры, на проницаемых границах – условия «по давлению» для скорости.



В работе исследовалось влияние мягкого и «условного» (с заданием температуры окружающей среды в случае затекания среды в канал и мягкого в области прямого тока) г.у. на проницаемых границах. В нестационарной постановке добавлялись начальные условия: нулевые поля скоростей во всех расчетной области и значения температур на стенках канала.

Для решения задачи разработана программа на языке C++. В качестве технологии решения уравнений выбрана неявная трехслойная схема с определением переменных на следующем слое методом установления в «дельта»-форме с применением метода искусственной сжимаемости (описание схемы см. в [2, 3]). Использовалось расщепление по пространственным переменным, аппроксимации всех уравнений проводились со вторым порядком точности на гибридной МАС-сетке (сетка сгущалась к стенкам и торцам BC).

Проведены расчеты течений в каналах шириной от 0,07 до 1 (безразмерная длина горячей пластины равна 1), длиной от 1,6 до 35 и числах Рейнольдса от 250 до 2000. В ряде случаев на границе DE около холодной стенки обнаружен участок затекания воздуха в канал (см. поле продольной скорости с линиями тока на рис. 2). Его появление связано, во-первых, с тем, что холодная стенка «отнимает» тепло у потока и способствует торможению частиц жидкости, и, во-вторых, с наличием встречного градиента давления, оказывающего тормозящее воздействие на поток (все расчеты дают встречный градиент давления на большей части холодной стенки).

«Условное» г.у. для температуры на выходной границе при наличии рециркуляционной зоны не вполне отражает постановку задачи, поскольку исключает взаимодействие нагретой среды, выходящей из канала, с всасываемым воздухом. С другой стороны, установка всюду мягкого условия физически не позволяет определить температуру входящей среды. Для исследования этой проблемы в пакете FLOS, разработанном на кафедре гидроаэродинамики СПбГПУ, проведен расчет аналогичной задачи с расширенной над каналом расчетной областью (над новыми границами ставились «условные» условия для температуры и условия «по давлению» для скорости). Результаты этих расчетов подтверждают затекание воздуха в канал с ненулевой температурой, а профили температуры в выходном сечении говорят в пользу установки мягкого граничного условия на всей границе (см. рис. 3).

Исследованы зависимости интегрального числа Нуссельта, массового расхода и коэффициента трения от длины канала (зависимости для расхода см. на рис. 4). Первоначальный рост расхода связан с увеличением размеров подогреваемой области, дальнейший спад – с уменьшением влияния горячей стенки в канале. Зависимость расхода от ширины канала (для относительно коротких каналов) также немонотонна, что связано с влиянием рециркуляционной зоны на течение (см. рис. 5).



Рис. 4. Зависимость расхода от длины канала Рис. 5. Зависимость расхода от ширины канала

Проведены расчеты нестационарного течения в каналах длины 2 с шириной 0,1, 0,3 и 0,6 при числах Рейнольдса 500, 1000 и 1500. Во всех расчетах процесс изменения продольной скорости однотипный: после включения нагрева пластин около горячей стенки начинает формироваться область больших значений скоростей, плавно перемещающаяся к выходу из канала, а напротив горячей пластины образуется вихрь, также смещающийся к выходу. При всех рассмотренных числах Рейнольдса в канале шириной 0,3 и 0,6

наблюдается схожий по структуре процесс образования «температурного пузыря» – перегретой области воздуха, движущейся в выходу из канала и имеющей поперечные размеры, близкие к ширине канала (см. рис. 6). Зависимости расходов во времени оказались немонотонными. С ростом ширины канала колебания расхода усиливаются (см. рис. 7).

В работе проведено методическое исследование влияния на решение способа постановки г.у. для температуры в условиях знакопеременности нормальной компоненты скорости на выходной границе; при решении нестационарной задачи обнаружены колебания расхода во времени, интенсивность колебаний увеличивается с шириной канала; установлено образование рециркуляционной области в процессе формирования течения при внезапном нагреве пластины; при некоторых условиях обнаружено появление на определенной стадии развития течения температурного «гриба»; проверено совпадение профилей температуры на пластине ВС с автомодельными профилями в задаче свободной конвекции на вертикальной пластине (см. [4, 5]), расхождение составило менее 1% в каналах, шириной более 0,2.

## ЛИТЕРАТУРА:

1. Джалурия Й. Естественная конвекция: тепло- и массообмен. М.: Мир, 1983. 400 с.

2. Головачев Ю.П., Колешко С.Б. Численные методы решения уравнений динамики жидкости и газа. Л.: Изд. НПО ГИПХ, 1990. 126 с.

3. Себиси Т., Бредшоу П. Конвективный теплообмен. Физические основы и вычислительные методы-М.: Мир, 1987. 592 с.

4. Лойцянский Л.Г. Механика жидкости и газа: 2-е изд., испр. М.: Дрофа, 2003. 840 с.

5. Шлихтинг Г. Теория пограничного слоя. М.: Наука, 1974. 712 с.

УДК 532.517

Н.С. Юркина, С.В. Булович (Санкт-Петербургский государственный политехнический университет)

# РАСЧЕТ ХАРАКТЕРИСТИК МЕТАТЕЛЬНОГО УСТРОЙСТВА ДЛЯ МОДЕЛИРОВАНИЯ УДАРНОЙ НАГРУЗКИ НА ЭЛЕМЕНТЫ ДВИГАТЕЛЕЙ ЛЕТАТЕЛЬНЫХ АППАРАТОВ

Аварийные ситуации на воздушном транспорте часто возникают на режимах взлета или посадки самолета из-за столкновения с птицами. Для полнофакторного моделирования этой ситуации ФГУП «ЦИАМ им. П.И. Баранова» по государственному контракту № 13411.1003899.18.011 от 25.02.2013 с Минпромторгом России в рамках Федеральной Целевой программы «Развитие гражданской авиационной техники России на 2002-2010 годы и на период до 2015 года» выполняет исследовательские работы. Часть работ, связанных с проектированием пневматического метательного устройства, выполнена в НПП «ИСТА» и на кафедре гидроаэродинамики СПбГПУ.

В общем случае метательное устройство состоит из камеры высокого давления (ресивера), запорной арматуры (диафрагмы или быстрооткрывающегося клапана) и ствола. Выбор параметров системы продиктован требуемой скоростью разгона U тела массой M, имеющего диаметр D. Для обеспечения требуемой скорости выбирается длина L ствола, объем камеры высокого давления  $V_0$ , состав газа, начальный уровень давления  $P^0$  и температуры  $T^0$  в ресивере. В частности, разрабатываемое устройство должно обеспечивать разгон тел массой M = 0.5 кг до скорости U = 450 м/с.

Сформулированная в таком виде задача хорошо известна как задача Лагранжа [1] для внутренней баллистики. Простейший способ расчета движения тела в стволе – квазистационарный подход, не учитывающий волновых явлений. Считается, что кинетическая энергия тела в каждый момент времени соответствует совершенной работе по

расширению газа. Пренебрегая распределением давления в ресивере и стволе, влиянием конечной скорости срабатывания запорной арматуры, формированием волны сжатия перед движущимся поршнем, трением тела о ствол, теплообменом и различными утечками газа можно получить параметрическую формулу связи скорости снаряда в зависимости от пройденного пути (объема расширения газа V) по длине ствола [2]:

$$U(z) = \sqrt{\frac{2p^{0}V}{M}} \left\{ \frac{1}{\gamma - 1} \left[ 1 - \left( 1 + \frac{V}{V_{0}} \right)^{1-\gamma} \right] - \frac{p_{a}}{p^{0}} \right\}, \qquad V = 0.25\pi D^{2}z, \qquad (1)$$

здесь индексом «0» обозначены параметры в ресивере; z – перемещение поршня в стволе;  $p_a$  – атмосферное давление;  $\gamma = c_p/c_v$  – отношение удельных теплоемкостей газа.

В частности, формула (1) была использована при проектировании устройства для метания снарядов переменной массы [3]. Более точное описание процесса разгона метаемого тела в стволе основывается на решении газодинамических уравнений в одно- или двумерной постановке. Например, в работе [4] приведены характеристики трения и теплообмена газа в стволе орудия при подрыве порохового заряда, но нет полных данных о скорости модели. В работе [5] решение задачи получено в рамках приближения узкого канала с учетом формирования нестационарного теплового и динамического пограничного слоя на стенке ствола. Современные подходы к решению задачи, затрагивающие вопросы оптимизации параметров метательного устройства, изложены в [6].

В настоящей работе решение задачи было получено в пакете ANSYS Fluent 14.0 на основе модели сжимаемой вязкой жидкости (совершенный газ) по схеме, обеспечивающей аппроксимацию со вторым порядком точности по пространству и первого порядка точности по времени полной системы уравнений Навье-Стокса. Для описания характеристик турбулентного течения была использована k- $\omega$  SST модель. Вычислительная область была задана в виде сектора, который образован поворотом плоскости вокруг оси симметрии на угол в 6°. В начальный момент времени область состояла из ресивера, запорного элемента и части ствола до расположения метаемого тела в стволе (рис.1). Дискретизация вычислительной области была осуществлена при помощи трехмерной трехблочной сетки с равномерным распределением узлов по всем координатным направлениям. Начальное число ячеек сетки составило 97 180.

Перемещение метаемого тела было получено на основе второго закона Ньютона



Рис. 1. Начальная вычислительная область и фрагмент расчетной сетки

В соответствии с перемещением тела размер расчетной области («ствол») увеличивался при помощи добавления расчетных ячеек. Расчет прекращался, когда тело достигало среза ствола (при достижении длины в 5 метров).

На основании проведенных расчетов было спроектировано устройство и смонтирован испытательный стенд. Чертеж с основными габаритными размерами представлен на рис. 2. В качестве запорного элемента был использован быстродействующий клапан [7].



Рис. 2. Чертеж устройства с основными габаритными размерами: 1– ресивер, 2 – ствол, 3 – быстродействующий клапан, 4 – рама

Для проведения испытаний было изготовлено метательное тело из алюминия массой 0,277 кг в виде цилиндра диаметром 80 мм, с которым были проведены пуски на малых давлениях в ресивере (0,4 ... 0.7 МПа). В ходе эксперимента была получена зависимость скорость метательного снаряда от уровня давления газа в ресивере. Например, для давления в ресивере 0,7 МПа скорость снаряда составила 144 м/с±2 м/с. Результаты экспериментов совпали с расчетными данными.

Проведенные исследования позволили получить следующие важные результаты:

1. Отлажена и верифицирована процедура расчета разгона снаряда в стволе на основе решений системы нестационарных уравнений Навье-Стокса на движущейся сетке. Был проведен первый расчет разгона при геометрических параметрах конкретной установки и при начальном давлении сжатого газа в ресивере 5.0 МПа. Среднее время расчета варианта составило двое суток.

2. Спроектирована, изготовлена, собрана и отлажена экспериментальная установка, на которой были проведена серия испытаний устройства для разгона тела массой 0,277 кг при малых давлениях до 0,7 МПа.

3. Отмечено совпадение значений в пределах погрешности скорости на срезе ствола устройства при начальном давлении сжатого воздуха в ресивере 0,7 Мпа, полученных экспериментальным путем и расчетным путем двумя способами: на основе приближенной модели (1) и на основе расчета полных уравнений Навье-Стокса.

4. Отмечено совпадение в пределах погрешности значений скорости на срезе ствола приспособления при начальном давлении сжатого воздуха в ресивере порядка 5,0 МПа полученных расчетным путем двумя способами: на основе приближенной модели (1) и на основе расчета полных уравнений Навье-Стокса. Важно отметить, что отмеченное совпадение наблюдается в диапазоне чисел Маха более единицы, где, согласно [1], приближенный метод не должен обеспечивать приемлемую точность. Если данное совпадение будет подкреплено экспериментом, тогда можно будет использовать формулу (1) для прогнозирования скорости тела во всем диапазоне начальных давлений в ресивере и масс метаемых тел.

## ЛИТЕРАТУРА:

1. Златин Н.А., Красильщиков А.П., Мишин Г.И. и др. Баллистические установки и их применение в экспериментальных исследованиях. М.: Наука, 1974. 344 с.

2. Жаровцев В.В., Комаровский Л.В, Погорелов Е.И. Математическое моделирование и оптимальное проектирование баллистических установок. Томск: Изд-во Томск. ун-та, 1989. 256 с.

3. Григорьев В.В., Исаков С.Н., Петров Р.Л., Юркин С.В. // Газодинамическое исследование пневматического линемета. Журнал технической физики, 2006, том 76, вып.3, С. 75 – 80.

4. Бубенчиков А.М., Комаровский А.В., Харламов С.Н. Математические модели течения и теплообмена во внутренних задачах динамики вязкого газа. Томск: Томск. гос. ун-т, 1993. 182 с.

5. Булович С.В., Петров Р.Л. Пневматический разгон поршня в стволе // Письма в ЖТФ, 2005, том 31, вып. 16, С. 12 – 18.

6. Голубятников А.Н., Леонтьев Н.Е., Пилюгин Н.Н. Методы повышения эффективности легкогазовых баллистических установок // Успехи механики. 2003, № 2, С. 97-125.

7. Shelley T. Air makes a blast. Eureka innovative engineering design. #12, 2001, Findlay publishers, London.

УДК 51-7

Е.С. Коковина, А.С. Цой, А.Ю. Снегирев (Санкт-Петербургский государственный политехнический университет)

# ЧИСЛЕННЫЙ РАСЧЕТ ТЕПЛОВОГО ИЗЛУЧЕНИЯ ТУРБУЛЕНТНОГО ЕСТЕСТВЕННО-КОНВЕКТИВНОГО ПЛАМЕНИ

### Введение

Современные технологии численного моделирования динамики пожара достигли такого уровня развития, который открывает возможность прогнозирования распространения пламени в тех случаях, когда полномасштабные натурные испытания невозможны. Однако одной из нерешенных к настоящему времени задач остается совместное моделирование пиролиза (газификации) горючих материалов и горения продуктов газификации в турбулентном газофазном пламени [1]. В самом деле, указанные явления, как правило, рассматриваются отдельно: в расчетах газофазного пламени предполагается наперёд заданная скорость газификации материала [2], а пиролиз материала моделируется в условиях заданного внешнего теплового потока [3]. При этом разрывается тепловая обратная связь, которая обеспечивается, в первую очередь, тепловым излучением из пламени.

Для решения указанной задачи требуется достаточно точный расчет теплового потока, излучаемого турбулентным пламенем, и воспринимаемого поверхностью горючего материала или иного объекта. Целью данной работы является оценка точности расчёта лучистого теплового потока, испускаемого турбулентным естественно-конвективным пламенем, с помощью модели и компьютерного кода FDS [1].

## Постановка задачи и описание модели

В работе рассматривается турбулентное горение газа (пропан) в неограниченном пространстве над газовой горелкой диаметром 0.3 м. Горелка расположена на уровне горизонтальной поверхности, окружающий воздух неподвижен. Данный сценарий соответствует условиям экспериментов [4, 5], в которых измерены распределения средней температуры, скорости и концентраций газовых компонентов в осевом и радиальных сечениях установившегося пламени. Расход горючего газа задавали таким образом, чтобы воспроизвести тепловую мощность пламени в диапазоне от 15.8 кВт до 37.9 кВт.

Для расчета трехмерных турбулентных течений, возникающих при горении и распространении дыма, в FDS численно решается система уравнений Навье-Стокса, записанная в существенно дозвуковом приближении. В основе численного алгоритма лежит процедура расчета поля модифицированного давления, обеспечивающего выполнение уравнения неразрывности. Методы дискретизации исходных уравнений имеют второй порядок аппроксимации по времени и пространству (в последнем случае – за исключением областей с большими градиентами, где активируется процедура коррекции потоков, подавляющая численные осцилляции решения). Для моделирования турбулентности применяется метод крупных вихрей (LES) с использованием статической модели Смагоринского.

Для расчета полей концентраций газовых компонентов и сажи FDS решает уравнение переноса для пассивного скаляра – смесевой доли. Рассматривается одностадийная необратимая реакция окисления горючего с образованием конечных продуктов (CO<sub>2</sub> и H<sub>2</sub>O), а также монооксида углерода и сажи, выход которых задается пользователем. В FDS

предполагается, что скорость реакции бесконечно велика (диффузионный режим), что позволяет выразить концентрации всех компонентов смеси через смесевую долю. В пределе большой скорости реакции локальная мощность тепловыделения и скорости расходования реагентов определяются скоростью турбулентного смешения горючего и окислителя на подсеточном уровне. При этом в качестве времени смешения принимается величина, обратная локальной скорости деформации разрешенного поля скорости.

Уравнение переноса энергии излучения решается методом контрольных объёмов с использованием более 100 дискретных угловых направлений. Модель учитывает эмиссию и поглощение излучения, но не рассматривает рассеяние. Для описания спектральных свойств продуктов сгорания применяются два подхода: приближение серой среды и метод широкой полосы. По умолчанию в FDS используется упрощенный метод расчета эмиссии теплового излучения, в соответствии с которым излучаемая мощность составляет 35% от мощности тепловыделения при горении. В данной работе результаты такого подхода сравнивали с результатами расчетов, в которых эмиссию излучения вычисляли в зависимости от температуры и состава смеси.

Расчёты выполнялись в расчетной области с размерами 1 x 1 x 2.5 (высота) м на расчётных сетках с числом ячеек от 330 тысяч до 1.5 миллионов. При построении сеток применяли сгущение узлов в окрестности оси пламени и у поверхности горелки.

## Результаты расчетов

На рис. 1 показано мгновенное разрешенное поле концентрации сажи в турбулентном факеле продуктов сгорания над турбулентным естественно-конвективным пламенем. Поскольку в экспериментах [4, 5] измерены осредненные по времени распределения температуры, скорости и концентраций газовых компонентов, в расчетах выполняли осреднение соответствующих мгновенных полей. Примеры сравнения расчётных и экспериментальных профилей температуры и вертикальной скорости на оси симметрии пламени приведены на рис. 2. Видно, что в расчёте максимальное значение температуры на оси пламени достигается на меньшей высоте, чем в эксперименте.



Рис. 1. Естественно-конвективное турбулентное пламя и факел продуктов сгорания над газовой горелкой. Мощность тепловыделения 15.8 кВт. Изоповерхность соответствует 200 кВт/м<sup>3</sup>



Рис. 2. Средняя температура (а) и вертикальная скорость (б) на оси симметрии пламени. Мощность тепловыделения 15,8 кВт. Символы – экспериментальные данные [4], линия – расчет

В расчетах было получено распределение лучистого теплового потока по высоте вдоль вертикальной линии, расположенной на расстоянии 0.3 м от оси пламени. Пример сравнения результатов расчетов с данными измерений [5] приводится на рис. 3. Видно, что максимальное значение лучистого теплового потока, вычисленного с помощью FDS, достигается на меньшей высоте, чем в экспериментах. Аналогичный результат был ранее



Рис. 3. Распределение лучистого теплового потока. Мощность тепловыделения – 22.9 кВт

получен в работе [6], где использовался расчетный код Fire3D. Причина такого рассогласования связана, в первую очередь, не с моделью переноса излучения, а с погрешностью, возникающей при расчете формы пламени (см., например, рис. 2).

Представляет интерес чувствительность моделирования результатов к количеству сегментов, на которые разбивается телесный данной работе установлено, угол. В что значение, заданное в FDS по умолчанию (104), близко к оптимальному. При вдвое меньшем количестве сегментов оказалось, что лучистый тепловой поток распределен неравномерно, что особенно заметно на больших расстояниях от пламени. Расчеты показали, что использование

модели широкой полосы с 6 полосами приводит к результатам, практически идентичным «серому» приближению.

### Заключение

Таким образом, в данной работе выполнены численные расчеты турбулентного естественно-конвективного диффузионного пламени, и оценена точность модели переноса теплового излучения в программном обеспечении FDS. Результаты расчетов (средние поля температуры, скорости и концентраций компонентов, а также распределения лучистого теплового потока по высоте) сравнивали с опубликованными экспериментальными данными. Установлено, что расчетные и экспериментальные данные удовлетворительно согласуются на малых расстояниях от пламени, в то время как при удалении от него ошибка нарастает. Можно заключить, что данная модель переноса излучения может быть использована для совместного моделирования газофазного горения и пиролиза горючего материала с учётом тепловой обратной связи между этими процессами.

### ЛИТЕРАТУРА:

1. McGrattan K., McDermott R., Floyd J., Hostikka S., Forney G., Baum H. Computational fluid dynamics modelling of fire, Int. J. Computational Fluid Dynamics 2012 (26), P. 349 – 361.

2. Tsoi A., Snegirev A., Tanklevskiy L., Sheinman I. Flame Suppression by Water Sprays: Exploring Capabilities and Failures of FDS, Proc. of the Seventh Int. Seminar on Fire and Explosion Hazards ISFEH7 (5-10 May 2013, Providence RI, USA), Research Publ., 2013, P. 482 – 491.

3. A. Snegirev, V. Talalov, V. Stepanov, J. Harris. A new model to predict pyrolysis, ignition and burning of flammable materials in fire tests, Fire Safety J. 2013 (59). P. 132 – 150.

4. Gengembre E., Cambray P., Karmed D., Bellet J.C. Turbulent Diffusion Flames with Large Buoyancy Effects, Combust. Sci. Techn. 1984 (41), P. 55 – 67.

5. Souil J. M., Joulain P., Gengembre E. Experimental and Theoretical Study of Thermal Radiation from Turbulent Diffusion Flames to Vertical Target Surfaces, Combust. Sci. Techn. 1984 (41) P. 69 – 81.

6. Snegirev A.Yu. Statistical Modelling of Thermal Radiation Transfer in Buoyant Turbulent Diffusion Flames, Combust. Flame 2004 (136), P. 51 – 71.

# ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНОЕ ОПРЕДЕЛЕНИЕ ТЕМПЕРАТУРЫ ПРОДУКТОВ СГОРАНИЯ ПОЮЩЕГО ПЛАМЕНИ

Самовозбуждение акустических колебаний газового пламени в трубе (поющее пламя) известно более 200 лет и неоднократно привлекало внимание исследователей [1 - 4]. При этом определялись частоты и границы областей самовозбуждения, но не было возможности установить динамические свойства пламени – связь переменного тепловыделения с возмущениями потока. В работе [5] сделана попытка определения возмущений тепловыделения поющего пламени метана по разности акустических скоростей на активной зоне в предположении ее линейной зависимости от возмущений потока (скорости  $\tilde{u}$  и давления  $\tilde{p}$ ) перед активной зоной. Используя комплексное представление гармонических возмущений, представим

$$\widetilde{u}_2 - \widetilde{u}_1 = A_v \widetilde{u}_1 + A_p \widetilde{p}_1 / \rho c \text{ или } \overline{Y}_2 - \overline{Y}_1 = A_v \overline{Y}_1 + A_p.$$
(1)

Величина акустической проводимости  $\overline{Y} = \rho c \tilde{u}_0 / \tilde{p}_0$  может быть рассчитана по методам акустики. Использование двух экспериментальных границ самовозбуждения при передвижении горелки по высоте канала в принципе дает возможность определить две комплексные частотные характеристики  $A_y$  и  $A_p$ .

Естественно, что поле температуры в окрестности пламени существенно определяет локальные возмущения скорости воздуха. Можно предположить, что они пропорциональны возмущениям средней по сечению скорости, что учитывается коэффициентом  $A_v$ . При этом для вычисления средних по сечению возмущений скорости по известным уравнениям акустики достаточно знать зависимость от продольной координаты средней по сечению температуры. В работе [5] предполагалось, что при большом коэффициенте избытка воздуха температура в выходной части канала не отличается от входной температуры. Поскольку мнимая часть проводимости значительно больше вещественной и существенно зависит от температуры, принятое предположение позволяет использовать только вещественную часть соотношения (1) и для функции  $A_v$  ограничиться нахождением только ее мнимой части. В дальнейшем было замечено, что изменение функции  $A_p$  (при изменении проводимости газового канала) тоже влияет на измеренную величину Im $A_v$ . Это противоречит принятой модели и, по-видимому, требует учета температуры продуктов.

Была сделана попытка измерить температуру, осредняя по сечению показания передвижной по диаметру термопары на разных расстояниях горелки от места измерения [6]. Это исправило ситуацию только частично, поскольку, как оказалось, из-за несовершенства конструкции поле температуры было недостаточно осесимметричным.

Поэтому нами были испробованы методы, непосредственно определяющие среднюю по сечению температуру. Один из них - использование медного проволочного термометра сопротивления, растянутого в виде решетки по всему сечению канала. Результаты представлены на рис. 1. Опыты проведены в трубе длиной 900 мм при положении горелки на расстоянии 150 мм от нижнего входного конца. Расход газа 0,5 мл/с, воздуха – 300 мл/с. Приведено превышение температуры потока над температурой термостатированной стенки трубы. Поскольку существовали некоторые сомнения в надежности таких измерений, особенно в местах острого максимума температуры, нами был дополнительно использован акустический метод – измерение скорости звука по анализу узлов стоячей волны на

достаточно высокой частоте 1300 Гц. К сожалению, и этот метод не позволяет детально рассмотреть картину вблизи горелки, поскольку он осредняет измерение на длине полуволны порядка 100 мм. При этом не исключено влияние колебаний на стационарное течение. Кроме того, метод очень чувствителен к возмущениям температуры и поэтому дает заметный разброс показаний. Тем не менее, обращаем внимание на некоторую закономерность результатов, также представленных на рис. 1 для того же режима - падение по мере удаления от горелки, а затем повышение средней температуры. Эти результаты заметно отличаются от полученных с помощью термометра сопротивления.



Рис. 1

Для проверки достоверности получаемых результатов их можно привлечь к расчету стоячей волны в канале. С этой целью нами были проведены опыты, в которых для разных положений пламени по высоте канала возбуждались вынужденные колебания со стороны подачи воздуха, и каждый раз подбиралась резонансная частота по максимальному значению амплитуды давления. Независимо рассчитывалась собственная частота системы на основании заданной функции температуры продуктов и в предположении отсутствия активной роли пламени (A<sub>v</sub>=0, A<sub>p</sub>=0). Это предположение можно принять в случае, если пламя находится в узле давления. При этом оказалось, что расчетное значение частоты выше экспериментального. Это свидетельствует о том, что использованные экспериментальные зависимости для температуры были завышены. Поэтому нами принято решение принципиально изменить методику измерения температуры - вернуться к использованию термопары, но сделать возможным детальное рассмотрение поля.

С этой целью нами создан координатник, позволяющий производить измерения термопарой по всему сечению и на разной глубине в канале. Термопара пропущена через вертикальную трубку вдоль стенки рабочего канала и ее нижний конец отогнут внутрь канала. Термопара может вращаться, так что ее спай движется от стенки до стенки, проходя через центр. Угол поворота фиксируется по величине сигнала с потенциометра, связанного с поворотным устройством. Вся система может вращаться на полный оборот вокруг оси канала и перемещаться по высоте в пределах до 600мм. С учетом геометрических параметров (диаметра канала и расстояния оси вращения термопары от стенки) по величине угла поворота термопары вычисляется расстояние спая от оси канала.

При эксперименте задаются некоторые радиальные координаты спая и на каждой проводятся измерения с поворотом измерительной системы вокруг оси канала на полный оборот с шагом 1/20 оборота. Результаты измерений на заданном радиусе осредняются. Если отнести результаты к величинам радиуса, изменяющимся с определенным шагом и обозначить среднюю температуру на n-ом радиусе через  $T_n$  ( $0 \le n \le N$ ), то по полученным результатам интегрированием методом трапеций находится средняя по сечению температура по соотношению

$$T_{cp} = (0.5T_0 + 2\sum_{1}^{N-1} (T_n \cdot n) + (N - 0.5) \cdot T_N) / N^2 .$$
<sup>(2)</sup>

По этой методике для указанного выше режима нами были проведены измерения, результаты которых также представлены на рис. 1. Обращаем внимание на то, что точки лежат достаточно закономерно, несколько ниже прежних значений, но качественно повторяют зависимость, полученную методом измерения скорости звука. Расчет стоячей волны по новым значениям температуры был ближе к эксперименту, чем по другим данным.

Независимо была определена среднерасходная температура потока. В канал вставлялся патрон с перемешивающими перегородками и термопарой на выходе. Во всех случаях среднерасходная температура убывала по мере удаления от горелки за счет теплоотдачи в стенку, но была выше средней по сечению, представленной на графиках. Среднерасходная и средняя планиметрическая температуры представляются через интегралы по площади в виде

$$T_{cp} = \int \rho u T dF / \int \rho u dF \qquad T_{cn} = \int T dF / F \quad . \tag{3}$$

Из приведенных выражений можно видеть, что если массовая скорость рũ или температура Т постоянны по сечению, то среднерасходная и средняя планиметрическая температуры совпадают. В нашем случае и скорость и температура максимальны в ядре течения. Если принять, что поля массовой скорости потока и температуры постоянны, но наблюдаются только в некоторой части сечения, то среднерасходная температура окажется равной средней планиметрической именно на этой части, что будет больше, чем средняя температура по всему сечению. Качественно это имеет место и в общем случае, в том числе и у нас. Наблюдаемое изменение средней по сечению температуры связано с перестройкой полей скорости и температуры в процессе движения. По-видимому, снижение средней температуры в начале участка связано с ускорением потока над пламенем за счет свободной конвекции и соответствующим уменьшением эффективного сечения активного потока. Повышение средней температуры в вдали от горелки связано с потерей устойчивости движения и перемешиванием потока. Об этом свидетельствуют заметные колебания температуры на расстоянии от горелки и расширение температурной кривой.

Изменение вида зависимости для температуры при использовании термометра сопротивления связано, по-видимому, с тем, что наличие такой решетки меняет поле скоростей (выравнивает его) и, соответственно, влияет на среднюю температуру.

#### ЛИТЕРАТУРА:

- 2. Richardson E.G.: The singing Flame, Proc. Phis. Soc. London, Vol.35(1923), P. 47 54.
- 3. Jones A.T.: Singing Flames, J. Acoust. Soc. Am., Vol.16(1945), N4, P. 245 266.
- 4. Подымов В.Н.: О новом виде поющего пламени, Известия ВУЗов, Физика, N3, 1959, сс. 171, 172.
- V. Shteinberg, P. Kim. Regions of Self-excitation of a Singing Flame // Advances in Heat Transfer. Proceedings of the Baltic Heat Transfer Conference. – September 19-21 2007, Saint-Petersburg State Polytechnical University by editors prof. E.Fedorovich and prof. B.Sunden, v. II, P. 553 – 560.
- 6. Лучин А.А. Дипломный проект. Совершенствование методики определения передаточных функций поющего пламени. СПбГПУ, 2009, 52 с.

<sup>1.</sup> Sondhauss C.F.J.: Uber die chemishe Harmonika, Pogg.Ann., Bd. 109(1860), N1, ss.1-43; P. 426 – 469.

# С.А. Марков, Д.С. Пашкевич (Санкт-Петербургский государственный политехнический университет)

# ТЕРМОДИНАМИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ ПОЛУЧЕНИЯ БЕЗВОДНОГО ФТОРИСТОГО ВОДОРОДА ИЗ ЕГО ВОДНОГО РАСТВОРА, В ТОМ ЧИСЛЕ АЗЕОТРОПНОГО, С ПОМОЩЬЮ РЕАКЦИИ ВОДЯНОГО ГАЗА

Безводный фтористый водород (БФВ) НF находит широкое применение в современной промышленности. Его используют при производстве ядерного топлива, фтормономеров, озонобезопасных хладонов, электронных газов и др. Единственным промышленным методом получения БФВ является сернокислотное разложение природного минерала флюорита CaF<sub>2</sub>, запасы которого в России истощены, и его приходится импортировать, в том числе для производства БФВ в ядерном топливном цикле. Таким образом, разработка альтернативных методов получения БФВ является весьма актуальной задачей.

При обогащении урана по изотопу 235 при производстве ядерного топлива используют летучее соединение урана – его гексафторид UF<sub>6</sub>. При этом образуется значительное количество обеднённого по изотопу 235 гексафторида урана (ОГФУ). В настоящее время ОГФУ складируют в стальных контейнерах, и его количество в мире достигает 2 млн. тонн, в том числе в России порядка 1 млн. тонн. При этом в ОГФУ содержится 32 масс.% фтора, который может быть извлечен из ОГФУ и направлен вновь на производство гексафторида природного урана, что позволит замкнуть ядерный топливный цикл по фтору.

В ГК «Росатом» внедрена технология переработки ОГФУ, разработка которой была осуществлена французской компанией «Арева». Схема переработки ОГФУ является двустадийной и выглядит следующим образом:

1.  $UF_6 + 2H_2O = UO_2F_2 + 4HF;$ 

2.  $3UO_2F_2 + 3H_2O = U_3O_8 + 6HF + 0,5O_2$ .

В результате этого процесса образуется плавиковая кислота с содержанием фторида водорода 70%. Её ректификуют и получают плавиковую кислоту с содержанием фторида водорода 40%. Эта смесь является азеотропной, т.е. она не может быть разделена на индивидуальные вещества ректификацией.

Переработку водных растворов фторида водорода, в том числе и азеотропного, с целью получения БФВ можно осуществлять с использованием реакции водяного газа, которая протекает при температуре выше 1000К:

 $C_{TB} + H_2O_{\Gamma A3} \rightarrow CO_{\Gamma A3} + H_{2 \Gamma A3} .$ 

(3)

(1)

(2)

Основным вопросом, который возникает при разработке научных основ предлагаемого метода, является термодинамическая устойчивость фторида водорода в условиях проведения реакции водяного газа и возможность образования в этих условиях фторидов и оксифторидов углерода, в первую очередь тетрафторида углерода CF<sub>4</sub> и карбонилдифторида COF<sub>2</sub>.

Таким образом, целью настоящего исследования является определение термодинамически равновесных составов соединений в системе углерод-кислород-фторводород при различной температуре и различном соотношении элементов и поиск областей изменения параметров, где отсутствует вода, а фтористый водород остаётся стабильным, т.е. процесс протекает по схеме:

 $C_{TB} + HF_{\Gamma A3} + H_2O_{\Gamma A3} \rightarrow CO_{\Gamma A3} + H_{2\Gamma A3} + HF_{\Gamma A3}.$ (4)

Для достижения поставленной цели был решен ряд задач.

Во-первых, определен список веществ, которые могут образовываться в системе С-О-F-Н и определен список возможных в этой системе реакций. Возможные вещества в системе определяются как комбинации C-O-F-H, список рассмотренных веществ следующий: CO<sub>2</sub>, CO, H<sub>2</sub>, CH<sub>4</sub>, HF, CF<sub>4</sub>, COF<sub>2</sub>.

Во-вторых, на основе литературных данных [1] и [2] определены значения констант равновесия реакций для различной температуры. По значению констант равновесия определены основные и исключены побочные реакции. Например, реакции с образованием тетрафторида углерода и карбонилдифторида веществ имеют константы равновесия гораздо ниже 1 при температуре ниже 1500 К.

В-третьих, разработан программный код, позволяющий составлять и решать нелинейную систему уравнений химического равновесия и материального баланса атомов. При расчете полагается, что твёрдый углерод находится в избытке.

В четвёртых, с использованием разработанной программы и рассчитанных или найденных значений констант равновесия реакций проведены расчеты равновесного состава при различных температурах и различном соотношении исходных компонентов.

Показано, что фторид водорода не реагирует с другими компонентами системы при температуре ниже 1500 К. Таких веществ, как тетрафторид углерода СF<sub>4</sub>, карбонилдифторид COF<sub>2</sub> и других фторуглеродов и оксифторидов углерода в равновесном составе нет. Таким образом, фторид водорода является термодинамически устойчивым соединением в условиях протекания реакции водяного газа.

В результате реакции водяного газа при температуре больше 1200 К продуктами реакции являются только СО и H<sub>2</sub>. Например, если начальный состав газовой смеси состоит из 40% HF и 60% H<sub>2</sub>O равновесный состав не зависит от температуры в указанном диапазоне и является следующим: 25% HF, 37,5 % CO и 37,5% H<sub>2</sub>.

При температуре ниже 1000К наблюдается неполная конверсия воды, например, при 900К состав продуктов при вышеприведённом соотношении исходных компонентов следующий: 39% HF, 14% CO, и 30% H<sub>2</sub>, 3% H2O, 11% CO<sub>2</sub>, и задавать температуру в реагирующей системе ниже 1000К нецелесообразно.

Таким образом, в результате проведённой расчётной работы показано, что в системе элементов C-H-O-F в диапазоне температуры 1200-1500 К термодинамически равновесными продуктами являются фторид водорода, моноокись углерода и водород. Это позволяет утверждать, что предложенный метод получения БФВ из его водных растворов с использованием реакции водяного газа может быть рекомендован для экспериментального исследования.

## ЛИТЕРАТУРА:

1. Термодинамические свойства индивидуальных веществ. Справочное издание в 4-х т./Л.В. Гурвич, И.В. Вейц, В.А. Медведев и др. - 3-е из., перераб. и расширен. - Наука, 1979. - 440 с.

2. Промышленные фторорганические продукты: Справ. изд./Б. Н. Максимов, В. Г. Барабанов, И.Л. Серушкин и др. - Л.: Химия, 1990. - 464 с.: ил.

3. М.Х. Карапетьянц. Химическая термодинамика. Учебное пособие/Н.И. Кобозева, В.А.Кириев. -Государственное научно-техническое издательство химической литературы, 1949.-278 с.

4. Амосов А.А., Дубинский Ю.А., Копченова Н.В. Вычислительные методы для инженеров: Учеб. пособие. - М.: Высш. шк., 1994. - 544 с.:ил.

5. Базаров И.П. - ТЕРМОДИНАМИКА. М., Высшая школа, 1991, 376 с.

# В.О. Розанов, В.В. Степанов (Санкт-Петербургский государственный политехнический университет)

# ИССЛЕДОВАНИЕ ТЕПЛОФИЗИЧЕСКИХ ХАРАКТЕРИСТИК МАТЕРИАЛОВ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОГО НАСОСА (ЭМН) И ЭЛЕКТРОМАГНИТНОГО НАСОСА – ДРОССЕЛЯ (ЭМНД)

### Введение

Известно, что атомная энергетика, основанная на «тепловых» ядерных реакторах, используемых на ныне действующих и строящихся АЭС, неизбежно столкнется в обозримом будущем с ресурсными ограничениями по причине низкой эффективности использования природного урана. Поэтому долговременная стратегия развития атомной энергетики предполагает достаточно широкое использование ядерных реакторов на быстрых нейтронах с расширенным воспроизводством вторичного ядерного топлива. В коммерческих проектах реакторов на быстрых нейтронах как правило используется жидкометаллический теплоноситель. Обычно это или расплав натрия, или сплав свинца с висмутом.

Объектом исследования являются цилиндрические электромагнитные насосы для перекачивания жидких металлов в условиях высоких температур. Тепловой режим насосов определяется процессами теплопередачи. Основным видом теплопередачи в насосе является теплопроводность. Это связано с тем, что в насосе практически отсутствуют полости, заполненные газом. Пространство между внешним корпусом и индуктором заполнено муллито-кремнеземной ватой, а индуктор залит компаундом. Часть тепла передается излучением только в зоне между каналом с жидким металлом и индуктором и в зоне внешнего теплообмена между корпусом насоса и внешней средой. Конвективный теплообмен имеет место только в газовом теплообменнике с аргоном. Таким образом, тепловой режим насоса, в основном, определяется теплопроводностью конструкционных материалов насоса (при заданных мощностях тепловыделения в элементах насоса).

Цель работы — экспериментальное определение теплофизических свойств материалов, необходимых для проведения тепловых расчетов, проведение, теоретическое исследование теплофизических характеристик электромагнитного насоса (ЭМН) типа ЦЛИН (цилиндрический линейный индукционный насос) и электромагнитного насоса – дросселя (ЭМНД) типа ЦЛИН [1], предназначенных для эксплуатации в реакторной установке. Основные принципы работы и конструкции ЭМН изложены в [2 – 4].

В работе экспериментально определены коэффициенты теплопроводности

- витковой изоляции ПОТ-400АС, ПОТ-450Б-АС и ПОТ-450-АС;
- слюдопластов марок ИФГКА-АС и ИТПФА:
- материала стеклокристаллического марки СМ-310;

- компаунда на основе электрокорудного белого (микропорошок М5) и связующего марки АФС;

-стеклотекстолита марки СТЭФ.

## Постановка задачи и описание модели

Для определения теплофизических свойств материалов ЭМН в настоящей работе использовался прибор ИТ- $\lambda$ -400, основанный на методе монотонного нагрева, который зарекомендовал себя как надежный инструмент для измерения коэффициентов теплопроводности в диапазоне  $\lambda = 0,1 \div 5$  Вт/(м · K). Методы измерения теплопроводности различных материалов, описание прибора ИТ- $\lambda$ -400, а также методика проведения и

обработки опытных результатов, подробно рассматривались в отчетах [5 - 9]. Поскольку ряд образцов имели рыхлую структуру (в основном, это относится к межвитковой изоляции), использовать теплопроводные пасты не представлялось возможным. Поэтому измерения теплопроводности проводились без пасты. Для этого понадобилось проводить дополнительную градуировку прибора. Кроме того, градуировка нужна для определения работоспособности прибора с учетом возможного старения элементной базы прибора и механического износа его деталей. Градуировка измерителя заключается В экспериментальном определении тепловой проводимости тепломера K<sub>t</sub> и поправки, учитывающей контактное сопротивление образца и заделки термопар, динамические погрешности и погрешность градуировки термопар.

## Результаты расчетов

Результаты определения теплофизических свойств материалов ЭМН будут представлены только для витковой изоляции обмоточных проводов марок типа ПОТ-400-АС, ПОТ-450-БАС и ПОТ-450-АС. Внешний вид образцов представлен на рис. 1. Экспериментальные результаты по измерению коэффициентов теплопроводности отдельных образов приведены на рис. 2 – 5.



Рис. 1. Внешний вид образцов витковой изоляции



Рис. 2. Зависимость коэффициента теплопроводности образца ПОТ-400-АС от температуры



Рис. 3. Зависимость коэффициента теплопроводности образца ПОТ-450-АС от температуры

Экспериментальные значения теплопроводности обозначены закрашенными фигурами. Сплошная кривая соответствует аппроксимирующей функции. Вид этой функции приведен под каждым рисунком. Относительная погрешность для всех зависимостей в рассмотренном диапазоне температур составляет около 1%.

## Заключение

Таким образом, в данной работе эксперементально определены коэффициенты теплопроводности конструкционных материалов ЭМН. Построены зависимости коэффициентов теплопроводности образцов от температуры. Относительная погрешность для всех зависимостей в рассмотренном диапазоне температур составляет ≈ 1-2%. Результаты работы используются при проектировании электромагнитных насосов.

## ЛИТЕРАТУРА:

1. Техническое задание. Исследование теплофизических характеристик материалов и конструкций электромагнитного насоса (ЭМН) и электромагнитного насоса-дросселя (ЭМНД). Номер ведомственной регистрации 1085–13, СПб. 2013.

2. K. Polzin, Liquid-Metal Pump Technologies for Nuclear Surface Power, Marshall Space Flight Center, Alabama, March 2007, P. 5 - 17.

3. M. S. Tillack, N. B. Morley, MAGNETOHYDRODYNAMICS, McGraw Hill, 1998, P. 28-34, 75-76.

4. В. В. Абхази, А. И. Малыхин, И. В. Рыбин, Надежность жидко-металлических индукционных МГД машин. - М.: Энергия, 1972, 106 с.

5. Отчет о НИР. Исследование термомеханических характеристик слоистых металлокерамических структур (Шифр «140506802»), итоговый, СПбГПУ, 2008, 94 с.

6. Отчет о НИР. Исследование теплопроводности многослойных структур. (Шифр «140506002»), итоговый, СПбГПУ, 2010, 84 с.

7. Отчет о НИР. Создание теплофизических моделей и исследование тепловых режимов электромагнитного насоса и электромагнитного насоса-дросселя, заключительный, СПбГПУ, 2012, 84 с.

8. Платунов Е.С., Буравой С.Е., Курепин В.В., Петров Г.С. Теплофизические измерения и приборы. Л.: Машиностроение, 1986, 256 с.

9. Буравой С.Е., Курепин В.В., Платунов Е.С. О теплофизических измерениях в монотонном режиме (обзор) // ИФЖ, Т.21, №4, С. 750 – 760.

УДК 614.84

М.В. Радченко, В.В. Степанов (Санкт-Петербургский государственный политехнический университет)

# ИССЛЕДОВАНИЕ ВЛИЯНИЯ КОНЦЕНТРАЦИИ АЗОТА В ПОТОКЕ ОКИСЛИТЕЛЯ НА ОКИСЛЕНИЕ ПРОДУКТОВ ПИРОЛИЗА ПОЛИСТИРОЛА

В настоящее время диапазон применения полимерных материалов охватывает не только бытовую сферу жизнедеятельности человека, но и большинство отраслей промышленности. В связи с многообразием условий применения полимеров, особое значение имеет их исследование на *огнестойкость*: снижение горючести снижает риск развития пожара и, в случае его возникновения, уменьшает мощность и количество токсичных продуктов сгорания.

Для достижения целей данной работы применяется метод проточной кислородной сканирующей калориметрии [1]. Принцип работы микрокалориметра (рис. 1) основан на разделении процесса горения исследуемого материала на две стадии: пиролиз в потоке

инертного газа (азот, аргон) и последующее окисление летучих в камере при контролируемой температуре, характерной сгорания для температуры пламени при пожаре. [2, 3]

Термическая деградация материала происходит в условиях нагрева образца с наперёд заданной постоянной скоростью изменения температуры в зоне пиролиза. Образующиеся при этом продукты газификации материала (летучие) поступают в камеру сгорания, где окисляются в избытке кислорода. В ходе эксперимента непрерывно измеряется скорость поглощения кислорода при окислении летучих. Мощность тепловыделения при окислении летучих определяется по измеренному количеству израсходованного кислорода. Установлено, что при поддержании в центре камеры сгорания температуры 900°С имеет место полное окисление летучих. В этом случае измеряемая в эксперименте зависимость скорости поглощения кислорода от температуры образца полностью определяется скоростью газификации материала.



Рис. 1.

При более низких температурах в камере сгорания окисление летучих Микрокалориметр лимитируется скоростью реакций окисления. По результатам измерений скорости поглощения кислорода при разных температурах в камере сгорания открывается возможность для исследования кинетики реакций окисления летучих.





обшего назначения) с молекулярной массой (n степень полимеризации): 980 000 г/моль, (n=9 423).

Численными результатами исследования являются зависимости мощности тепловыделения HRR [W/g] от температуры (рис. 2). Мощность тепловыделения является фундаментальной характеристикой термического разложения образца: по ней определяются объективные индикаторы горючести материала.



В соответствии с целью работы, устанавливались расходы инертного газа  $F_{N2}$ (подаётся в камеру пиролиза) и кислорода  $F_{02}$  (подаётся перед входом в камеру сгорания), приведённые в табл. 1. При изменении расхода кислорода сохраняли неизменным суммарный расход инертного газа и кислорода  $F_{N2}$ +  $F_{O2}$ =100 с $m^3$ /мин.

Расход кислорода F <sub>02</sub> , см <sup>3</sup> /мин	Расход азота $F_{N2}$ , см <sup>3</sup> /мин
20	80
15	85
10	90
5	95

Табл. 1. Состав газовой смеси, подаваемой в камеру сгорания

По результатам измерений получены следующие характеристики полистирола [4], приведенные в табл. 2.

Табл. 2. Параметры горючести полистирола (пиролиз материала в азоте, скорость нагрева 1°С/с)

Массовая доля остатка	
Теплота сгорания летучих, кДж/г исх. материала	
Теплота сгорания летучих, кДж/г летучих	
Температура при максимальной скорости разложения, °С	
Максимальная мощность тепловыделения, Вт/г исх. материала	
Реакционная теплоемкость, Дж/(г*К)	
Массовый стехиометрический коэффициент по кислороду	

## Влияние концентрации кислорода на входе в камеру сгорания

При окислении продуктов газификации полистирола мощность тепловыделения растет с ростом концентрации кислорода при концентрации кислорода ниже 15-17% [5] (рис. 3). Указанный рост мощности наблюдается только при достаточно низких температурах, т.е. в кинетическом режиме.



Рис. 3. Зависимость полного тепловыделения при окислении продуктов

В работе исследовано влияние инертных разбавителей (азот) и концентрации кислорода на окисление продуктов пиролиза полистирола. Измерения выполнены методом проточной кислородной сканирующей микрокалориметрии в режиме неполного окисления летучих в камере сгорания.

В ходе анализа результатов установлено:

1. При окислении продуктов газификации полистирола мощность тепловыделения растет с ростом концентрации кислорода при концентрациях кислорода ниже 15-17%. Указанный рост мощности наблюдается только при достаточно низких температурах в камере сгорания (как правило, не выше 600°С), т.е. в кинетическом режиме.

2. Для полистирола при концентрации кислорода на входе в камеру сгорания выше 17% изменение мощности тепловыделения находится в пределах статистической погрешности эксперимента.

Данное исследование в области термического анализа полистирола может служить основанием для построения полноценной кинетической модели окисления продуктов пиролиза полистирола.

### ЛИТЕРАТУРА:

1. Standard Test Method for Determining Flammability Characteristics of Plastics and Other Solid Materials Using Microscale Combustion Calorimetry; Designation: D 7309 – 07a, ASTM-international, 2007;

2. Richard E. Lyon: The role of thermal decomposition kinetics in the burning of polymers; 12th International Conference on Fire Science and Engineering (INTERFLAM); University of Nottingham, UK, July 2010;

3. Pyrolysis combustion flow calorimetry: a tool for flame retardant development and fundamental combustion science, Alexander B. Morgan, Ph.D. University of Dayton Research Institute Multiscale Composites and Polymers Division Dayton, OH 45469-0160 USA;

4. A.Yu. Snegirev, V.A. Talalov, V.V. Stepanov, J.N. Harrisb, Formal kinetics of polystyrene pyrolysis in non-oxidizing atmosphere, Thermochim. Acta 548, 2012;

5. Промежуточный отчёт о НИР № 143603303. Экспериментальное исследование влияния концентрации азота в потоке окислителя на окисление продуктов пиролиза органических конструкционных материалов. Санкт-Петербург, СПбГПУ, июль 2013 г.

### УДК 621.577

# Н.А. Крючковой, М.Ю. Егоров (Санкт-Петербургский государственный политехнический университет)

## ИСПОЛЬЗОВАНИЕ ТЕПЛОНАСОСНЫХ УСТАНОВОК ДЛЯ ТЕПЛОСНАБЖЕНИЯ

Введение. Значительный рост стоимости тепловой энергии, экологические последствия сжигания органического топлива, возрастающая потребность в тепловой энергии ЖКХ, повышающиеся требования по обеспечению экологической чистоты технологических процессов и охраны окружающей природной среды вызывают всё более широкое использование эффективного энергосберегающего оборудования – тепловых насосов (TH). ТН – устройство, реализующее процесс переноса низкотемпературной теплоты, не пригодной для прямого использования, на более высокотемпературный уровень. Из низкопотенциальной теплоты различного происхождения (природной возобновляемой теплоты грунтовых и поверхностных вод, теплоты грунта, атмосферного воздуха, а также сбросной техногенной теплоты технологических процессов промышленных производств, сточных вод биологических и других очистных сооружений) вырабатывается тепло, рис. 1.

Цель исследования – разработка принципов отопления четырёхэтажного жилого здания (общая площадь 350 м<sup>2</sup>), находящегося в Ленинградской области, с помощью THУ.

**1.** Расчет тепловых потерь. На основании проектной документации выполнен расчёт тепловых потерь объекта. Для каждого типа ограждающих конструкций (крыша, перекрытия, внутренние и наружные стены, окна, двери и т.д.) определялись коэффициенты теплопередачи:

$$K = \frac{1}{\sum_{i} \frac{d_i}{\lambda_i}},\tag{1}$$

где  $d_i$  – толщина компонента ограждающей конструкции, и  $\lambda_i$  – коэффициент теплопроводности компонента ограждающей конструкции, Вт/(м K).

В соответствии с назначением помещений были выбраны температуры воздуха  $t_{\rm BH}$  в каждом из жилых и технических помещений.

Далее для каждого помещения были определены тепловые мощности, необходимые для компенсации потерь тепла через ограждающие конструкции и потерь тепла, связанных с вентиляцией помещений:

$$N = N_{\text{ОГРАЖД}} + N_{\text{ВЕНТ}} = \sum_{j} N_{\text{ОГРАЖД}_{j}} + N_{\text{ВЕНТ}} = \sum_{j} K_{j} \cdot \Delta T \cdot S_{j} + N_{\text{ВЕНТ}} , \qquad (2)$$

где  $\Delta T = t_{\rm BH} - t_{\rm yJ}$  – разность между температурой воздуха в помещении и температурой наружного воздуха;  $S_j$  – площадь ограждающей конструкции помещения, м<sup>2</sup>.

По результатам расчёта общая тепловая нагрузка составила ~12 кВт, удельные тепловые потери ~40 Вт/м<sup>2</sup>.

# 2. Анализ российского и мирового теплонасосного оборудования.

К 1997 г. в мире функционировало около 90 млн ТН: 63 % – в Японии, 15 % – в США, 11 % – в Китае и 5 % – в Европе без России и стран СНГ. Наиболее распространены ТН типа «воздух–воздух», совмещающие функции отопления, при температуре наружного воздуха минус 10°С, с функцией охлаждения (кондиционирования) в тёплое время года.

В России эксплуатируются единичные теплонасосные установки (ТНУ), например, система ГВС многоэтажного жилого дома в Никулино-2 (Москва) [1], отопление офисного здания, коттеджного поселка и здания местной администрации на базе ТНУ Подмосковья, использующих низкопотенциальную тепловую энергию земли [2], кондиционирование и отопление «Ирис Конгресс Отеля» при помощи ТН с середины 1990-х годов и др.



Рис. 1. Принцип действия ТН

Рис. 2. Рост СОР воздушных ТН

В работе выполнен сбор, изучение, анализ и систематизация как зарубежного (Швеция [3, 4], Финляндия [5], Норвегия, Германия, Швейцария, Италия, США, Канада, Япония, Китай и т. д.), так и отечественного (к сожалению, пока ещё фрагментарного [1, 2, 6]) опыта создания и использования ТНУ. Наблюдается повышение эффективности TH, характеризуемой коэффициентом преобразования *COP* 

$$COP = N / L_{3ATP}, \tag{3}$$

где N – тепловая мощность, выработанная TH;  $L_{3ATP}$  – электрическая мощность, затраченная на работу TH. По данным Шведского технического исследовательского института (SP Sveriges Tekniska Forskningsinstitut) [4], *COP* воздушных TH при характерном для стран с холодным климатом перепаде наружной и внутренней температур (+2/+20°C) достигает значений 3...4 и более, рис. 2.

Установлено, что средний *СОР* современных геотермальных ТН составляет 3,5...4,5. Для дальнейших расчётов геотермальных ТНУ был принят *СОР*=4.

**3. Выбор источника теплоты.** Возобновляемый источник должен иметь благоприятные теплофизические характеристики и низкие эксплуатационные расходы. В работе рассмотрены источники: наружный и отводимый из помещений воздух, грунтовые воды, вода (озерная, речная, морская), почва (грунт), геотермальные источники.

3.1. Бесплатный и доступный *наружный воздух*. ТН, использующий воздух, менее эффективен по сравнению с ТН «вода–вода», т.к. имеют место быстрое снижение мощности и производительности с падением наружной температуры; относительно большие разности температур конденсации и испарения в период минимальных зимних температур; дополнительные затраты энергии на размораживание обдуваемого воздухом испарителя.

ТН могут регенерировать теплоту из *отводимого вентиляционного воздуха* для отопления помещений. При этом необходимо постоянное вентилирование в течение всего отопительного периода.

3.2. ТН могут использовать теплоту *грунтовых вод, открытых водоемов или технологической воды*. Грунтовые воды имеют стабильные температуры 7...12°С в течение года. В водозаборной скважине устанавливают насос, подающий воду в испаритель ТН, охлажденная вода возвращается через водоприемную скважину. Вместе с тем, грунтовые воды могут находиться на значительной глубине.

3.3. Грунт (и грунтовые воды), имеет стабильную температуру. Тепло отбирается с помощью грунтовых теплообменников – труб уложенных в землю горизонтально или вертикально (зонды). В *горизонтальных грунтовых теплообменниках* забор тепла осуществляют по проложенной в грунте системе полиэтиленовых труб. Трубы укладываются на глубину ниже точки его промерзания. Теплоноситель циркулирует по трубам, забирая накопленное грунтом тепло, и подается в испаритель TH, в котором отдает это тепло.

Вертикальные теплообменники (зонды) в форме U-образной полиэтиленовой трубы устанавливают в скважине. По трубе циркулирует теплоноситель, прокачиваемый насосом. Определение параметров источника теплоты рассмотрим на примере зондов.

**4.** Расчёт вертикального зонда. Исследования теплофизических процессов в грунтовых массивах проводятся во многих странах. Влияние на интенсивность теплообмена в грунте оказывают его температура, плотность, теплопроводность, температуропроводность и влажность. Для различных грунтов удельный тепловой поток оценивается  $q_{\Gamma PYHT}$  на уровне

20 Вт/м (сухой песчаный) – 80 Вт/м (водоносные слои) и более.

Нами изучены результаты отечественных [1, 7] и зарубежных [8, 9] авторов.

Интенсивность теплообмена в грунте также определяется характеристиками ТНУ. Задача расчета усложняется тем, что в грунте происходит нестационарный теплообмен.

Последние годы в России исследования этих процессов проводит коллектив Г.П. Васильева [1, 6]. В почвенно-климатических условиях России грунт к началу следующего отопительного сезона не успевает восстановить свой температурный потенциал. К началу каждого следующего отопительного сезона температурный потенциал грунтового массива еще больше понижается, понижение носит экспоненциальный характер. К пятому году эксплуатации грунтовый массив выходит на периодический температурный режим.

Были выполнены исследования, выявившие геологические особенности грунтов. Установлено, что на объекте в скважинах имеют место породы супесей серых с гравием и

валунами, а также сине-серые глины. Средняя производительность пород оценена на уровне 35–40 Вт/м по имеющимся в литературе [1, 3, 6] рекомендациям.

Согласно (3) и уравнению теплового баланса

 $N = N_{\text{HИЗК}} + L_{3\text{ATP}}, N_{\text{HИЗК}} = N - L_{3\text{ATP}}, L_{3\text{ATP}} = N / COP = 12 / 4 = 3, N_{\text{HИЗК}} = 12 - 3 = 9\kappa Bm.$ Общая длина геотермального зонда оценивается на уровне 250 м.

**Выводы.** В работе проанализирован российский и мировой опыт создания и эксплуатации ТНУ. На примере четырёхэтажного жилого здания, расположенного в Ленинградской области, разработаны принципы теплоснабжения с помощью ТНУ. Запланировано проведение дальнейших работ по оценке сроков окупаемости ТНУ, а также исследование других типов ТНУ и совершенствование методик расчёта.

## ЛИТЕРАТУРА:

1. Васильев Г.П. Теплохладоснабжение зданий и сооружений с использованием низкопотенциальной тепловой энергии поверхностных слоёв Земли. — М.: Граница, 2006. — 176 с.

2. Шилкин Н.В. Опыт реализации системы отопления на базе теплонасосных установок в коттеджном посёлке. АВОК, 2010, № 2.

3. www.svepinfo.se (Шведская Ассоциация Тепловых Насосов (SVEP)

4. Axell M. Vaermepumpar forsta valet for husagare i Sverige och Schweiz. Nordiske Varme pumpedager, Oslo, 4–5 Juin, 2009.

5. Перяла Р. Тепловые насосы. СПб, Алфамер Паблишинг, 2011. — 112 с.

6. Васильев Г.П. Теплохладоснабжение зданий и сооружений с использованием низкопотенциальной тепловой энергии поверхностных слоев земли / Дисс. ... докт. техн. наук. — М.: МГСУ, 2006.

7. Чудновский А.Ф. Физика теплообмена в почве. — Л-М: ГИТТЛ, 1948. — 220 с.

8. Хэнкс Р.Дж., Ашкрофт Дж.Л. Прикладная физика почв. Влажность и температура почвы. — Л: Гидрометеоиздат, 1985. — 154 с.

9. Kavanaugh S.P, Rafferty K. Ground-Source Heat Pumps: Design of Geothermal Systems for Commercial and Institutional Buildings. ASHRAE, 1997.

УДК 536.24.023

И.В. Черных (Санкт-Петербургский государственный политехнический университет)

# ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНАЯ МЕТОДИКА РАСЧЕТА КОЭФФИЦИЕНТОВ ТЕПЛООТДАЧИ ДЛЯ ОРЕБРЕННЫХ ТРУБ С РАЗВИТОЙ ПОВЕРХНОСТЬЮ ТЕПЛООБМЕНА

Интенсификация теплообмена в энергетических установках является актуальной проблемой в современной теплофизике. В теплообменных устройствах широко применяются поперечно-обтекаемые оребренные трубы. Существующие на данный момент нормативные документы [1, 2] и др., не позволяют адекватно оценить внешние коэффициенты теплоотдачи при поперечном обтекании газом шахматных и коридорных пучков труб с высокими коэффициентами оребрения внешней поверхности и геометрией ребра различной формы.

Целью данной работы было: расширить существующую методику расчета коэффициентов теплоотдачи оребренных пучков труб при поперечном обтекании газовым потоком на основании экспериментальных данных.

Задачи работы: получить экспериментальные данные с последующей обработкой. Сравнить экспериментальные данные с результатами, полученными по нормативным методам. Обобщить экспериментальные данные с помощью расширенной методики расчета.

В работе было рассмотрено четыре оребренные трубы с различной геометрией ребра и коэффициентами оребрения. А именно: две трубы с прямоугольным ребром имеющие коэффициенты оребрения  $\phi=44$  и  $\phi=25$ , одна с восьмиугольным ребром  $\phi=12$ , и одна с

круглым ребром ф=9,83. Рассмотренные трубы были изготовлены по единой технологии, и имеют новую конструкцию среди изготавливаемых на сегодняшний день оребренных труб [3,4]. Из рисунка 1 видно, что для труб с высокими коэффициентами оребрения отклонение α<sub>эксп</sub> от α<sub>расч</sub> велико при низких значениях Рейнольдса и падает с увеличением числа Рейнольдса.



Рис.1. Значение α<sub>эксп</sub>/α<sub>расч</sub> при различных числах Рейнольдса

Было предложено на основании существующей методики, расширить пределы применимости и выбрать характерную высоту ребра из общих соображений.

Коэффициент теплоотдачи при поперечном обтекании газом коридорных пучков труб Λ

$$Vu = 0.2 \operatorname{Re}^{n} \operatorname{Pr}^{0.33} \phi^{0.3} C_{z} C_{s}$$
,

где  $n = 0.65\phi^{-0.07}$ ,  $C_z$  и  $C_s$  - поправочные коэффициенты на количество поперечных рядов в пучке и на форму пучка труб,  $\varphi$  - коэффициент оребрения.

Число Рейнольдса:  $\operatorname{Re} = \frac{u l_0}{v}$ , *u* - скорость в наиболее сжатом сечении пучка,  $l_0$  характерный размер, v - коэффициент кинематической вязкости при средней температуре теплоносителя.

*Осредненная высота ребра:* была принята равной:  $h_p = \frac{2S}{P}$  м, где S – площадь ребра Р – периметр ребра.

Характерный размер: 
$$l_0 = \left(1 - \frac{F_p}{F_{\Pi}}\right) d + \frac{F_p}{F_{\Pi}} \sqrt{0.785 \left(\left[d + h_p\right]^2 - d^2\right)}$$
 м.

где  $F_P$ ,  $F_\Pi$  - поверхность ребер и полная поверхность оребренной трубы, м<sup>2</sup> *d* - внешний диаметр трубы, *h<sub>p</sub>* - высота ребера.

Приведенный коэффициент теплоотдачи при поперечном омывании газом пучков оребренных труб (при оребрении несущей трубы с наружной стороны) вычисляется по формуле:

$$\alpha_{\Pi P} = \left(\frac{F_P}{F_{\Pi}}E\mu_P\psi + \frac{F_T}{F_{\Pi}}\right)\alpha$$

где  $F_T$  - поверхность гладкой трубы;  $E = th\left(\frac{mh_p}{mh_p}\right)$  коэффициент эффективности ребра; поправочный коэффициент учитывающий неравномерное распределение теплоотдачи по ребру

 $\Psi$ =1-0.058mh<sub>p</sub>; параметр  $m = \sqrt{\frac{2\alpha}{\lambda_p \delta}}$ ,  $\mu_p$  - коэффициент учитывающий влияние уширения

ребра к основанию.

Данные обработанные с помощью расширенной методики хорошо согласуются с экспериментальными данными, что видно на рис. 2.



Рис. 2. Значение  $\alpha_{
m эксп}/\alpha_{
m pacч}$  при различных числах Рейнольдса рассчитанные по предложенным соотношениям

Пределы применимости данной формулы  $Re=6\cdot 10^3 - 10^5$ ,  $l_0=0,027-0,178$ ,  $\varphi=1-44$ .

Вывод: Были произведены расчеты коэффициентов теплоотдачи по существующим нормативным методам и сравнение полученных результатов с экспериментальными данными. Существующие методы не позволяют адекватно определить значения коэффициентов теплоотдачи для оребренных поверхностей с высокими коэффициентами оребрения, поэтому была разработана методика на основании экспериментальных данных, которая с хорошей точностью позволяет производить расчет коэффициентов теплоотдачи, для элементов с развитой поверхностью теплообмена и ребрами круглой, прямоугольной и восьмиугольной формы. Так же было выбрано соотношение для определения осредненной высоты ребер имеющих геометрию сложной формы. На основании экспериментальных данных подобранны степени при коэффициенте оребрения не противоречащие данным [5-7].

### ЛИТЕРАТУРА:

1. РД 24.035.05-89. Тепловой и гидравлический расчет теплообменного оборудования АЭС. НПО ЦКТИ. Л. 1991

2. Тепловой расчет котельных агрегатов (нормативный метод). НПО ЦКТИ, СПб., 1998, 256 с.

3. Либкинд Б. Н., Либкинд С. Б. Патент на изобретение № 2272979. Пластинчатый теплообменник. Зарегистрирован в Государственном реестре изобретений РФ 23.03.2006.

4. Сборник тезисов конференции КОМАНДА 2012 СПб 2012. «Интенсификация теплообмена с помощью оребрённых теплообменных элементов КП 20» Черных И.В.; Лычаков В.Д.

5. В.М. Кэйс А.Л. Лондон Компактные теплообменники. Энергия 1967.

6. В.М. Антуфьев, Эффективность различных форм конвективных форм нагрева.

7. Юдин В. Ф. Теплообмен поперечно-оребренных труб. Машиностроение 1982.

УДК 536.242

П.С. Пацей, В.А. Талалов (Санкт-Петербургский государственный политехнический университет)

# МОДЕЛИРОВАНИЕ ПОЛЕЙ СКОРОСТИ И ТЕМПЕРАТУРЫ В ПЕЧИ ВЗВЕШЕННОЙ ПЛАВКИ

Металлургия меди, а также других тяжелых цветных металлов является ведущим звеном отечественной цветной металлургии. На долю тяжелых цветных металлов в Российской Федерации приходится значительная часть валовой продукции отрасли.

Повышение требований к защите окружающей среды привело к значительному удорожанию строительства и эксплуатации предприятий цветной металлургии. Это в свою очередь вызвало разработку новых, более интенсивных процессов или активное совершенствование существующих процессов производства металлов, например улучшение и оптимизация взвешенной плавки для переработки сульфидных концентратов [1 – 3].

Моделирование процессов происходящих в печи взвешенной плавки имеет важное практическое значение. Полученные результаты могут помочь сделать выводы при конструировании новых печей, так и при оптимизации старых. Так же результаты расчетов могут послужить ориентиром при проведении экспериментальных работ в печи.

Одна из существующих проблем в аптейке, печи взвешенной плавки, связана с оседанием частиц на стенках, приводящим к перекрыванию входного сечения. Были предложены определенные меры для устранения, например, установить на стенках аптейка горелки.

Цель работы – определить поля температуры и скорости в печи взвешенной плавки при разных вариантах: с горелками и без горелок. Провести анализ тепломассообмена и движения среды на основе полученных результатов.

Численное моделирование процессов проводилось с использованием пакета параллельных прикладных программ ANSYS Fluent 14.5.

В основе математических моделей лежат уравнения сохранения массы, импульса и энергии [4,5]. Ниже представлены уравнения, решаемые в пакете Fluent [6]:

1. Уравнение неразрывности:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho \bar{u}_{j}}{\partial x_{i}} = 0 \tag{1}$$

### 2. Уравнения переноса импульса:

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\rho\bar{u}_{i}\right) + \frac{\partial}{\partial x_{j}}\left(\rho\bar{u}_{j}\bar{u}_{i}\right) = -\frac{\partial}{\partial x_{i}}\left(\bar{p} + \frac{2}{3}\left(\rho k + \left(\mu + \mu_{t}\right)\frac{\partial\bar{u}_{k}}{\partial x_{k}}\right)\right) + \frac{\partial}{\partial x_{j}}\left(\left(\mu + \mu_{t}\right)\left(\frac{\partial\bar{u}_{i}}{\partial x_{j}} + \frac{\partial\bar{u}_{j}}{\partial x_{i}}\right)\right) \right)$$
(2)

3. Уравнение переноса энтальпии для несжимаемой жидкости:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho h) + \frac{\partial}{\partial x_j}(\rho u_j h) = \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\lambda_t}{C_p}\frac{\partial h}{\partial x_j}\right)$$
(3)

В предыдущей работе [7] использовались разные модели турбулентности [8] из первого класса с разным числом уравнений переноса для характеристик турбулентности, а именно модель турбулентности с одним уравнением модель Спаларта–Аллмареса (SA модель) и модели с двумя уравнениями: k-є модель в модификации Realizable и k-ю модель. На основе полученных результатов было решено использовать в дальнейшем k-ю модель турбулентности в модификации SST.

При моделировании в качестве среды использовалась смесь газов, задача решалась неизотермическая, свойства задавались полиноминально, на промежутке от 600 до 2200 К. Движение твердой фазы не учитывалось, так как делается допущение, что влияние частиц на движение жидкой фазы мало.



Рис. 1. Распределение поля скорости в сечении Z=5550 мм

В качестве результатов расчета получены распределения скорости и температуры в аптейке печи взвешенной плавки. На рис. 1 изображено распределение поля скорости в аптейке, в сечении Z=5550 мм. На рисунке видны зоны вблизи стенок со значениями магнитуды скорости близкие к нулю. Эти зоны представляют собой вихри. Как говорилось выше, одна из проблем связанная с аптейком является осаждение частиц на поверхности стенок. Предполагается, что частицы осаждаются в зонах вихрей, соответственно нужен способ, позволяющий отодвинуть вихри от поверхностей стенок.

Было предложено изменение конструкции печи. На высоте Y=2250 мм поставить две горелки диаметром 400 мм. Массовый расход одной горелки составляет 3850 нм<sup>3</sup>/ч. Был проведен расчет с предложенными изменениями, распределение поля скорости в сечении Z=5550 мм показаны на рис. 2.

На рис. 2 показано распределение поля скорости с двумя разными шкалами. Видно, что вихри отошли от стенки. Это означает, что предложение поставить горелки является удачным.



Рис. 2. Распределение поля скорости в сечении Z=5550 мм, после модификации печи

Дальнейшие исследования будут направлены на расчеты с усложнением моделей процессов, например при разных составах среды. Так же будут проведены расчеты с разными вариантами установки горелок.

## ЛИТЕРАТУРА:

1. Ванюков А.В., Уткин Н.И. Комплексная переработка медного и никелевого сырья. Челябинск, Металлургия, 1988. 432 с.

2. Гудима Н.В., Карасев Ю.А., Кистяковский Б.Б., Колкер Ю.А., Равданис Б.И. Технологические расчеты в металлургии тяжелых цветных металлов. Москва, Металлургия, 1977, 256 с.

3. Лоскутов Ф.М., Цейдлер А.А. Расчеты по металлургии тяжелых металлов. Москва, Металургиздат, 1963, 592 с.

4. Лойцянский Л.Г. Механика жидкости и газа. М.: Наука, 1987. 840 с.

5. Лыков А.В. Тепломассообмен. Москва, Энергия, 1978, 480 с.

6. ANSYS FLUENT 14.0 User's Guide. ANSYS Inc., 2011.

7. Пацей П.С. «Моделирование полей скорости и температуры в печи взвешенной плавки». Выпускная работа бакалавра. СПбГПУ. Санкт-Петербург. 2012.

8. Снегирёв А.Ю. Высокопроизводительные вычисления в технической физике. Численное моделирование турбулентных течений. Санкт-Петербург, Изд-во Политехн. ун-та, 2009, 143 с.

# ЧИСЛЕННОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ ТЕМПЕРАТУРНЫХ НАПРЯЖЕНИЙ, ВОЗНИКАЮЩИХ В НИЗКОТЕМПЕРАТУРНОЙ ИЗОЛЯЦИИ

Тепловая изоляция ограждений холодильных сооружений эксплуатируется в тяжелых условиях [1], прежде всего из-за непрерывных изменений температуры и влажности наружного воздуха, переменного воздействия солнечной радиации и ветра.

В настоящее время отсутствуют какие-либо модели и методики анализа тепловых режимов работы тепловой защиты систем холодоснабжения, описывающие реальные физические процессы, протекающие в пористой структуре тепловой изоляции и механизмы взаимодействия с окружающей средой. В связи с вышесказанным разработка новых подходов к анализу тепловых режимов и оценке теплопритоков к холодильным сооружениям различного назначения приобретает особую актуальность. Создание математических моделей, учитывающих комплекс физических процессов, реализующихся в теплозащитных конструкциях холодильной техники, позволит разработать прогностические модели оптимальных режимов функционирования рассматриваемых систем, характеризующиеся минимальными потерями холода и затратами на эксплуатацию, а также отвечающие принципам санитарно-гигиенической пригодности.

Целью данной работы является численное исследование температурных напряжений в низкотемпературной изоляции трубопроводов для транспортировки криожидкостей и анализ возможности разрушения изоляции.

Рассматривается участок трубопровода для транспортировки криожидкостей. Для тепловой изоляции трубопровода совместно решаются одномерные нестационарные задачи теплопроводности и задача термоупругости. Схема области решения представлена на рис. 1.



Рис. 1. Схематическое изображение области решения

Внешний контур изоляции трубопровода контактирует с окружающей средой (рис. 1). Для задачи теплопроводности на внутренней  $R_1$  и внешней  $R_2$  границах слоя тепловой изоляции вводятся граничные условия первого и третьего рода соответственно. В начальный момент времени температура  $T_{oc}$  равна постоянной величине. Предполагается, что
температура внутренней поверхности изоляции равна температуре холодной жидкости  $T_{x}$ . В результате охлаждения изоляции в ней возникают температурные напряжения.

Задача решена методом прогонки по неявной разностной схеме и методом Симпсона [2]. Особенности решения задачи заключались в нахождении физических параметров изоляции.

В качестве примера рассматривался типичный участок трубопровода для транспортировки сжиженного углеводородного газа – диаметром 400 мм [3]. В качестве изоляционного материала выбраны минеральная вата и пенополиуретан ППУ-104Б толщиной 280 мм. Температура внутренней границы  $R_1$  равна температуре криожидкости в резервуаре  $T_{\rm w} = 111$  K [4]. Температура окружающей среды  $T_{\rm oc} = 293$  К. Коэффициент теплоотдачи от воздуха к поверхности изоляции принимался равным  $\alpha = 5$  Вт/(м<sup>2</sup>·K). Время выхода на стационарный режим задавалось равным  $\tau = 300000$  с.

В табл. 1 приведены значения теплофизических характеристик [3 - 6] веществ и материалов, использовавшихся при проведении численного моделирован

	Коэффициент теплопроводности λ (Вт/м*К)	Удельная теплоемкость с (Кдж/кг*К)	Плотность ρ (кг/м3)	Коэффициент линейного температурного расширения α*10 <sup>-6</sup> (K <sup>-1</sup> )	Модуль Юнга Е (Мпа)	Коэффициент Пуассона µ	Предел прочности при растяжении о (Мпа)
Пенополиуретан	0,0397	0,46- 0,8	390	66- 71	1,15	0,33	1,4
Мин. Вата	0,047	0,88	130	7,7	0,15-0,25	0,17	0,01-0,04

Табл. 1. Теплофизические характеристики изоляционных материалов

Основные результаты численного моделирования температурных напряжений в низкотемпературной изоляции трубопроводов для транспортировки криожидкостей приведены на рис. 2 и 3.

Сопоставление теплофизических характеристик используемых изоляционных материалов (табл. 1) с полученными в результате моделирования данными (рис. 2,3) позволяет сделать вывод, что при данных начальных условиях, значения температурных напряжений не превышают табличных (как для пенополиуретана, так и для минеральной ваты). Исходя из физико-механических, физико-химических и термоупругих свойств пенополиуретана, результат моделирования достаточно закономерен, что нельзя сказать про результат моделирования температурных напряжений для минеральной ваты.

Проведено численное исследование температурных напряжений в низкотемпературной изоляции трубопроводов для транспортировки криожидкостей и анализ возможности разрушения изоляции. Для исследуемых образцов изоляционных материалов (пенополиуретан и минеральная вата) установлено, что при заданных условиях изоляция может эксплуатироваться.



Рис. 2. Результаты моделирования для пенополиуретана



#### ЛИТЕРАТУРА:

1. Половников В.Ю., Хабибулин А.М. Численное моделирование теплопереноса в ограждающих конструкциях резервуаров для хранения криожидкостей с учетом промерзания тепловой изоляции // Известия Томского политехнического университета. - 2012 - Т. 320 - №. 4 - С. 33-36.

2. Кинжибекова А.К., Никифоров А.С. Результаты исследования термонапряженного состояния обмуровки парового котла. - 2009.

3. Кузнецов Г.Ф., Бельский В.И., Горбачев В.П. Тепловая изоляция. – М.: Стройиздат, 1985. – 421 с.

4. Малков М.П. Справочник по физико-техническим основам криогеники. - М.: Энергоатомиздат, 1985. - 431 с.

5. Новицкий Л.А., Кожевников И.Г. Теплофизические свойства материалов при низких температурах. Справочник. – М.: Машиностроение, 1975. – 216 с.

6. ГОСТ 21880-2011. Маты из минеральной ваты прошивные теплоизоляционные. – М.: Стандартинформ, 2012. – 10 с.

# А.С. Кравчук, Д.В. Феоктистов, З.Е. Жаравин, И.А. Афанасьев (Томский политехнический университет)

## ДИНАМИЧЕСКИЙ КРАЕВОЙ УГОЛ ПРИ СМАЧИВАНИИ ТВЕРДОЙ ПОДЛОЖКИ ДИСТИЛЛИРОВАННОЙ ВОДОЙ

Исследования динамического поведения капли, лежащей на твердой поверхности, в настоящее время вызывают большой интерес. Это связано с важной ролью, которую этот объект играет в технологических процессах, например, при распылении чернил в струйных принтерах, капельном охлаждении поверхностей, росте биологических кристаллов и т.д. [1]. Однако на сегодняшний день нет полной, экспериментально проверенной теории растекания жидкости по твердой поверхности [2].

Одним из основных параметров, описывающих взаимодействие между жидкостью и твердой поверхностью, является динамический краевой угол смачивания.

В настоящей работе представлены экспериментальные результаты по натеканию смачивающей жидкости («сидящей» капли дистиллированной воды) на твердую поверхность (подложку). Цель исследования – определение влияния параметров смачивания и свойств поверхности подложки на наступающий краевой угол капли дистиллированной воды.

Для достижения поставленной цели решались следующие задачи: проведение серии экспериментов по определению краевого угла натекания при смачивании твердых поверхностей дистиллированной водой. Обработка экспериментальных данных и построение графических зависимостей изменения наступающего угла в зависимости от расхода дистиллированной воды и свойств подложки.

Экспериментальные исследования проводились на трех подложках, изготовленных из нержавеющей стали. Шероховатые поверхности получены путем бомбардировки гладкой поверхности частицами  $Al_2O_3$  размерами 10 и 100 мкм. Перед проведением эксперимента подложки в течение суток выдерживались в дистиллированной воде. Расход дистиллированной воды варьировался от 0,005 мл/с до 0,16 мл/с и составил 0,005; 0,01; 0,02; 0,04; 0,08; 0,016; мл/с. При каждой скорости накачки объём капли увеличивался с 0 до конечного объёма 0,3 мл.

Экспериментальные исследования проводились на установке, включающей теневую и шлирен системы [3]. Анализ форм капли жидкости на твердой поверхности проводился при помощи теневой методики. В процессе проведения эксперимента исследуемая поверхность закреплялась на столике и выравнивалась относительно осей оптических систем. На пульте vправления шприцевым объём насосом задавался конечный капли И расход дистиллированной воды. Скоростные видеокамеры включались одновременно с началом накачки капли шприцевым насосом через отверстие в подложке диаметром 2 мм. Обработка полученных видеокадров проводилась методом Юнга-Лапласа [4].

По результатам обработки экспериментальных данных построены графические зависимости  $\varphi_{\mu}=f(V)$ ,  $\varphi_{\mu}=f(V_k)$ , где  $\varphi_{\mu}$  – средний наступающий краевой угол, °C; V – объём капли, мкл;  $V_k$  – скорость трехфазной линии контакта, мм/с. Скорость трехфазной линии контакта рассчитывалась из следующего соотношения (1):

$$V_{k} = 0.5 \cdot C \cdot (B_{d3} - B_{d1}) / (K_{3} - K_{1}), \text{MM/c}, \qquad (1)$$

где C – скорость захвата кадров, кад/с;  $B_{d1}$ , $B_{d3}$  – диаметр капли в предыдущий и следующий момент времени соответственно, мм;  $K_1$ ,  $K_3$  – номер кадра в предыдущий и следующий момент времени соответственно.

На рисунке 1а, 1б, 2в представлены графические зависимости величины наступающего краевого угла от объёма капли  $\varphi_{H} = f(V)$  при натекании дистиллированной воды на

поверхности из нержавеющей стали с различной степенью шероховатости в диапазоне расхода дистиллированной воды 0,005–0,160 мл/с.



Рис.1. Изменение наступающего краевого угла в зависимости от объёма капли и расхода дистиллированной воды при растекании капли дистиллированной воды по: а) нержавеющей стали; б) нержавеющей стали с шероховатостью 10 мкм; в) нержавеющей стали с шероховатостью 100 мкм

При растекании дистиллированной воды по нержавеющей стали (рисунок 1a) хорошо прослеживаются 2 стадии. Стадия I в зависимости от расхода дистиллята длится от 80 до 90% всего времени растекания и характеризуется постепенным уменьшением динамического краевого угла. Во время стадии II краевой угол натекания уменьшается значительно. Натекание капли происходит до тех пор, пока движущая сила больше нуля [5]. С увеличением расхода дистиллированной воды максимальная величина краевого угла практически не меняется, а начиная с расхода 0,04 мл/с увеличивается.

При смачивании стали с шероховатостью 10 мкм (рисунок 1б) подобной зависимости нет. Установлено, что при расходе 0,005 мл/с наступающий краевой угол увеличивается с увеличением объёма капли. Максимальное значение динамического краевого угла зафиксировано при расходе 0,08 мл/с, дальнейшее увеличение расхода не приводит к увеличению значения краевого угла.

При натекании дистиллированной воды на сталь с шероховатостью 100 мкм (рисунок 1в) максимальное значение краевого угла натекания достигается при скорости накачки 0,16 мл/с. При расходах 0,005-0,01 мл/с краевой угол увеличивается с увеличением объёма капли.

Таким образом, вышеизложенный материал позволяет сделать заключение о том, что шероховатость поверхности значительно влияет на краевой угол натекания при малых расходах дистиллированной воды. На шероховатых поверхностях наблюдается увеличение наступающего краевого угла. Кроме того, увеличение расхода дистиллированной воды так же приводит к увеличению краевого угла. Это связано с быстрым растеканием смачивающей жидкости по микроканавкам поверхности при малых скоростях трехфазной линии контакта капли.

Так же установлено, что с увеличением объёма капли скорость контактной линии уменьшается. Максимальная скорость трёхфазной линии контакта наблюдается в начальный момент времени накачивания капли. Однако данные закономерности не удовлетворяют малым расходам дистиллированной воды.

#### ЛИТЕРАТУРА:

1. D. Bonn. Wetting and spreading // Reviews of modern physics.–2009.– №89.– P. 739 – 805.

2. Moving Contact Lines: Scales, Regimes, and Dynamical Transitions // Annual Review of Fluid Mechanics.-2013.-No45.-P. 269-292.

3. D. Zaitsev, A. Semenov, A. Kravchuk. The effect of the substrate wettability and roughness on the dynamic contact angle // Droplets of pure and complex fluids: 1st Int. Workshop on Wetting and evaporation.–Marseilles, 2013. - P. 93 - 95.

4. ShiYow Lin. Measurement of dynamic/advancing/receding contact angle by video-enhanced sessile drop tensiometry // Review of Scientific Instruments.–1996.–№67.– P. 2852 – 2858.

5. Сумм Б.Д., Горюков Ю.В. Физико-химические основы смачивания и растекания. -М.:Химия, 1976.-232 с.

## СЕКЦИЯ «ПРИКЛАДНАЯ МАТЕМАТИКА»

УДК 681.3.07

# С.Ю. Беляев, А.К. Виноградов (Санкт-Петербургский государственный политехнический университет)

## ПРИМЕНЕНИЕ МАСС-ПРУЖИННОЙ МОДЕЛИ ОБУВИ ДЛЯ ЕЕ ВИРТУАЛЬНОЙ ПРИМЕРКИ

Продажа товаров в Интернете является стремительно развивающейся отраслью. Одним из сегментов данного рынка является онлайновая торговля обувью. В таком магазине покупатель не имеет возможности примерить выбранную модель, поэтому продавцы терпят огромные убытки из-за возврата товаров. По данным маркетологов, число возвратов моделей, не подошедших покупателям, достигает 50% от общего числа заказов. Один из способов уменьшить процент возвратов – предоставить покупателю возможность, не совершая заказ, оценить, подойдёт ли ему выбранная модель обуви его размера путем «виртуальной примерки». Характеристики ноги, такие как ширина стопы и высота подъема, у каждого человека индивидуальны – поэтому виртуальная примерка обуви должна опираться на соответствующие величины.

#### Обзор существующих методов

Существующие методы виртуальной оценки комфортности ношения обуви делятся на 2 типа: геометрические и физические.

Геометрические методы, например [1], основываются на технике динамики свободных форм (Free-Form Deformation). Преимуществом данных методов является простота реализации и скорость работы. Но при этом они обладают двумя серьезными недостатками: сложность подбора параметров для реалистичной деформации материала обуви при контакте с ногой, а также отсутствие возможности расчета физических величин, таких как давление. Существующие физические методы используют метод конечных элементов [2]. При этом расчеты проводятся при помощи таких пакетов, как ANSYS и др. Данные методы дают результаты высокой точности, но не могут быть применены в веб-сервисах из-за высокой вычислительной сложности.

### Цель работы

Разработать метод виртуальной оценки комфортности ношения покупателем выбранной в интернет-магазине модели обуви с учетом индивидуальных характеристик его стопы. Важным требованием является возможность использовать полученный подход в существующих решениях интернет-магазинов, т.е. время отклика должно быть комфортным для пользователя (1-3 секунды) при сохранении требуемой точности результата.

## Полученные результаты

Для того чтобы оценить, комфортно ли будет носить выбранную обувь, можно рассчитать давления со стороны ботинка на ногу в специально подобранном наборе контрольных точек [6] (Рис. 1). В момент примерки обувь подвержена деформации со стороны ступни, поэтому для оценки величины давления на ногу необходимо найти оптимальное расположение ноги человека в выбранной модели сначала без учета, а затем с учетом деформации материала. Нами разработаны два алгоритма оптимального позиционирования виртуальной модели ноги в виртуальной модели ботинка: оптимального позиционирования ноги в обуви путем минимизации величины проникновения недеформируемой модели ноги в недеформируемую модель обуви (геометрическое позиционирование) и оптимального позиционирования ноги в обуви путем минимизации сил

давления на ногу со стороны деформируемой модели обуви (физическое позиционирование). Для моделирования поведения материала обуви при контакте с ногой, а также для расчета давлений, он представляется в виде масс-пружинной модели [3], после чего для проведения физической симуляции к ней применяется метод динамики, основанный на перемещениях [4, 5]. Для проведения оценки комфортности наш метод использует трехмерную модель ноги, построенную по предоставленным пользователем замерам стопы с помощью техники динамики свободных форм[1], и трехмерную модель обуви, которую он выбрал.



Рис. 1. Контрольные точки ноги, в которых проводятся замеры давлений

### Оптимальное позиционирование

Перед началом позиционирования мы располагаем систему координат, таким образом, чтобы задняя сторона пятка находилась в начале координат, а ось z была направлена вдоль стопы (рис. 2). Далее мы считаем, что нога зафиксирована в пятке и совершает только вращение вокруг оси y.



Рис. 2. Расположение ноги относительно координатных осей

На рис. 3 видно, что недеформируемая модель обуви проникает в модель ноги. С физической точки зрения, в тот момент, когда ступня человека будет помещена в данную модель обуви, в зонах проникновения возможно возникновение сил, которые будут стремиться повернуть ногу таким образом, чтобы суммарные значения слева и справа относительно оси *z* сравнялись. Для достижения оптимального геометрического позиционирования мы поворачиваем модель ноги таким образом, чтобы моменты возникающих сил сравнялись относительно оси *z*.

После выполнения поворота зоны проникновения устраняются путем выталкивания материала ботинка из ноги. В этот момент в нем возникают внутренние силы, пытающиеся

восстановить исходную форму. Данные силы обусловлены сопротивлениями к растяжению, сдвигу и изгибу. Возникающие силы оказывают давление на ногу, создавая ранее указанные моменты.



Рис. 3. Исходное положение ноги (слева); положение ноги после геометрического позиционирования (по центру); положение ноги после физического позиционирования (справа)

### Расчет давлений со стороны обуви на ногу

После того, как найдено оптимальное положение ноги в ботинке, можно рассчитать давления, оказываемые им на ногу. Для этого, в каждом узле масс-пружинной модели можно вычислить возникающие в нем внутренние силы, препятствующие растяжению, сдвигу и изгибу. Проецируя полученные силы на нормаль в соответствующих узлам масс-пружинной модели вершинах полигональной сети, мы получаем силы, действующие на ногу со стороны ботинка. Для вычисления давлений в точках ноги, ближайших к вершинам ботинка, мы можем разделить модуль силы, действующей в вершине ботинка, на площадь, ассоциированную с точкой ноги.



Рис. 4. Пример расчета давлений: красные зоны – сильное давление, желтые – среднее, синие - слабое

### Выводы

В результате проведенной работы разработан метод оценки комфортности ношения выбранной модели обуви, заключающийся в применении масс-пружинной модели обуви и метода динамики, основанной на перемещениях. Результаты экспериментов показали, что время работы метода на современном компьютере с конфигурацией Intel Core i7, 16 Gb RAM составляет 0,9 с, что позволяет встроить реализованный метод в существующие решения Интернет магазинов.

### ЛИТЕРАТУРА:

1. Masaaki Mochimaru, Makiko Kouchi, Masako Dohi, "Analysis of 3-D human foot forms using the Free Form Deformation method and its application in grading shoe lasts", Ergonomics, vol. 42, no. 9, 2000.

2. Maria Jose Rupérez Moreno, "Multidisciplinary techniques for the simulation of the contact between the foot and the shoe upper in gait: virtual reality, computational biomechanics, and artificial neural networks", Valencia University, 2011

3. Adrian R. Goldenthal. "Implicit Treatment of Constraints for Cloth Simulation", Hebrew University, 2010.

4. Matthias Muller, Bruno Heidelberger, Marcus Hennix, John Ratcliff. "Position Based Dynamics", "VRIPHYS", 2006.

5. Matthias Muller, Jos Stam, Doug James, Nils Thurey. "Real Time Physics Class Notes", SIGGRAPH, 2008.

6. M.J. Rupérez, C. Monserrat, S. Alemany, M.C. Juan, M. Alcañíz, "Contact model, fit process and foot animation for the virtual simulator of the footwear comfort", Computer-Aided Design 42, 2010, P. 425 – 431.

### УДК 51-76

# А.А. Иголкина, В.В. Гурский (Санкт-Петербургский государственный политехнический университет)

# МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ МЕХАНИЗМОВ ТРАНСКРИПЦИИ ГЕНОВ В РАННЕМ РАЗВИТИИ *DROSOPHILA*

Развитию организма в период эмбриогенеза сопутствует множество сложных механизмов детерминации клеток и частей зародыша. В настоящее время такие механизмы до конца не изучены, и важнейшим элементом для их количественного описания являются математические модели, способные отображать генетический текст в биологические функции.

Процесс, в ходе которого наследственная информация от гена преобразуется в функциональный продукт, называется экспрессией гена и состоит из нескольких стадий: транскрипция (процесс синтеза РНК на гене) и трансляция (процесс синтеза белка на молекулах РНК). Экспрессия генов регулируется различными факторами, прежде всего на стадии транскрипции продуктами экспрессии других генов.

Одним из наиболее изученных модельных объектов в области раннего эмбриогенеза является *Drosophila*. На начальном этапе развития зародыш *Drosophila* представляет собой одну вытянутую по AP (anterior-posterior) оси клетку. В этот период в зародыше закладываются положения основных сегментов строения мушки. Положения таких сегментов определяется распределением концентраций определенных белков по AP оси эмбриона. Эти белки являются продуктами экспрессии так называемых генов материнского эффекта (*bicoid* и *caudal*) и гэп-генов (*Kruppel, knirps, gaint, hunchback, tailless*).

Транскрипционная регуляция гэп-генов происходит под влиянием продуктов экспрессии генов материнского эффекта и самих гэп-генов. Такая взаимосвязь генов представляет собой генную сеть, моделирование взаимодействий в которой является одним из подходов к изучению устойчивых паттернов концентраций белков в зародыше *Drosophila*.

Целью настоящей работы является создание математической модели, способной количественно предсказывать экспрессию в сети гэп-генов на основе информации о регуляторной последовательности гена (энхансере) и транскрипционных факторах, влияющих на экспрессию. Задача моделирования состоит в выяснении механизмов того, как регуляторные районы генов гэп определяют уровень их экспрессии, наблюдаемый в эксперименте.

Один из наиболее популярных подходов к моделированию экспрессии генов в Drosophila на стадии синцития является термодинамический подход. В моделях, основанных на таком подходе [1 - 4], экспрессия гена описывается с помощью перебора всех возможных конфигураций его регуляторного участка ДНК, энхансера (рис. 1), состоящего из определенного числа сайтов связывания с транскрипционными факторами.



Рис. 1 (А). Схема регуляции гена. На рисунке схематически изображен отрезок ДНК, содержащий кодирующую область гена (сайт старта транскрипции отмечен изогнутой стрелкой) и его регуляторная область (энхансер). Красные и зеленые овалы – разные транскрипционные фактор. (Б). Регуляторный район гэп-гена hb, указано расположение сайтов посадки транскрипционных факторов (bcd, cad, hb, Kr)

Для каждой конфигурации энхансера о вычисляется ее статистический вес W в каждом положении у AP оси. Активация транскрипции гена, вызванная конфигурацией о, описывается с помощью функции Q. Таким образом, вероятность E активации гена можно вычислить с помощью формулы [1]:

$$E(y) = \frac{\sum_{\sigma} W(\sigma, y) \cdot Q(\sigma)}{\sum_{\sigma} W(\sigma, y) \cdot Q(\sigma) + \sum_{\sigma} W(\sigma, y)}$$
(1)

В предложенной модели заложен ряд свободных параметров:

- параметры присоединения транскрипционных факторов к энхансерам гэп-генов
- параметры влияния транскрипционных факторов на транскрипцию.

Оптимальные значения параметров модели определяются в ходе минимизации значения функции качества: последовательного применения Симплекс метода Нелдера-Мида и метода градиентного спуска на случайной выборке начальных приближений для параметров.

В настоящей работе был изучен и модифицирован предложенный в [1] подход к моделированию механизмов генной экспрессии. Первая модификация связана с добавлением новых биологически осмысленных параметров модели, характеризующих влияние транскрипционного фактора на экспрессию гена-мишени. Вторая модификация касается динамики изменения концентрации рассматриваемых генов: в модель внесен новый параметр - время задержки между началом транскрипции гена и концом синтеза соответствующего белка. Были проведены расчеты для сбора статистики значений параметров модели.

Модификация модели позволила достичь количественного соответствия решения модели с экспериментальными данными (рис. 2).



Рис. 2. Паттерны экспрессии гэп-генов в модели (синие кривые) и в экспериментальных данных (красные кривые) незадолго до гаструляции. По оси ординат отложены концентрации белков в условных единицах, по оси абсцисс координата на А-Р оси эмбриона в процентах от его длины

Предварительные расчеты с помощью программы, реализующей модель с задержкой, предсказывают несколько возможных оценок для времени задержки: 6, 13 и 20 минут.

Основным результатом настоящей работы является разработка модели экспрессии гэпгенов. В модели были учтены основные биологические свойства процессов присоединения транскрипционных факторов и внесены новые, ранее не рассматриваемые в моделях такого типа, параметры. Разработанная и апробированная в работе модель является расширением и усовершенствованием существующих термодинамических моделей. Использование результатов такой модели даст более глубокое понимание работы генетических механизмов на эмбриональном этапе развития не только мушки *Drosophila*, но и других организмов.

### ЛИТЕРАТУРА:

1. Xin He et. al., Thermodynamics-Based Models of Transcriptional Regulation by Enhancers: The Roles of Synergistic Activation, Cooperative Binding and Short-Range Repression, Plos Conputational Biology, 9(V6), 2010.

2. Hilde Janssens et. al, Quantitative and predictive model of transcriptional control of the Drosophila melanogaster even skipped gene, Nature Genetics, 10(V38), 2006.

3. Eran Segal et. al, Predicting expression patterns from regulatory sequence in Drosophila segmentation, Nature, 06496, 2007.

4. Ahmet Ay et. al, Mathematical modeling of gene expression: a guide for the perplexed biologist, Informa: Critical Reviews in Biochemistry and Molecular Biology, 46(2), 2011.

5. Gray S, Levine M, Transcriptional repression in development. Curr OpinCell Biol 8: P. 358–364, 1996.

6. Stormo G.D., Fields D.S. Specificity, free energy and information content in protein-DNA interactions. Trends Biochem Sci 1998, 23: P. 109–113.

8. Andrei Pisarev, FlyEx, the quantitative atlas on segmentation gene expression at cellular resolution, Nucleic Acids Research: Database issue, V37, 2009.

## ПОЛУЧЕНИЕ КОЛИЧЕСТВЕННЫХ ХАРАКТЕРИСТИК РЕЦЕПТОР -ОПОСРЕДОВАННОГО ЭНДОЦИТОЗА

Одним из основных процессов взаимодействия органелл клетки является везикулярный транспорт, который обеспечивает поглощение веществ и перенос биологических комплексов внутри клетки [1]. В 2013 г. важность изучения данного процесса была подтверждена присуждением Нобелевской премии по физиологии и медицине Рэнди Шекману, Джеймсу Ротману и Томасу Зюдхофу за раскрытие механизмов везикулярного транспорта.

Эндоцитоз позволяет клеткам поглощать вещества, путем втягивания (инвагинации) участка клеточной мембраны и образования в цитоплазме мембранного пузырька - эндосомы, являющейся одним из видов транспортных везикул. Большинство эндосом, образующихся в результате эндоцитоза из плазматической мембраны, транспортируются внутрь клетки, где сливаются с существующими эндосомами, образуя, таким образом, эндосомную сеть. С помощью эндоцитоза клетка утилизирует отработанные поверхностные рецепторы, импортирует необходимые макромолекулы, а также захватывает бактерии, вирусы и другие чужеродные агенты в процессе иммунной защиты [2].

Компьютерный анализ изображений рецептор-опосредованного эндоцитоза эпидермального фактора роста в клетках HeLa, полученных на конфокальном микроскопе, необходим, чтобы количественно охарактеризовать динамическое поведение сети эндосом в клетке. Сегментация изображений – важная составляющая медицинских приложений по диагностике и анализу данных, использующаяся для выделения объектов и границ (линии, кривые, и т. д.) на изображениях. Существует несколько основных методов сегментации: эвристические методы, методы на графах, кластеризация, энергетические методы [3].

Цель работы — разработка и применение метода получения количественных характеристик движения эндосом из экспериментальных временных серий изображений. В ходе работы необходимо решить следующие задачи:

- разработать процедуру обработки и анализа временных серий изображений движущихся частиц в клетке;

- провести сегментацию тестовых изображений с последующим извлечением количественных данных о пространственно-временной динамике образования биологических комплексов в клетке.

В проекте будут использованы данные (изображения) рецептор-опосредованного эндоцитоза эпидермального фактора роста в клетках HeLa, полученные на конфокальном микроскопе Leica TCS SP5 с использованием флуоресцирующих антител. Исследуемые изображения представляют собой 24-битовые изображения в формате TIFF.

Некоторые изображений имеют ряд особенностей, например, слабо различимые границы. В связи с этим, становится актуальной задача сегментации. Тестовый набор изображений содержит данные для временных точек 01, 15, 60 и 90 минут. Для каждого момента времени получены 2 изображения: в первом канале - EEA1 (early endosome antigen 1-антиген ранних эндосом 1 - зеленая флуоресценция), во втором канале - EGF-R (epidermal growth factor receptor – рецептор эпидермального фактора роста - красная флуоресценция).

В лаборатории «Математическая биология систем» кафедры «Прикладная математика» СПбГПУ ведется разработка ПО ProStack для обработки и анализа изображений в области системной биологии и медицины. Пакет ProStack содержит как стандартные методы обработки изображений, так и методы, разработанные в СПбГПУ, а сценарии обработки строятся с помощью создания диаграмм в визуальном редакторе, который не требует навыков программирования. Пакет ProStack успешно применяется для получения количественной информации из экспериментальных изображений биологических объектов [4].

С помощью ПО ProStack построены сценарии для сегментации эндосом во временных сериях изображений рецептор-опосредованного эндоцитоза, полученных на конфокальном микроскопе. Основные шаги процедуры: загрузка изображений в двух каналах (зеленый - EEA1 и красный - EGF-R), применение фильтров (удаление шумов, выравнивание интенсивности, выделение границ объектов – пороговая сегментация, разделение «слипшихся» объектов и т.д.), получение маски, получение контрольных изображений объектов и их количественных характеристик. Время, требуемое для обработки всех 50-ти изображений составляет 1 час 19 минут, количество шагов равно 93. Процедура применена к тестовому набору изображений. Качество сегментации оценивалось визуально с помощью наложения изображения границ объектов на экспериментальное изображение. В результате для всех выделенных объектов получены количественные характеристики, такие как площадь, ширина, высота, средняя интенсивность и т.д.

Пространственно-временная динамика эндосом проанализирована с помощью исследования зависимости количества объектов определённого вида от заданного размера в заданный момент времени. Гистограмма зависимости представлена на рис.1:



в моменты времени 01, 15, 60 и 90 минут

По горизонтальной оси – диаметр объектов в нанометрах, по вертикальной – количество объектов в клетке. Для построения гистограммы выбран шаг изменения диаметра объекта в 200 нм. Анализируя полученные гистограммы можно сделать следующие выводы: в первые минуты после начала эндоцитоза в клетке преобладают достаточно малые объекты

диаметром от 200 до 400 нм; к концу эндоцитоза количество объектов уменьшается, а их размеры увеличиваются; максимальное количество объектов в клетке наблюдается на 60-ой минуте эндоцитоза, минимальное - на 90-ой минуте. Полученные количественные результаты соответствуют известным характеристикам, таким как среднее число объектов в клетке, размер, коэффициент кластеризации. Однако зависимость количества объектов от заданного размера в момент времени 1 минута не совсем верна, так как в этот момент в клетке должны преобладать объекты с меньшим диаметром. Полученная неточность в результатах может быть исправлена за счет использования дополнительных фильтров и более точных методов сегментации.

Данные результаты будут использованы для разработки теории объяснения механизмов, лежащих в основе коллективного поведения многих индивидуальных эндосом. Разработанную процедуру планируется улучшить (повысить эффективность и точность) за счет использования метода активных контуров.

Метод активных является одним из видов энергетических методов [5]. Модель активных контуров, (англ. Active Contour Model) – вариационный метод поиска границ в изображении. В описываемом алгоритме используется модель активных контуров свободной формы. Данный метод имеет следующие основные преимущества: использование локальных характеристик изображения; отказ от использования идеальных моделей краев и границ (ступенчатые или в виде рампы); связность (непрерывность) активного контура (не требуется решать задачу объединения отдельных фрагментов границы в непрерывную кривую или объединять области).

#### ЛИТЕРАТУРА:

1. James E. Rothman, The machinery and principles of vesicle transport in the cell, NATURE MEDICINE, VOLUME 8, NUMBER 10, OCTOBER 2002, P. 1059 – 1062.

2. Marianna V. Kharchenko, Alexander A. Aksyonov, Maria M. Melikova, Elena S. Kornilova, Epidermal growth factor (EGF) receptor endocytosis is accompanied by reorganization of microtubule system in HeLa cells, Cell Biology International 31 (2007), C. 349 – 359.

3. Р. Гонсалес, Р. Вудс, Цифровая обработка изображений, Москва, ТЕХНОСФЕРА, 2005.

4. Козлов К.Н., Писарев А.С., Самсонова М.Г. (2011). Разработка сценариев обработки биомедицинских изображений в пакете ProStack. Сборник статей второй международной научнопрактической конференции "Высокие технологии, фундаментальные и прикладные исследования в физиологии и медицине", 26-28.10.2011, Санкт-Петербург, Россия, под редакцией А.П. Кудинова, Б.В.Крылова, Издательство Политехнического университета, С. 207 – 209.

5. Wei Yu, Franz Franchetti, Yao-Jen Chang, Tsuhan Chen, FAST AND ROBUST ACTIVE CONTOURS FOR IMAGE SEGMENTATION, 17th IEEE International Conference on Image Processing (ICIP), 2010.

# АНАЛИТИЧЕСКОЕ И ЧИСЛЕННОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ КОШИ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ТИПА ДЖЕФФРИСА В ТРЕХМЕРНОМ СЛУЧАЕ

Классическое уравнение диффузии, основанное на законе Фика, широко используется для макроскопического описания процессов переноса. Однако закон Фика не учитывает массу движущихся частиц, поэтому уравнение диффузии адекватно описывает процессы переноса только в слабо неоднородных средах и/или медленно протекающие процессы, в которых время релаксации мало по сравнению с характерным временем процесса. В противном случае эта модель может привести к таким нефизичным результатам, как бесконечная скорость распространения возмущения.

Заменой уравнению диффузии некоторое время считалось телеграфное уравнение. В отличие от уравнения диффузии, возмущения в телеграфном уравнении распространяются с конечной скоростью. Однако оказалось, что в двумерном [1] и трехмерном [2] случаях решения задачи Коши для телеграфного уравнения могут принимать отрицательные значения, то есть являются физически неправдоподобными.

Уравнение типа Джеффриса было первоначально предложено для реологического описания земной коры [3]. Оно обобщает уравнение диффузии и телеграфное уравнение.[4] Это уравнение в частных производных третьего порядка. В настоящей работе была исследована задача Коши для трехмерного уравнения типа Джеффриса. Целью исследования было выяснить, будет ли решение задачи Коши для уравнения типа Джеффриса в трехмерном случае неотрицательным.

Постановка задачи выглядит следующим образом:

$$\begin{cases} \tau \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \left(1 - \tau \frac{\partial f}{\partial u}\right) \frac{\partial u}{\partial t} - \tau D_1 \frac{\partial \Delta u}{\partial t} - (D_1 + D_2) \Delta u = f + \tau \frac{\partial f}{\partial t}, \ x \in \mathbb{R}^3, \ t > 0 \\ u \Big|_{t=0} = \delta(x) \\ u_t \Big|_{t=0} = 0 \\ u \Big|_{x \to \infty} \to 0 \end{cases}$$

где  $u \equiv u(\vec{x},t)$  – концентрация вещества,  $\vec{x} = (x_1, x_2, x_3)$  – точка пространства, t – время,  $\vec{J} \equiv \vec{J}(\vec{x},t)$  – поток вещества, f – плотность источников вещества,  $\tau$  – характерное время релаксации.

Рассматривалась правая часть вида  $f = -\gamma u$ , где  $\gamma$  - коэффициент поглощения.

Уравнение было приведено к безразмерному виду, после чего выяснилось, что достаточно исследовать зависимость свойств решения только от одного из параметров.

Аналитическая формула для решения была найдена методом Фурье:

$$u(x,t) = \frac{1}{2\pi^2 |x|} \int_{0}^{\infty} \xi F u(\xi) \sin(|x|\xi) d\xi$$

Для подавления эффекта Гиббса рассматривалась только регулярная составляющая решения.

Ее можно найти численно. Полученный график приведен на рисунке 1 для значений параметров  $D_1 = D_2 = 1$ ,  $\tau = 1$ ,  $\gamma = 0$ .



Рис. 1. Регулярная часть решения задачи Коши для уравнения типа Джеффриса

После численного вычисления решения поставленной задачи, аналитическая формула этого решения была исследована в окрестности нуля.

$$\begin{bmatrix} t < t_{\kappa p} \implies u^{r}(x,t) \big|_{x=0} = \infty \\ t = t_{\kappa p} \implies u^{r}(x,t) \big|_{x=0} - orpahuueho \\ t > t_{\kappa p} \implies u^{r}(x,t) \big|_{x=0} = -\infty \end{bmatrix}$$

где  $t_{\kappa p} = \frac{1+D_2}{D_2(1+D_2-\gamma)}$ .

Полученный аналитический результат полностью согласуется с графиками, полученными численно.

Более того, в процессе численного исследования решения было обнаружено, что решение задачи Коши для уравнения типа Джеффриса может принимать отрицательные значения не только вблизи нуля, но и в других областях. Однако изучение этих областей в данной работе проведено не было, поскольку выше уже показано, что при любых значениях параметров найдется такой момент времени t, в который решение будет принимать отрицательное значение вблизи нуля.

## Выводы:

Доказано, что при любых значениях параметров решение задачи Коши для уравнения типа Джеффриса в трехмерном случае принимает отрицательные значения в окрестности нуля

- Численно обнаружены другие области, в которых решение принимает отрицательные значения
- Тем самым показано, что уравнение типа Джеффриса как модель процессов переноса имеет серьезный дефект

Дополнительно было начато исследование уравнения предложенного Quitanilla и Racke в статье [5] для одномерного случая. После численного нахождения решения оказалось, что теоретически ожидаемого [6] фронта волны не наблюдается. Это может стать недостатком данной модели.

### ЛИТЕРАТУРА:

1. Masoliver J., Porra J. M. When the telegrapher's equation furnishes a better approximation to the transport equation than the diffusion equation. Physical Review E, Volume 55, 6, 1997.

2. Korner C., Bergmann H. W. The physical defects of the hyperbolic heat conduction equation. Applied Physics A: Materials Science&Processing, 67, 1998.

3. H. Jeffreys. The Earth, Its Origin, History and hysical Constitution, Cambridge University Press, Cambridge, 1929.

4. Joseph D. D., Preziosi L. Heat waves. Reviews of Modern Physics, Vol. 61, No. 1, 1989.

5. Quintanilla R., Racke R. A note on stability in dual-phase-lag heat conduction. International Journal of Heat and Mass Transfer, 49, 2006.

6. Ландау Л. Д. Теория сверхтекучести гелия II ЖТЭФ (11, 592), 1941.

### ПОИСК МОБИЛЬНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ В ГЕНОМАХ ДРЕВНИХ ЛЮДЕЙ

По всему геному человека и других приматов разбросаны короткие последовательности длиной около 300 н.п., число которых на гаплоидный геном достигает 300-500 тысяч, составляя до ~3% всей ДНК. Аlu-последовательности присутствуют внутри самых разных генов: глобинов, инсулина, интерферона, а-фетопротеина, генов гистосовместимости. В клетках человека найдены гетерогенные по размеру кольцевые молекулы, содержащие Aluпоследовательности вместе с другой ДНК. Количество копий кольцевых Alu-содержащих ДНК отличается в разных тканях человека. Они найдены также в культивируемых клетках обезьян. Судя по количеству копий, кольцевые молекулы, находясь вне хромосом, продолжают редуплицироваться, а потом, вероятно, некоторые кольцевые ДНК снова интегрируются в разные хромосомные сайты. Таким путем Alu-последовательности могут перемещаться, умножаться И изменять клеточный геном. Кроме того, Aluпоследовательности могут перемещаться, не выходя из хромосомы. Вклад Aluпоследовательностей в дестабилизацию генома может заключаться в том, что они, будучи одной из основных форм повторов по крайней мере у приматов, стимулируют рекомбинации, приводящие к разным перестройкам [1]. Человекспецифические мобильные элементы представлены сравнительно небольшим общим числом копий. Они подразделяются на четыре группы: HERV-K, L1, Alu, SVA. Количество копий представителей HERV-K, L1, Alu и SVA составляет около 150, 1200, 5500 и 860 копий на геном соответственно [2].

Около 35 – 40 подсемейств Alu, L1 и SVA активны в геноме человека: они являются механизмом, в результате которого возникает генетическое разнообразие в геномах людей, и также могут вызывать заболевания, интегрируясь в гены. Хотя наиболее активные транспозоны в геноме определены большим количеством новых вставок, недавняя активность не обязательно означает, что элемент остался активным – необходимы дополнительные исследования. Одна из стратегий идентификации недавно мобилизованных копий транспозонов заключается в сравнении геномов человека и шимпанзе и выявлении конкретных видов вставок транспозонов. Другой подход заключается в сравнении последовательностей индивидуальных геномов с последовательностью референсного генома человека. Оба этих подхода показывают, что 37 подсемейств Alu, L1, SVA, HERV-К были активны в последней человеческой истории [3].

Целью работы является построение рабочей платформы для сбора и анализа информации о мобильных элементах в геномах древних людей, что включает в себя следующие этапы:

- 1. Найти последовательности Денисовского человека и Неандертальца в базах данных;
- 2. В этих геномах собрать протяженные последовательности для различных подсемейств мобильных элементов;
- 3. Провести множественное выравнивание собранных последовательностей с последовательностями соответствующих мобильных элементов генома человека и построить филогенетические древа.

Для исследования были взяты фрагменты секвенирования геномов Денисовского человека и Неандертальца. Поиск фрагментов, гомологичных мобильным элементам

современного человека, осуществлялся с помощью базы данных Dfam. Были созданы (скрытых Марковских моделей) для различных семейств мобильных профили НММ элементов Dfam содержит информацию Alu. 0 всех мобильных элементах, идентифицированных В человеческом геноме, представленную множественными выравниваниями, профилями НММ, построенными на основании таких выравниваний, а также списки расположений nhmmer-идентифицированных соответствий записям в геноме человека. [4]

При анализе генома Денисовского человека были обнаружены следующие 48 подсемейств мобильных элементов, представленных далее по убыванию количества записей: AluYa8, AluYk11, AluSq10, FLAM\_C, AluYk12, FRAM, AluSp, AluSq4, AluSz6, AluSg4, FLAM\_A, AluJb, AluSz, AluSc5, AluSc, AluSq, AluSq4, AluSg, AluSc8, AluJr4, AluSx3, AluSq2, AluJr, AluSg7, AluJo, AluYk4, AluSx1, AluSx, AluYc, FAM, BC200, SVA\_A, AluY, SVA\_F, AluYh9, SVA\_D, AluYa5, SVA\_B, AluYb9, SVA\_C, AluYb8, AluYf5, AluYc3, SVA\_E, AluYg6, AluYf4, AluYd8, AluYc5.

Согласно [3], 22 подсемейства AluY и 6 подсемейств AluS были активны в последней истории человечества: AluSc, AluSg, AluSp, AluSq, AluSx, AluSz; AluY, AluYa1, AluYa4, AluYa5, AluYa5a2, AluYa8, AluYb3a1, AluYb3a2, AluYb8, AluYb9, AluYc1, AluYc2, AluYd2, AluYd3, AluYd8, AluYe2, AluYe5, AluYf1, AluYg6, AluYh9, AluYi6, AluYj.

Только подсемейство AluYa5 полностью протестировано к настоящему моменту, и необходимы дополнительные исследования, чтобы определить, остаются ли активными остальные. Подсемейство AluJ не включено в список предположительно активных, но во фрагментах секвенирования Денисовского человека были найдены подсемейства AluJo, AluJr, AluJr4, AluJb, причем последнее представлено больше других перечисленных. Поэтому для анализа генома Денисовского человека были взяты подсемейства AluJb, найденных гомологичных фрагментов были собраны AluYa5. Из протяженные последовательности для различных семейств мобильных элементов с помощью программы ABYSS [5]. Численно был подобран параметр k (длина k-мера), при котором собираются контиги максимальной длины. При этом анализировалась значения медианы и максимума для полученных контигов. Среди максимальных были взяты контиги длиной 197-206 нуклеотидов, соответствующие этому параметру.

При анализе последовательностей фрагментов генома Неандертальца было выяснено, что собираются слишком короткие контиги для подсемейств AluYa5, AluJb, а при некоторых значениях k и вовсе не происходит сборки контигов. Поэтому для Неандертальца было взято подсемейство AluYa8 как одно из наиболее представленных в геноме. Были взяты максимальные контиги, полученные при некотором значении параметра (длиной 108-136 нуклеотидов).

Далее было проведено множественное выравнивание полученых протяженных фрагментов с последовательностями соответствующих мобильных элементов генома человека с помощью программы CLUSTALW 2.1. Мобильные элементы генома человека были взяты из базы данных RepeatMasker, Repbase. Поскольку среди выбранных контигов присутствуют и достаточно короткие по сравнению с длиной консенсусных последовательностей для AluYa5, AluYa8, AluJb (310, 310, 312 п.н. соответственно), то сходство собранного фрагмента с консенсусами других подсемейств Alu может быть выше, с последовательностями подсемейства, по которому отбирались чем фрагменты секвенирования. Это связано с тем, что в составе консенсусных последовательностей Alu имеются области с различными уровнями консерватизма и сходства. Выбирая контиги максимальной длины, получаем правильное распределение их по семействам при построении филогенетического древа (рис. 1). Название контига содержит значение k, при котором он был собран. Следовательно, только при условии достаточной информации

получаем рабочую структуру для анализа вставок мобильных элементов в геномы древних и современных людей.



Рис. 1. Фрагменты плоского филогенетического древа, содержащие построенные контиги

Разработан сценарий для автоматического сбора и анализа информации о мобильных элементах в геномах древних людей. В дальнейшем можно использовать эту рабочую платформу для исследовательской работы – обнаружения мобильных элементов в геномах древних и современных людей и анализа их влияния на процесс эволюции.

### ЛИТЕРАТУРА:

1. Непостоянство генома. Хесин Р.Б.; М.: Наука; 1984; С. 199 – 200.

2. Эволюционно недавние вставки мобильных элементов и их вклад в структуру генома человека.

К.К. Баскаев, А.А. Буздин. Журнал общей биологии, 2012

3. Which transposable elements are active in the human genome? Ryan E.Mills, E.Andrew Bennett, Rebecca C.Iskow and Scott E.Devine; TRENDS in Genetics; Vol.23 No.4; P. 1-9.

4. Dfam: a Database of Repetitive DNA Based on Profile Hidden Markov Models. Travis J. Wheeler, Jody Clements, Sean R. Eddy, Robert Hubley, Thomas A. Jones, Jerzy Jurka, Arian F.A. Smit, Robert D. Finn; P. 1 - 18.

5. ABySS: A parallel assembler for short read sequence data. Jared T. Simpson, Kim Wong, Shaun D. Jackman, Jacqueline E. Schein, Steven J.M. Jones, and Inanc Birol; Genome Res. 2009; P. 1 – 8.

Ю.М. Дегтярев (Транзас), С.Ю. Жуков (Санкт-Петербургский государственный политехнический университет)

# ОБЪЕМНОЕ ОСВЕЩЕНИЕ СИСТЕМЫ ЧАСТИЦ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫХ ШЕЙДЕРОВ

Работа посвящена методам объемного освещения системы частиц. Большинство существующий методов основано на аппроксимации функции пропускаемости с помощью кусочно-линейных функций, комбинации базисных функций или вокселизации объёма частиц. Вследствие этих аппроксимаций возможно появление визуальных артефактов. В данной работе предлагается метод точного вычисления функции пропускаемости для вершин каждой частицы. За счет предлагаемых оптимизаций вычисление функции пропускаемости алгоритмически эффективно с точки зрения работы – в среднем, вклад в освещение рассчитывается только для частиц, влияющий на данную. Сложность алгоритма линейна и асимптотически равна существующим аналогам, однако алгоритм показывает себя лучше на высокочастотных объёмных данных, что приводит к более качественному результату. Метод пригоден для визуализации разноплотных объёмных данных на сценах произвольного размера, полностью реализуем на современных графических процессорах.

Bce существующие методы самозатенения используют понятие функции пропускаемости (transmittance function). Это функция t(x, y, z) характеризует долю света, пропущенного через точку (x, y, 0) плоскости теневой карты, на расстоянии z. В большинстве методов есть некоторая величина дискретизации теневой карты и функции пропускаемости. Будем называть далее дискретизацию теневой карты s-дискретизацией (space discretization), a дискретизацию функции пропускаемости d-дискретизацией (depth discretization). Будем опускать x, y там, где речь идет о какой-то точке (x, y). Deep Shadow Maps [1] – один из самых первых методов, основан на модификации функции пропускаемости. Метод сохраняет в каждом пикселе теневой карты функцию пропускаемости. Для этого, при отрисовке частицы, добавляются новые вершины в кусочно-линейное представление функции пропускаемости. Т.к. число полученных узлов может быть велико, то после сохранения выполняется шаг компрессии функции пропускаемости с фиксированной погрешностью. Метод, в целом, очень ресурсоёмкий и не подходит для визуализации реального времени. В методе Opacity Shadow Maps [2] освещаемый объём разбивается вдоль оси *z* на несколько слоёв и для каждого слоя вычисляется функция непрозрачности (opacity function) Ω. Эта функция связана с функцией пропускаемости как  $t(x, y, z) = e^{-\Omega(x, y, z)}$ . Также функция  $\Omega(z)$ 

выражается как  $\int_{0}^{z} \rho(l) dl$ , где  $\rho(z)$  – плотность частиц на расстоянии z (функция поглощения). Далее, при освещении точки производится интерполяция функции непрозрачности между соседними слоями, затем вычисляется функция пропускаемости. Метод обладает низкой точностью, вследствие ограниченности числа слоёв, а также низкой производительностью, т.к. выполняются несколько вызовов отрисовки для каждого слоя. Однако этот метод уже можно назвать интерактивным. Метод Fourier Opacity Mapping [3] использует разложение функции поглощения  $\rho(z)$  в ряд Фурье. Далее, оставляются только несколько старших коэффициентов и они сохраняются в специальную карту непрозрачности (fourier opacity map). Стоит отметить, что, т.к. коэффициенты при базисных функциях представляют собой линейную комбинацию функций от z и  $\alpha$ , то карта непрозрачности может быть получена с помощью аддитивного смешивания. Метод обладает высокой производительностью, функция пропускаемости получается гладкой. Однако метод обладает кольцевыми» артефактами (*ringing artefacts*). Метод ограничен аппаратно-зависимым

числом визуализации в несколько буферов кадра (MRT). Метод AVSM [4] использует адаптивное представление функции пропускаемости. Идея метода в нерегулярном расположении узлов кусочно-линейной аппроксимации функции пропускаемости. Алгоритм, при вставке узла, налету производит компрессию функции. В отличие от Deep Shadow Maps положение узлов не меняется, удаляется лишь один узел, дающий наименьший вклад по выбранной метрике. Метод менее производителен и обладает сравнимым качеством по сравнению с Fourier Opacity Mapping (FOM).

Предлагаемый метод заключается в точном вычислении функции пропускаемости в точках запроса. Пока будем считать, что точками запроса являются вершины частицы. Именно в них нужно произвести вычисление функции пропускаемости, а затем провести интерполяцию затенённости и вычислить освещенность. Для того, чтобы вычислить значение функции пропускаемости, необходимо сначала отсортировать частицы в порядке увеличения расстояния от источника света, т.к. мы моделируем прохождение луча через пропускающую среду. С появлением технологий вычислительных шейдеров и CUDA появилась возможность реализовать сортировку частиц эффективно и полностью на GPU. В качестве алгоритма сортировки была выбрана поразрядная сортировка на GPU Radix Sort на основе алгоритма построения префиксной суммы (Scan), реализация которого входит в библиотеку Thrust. По массиву расстояний до источника света в качестве ключа сортируются индексы частиц и получается их перестановка. Далее, рабочее пространство делится на SxS блоков (s-дискретизация) в плоскости теневой карты. Для каждого выполняется ядро на языке CUDA, которое последовательно для каждой точки пересечения луча с частицей вычисляет ее вклад в пропускаемость. Производится растеризация четырёхугольника в данной точки с выборкой значения из текстуры прозрачности. Если луч проходит рядом с вершиной (ближе, чем другие лучи), то в вершину записывается текущее значение пропускаемости (исключая собственный вклад). Отметим, что можно закэшировать обращение в массив параметров частиц по сортировочному индексу, достаточно на этапе препроцессинга произвести перестановку частиц в массиве в порядке сортировки.

В случае недостаточной s-дискретизации может наблюдаться потеря непрерывности функции пропускаемости при небольших изменениях x и y. Это приводит к скачкам освещённости при перемещении частиц. Хотя данные артефакты не наблюдаются при небольшом размере частиц и при s-дискретизации 0,5 *пиксель/м*<sup>2</sup>, предлагаются способы для решения обозначенной проблемы, которые можно совмещать. Первый способ заключается в интерполяции соседних значений. Для этого вычисления и растеризация производятся только в узловых точках, а не в вершинах частиц. Далее, при записи коэффициента пропускания, производится интерполяция соседних значений узлов для каждой вершины. Во-вторых, можно производить дополнительную тесселяцию четырёхугольника с целью увеличения числа точек запроса, а значит и s-дискретизации. Однако на практике это не понадобилось, т.к. функция пропускаемости меняется плавнее вдоль *x* или *y*, например, по сравнению с интенсивностью освещённости от конического источника в радиальном направлении – в этом случае тесселяцию пришлось применить.

Предложенный алгоритм не является эффективным с точки зрения выполняемой работы, т.к. вычисления производятся в каждой точке, вне зависимости от того, нужны ли результаты этих вычислений. Первой предлагаемой оптимизацией является уменьшение числа растеризуемых частиц с помощью отсечения посредством сохранения в *карту запросов* (размера SxS) максимального расстояния  $z_{max}$ , на котором расположена вершина некоторой частицы – точка запроса. В вычислительном шейдере рассчитываются координаты вершин частиц (*x*, *y*) и с помощью атомарных операций обновляется максимальное значение  $z_{max}$  в данной точке карты запросов. Если используется интерполяция, описанная в предыдущем параграфе, то необходимо добавлять в карту

запросов не одну точку для вершины частицы, а четыре. Эта оптимизация даёт прирост производительности в 2 раза. Вторая оптимизация исходит из наблюдения, что т.к. частицы в большинстве случаев расположены равномерно или сгруппированы по эффектам, то большинство из них не оказывает влияния друг на друга. Поэтому, можно разбить теневую плоскость на TxT ячеек, и в каждой ячейке сохранить список частиц, проекции которых её пересекают. Далее, в исходном алгоритме итерация идёт не по всем частица, а только по частицам, принадлежащим данным ячейкам. Оптимизация даёт прирост порядка 100%.



Рис. 1. FOM. Неправильное затенение ближних эффектов





Рис. 2. Предлагаемый метод. Артефакты отсутствуют



Рис. 4. Функции пропускаемости. FOM – красным

Было проведено сравнение предложенного метода и метода FOM. В методе FOM вычислялось коэффициентов разложения. Оба метода имеют одинаковую 7 асимптотическую сложность O(P), где P – число частиц. Однако метод FOM даёт приближённую функцию пропускаемости. Это приводит к существенным отличиям при наличии резких изменений прозрачности частиц при изменении расстояния до камеры (т.е. ситуация плотного дыма). На рис. 1 и рис. 2 представлено визуальное сравнение методов, на рис. З показана разница в функциях пропускаемости, а на рис. 4 представлены графики функций пропускаемости для обоих методов. Видно, что сильные отличия функции FOM от идеальной приводит к значительным визуальным артефактам. В случае равноплотной среды функции пропускаемости обоих методов совпадают с экспоненциальной теоретической зависимостью закона Бугера-Ламберта-Бера [5].

Результатом данной работы является новый метод самозатенения частиц. Метод по алгоритмической сложности эквивалентен существующим аналогам, однако является более точным, позволяет получить точное представление функции пропускаемости для точек запроса – вершин частиц.

#### ЛИТЕРАТУРА:

- 1. Lokovic T., Veach E. Deep Shadow Maps. SIGGRAPH, 2000.
- 2. Kim T.-Y., Neumann U. Opacity Shadow Maps. Eurographics Workshop, 2001.
- 3. Jansen J., Bavoil L. Fourier Opacity Mapping. I3D, 2010.
- 4. Salvi M. et al. Adaptive Volumetric Shadow Maps. EGSR, 2010.
- 5. Lambert J. Photometria sive de mensura et gradibus luminis, colorum et umbrae. Augsburg, 1760.

# А.В. Дымова, К.Н. Козлов (Санкт-Петербургский государственный политехнический университет)

## ЧИСЛЕННОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ МЕХАНИСТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ РЕВМАТОИДНОГО АРТРИТА У КРЫС ЛЬЮИСА

Ревматоидный артрит — системное заболевание соединительной ткани, проявляющееся главным образом хроническим воспалением суставов. Поражаются, как правило, голеностопные суставы, суставы лодыжек, коленей и кистей рук. На сегодняшний день это одна из самых распространенных болезней, поражающих суставы. По статистике, от нее страдает каждый сотый житель Земли. Представительницы слабого пола болеют в пять раз чаще, чем мужчины. Возраст тоже имеет значение: болезнь обычно развивается после 30 лет [1].

Врачам пока не удалось до конца выяснить, почему у человека внезапно начинают воспаляться суставы. Точно известно только то, что толчок к началу болезни дает сбой в иммунной системе. Провокационными факторами могут стать переохлаждение, стрессы, травмы суставов и инфекции. Банальные ОРЗ, ангина и грипп могут осложняться ревматоидным артритом.

Таким образом, изучение данного заболевания является актуальным в настоящее время.

Общее количество информации о болезнях увеличивается с каждым годом и один человек не в состоянии в точности оценить важность имеющегося материала для врачебной практики и тогда приходит на помощь математика, которая помогает структурировать материал. Медицинские клинические исследования очень сложны (на человеке эксперимент возможен лишь в ограниченных рамках). Имея математическую модель, мы можем делать выводы и анализировать результаты, изменяя интересующие нас параметры [5]. Таким образом, применение математических методов в медицине облегчает задачу врачам и исследователям. Цель работы — численное исследование механистической модели артрита. Исследование проводится на примере механистической модели развития болезни, вызванной коллагеном у крыс Льюиса, предложенной в статье Earp et al [2]. В отличие от предыдущих моделей, эта модель учитывает фактор некроза опухоли TNF-α, интерлекины IL-1β, IL-6.

Модель состоит из трех основных блоков. Первый блок описывает динамику кортикостероида (CST). Переменными состояния являются глюкокортикоидный рецептор (GR), свободный GR, концентрация связанного комплекса CST, концентрация связанного комплекса CST-GR в ядре и концентрация CST в плазме. Динамика факторов, связанных с цитокином мPHK, описывается во втором блоке.

Развитие наблюдаемых проявлений болезни, таких как плотность костного минерала и отек лапы, описываются в третьем блоке. Первую и вторую области связывает экспрессия цитокинов. Вторую и третью области связывают концентрации фактора некроза опухоли TNF-α, интерлекины IL-1β, IL-6. Первую и третью области - связанный комплекс CST-GR.





Представлены полное бедро, диафиз, метафиз и эпифиз.

Для переменных состояния известны значения плотности костного минерала (BMD), массы тела, концентрации кортикостероида в плазме (CST), фактора некроза опухоли TNF-а, интерлекинов IL-1β, IL-6 и глюкокортикоидный рецептор (GR) мРНК выраженный в ткани лапы.

В бедре просматривались четыре области (рис. 1).

Количество измерений на временном отрезке от 200 до 1000 часов равно десяти. В промежутке от 200 до 600 часов измерения проводились с интервалом в 50 часов, после 600 часов, с интервалом, равным 100 часам.

Часть параметров модели была взята из литературы, оставшиеся параметры были определены с помощью адаптации, проходящей в 2 этапа: первый – адаптация молекулярных биомаркеров (первый и второй блоки модели), второй – адаптация проявлений болезни (третий блок модели).

Мы хотим проверить поведение модели при варьировании определенных параметров. Если интервал варьирования не задан – будем использовать интервал, равный +/- 30% от значения параметра.

Изменение CST характеризует активность стероидных гормонов, производимых исключительно корой надпочечников. Графики зависимости концентрации кортикостероида (CST) от времени с различными значениями таких параметров как константа синтеза и действия каждого отдельного цитокина на регулирование CST представлены на рис. 2.



Рис. 2. Зависимость концентрации CST от времени

Изменение интерлекина характеризует следующее: в мышцах и жировой ткани он стимулирует мобилизацию энергии, которая приводит к повышению температуры тела стимулирует пролиферацию и дифференцировку В- и Т-клеток, а также лейкоцитопоэз. Графики зависимости концентрации интерлекина IL6 от времени с различными значениями таких параметров как константа синтеза, коэффициент ингибирования и начальное значения интерлекина представлены на рис. 3.



Рис. 3. Зависимость концентрации IL6 от времени

После заражения крыс артритом, скачок концентрации интерликина IL-6 вызывает повышение концентрации кортикостероида. С течением времени значения концентраций выходят на стационарные значения. Для кортикостероида при варьировании параметров выявлено пять различных стационарных уровней. Для интерликина IL-6 определено пять максимальных значений, стационарное значение для которых одно и тоже. Таким образом, рассматриваемая модель в состоянии описать различные режимы течения болезни.

Для того, чтобы более подробно охарактеризовать различные динамические режимы мы планируем провести адаптацию модели методом полностью параллельной разностной эволюции [3], который успешно применялся в определения параметров сложных математических моделей [4].

#### ЛИТЕРАТУРА:

1. Н. Гордон. «Артрит и двигательная активность». Изд-во Олимпийская литература, 1999г., С. 122 – 127.

2. Justin C. Earp, Debra C. DuBois, Diana S. Molano, Nancy A. Pyszczynski, Craig E. Keller, Richard R. Almon, and William J. Jusko, (2008) Modeling Corticosteroid Effects in a Rat Model of Rheumatoid Arthritis I: Mechanistic Disease Progression Model for the Time Course of Collagen-Induced Arthritis in Lewis Rats, JPET 326: P. 532 – 545.

3. Konstantin Kozlov, Alexander Samsonov (2011). DEEP – Differential Evolution Entirely Parallel Method for Gene Regulatory Networks, Journal of Supercomputing, Vol. 57, P. 172 – 178.

4. Н.В. Иванисенко, Е.Л. Мищенко, И.Р. Акбердин, П.С. Деменков, В.А. Лихошвай, К.Н. Козлов, Д.И. Тодоров, М.Г. Самсонова, А.М. Самсонов, Н.А. Колчанов, В.А. Иванисенко (2013) Репликация субгеномного репликона вируса гепатита С в присутствии ингибиторов NS3-протеазы: стохастическая модель, Биофизика, том 58, вып. 5, С. 758 – 774.

5. William J. Jusko, Moving from Basic Toward Systems Pharmacodynamic Models, J Pharm Sci. 2013 Sep;102(9):2930-40. doi: 10.1002/jps.23590. Epub 2013 May 16.

## ТЕСТИРОВАНИЕ АЛГОРИТМА ПОЛНОСТЬЮ ПАРАЛЛЕЛЬНОЙ РАЗНОСТНОЙ ЭВОЛЮЦИИ

Алгоритмы однокритериальной безусловной минимизации - это базовые алгоритмы, на основе которых строятся методы решения более сложных задач с ограничениями и несколькими целевыми функциями. Учитывая, что универсального эффективного решения задачи минимизация для произвольных целевых функций пока не существует, разработка новых методов остается актуальной задачей.

Одним из подходов к решению задачи поиска глобального минимума функции является стохастический итерационный метод разностной эволюции (РЭ), предложенный Р. Сторном [1]. По аналогии с генетическим алгоритмом РЭ оперирует популяцией индивидуумов, которые претерпивают скрещивание и мутации при переходе от поколения к поколению. Успех применения алгоритма сильно зависел от правильного выбора управляющих параметров и в [2] была предложена адаптивная схема их выбора, а в [3] разработана стратегия учета значения целевой функции на шаге мутации. Алгоритм полностью параллельной разностной эволюции (ППРЭ), предложенный К. Козловым и А. Самсоновым [4], представляет собой предмет исследования данной работы. Для снижения сложности процедуры популяция рассматривается целиком без деления на ветви. Через каждые несколько итераций несколько старейших индивидуумов заменяются по порядку на такое же количество лучших, например, 1-й старейший заменяется на 1-й лучший, 2-й старейший – на 2-й лучший, и т.д. Возраст определяется как число итераций, в ходе которых индивидуум не менялся. Данный подход уже был успешно применен в решении биологических задач математического моделирования [5, 6, 7].

Совершенствование методов минимизации требует наличия набора тестов для оценки новых алгоритмов и реализаций и сравнения с предшествующими. Одна из методик тестирования предложена на Конгрессе по эволюционным вычислениям (CEC-Congress on Evolutionary Computation), который посвящен алгоритмам однокритериальной минимизации и проводится с 1999 года.

Данная работа посвящена применению методики СЕС к тестированию метода ППРЭ. В этой методике предложен набор из 28 пробных функций (sphere, rot. high conditioned elliptic, rot. Bent Cigar, rot. Discus, different powers, rot. Rosenbrock's, rot. Schaffers F7, rot. Ackley's, rot. Weierstrass, rot. Griewank's, Rastrigin's, rot. Rastrigin's, non-continuous rot. Rastrigin's, Schwefel's, rot. Schwefel's, rot. Katsuura, Lunacek Bi\_Rastrigin, rot. Lunacek Bi\_Rastrigin, expanded Griewank's + Rosenbrock's, expanded Scaffer's F6 и 8 функций, представляющих собой композицию предыдущих), их описание, графики и формулы находятся в [8]. В этой работе представлены результаты для сферической функций  $f(x) = \sum_{i=1}^{D} (x_i - o)^2 + f_0$ .

Во время тестирования проведена минимизация пробных функций для 3 размерностей их аргументов (10D, 30D, 50D), при этом осуществлено 51 повторение вычисления минимума для каждой функции для каждой размерности. Дополнительные ограничения: область поиска [-100, 100]<sup>D</sup>, максимально допустимое количество вызовов функции для каждого запуска равно 10000\*D.

Алгоритм ППРЭ обладает набором управляющих параметров, отвечающих за скорость сходимости, выход из локальных минимумов и точность: pop\_size – параметр, отвечающий за размер популяции, tau – количество итераций внутреннего цикла, es\_lambda – количество старейших векторов, заменяемых на лучшие.

Оценка сложности алгоритма в рамках СЕС произведена через анализ длительности его работы (вычисляются T0 — нормировочное время, T1 — время выполнения 200000 вызовов 14 пробной функции, T2 — длительность минимизации 14 тестовой функции методом ППРЭ при количестве вызовов тестовой функции равном 200000, T2\* - медиана T2 для 5 повторений). В текущей реализации ППРЭ вызывает целевую функцию как отдельную программу, а не библиотечную функцию, что, например, для 10D дает увеличение длительности выполнения в 300 раз. В связи с этим был переработан метод оценки времени (введено T1\*, которое вычисляется как T1, только для вызова программы целевой функции). Проведенная оценка показала, что длительность минимизации линейно зависит от размерности, а для 10D время выполнения

минимизации (T2\*) 1.5 раза больше, чем время вызовов функции (T1\*).

При использовании управляющих параметров tau = 6, pop\_size = 10\*D, es\_lambda = 3 алгоритм показал лучший результат для сферической функции (10D) в 18 случаях из 51 был найден точный глобальный минимум.

Для остальных функций и размерностей точный глобальный минимум не был найден.

Тестирование показало, что величина ошибки зависит именно от вида функции и практически не зависит от размерности. Было проведено исследование влияния управляющих параметров на качество для минимизации 5D. для этого рассматривались изменения параметров pop\_size, es\_lambda, tau. Как видно из рис. 1,2 наибольшее значение имеет параметр pop size. отвечающий за размер популяции, при его увеличении величина ошибки палает. Хотя можно было предположить, что величина ошибки будет убывать монотонно с увеличением рор size, такое поведение не наблюдается на графиках, возможной причиной этого является количество малое запусков (равное 5), использованное во время этого исследования, поэтому вариации случайного начального приближения вносят значительный вклад в конечный результат.









Подбор управляющих параметров алгоритма играет важную роль в нахождении точного глобального минимума функций конкретного вида. Для сферической функции оказалось просто подобрать такой набор, а минимизация остальных функций требуют более тщательной настройки.

В заключении можно сказать, что для тестирования в формате СЕС и последующем корректном сравнении качества алгоритмов на равных условиях с остальными участниками

необходимо реализовать api прямого вызова функций, а не вызова программ, что позволит выбрать управляющие параметры так, чтобы значительной мере улучшить качество оптимизации, оставаясь в рамках разумного времени.

В дальнейшем планируется разработать версию ППРЭ на основе MPI (Message Passing Interface), алгоритм эффективного учета нескольких равноправных и потенциально плохо совместимых критериев в процессе минимизации, а так же процедуру сохранения состояния процесса (создание контрольной точки), для последующего возможного его восстановления в полностью идентичном виде.

#### ЛИТЕРАТУРА:

1. Storn R, Price K (1995) Differential evolution a simple and efficient heuristic for global optimization over continuous spaces. Technical Report TR-95-012, ICSI

2. D. Zaharie - Control of Population Diversity and Adaptation in Differential Evolution Algorithms, in R. Matousek, P. Osmera (eds.), Proc. of Mendel 2003, 9th International Conference on Soft Computing, Brno, P. 41 - 46, 2003.

3. Fan H-Y, Lampinen J (2003) A trigonometric mutation operation to differential evolution. J Glob Optim 27: P. 105 – 129.

4. Konstantin Kozlov and Samsonov, A. (2011). DEEP – Differential Evolution Entirely Parallel Method for Gene Regulatory Networks. Journal of Supercomputing, 57: P. 172 – 178.

5. Н.В. Иванисенко, Е.Л. Мищенко, И.Р. Акбердин, П.С. Деменков, В.А. Лихошвай, К.Н. Козлов, Д.И. Тодоров, М.Г. Самсонова, А.М. Самсонов, Н.А. Колчанов, В.А. Иванисенко (2013) Репликация субгеномного репликона вируса гепатита С в присутствии ингибиторов NS3-протеазы: стохастическая модель, биофизика, том 58, вып. 5, С. 758 – 774.

6. Konstantin Kozlov, Surkova, S., Myasnikova, E., Reinitz, J., and Samsonova, M. (2012). Modeling of gap gene expression in drosophila Kruppel mutants. PLoS Computational Biology. doi:10.1371/journal.pcbi.1002635

7. Konstantin Kozlov, Nikita Ivanisenko, Vladimir Ivanisenko, Nikolay Kolchanov, Maria Samsonova, and Alexander M.Samsonov (2013), "Enhanced Differential Evolution Entirely Parallel Method for Biomedical Applications", LNCS 7979, Parallel Computing Technologies, Victor Malyshkin (Ed.), Springer 2013, ISSN 0302-9743, Proceedings of the 12th International Conference, PaCT 2013, St.Petersburg, Russia, September/October 2013, P. 409 – 416.

8. J. J. Liang, B-Y. Qu, P. N. Suganthan, Alfredo G. Hernández-Díaz, "Problem Definitions and Evaluation Criteria for the CEC 2013 Special Session and Competition on Real-Parameter Optimization", Technical Report 201212, Computational Intelligence Laboratory, Zhengzhou University, Zhengzhou China and Technical Report, Nanyang Technological University, Singapore, January 2013.

Т.А. Погарская, А.С. Фролов (Санкт-Петербургский государственный политехнический университет)

## ЧИСЛЕННЫЙ АНАЛИЗ РАБОТЫ МЕХАНИКО-ГИДРАВЛИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ

В области глубоководного бурения и нефтедобычи активно развивается использование

буровых судов вследствие их мобильности и меньшей стоимости создания и эксплуатации по сравнению с буровыми платформами. Однако позиционирование судна над устьем скважины является более сложной задачей, чем позиционирование платформ, что вносит дополнительные ограничения на условия штатной работы скважины (такие, как ветер, течение и пр.). Так как перемещения судна создают изгибающий момент на устье скважины, это может привести к разрушениям системы и вследствие этого к загрязнению нефтепродуктами окружающей среды.



Связь между судном И устьем скважины через райзер осуществляется \_ систему труб, тянущуюся от судна до сочленения с устьем скважины. При отклонении райзера от вертикального положения на опасный для нормального функционирования системы угол происходит аварийное отключение скважины. Для увеличения диапазона углов, при которых возможна штатная работа скважины, была



Рис. 1. Установка на устье скважины



Рис. 2. Flex joint

разработана специальная дополнительная система, целью которой является компенсация изгибающего момента.

Система состоит из пяти гидравлических цилиндров под высоким давлением, создаваемым гидравлическим аккумулятором, которые расположены по окружности в горизонтальной плоскости flex-joint'a (рис. 2). При возникновении отклонения верхней трубы от вертикального положения они ориентируются таким образом, чтобы возникали силы,

формирующие компенсирующий момент на устье скважины [5]. Принцип работы данной системы аналогичен действию пружины с отрицательной жесткостью: чем больше райзер отклонен от вертикального положения, тем сильнее она стремится отклонить его.

Промышленный образец конструкции данной системы находится на стадии проектирования. Однако ее прототип уже был построен и экспериментально исследован. Исходя из этого, была поставлена задача создания адекватной математической модели прототипа, согласующейся с экспериментальными данными, чтобы на ее основании предсказать поведение промышленного образца.

создания математической модели была Для использован пакет MatLab, представляющий собой интерактивную среду с собственным языком высокого уровня для математических расчетов, программирования и визуализации данных [2]. Simulink - это надстройка над Matlab, являющаяся средой для многомерного моделирования с помощью языка блок-схем. При работе в Simulink для моделирования механико-гидравлической системы была использована специальная библиотека Simscape, которая обеспечивает физических систем (механических, электрических, моделирование различных гидравлических и пр.). Simscape описывает физические связи с помощью диаграмм, что позволяет добиться соответствия модели реальной структуре исследуемой системы [4].

Сначала была реализована идеальная механическая модель конструкции системы (рис. 3). Затем она была усовершенствована за счет последовательного учета сопротивления flex joint'a, трения в различных подшипниках и других элементах [3]. Была проведена оптимизация параметров сопротивления flex joint'a [3], статического и динамического коэффициентов трения в подшипниках. Также был произведен анализ чувствительности системы к различным параметрам конструкции, таким как трение в поршнях цилиндров.

В качестве входных параметров для Simulink-модели использовались отфильтрованные экспериментальные значения угла отклонения райзера от вертикального положения, натяжения райзера и давления зарядки аккумулятора. На рис. 3, 4 представлены результаты сравнения с экспериментальными данными полученных на разных этапах построения модели значений изгибающего момента и давления в цилиндрах для различных экспериментов. На графиках синими линиями изображены экспериментальные данные, красными – результаты без учета эффектов трения и сопротивления, черными и оранжевыми - с учетом стандартной твердотельной и кельвиновской моделей сопротивления во flex joint'е соответственно, фиолетовыми - с учетом сопротивления и эффектов трения в подшипниках. графиков сделать получено Из можно вывод. достаточно что удовлетворительное согласование с экспериментальными данными.







Рис. 4. Результаты для эксперимента с натяжением 70 тонн и давлением 70 бар

В дальнейшем планируется реализовать подробную гидравлическую модель системы, после чего возможно перейти к исследованию поведения промышленного образца. Кроме того, разработанную локальную модель планируется включить в глобальную модель райзерной системы для статического и динамического анализа.

#### ЛИТЕРАТУРА:

1. Бать М.И. Джанелидзе Г.Ю. Кельзон А.С. Теоретическая механика в примерах и задачах.// Москва,. Наука, 1973 год.

2. Ануфриев И. Е. Смирнов А. Б. Смирнова Е. Н. MatLab 7. //СПб, БХВ-Петербург, 2005 год.

3. Ю.Я.Болдырев, Е.А.Родионова. Методы оптимизации. Математическое программирование. // СПб. : СПбГПУ, 1999 год.

4. MATLAB R2010a Documentation. The MathWorks, Inc., 2012.

5. Патент США № 2012/0031622 A1, от 09.02.2012. Автор(ы): Карлсен Тур-Эйстейн, Индерберг Олав, Калсен Ханс Пауль. Патентообладатель(и): ФМС Конгсберг Сабси АС.

### УДК 621.822.5

А.Е. Федоров, Б.С. Григорьев (Санкт-Петербургский государственный политехнический университет)

# МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЯ ТЕРМОНЕУСТОЙЧИВОСТИ РОТОРА, СОВЕРШАЮЩЕГО СИНХРОННУЮ ПРЕЦЕССИЮ (ЭФФЕКТ МОРТОНА)

Устойчивость движения вращающегося вала с подшипниками на жидкой смазке одна из острейших проблем в машиностроении. Существует множество факторов, которые могут оказывать влияние на устойчивость. В центре внимания данной работы находится один из таких факторов: неравномерный нагрев вала в подшипниках скольжения, который также принято называть эффектом Мортона [1]. Он возникает из-за того, что при синхронном обращении вала одна его часть всегда находится в области меньшего зазора, а противоположная в области большего. Там где зазор меньше, гидродинамическое трение больше, что и приводит к неравномерному нагреву. Неравномерный нагрев вызывает термический изгиб ротора, тем самым увеличивая его начальный дисбаланс. В свою очередь увеличение дисбаланса приводит к увеличению синхронных вибраций ротора, которые могут стать опасными.

Впервые этот эффект был обнаружен Полом Мортоном (инженером английского подразделения General Electric) в 1975 году. Однако все результаты были опубликованы в закрытых внутренних отчётах, поэтому широкой общественности о них было неизвестно. И только в середине 90-х годов, когда были опубликованы несколько экспериментальных работ, подтвердивших наличие неравномерного прогрева вала в подшипниках, начался заметный рост интереса к данной проблеме. Наиболее весомый вклад в экспериментальное исследование эффекта Мортона внесли Пол Мортон (P. Morton), Й. Шмид (J. Schmied), Ф. де Йонг (F. de Jongh), Маше (Marscher) и Иллис (Illis), ван дер Ховен (van der Hoeven) и др.

Вследствие трудоемкости измерения температуры на поверхности вала в подшипниках эффект Мортона достаточно нелегко распознать на практике. При этом стоит отметить, что на основе изучения описанных в открытой литературе экспериментальных исследований этого явления, производители оборудования разработали ряд критериев, позволяющих предположить его наличие в роторной системе на основе анализа результатов стандартных динамических тестов машины. Однако для окончательного ответа на вопрос о том, является ли неравномерный нагрев вала в подшипниках причиной вибрационных проблем, необходимо проводить дополнительное тестирование, которое обычно весьма трудоёмко, а, зачастую, представляет собой достаточно дорогостоющую процедуру. Поэтому большое значение имеет математическое моделирование эффекта.

Работы по моделированию эффекта начались с конца 80-х годов. Однако каждая существующая на данный момент модель обладает существенными недостатками. В некоторых из них [2] определяющую роль играют коэффициенты, рассчитывающиеся эвристическим путем, точность которого трудно оценить. Другие [3, [4] для описания процессов в подшипниках используют весьма простые модели, такие как теория подшипника малого удлинения или теория подшипника бесконечной длины, что существенно снижает область применимости всей модели в целом. Некоторые схемы [5] слишком подробно пытаются описать процессы, что приводит к большим вычислительным затратам и делает модель малопригодной на практике.

В итоге можно отметить, что до настоящего времени отсутствует полная надежная модель эффекта Мортона, которая могла бы предсказать появление данного феномена и определить меры борьбы с ним. Именно ее построение является целью данной работы.

В результате работы была построена модель, блок-схема которой представлена на Рис.1. Как можно видеть из этого рисунка, построенная модель состоит из следующих шагов:

1. Перед началом расчёта задается внешняя нагрузка в каждом подшипнике и начальная неуравновешенность (дисбаланс) вала.

2. Определяется поле давлений в смазочном слое путем решения уравнения Рейнольдса, рассчитывается статическое положение равновесия вала и динамические коэффициенты подшипников.

3. Начальный дисбаланс суммируется с дополнительным дисбалансом, вызванным тепловым изгибом вала, и определяются параметры синхронной орбиты.

4. Определяется поле температур в смазочном слое на основе решения уравнения энергии. Вычисляется тепловой поток от смазки к валу.

5. Решается 3D уравнение теплопроводности для вала и на основании полученного распределения температуры определяется тепловой изгиб вала. Далее повторяется шаг 3.



Рис. 1. Схематическая диаграмма построенной модели эффекта Мортона

Помимо описанной модели, к числу наиболее существенных результатов работы следует отнести:

1. Новый экономичный метод расчёта динамических коэффициентов подшипника, основанный на использовании сопряженных функций;

2. Применение метода усреднения для решения уравнений динамики вала, уравнения энергии и уравнения теплопроводности вала;

3. Оценку спектрального радиуса в качестве критерия устойчивости для синхронных вибраций ротора;

4. Разработку инструментария в виде комплекса прикладных программ, реализующего построенную модель эффекта Мортона.

На первом этапе построенная в работе модель была применена к простой тестовой роторной системе, состоящей из ротора с консольной массой и подшипника. На этом примере были отмечены некоторые особенности эффекта Мортона, такие как синусоидальный характер распределения теплового потока между смазкой и валом, а также синусоидальный вид распределения температуры на поверхности вала. Также исследовался вопрос о методах борьбы с уже имеющимся в системе негативным проявлением эффекта Мортона и о предотвращении этого явления на этапе конструирования. Эти методы основаны на сокращении теплового потока от смазки к валу. Проведённые расчеты показали количественную эффективность применения таких мер борьбы как изменение длины подшипника (его укорачивание), использование масла с меньшей вязкостью, уменьшение консольно закрепленной массы. Заметим, что эти меры применяются на практике на интуитивном уровне.

На завершающем этапе работы созданная модель использовалась для анализа эффекта Мортона в роторной системе турбоэкспандера TC 400/90 французской фирмы Cryostar SAS [6]. На рис. 2 показана роторная система рассматриваемой машины.

В процессе тестирования устройства были отмечены чрезмерные вибрации на высоких скоростях вращения вала (свыше 18200 об/мин). Изменение вибрации в полярных



Рис. 2. Роторная часть турбоэкспандера TC 400/90

координатах имело вил спирали. что представляет собой типичную картину для вибраций, вызванных неравномерным нагревом Проведенные расчёты показали, вала. что граница устойчивости (т.е. скорость вращения вала, при которой амплитуда вибраций ещё не начинает расти, и, соответственно, спираль в полярных координатах не начинает раскручиваться) находится ~ на 19600 об/мин. Если принять скорость 18600 об/мин, при которой в экспериментах наблюдалось сильное

увеличение вибраций, за границу устойчивости, то результаты, полученные в рамках разработанной модели, отличаются от экспериментальных менее чем на 10% процентов, что позволяет говорить об успешности применения разработанной модели.

Для предотвращения эффекта Мортона конструкторы турбоэкспандера решили укоротить подшипники и взять менее вязкое масло. С помошью этих модификаций им удалось добиться сдвига границы повышенных вибраций в область скоростей выше 22000 об/мин. Наши расчеты для этого случая показали, что граница устойчивости для модифицированной системы соотвествует ~23000 об/мин, что согласуется с экспериментом.

Отметим, что построенная модель получилась достаточно эффективной по времени счета. Так, например, при выбранных параметрах сеток для расчёта процесса в течение 1 секунды физического времени требуется около 8.5 секунд процессорного времени. Для сравнения укажем, что в одной из последних моделей, предложенных в 2011 году Палаццоло [5], для расчёта 100 оборотов вала (для 19600 об/мин это 0.3 с) требовался 1 час. Такая разница объясняется тем, что в нашей модели был применен метод усреднения для определения медленной эволюции параметров орбиты, что позволило использовать относительно большой шаг по времени.

## ЛИТЕРАТУРА:

1. De Jongh F.M., "The Synchronous Rotor Instability Phenomenon – Morton Effect", Proceedings of the 37<sup>th</sup> Turbomachinery Symposium, 2008, P. 159 – 167.

2. Schmied J., "Spiral Vibrations of Rotors", Rotating Machinery Dynamics, Vol.2, 1987, P. 449 – 456.

3. Keogh P.S., Morton P.G., "The Dynamic Nature of Rotor Thermal Bending Due to Unsteady Lubricant Shearing within a Bearing", Proceedings of the Royal Society of London, Series A, Vol. 445, 1994, P. 273 – 290.

4. Larsson B., "Journal Asymmetric Heating – Part I: Nonstationary Bow", ASME Journal of Tribology, Vol. 121, Jan. 1999, P. 157 – 163.

5. Palazzolo A., Lee J.G., "Simulation Code for Journal Bearing Morton Effect and Large Motions", Turbomachinery Research Consortium Annual Report, Texas A&M University, May 2011.

6. Schmied J., Pozivil J., Walch J., "Hot Spots in Turboexpander Bearings: Case History, Stability Analysis, Measurements and Operational Experience", Proceedings of ASME IGTI Turbo Expo 2008: Power for Land, Sea and Air, Berlin, Vol.5, Parts A and B, 2008, P. 1267 – 1277.

### СЕКЦИЯ «ФИЗИКА ПРОЧНОСТИ И ПЛАСТИЧНОСТИ МАТЕРИАЛОВ»

УДК 625.855.3

# Е.А. Ржавцев, М.Ю. Гуткин (Санкт-Петербургский государственный политехнический университет)

## ДИНАМИКА ФРАГМЕНТАЦИИ ЗЕРЕН ПРИ УДАРНОМ НАГРУЖЕНИИ МЕТАЛЛОВ И СПЛАВОВ

Одной из основных стадий пластической деформации при активном нагружении металлов и сплавов является фрагментация зерен [1]. В настоящее время существует значительное число различных компьютерных и теоретических моделей, описывающих фрагментацию, однако при более детальном изучении этого процесса появляются все новые вопросы, требующие ответа. К таким вопросам относятся некоторые особенности поведения материала при ударном нагружении. Так, из экспериментов по ударному сжатию образцов алюминиевого сплава Д16 [2, 3] известно, что при определенных условиях материал в полосах сдвига испытывает динамическую рекристаллизацию, которая сопровождается одной из основных стадий этого процесса. Авторы [4] предложили подробное качественное описание динамической рекристаллизации под действием ударных нагрузок, однако никак не объяснили механизм разделения вытянутых субзерен, образующихся в процессе рекристаллизации, на более мелкие фрагменты.

Целью данной работы является построение компьютерной модели, которая бы наглядно демонстрировала основные физические механизмы фрагментации зерен при ударных нагрузках.

Для достижения поставленной цели использовался метод двумерной дислокационнодисклинационной динамики, который ранее применялся для изучения формирования и распада границ наклона в условиях квазистатического нагружения [5 – 6]. Основная идея используемого подхода состоит в том, что из-за сильно неравновесных условий формирования удлиненных субзерен под действием ударной волны сжатия на границах этих субзерен образуются скачки угла разориентировки. Хорошо известно, что участки границ, на которых появляются такие скачки, можно трактовать как места залегания частичных клиновых дисклинаций [7]. В работе [8] уже было показано, что с помощью своих упругих полей эти дисклинационные структуры будут «захватывать» скользящие мимо них дислокации, формируя новые устойчивые дислокационные конфигурации типа оборванных стенок, обладающих, в свою очередь, дисклинационным зарядом, понижающим общую энергию начальной дисклинационной структуры. Впоследствии такие стенки насыщаются дислокациями и становятся границами зерен.

Предположим, что источниками дислокаций являются только границы субзерен. Рассмотрим сначала простейшую конфигурацию дисклинаций – двухосный диполь с плечом d и мощностью  $\omega$  (рис. 1a). На большом удалении от этого диполя, на линии  $(x = -x_0, 0 < y < d)$ , соответствующей одной границе зерна, в момент времени t = 0 под действием приложенного сдвигового напряжения  $\tau$  начинается генерация положительных краевых дислокаций с векторами Бюргерса  $\mathbf{b} = b\mathbf{e}_x$ . Одновременно начинается генерация  $(x = -x_0, 0 < y < d),$ отрицательных дислокаций на линии соответствующей противоположной границе. Распределение дислокаций вдоль оси у и моменты их появления задаются с помощью генератора случайных чисел. Если в процессе моделирования расстояние между двумя дислокациями становится меньше чем 3*a* (*a* – параметр решетки), то считается, что дислокации аннигилируют.
Каждая дислокация в представленной модели находится под совместным действием сил, вызванных приложенным сдвиговым напряжением  $\tau$ , упругими полями напряжения других дислокаций и дисклинаций. При этом предполагается, что дислокации могут перемещаться только в одной плоскости скольжения (вдоль оси x), и в этом случае их движение определяется только проекциями этих сил на ось x. Уравнение движения *i*-й дислокации можно представить в виде [6]:

$$m\frac{d^{2}x_{i}}{dt^{2}} + \beta\frac{dx_{i}}{dt} = F_{i}, \qquad i = 1, 2, \dots, N,$$
(1)

где  $m = \rho b^2 / 2$  – эффективная масса дислокации,  $x_i$  – ее координата,  $\rho$  – плотность материала,  $\beta$  – коэффициент динамического трения,  $F_i$  – суммарная сила, действующая на дислокацию, N – общее число дислокаций, генерированных за время проведения одного численного эксперимента.



Рис. 1. Конечная дислокационная структура через 10 нс после начала моделирования в случае: а) диполя, б) квадруполя и в) произвольного мультиполя дисклинаций (рядом с дисклинациями указана их мощность)

Значения параметров системы выбирались для алюминиевого сплава Д16. Все расчеты проводились для N = 150 дислокаций. Каждая дислокация начинала свое движение с линии  $x_0 = \pm 400$  нм. Моделирование проводилось при различных значениях внешнего напряжения  $\tau$  от 0 до 1 ГПа в течение времени 10 нс.

Наиболее устойчивой \*-о+казалась структура с максимально четкими фрагментированными зернами, сформировавшаяся при  $\tau = 0.5$  ГПа. В случае дисклинационного диполя за 10 нс наблюдается формирование 4 зерен с размерами 10–70

нм. Мощная стенка положительных дислокаций и дисклинационный диполь за счет своих упругих полей не позволяют дислокациям противоположного знака проникать в «отрицательную» область и способствуют их перестройке в малоугловые границы.

Рассмотрим более сложный случай – квадруполь дисклинаций (рис. 1,б). Параметры моделирования аналогичны случаю диполя, различие заключается лишь в упругих полях этих дисклинационных конфигураций. В случае квадруполя конечная структура кардинально отличается от структуры, сформированной в упругом поле диполя. Здесь образовалось одно четкое квадратное зерно размером 100 нм и примерно 15 фрагментов вокруг него, разделенных дислокационными границами.

В случае мультиполя (рис. 1в) положение и мощность дисклинаций выбирались случайными образом при средней мощности 0,1. Наиболее устойчивая фрагментированная структура снова образовалась при  $\tau = 0,5$  ГПа. В этом случае за время 10 нс сформировались 4 дислокационные стенки и 3 почти равноосных зерна размером примерно  $100 \times 100$  нм.

Поскольку в реальных условиях в полосе сдвига должно находиться большое количество исходных неподвижных зернограничных клиновых дисклинаций, скольжение массы краевых дислокаций через такой ансамбль дисклинационных диполей, квадруполей и мультиполей должно сопровождаться множественным формированием малоугловых границ наклона. Предполагается, что за время действия импульса сдвиговых напряжений во всех трех рассмотренных выше случаях (в экспериментах [2, 3] он составлял 650 нс) произойдет насыщение этих границ краевыми дислокациями, быстрая трансформация малоугловых границ зерен в большеугловые и завершение процесса фрагментации.

Полученная в результате моделирования дислокационная структура (окончательный размер и вид зерен) визуально схожа со структурой, наблюдавшейся в экспериментах [2 – 4]. Внешнее напряжение 0.5 ГПа, при котором формируются модельные дислокационные структуры, также совпадает с экспериментальным [2, 3], что подтверждает адекватность предложенной компьютерной модели.

#### ЛИТЕРАТУРА:

1. В.В. Рыбин. Большие пластические деформации и разрушение металлов. М.: Металлургия, 1986, 224 с.

2. Ю.И. Мещеряков, А.К. Диваков, С.А. Атрошенко, Н.С. Наумова. Влияние скоростной неоднородности на динамическую рекристаллизацию металлов в ударных волнах // Письма в ЖТФ, 2010, т. 36, № 24, С. 17 – 24.

3. Ю.И. Мещеряков, А.К. Диваков, Н.И. Жигачева. Пороговые режимы и микромеханизмы динамического деформирования // Mater. Phys. Mech., 2011, Vol. 11, No. 1, P. 23 – 59.

4. V.F. Nesterenko, M.A. Meyers, J.C. LaSalvia, M.P. Bondar, Y.-J.Chen, Y.L. Lukyanov. Shear

localization and recrystallization in high-strain, high-strain-rate deformation of tantalum // Mater. Sci. Eng., 1997, Vol. 5, No.1, P. 23 – 41.

5. S.V.Bobylev, M.Yu.Gutkin, I.A.Ovid'ko. Transformations of grain boundaries in deformed nanocrystalline materials // Acta Mater., 2004, Vol. 52, No.13, P. 3793 – 3805.

6. Г.Ф. Сарафанов, В.Н. Перевезенцев. Моделирование процессов зарождения и формирования оборванных субграниц // Вопросы материаловедения, 2007, том 49, вып. 1, С. 5 – 19.

7. В.И. Владимиров, А.Е. Романов. Дисклинации в кристаллах. Л.: Наука, 1986, 224 с.

8. М.Ю. Гуткин, Е.А. Ржавцев. В кн.: XX Петербургские чтения по проблемам прочности, посвященные памяти профессора В.А. Лихачева, СПб, 10-12 апреля 2012 г.; Сборник материалов, Часть 2, СПб, 2012, 91 с.

А.М. Смирнов (Санкт-Петербургский государственный политехнический университет), М.Ю. Гуткин (Институт проблем машиноведения РАН, Санкт-Петербургский государственный политехнический университет, Санкт-Петербургский национальный исследовательский университет информационных технологий, механики и оптики)

## ПРЯМОУГОЛЬНЫЕ ПРИЗМАТИЧЕСКИЕ ПЕТЛИ ДИСЛОКАЦИЙ НЕСООТВЕТСТВИЯ В НАНОСТРУКТУРАХ

Производство и применение наночастиц, нанопроволок и тонкопленочных структур является на сегодня одним из самых перспективных направлений развития нанотехнологий. Электронные, магнитные и оптические свойства этих нанообъектов зависят от их формы, размера, химического состава, типа кристаллической решётки и от присутствия в них различных дефектов. Значительную долю производимых и исследуемых наночастиц составляют композитные наночастицы [1-3], которые состоят из разных материалов и находят широкое применение в современных оптоэлектронике, фотонике, спинтронике, солнечных батареях, сенсорных устройствах, устройствах накопления и передачи информации, катализе, медицине и т. д. Неоднородные нанопроволоки также имеют превосходные электронные и оптические свойства, поэтому их используют в различных приборах оптоэлектроники, в наноразмерных полевых транзисторах, в устройствах хранения и передачи информации, в логических устройствах и т. д. [4]. Использование тонких пленок в инженерных системах позволяет придавать им новые свойства и функции. Отметим микроэлектронные устройства, микроэлектромеханические системы и различные покрытия, предназначенные для улучшения механических, трибологических, экологических, оптических, электрических, магнитных или биологической свойств [5]. Цилиндрическая форма нанопроволок и сферическая форма наночастиц имеют значительные преимущества Основным по сравнению с обычными плоскими тонкопленочными структурами. является увеличение отношения числа атомов преимуществом на поверхности нанопроволоки (наночастицы) к их числу в ее объеме, что благотворно влияет на транспортные характеристики носителей заряда.

В процессе выращивания подобных нанообъектов из-за различий в решетках и свойствах составляющих их компонентов в них возникают напряжения несоответствия, приводящие к существенному изменению свойств или даже к разрушению наноструктур. При некоторых условиях эти напряжения могут релаксировать путем развития различных дефектных структур [6,7]. В частности, одним из механизмов такой релаксации может служить зарождение и рост призматических дислокационных петель (ПДП).

Целью данной работы является сравнительный анализ критических условий релаксации напряжений несоответствия в наночастицах, в нанопроволоках и в плоских тонкопленочных структурах за счет образования ПДП у границ раздела в тонких оболочках (пленках) и в ядрах (подложках) таких нанообъектов.

Рассматриваются наноструктуры трех видов: композитные наночастицы и нанопроволоки типа «ядро-оболочка» и плоские тонкие пленки на подложках конечной толщины. Предполагается, что все эти нано-структуры упруго изотропны и однородны, причем толщина оболочки (пленки) существенно меньше радиуса ядра (толщины подложки). В рамках этих допущений сделаны строгие аналитические расчеты изменения полной энергии системы, сопровождающего образование ПДП у свободной поверхности оболочки

(пленки) и у ее границы с ядром (с подложкой). Рассмотрены три характерные конфигурации ПДП: петли типа «ПО», вытянутые поперек оболочки (рис. 1*a*), квадратные петли типа «КВ» (рис. 1*b*) и петли типа «ВО», вытянутые вдоль оболочки (рис. 1*c*).



Рис. 1. Схематичное изображение петель типа ПО-1, ПО-2 и ПО-3 (*a*); ВО-1, ВО-2 и ВО-3 (*b*); КВ-1, КВ-2 и КВ-2 и КВ-3 (*c*) у границ раздела в нанообъекте

Для определения наиболее предпочтительных ПДП изучены зависимости критического несоответствия f<sub>c</sub> от размеров наноструктур для разных конфигураций этих петель в наночастице (рис. 2, а-с), в нанопроволоке (рис. 2, d-е) и в плоской структуре пленкаподложка (рис. 2, g-i). Расчеты показали, что основным фактором, определяющим энергетическую предпочтительность зарождения ПДП, является величина несоответствия параметров решетки ядра и оболочки (пленки и подложки). Геометрические размеры наноструктуры влияют на нее в гораздо меньшей степени. Во всех рассмотренных наноструктурах независимо от места образования петли энергетически выгоднее случай, когда она вытянута вдоль границы. При этом зарождение со свободной поверхности всегда предпочтительнее. Для всех наноструктур критическое несоответствие образования петель, растущих в оболочку (пленку), увеличивается с ростом толщины оболочки (пленки) и с уменьшением радиуса ядра (толщины подложки), а для петель, расширяющихся в ядро, критическое несоответствие уменьшается с ростом толщины оболочки (пленки) и с уменьшением радиуса ядра (толщины подложки). Зарождение петель в подложке тонкопленочной структуры выгоднее, чем зарождение тех же петель в ядре наночастицы или нанопроволоки. Зарождение петель в оболочке нанопроволоки выгоднее, чем зарождение тех же петель в оболочке наночастицы или в плоской пленке. Показано, что призматические дислокационные петли могут переходить из одной конфигурации в другую при достижении толщиной оболочки некоторых пороговых значений.





Рис. 2. Зависимость критического несоответствия f<sub>c</sub> оболочки толщины h для петель, от зарождающихся в оболочке (пленке) у границы раздела (1), у свободной поверхности (2) и в ядре (подложке) у границы раздела (3) в наночастице (аc), в нанопроволоке (d-f) и в пленке (g-i). Петли типа ВО имеют параметры a/c = 0.2 и c/b = 10 (*a*, *d*, *g*); петли типа КВ – параметры a/c = 1 и c/b = 2 (*b*, *e*, *h*); петли типа ПО – параметры a/c = 5 и c/b = 2 (c, f, f) *i*). Величина вектора Бюргерса b = 0.3 nm Значения внешнего радиуса оболочки (суммарной толщины подложки и пленки) *R* даны в нанометрах.

#### ЛИТЕРАТУРА:

1. S. Behrens, Nanoscale 3 (2011) 877.

2. C. De Mello Donega, Chem. Soc. Rev. 40 (2011) 1512.

3. D. Shi, N. M. Bedford, H. S. Cho, Small 7 (2011) 2549.

4. В.Г. Дубровский, Г.Э. Цырлин, В.М. Устинов, ФТП 43 (2009) 1585.

5. L.B. Freund, S. Suresh. Thin film materials: stress, defect formation and surface evolution. Cambridge University Press, 2004, 770 p.

6. L.I. Trusov, M.Yu. Tanakov, et al., J. Cryst. Growth 114 (1991) 133.

7. M.Yu. Gutkin, Int. J. Engng. Sci. 61 (2012) Special Issue, 59.

УДК 625.855.3

И.А. Балай, В.И. Герасимов (Санкт-Петербургский государственный политехнический университет)

### ВЛИЯНИЕ СТРУКТУРЫ ФУЛЛЕРЕНА В ПРОЦЕССЕ РАСТВОРЕНИЯ В ОРГАНИЧЕСКИХ МАСЛАХ

В данной работе рассматривается группа масел на основе олеиновой кислоты (ω-9) с добавкой фуллеренов C<sub>60</sub> и C<sub>70</sub>. Получены данные по предельной растворимости фуллеренов в маслах исследуемой группы, данные по временной зависимости растворимости и результаты спектрофотометрического анализа.

В последнее время все большее внимание в медицине и косметологии уделяется препаратам, кремам, растворам и маслам, обогащенным фуллеренами. Эти частицы полностью состоят из углерода, поэтому наш организм принимает препараты на основе фуллеренов как «свои». Фуллерены являются мощным антиоксидантом и антисептиком, в составе медицинских и косметических препаратов они активизируют биологически активные вещества состава, тем самым ускоряют процесс регенерации и восстановления кожи [1]. Исследования Военно-медицинской академии имени С.М. Кирова [2] показали, что применение фуллерена С<sub>60</sub> вместо обычных средств для лечения и устранения последствий ожога внешних тканей, позволяет ускорить время заживления в полтора раза, и избежать нагноения области около ожога.

Для изготовления препаратов с добавками фуллеренов необходимо изучить процесс растворения наночастиц в основном веществе состава (в данном случае – органическое масло). Таким образом, целями данной работы были:

1. Получение данных по предельной растворимости фуллеренов C<sub>60</sub> и C<sub>70</sub> в базисных маслах на основе олеиновой кислоты.

2. Получение данных по зависимости растворимости фуллеренов C<sub>60</sub> и C<sub>70</sub> в базисных маслах на основе олеиновой кислоты.

3. Анализ данных спектрофотометрического исследования с целью выявить наличие или отсутствие в растворах чистых фуллеренов C<sub>60</sub> и C<sub>70</sub>.

Первый этап – получение данных по предельной растворимости фуллеренов [4, 5]. Данные по растворимости фуллеренов в органических растворителях получены в [3], по ним стартовой точкой выбрана концентрация 0.5 г/л. Через некоторое количество этапов достигалась предельная концентрация, данные представлены в табл. 1.

Габл. 1				
	Предельная	Предельная		
Масло	растворимость С70,	растворимость		
	г/л	С <sub>60</sub> , г/л		
Арганы	0,3815±0,015	0,6904±0,014		
Абрикосовое	0,3066±0,002	0,6600±0,022		
Макадамия	0,6625±0,007	0,5512±0,007		
Миндальное	0,5976±0,014	0,4569±0,018		
Персиковое	0,6612±0,012	0,5065±0,012		
Кукурузное	0,3788±0,012	0,4443±0,006		

Изменение непрозрачности масел с добавлением фуллерена  $C_{70}$  проходит в один этап, то есть происходит непрерывное потемнение раствора до полностью непрозрачного (рис. 1.). Процесс длится не более двух часов. В образцах с добавлением  $C_{60}$  наблюдались три стадии цветовой эволюции: изменение цвета раствора от исходного, до фиолетового, выдержка



фиолетового цвета продолжительное время (десятки часов), и завершающая стадия – превращение фиолетового цвета в насыщенный вишневый. Весь процесс занимает несколько дней.

Столь резкая разница BO времени обусловлена тем. что добавленные в масло фуллерены С<sub>60</sub> И  $C_{70}$ имеют различную объемную структуру. С<sub>60</sub> имеет форму, близкую к сферической, а фуллерен

Рис. 1. Временная зависимость растворимости С<sub>60</sub> и С<sub>70</sub>

 $C_{70}$  имеет эллипсоидальную форму. Представим некий объем, заполненный фуллереном. Очевидно, что не весь он будет занят самим фуллереном, между молекулами будет находиться свободный объем, пустоты, в которые при перемешивании проникают компоненты масла, и разрывают связанные кластеры фуллерена, тем самым начиная процесс растворения. Ввиду своей формы, фуллерен  $C_{70}$  имеет больший свободный объем, нежели  $C_{60}$ , а, значит, частицы масла имеют больше возможностей для проникновения в пустоты структуры, что напрямую влияет на скорость растворения.

Ранее было обосновано различие скоростей растворения, времена же напрямую зависят

от скоростей, а, значит, чем выше скорость растворения, тем меньше времени требуется на его завершение. растворения, Высокая скорость рыхлость структуры, построенной из эллипсоидальных молекул фуллерена С70, позволяют сделать вывод, что одноэтапное изменение цвета для данного вещества логично, структура быстро растаскивается по объему масла, и сразу же вступает в реакцию с его компонентами. Однако, ДЛЯ образцов с добавкой С<sub>60</sub> не все так просто. Первая стадия, изменение



Рис. 2. Структура С<sub>60</sub> (а), С<sub>70</sub> (б)

цвета от исходного до фиолетового, происходит за несколько часов. Конечный цвет данного этапа соответствует цвету фуллерена  $C_{60}$  в органических растворителях (бензол, ксилол, толуол), то есть, первый этап – растворение фуллерена, и подготовка его к последующим реакциям с компонентами масел. Фиолетовый цвет устойчив от 5 до 20 часов, после чего начинаются взаимодействия между растворенным фуллереном  $C_{60}$  и компонентами масел, вследствие чего фиолетовый цвет приобретает вишневый оттенок. Это означает, что подготовка молекул фуллерена к взаимодействию завершается, и начинается последний этап превращения – присоединение жирных кислот к внешней поверхности фуллерена. Реакция сопровождается изменением цвета раствора – теперь его можно определить как «спелая вишня», завершение реакции приводит к дальнейшему потемнению раствора.

Так же, предполагается, что при взаимодействии фуллерена с компонентами масла. происходит образование комплексов, присоединение цепочек жирных кислот к фуллерену, таким образом, на спектре образцов должны исчезнуть пики, соответствующие чистому (фуллерену), веществу введенному в масло. Как и предполагалось, ни один пик соответствует спектра не чистых С<sub>60</sub> длинам волн



Рис. 3. Спектры чистого фуллерена С<sub>60</sub> и масла абрикосовой косточки с добавкой С<sub>60</sub>

(рис. 3), а, значит, в образце действительно образуются комплексы фуллерена и одной или нескольких компонент исходного масла.

#### ЛИТЕРАТУРА:

1. Фуллерены: Учебное пособие / Л.Н. Сидоров, М.А.Юровская и др. – М.: Издательство «Экзамен», 2005. – 688 с. (Серия «Учебное пособие для вузов»)

2. «Раневой процесс: нанобиотехнологии отимизации» /под ред. В.А. Попова. – СПб.: СпецЛит, 2013. – 199с., ил. ISBN 978-5-299-00509-7

3. «Фуллерены и структуры углерода», Елецкий А.В., Смирнов Б.М., Успехи физических наук, 165, 977-1009 (1993)

4. «Фуллерены в растворах», Безмельницын В.Н., Елецкий А.В., Окунь М.В., Успехи физических наук, 168, 1195-1220 (1998)

5. Семенов К. Н., Арапов О. В., Кескинов В. А. и др. Растворимость легких фуллеренов в жирах (маслах) животного происхождения // Вестник Санкт – Петербургского Ун – та., 2009. С. 80 – 86.

УДК 548.24

С.А. Красницкий (Санкт-Петербургский государственный политехнический университет), М.Ю. Гуткин (Институт проблем машиноведения РАН, Санкт-Петербургский государственный политехнический университет, Санкт-Петербургский национальный исследовательский университет информационных технологий, механики и оптики), А.Л. Колесникова (Институт проблем машиноведения РАН),

А.Е. Романов (Физико-технический институт РАН, Санкт-Петербургский национальный исследовательский университет информационных технологий, механики и оптики)

## КРУГОВЫЕ ПРИЗМАТИЧЕСКИЕ ПЕТЛИ ДИСЛОКАЦИЙ НЕСООТВЕТСТВИЯ В ПОЛЫХ И СПЛОШНЫХ КОМПОЗИТНЫХ НАНОЧАСТИЦАХ ТИПА «ЯДРО-ОБОЛОЧКА»

В настоящее время большое внимание привлекают композитные наночастицы, состоящие ИЗ разных материалов [1-4]. кристаллических Такие структуры обладают уникальными электронными и оптическими которые находят широкое применение в свойствами. областях современной различных техники: оптоэлектронике, фотонике, спинтронике, солнечных батареях, сенсорных устройствах, устройствах накопления и передачи информации, катализе, медицине и т. Д. Стабильность свойств этих структур существенно зависит от присутствия в них дефектов и остаточных упругих деформаций напряжений несоответствия И [3], обусловленных различием кристаллических решеток и коэффициентов расширения материалов, теплового составляющих композитные наночастицы. При определенных условиях напряженно-деформированное состояние несоответствия может релаксировать за счет образования различных дефектов, называемых «дефектами несоответствия» [5, 6]. Один из таких механизмов



Рис. 1. Модель наночастицы типа «ядро-оболочка» с петлей дислокации несоответствия на межфазной границе образование вокруг ядра наночастицы круговых призматических петель дислокаций несоответствия (рис. 1). Приближенный анализ критических условий формирования такой петли в экваториальной плоскости наночастицы сделан в работе [6], где рассмотрены предельные случаи, когда радиус ядра либо много меньше радиуса оболочки, либо очень близок к нему. Отличие данной работы от [6] заключается в использовании точных выражений для упругой энергии круговой призматической дислокационной петли, залегающей в произвольной плоскости наночастицы со сплошным или полым ядром.

Для строго анализа критических условий зарождения круговых петель в сферически симметричных наночастицах типа «ядро-оболочка» с внутренней полостью и без нее использовались точные аналитические решения [7] граничных задач теории упругости о круговых призматических дислокационных петлях в сплошном и в полом упругих шарах со свободными поверхностями. Было рассчитано изменение полной энергии таких систем при образовании на границе ядра и оболочки круговой призматической петли дислокации несоответствия. Показано, что появление такой петли становится энергетически выгодным, если параметр несоответствия превышает некоторое критическое значение, которое определяется геометрическими характеристиками системы (рис. 2). Для всех кривых на рис. 2(а) наименьшему критическому несоответствию соответствует положение петли в свидетельствует плоскости наночастицы, что экваториальной об энергетической предпочтительности экваториального положения петли. Этот вывод хорошо согласуется с экспериментальными наблюдениями дислокаций несоответствия в декаэдрических, икосаэдрических и монокристаллических наночастицах, состоящих из ядер Аи и оболочек FePt<sub>3</sub> [8].

Из рис. 2b видно, что для каждого фиксированного размера наночастицы существует минимальный критический параметр несоответствия, ниже которого зарождение дислокации энергетически не выгодно ни при каких соотношениях радиусов ядра и оболочки. Для заданного несоответствия, большего минимального критического, существует два критических значения приведенного радиуса ядра наночастицы, в интервале между которыми энергетически выгодно зарождение петли. Полученные точные результаты (рис. 2,b) хорошо согласуются с результатами приближенных расчетов [6], если радиус наночастицы достаточно велик. Если же он становится меньше 60–80 нм, то точные значения критического несоответствия становятся заметно ниже приближенных, т. е. предсказывают меньшую устойчивость системы к зарождению петли дислокации несоответствия.

Из рис. 2b видно, что существует интервал значений радиуса ядра,  $a_p < R_0 < R_0^*$ , внутри которого штрих-пунктирные кривые проходят выше соответствующий сплошной кривой (здесь радиус полости  $a_p = 0.25a$  и 0.75a для a = 200b). Это означает, что полые наночастицы обладают большей устойчивостью к зарождению дислокационных петель, чем сплошные, пока радиус ядра частицы не превышает некоторого значения  $R_0^*$ , зависящего от радиуса полости  $a_p$ . При большем радиусе ядра (здесь при  $R_0 > R_0^*$ ) штрих-пунктирная кривая смещается ниже сплошной, т. е. сплошная наночастица становится более устойчивой к образованию петли, чем полая. Такая смена относительной устойчивости и ядра вклад упругой энергии петли в общий баланс энергии падает медленнее, чем выигрыш от релаксации напряжений несоответствия при образовании петли. С ростом размера ядра при фиксированном радиусе полости выигрыш в энергии от релаксации несоответствия растет быстрее, чем проигрыш в энергии от упругой энергии петли.



Рис. 2. Зависимость критического несоответствия  $f_{cr}$  от геометрических параметров системы: a – от приведенного положения петли  $z_0/R_0$  относительно экваториальной плоскости при внешнем радиусе наночастицы a = 50b (сплошные кривые) и a = 200b (штриховые кривые) и различных значениях приведенного радиуса сплошного ядра  $R_0/a$ ; b – от приведенного радиуса ядра  $R_0/a$  при разных значениях радиуса наночастицы a (сплошные кривые соответствуют точному решению для сплошного ядра, штриховые – приближенному решению для сплошного ядра [6], штрих-пунктирные – точному решению для ядра с внутренней полостью радиусом  $a_p = 0.25a$  и 0.75a при внешнем радиусе a = 200b). Точка с координатами (0.75, 0.03) соответствует экспериментальному наблюдению полной дислокации несоответствия в наночастице Au-FePt<sub>3</sub> радиусом a = 29b [8] и попадает в интервал значений  $R_0/a$ , допустимых для зарождения петель

В работе [8] наблюдались полные дислокации несоответствия в наночастицах со сплошным ядром Au размером ~ 6 нм и оболочкой FePt<sub>3</sub> толщиной ~ 1 нм. В таком случае приведенный радиус ядра  $R_0/a \approx 0.75$ . Принимая для материалов ядра и оболочки соответственно следующие параметры решетки  $a_1 = 0.408$  нм и  $a_2 = 0.396$  нм [8], получаем параметр несоответствия  $f \approx 0.03$  и внешний радиус a = 29b. На рисунке 2,b отмечена точка (0.75, 0.03), попадающая в предсказанный интервал между критическими значениями приведенного радиуса сплошного ядра, в котором зарождение петли энергетически выгодно для наночастицы с радиусом a = 29b, что свидетельствует о согласии теории с экспериментальными данными [8].

Наиболее полное представление об области пространства параметров сплошной наночастицы, в которой зарождение петли дислокации несоответствия оказывается энергетически выгодным, дают трехмерные диаграммы  $(R_0/a, z_0/R_0, f_{cr})$ , показанные на рис. 3. Появление на межфазной границе  $R = R_0$  петли с координатами  $(r = c, z = z_0)$  выгодно в том случае, если значения параметров системы  $R_0/a, z_0/R_0$  и f попадают в область над поверхностью  $f_{cr}(R_0/a, z_0/R_0)$ .



Рис. 3. Поверхность критического несоответствия  $f_{cr}(R_0/a, z_0/R_0)$  для разных значений радиуса сплошной наночастицы: (*a*) – *a* = 50*b*, (*b*) – *a* = 200*b* 

#### ЛИТЕРАТУРА:

- 1. Y.W. Cao, U. Banin, J. Am. Chem. Soc. 122 (2000) 9692.
- 2. W. Schartl, Nanoscale 2 (2010) 829.
- 3. C. De Mello Donega, Chem. Soc. Rev. 40 (2011) 1512.
- 4. C.M. Song, D.M. Anium, R. Sougrat, M.N. Hedhili, N.M. Khashab, J. Mater. Chem. 22 (2012) 25003.
- 5. L.I. Trusov, M.Yu. Tanakov, V.G. Gryaznov, et al., J. Cryst. Growth 114 (1991) 133.
- 6. M.Yu. Gutkin, Int. J. Engng. Sci. 61 (2012) Special Issue, 59.
- A.L. Kolesnikova, M.Yu. Gutkin, S.A. Krasnitckii, A.E. Romanov, Int. J. Solids Struct. 50 (2013) 1839.
- 8. Y. Ding, X. Sun, Z.L. Wang, S. Sun, Appl. Phys. Lett. 100 (2012) 111603.

### УДК 539.219.2

С.Н. Панпурин, Н.Ю. Золоторевский (Санкт-Петербургский государственный политехнический университет)

## ИСПОЛЬЗОВАНИЕ ИСКУССТВЕННО СГЕНЕРИРОВАННОЙ ДВУХМЕРНОЙ СТРУКТУРЫ ДЛЯ РАЗВИТИЯ ТЕХНИКИ EBSD-АНАЛИЗА

Использование обратного рассеяния электронов в сканирующем электронном микроскопе (EBSD-анализ) для изучения зеренных и субзеренных структур является в настоящее время одним из наиболее эффективных и популярных методов структурного анализа [1, 2]. EBSD-анализ представляет собой сканирование поверхности образца пучком электронов, автоматизированное определение ориентаций кристаллической решетки в узлах сетки сканирования и последующее построение ориентационной карты изучаемой структуры. Затем, на основе полученной карты, можно определить различные структурные характеристики, от которых зависят физические и механические свойства изучаемого материала.

В течение последних лет возможности EBSD-анализа существенно расширились благодаря увеличению скорости сканирования, повышению точности определения

ориентаций и новым методическим разработкам. При этом для совершенствования методики анализа данных полезным оказывается использование искусственно сгенерированных структур, помогающих обойти неустранимые в эксперименте технические проблемы, такие, как относительно большой шаг сканирования, наличие «нераспознанных точек» и т.п. [3].

В представленном докладе рассмотрены две методические задачи. Первая из них – это традиционное для EBSD-анализа определение среднего размера зерна или субзерна. Вторая – относительно новая задача восстановления структуры исходной фазы по структуре, образовавшейся в результате фазового превращения [4].



Рис. 1. Последовательные этапы генерации структуры: квадратная сетка, гексагональная сетка, случайные смещения и выбор центральной области, создание модельных данных

Для генерации искусственных структур использовалась следующая процедура (рис. 1). Создавался набор точек с координатами по осям X и Y от 1 до N, соответствующий квадратной сетке. Затем, для получения гексагональной сетки, координаты y точек с четными координатами x смещались на 0,5 по y, а координаты x всех точек умножались на коэффициент  $\sqrt{3}/2$ . На следующем этапе к координатам x и y добавлялись случайные смещения от -d до +d, распределенные равномерно. При больших смещениях структура получается менее однородной и равноосной. На заключительном этапе для каждой точки (т.е. для каждого элемента структуры – «зерна») задавалась определенная ориентировка. Для получения большей достоверности результатов выбиралась центральная область меньшего размера, повернутая на произвольный угол. После того, как структура создана, моделируется ее ориентационная карта с заданным шагом сканирования.

Для определения размера зерна использовалось три метода: два общепринятых (метод секущих и метод эквивалентного диаметра), а также предложенный нами новый метод определения размеров зерна, базирующийся на измерении протяженности границ. Идея метода основывается на известном соотношении между длиной границ и средним размером зерна, которое можно найти в классической монографии Салтыкова [5]. Тем не менее, в практике EBSD-анализа данный метод до сих пор не использовался, несмотря на то, что информация о протяженности границ может быть легко получена из ориентационной карты.

На рис. 2а представлен пример искусственно сгенерированной структуры для определения размера зерна. Из графика на рис. 2б видно, что все три рассмотренных метода дают близкие результаты. При этом предложенный новый метод имеет ряд преимуществ. Вопервых, он позволяет учитывать приграничные обрезанные зерна, в то время как учет этих зерен в других методах приводит к занижению среднего размера зерна. Кроме того, данный метод позволяет без дополнительных этапов обработки определять размер эффективного зерна (а именно, размер области  $D_{av}$ , разориентированной относительно своего окружения на угол, превышающий заданную величину  $\theta_{th}$ ). Этот размер является важным параметром, позволяющим полнее охарактеризовать взаимосвязь между структурой и механическими свойствами материала.



Рис. 2. Результаты использования искусственно сгенерированных структур: (a) пример структуры для определения размера зерна и (б) определение размеров зерна тремя методами (зависимость D<sub>av</sub> от θ<sub>th</sub>)); (в) пример структуры для отработки методики восстановления исходного зерна и (г) результаты восстановления

Для отработки методики восстановления исходного зерна, использовалась модифицированная система задания ориентировок. Она заключалась в первоначальном выделении несколько областей (в рассмотренном примере – три области), моделировавших зерна исходной фазы, с заданными ориентациями. В силу симметрии кристаллической решетки, из одного зерна исходной фазы при заданном ориентационном соотношении может образоваться определенное количество различных вариантов ориентации конечной фазы. Используя этот факт и известное ориентационное соотношение, можно для каждой точки из исходной области случайным образом задать один из возможных вариантов конечной ориентации (рис. 2в). Расчеты проводились на примере сплавов железа, в которых из исходного аустенита, имеющего ГЦК структуру, в результате полиморфного превращения образуются продукты с ОЦК структурой.

Анализ сгенерированной структуры показал, что границы, соответствующие границам зерен исходной фазы, могут очень слабо (~3°) отличаться от границ между вариантами. На рис. 2г представлены результаты восстановления границы исходных зерен. Серым цветом обозначены границы, отличающиеся от межвариантных не более чем на 2°. Это показывает, что в случае реальной структуры, когда ориентационное соотношение выполняется не строго, и присутствуют погрешности измерений ориентации, необходимо использовать сложные, многопроходные алгоритмы, выделяющие сначала области строгого выполнения ориентационного соотношения и лишь потом расширяющие их.

Таким образом, использование сгенерированных структур позволило получить два важных результата. Во-первых, метод определения размера зерна с помощью измерения протяженности границ хорошо согласуется с ранее существовавшими методами (секущих и эквивалентного диаметра), которые в случае равноосных зерен дают близкие результаты. Это позволяет предложить использование данного метода в практике EBSD-анализа. Вовторых, было показано, что для реконструкции исходных аустенитных зерен критичным является критерий близости к разориентировкам между вариантами. Кроме того, полученные результаты наглядно демонстрируют удобство использования простых искусственно сгенерированных структур для отработки методик и первичного анализа явлений.

## ЛИТЕРАТУРА:

1. F. J. Humphreys. Review Grain and subgrain characterization by electron backscatter diffraction // Journal of Material Science. – 2001. – V. 36. – P. 3833 – 3854.

2. F. Bachmann, R. Hielscher and H. Schaeben. Texture Analysis with MTEX – Free and Open Source Software Toolbox // Solid State Phenomena. – 2010. - V. 160. - P. 63 - 68.

3. R.P. Mingard et al. Grain size measurement by EBSD in complex hot deformed metal alloy microstructures // Journal of Microscopy. – 2007. – V. 227. – P. 298 – 308.

4. Miyamoto G., Iwata N., Takayama N., Furuhara T. Mapping the parent austenite orientation reconstructed from the orientation of martensite by EBSD and its application to ausformed martensite // Acta Mater. -2010. - V. 58. - P. 6393 - 6403.

5. Стереометрическая металлография / Под ред. С. А. Салтыков. – М. : Металлургия, 1976. – 270 с.

УДК 666.651.4

## Г.А. Бритвина (Санкт-Петербургский государственный политехнический университет), И.Я. Галлай (ОАО "НИИ "Гириконд")

## УВЕЛИЧЕНИЕ МОЩНОСТНЫХ ХАРАКТЕРИСТИК ВЫСОКОВОЛЬТНЫХ МОНОЛИТНЫХ КЕРАМИЧЕСКИХ КОНДЕНСАТОРОВ К15-20 ГРУППЫ Н-50

Целью данной работы является модернизация серийных высоковольтных монолитных керамических конденсаторов К15-20 группы Н-50 для повышения их мощностных характеристик.

Мощностные характеристики конденсаторов выражаются через реактивную мощность:  $P_p = UIsin\phi$ , которая ограничивается активной мощностью  $P_a = UIcos\phi$  (рис.1). Она вызывает разогрев корпуса конденсатора. Эти величины связаны соотношением  $P_a/P_p = ctg\phi = tg\delta$ , где  $\delta = 90^\circ$  -  $\phi$ , а  $\phi$  – угол сдвига по фазе между гармоническими током и напряжением на конденсаторе [1]. Возможные пути увеличения  $P_p$ :

- Уменьшение tgδ, т.е. электрических потерь;
- Увеличение допустимой температуры перегрева корпуса конденсатора;
- Увеличение отводимой тепловой мощности.

Соответственно, модернизацию конденсаторов можно проводить по следующим направлениям:

- Совершенствование керамических материалов с целью снижения диэлектрических потерь;
- Повышение температурной и полевой стабильности диэлектрической проницаемости в рабочем интервале температур и напряжений;
- Применение конструктивных и технологических приемов, способствующих лучшему отводу тепла от корпуса конденсатора.



Рис. 1. Зависимость допустимой реактивной мощности от частоты [2]



Рис. 2. Зависимость диэлектрической проницаемости (сплошные линии) и tgδ (пунктирные линии) от температуры для материалов Т-4000 и HCEC

Увеличение мощностных характеристик конденсаторов К15-20 возможно:

- За счет снижения tgδ при переходе от керамического материала T-4000 к HCБС [3]; Рис.2. показывает, что наблюдается некоторый выигрыш в значении ε при 25°С и снижении tgδ примерно в 2 раза. Поскольку P<sub>p</sub> = P<sub>a</sub>/tgδ, то при снижении tgδ в 2 раза P<sub>p</sub> увеличивается тоже в 2 раза (K<sub>1</sub> ≈ 2) в области ω<sub>1</sub> < ω < ω<sub>2</sub>.
- За счет снижения удельного сопротивления металлических электродов возможно снизить значение эквивалентного последовательного сопротивления (ЭПС) в области ω > ω<sub>2</sub> [4].

Для высокотемпературного материала T-4000 применяются внутренние электроды состава 10%Pt+90%Pd с удельным сопротивлением  $\rho_v = 45 \text{ мкOm} \cdot \text{см}$  и ЭПС у конденсаторов с габаритом 12×10 мм и емкостью 0,01 мкФ  $r_{SM} \approx 0.05 \text{ Om}$  [5]. Применяя материал НСБС, для которого используется сплав 30%Pd+70%Ag с удельным сопротивлением  $\rho_v = 18 \text{ мкOm} \cdot \text{см}$  достигается значение  $r_{SM} \approx 0.02 \text{ Om}$  [4].

Поскольку  $P_a = I^2 r_{SM}$ , то  $\frac{I(HCEC)}{I(T-4000)} = \sqrt{\frac{0.05}{0.02}} \approx 1.6$ , т.е.  $P_p$  возрастает в 2,5 раза (K<sub>2</sub>  $\approx$  2.5)





Рис. 3. Схема конденсатора с а)одинарными электродами, б)двойными электродами

• За счет применения конструкции с двойными электродами (схема изображена на рис.3)  $r_{SM}$  снижается еще примерно в 2 раза, т.е.  $\frac{I_2}{I_1} = \sqrt{\frac{r_{SM1}}{r_{SM2}}} \approx 1.4$ , поскольку в

области  $\omega > \omega_2 P_p = I^2/\omega c$ , то  $P_p$  возрастает примерно в 2 раза (K<sub>3</sub>  $\approx$  2) [4].

- За счет перехода от проволочных к ленточным выводам увеличивается поверхность конвекционной теплоотдачи. S<sub>пров.</sub>(12×10) ≈ 3 см<sup>2</sup>, а S<sub>лент.</sub>(12×10) ≈ 5.2 см<sup>2</sup> при ширине выводов 8 мм и длине до точки закрепления 7 мм. Конвективная мощность P<sub>a</sub> возрастает в 1,7 раз, т.е. P<sub>p</sub> также возрастает в 1,7 раз (K<sub>4</sub> ≈ 1.7).
- Из-за добавления отвода тепла через ленточные серебряные выводы за счет теплопроводности отводимая тепловая мощность P<sub>a</sub> также возрастает. При допущении, что ΔQ<sub>конв.</sub> ≈ ΔQ<sub>теплопр.</sub>, P<sub>a</sub> и P<sub>p</sub> возрастают в 2 раза (K<sub>5</sub> ≈ 2).

Таким образом, совместное применение всех мер по повышению реактивной мощности дает результат:

- В области частот  $\omega_1 < \omega < \omega_2$ :  $K = K_1 \cdot K_4 \cdot K_5 = 2 \cdot 1.7 \cdot 2 = 6.8;$
- В области частот  $\omega > \omega_2$ :  $K = K_2 \cdot K_3 \cdot K_4 \cdot K_5 = 2.5 \cdot 2 \cdot 1.7 \cdot 2 = 17.$

#### ЛИТЕРАТУРА:

1. Г.И. Сканави, «Физика диэлектриков (область слабых полей)», ГИТТЛ, Москва-Ленинград, 1949 г. 2. В.Т. Ренне, Ю.В. Багалей, Н.Б. Фридберг, «Расчет и конструирование конденсаторов», Киев: Техника, 1966 г.

3. Л.Ю. Боброва, Н.Я. Дукаревич, Г.П. Блохина, отчет о НИР «Изыскание путей совершенствования конструкции и технологии высоковольтного конденсатора монолитной конструкции», шифр: «Пандора», п/я Г-4816, 1988 г.

4. Б.А. Ротенберг, «Керамические конденсаторные диэлектрики», РФФИ, Санкт-Петербург, 2000 г.

5. Н.Ю. Сорокина, дипломная работа «Влияние технологических и конструктивных факторов на электрические параметры высоковольтных керамических конденсаторов К15-37», СПбГТИ, 2008 г.

## СЕКЦИЯ «КОНЕЧНО-ЭЛЕМЕНТНАЯ МЕХАНИКА И КОМПЬЮТЕРНЫЙ ИНЖИНИРИНГ»

УДК 539.3

## А.П. Галактионова, В.Н. Сергеев, О.И. Клявин, А.И. Боровков (Санкт-Петербургский государственный политехнический университет)

## ИССЛЕДОВАНИЕ ПРОЦЕССОВ РАЗРУШЕНИЯ В КОМПОЗИТНЫХ ПАНЕЛЯХ ВЕРТИКАЛЬНОГО ХВОСТОВОГО ОПЕРЕНИЯ САМОЛЕТА

Современная авиапромышленность активно переходит от металлических деталей к деталям, выполненным с применением композиционных материалов (КМ). Они позволяют не только существенно снизить массу и стоимость изделий, но и значительно повысить прочность, выносливость и многие другие характеристики летательных аппаратов. В настоящее время доля композитов в общей конструкции самолетов составляет около 15%, но в будущем прогнозируется более 50% деталей самолета делать из композитов.

В конструкции самолета многие детали из листового металла заменяются на детали, созданные из слоистых КМ. Слоистые КМ (ламинаты) представляют собой панели, чаще всего изготовленные из нескольких слоев волокнистых композитов, соединенных между собой при помощи связующего материала [1, 2]. Схематичное изображение укладки такой панели показано на рис. 1.



Рис.1. Схема укладки слоистого КМ

Ввиду сложности структуры КМ аналитические оценки их свойств и прочностных характеристик крайне Поэтому параллельно с затруднительны. активной разработкой и использованием КМ также активно развиваются И методы их численного анализа. Существенное внимание уделяется вопросу моделирования разрушения КМ. Основными процессами разрушения можно назвать следующие: разрушение матрицы, разрушение волокон и расслоение КМ. Расслоение может происходить как между матрицей и

волокнами, так и между слоями КМ (межслойное разрушение). Данная работа посвящена последнему случаю. Его особенность состоит в том, что положить начало такому разрушению могут даже дефекты при производстве или некоторые монтажные операции. При межслойном разрушении повреждаются связующие слои КМ, в результате чего слои самого материала перестают взаимодействовать как единое целое и при дальнейшей эксплуатации самолета может происходить рост зоны межслойного разрушения, что приведет к существенному снижению механических свойств и высокой вероятности аварии.

Целью данной работы является разработка метода моделирования слоистых КМ, построение модели, корректно описывающей поведение КМ при ударном взаимодействии с учетом межслойного разрушения на примере элементов вертикального хвостового оперения самолета.

На данном этапе исследования рассматривается задача об ударном взаимодействии панели из слоистого КМ с абсолютно жестким бойком диаметром 12,5 мм. Рассматриваемая панель состоит из 14 слоев, армированных углеволокном, с различной ориентацией укладки. Матрица – эпоксидная смола. Начальная скорость бойка 4 м/с, граничные условия – запрет всех перемещений и поворотов по краям панели. Панель моделируется двумя способами: с помощью оболочечных элементов (shell-модель) и с помощью твердотельных элементов

типа Continuum Shell и Cohesive (cshell-модель) [3, 4]. Элементы Continuum Shell представляют собой оболочечные элементы, имеющие трехмерную геометрию. Это позволяет моделировать каждый слой КМ в отдельности и соединять их между собой, образуя структуру, показанную на рис. 2б ("stacked shell") [5]. Элементы типа Cohesive используются для моделирования соединения между границами раздела слоев КМ, которые значительно меньше по толщине, чем слои КМ (изображены черным цветом на рис. 2, б). Общий вид моделей представлен на рис. 2. Задача решается явным методом в программном продукте Abaqus/Explicit.



Рис. 2. а) shell-модель с граничными и начальными условиями, б) cshell-модель

При решении задачи с shell-моделью можно получить лишь качественную оценку разрушения панели, поскольку такая модель позволяет учесть разрушение волокон и матрицы каждого слоя КМ, но не межслойное разрушение. Полное разрушение элемента shell-модели происходит только при разрушении в нем всех слоев КМ. Моделирование с помощью cshell-модели значительно более ресурсоемко и близко к прямому моделированию: каждый слой моделируется в явном виде элементами типа cshell, и они соединены между собой слоями связующего материала. Такая модель позволяет в явном виде учесть разрушение каждого слоя КМ, а также разрушение связующих элементов между ними, что означает межслойное разрушение. Модель материала композитного слоя – ортотропна (не представлено реальное расположение волокон), однако в критерии начала разрушения учитывается возможность разрушения отдельно и матрицы, и волокон. Материал связующих слоев – это материал кМ.

В качестве критерия разрушения КМ используется встроенный в модуль Abaqus/Explicit критерий Хашина для волокнистых КМ. Этот критерий учитывает 4 различных типа разрушения: растяжение волокон и матрицы и сжатие волокон и матрицы. Критерий начала разрушения для элементов межслоевой связки представляет собой квадратичный критерий по номинальным напряжениям и удовлетворяется при достижении равенства:

$$\{\frac{t_n}{t_n^0}\}^2 + \{\frac{t_s}{t_s^0}\}^2 + \{\frac{t_t}{t_t^0}\}^2 = 1$$

где  $t_n^0$ ,  $t_s^0$ ,  $t_t^0$  – максимальные значения номинальных напряжений при чисто нормальной к поверхности деформации, чисто по первому или второму сдвиговому направлению, соответственно. В модели принимается, что разрушение элементов происходит сразу после удовлетворения критерия начала разрушения, т.е. не моделируется процесс развития разрушения.

На рис. 3 представлены области разрушения первого слоя панели по критерию Хашина для растяжения армирующих волокон. Черным цветом отображены зоны, в которых удовлетворяется критерий начала разрушения. Из рисунков видны четкие направления разрушений в слое. Можно судить о его гарантированном разрушении, поскольку армирующие волокна, несущие основную нагрузку в материале, разрушаются в области удара. На рис. 4 изображены связующие слои между слоями КМ в cshell-модели. Разрушение этих связующих слоев означает межслойное разрушение. Из рисунка видно, что оно происходит по всей толщине пластины, и в этой области слои КМ более не взаимодействуют друг с другом как единое целое. Сечение панели в области удара бойка представлено на рис. 5.



Рис. 3. Области разрушения в первом слое панели: a) shell-модель, б) cshell-модель



Рис. 5. Сечение панели в области удара бойка, области межслойного разрушения



Рис. 4. Области межслойного разрушения (cshell-модель)

Ha рис. 6 представлены графики перемещений и скорости бойка. Видно, что кинематические характеристики бойка В обеих моделях совпалают с высокой степенью точности до момента полной остановки бойка панелью, различие лишь в том, что в cshell-модели боек набирает большую скорость отлета, чем в shell-модели.



Рис. 6. Графики а) полного перемещения и б) скорости бойка

В работе предложена модель, описывающая межслойное разрушение композитной панели. Рассмотрено решение тестовой задачи об ударном взаимодействии панели с моделью абсолютно жесткого бойка. В условиях поставленной задачи удалось добиться эффекта межслойного разрушения по всей толщине панели. В дальнейшем планируется применить разработанный подход к моделированию композитных панелей вертикального хвостового оперения самолета, и оценить характеристики ударного воздействия, влекущего за собой межслойное разрушение панелей. Также представляет интерес исследование усталостной прочности конструкции с приобретенным в результате ударного воздействия межслойным разрушением с целью определения критических размеров областей данного типа разрушения, при которых будет потенциально опасна дальнейшая эксплуатация самолета и потребуется замена поврежденной детали.

#### ЛИТЕРАТУРА:

1. Jones, Robert M. Mechanics of composite materials, 2nd ed., 1999.

2. Ф. Мэттьюз, Р. Ролингз. Композитные материалы. Механика и технология. Москва: Техносфера, 2004. – 408 с.

3. B. Gözlüklü. Delamination analysis by using cohesive interface elements in laminated composites, 2009. 4. ABAQUS Analysis User Manual, версия 6.10.

5. S. Heimbs. T. Bergmann, High-velocity impact behavior of prestressed composite plates under bird strike loading, International Journal of Aerospace Engineering, vol. 2012.

УДК 539.3

## С.В. Алексеев, О.И. Клявин, А.И. Боровков (Санкт-Петербургский государственный политехнический университет)

## РАЗРАБОТКА И МОДИФИКАЦИЯ ДОПОЛНИТЕЛЬНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ СИЛОВОГО КАРКАСА КУЗОВА ЛЕГКОВОГО АВТОМОБИЛЯ И АНАЛИЗ ИХ ВЛИЯНИЯ НА ЕГО ПАРАМЕТРЫ

Конструкция современных автомобилей является сложной системой, учитывающей множество факторов. Среди них устойчивость и плавность хода, пассивная безопасность, надежность, долговечность узлов и элементов, их прочность, а также топливная экономичность и другие.

Целью данной работы является разработка и внедрение дополнительных элементов в конструкцию силового каркаса кузова легкового автомобиля и оценка их влияния на различные параметры, такие как крутильная жесткость, изгибная жесткость и частоты собственных колебаний.

Стоить заметить, что перечисленные параметры являются важнейшими статическими характеристиками кузова. Жесткость - это главная прочностная характеристика кузова. Наезд одним колесом на бордюр, подъем автомобиля на домкрате, диагональное вывешивание на бездорожье, прохождение поворота – во всех этих и многих других ситуациях высокая жесткость кузова способствует более комфортному и безопасному процессу использования автомобиля [1]. Также, увеличивается усталостная прочность кузова в составе автомобиля. Поэтому, одной из целей конструкторов современных автомобилей является повышение жесткости кузова.

Увеличение значения основных собственных частот кузова тоже является важной задачей, так как это предотвращает возможность передачи колебаний, вызванных прогибом пневматических шин и деформацией подвески в процессе эксплуатации, на кузов в результате взаимодействия.

В процессе работы были разработаны и поэтапно внесены в модель конструкции подрамника, ниши багажника и торсионные стабилизаторы. На каждом шаге был проведен анализ влияния добавленных конструктивных элементов на изменение исследуемых параметров конструкции. Теоретическое обоснование использованных в работе методов представлено в [2] и [3].



Рис. 1. КЭ модель кузова

Конечно-элементная модель каркаса кузова представлена на рис. 1. Процесс создания модели состоит из нескольких таких этапов, как создание конечноэлементной отдельной модели каждой моделирование болтовых детали, сварных точек и клеевых соединений, соединений. Модель состоит из 443445 оболочечных элементов, 36 соединений типа - недеформируемая связь, моделирующих болтовые соединения и 2177 сварных и клеевых соединений, моделируемых при

помощи 4609 твердотельных элементов и 27002 не вносящих дополнительных жесткостей связей. Основные использованные соотношения МКЭ и необходимая для моделирования информация представлены в [4] и [5]. Силовой каркас кузова состоит из 10 различных материалов. Масса модели – 227,072 кг.

Для расчетов крутильной и изгибной жесткостей необходимо закрепить модель и придать необходимую нагрузку. Схемы испытаний представлены на рис. 2 и 3.

При испытании на крутильную жесткость (рис. 2) накладывается запрет перемещений по определенным направлениям на опоры пружины задней подвески, а на опоры пружины амортизационной стойки прикладываются одинаковые по значению, но противоположные по направлению силы. Затем, для вычисления значения жесткости, перемещения в точках 1 и 2 подставляются в формулу 1:

$$c = 2Fl/arctg((w_1 - w_2)/2l),$$
 (1)

где l – половина расстояния между опорами пружины амортизационной стойки, F – значение приложенной силы,  $w_1$  – вертикальное перемещение в точке 1,  $w_2$  – вертикальное перемещение в точке 2.



Рис. 2. Схема испытания на крутильную жесткость

Рис. 3. Схема испытания на изгибную жесткость

Для расчета изгибной жесткости (рис. 3) накладывается запрет перемещений по указанным на рисунке направлениям на все 4 опоры. Далее, на середине расстояния между передними и задними опорами прикладываются две вертикальные силы. Изгибная жесткость кузова вычисляется по формуле 2:

$$c = F/U , (2)$$

где F – приложенная сила, а U – среднее перемещение.

Процесс проектирования на основе моделирования дополни-тельных элементов - это много-этапный процесс, включающий в себя создание геометрии, превращение ее в конечноэлементную модель, присоеди-нение к каркасу кузова, расчет и сравнение результатов. Всего было проведено моделирование около 10 различных модификаций и из них выбрана наиболее эффективная. На рис. 4 представлена оконча-тельная на данный момент версия модели (разработанные и присоединенные элементы выделены).



Рис. 4. Модифицированная конструкция

На рис. 5 схематически представлено деформированное состояние измененной конструкции каркаса кузова в случае моделирования испытания на крутильную жесткость, на рис. 6 в случае моделирования испытания на изгибную жесткость. Для расчета собственных колебаний исследуемой модели наложение дополнительных граничных условий не требуется.



Рис. 5. Деформированное состояние в случае испытаний на крутильную жесткость

Рис. 6. Деформированное состояние в случае испытаний на изгибную жесткость

В табл. 1 приведены значения исследуемых параметров для 2 случаев моделирования (стандартная конфигурация и модифицированная конфигурация).

ruosi. 1. ona tenne neonedjembin napamerpob din onneunibin konqui jpadim								
	Крутильная	Изгибная	Первая	Вторая	Первая	Вторая		
	жесткость,	жесткость,	изгибная	изгибная	крутильная	крутильная		
	Н•м/град	Н/мм	частота,Гц	частота,Гц	частота,Гц	частота,Гц		
Стандартная конфигурация	8556	5835	49,20	59,62	30,79	68,88		
Модифицир. конфигурация	13595	6398	50,45	64,31	32,64	75,58		
Изменение параметра	58,9 %	9,6 %	2,7 %	7,9 %	5,8 %	9,7 %		

Табл. 1. Значение исследуемых параметров для описанных конфигураций

Как видно из таблицы, модифицированная конфигурация имеет более высокие значения исследуемых параметров. Изменение некоторых значений весьма существенно (крутильная жесткость повышается почти на 60%, вторая крутильная частота на 10%), а изменение других не столь велико (первая изгибная частота повывшается всего на 2,7%).

Таким образом, можно сделать вывод, что разработанные модификации значительно увеличивают исследуемые характеристики кузова легкового автомобиля, и их внедрение повышает пассивную безопасность автомобиля в целом. Стоит отметить, что наибольший вклад вносится непосредственно торсионными стабилизаторами.

В качестве продолжения данной работы планируется провести оценку внедрения подобной модификации уже непосредственно на модель прототипа кузова автомобиля, а также оценить изменения динамических параметров кузова в отношении пассивной безопасности.

#### ЛИТЕРАТУРА:

1. Вахламов В. К. Автомобили, конструкция и элементы расчета. М.: Издательский центр «Академия», 2006. – 480 с.

2. Зенкевич О., Морган К. КЭ методы и аппроксимация – М.: Изд-во МИР, 1986. 318 с.

3. Сегерлинд Л. Применение метода конечных элементов. М.: Изд-во«Мир», 1979 - 392 с.

4. ABAQUS Theory Manual, Version 6.7.

5. ABAQUS Analysis User's Manual, Version 6.7.

УДК 539.3

Н.А. Харалдин, А.И. Боровков, О.И. Клявин (Санкт-Петербургский государственный политехнический университет)

## МОДИФИКАЦИЯ КОНЕЧНО-ЭЛЕМЕНТНОЙ МОДЕЛИ МАНЕКЕНА НУВRID-III ДЛЯ ЗАДАЧ МОДЕЛИРОВАНИЯ СТОЛКНОВЕНИЯ АВТОМОБИЛЯ С ПЕШЕХОДОМ

Дорожно-транспортные происшествия с пешеходом приводят к большому количеству тяжелых травм и смертей среди пешеходов. Производители автомобилей при проектировании уделяют в настоящее время все больше внимания защите пешеходов. Компьютерное моделирование является мощным инструментом на пути создания безопасных для пешеходов автомобилей и исследования дорожно-транспортных происшествий с пешеходами.

Новые нормы Европейского Союза (ЕС), уже вступившие в силу на сегодняшний день, предусматривают тестирование автомобилей на защиту пешеходов с использованием отдельных импакторов головы, бедра и голени (EuroNCAP) [1]. При этом манекены пешеходов, которые появились еще в 1970-х годах, используются на данный момент только в исследованиях у автопроизводителей и в независимых лабораториях. Манекены пешеходов не включены в соответствующие нормы и правила ни в США, ни в ЕС [2].

На данный момент наиболее распространёнными исследованиями в области столкновения автомобиля с пешеходами являются два способа: с помощью импакторов и полный анализ с использованием модели пешехода. В области компьютерного моделирования последний способ на данный момент обладает весьма небольшим числом деформируемых моделей пешеходов (THUMS AM-40, большинство моделей не опубликовано) [3]. Рассматриваются в таких случаях, как правило, модели, состоящие из системы твердых тел (MADYMO, PC-Crash) [3].

Большинство современных исследований в области защиты пешеходов были получены благодаря исследованиям с импакторами, так как этот метод наиболее прост при компьютерном моделировании, а при натурных экспериментах обходится дешевле, и легко может быть воспроизведён (использование в EuroNCAP) [1]. Однако, несмотря на все свои преимущества, данный метод не способен в полной степени передать всю кинематику столкновения автомобиля с пешеходом, и в достаточной степени охватить всю картину при исследовании дорожно-транспортных происшествий, к тому же не дает в полной мере оценить все травмы, которые может получить пешеход [3]. Моделирование пешехода системой твердых тел может давать не точные результаты оценки полученных травм, в

первую очередь связанных с грудной клеткой и тазом. Таким образом, логичным развитием имеющихся подходов является использование деформируемой конечно-элементной модели.

Целью работы является создание конечно-элементной модели пешехода, базирующейся на существующей конечноэлементной антропоморфной модели манекена Hybrid III 50th Percentile Male Crash Test (далее Hybrid III CT). Данный манекен является наиболее распространенным манекеном водителя и пассажиров в мире для исследований в области безопасности автомобиля, сертифицирован в США и ЕС [2]. Конечно-элементная модель Hybrid III СТ успешно прошла предусмотренные правилами нормами все И верификационные и калибровочные тесты и пригодна для моделирования водителя и пассажиров [2]. Необходимо по указанным производителем



Рис. 1. Манекены Hybrid III СТ и Hybrid III Р



Рис. 2. Сравнение поясничного отдела позвоночника

отличиям между манекенами Hybrid III CT и Hybrid III 50th Percentile Pedestrian (манекен пешехода, далее Hybrid III P) создать конечноэлементную модель пешехода (см. рис. 1).

Манекен Hybrid III СТ имеет искривленный поясничный отдел позвоночника, который учитывает небольшую сутулость человека, сидящего в автомобиле [2,4,6]. Для манекена пешехода, соответствующего человеку в прямом вертикальном положении, данная часть должна быть заменена на прямую. Сравнение частей манекенов приведено на рис. 2.

На рис. 3 приведена нижняя часть туловища манекена, выполненная цельным куском, которая соответствует сидячему человеку и обеспечивает только незначительные повороты ноги в тазобедренном суставе [4-6]. Таким образом, данная часть также требует модификации. Данная деталь разбивается на три части: две для ног и

одна принадлежащая туловищу [5]. Подобная компоновка обеспечивает свободное вращение в тазобедренном суставе. Построенная конечно-элементная модель представлена на рис. 4 в сравнении с имеющейся изначально.

Скользящий шарнир в колене манекена должен быть убран, чтобы движение в колене осуществлялось только вращательное [4].

Также некоторую доработку требуют части, находящиеся в области таза и



Рис. 3. Сравнение тазовой части манекенов

обеспечивающие крепление датчиков и модифицированных частей манекена, а также изменение набора и положения самих датчиков согласно имеющимся данным [4].

Все сертификационные тесты, производимые с манекенами согласно принятым нормам, остаются в силе, так как они касаются частей манекена, которые не были



Рис. 4. Конечно-элементные модели тазовой области

частей манекена, которые не были модифицированы (голова, грудная клетка, ноги) [2].

В некоторых работах валидация полученной модели проводится с использованием проведенных экспериментов по столкновению тел умерших людей с автомобилем. Исследование ведется с использованием вероятностных

коридоров для различных характеристик движения манекена после столкновения (скорость головы и траектории движения частей тела). Однако подобные исследования весьма сложны, и не всегда дают приемлемые результаты для всех исследуемых величин [3].

Следует отметить, что изначальная модель манекена используется и для моделирования таких дорожно-транспортных ситуаций, в которых кинематика манекена имеет также весьма сложный характер, как и у пешехода при столкновении с автомобилем [5,6].

Полученная конечно-элементная модель пешехода (см. рис. 5) соответствует предъявленным производителем допускам на массы и размеры частей манекена Hybrid III P.

Конечно-элементная модель пешехода имеет датчики, позволяющие судить о кинематике столкновения и травмах полученных пешеходом. В первую очередь это акселерометр в голове, показания которого позволяют вычислить HIC (Head Injury Criterion),



Рис. 5. Конечно-элементная модель пешехода

момент и усилия в большой бедренной кости, датчик смещения в колене, перегрузка в берцовой кости и угол смещения голени [2]. Все эти данные применяются в тестах EuroNCAP с импакторами и используются для оценки безопасности автомобилей [1]. По этим данным можно весьма эффективно строить вероятностные оценки получения травм пешеходом. Также в результате моделирования можно получить моменты и усилия в шее, бедренной кости, позвоночнике, колене, руках, оценить повреждения грудной клетки и тазовой области.

Построение конечно-элементной модели проводилось с целью дальнейшего использования для реконструкции ДТП с участием автомобиля и пешехода. Данная модель позволяет существенно расширить имеющиеся данные о травмах и повреждениях полученных пешеходом в результате моделирования. Возможность дополнительного сравнения травм, полученных в результате моделирования и в реальном ДТП, очень важно при реконструкции ДТП с пешеходом методом конечных элементов.

#### ЛИТЕРАТУРА:

- 1. Official website EuroNCAP: http://www.euroncap.com.
- 2. Official website Humanetics Innovative Solutions, Inc.: http://www.humaneticsatd.com.
- 3. Teng T., 2008, "Development and validation of a pedestrian deformable finite element model", Journal of Mechanical Science and Technology 23 (2009). P. 2268 2276.

4. Humanetics Innovative Solutions, Inc., Hybrid-III 50th Ball Bearing Knee Slider Male Dummy, Brand Harmonized Parts Catalog.

5. David C. Viano, Chantal S. Parenteau, Roger Burnett Influence of standing or seated pelvis on dummy responses in rear impacts, Accident Analysis & Prevention Volume 45, March 2012, - P. 423 – 431.

6. Qi Zhang, Jason Kerrigan, David Lessley, Jeremy Seppi, Patrick Riley, Patrick Foltz, Jack Lockerby, Brian Overby, Christopher Sowers, Jeff Crandall, Whole-body Kinematics: Response Comparison of the Hybrid III and Hybrid III Pedestrian ATD in DRoTS Rollover Tests, IRCOBI Conference 2013, P. 330 – 367.

УДК 539.42

А.В. Лукин, А.М. Лобачев, В.С. Модестов, А.И. Боровков (Санкт-Петербургский государственный политехнический университет)

# ИССЛЕДОВАНИЕ НЕЛИНЕЙНЫХ МОДЕЛЕЙ ДЕФОРМИРОВАНИЯ И ПРОЧНОСТИ ЖЕЛЕЗОБЕТОНА ПОД ДЕЙСТВИЕМ НЕСТАЦИОНАРНЫХ НАГРУЗОК

В данной работе рассматривается проблема численного моделирования и расчета железобетонных конструкций и элементов АЭС под действием широкого спектра статических и динамических нагрузок. Пристальное внимание уделено следующим аспектам проблемы: разработка методики учета арматуры в бетоне; исследование численных методов учета явления трещинообразования и его влияния на прочность железобетона; разработка рекомендаций по настройке алгоритмов численного расчета железобетонных конструкций; исследование работы бетона под действием быстро изменяющихся, знакопеременных нагрузок; верификация полученных численных решений на основе экспериментальных данных. Производится обзор существующих моделей деформирования и прочности железобетона, реализованных в ряде программных комплексов конечно-элементного анализа.

Исследование проводилось на основе КЭ расчетов на прочность ряда железобетонных конструкций (балок, колонн, обечаек, плит, крупномасштабных бетонных массивов) с различными конфигурациями армирования. В расчетах учитывались следующие механические особенности бетона [1]: нелинейная зависимость между напряжениями и деформациями; различное сопротивление бетона растяжению и сжатию; способность к трещинообразованию (деформационная анизотропия); увеличение объема при трехосном сжатии (дилатация); значительная зависимость прочностных свойств бетона от температуры; ползучесть и усадка бетона. Сталь арматуры принималась упруго-пластическим материалом.

На первом этапе исследования был проведен обзор существующих моделей деформирования и прочности железобетона, реализованных в ряде программных систем конечно-элементного анализа (ANSYS,LS-DYNA,ABAQUS).

На втором этапе исследования в программном комплексе ABAQUS [2] было решено и проанализировано более 150 модельных задач по расчету железобетонных плит на статические нагрузки (рис. 1).

На основе экспериментальных данных производилась верификация результатов расчета и калибровка параметров моделей деформирования и прочности бетона [3,4,5]. Выполнен сравнительный анализ результатов, полученных для различных моделей бетона («Concrete smeared cracking» и «Concrete Damage Plasticity»). В расчетах применялись как неявные (комплекс «Abaqus Standard»), так и явные («Abaqus Explicit») схемы численного интегрирования. Выработаны рекомендации по областям применимости вышеназванных численных методов.

Применение явных схем в данной задаче позволяет существенно увеличить скорость расчета. Согласно полученным результатам, явный метод расчета обеспечивает лучшую сходимость по сравнению с неявным методом: амплитуды перемещений и нагрузок, достигнутые при явном расчете, заметно превышают данные величины при неявном расчете. Более того, во всех проведенных экспериментах наблюдалась сходимость численных решений.



Рис. 1. Касательные (а) и главные сжимающие (б) напряжения в ж/б плите, Па

Установлено, что в области сравнительно малых нагрузок результаты расчетов явным и неявным методом близки. Неявный метод более консервативно описывает процесс трещинообразования и разрушения бетона. Вместе с тем, добиться сходимости неявного метода при значительных амплитудах нагрузок представляется очень трудным и не всегда осуществимым. Уточнение модели приводит к сближению результатов для явной и неявной схем в области сходимости последней. В то же время, уточнение КЭ модели существенно замедляет процесс явного решения. Таким образом, применение явных схем при расчете статических нелинейных задач механики железобетона целесообразно при амплитуде нагрузок на конструкцию, превышающих предел сходимости неявного метода. Особо эффективны явные схемы при расчете КЭ моделей со сравнительно небольшим числом степеней свободы.



Рис. 2. Распределение главных растягивающих напряжений, Па

На третьем этапе работы была выполнена разработка методики динамического расчета железобетонных конструкций на сейсмическое воздействие с учетом нелинейных свойств бетона и процесса трещинообразования. В отличие от статических расчетов железобетонных

конструкций, при динамических расчетах необходимо учитывать усталостные и реономные свойства бетона. Кроме того, большое влияние на динамическую работу бетона оказывает возникновение и развитие трещин. На данном этапе работы было проведено исследование и применение к расчетам наиболее полной модели деформирования и прочности бетона программного комплекса ABAQUS «Concrete Damage Plasticity».

Производился расчет на сейсмическое воздействие железобетонной конструкции, распределение растягивающих напряжений в которой показано на рис. 2.

Согласно результатам расчета, под действием сейсмической нагрузки бетон в конструкции достигает предела прочности при растяжении, вследствие этого происходит возникновение трещин с последующим их открытием/закрытием. В связи со знакопеременностью нагрузки и значительностью её амплитуд усталостные эффекты в бетоне оказывают большое влияние на НДС конструкции. Это демонстрирует рис. За, на котором представлено распределение значений параметра  $d_t$ , моделирующего ослабление жесткостных свойств бетона при смене знака напряжений в данном элементе с растягивающих на сжимающие. Достижение этим параметром значения 1 означает, что данный элемент бетонной конструкции разрушается (модуль Юнга становится равным нулю). На рис. Зб показан рост этого параметра в процессе землетрясения для одного из элементов КЭ модели в основании колонны.



Рис. 3. Распределение значений параметра d<sub>t</sub> (а) в конструкции и его изменение во времени в расчетной точке

Таким образом, в результате исследований установлено, что формирование реалистичной нелинейной модели бетона с учетом его взаимодействия с арматурой позволяет проводить достоверные расчеты ж/б конструкций методом конечных элементов на широкий спектр статических и динамических (в т.ч. циклических и ударных) нагрузок. Калибровка параметров каждой из рассмотренных моделей бетона требует обладания результатами достоверных экспериментальных исследований.

#### ЛИТЕРАТУРА:

1. Карпенко Н.И. Общие модели механики железобетона. – М.: Стройиздат, 1996.

2. ABAQUS Theory Manual.

3. Anthony J. Wolanski. Flexural behavior of reinforced and prestressed concrete beams using finite element analysis. – Marquette University, Milwaukee, 2004.

4. E. Riks. An incremental approach to the solution of snapping and buckling problems. – International Journal of Solids and Structures, Vol. 15, Issue 7, 1979, P. 529 – 551.

5. Dr K P Jaya, (Ms) K R Bindhu, M Srinivasan. Effect of Reinforcement Percentage on the Cyclic Behavior of Columns. – Journal of the Institution of Engineers (India), vol. 89, November 2008.

УДК 539.3

А.Д. Лагуткина, А.И. Боровков, А.С. Немов, О.В.Антонова, С.Н. Сычева (Санкт-Петербургский государственный политехнический университет)

## ОСОБЕННОСТИ РАСЧЁТА ОБЩЕЙ ПРОЧНОСТИ ВЫСОКОСКОРОСТНЫХ СУДОВ ИЗ КОМПОЗИЦИОННЫХ МАТЕРИАЛОВ НА ОСНОВЕ ПРЯМОГО КОНЕЧНО-ЭЛЕМЕНТНОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ

В последние годы композиционные материалы находят все большее применение в конструкциях автомобилей, самолётов, судов. Разрабатываемые в настоящее время в Российской Федерации суда должны быть рассчитаны на прочность корпуса согласно правилам Российского Морского Регистра Судоходства [1]. Соответствующий руководящий документ содержит методики расчёта общей и местной прочности корпуса металлического судна, а также некоторые рекомендации по расчёту высокоскоростных стеклопластиковых катамаранов небольших размеров (водоизмещением до 2т.). Расчёты общей прочности, согласно данному документу, основаны на теоретическо-эмпирических формулах, применимых только к типовым конструкциям, что не позволяет рассчитывать новые конструкции из композиционных материалов. В ходе исследования выполнен анализ наиболее используемых в мировой судостроительной практике правил в части требований к общей прочности: Российский Морской Регистр Судоходства (РМРС) [1], Норвежский Морской Регистр (DNV) [3], [5], Немецкие правила классификации и постройки судов [4].

Цель исследования – разработка постановок задач расчета общей прочности высокоскоростных судов из композитов на основе прямого конечно-элементного моделирования, удовлетворяющих требованиям вышеприведённых классификационных сообществ. Выбор прямого конечно-элементного моделирования в качестве основного метода исследования обусловлен его возможностями по учету сложной структуры слоистых композиционных материалов, а также его универсальностью по отношению к конструкции судов. В настоящем исследовании задачи общей прочности решались для композитного катамарана со следующими основными характеристиками: длина судна по ватерлинии L=23.8 м, полное водоизмещение  $\Delta$ =74.2 т, максимальная скорость V=29.5 уз. (54.6 км/ч). Конечно-элементный расчёт выполнен с помощью ANSYS 13.0, разработанная оболочечная модель основана на классической теории многослойных оболочек и позволяет учесть укладку слоев в элементах конструкции.

В соответствии с п. 5.3.1.1 РМРС общая прочность скоростного катамарана должна быть проверена при следующих типах напряженно-деформированного состояния (НДС): общий изгиб в продольном направлении; общий изгиб в поперечном направлении; кручение. DNV предлагает следующие задачи: расчёт прочности корпуса при общем изгибе; расчёт прочности при кручении; расчёт прочности при комбинированном воздействии (60% кручения+80% изгиба; 80% кручения+60% изгиба); расчёт прочности при действии боковой нагрузки. Согласно немецким правилам, исследование общей прочности заключается в следующих задачах: расчёт общего продольного изгиба; расчёт общего поперечного изгиба; расчёт прочности при кручении.

Несмотря на то, что все рассмотренные нормы разрешают и даже рекомендуют выполнение расчетов на основе прямого КЭ моделирования для нестандартных конструкций судов из композиционных материалов, конкретных формулировок задач для решения путем прямого КЭ моделирования РМРС и German Lloyd не содержат. DNV же имеет конкретные рекомендации по расчёту нагрузок для каждой задачи, способу их приложения, и, вероятно,

потому является одним из наиболее применяемых в международной практике руководящим документом для расчётов композиционных судов (например, [6]). Постановки задач общей прочности, приведённые в DNV, полностью удовлетворяют требованиям PMPC и Немецким правилам, и даже перекрывают их. В основе постановок практически всех задач общей прочности лежит расчёт вертикального ускорения, действующего на корпус судна. Приведём расчет вертикального ускорения по всем трём Нормам.

PMPC: 
$$a_{cg} = g([1.4 + 3.4Fr_L \exp(-2.7Fr_L)](1 + 2.5Fr_L)^2 \cdot f_1 \sqrt{1 + 48(\frac{x_m}{L} + 0.075)^2 + F)} = 28.43 M/c^2$$

Где число Фруда по длине  $Fr_L = 0.514V / \sqrt{gL}$ ;  $x_m$  – абсцисса рассматриваемой точки, отсчитываемая от миделевого сечения; F, f – добавочные коэффициенты (ч.II,гл.5,п.5.3.9[2])

DNV:  $a_{cg} = \frac{V}{\sqrt{L}} \frac{3.2}{L^{0.76}} f_g g_0$ , min  $a_{cg} = 1 \cdot g_0$ ,  $a_{cg} = 9.81 \text{м/c}^2$ , где  $f_g$  – коэффициент, зависящий от класса судна (Pt.3 Ch.1 Sec.2B [3]).

German Lloyd:  $a_{cg} = C_{HSC}C_{RW} \frac{V}{\sqrt{L}} = 10.67 \, \text{м/c}^2$ , где  $C_{HSC}C_{RW}$  – коэффициенты, зависящие от

района плавания, класса судна(Sec.3 C3.3.1 [4]).

Следует отметить, что величина ускорения по РМРС в несколько раз выше величин, рассчитанных по норвежским и немецким правилам, результаты, полученные по которым близки между собой. Это можно объяснить, что ускорение в РМРС является в большей степени справочным, чем предназначенным для проектировочных расчётов. Также оно рассчитано в основном для металлических судов, имеющих иную специфику потери прочности и разрушения. В силу этих причин было принято решение при решении задач общей прочности композитного катамарана путем прямого КЭ моделирования не основывать нагрузки на вертикальном ускорении вычисленном в соответствии с правилами РМРС.

Рассмотрим процедуру расчета общей прочности корпуса судна на примере задачи общего изгиба, в которой нагрузки основываются на вертикальном ускорении, вычисленном согласно DNV. Обший изгиб включает в себя задачи прогиба и перегиба корпуса судна, находящегося соответственно во впадине



Рис. 1. Вертикальное перемещение корпуса в задаче о прогибе, м

между двух волн и на гребне волны. Полученный в результате КЭ расчётов прогиб корпуса катамарана представлен на рис. 1. Силы, действующие на днище корпуса, могут быть найдены из уравнения балансов сил и моментов. Приведем расчет нагрузок для задачи о прогибе:

$$F_{a} + F_{b} = (M_{aft} + M_{fore})(g_{0} + a_{cg}); \qquad F_{a}d_{aft} - M_{aft}(g_{0} + a_{cg})l_{aft} = F_{b}d_{fore} - M_{fore}(g_{0} + a_{cg})l_{fore}$$

*F<sub>a</sub>*, *F<sub>b</sub>*-силы, действующие на кормовую и носовую часть днища соответственно.

*M*<sub>aft</sub>, *M*<sub>fore</sub> – соответственно массы частей судна кормовой и носовой (расчёт проводился для одного корпуса в силу симметрии).

*d*<sub>*aft</sub>, <i>d*<sub>*fore*</sub> – соответственно расстояния от продольного центра тяжести (LCG) судна до центра приложения сил на кормовой и носовой частях судна.</sub>

 $l_{aff}$ ,  $l_{fore}$  – соответственно расстояния от LCG судна до центров тяжестей кормовой и носовой части.

 $F_a = 258.031kN, F_b = 194.298kN$  (на каждый из корпусов)

В результате выполнения КЭ расчета было получено напряженно-деформированное состояние всех элементов конструкции корпуса. Анализ результатов расчёта НДС композитной конструкции несколько отличается от анализа металлических деталей. Напряжения, деформации и другие результаты необходимо рассматривать послойно, т. к. каждый слой имеет свою ориентацию, свои модули упругости и пределы прочности. Как правило, разрушение начинает происходить в одном слое, что, вообще говоря, не означает потерю несущей способности всей конструкции. В качестве примера рассмотрим НДС палубы при общем изгибе, в частности критерий максимальных напряжений, согласно монослоя происходит которому разрушение при выполнении условия  $A = \max\left(\frac{\sigma_1}{X_T}, \frac{\sigma_1}{X_C}, \frac{\sigma_2}{Y_T}, \frac{\sigma_2}{Y_C}, \frac{\sigma_2}{Y$ 

в знаменателях – разрушающие напряжения.

0

.078279

.104309

Рис. 3. Значения критерия максимальных напряжений в слое №1

.05225

.026221



Рассмотрим послойно палубу, как одну из наиболее нагруженных частей корпуса. На рис.2 приведена 5-слойная структура палубы. Цифрами 2,3,5 обозначен МАТ2 (двунаправленная ткань (0°/90°)), 1 – МАТ1 (двунаправленная ткань (+45°/-45°)), 4 – МАТ3 (пенопластовый заполнитель). Наиболее нагруженными являются слои 1,2. Критерий максимальных напряжений наибольший в 1 слое (рис. 3). Согласно DNV, запас прочности в слое композита должен составлять не менее 3.3, т.е. значение критерия не должно превышать 0.3, что выполняется в задаче о

Рис. 2. Послойная структура палубы

.192E-03

прогибе. Таким образом, в этой задаче обеспечена прочность корпуса.

С помощью предложенной методики был выполнен расчёт общей прочности высокоскоростного

композитного катамарана, а также обоснованы необходимые усиления отдельных узлов конструкции.

.182396

.234454

D

.130338

#### ЛИТЕРАТУРА:

1. Российский морской регистр судоходства. Правила классификации и постройки морских судов. Том 2. Санкт-Петербург, 2012.

2. Российский морской регистр судоходства. Правила классификации и постройки высокоскоростных судов, Санкт-Петербург, 2008.

3. Det Norske Veritas. Rules for classification of high speed, light craft and naval surface craft, 2012.

4. Germanischer Lloyd. Rules for Classification and Construction, 2012.

5. Det Norske Veritas. Classification Notes No 30.8. Strength analysis of hull structures in high speed and light craft, 1996.

6. Roberto Ojeda, B. Gangadhara Prusty, Marcos Salas Finite element investigation on the static response of a composite catamaran under slamming loads, 2003.

УДК 539.219.2

А.В. Федотов, А.С. Немов, А.И. Боровков (Санкт-Петербургский государственный политехнический университет)

## КОНЕЧНО-ЭЛЕМЕНТНОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННОГО СОСТОЯНИЯ ОБРАЗЦА КОМПОЗИТНОЙ ПАНЕЛИ ЛЕТАТЕЛЬНОГО АППАРАТА ПРИ НАЛИЧИИ ДЕФЕКТА

В настоящее время композитные материалы все шире применяются в космической и авиационной промышленности. Однако из-за неоднородной структуры эти материалы сложны для инженерных расчетов, поэтому исследование прочности композитов представляет собой актуальную задачу. Прочность композитов и процессы их разрушения исследуются в литературе [1 – 3].

Целью настоящей работы является исследование напряженно-деформированного состояния (НДС) образца композитной панели с дефектом под действием сдвигового нагружения. В результате решения данной задачи определяются критериальные величины механики разрушения, характеризующие опасность развития дефекта для разных случаев расположения дефекта в композите.

Объект исследования представляет собой композитную панель, состоящую из 18 слоев с различной ориентацией волокон. В качестве наполнителя в композите используется углеволокно, в качестве матрицы - эпоксидная смола; два внешних слоя состоят из стекловолокна. Композитные панели подобного вида используются в проектирующемся российском самолете MC-21. В объеме композита присутствует дефект в виде квадратного непроклеенного участка (непроклея) между двумя соседними слоями. В качестве внешнего воздействия рассматривается сдвиговое нагружение, при котором верхний и нижний слои композитной панели сдвигаются друг относительно друга (межслойный сдвиг).

Схема укладки слоев в композите - симметричная:  $[0,\pm45,0,90,0,0,\pm45]_s$ , поэтому рассматривается 9 разных случаев расположения дефекта в композите. Первый расчет соответствует непроклею между 1 и 2 слоями (нумерация слоев от верхней границы панели), девятый - непроклею между 9 и 10 слоями, расположенному на плоскости симметрии композита.

Аналитическое описание НДС композитного материала сильно затруднено из-за сложности его внутренней структуры, поэтому поставленная задача решается методом конечных элементов в программной системе ANSYS. Моделирование осуществляется без учета микроструктуры: каждый слой представляется однородным, состоящим из ортотропного гомогенизированного материала.

Фактически непроклей представляет собой трещину между двумя слоями материала, и вблизи границ непроклея при деформации образца возникает сингулярность напряжений. НДС материала вблизи границ трещины описывается с помощью критериальных величин механики разрушения, к которым относятся коэффициенты интенсивности напряжений (КИН) и J-интеграл. КИН применяются только в случае изотропного материала и не могут быть использованы в данной задаче, поэтому в качестве основного показателя интенсивности напряжений в области границ непроклея вычисляется величина J-интеграла. Проблемы численного определения J-интеграла рассмотрены в работах [4, 5].

Для отработки методов описания трещин в ANSYS был решен ряд тестовых задач механики разрушения, для которых существуют аналитические решения [6]. Сравнение результатов показало, что значения критериальных величин механики разрушения,

полученные численно в программе ANSYS, хорошо согласуются со значениями, полученными аналитически.

Все выполненные расчеты показывают вблизи границ дефекта резкий рост как внутрислойных, так и межслойных напряжений, что характерно для границ трещины. При этом внутрислойные напряжения существенно превосходят межслойные. Этот факт позволяет предсказать, что непроклей может приводить не только к дальнейшему расслоению композита, но также к растрескиванию матрицы внутри самих слоев.

Для всех рассмотренных постановок задачи были получены распределения величины Jинтеграла вдоль границ непроклея (результат для трех расчетов представлен на рис. 1). Наибольшие значения данный параметр принимает в области середин сторон дефекта, а наименьшие - в его углах. Отсюда следует, что в случае распространения трещины область расслоения будет стремиться принять более сглаженную форму - круглую или эллиптическую.



Сравнение разных случаев расположения непроклея в композите (рис. 2) показало, что справедлива закономерность: чем глубже, то есть ближе к плоскости симметрии композитной панели, расположены непроклеенные слои, тем выше максимальные значения

J-интеграла на границах непроклея. Это правило нарушается только в тех случаях, когда дефект расположен между слоями с одинаковой ориентацией волокон (слои 6/7 и 9/10): в таких случаях значения J-интеграла оказываются ниже общей тенденции. В результате наиболее опасный случай реализуется при расположении непроклея между слоями №8 и 9, имеющими ориентацию волокон +45° и -45° соответственно.

Для повышения актуальности настоящей работы следует экспериментально определить критерии разрушения рассматриваемого композитного материала: какие значения Јинтеграла опасны для конструкции (приводят к разрушению), а какие нет. Также следует экспериментально проверить результаты, полученные в работе.

В качестве продолжения исследования возможно рассмотрение более широкой постановки задачи: исследование НДС композитной панели для разной формы и размеров непроклея и разных типов внешнего нагружения. Другим интересным развитием тематики работы является моделирование процесса распространения разрушения в композите.

Краткие итоги настоящей работы: найдено самое опасное расположение непроклея в композитной панели в случае квадратной формы дефекта и напряженно-деформированного состояния межслойного сдвига; предсказано, что при дальнейшем расслоении непроклей будет принимать круглую или эллиптическую форму; обнаружено, что присутствие непроклея способно привести как к расслоению композита, так и к растрескиванию непроклеенных слоев.

#### ЛИТЕРАТУРА:

1. Ишлинский А.Ю., Черный Г.Г. Прикладная механика композитов. М.: Мир, 1989 г. – 360 с.

2. Пэйгано Н., Сони С., Ванг А. Межслойные эффекты в композитных материалах. М.: Мир, 1993г. – 345 с.

3. Seng C. Tan. Stress Concentrations in Laminated Composites: Taylor & Francis Group, 1994r. – 467 c.

4. Hakimelahi B., Soltani N. 3D *J*-integral evaluation using the computation of line and surface integrals. – Fatigue & Fracture of Engineering Materials & Structures. 2010. P. 661 - 672.

5. Brocks W., Scheider I., Numerical Aspects of the Path-Dependence of the *J*- integral in Incremental Plastisity. – Technical note GKSS/WMS/01/08. 2001. 33 p.

6. Мураками Ю. Справочник по коэффициентам интенсивности напряжений: Мир, 1990 г. – 448 с.

#### УДК 621.313

Р.Э. Шевчук (Санкт-Петербургский государственный политехнический университет), А.В. Гаев (ОАО "НПО ЦКТИ")

### МЕТОДЫ КОНЕЧНО-ЭЛЕМЕНТНОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ ВИБРАЦИОННОГО СОСТОЯНИЯ ЭЛЕМЕНТОВ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ МАШИН, СОДЕРЖАЩИХ КОМПОЗИТНЫЕ СТРУКТУРЫ

В настоящее время, при проектировании электрических машин, таких как мощные генераторы, актуальной проблемой является повышение вибрационной надежности их основных частей. Особенностью турбогенераторов является наличие ответственных элементов, выполненных или содержащих композиционные материалы. К таким элементам, в частности, относятся сердечники статоров, соединительные и выводные шины, кронштейны шинодержателей, вязки, корзины и мн. др.

При наличии в конструкции компонент, выполненных из композитов, в процессе проектирования возникают сложности по определению их физико-механических свойств. Как правило, они являются принципиально анизотропными. Для определения физико-

механических характеристик композиционных материалов в настоящее время часто проводятся натурные экспериментальные исследования, позволяющие получить достоверные данные. Недостатком этого подхода является его дороговизна и большие временные затраты на подготовку моделей для реализации эксперимента.

Альтернативой и весомым приложением к натурным испытаниям подчас выступает численное моделирование. Однако, прямой учет микроструктуры композитных частей статора сопряжен с неприемлемо большими вычислительными затратами ввиду ее неоднородности и анизотропии свойств.

В связи с этим, в традиционной практике при проектировании и расчете элементов турбогенераторов, содержащих композиционные материалы, задаются некоторыми осредненными свойствами (обычно изотропными), полученными на основании серии натурных испытаний. Преимущество такого подхода – возможность оперативного численной оценки вибрационного состояния исследуемого проведения элемента. Принципиальный недостаток – невозможность индивидуального учета микроструктуры неудовлетворительное соответствие результатов материала И зачастую расчетов вибрационного состояния экспериментальным данным. Ввиду неучета анизотропии свойств материалов возникает риск пропуска опасных частот в спектре собственных частот.

Таким образом, при создании турбогенераторов, актуальная проблема заключается в разработке методики расчета вибрационного состояния элементов и конструкций, содержащих композиты и входящих в состав наиболее ответственных узлов электрических машин, к которым предъявляются повышенные требования в плане вибронадежности.

В зависимости от своей структуры, макроскопически однородный материал композита часто является с высокой степенью точности ортотропным или трансверсально-изотропным [1]. Последнее особенно характерно для волокнистых и слоистых композиционных материалов, к которым, например, относится широко используемый в конструкции мощных генераторов стеклотекстолит. Существует метод, позволяющий определить эффективные физико-механические свойства такого рода композитов [2, 3]. Неудобство его применения состоит в необходимости численного решения большого количества тестовых задач с различной геометрией и граничными условиями, что далеко не всегда приемлемо в условиях конструкторского отдела на производстве.

С целью разработки комплексного подхода к расчету вибрационного состояния ответственных элементов мощных генераторов, содержащих композиционные материалы, в условиях конструкторских отделов, предложена многоуровневая методика (рис. 1) [4, 5].

і. Макро-уровень (М) – декомпозиция конструкции

- Выбор элементов, определяющих вибрационное состояние конструкции
- Определение видов и структур композитов, входящих в выделенные элементы

ii. Переход на микро-уровень (μ) – учет микроструктуры имеющихся в конструкции композиционных материалов

- Генерация ячеек периодичности для выбранных видов многоу композитов
- Автоматизированное определение их эффективных характеристик

ііі. Последующий переход на макро-уровень (М)

• Моделирование вибрационного состояния конструкции, содержащей композиционные материалы, с использованием эффективных характеристик.

При реализации и апробации разработанного алгоритма специалистами НПО ЦКТИ используются современные средства параметрического моделирования и инженерного анализа. Разработан пользовательский интерфейс, позволяющий адаптировать трудоемкую




методику определения эффективных физико-механических свойств композитов. Процесс генерации ячеек периодичности [2, 3] и определения эффективных свойств материалов параметризован и автоматизирован, что позволяет проводить серии вариантных расчетов силами сотрудников конструкторских отделов на производстве.

Продемонстрируем эффективность применения разработанной методики.

Определим спектр собственных частот на примере модели сердечника статора турбогенератора (рис. 2). Сердечник статора, длина которого обычно достигает единиц метров, изготавливают из пакетов, набираемых из листов электротехнической стали толщиной 0.35 – 0.5 мм, покрытых слоем лака. Лаковая пленка, односторонняя толщина которой составляет примерно 0.05 мм, создает качественную изоляцию между листами.

Рассмотрим четыре принципиальных подхода:

1. Прямое моделирование структуры сердечника, включая стальные листы и клеевое соединение между ними

2. Модель цельнометаллического сердечника – пренебрежение лаковым слоем ввиду малости толщины лаковой пленки по сравнению с толщиной листа



Рис. 2. Сердечник статора турбогенератора

3. Модель изотропного сердечника с эффективными свойствами. В данной модели модуль упругости материала определяется согласно правилу смесей [2, 3]

4. Модель сердечника с эффективными ортотропными свойствами, построенная с помощью разработанной методики

Сравним результаты конечно-элементного расчета для первых трех собственных частот спектра типичного сердечника статора, используя указанные подходы (табл. 1).

Частота, №	Эталонное решение	Цельнометаллический сердечник		Правило смесей		Разработанная методика	
	<i>f</i> , Гц	<i>f</i> , Гц	Δ, %	<i>f</i> , Гц	Δ, %	<i>f</i> , Гц	Δ, %
1	138.89	282.21	50.8	269.14	48.4	134.22	3.4
2	140.49	351.20	60.0	334.94	58.1	136.93	2.5
3	190.72	353.49	46.0	337.12	43.4	186.85	2.0

Табл. 1. Результаты расчета собственных частот сердечника статора

Согласно табл. 1, подходы 2 и 3 показали свою несостоятельность в оценке собственных частот сердечника статора – отклонение от эталонного решения на всех исследуемых частотах составляет около 50%. В это же время, отличие результатов, при использовании разработанной методики, от эталонного решения составляет менее 5%.

Еще одной важной группой элементов турбогенераторов являются соединительные и выводные шины. Их покрывают стеклотекстолитом (рис. 3) – слоистым пластиком на основе стеклоткани и полимерного связующего вещества для обеспечения качественной электроизоляции. Стеклоткань сплетается из собранных в пучок стекловолокон и, по сути, представляет собой текстильный композиционный материал.

Рассмотрим следующую задачу определения собственных частот колебаний консольно-закрепленной балки, выполненной из стеклотекстолита. Результаты расчета



Рис. 3. Ячейка периодичности стеклотекстолита

собственных частот спектра при использовании описанной методики сравним с эталонными, полученными на основании прямого конечно-элементного моделирования (табл. 2).

Согласно табл. 2, отличие результатов использования методики от эталонного решения составляет менее 5% на всех рассматриваемых частотах.

Haarara Ma	Эталонное решение	Разработанная методика		
9ac101a, Nº	<i>f</i> , Гц	<i>f</i> , Гц	Δ, %	
1	928.55	965.07	3.8	
2	4508.0	4557.8	1.1	
3	5028.4	5027.2	0.02	

Табл. 2. Результаты расчета собственных частот консольной стеклотекстолитовой балки

Стоит отметить, число конечных элементов, необходимых для моделирования случая макроскопически однородного материала в обеих задачах оказывается на порядок меньше числа элементов, необходимых для моделирования элементов конструкции с учетом микроструктуры – очевидное многократное снижение требуемых вычислительных затрат при сохранении высокой степени точности расчетов.

Применение описанной методики в численных расчетах элементов мощных генераторов, содержащих композиционные материалы, позволяет проводить уточненную оценку вибрационного состояния этих элементов на макро-уровне, в отличие от традиционных подходов. В дальнейшем планируется провести валидацию и уточнение разработанной методики путем сравнения с экспериментальными данными.

### ЛИТЕРАТУРА:

1. Бахвалов И.С., Панасенко П.П. Осреднение процессов в периодических средах. М.: Наука, 1984.

2. Боровков А.И. Эффективные физико-механические свойства волокнистых композитов. – М.: Издво ВИНИТИ, 1985, 113 с.

3. Боровков А.И., Пальмов В.А. Базовые решения и регулярное разложение в механике периодических композитов. Труды СПбГТУ, № 498, С. 73 – 90.

4. Гаев А.В., Боровков А.И. Метод многоуровневого конечно-элементного моделирования для анализа напряженно-деформированного состояния рабочих лопаток паровых турбин // Научно-технические ведомости СПбГПУ. - СПб.: Изд. СПбГПУ. 2008. №4. С. 45 – 49.

5. Гаев А.В. О концепции многоуровневого конечно-элементного моделирования пространственного напряженно-деформированного состояния деталей турбин / Гаев А. В., Гаев В. Д. // Надежность и безопасность энергетики. – М. 2010. - №1(8): Март. - С. 53 – 56.

### УДК 539.3

Д.Н. Журавлев (Санкт-Петербургский государственный политехнический университет), А.В. Гаев (ОАО "НПО ЦКТИ")

## ИСПОЛЬЗОВАНИЕ ПРЯМОГО КОНЕЧНО-ЭЛЕМЕНТНОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ ПРИ РАЗРАБОТКЕ СОВРЕМЕННЫХ НОРМАТИВНЫХ ПОДХОДОВ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ПРЕДЕЛЬНОГО СОСТОЯНИЯ ЭЛЕМЕНТОВ ТЕПЛОМЕХАНИЧЕСКОГО ОБОРУДОВАНИЯ

Одним из этапов расчета тепломеханического оборудования на статическую прочность является определение нагрузок на патрубки от присоединяемых трубопроводов. Традиционный подход к данной проблеме заключается в решении задачи в упругой постановке и последующем определении напряжений по категориям  $\sigma_{eq}$  (мембранные напряжения) и  $\sigma_{eqc}$  (мембранные + изгибные напряжения) [1, 2]. Его преимуществом

является малая ресурсоемкость и, как следствие, малое время счета. Однако у этого метода есть существенные недостатки:

- существует неопределенность выбора точки вычисления напряжений по категориям σ<sub>eq</sub> и σ<sub>eqc</sub>
- несмотря на то, что в нормативной документации [3] указаны значения допускаемых нагрузок, они даны не для всех типоразмеров

В качестве альтернативного существующему предлагается использовать метод предельной нагрузки [4]. Он заключается в решении задачи в упруго - пластической постановке и представляет собой прямое конечно - элементное моделирование эксперимента по доведению элемента конструкции до состояния пластического шарнира, при котором он Элемент теряет несущую способность. конструкции подвергается нагружению необходимыми нагрузками, увеличивающимися по линейному закону. По мере нагружения строится график зависимости перемещений элементов конструкции от приложенных нагрузок. Предельной нагрузкой предлагается считать такую, при которой зависимость перестает быть линейной. При этом гарантируется, что несущая способность конструкции сохранится в полной мере. Существуют так же другие критерии определения величины предельной нагрузки по данной кривой, но на них в данной статье мы останавливаться не будем [5].

В качестве примера, рассмотрим патрубок d = 100 мм на обечайке D = 1000 мм. Толщины патрубка и обечайки соответственно 8 мм и 10 мм. Конструкция нагружена внутренним давлением 5 атм. Необходимо определить предельные силу и момент, приложенные к патрубку. Геометрия и нагрузки показаны на рис.1.

Для проверки сходимости решения, полученного методом конечных элементов, задача была решена на 3-х различных сетках, содержащих, соответственно, 974, 4943 и 11363 узлов. КЭ модели представлены на рис. 2.







Рис. 2. Конечно-элементные модели

Для каждой из рассмотренных постановок на рис. 3 представлены графики зависимости перемещений точки на крышке патрубка от приложенных нагрузок. Единице на оси абсцисс соответствует нагружение только лишь внутренним давлением, двойке – нагружение давлением плюс выбранными для расчета значениями силы и момента. Они выбираются заведомо больше возможной предельной нагрузки.

После решения задачи в упруго - пластической постановке была решена упругая задача. При этом нагрузки в ней принимались равными полученным ранее предельным значениям. График зависимости эквивалентных по Мизесу напряжений от расстояния до патрубка для КЭ модели, содержащей 11363 узлов, приведен на рис. 4.

Упруго - пластическая постановка позволяет уточнить решение в зонах особенностей. Поскольку пластические деформации от нагрузок, взятых в качестве предельных, не превышают 0,2% и носят характер локальных, возникающих только в зоне особенностей (размер зоны пластического деформирования сопоставим с размерами сварного шва, соединяющего патрубок с обечайкой), конструкция продолжает работать в упругой области (рис. 5).



Рис. 3. Зависимости перемещений точки на крышке патрубка от приложенных нагрузок

Рис. 4. Зависимость эквивалентных напряжений от расстояния до патрубка

Следуя традиционному подходу и решая упругую задачу, мы должны вычислить напряжения по категории  $\sigma_{eqc}$ , допускаемые значения которых, согласно [2], равны 1.5  $\sigma_{T}$ , т.е. для рассмотренной задачи должно выполняться условие  $\sigma_{eqc} \leq 300$  МПа (1). Величина этих напряжений сильно зависит от выбора точки, в которой они замеряются. Из рис. 4 видно, что условие (1) может не выполняться при определенном выборе точки в зоне особенности, вместе с тем, решение задачи в упруго - пластической постановке доказало работоспособность конструкции под действием приложенных нагрузок.



Рис. 5. Распределение эквивалентных пластических деформаций, возникающих при действии предельной нагрузки



Рис. 6. Пример расчета теплообменного оборудования

Таким образом, выполняя расчет традиционным методом, необходимо постоянно помнить о проблеме выбора области контроля напряжений по категориям, в то время как предельный анализ является инвариантным к выбору точки оценки напряжений и позволяет дать ответ на вопрос о предельно допустимой нагрузке на элемент конструкции при любых его размерах и геометрии с учетом зон концентрации напряжений, в том числе с заранее неизвестными значениями максимальных нагрузок.

Предложенная методика расчета нагрузок на патрубки с успехом применяется при проектировании сложного тепломеханического оборудования (рис. 6), а так же будет включена в разрабатываемую в настоящий момент отечественную нормативную документацию нового поколения.

### ЛИТЕРАТУРА:

- 1. Нормы расчета на прочность стационарных котлов и трубопроводов пара и горячей воды РД 10-249-98.
- 2. Нормы расчета на прочность оборудования и трубопроводов атомных энергетических установок ПНАЭ Г-7-002-86.
- 3. Трубопроводная арматура для атомных станций. Общие технические требования. НП-086-05.
- 4. Европейский стандарт EN 13445-3:2009.
- 5. EN 13445-3 Verification manual. Design by analysis.

И.А. Керестень, И.Б. Войнов, А.И. Боровков (Санкт-Петербургский государственный политехнический университет)

## КОНЕЧНО-ЭЛЕМЕНТНОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ И АНАЛИЗ НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННОГО СОСТОЯНИЯ РЕЗЬБОВОГО СОЕДИНЕНИЯ ПРИ СВИНЧИВАНИИ

Из всех видов соединений, применяемых в машиностроении, резьбовые соединения – самые распространенные, так как они наиболее надежны и удобны по форме для сборки и разборки, имеют небольшие габариты, просты в изготовлении, допускают точную установку соединяемых деталей в любую степень затяжки крепежными деталями. Недостаток резьбовых соединений состоит в наличии концентраторов напряжений в резьбовых деталях, понижающих их прочность. Благодаря своим достоинствам резьбовые соединения применяют также в строительных, крановых и других металлических конструкциях [1]. Рассматриваемое резьбовое соединение распространяется на резьбовые соединения обсадных, насосно-компрессорных труб и труб трубопроводов, применяемых в нефтяной и газовой промышленности [2].

В рамках данной работы рассматривается напряженно-деформированное состояние резьбового соединения. Одной из основных задач при выборе параметров резьбового соединения является исследование его напряженно-деформированного состояния при свинчивании [3]. Также большой интерес представляет поведение момента свинчивания резьбового соединения при изменении угла поворота трубы относительно муфты. В качестве аналитического подхода для оценки напряженного состояния трубы (муфты) можно было бы рассмотреть задачу о двух коаксиальных цилиндрах с натягом [4], однако наиболее эффективным и точным методом является применение прямого конечно-элементного моделирования [5 – 7].

Для проведения конечно-элементного анализа напряженно-деформированного состояния резьбового соединения была построена САД-модель резьбового соединения (отметим, что резьбовое соединение представляет собой 2 объекта: труба и муфта), полностью соответствующая нормам упорной резьбы обсадных труб [2]. При исследовании на свинчивании данной конструкции были обнаружены характерные сечения и угол поворота от отсчетной конфигурации (рис. 1-4).



При достижении характерных углов поворота число контактирующих поверхностей скачкообразно меняется. Черными линиями обозначены появившиеся при указанном угле контактирующие поверхности.

Поставленная задача решалась методом конечных элементов в осесимметричной постановке для указанных сечений (рис. 1-4). Концы трубы и муфты считались закрепленными. На внутренней поверхности трубы и внешней поверхности муфты поддерживалось нулевое давление. Отметим, что при решении использовалось около 20 000 конечных элементов.

Более детально рассмотрим напряженное состояние трубы и муфты при наличии осевого контакта (рис. 4). Распределение контактного давления по профилю резьбового соединения представлено на рис. 5.



Представим графики зависимости радиальных (рис. 6) и окружных (рис. 7) напряжений вдоль линии основной плоскости (ОП), полученные с использованием метода конечных элементов.





Рис. 7. Окружные напряжения

Определим момент свинчивания резьбового соединения при изменении угла поворота трубы относительно муфты по формуле:

$$M_{_{3akp.}} = \mu \sum_{N^e} p_c^e S^e r^e$$

где  $\mu$  – коэффициент трения,  $p_c^e$  – контактное давление на элементе, S<sup>e</sup> – площадь конечного элемента, r<sup>e</sup> – плечо силы (расстояние до конечного элемента от оси трубы) а N<sup>e</sup> – число конечных элементов, участвующих в контактном взаимодействии.



Рис. 8. Момент свинчивания

График зависимости момента свинчивания резьбового соединения от угла поворота трубы относительно отсчетной конфигурации (рис. 1) приведен на рис. 8.

При построении и анализе CAD-модели трубы и муфты были обнаружены характерные конфигурации расположения резьбового соединения (рис. 1-4) в которых площадь контактируемых областей изменялась скачком. Как следствие, тангенс наклона кривой момента свинчивания при характерных углах поворота трубы относительно муфты также скачкообразно увеличивается (рис. 8).

Заметим, что построенная модель обладает областями сингулярности в некоторых местах резьбового соединения, которые характеризуются резким подъемом контактного давления, обусловленного наличием острых входящих углов (рис. 5).

### ЛИТЕРАТУРА:

1. Детали машин: Учеб. для вузов. – 4-е изд., испр. М.: Высш. шк., 1986. – 359 с.: ил. Гузенков П. Г.

2. ГОСТ 51906 Р-2002.

3. ГОСТ Р ИСО 13679-2002.

4. Теория упругости. 2-е изд., стер. – СПб.: Издательство «Лань», 2002. – 208 с. – (Учебники для вузов. Специальная литература). Кац А. М.

5. Применение метода конечных элементов: Пер. с англ. – М.: Мир, 1979. – 392 с.: ил. Сегерлинд Л.

6. Конечные элементы и аппроксимация: Пер. с англ. – М.: Мир, 1986. – 318 с.: ил. Зенкевич О. Морган К.

7. ANSYS в руках инженера: Практическое руководство. – М.: Едиториал УРСС, 2003. – 272 с. Каплун А. Б. Морозов Е. М. Олферьева М. А.

## А.В. Пояркин, Р.С. Пальков (Саратовский государственный технический университет имени Ю.А. Гагарина)

## ЗАМЕНА СТРУКТУРЫ «ВКЛЮЧЕНИЕ-МЕЖФАЗНЫЙ СЛОЙ» НА ЭФФЕКТИВНОЕ ВКЛЮЧЕНИЕ ДЛЯ НАНОКОМПОЗИЦИОННЫХ МАТЕРИАЛОВ

При прогнозировании и определении физико-механических свойств будущих нанокомпозитов, в большинстве случаев, используют математическое моделирование методом конечных элементов (МКЭ) и методом граничных элементов (МГЭ). Однако механические свойства нанокомпозитов часто плохо описываются микромеханическими моделями, которые включают только фазу включения и фазу матрицы. Предположение о наличии поверхностной области между включением и матрицей или на границе раздела фаз показало возможность учесть этот эффект. Между основным материалом (матрицей) и включением образуется межфазный слой с особыми свойствами, которые необходимо учитывать при моделировании. Для полимерных нанокомпозитов было указано, что межфазная область [1, 2] толщины *h* нанометрового масштаба возникает в результате сложных взаимодействий на границе включений и полимерной матрицы. Для наполнителя с радиусом порядка микрометров вклад такой тонкой межфазной области в упругие свойства композита является незначительным. Однако, для включений с радиусом порядка нанометров этот потенциальный вклад повышается из-за увеличения площади межфазной поверхности. Например, для t/r = 0.5, межфазная объемная доля превышает 200% от объемной доли включения, так, что упругие свойства межфазного слоя доминируют как над свойствами включения, так и границы раздела. В данной работе предложен метод, который упрощает методику расчета эффективных механических характеристик композитных материалов.

Рассмотрим структуру поперечного сечения композитного материала, армированного длинными нитями круглой формы, а также контур расчетной области (рис. 1). Круглые включения радиуса R показаны на рисунке штриховкой. Единичная ячейка представляет собой квадрат  $2a \ge 2a$  в безразмерных значениях.



Рис. 1. Структура композиционного материала и контур расчетной области

Математическое моделирование происходит в несколько этапов. На одном из этапов требуется разбиение расчетной области на конечное число элементов. На рис. 2а и 2б показаны примеры разбиения единичной ячейки, без учета межфазного слоя и с учетом межфазного слоя соответственно. Толщина межфазного слоя была принята равной 0,2 от радиуса включения [3].



Рис. 2. Разбиение единичной ячейки

Данный метод заключается в определении эффективных механических свойств композиционного материала с помощью пакета конечно-элементного моделирования МАТLAB [4]. Рассматривается представительная ячейка, без наличия межфазного слоя, но с учетом его свойств, при задании свойств включения. Т.е. эффективное включение несет в себе информацию о наличии межфазного слоя. Кроме того, включение имеет радиус (R+h). где h – толщина межфазного слоя, R – радиус включения (рис. 3).



Рис. 3. Представительная ячейка композиционного материала

Приведем пример расчета свойств «эффективного включения».

В работе [5] были получены формулы для определения объемного модуля и модуля сдвига для эффективного включения:

$$K_{36} = K_{c} \left( 1 + \frac{\left(\frac{K_{c}}{K_{s}} - 1\right)a}{1 + \gamma(1 - a)(1 - 2\nu_{c})\left(\frac{K_{c}}{K_{s}} - 1\right)} \right)^{-1},$$
(1)

$$G_{36} = G_c \left( 1 + \frac{\left(\frac{G_c}{G_e} - 1\right)a}{1 + \gamma(1 - a)(1 - 2\nu_c)\left(\frac{G_c}{G_e} - 1\right)} \right)^{-1},$$
(2)

где  $\gamma$ , *а* определяются как:

$$\gamma = \frac{2}{3(1 - \nu_c)}; \qquad a = \left(\frac{R}{R + h}\right)^3.$$

В формулах (1), (2)  $K_c, K_s, G_c, G_s$  - объемные модули и модули сдвига межфазного слоя и включения соответственно. Зная объемный модуль и модуль сдвига, легко определить модуль Юнга и коэффициент Пуассона для эффективного включения:

$$E_{_{36}} = \frac{9K_{_{36}}G_{_{36}}}{3K_{_{36}} + G_{_{36}}}, \qquad v_{_{36}} = \frac{3K_{_{36}} - 2G_{_{36}}}{6K_{_{36}} + 2G_{_{36}}}$$

### ЛИТЕРАТУРА:

1. Stickney P B and Falb R D 1964 Rubber Chem. Technol. 37, C. 1299-1340.

2. Drzal L T 1990 Vacuum 41 1615-8, Nanotechnology 22 (2011) 165703 (7pp).

3. Влияние свойств межфазного слоя на напряженно-деформированное состояние полимерного композита в окрестности включения, Люкшин Б.А., Люкшин П.А., Механика композиционных материалов и конструкций, том 4, №2, 1998г, С. 56 – 68.

4. J. Alberty, C. Carstensen, and S. A. Funken. Remarks around 50 lines of Matlab: short finite element implementation. Numerical Algorithms, 1999, № 20, C. 117 – 137.

5. Prediction of elastic properties for polymer-particle nanocomposites exhibiting an interphase, FeiDeng and Krystyn J Van Vliet, Nanotechnology 22 (2011) 165703 (1pp).

## СЕКЦИЯ «МЕХАНИКА И ПРОЦЕССЫ УПРАВЛЕНИЯ»

УДК 539.3

М.О. Беляев, А.С. Семенов (Санкт-Петербургский государственный политехнический университет)

## КОНЕЧНО-ЭЛЕМЕНТНОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРОЦЕССА ВОЗНИКНОВЕНИЯ ОВАЛЬНОСТИ ПОПЕРЕЧНОГО СЕЧЕНИЯ МОНОКРИСТАЛЛИЧЕСКИХ ОБРАЗЦОВ ПРИ РАСТЯЖЕНИИ

Жаропрочные монокристаллические сплавы на никелевой основе используются в промышленности для изготовления деталей, работающих при высоких температурах. Примером подобного применения являются рабочие и направляющие лопатки газотурбинных авиационных двигателей. В настоящее время ведется активная работа по созданию монокристаллических сплавов нового поколения, в связи с чем, возникает необходимость проведения опытов для определения их физических и механических свойств.

При проведении испытаний на одноосное растяжение цилиндрических образцов с регистрацией изменения размера поперечного сечения в целях определения осевой деформации требуется внесение коррекций для монокристаллических материалов с ярко выраженной анизотропией. Так как рассматриваемый монокристаллический материал обладает кубической сингонией, то его поперечное сечение будет деформироваться не одинаково в различных направлениях при несоосности оси образца с направлением (001)

кристалла. Целью работы является исследование влияния кристаллографической ориентации образца, уровня осевых деформаций и температуры на возникновение овальности поперечного сечения. Анализ выполнялся методами прямого конечно-элементного (КЭ) моделирования процессов неупругого деформирования монокристаллических образцов в трехмерной постановке.

При проведении КЭ расчетов [1] использовались феноменологические и физические модели неупругого деформирования монокристаллического материала [2]. КЭ модель образца представлена на рис. 1. В силу симметрии в расчетах рассматривалась только половина образца. Параметры материала соответствовали сплаву ЖСЗ6 [3 – 5]. Задавалось жесткое (кинематическое) нагружение, характеризуемое уровнем номинальных осевых деформаций. Для инициирования шейкообразования задавался незначительный начальный дефект.



Рис. 1. КЭ модель образца для испытаний на растяжение

## 1. Влияние кристаллографической ориентации

При идеальной ориентации (001) образца появление овальности не наблюдается. При отклонении оси образца от ориентации (001) на 10 градусов (регламентируемое допущение по ГОСТу) наблюдается образование поперечного сечения сложной формы (рис. 2, в табл. 1. приведены значения отношений осей эллипса  $D_{\text{max}}$  и  $D_{\text{min}}$ ). Наиболее ярко выраженная овальность наблюдается при ориентации (011) (рис. 3-7, табл. 1).

## 2. Влияние температуры

При увеличении температуры на упругой стадии относительная овальность возрастает (табл. 1), при пластическом деформировании падает (при увеличении температуры с 20 °C до 700 °C происходит резкое уменьшение овальности, при дальнейшем увеличении температуры изменение овальности практически не наблюдается), а при учете ползучести овальность с ростом температуры возрастает.

## 3. Влияние величины осевой деформации

При возрастании осевой деформации значительно увеличиваются радиальные перемещения. При осевой деформации более 1,5% происходит образование шейки. При этом в зоне пластических деформаций уменьшается разница между радиальными перемещениями в различных направлениях по сравнению с зоной упругости. Овальность проявляется сильнее с увеличением осевой деформации (табл. 1) и наиболее явно видна при образовании шейки. В пределах упругости поле радиальных перемещений практически не зависит от температуры. Поле радиальных перемещений на упругой стадии показано на рис. 6.

## 4. Влияние выбора модели деформирования

При проведении расчетов с использованием модели ползучести даже при относительно коротких временах выдержки (менее 3 мин.) наблюдается бо́льшая овальность, чем при использовании модели пластичности (ср. рис. 5 и 7). В расчетах использовались феноменологические модели анизотропной ползучести (закон Нортона в комбинации с критерием Хилла) и пластичности (нелинейное кинематическое упрочнение и критерий Хилла). При использовании модели ползучести наблюдается обратная зависимость овальности от температуры. При увеличении температуры при ползучести овальность увеличивается, тогда как при использовании пластической модели деформирования она уменьшается (табл. 1).

Π	$\langle 011 \rangle$		отклонение $10^{\circ}$ от $\langle 001  angle$			$\langle 011 \rangle$			
Перемеще- ние (мм) / деформация (%)	(пластичность)		(пластичность)			(ползучесть)			
	20 °C	700 °C	1000 °C	20 °C	700 °C	1000 °C	20 °C	700 °C	1000 °C
	$rac{D_{ ext{max}}-D_{ ext{min}}}{D_{ ext{min}}},\%$								
0,01 / 0,42	0,196	0,227	0,237	0,017	0,018	0,019	0,186	0,215	0,200
0,74 / 3,08	1,229	0,713	0,789	0,079	0,071	0,064	2,889	3,597	14,79
2,1 / 8,75	10,82	3,184	2,730	0,349	0,210	0,237	31,44	59,40	113,1
3,0 / 12,5	26,76	6,759	7,607	0,147	0,639	0,723	116,1	235,1	-

Табл. 1. Зависимость относительной овальности от уровня осевых деформаций, кристаллографической ориентации, модели материала и уровня температур

### Выводы

При использовании модели *пластичности* наибольшая овальность наблюдается при ориентации  $\langle 011 \rangle$ , малых температурах и больших осевых деформациях. Максимальное отличие между большой и малой осями в опытах с осевой деформацией до 12.5% достигает 27%. При использовании модели *ползучести* наибольшая овальность также наблюдается при ориентации  $\langle 011 \rangle$ , больших температурах и больших продольных перемещениях.



Рис. 2. Поле радиальных перемещений при отклонении 10° от  $\langle 001 \rangle$  (*T* = 20 °C,  $\varepsilon$  = 3,08%)





Рис. 3. Поле радиальных перемещений при ориентации  $\langle 011 \rangle$  (*T* = 20 °C,  $\varepsilon$  = 3,08%)



Рис. 4. Поле радиальных перемещений при ориентации  $\langle 011 \rangle$  (*T* = 1000 °C,  $\varepsilon$  = 3,08%)



при ориентации  $\langle 011 
angle$ 

 $(T = 1000 \text{ °C}, \varepsilon = 0.42\%)$ 





-.001064 \_.947E-03 -.930E-03 \_.713E-03 -.596E-03 \_.476E-03 -.361E-03 \_.244E-03 -.127E-03 \_.100E-04 Рис. 7. Поле радиальных перемещений при ориентации  $\langle 011 \rangle$ , модель ползучести (T = 1000 °C,  $\varepsilon = 8,75\%$ )

## ЛИТЕРАТУРА:

1. А.С. Семенов. Вычислительные методы в теории пластичности, изд. СПбГПУ, 2008, 211 с.

2. А.С. Семенов, С.Г. Семенов, Л.Б. Гецов, Б.Е. Мельников. Моделирование процессов неупругого деформирования и разрушения монокристаллических лопаток ГТУ, Вестник гражданских инженеров, 2014 (в печати).

3. Е.Н. Каблов, Н.В. Петрушин, И.Л. Светлов, И.М. Демонис. Никелевые литейные жаропрочные сплавы нового поколения, 1997.

4. Л.Б. Гецов, А.С. Семёнов, А.И. Рыбников. Сопротивление термической усталости жаропрочных сплавов, Теплоэнергетика, 2009, № 5. С. 51 – 58.

5. L. Getsov, A. Semenov, A. Staroselsky. A failure criterion for single-crystal superalloys during thermocyclic loading. Materiali in Tehnologije, 2008, V. 42.  $\mathbb{N}$  1. P. 3 – 12.

УДК 537.226.4

Е.О. Бобылев, А.С. Семенов (Санкт-Петербургский государственный политехнический университет)

## РЕОНОМНЫЕ МОДЕЛИ СЕГНЕТОПЬЕЗОКЕРАМИКИ

Поликристаллическая сегнетопьезокерамика [1] является перспективным материалом, нашедшим широкое применение в качестве элементов топливных инжекторов, нанопозиционеров, микромоторов, гасителей вибраций, пьезотрансформаторов, приводов электронных микроскопов и др., работающих в условиях больших сигналов и требующих учета нелинейного связанного электромеханического поведения чувствительного к скорости нагружения, что приводит к необходимости разработки и использования в расчетах уточненных моделей материала, учитывающих эффекты вязкости.

В данной работе рассматриваются реономные феноменологические модели пьезокерамики. Модель Ландиса [2] основана на использовании принципа максимума реманентной диссипации. Зависимость от истории нагружения учитывается на основе введения двух внутренних переменных состояния: тензора остаточных деформаций  $\varepsilon^{r}$  и вектора поляризации  $\mathbf{P}^{r}$ . Выражение для свободной энергии имеет вид:

$$\Psi = \Psi^{s}(\boldsymbol{\varepsilon}, \boldsymbol{D}, \boldsymbol{\varepsilon}^{r}, \boldsymbol{P}^{r}) + \Psi^{r}(\boldsymbol{\varepsilon}^{r}, \boldsymbol{P}^{r}) \quad . \tag{1}$$

В предположении линейного пьезоэлектрического отклика первое слагаемое (1) определяется уравнением

$$\Psi^{s} = \frac{1}{2} \left( \boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\varepsilon}^{r} \right) \cdot {}^{4} \mathbf{C}^{D} \cdot \left( \boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\varepsilon}^{r} \right) - \left( \mathbf{D} - \mathbf{P}^{r} \right) \cdot {}^{3} \mathbf{h} \cdot \left( \boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\varepsilon}^{r} \right) + \frac{1}{2} \left( \mathbf{D} - \mathbf{P}^{r} \right) \cdot \boldsymbol{\beta}^{\varepsilon} \cdot \left( \mathbf{D} - \mathbf{P}^{r} \right),$$
(2)

где <sup>4</sup>**C**<sup>*D*</sup> – тензор упругих модулей (4<sup>го</sup> ранга),  $\boldsymbol{\beta}^{\varepsilon}$  – тензор диэлектрической проницаемости, <sup>3</sup>**h** – тензор пьезоэлектрических коэффициентов (3<sup>го</sup> ранга). Тензоры допускают зависимость от внутренних переменных.

Определяющие уравнения, позволяющие определить тензор напряжения и вектор напряженности электрического поля для рассматриваемой модели имеют вид:

$$\boldsymbol{\sigma} = \partial_{\boldsymbol{\varepsilon}} \Psi = {}^{4} \mathbf{C}^{D} \cdot \cdot \left(\boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\varepsilon}^{r}\right) - \left(\mathbf{D} - \mathbf{P}^{r}\right) \cdot {}^{3}\mathbf{h},$$
  
$$\mathbf{E} = \partial_{\mathbf{D}} \Psi = -{}^{3}\mathbf{h} \cdot \cdot \left(\boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\varepsilon}^{r}\right) + \boldsymbol{\beta}^{\varepsilon} \cdot \left(\mathbf{D} - \mathbf{P}^{r}\right).$$
(3)

Обобщенные силы, сопряженные с внутренними переменными определяются равенствами:

a w

$$\mathbf{0} = -U_{\varepsilon'} \mathbf{1}, \tag{4}$$

$$\hat{\mathbf{E}} = -\partial_{\mathbf{P}'} \Psi.$$

Поверхность переключения (электромеханический аналог поверхности текучести) описывается выражением:

$$\Phi(\hat{\boldsymbol{\sigma}}, \hat{\mathbf{E}}, \mathbf{P}^{r}) = \dot{\Phi}_{0} \left(\frac{\hat{\mathbf{E}} \cdot \hat{\mathbf{E}}}{E_{0}^{2}} + \frac{3\hat{\mathbf{s}} \cdot \hat{\mathbf{s}}}{2\sigma_{0}^{2}} + \beta \frac{\hat{\mathbf{E}} \cdot \hat{\mathbf{s}} \cdot \mathbf{P}^{r}}{E_{0}\sigma_{0}P_{0}}\right)^{m}.$$
(5)

Для внутренних переменных (остаточной деформации и спонтанной поляризации) вводятся уравнения эволюции, построенные по аналогии с нелинейным вязким телом:

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{r} = \frac{\partial \Phi}{\partial \hat{\sigma}},$$

$$\dot{\mathbf{P}}^{r} = \frac{\partial \Phi}{\partial \hat{E}}.$$
(6)

Для проверки предсказательных возможностей модели (1)-(6) производится сравнение с результатами эксперимента [3] на циклическое нагружение при различных скоростях нагружения (различных частотах гармонического воздействия). Образцы пьезокерамики PIC151 (PI Ceramic, Lederhose, Germany) подвергаются электрической нагрузке с амплитудой в 1-2 кВ/мм. Параметры материала [4] указаны в табл. 1.

Табл. 1. Электромеханические свойства пьезокерамики PIC151, использованные в расчетах

Название	Обозначение	Значение	Единицы измерения
Модуль Юнга	Y	120	ГПа
Коэффициент Пуассона	ν	0.31	
Диэлектрическая проницаемость	κ	2.2*10 <sup>-8</sup>	$\Phi/M$
Пьезоэлектрические константы	d <sub>31</sub>	$-1.7*10^{-10}$	м/В
	d <sub>33</sub>	$4.5*10^{-10}$	м/В
	d <sub>15</sub>	$4.6*10^{-10}$	м/В
Поляризация насыщения	$P_0$	0.365	Кл/м <sup>2</sup>
Деформация насыщения	$\epsilon_0$	0.0032	
Коэрцитивное поле	$E_0$	0.92	МВ/м
Коэрцитивное напряжение	$\sigma_0$	35	МПа
Модули упрочнения	$H^{e}$	350000	м/Ф
	m <sup>e</sup>	2	
	$H^{\sigma}$	350	МПа
	m <sup>e</sup>	2	
	m <sup>t</sup>	2	
	$\mathrm{H}^{\pi}$	0	м/Ф
Константа формы поверхности	β	2	
переключения			

В ходе работы была проведена идентификация констант, характеризующих вязкое поведение, основанная на сопоставлении данных численного интегрирования уравнений и данных экспериментов. Для модели [2] варьируемыми являются вязкие параметры  $\dot{\Phi}_0$  и *m* (см. (5)). Пример сравнения гистерезисных зависимостей, полученных расчетным путем и заимствованных их эксперимента, приведен на рис. 1 (точками обозначены данные эксперимента, сплошной линией расчетный график, по оси абсцисс,  $D_z$  - проекция вектора поляризации на ось z (ось нагружения),  $E_z$  - проекция вектора напряженности электрического поля поляризации на ось z). Значения параметров материала для каждого режима нагружения получены путем сопоставления результатов моделирования с экспериментальными данными.



Рис. 1. Сравнение результатов расчета (сплошные линии) с данными эксперимента (точки)

В рамках данной работы основное внимание уделялось исследованию влияния частоты нагрузки на вид гистерезисных кривых  $D_z(E_z)$  [5]. На рис. 2 приведены графики для частот нагружения 0.01, 0.1 и 1 Гц (синяя, красная и зеленая кривые соответственно). Наблюдается увеличение ширины ширины петли гистерезиса с ростом частоты. Полученные результаты удовлетворительно согласуются с данными опыта [5], что указывает на возможность использования модели (1)-(6) при анализе реономного поведения пьезокерамики.



Рис. 2. Влияние частоты нагружения на форму гистерезисных кривых

### ЛИТЕРАТУРА:

1. Лайнс М., Гласс А. Сегнетоэлектрики и родственные им материалы. – М.: Мир, 1981. – 736 с. 2. Landis C. M. Fully coupled, multi-axial, symmetric constitutive laws for polycrystalline ferroelectric

ceramics, Journal of the Mechanics and Physics of Solids. 2002; 50:127–152.

3. Zhou D., Kamlah M., Munz D. Rate Dependence of Soft PZT Ceramics under Electric Field Loading. Proceedings of SPIE, 2001. Vol. 4333, p. 64-70.

4. Semenov A.S., Liskowsky A.C., Balke H. Return mapping algorithms and consistent tangent operators in ferroelectroelasticity. Int. Journal for Numerical Methods in Engineering. 2010; vol. 81, p. 1298–1340.

5. Zhou D. Experimental Investigation of Non-linear Constitutive Behavior of PZT Piezoceramics. Report 6869. Forschungszentrum Karlsruhe. 2003. 156 p.

Б.А. Ведь, А.С. Семенов, С.Г. Семенов (Санкт-Петербургский государственный политехнический университет)

## МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРОЦЕССОВ ПОЛЗУЧЕСТИ ЖАРОПРОЧНЫХ МОНОКРИСТАЛЛИЧЕСКИХ СПЛАВОВ ПРИ СТУПЕНЧАТОМ НАГРУЖЕНИИ

Монокристаллические материалы находят все более широкое применение при изготовлении элементов горячего тракта газотурбинных двигателей, в частности при создании рабочих и сопловых лопаток [1]. Использование жаропрочных монокристаллических сплавов позволяет увеличить рабочую температуру двигателя, а значит повысить его экономичность и эффективность. Одним из главных критериев работоспособности этих деталей является сопротивление ползучести при высоких температурах. В настоящее время проводятся интенсивные экспериментальные исследования механических свойств жаропрочных монокристаллических сплавов новых поколений и ведется разработка для них феноменологических моделей неупругого деформирования. Целью этой работы является сравнение предсказательных способностей ряда моделей ползучести на установившейся и неустановившейся стадиях на основе сопоставления с экспериментальными данными, полученными для жаропрочных монокристаллических сплавов на никелевой основе IV поколения BЖM4 и BЖM5.

Результаты экспериментальных исследований при одноосном ступенчатом нагружении цилиндрических монокристаллических образцов ориентации <001> с выдержками при высокой температуре проведены в СПбГПУ на кафедре «Сопротивления материалов».

В работе рассматривались следующие аппроксимации кривых ползучести [2-4]:

$$\dot{\varepsilon}^{c} = A\sigma^{n}$$
 - формула Нортона (1)

$$\dot{\varepsilon}^{c} = B \sinh(\sigma/b) - \phi o p M y \pi a Ha \partial a u$$
 (2)

$$\dot{\varepsilon}^{c} = C\sigma^{l}\varepsilon^{m}$$
 - обобщенная формула Нортона (3)

Формула (3) использовалась для аппроксимации неустановившейся стадии I, уравнения (1) и (2) ориентированы на описание установившейся стадии ползучести II.

Поскольку наблюдавшаяся в экспериментах длительность I стадии при рассматриваемых температурах и уровнях нагрузки составляла менее 1/10 длительности этапа выдержки (на кривых ползучести доминирует участок установившейся ползучести), то для описания процессов неупругого деформирования при ступенчатом нагружении с возрастающими уровнями напряжений при выдержках, также наряду с моделью (3) рассматривались аппроксимации (1) и (2).

Результаты идентификации параметров монокристаллических сплавов ВЖМ4 и ВЖМ5 для аппроксимаций (1) и (2) по наклонам установившихся участков кривых ползучести при ступенчатом нагружении даны в табл. 1. При использовании (1) хорошего совпадения с экспериментом удается добиться при раздельном рассмотрении диапазонов напряжений ниже и выше предела текучести.

На рис. 1 представлено сравнение экспериментальных данных с результатами, полученными на основе аппроксимаций с использованием формул (1) и (2). Из графиков видно, что аппроксимация (1) с едиными A и n во всем диапазоне изменения напряжений демонстрирует значительные отклонения от эксперимента, приближение по формуле Надаи (2) дает более адекватные результаты, а наилучшее совпадение с экспериментом наблюдается при использовании формулы (1) с различными наборами констант A и n в диапазонах изменения напряжений ниже и выше предела текучести. Следует отметить, что для сплава ВЖМ5 точность всех используемых аппроксимаций выше, чем для сплава ВЖМ4.

	ВЖМ4		ВЖМ5	
	700°C	700°C	750°C	850°C
<i>А</i> (ниже предела текучести), 1/(с МПа <sup>n</sup> )	$3.32 \cdot 10^{-27}$	$2.36 \cdot 10^{-56}$	$5.92 \cdot 10^{-51}$	6.99·10 <sup>-66</sup>
А (выше предела текучести), 1/(с МПа <sup>n</sup> )	$2.32 \cdot 10^{-105}$	$1.18 \cdot 10^{-100}$	$4.12 \cdot 10^{-39}$	*
<i>n</i> (ниже предела текучести)	7.239	17.26	16.01	21.59
<i>п</i> (выше предела текучести)	32.67	32.05	12.01	*
<b>В</b> (формула Надаи)	$1.06 \cdot 10^{-18}$	$1.84 \cdot 10^{-16}$	1.19·10 <sup>-9</sup>	$1.79 \cdot 10^{-12}$
<b>В</b> (формула Надаи), МПа	36.66	35.16	62.46	36.35

Табл. 1. Параметры аппроксимаций (1) и (2) для сплавов ВЖМ4 и ВЖМ5 для ориентации <001>

\* при 850°С образец ВЖМ5 не был доведен до пластичности



Рис. 1. Сравнение экспериментальных и расчетных зависимостей скоростей деформаций ползучести от напряжений для ВЖМ4 (слева) и ВЖМ5 (справа) при 700 °C

Идентификация коэффициентов аппроксимации (3) проводилась непосредственно на основе кривых ползучести при ступенчатом нагружении. Для получения зависимости  $\varepsilon^{c} = \varepsilon^{c}(\sigma, t)$  необходимо проинтегрировать уравнение (3). Результат интегрирования по всем ступеням нагружения с учетом нулевых начальных условий для  $p^{o\tilde{u}}$  ступени  $t_{p-1} < t < t_{p}$  имеет вид:

$$\varepsilon^{c} = \left\{ (1-m)A\left[\sum_{k=1}^{p-1} \sigma_{k}^{n} (t_{k} - t_{k-1}) + \sigma_{p}^{n} (t - t_{p-1})\right] \right\}^{\frac{1}{p-1}}.$$
(4)

Результаты идентификации параметров монокристаллических сплавов ВЖМ4 и ВЖМ5 для аппроксимации (3) при ступенчатом нагружении представлены в табл. 2.

	ВЖМ4	ВЖМ5					
	700°C	700°C	750°C	850°C			
A, 1/(c MПa <sup>l</sup> )	$1.26 \cdot 10^{-61}$	$9.85 \cdot 10^{-120}$	8.16·10 <sup>-27</sup>	$7.83 \cdot 10^{16}$			
l	18.5	37.87	7.70	6.71			
m	-3.03	-3.08	0.45	0.11			

Табл. 2. Параметры аппроксимации (3) для сплавов ВЖМ4 и ВЖМ5 для ориентации <001>

На рис. 2 представлено сравнение экспериментальных кривых ползучести при ступенчатом нагружении с результатами, полученными на основе аппроксимаций с использованием формул (1)-(3). Наилучшей предсказательной способностью обладает

обобщенный закон Нортона (3), что указывает на важность учета неустановившейся стадии при описании процессов ползучести при ступенчатом нагружении. Модель (3) удовлетворительно описывает поведение материала до достижения предела текучести. Для улучшения точности описания процессов деформирования выше предела текучести необходим учет в модели также пластических деформаций. Несмотря на доминирование установившейся стадии на этапе выдержки модели (1) и (2) демонстрируют значительное расхождение с экспериментом.



Рис. 2. Сравнение экспериментальных и расчетных кривых ползучести при ступенчатом нагружении для ВЖМ4 (слева) и ВЖМ5 (справа) при 700 °С

В дальнейшем планируется выполнить проверку рассмотренных аппроксимаций для образцов кристаллографических ориентаций <011> и <111>, а также рассмотреть более сложные модели материала (например, модели анизотропной вязкопластичности [5]).

### ЛИТЕРАТУРА:

1. Р.Е. Шалин, И.Л. Светлов, Е.Б. Качанов и др. Монокристаллы никелевых жаропрочных сплавов – М.: Машиностроение, 1997. – 336 с.

2. F.H. Norton. Creep of steel at high temperatures. McGraw-Hill Book Co., New York. 1929.

3. Л.Б. Гецов Материалы и прочность деталей газовых турбин. В двух томах. Рыбинск: ООО "Издательский дом Газотурбинные технологии". 2010, 610 с.

4. Л.Б. Гецов, А.С. Семенов, А.И. Рыбников. Сопротивление термической усталости жаропрочных сплавов, Теплоэнергетика, 2009, № 5. С. 51 – 58.

5. А.С. Семенов, С.Г. Семенов, Л.Б. Гецов, Б.Е. Мельников. Моделирование процессов неупругого деформирования и разрушения монокристаллических лопаток ГТУ, Вестник гражданских инженеров, 2014 [в печати].

В.Р. Вилданов, А.С. Семенов, Л.Б. Гецов (Санкт-Петербургский государственный политехнический университет)

# АНАЛИЗ ТЕРМОУСТАЛОСТНОЙ ПРОЧНОСТИ РАБОЧЕЙ ЛОПАТКИ СТАЦИОНАРНОЙ ГАЗОТУРБИННОЙ УСТАНОВКИ

Одной из основных, но не до конца изученных характеристик жаропрочных материалов, определяющих долговечность рабочих лопаток газотурбинных двигателей, является термоусталостная прочность. В работе рассматриваются критерии термоусталостной прочности для поликристаллических и монокристаллических материалов, а также зависимости критерия прочности в монокристаллических материалах от ориентации.

Оценка числа циклов до образования макротрещины при термоциклическом нагружении производится на основе деформационного четырехчленного критерия[1, 2]:

$$D = \sum_{i=1}^{N} \frac{\left(\Delta \mathcal{E}_{eq_i}^{p}\right)^{\kappa}}{C_1(T)} + \sum_{i=1}^{N} \frac{\left(\Delta \mathcal{E}_{eq_i}^{c}\right)^m}{C_2(T)} + \max_{0 \le t \le t_{\max}} \frac{\mathcal{E}_{eq}^{p}}{\mathcal{E}_r^{p}(T)} + \max_{0 \le t \le t_{\max}} \frac{\mathcal{E}_{eq}^{c}}{\mathcal{E}_r^{c}(T)},\tag{1}$$

где первый член учитывает изменение пластической деформации в пределах цикла, второй член – изменение деформации ползучести в пределах цикла, третий член – односторонне накопленную пластическую деформацию, четвёртый член – односторонне накопленную деформацию ползучести.  $C_1 = (\varepsilon_r^p)^k$ ,  $C_2 = (\varepsilon_r^c)^m$ , k, m,  $\varepsilon_r^p$  и  $\varepsilon_r^c$  – параметры материала, зависящие от температуры и кристаллографической ориентации. Число циклов до образования макротрещины N определяется из условия D = 1.

Эквивалентная деформация, фигурирующая в (1) для поликристаллических материалов вычисляется на основе соотношения:

$$\varepsilon_{eq} = \sqrt{\frac{2}{3}\boldsymbol{e}\cdot\boldsymbol{e}},\tag{2}$$

где e – девиатор тензора деформаций  $\varepsilon$ . Для монокристаллических материалов в качестве эквивалентной деформации рассматривается максимальная сдвиговая деформация в системе скольжения с нормалью к плоскости чкольжения n и направлением скольжения l:

$$\varepsilon_{eq} = \boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{\varepsilon} \cdot \boldsymbol{l}. \tag{3}$$

Скорость неупругой деформации при использовании феноменологических моделей вычисляется на основе соотношения:

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{p} = \dot{\lambda} \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}}.$$
(4)

где функция нагружения (критерий Мизеса) *f* для поликристаллического материала имеет вид:

$$f = \sqrt{\frac{3}{2}\mathbf{s}\cdot\cdot\mathbf{s}},\tag{5}$$

а для монокристаллического материала функция нагружения (критерий Хилла):

$$f = \sqrt{\mathbf{s} \cdots {}^{4}\mathbf{M} \cdots \mathbf{s}}, \qquad (6)$$

где *s* – девиатор напряжений,  $\sigma_y$  – предел текучести, <sup>4</sup>**M** – тензор четвёртого ранга, характеризующий анизотропию поверхности нагружения.

Для вычисления параметра  $\dot{\lambda}$  для пластической модели используется равенство  $f = \sigma_y(\lambda)$ , для вязко-упругой модели [3]:

$$\dot{\lambda} = A \left( s \cdots^4 \mathbf{M} \cdots s \right)^{n/2} \lambda^m, \tag{7}$$

для вязко-пластической модели [3]:

$$\dot{\lambda} = \left(\frac{\sqrt{s \cdots^4 \mathbf{M} \cdots s} - \sigma_y}{K}\right)^n. \tag{8}$$

В уравнениях (7) и (8) A, n, K – константы материала,  $\sigma_v(\lambda)$  – размер поверхности нагружения.

Для кубической группы симметрии кристалла тензор  ${}^{4}$ **М** в системе координат, связанной с кристаллографическим базисом имеет следующую структуру, характеризующуюся тремя константами:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{M} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} M_{11} & M_{12} & M_{12} & 0 & 0 & 0 \\ M_{12} & M_{11} & M_{12} & 0 & 0 & 0 \\ M_{12} & M_{12} & M_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & M_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & M_{44} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & M_{44} \end{bmatrix}.$$
(9)

Учитывая, что в критерии (6) производится свертка тензора <sup>4</sup>**M** с девиаторами *s*, а также выбирая  $\sigma_y$  равным пределу текучести при нагружении вдоль оси  $\langle 001 \rangle$  (что приводит к равенству  $M_{11} - M_{12} = 1$ ), для формулировки критерия (6) достаточно задать только одну константу  $M_{44}$  [4].

При проведении расчетов использовался конечно-элементный (КЭ) программный комплекс PANTOCRATOR [5]. Современные широко распространенные универсальные коммерческие пакеты ANSYS, ABAQUS и другие не обладают реализованной возможностью проведения расчетов с использованием физических моделей материала.

Полученные результаты КЭ моделирования позволяют определить местоположения наиболее нагруженных точек лопатки, в которых вероятность зарождения трещин наибольшая, а также оценить влияние кристаллографической ориентации на термоусталостную прочность.

В КЭ расчетах с учетом эффектов неупругого деформирования учитывалось действие центробежных сил и наличие нестационарного неоднородного поля температур (рис. 1).



Рис. 1. Распределение поля температуры в лопатке в различные моменты времени: a) t = 150 с (пуск); б) t = 1200 с (стационар); в) t = 2325 с (останов)

На рис. 2 показано распределение интенсивности напряжения для монокристаллической лопатки с ориентацией (001).



Рис. 2. Интенсивность напряжений в лопатке в моменты времени: a) t = 150 c (пуск); б) t = 1200 c (стационар); в) t = 2325 c (останов)

На основе полученных значений приращений в пределах цикла и односторонне накопленных пластических деформаций и деформаций ползучести был произведен расчет поврежденности с использованием (1) в поликристаллической и монокристаллической лопатках и определено число термоусталостных циклов до зарождения макротрещины.

### ЛИТЕРАТУРА:

1. Л.Б. Гецов. О критерии разрушения при сложной программе нагружения. Всесоюзный рабочий симпозиум по вопросам малоцикловой усталости. Каунас. 1971.

2. А.С. Семенов, Л.Б. Гецов. Критерии термоусталостного разрушения монокристаллических жаропрочных сплавов и методы определения их параметров. *Проблемы прочности.* 2014. [в печати].

3. А.С. Семенов, С.Г. Семенов, Л.Б. Гецов, Б.Е. Мельников. Моделирование процессов неупругого деформирования и разрушения монокристаллических лопаток ГТУ. *Вестник гражданских инженеров*. 2014 [в печати].

4. Л.Б. Гецов, В.Е. Михайлов, А.С. Семёнов, В.В. Кривоносова, Ю.А. Ножницкий, Б.С. Блинник, Л.А., Магераммова. Расчётное определение ресурса рабочих и направляющих лопаток ГТУ. Часть 2. Монокристаллические материалы. *Газотурбинные технологии*. 2011, №8, С. 18-25.

5. А.С. Семенов. PANTOCRATOR – конечно-элементный программный комплекс, ориентированный на решение нелинейных задач механики / Труды V-ой межд. конф. "Научно-технические проблемы прогнозирования надёжности и долговечности конструкций" СПб.: Изд-во СПбГПУ, 2003. С. 466-480.

# А.И. Грищенко, А.С. Семенов (Санкт-Петербургский государственный политехнический университет)

## МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРОЦЕССОВ ВЯЗКОУПРУГОГО ДЕФОРМИРОВАНИЯ И РАЗРУШЕНИЯ КОСТНОЙ ТКАНИ НА НАНОУРОВНЕ

Кость представляет собой иерархически структурированный материал с механическими свойствами, зависящими от морфологических параметров каждого уровня организации. Целью данной работы является анализ влияния наноструктуры костной ткани на её упругие, вязкие и прочностные свойства. Данные исследования актуальны при создании искусственных костезамещающих материалов.

Предложена новая морфологическая модель костной ткани на наноуровне (на уровне коллагеновых фибрилл), учитывающая минеральные связи между объединениями кристаллов гидроксиапатита. Методами прямого конечно-элементного моделирования и гомогенизации проведен анализ влияния вариации морфологических характеристик (разориентации кристаллитов, размеров и ориентации перемычек, степени минерализации, степени вытянутости конгломератов) на локальное напряженно-деформированное состояние (НДС) и механические свойства представительного объема кости на наноуровне. Произведено сравнение полученных результатов с данными экспериментов.

Рассмотрены варианты различных двумерных (рис. 1а) и трехмерных (рис. 1б) элементарных представительных объемов (ЭПО) костной ткани.



Рис. 1. Конечно-элементные модели ЭПО наноструктурных элементов костной ткани: а) – 2D модель, б) – 3D (органический матрикс не показан)

Для определения эффективных упругих и вязких свойств ЭПО методом конечных элементов (КЭ) решалась серия краевых задач с различными граничными условиями (ГУ). Рассматривались варианты кинематических (1) и силовых (2) граничных условий, а также условия периодичности (3):

$$\mathbf{u}\big|_{\mathbf{s}} = \overline{\mathbf{\epsilon}}^* \cdot \mathbf{r} , \qquad (1)$$

$$\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\sigma} \Big|_{S_{-}} = \mathbf{n} \cdot \overline{\boldsymbol{\sigma}}^{*} , \qquad (2)$$

$$\mathbf{u}|_{S_{u_1}} = \mathbf{u}|_{S_{u_2}} + \overline{\mathbf{e}}^* \cdot (\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2), \qquad (3)$$

где  $\bar{\epsilon}^*$  и  $\bar{\sigma}^*$  - заданные постоянные симметричные тензоры, соответствующие различным состояниям (осевые растяжения и сдвиги).

Установлено, что при использовании условий периодичности, удовлетворительная точность (1% близость к асимптотическому значению) при вычислении эффективных упругих модулей, достигается уже при использовании ЭПО, включающего только ¼ ячейки периодичности. При использовании кинематических и силовых граничных условий наблюдается медленная сходимость и приемлемая точность достигается только при использовании ЭПО с 4×4 ячеек периодичности. Введенные модели реализованы в КЭ программном комплексе PANTOCRATOR [1]. Более подробный анализ сходимости решения для разных типов граничных условий приведен в [2], [3].

Для оценки влияния угла разориентации минералов в ЭПО на его НДС и эффективные упругие свойства проведены КЭ расчеты с тремя различными углами 0°, 4° и 8°. Результаты проведенных вычислительных экспериментов показали, что поворот единичного конгломерата практически не оказывает заметного влияния на значения эффективных упругих модулей  $\overline{E}_1, \overline{E}_2$  (отличия менее 1%), но влияет на уровень максимальной интенсивности напряжений.

Для оценки влияния угла наклона перемычек на НДС и эффективные упругие свойства ЭПО проведена серия КЭ расчетов с различными углами отклонения от горизонтального уровня – на -45°, -30°, -15°, 15°, 30° и 45°. Результаты расчетов показали, что максимальное отклонение  $\overline{E}_2$  от значения при горизонтальном положении перемычки не превышает 23%, а  $\overline{E}_1 - 13\%$ . Так же установлено, что поворот перемычек сказывается на степени максимальной интенсивности напряжений (рис. 2).



Рис. 2. Зависимости эффективных упругих модулей ЭПО нанокомпозита костной ткани от угла поворота перемычек

Установлено, что поворот перемычек в ЭПО при одних условиях нагружения увеличивает уровень экстремальных напряжений в ней, а при других – уменьшает. Так, при отклонении перемычки на  $15^{\circ}$  в направлении против часовой стрелки, растяжение в горизонтальном направлении характеризуется снижением максимальной относительной интенсивности напряжений на 2%, при  $30^{\circ}$  – на 12%, при  $45^{\circ}$  – на 47%, соответственно, в сравнении с идеализированным вариантом без поворота (Рис. 2). При нагружении в вертикальном направлении, для которого отклонение перемычки на  $15^{\circ}$  в направлении приводит к увеличению максимальной относительной интенсивности напряжений на 65%, при  $30^{\circ}$  – на 80%, при  $45^{\circ}$  – на 47% в сравнении с идеализированным вариантом без поворота (Рис. 2). При нагружении в вертикальном направлении, для которого отклонение перемычки на  $15^{\circ}$  в направлении с идеализированным вариантом без поворота (Рис. 2). При нагружении в стрелки приводит к увеличению максимальной относительной интенсивности напряжений на 65%, при  $30^{\circ}$  – на 80%, при  $45^{\circ}$  – на 47% в сравнении с идеализированным вариантом без поворота (рис. 2). Более подробный анализ влияния структурной разориентации костной ткани приведен в [2] и [4].

Выполнена оценка влияния учета перемычек на НДС и эффективные упругие свойства. При наличии перемычки максимальная интенсивность напряжений конгломерата снижается на 19%, значения эффективных модулей упругости в вертикальном и горизонтальном направлении возрастают на 10% и 17% соответственно. Анализ НДС ЭПО с перемычками при различных видах нагружения представлен в работах [2] и [4].

Анализ НДС ЭПО костной ткани показал, что наиболее нагруженными элементами ЭПО являются углы конгломерата и области соединения перемычки с конгломератом.

Для анализа влияния вязких свойств органического матрикса рассматривалась ползучесть ЭПО в течении 1 часа при давлении 10 МПа (12 кратная весовая перегрузка). Результаты расчетов показали, что вязкие эффекты крайне не значительны (рис. 3), так интенсивность деформаций ползучести, осредненная по ЭПО не превосходит 0.00014 %. Также видно, что наличие перемычек практически не оказывает влияния на осредненную интенсивность пластических деформаций. Вязкие свойства коллагена взяты из работы [5].



Рис. 3. Зависимость осредненной по ЭПО интенсивности деформаций ползучести от времени

Результаты моделирования влияния таких морфологических характеристик как степень минерализации, степень вытянутости конгломератов, а так же используемые упругие модули и сравнение с экспериментальными данными приведены в работах [2] и [3].

### ЛИТЕРАТУРА:

1. А.С. Семенов. PANTOCRATOR – конечно-элементный программный комплекс, ориентированный на решение нелинейных задач механики. В кн.: Научно-технические проблемы прогнозирования надежности и долговечности конструкций и методы их решения: тр. V межд. конф. СПб.: Изд-во СПбГПУ; 2003. с. 466-480.

2. A.S. Semenov, A.S. Avrunin, A.I. Grishchenko, B.E. Melnikov, A.A. Doktorov. Influence of nanoscale morphological characteristics on the mechanical properties of bone tissue / Advanced problems in mechanics. Proceedings of the XLI summer school – conference, 1-6 of July 2013 – Spb.: Polytechnical university publishing house, 2013. P. 63-73.

3. А.И. Грищенко, А.С. Семёнов, А.С. Аврунин. Моделирование процессов деформирования нанокомпозита костной ткани и определение его эффективных механических свойств. / Неделя науки СПбГПУ. Лучшие доклады: материалы научно-практической конференции с международным участием. – СПб.: Изд-во Политехн. ун-та, 2013. с. 117-120.

4. А.С. Аврунин, А.С. Семенов, И.В. Федоров, Б.Е. Мельников, А.А. Докторов, Л.К. Паршин. Влияние минеральной связи между объединениями кристаллитов на механические свойства костного матрикса. Моделирование методом конечных элементов. «Травматология и ортопедия России», 2013, №2 (67), с. 1-12.

5. A. Gautieri, S. Vesentini, A. Redaelli, M.J. Buehler. Viscoelastic properties of model segments of collagen molecules. Matrix Biol. 2012 Mar;31(2):141-149.

# А.Н. Грудинин, А.С. Семенов (Санкт-Петербургский государственный политехнический университет)

## МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРОЦЕССОВ НЕУПРУГОГО ДЕФОРМИРОВАНИЯ С УЧЕТОМ ВЗАИМНОГО ВЛИЯНИЯ ОКТАЭДРИЧЕСКИХ И КУБИЧЕСКИХ СИСТЕМ СКОЛЬЖЕНИЯ

Монокристаллические жаропрочные суперсплавы на никелевой основе являются основным конструкционным материалом горячего тракта современных газотурбинных двигателей. В целях повышения точности прогнозов оценки статической прочности и термоусталостной долговечности элементов двигателей, производится совершенствование описывающих неупругое поведение монокристаллов. В данной работе моделей, рассматривается целесообразность учета кубической системы скольжения наряду с октаэдрической физических системой при использовании моделей неупругого деформирования монокристаллов на примере сплава ЖСЗ6.

Рассмотрим определяющие уравнения физической модели неупругого деформирования монокристалла при малых деформациях и изотермических условиях. Предполагается, что полная деформация состоит из упругой и неупругой частей:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{\varepsilon}^{\boldsymbol{e}} + \boldsymbol{\varepsilon}^{\boldsymbol{p}}.\tag{1}$$

Упругая составляющая определяется из обобщенного закона Гука для ортотропного материала, а деформацию ползучести для физической модели находим на основе соотношения, учитывающего наличие октаэдрических и кубических систем скольжения:

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{\boldsymbol{p}} = \sum_{i=1}^{N=18} \dot{\gamma}^{i} \boldsymbol{P}^{i} = \sum_{i=1}^{N_{o}=12} \dot{\gamma}^{i} \boldsymbol{P}_{oct}^{i} + \sum_{j=1}^{N_{c}=6} \dot{\gamma}^{j} \boldsymbol{P}_{cub}^{j},$$
(2)

где  $\dot{\gamma}^i$  могут быть найдены, с использованием модели Нортона-Хоффа [1]:

$$\dot{\gamma}^{i} = \dot{\gamma}_{0}^{i} |\tau^{i}|^{n} sign(\tau^{i}) t^{k}, \qquad \tau^{i} = \boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{P}^{i}.$$
(3)

В приведенных уравнениях  $P_{oct}^{i}$  и  $P_{cub}^{j}$  - тензоры Шмида октаэдрической и кубической систем скольжения соответственно. Кубическая система скольжения состоит из 3 плоскостей {100} с двумя независимыми направлениями <110> скольжения на каждой (рис. 1).



Рис. 1. Кубические системы скольжения {100}<110>

После подстановки (3) для двух систем скольжения в выражение (2) и последующего интегрирования получаем выражение для тензора неупругих деформаций:

$$\boldsymbol{\varepsilon}^{\boldsymbol{p}} = A \int \sum_{i=1}^{N_o=12} \left| \boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{P}^i \right|^n sign(\boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{P}^i) \boldsymbol{P}^i t^k dt + B \int \sum_{j=1}^{N_c=6} \left| \boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{P}^j \right|^m sign(\boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{P}^j) \boldsymbol{P}^j t^k dt \quad (4)$$

Для определения неизвестных постоянных *А*, *В*, *n*, *m* воспользуемся кривыми кратковременной ползучести материала ЖС 36ВНК (рис. 2) [2].



Рис. 2. Кривые кратковременной ползучести при постоянном напряжении и температуре 1000 <sup>0</sup>С для сплава ЖС 36ВНК с ориентациями [001] (а) и [111] (б)

Найдем неизвестные постоянные двумя методами. В силу сложности процедуры минимизации будем определять константы с учетом третьей стадии ползучести при постоянном значении параметра k = 1.2. В первом методе, согласно Шалину [3], механизмы деформирования монокристаллического сплава определяются различными системами скольжения в зависимости от ориентации монокристалла. Вблизи кристаллографического направления [001] деформационные процессы определяются октаэдрической системой скольжения, в области близкой к направлению [111] – кубической. Во втором методе учтем влияние обоих плоскостей скольжения вблизи всех кристаллографических направлений. Используя метод наименьших квадратов, минимизируем функционал L, в котором экспериментальные данные взяты из графиков на рис. 2, а аналитическая зависимость представлена законом (4) для двух систем скольжения [4]:

$$L = \sum_{i=1}^{i=N} (\varepsilon_i - \varepsilon^{exp}_i)^2 \to min \,. \tag{5}$$

В первом методе составляем два независимых функционала *L*, по два неизвестных параметра в каждом, во втором – один функционал, содержащий все четыре неизвестных параметра. В результате аппроксимации несколько лучшее значение целевой функции продемонстрировал второй метод  $L^1 = 3.136$ ,  $L^2 = 0.6165$ . Найденные параметры принимают следующие значения:  $A = 6.95 \cdot 10^{-26}$ ,  $B = 8.6 \cdot 10^{-21}$ , n = 9.48, m = 7.08.

Из вида структуры тензоров Шмида для кубической системы скольжения можно сделать вывод, что при одноосном нагружении система скольжения не дает вклада в неупругую деформацию. Поэтому введем отклонение от идеальной кристаллографической ориентации [001] с помощью тензора поворота Q, определяемого углами Эйлера ( $\varphi = 15^{\circ}, 30^{\circ}, 45^{\circ}; \vartheta = 0^{\circ}; \psi = 0^{\circ}$ ) в системе вращения zxz. Тогда аналитическое выражение для определения деформации ползучести примет следующий вид:

$$\boldsymbol{\varepsilon}_{oct}^{\boldsymbol{p}} = \sqrt{2}A\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\sigma\right)^{n}g(\cos\varphi,\sin\varphi,n)t\boldsymbol{i}\boldsymbol{i}, \quad \boldsymbol{\varepsilon}_{cub}^{\boldsymbol{p}} = \left(\sqrt{6}B\left(\frac{\sqrt{6}}{4}\sigma\right)^{m}\left(\sin(2\varphi)\right)^{m+1}\right)t\boldsymbol{i}\boldsymbol{i}.$$
(6)

На рис. 3 представлено сравнение результатов аналитического и численного решений с учетом кубической системы в пакете CES [5] при постоянном напряжении  $\sigma = 177$  МПа.



Рис. 3. Сравнение данных эксперимента (рис. 2) с аналитическим и численным решениями (слева) и зависимость численного решения от угла отклонения ориентации монокристалла от направления [001] (справа) для задачи ползучести при постоянном напряжении *σ* = 177 МПа

Из рисунков видно, что численные и аналитические результаты показывают неплохое совпадение с экспериментом. Также стоит отметить, что при изменении угла поворота кривая ползучести сначала смещается вверх, затем вниз, что может быть обусловлено нарастающим вкладом кубических систем скольжения в суммарную деформацию.

Из приведенных результатов видно, что эффект учета кубической системы скольжения проявляется с увеличением угла отклонения от идеального кристаллографического направления [001]. В продолжение работы планируется внедрить полученные результаты в конечно-элементный пакет PANTOCRATOR [6] для моделирования процессов разрушения монокристаллических образцов и элементов газотурбинных установок.

### ЛИТЕРАТУРА:

1. J. Besson, G.Cailletaud, J.-L. Chaboche, S. Forest, M. Blétry. Non-Linear Mechanics of Materials; Springer; 2010.

2. Е.Р. Голубовский, Е.Н. Каблов, Н.В. Петрушин, К.К. Хвацкий. Температурно-временная зависимость прочности ренийсодержащего никелевого сплава для монокристаллических лопаток турбины // Литейные жаропрочные сплавы. Эффект С.Т.Кишкина. Наука, 2006, 155 с.

3. Р.Е. Шалин, И.Л. Светлов, Е.Б. Качалов и др. Монокристаллы никелевых жаропрочных сплавов – М.: Машиностроение, 1997. – 336 с.

4. А.Н. Грудинин, С.В. Алексеев, А.С. Семёнов. Идентификация параметров сегнетоэлектроупругих материалов на основе применения методов оптимизации. XLI Неделя науки СПбГПУ: материалы XLI межд. научно-практической конференции. Ч.5. - СПб.: Изд-во Политехн.ун-та , 2010.

5. А.С. Семенов. Вычислительные методы в теории пластичности. Изд-во СПбГПУ, 2008. 211 с.

6. А.С. Семенов. PANTOCRATOR - конечно-элементный программный комплекс, ориентированный на решение нелинейных задач механики / Труды V-ой Межд. конф. "Научно-техн. Проблемы прогнозирования надежн. и долговечн. конструкций". СПб.: Изд-во СПбГПУ, 2003. С. 466-480.

## РАЗРАБОТКА АЛГОРИТМА УПРАВЛЕНИЯ ОРИЕНТАЦИЕЙ КОСМИЧЕСКОГО АППАРАТА ПРИ НЕИСПРАВНЫХ ИЗМЕРИТЕЛЯХ УГЛОВЫХ СКОРОСТЕЙ

Важнейшими параметрами необходимыми для управления ориентацией космического аппарата являются угловые параметры и угловые скорости. В измерении этих параметров главную роль играют измерители угловых скоростей (ИУС) [2,3]. Однако зачастую возникает нештатные ситуации, при которых данные измерители выходят из строя, как следствие возникают проблемы с ориентацией КА. Примером подобной ситуации является нештатная ситуация со спутником связи "Ямал-201" в 2011 году. В этом случае используют дополнительную информацию от других измерительных систем (к примеру, от блока измерения координат Солнца (БОКС)), а также от инерционных исполнительных органов (к примеру, от маховиков), и с помощью вычислительных алгоритмов получают информацию необходимую для ориентации КА.

Данная работа представляет собой анализ и построение алгоритма, который позволяет восполнить недостающую информацию и сформировать управляющий момент по показаниям датчика направления на Солнце и тахометров маховиков, решая следующие задачи:

- наведение требуемой оси КА на Солнце (построение одноосной солнечной ориентации (OCO));
- в режиме поддержания ОСО идентификация всех трех компонент угловой скорости;
- выполнение закрутки вокруг направления на Солнце с требуемой угловой скоростью; При решении данной задачи ключевым моментом является построение наблюдателя

При решении данной задачи ключевым моментом является построение наолюдателя Люенбергера [5], из которого получается уравнение ошибок:

## $\delta \mathbf{x}(t) = \delta \mathbf{x}(0) \cdot \exp(\mathbf{L} \cdot t) ,$

где  $\delta x$  – ошибка оценки вектора состояний, L - матриц динамики наблюдателя. Поведение ошибки во времени зависит от собственных чисел матрицы наблюдателя L. Выбрав их соответствующим образом, можно достаточно быстро свести ошибку к нулю, и получать от наблюдателя точную оценку вектора состояния. Практически собственные значения наблюдателя выбираются так, чтобы состояние наблюдателя сходилось к состоянию наблюдаемой системы несколько быстрее затухания переходных процессов в желаемой замкнутой системе. Чрезмерное ускорение наблюдателя приводит к затруднениям при его реализации [1,4].

В конечном итоге, полученный алгоритм был протестирован на модели движения космического аппарата, для которого известен тензор инерции Т и кинетический момент маховиков H<sub>0</sub>. От работы данного алгоритма управления требовалась идентифицировать все три компоненты угловой скорости, а также в заданный момент времени провести закрутку вокруг направления на ориентир (Солнца) с заданной угловой скоростью.

Как видно из рис. 1, с течением времени бортовая оценка вектора угловой скорости сходится к реальному (модельному) значению угловой скорости.

Главный вывод, который можно сделать на основе данной работы, заключается в том, что разработанный алгоритм управления космическим аппаратом позволяет обеспечивать поддержание одноосной ориентации при неполном векторе измерений и идентифицировать все компоненты угловой скорости. В перспективе он может быть реализован в бортовой вычислительной машине, что позволит парировать ряд нештатных ситуации на космическом аппарате, связанные с выходом из строя измерителей угловых скоростей, и продлить срок эксплуатации космического аппарата.



Рис. 1. Бортовая оценка (красная пунктирная линия) и модельные значения (черная сплошная линия) компонент вектора угловой скорости

### ЛИТЕРАТУРА:

1. Бранец. В.Н., Токарь Е.Н. Управление ориентацией космических аппаратов – М.:Наука, 1974. – С. 14 – 23.

2. Бранец В.Н., Шмыглевский И.П. Применение кватернионов в задачах ориентации твёрдого тела – М.:Наука, 1973 – С. 97 – 105.

3. Страшинин Е.Э. Основы теории автоматического управления – Екатеринбург: УГТУ, 2000. – С. 180 – 186.

4. Квакернаак. Х., Сиван Р. Линейные оптимальные системы управления – М.: Мир, 1977 – С. 378 – 389.

5. Попов В.И., Системы ориентации и стабилизации космических аппаратов – М.: Машиностроение, 1986 – С. 13 – 17.

## И.В. Ивашов, А.С. Семенов (Санкт-Петербургский государственный политехнический университет)

# МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРОЦЕССОВ РАЗРУШЕНИЯ ПОЛИКРИСТАЛЛИЧЕСКОЙ ПЬЕЗОКЕРАМИКИ ПРИ УЧЕТЕ ЭЛЕКТРОПРОНИЦАЕМОСТИ ТРЕЩИН

Хрупкость поликристаллической пьезокерамики, получившей широкое распространение на практике, приводит к необходимости проведения расчетов на прочность и трещиностойкость. Корректное описание процессов зарождения и распространения трещины в пьезокерамических и сегнетопьезокерамических материалах является в настоящее время актуальной и не до конца исследованной задачей. В данной работе рассматриваются различные способы учета электропроницаемости трещины и предлагаются различные подходы их численной реализации.

Традиционно в качестве граничных условий на берегах трещины при расчете трещинностойкости пьезоэлектриков используется условие равенства нулю нормальной компоненты вектора диэлектрических смещений  $D_n|_{\Gamma_{1,2}} = 0$  или условие равенства на противоположных берегах значений скалярных потенциалов  $\varphi|_{\Gamma_1} = \varphi|_{\Gamma_2}$ , которые соответствуют моделям *непроницаемой* и *проницаемой* трещины. В реальности среда между берегами трещины обладает конечной диэлектрической проницаемостью, что, может быть учтено на основе аналогии с моделью плоскопараллельного конденсатора и записано для моды раскрытия I в виде нелинейного граничного условия для *полупроницаемой* трещины:

$$D_n\Big|_{\Gamma_{1,2}} = -k_c \frac{\Delta\varphi}{\Delta u_n},\tag{1}$$

где  $\Delta \varphi = \varphi|_{\Gamma_2} - \varphi|_{\Gamma_1}$  - разность потенциалов между берегами трещины,  $\Delta u_n = u_n|_{\Gamma_2} - u_n|_{\Gamma_1}$  - относительное смещение берегов трещины по нормали,  $k_c$  - диэлектрическая проницаемость среды между берегами трещины. Впервые такое граничное условие было введено Нао и Shen [1]. Затем в работе Landis [2] оно было дополнено силами кулоновского взаимодействия

$$\sigma_{nn}\big|_{\Gamma_{1,2}} = \frac{1}{2}k_c \left(\frac{\Delta\varphi}{\Delta u_n}\right)^2,\tag{2}$$

которые оказывают значительное влияние только при высоких значениях диэлектрической проницаемости  $k_c$  в сравнении диэлектрической проницаемостью самого пьезоэлектрика k.

В статье рассмотрены два метода численной реализации нелинейного граничного условия (1), ориентированные на выполнение конечно-элементных расчетов пъезокерамических объектов с трещинами в конечно-элементном пакете ANSYS. Ниже диэлектрическая проницаемость  $k_c$  считается достаточно малой в сравнении с k, деформации в расчетах предполагались малыми.

### Метод простой итерации

На первом шаге решается задача с граничным условием  $D_n = 0$  (непроницаемая трещина  $k_c = 0$ ). На последующих шагах используется граничное условие:

$$D_n^{(i+1)} = -k_c \, \frac{\Delta \varphi^{(i)}}{\Delta u_n^{(i)}}.$$
(3)

Метод достаточно хорошо сходится при малых значениях  $k_c$ , но при значениях порядка  $10^{-2}k$  схема перестает работать.

## Метод секущих

На первых двух шагах решаются задачи проницаемой и непроницаемой трещины с граничными условиями:  $D_n = 0$  ( $k_c = 0$ ) и  $\Delta \varphi = 0$  ( $k_c \to \infty$ ). На последующих шагах используется формула:

$$D_n^{(i+1)} = D_n^{(i)} - \left[1 + k_c \frac{\left(\Delta u_n^{(i-1)} \Delta \varphi^{(i)} - \Delta u_n^{(i)} \Delta \varphi^{(i-1)}\right)}{\left(\Delta u_n^{(i)}\right)^2 \left(D_n^{(i)} - D_n^{(i-1)}\right)}\right]^{-1} \left(D_n^{(i)} + k_c \frac{\Delta \varphi^{(i)}}{\Delta u_n^{(i)}}\right).$$
(4)

Метод хорошо сходится при значениях  $k_c < 10^{-2} k$ , при более низких значениях  $k_c$  невязка метода существенно возрастает.

## Моделирование среды внутри трещины дополнительным материалом

Наряду с использованием специальных граничных условий (1) и (2) для полупроницаемой трещины рассматривался альтернативный подход введения нового материала для учета диэлектрических свойств пространства внутри трещины. Упругие модули данного материала выбирались весьма малыми. Основным преимуществом метода является отсутствие необходимости решения нелинейной задачи, как в случае использования (1) и (2), а также возможность рассматривать сложные схемы нагружения и трехмерные задачи, где операции вычисления разности потенциалов и расстояния между берегами трещины являются достаточно трудоемкими.

### Численный пример

С помощью метода секущих было получено решение для задачи растяжения пластины с внутренней трещиной (задача Гриффитса) в предположении плоского деформированного состояния. На рис. 1 и 2 представлены графики изменения перемещений и потенциала вдоль берега трещины (в силу симметрии рассматривается правая половина трещины) для различных значений диэлектрической проницаемости  $k_c$ .



Рис. 1. Распределение перемещений по нормали вдоль берега трещины



Рис. 2. Распределение скалярного потенциала вдоль берега трещины

Из графиков на рис. 1 и 2 видно, что раскрытие трещины, а также потенциал на ее берегах может значительно изменяться при различных диэлектрических константах среды внутри трещины  $k_c$ , что может повлиять как на коэффициенты интенсивности, так и на размер зоны процессов переключения в вершине трещины.

При моделировании среды внутри трещины дополнительным материалом графики перемещений и потенциала получаются аналогичными рис. 1 и 2.

На рис. 3 и 4 показаны диаграммы распределения вектора электрического поля E для непроницаемой и проницаемой трещин в окрестности вершины (точка A), которые наглядно показывают отличия в решениях для непроницаемой и проницаемой трещины. В случае непроницаемой модели ( $k_c \rightarrow 0$ ) линии поля E огибают трещину (рис. 3). Для проницаемой трещины ( $k_c \rightarrow \infty$ ), линии поля проходят перпендикулярно берегу трещины (рис. 4).



Рис. 3. Распределения вектора Е для непроницаемой трещины (АВ)

Рис. 4. Распределения вектора *Е* для проницаемой трещины (АВ)

В дальнейшем планируется применить разработанные методы для оценки трещиностойкости элементов реальных конструкций [3-5] и исследовать возможность использования указанных методов при учете нелинейных свойств материала, вызванных диссипативными реманентными процессами переключений (сегнетоэлектроупругость) [6] в окрестности вершины трещины.

#### ЛИТЕРАТУРА:

1. Hao, H. and Shen, Z.Y., A new electric boundary condition of electric fracture mechanics and its applications. Eng. Fract. Mech.1992, 47(6), C. 793 – 802.

2. Chad M. Landis, Energetically consistent boundary conditions for electromechanical fracture. International Journal of Solids and Structures 41 (2004), C. 6291 – 6315.

3. Jelitto H., Kessler H., Schneider G.A., Balke H. Fracture behavior of poled piezoelectric PZT under mechanical and electrical loads // J. Eur. Ceram. Soc. 2005. Vol. 25. P. 749–757.

4. Semenov A.S., Liskowsky A.C., Neumeister P., Balke H. Effective computational methods for the modeling of ferroelectroelastic hysteresis behavior. In M. Kuna, A. Ricoeur (Eds.), Proc. IUTAM "Multiscale Modelling of Fatigue, Damage and Fracture in Smart Materials Systems", IUTAM Bookseries, 2011, Vol. 24, P. 43 – 53

5. Уйстрайх К.Б., Семенов А.С., Мельников Б.Е. Конечно-элементное моделирование процессов разрушения пьезокерамических образцов при комбинированном электромеханическом нагружении // Морские Интеллектуальные Технологии. 2011, №3. С. 96 – 100.

6. Semenov A.S., Liskowsky A.C., Balke H. Return mapping algorithms and consistent tangent operators in ferroelectroelasticity // Int. J. Num. Meth. Eng. 2010. Vol. 81. P. 1298 – 1340.

УДК 621.643:539.4

Н.А. Катанаха, Л.Б. Гецов, А.С. Семенов (Санкт-Петербургский государственный политехнический университет)

# АНАЛИЗ ДЛИТЕЛЬНОЙ ПРОЧНОСТИ ГИБОВ ВЫСОКОТЕМПЕРАТУРНЫХ ПАРОПРОВОДОВ С УЧЕТОМ ТРЕТЬЕЙ СТАДИИ ПОЛЗУЧЕСТИ

Для расчетной оценки условий разрушения деталей, работающих в условиях ползучести, таких, например, как гибы паропроводов и др., необходимо знать закономерности ползучести на всех трех стадиях. В работах [1, 2] была предложена модифицированная модель Содерберга, позволяющая описывать первые две стадии ползучести с учетом эксплуатации материала в течение весьма длительного времени (300 000 ч. и более):

$$\varepsilon^{c} = A \cdot \sigma^{k} \cdot (1 - e^{-C \cdot t}) + B \cdot t^{l+1} \sigma^{m}, \qquad (1)$$

где: *А*, *B*, *C*, *k*, *l*, *m* – параметры материала, зависящие от температуры.

В статье [3], рассматривалось напряженно-деформированное состояние гибов высокотемпературных паропроводах в условиях эксплуатации, причем оценка запасов прочности производилась в соответствии с РД 10-249-98 и СТО 17330282.27.100.005-2008.

Цель настоящей работы – определение условий разрушения гибов паропроводов, работающих в условиях ползучести. Для достижения цели решались следующие задачи:

- Дальнейшая модификация предложенной ранее модели ползучести (1), позволяющая адекватно описывать все три стадии ползучести применительно к длительным срокам эксплуатации металла.
- Проведение серии конечно-элементных (КЭ) расчётов гибов из условия задания различных граничных условий с использованием разработанной модели ползучести.

В настоящее время для описания повреждаемости материалов  $\omega$  при ползучести используют различные модели. Наиболее распространенной является классическая модель повреждаемости Качанова-Работнова:

$$\dot{\omega} = D \left(\frac{\sigma}{1-\omega}\right)^p. \tag{2}$$

Известны и другие варианты уравнений поврежденности. Так в работе [4] Н.К. Кучером обобщены несколько моделей в одной формуле:

$$\frac{d\omega}{dt} = D \frac{\sigma^k}{\left(1 - \omega^r\right)^k} \frac{\omega^\beta}{\left(1 - \omega\right)^q},\tag{3}$$

где  $D, k, r, q, \beta$  – некоторые постоянные величины, определяемые экспериментально.

Полагая в (3) r = 1,  $q = \beta = 0$ , получаем уравнение Качанова, r = 1, q = 0 – уравнение Работнова (классическая модель), r = 1,  $\beta = 0$  – соотношение Леметра и Пламтри,  $q = \beta = 0$  – уравнение Шестерикова.

Для учета третьей стадии ползучести напряжение  $\sigma$  в уравнении (1) предлагается заменить на  $\frac{\sigma}{1-\omega}$ . Таким образом, единое уравнение для описания всех трех стадий ползучести преобразуется в выражение:

$$\varepsilon^{c} = A \cdot \left(\frac{\sigma}{1-\omega}\right)^{k} \cdot (1-e^{-C \cdot t}) + B \cdot t^{l+1} \left(\frac{\sigma}{1-\omega}\right)^{m}, \tag{4}$$

где повреждаемость  $\omega$  определяется из уравнения (2). Коэффициенты *D* и *p* уравнения (2) для дальнейших расчётов определялись из значений предела длительной прочности.

В табл. 1 приведены значения параметров модели (4) для стали 10Х9МФБ при температуре 550 °C, применяемых в дальнейшем для КЭ расчётов гибов. На рис. 1 показано сравнение кривых ползучести без учёта и с учётом повреждаемости.



Табл. 1

Табл. 2

Рис. 1. Кривые ползучести при 150 МПа (а) и 125 МПа (б) стали 10Х9МФБ 550°С 1) с учётом повреждаемости, 2) без учёта повреждаемости



Рис.2. КЭ модель (321.05)

Апробация модели ползучести с учетом повреждаемости была проведена для гиба СТО ЦКТИ 90°-426х20-1000х800х2670-R1700 (321.05) геометрические (рис. 2), основные размеры которого табл. 2. Решение представлены В нелинейных краевых задач В трехмерной постановке выполнялось с использованием КЭ программного комплекса PANTOCRATOR [5]. Вследствие симметрии относительно плоскости гиба рассматривалась половина гиба. Граничными условиями приняты: давление внутри гиба 4, 10, 12 МПа; перемещения концов гиба в направлении нормали поперечного сечения отсутствуют. При

решении нелинейных начально-краевых задач расчёты проводились с различным шагом интегрирования для начальных и конечных времён. В КЭ расчетах использовались восьмиузловые трехмерные элементы.

Диаметр		Родина	Толщина стенки		Длина прямого		
Условн.,	Наружн,	гадиус, <i>R</i>	<i>R</i> прямых среднего		участка		а
$D_y$	$D_a$		уч-ков, <i>s</i>	сечения, <i>s</i> <sub>1</sub>	на входе, <i>l</i>	выходе, $l_1$ ,	
400 мм	426 мм	1700 мм	20 мм	15,9 мм	1000 мм	800 мм	6 %

На рис. 3 представлен график поврежденности, в табл. 3 представлены результаты расчетного определения эквивалентных напряжений в гибе с использованием для описания процессов ползучести с учётом повреждаемости различных моделей: модифицированной модели Содерберга (1), Нортона:  $\dot{\varepsilon}^c = B\sigma^m$ , и обобщённого Нортона  $\dot{\varepsilon}^c = B\sigma^m t^l$ .


внутренних давлениях: а) 4 МПа, б) 12 МПа.

KGS – Модифицированная модель Содерберга;

Norton – модель Нортона; G Norton – обобщённая модель Нортона

Модель	$\frac{\sigma_{_{_{3KB}}}, M\Pi a}{t_{_{pasp}}, 4}$ при внутреннем давлении $p$			
	<i>p</i> = 4 МПа	<i>p</i> = 10 МПа	<i>p</i> = 12 МПа	
Модифицированная модель	51,94	110,94	_	
Содерберга	>300000	> 300000	106600	
Модель Нортона	55,90	_	_	
	> 300 000	201600	3370	
Обобщённая модель Нортона	53,97	115,35		
	> 300 000	> 300 000	99 400	

Из табл. З видно, что наиболее консервативный расчет даёт модель Нортона (по сравнению с обобщённой моделью Нортона и модифицированной моделью Содерберга). Наименее консервативный расчёт – модифицированная модель Содерберга.

Таким образом, проведенная работа дает основания увеличить остаточный ресурс эксплуатируемых паропроводов при условии незначительного проявления процессов коррозии.

### ЛИТЕРАТУРА:

1. Катанаха Н.А., Гецов Л.Б., Семёнов А.С. Модификация модели ползучести повышенной точности прогноза при большой длительности нагружения и идентификация ее параметров // Деформация и разрушение материалов, 2013, № 10,С. 16 – 23.

2. Katanaha N., Semenov A., Getsov L. Unified model of steady-state and transient creep and identification of its parameters // Strength of Materials. 2013 Vol. 45,  $N_{2}$  4.– P. 495–505.

3. Катанаха Н.А., Гецов Л.Б., Семенов А.С., Данюшевский И.А. Прочность и долговечность гибов высокотемпературных паропроводов // Научно-технические ведомости СПбГПУ 2013 №3(178), С.82 – 94.

4. Кучер Н.К. Вариант теории упрочнения учитывающий зависимость параметров уравнений состояния от напряжения и температуры. // Проблемы прочности, 2005, № 2. – С. 19 – 27.

5. Семенов А.С. PANTOCRATOR - конечно-элементный программный комплекс, ориентированный на решение нелинейных задач механики // Труды V-ой Межд. Конф. «Научно-технические проблемы прогнозирования надежности и долговечности конструкций и методы их решения». СПб.: Изд-во СПбГПУ, 2003. С. 466 – 480.

## УДК 539.41

А.В. Коковцева, А.С. Семенов, С.Г. Семенов (Санкт-Петербургский государственный политехнический университет), А.В. Бенин (Петербургский государственный университет путей и сообщения)

# МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРОЦЕССА ВЫДЕРГИВАНИЯ СТЕКЛОПЛАСТИКОВОЙ АРМАТУРЫ ИЗ БЕТОННОГО БЛОКА

Одним из инновационных направлений в строительстве является использование стеклопластиковой арматуры (СПА) вместо традиционной металлической. СПА стала объектом исследования еще в начале шестидесятых годов прошлого столетия. Изучались свойства стеклопластиковой арматуры, а также сферы ее возможного использования. Область применения такой арматуры определена с учетом физических свойств, выявленных в результате проведенных исследований: малый удельный вес (СПА в 4-5 раз легче металлической арматуры), низкая теплопроводность, хладостойкость, высокая коррозионная стойкость в присутствии агрессивных (в том числе кислых) сред, СПА является диэлектриком, радиопрозрачна, магнитоинертна.

Согласно информации, приведенной в нормативных документах [1, 2], и с учётом описанных выше свойств, рекомендуется применение стеклопластиковой арматуры в следующих конструкциях: фундаменты ниже нулевой отметки залегания, элементы дорожного строительства (подверженные агрессивному воздействию противогололёдных реагентов), армированные конструкции, подвергающиеся воздействию агрессивных сред, вызывающих коррозию стальной арматуры (конструкции, соприкасающихся с морской водой), при ремонте бетонных конструкций, подверженных воздействию агрессивных сред, осветительные опоры, опоры линий электропередач (ЛЭП), изолирующие траверсы ЛЭП, конструкции, подвергающиеся постоянному тепловому режиму не выше 60 °C и кратковременному до 100 °C. Последнее ограничение связано с пониженной жаропрочностью стеклопластиковой арматуры — ее температура плавления составляет около 200 °С.

Одним из ключевых факторов, позволяющих работать бетону, армированному СПА, как единому монолитному телу, является сцепление арматуры с бетоном. Одним из наиболее распространенных способов определения характеристик сцепления является вытягивание арматурного стержня из бетонного блока (pull-out test) [3]. Целью данной работы является конечно-элементное моделирование процесса потери связей сцепления стеклопластиковой арматуры с бетоном основе на результатов проведенных экспериментальных исследований по выдергиванию стеклопластиковой стержневой арматуры из бетонного куба (рис. 1). Также планируется в дальнейшем сравнить свойства сцепления стеклопластиковой арматуры с результатами, полученными при выдергивании металлической арматуры из бетонного блока в аналогичных условиях.

В рамках данного исследования проводились испытания 3<sup>х</sup> образцов бетона марки В30, имеющего форму куба, с ребром 150 мм с заделанной в них на глубину 60 мм стеклопластиковой арматурой диаметром 12 мм. Исследуемая арматура представляет собой композитный стержень с



Рис. 1. Экспериментальная установка

выполненной на поверхности спиралевидной навивкой, пропитанный полимером.

Опыты выполнялись на испытательной машине Shimadzu AG-300kN, представленной выше на рисунке 1. Бетонный блок ставился на опору, движущуюся поступательно вертикально вверх со скоростью 2 мм/мин. Снизу образец закреплялся в захваты испытательной машины. Для контроля перемещений арматуры использовался LVDT датчик, расположенные на верхнем торце бетонного куба.

В результате проведенных экспериментов навивка арматуры полностью соскочила, а в бетоне не возникло трещин. На рис. 2 изображена диаграмма зависимости возникающих в конструкции касательных напряжений от проскальзывания арматуры (диаграмма сцепления арматуры с бетоном).

Используемая в экспериментах композитная арматура состоит из продольно направленных волокон (стеклонитей) (68 % от всего объема) и связующего компонента (матрицы) — эпоксидной смолы (32% от всего объема). Значения модулей упругости и коэффициентов Пуассона составляющих компонентов определены экспериментально [4]: стеклонить —  $E_c=72$  ГПа,  $v_c=0.23$ ; эпоксидная смола —  $E_3=3,6$  ГПа,  $v_2=0.23$ .



Рис. 2. Диаграммы сцепления арматуры с бетоном

Упругие свойства арматуры могут рассматриваться с высокой степенью точности как трансверсально-изотропные. Это объясняется расположением и ориентацией стеклонитей и наличием осевой симметрии в арматуре. В этом случае тензор упругих модулей имеет 5 независимых компонент.

Эффективные упругие свойства стекловолоконного композита определялись методом конечно-элементной гомогенизации на основе проведения серии вычислительных экспериментов с различными вариантами граничных условий для элементарного представительного объема. Решения краевых задач получены в двумерной и трехмерной постановке с использованием конечно-элементного программного комплекса ANSYS. В качестве оси ОZ выбрано продольное направление стеклонитей. В двумерной постановке решена задача плоского деформированного состояния в случае одноосного растяжения. В трехмерной постановке решена задача одноосного растяжения (вдоль осей изотропии) и реализован чистый сдвиг. Значения эффективных упругих модулей, полученные в результате проведения вычислительных экспериментов, представлены в табл. 1.

$v_{xy} = v_{yx}$	$v_{yz} = v_{xz}$	$v_{zy} = v_{zx}$	$E_{x} = E_{y},$ $\Gamma \Pi A$	Е <sub>z</sub> , ГПа	G <sub>xy</sub> , ГПА	$G_{xz} = G_{yz},$ $\Gamma \Pi A$
0.17	0.08	0.26	16.5	50	7	13

Табл. 1. Значения упругих модулей композитной арматуры

Полученные эффективные упругие свойства стеклопластиковой арматуры использовались при решении краевой задачи о вытягивании арматурного стержня из бетонного блока. Осесимметричные конечно-элементные модели, используемые при анализе процесса выдергивания арматуры с гладкой и профилированной арматурой, показаны на рис. 3. В расчетах использовались восьмиузловые изопараметрические квадратичные конечные элементы. Условия нагружения соответствуют требованиям RILEM/CEB/FIB [3]. При решении задачи на нижнем конце арматуры задавалось равномерно распределенное давление. На части нижней стороны бетонного куба задавался запрет перемещений по



Рис. 3. КЭ модели в задаче о вытягивании а) гладкой и б) профилированной стеклопластиковой арматуры из бетонного блока нормали. Боковые и верхняя стороны бетонного куба оставались свободными. Учет эффекта усадки бетона моделировался путем задания однородных начальных объемных деформаций сжатия на основе эквивалентного температурного воздействия. Получены решения задач с учетом неупругих свойств бетона и наличия контактного взаимодействия арматуры с бетоном.

Рассматривались различные варианты учета специфики связей сцепления арматуры с бетоном, в частности модели без учета несплошности соединения [6], модель с введением фиктивного интерфейсного слоя [6], модель с явным учетом несплошности с

использованием пружинных элементов [5]. Параметры, характеризующие сцепление определялись на основе экспериментальных диаграмм сцепления (рис. 2). При решении нелинейных задач основную сложность

представляет описание ниспадающих ветвей диаграмм сцепления, поэтому при получении решения использовались инкрементально-итерационные процедуры с адаптивным шагом и метод Arc-length [7].

### ЛИТЕРАТУРА:

1. СНиП 2.03.11-85.

2. МГСН 2.08-01С.

3. RILEM/CEB/FIB. Recommendation on reinforcement steel for reinforced concrete. RC6. Bond test for reinforcement steel. 2. Pull-out tests. 1983. 8p.

4. Неклюдова Е.А. Экспериментальное исследование и конечно-элементный анализ упругих и прочностных свойств стекловолоконного композиционного материала Выпускная работа бакалавра. СПбГПУ. 2013.

5. Бенин А.В., Семенов А.С., Семенов С.Г., Мельников Б.Е. Математическое моделирование процесса разрушения сцепления арматуры с бетоном. Часть 1. Модели с учетом несплошности соединения // Инженерно-строительный журнал. 2013. № 5. С. 86 – 99.

6. Бенин А.В., Семенов А.С., Семенов С.Г., Мельников Б.Е. Математическое моделирование процесса разрушения сцепления арматуры с бетоном. Часть 2. Модели без учета несплошности соединения // Инженерно-строительный журнал. 2014. № 1. [в печати].

7. Семёнов А.С. Вычислительные методы в теории пластичности. Изд-во СПбГПУ, 2008. 211 с.

С.А. Ле-Захаров, Б.Е. Мельников, А.С. Семенов (Санкт-Петербургский государственный политехнический университет)

# МОДЕЛИРОВАНИЕ НЕУПРУГОГО ДЕФОРМИРОВАНИЯ ГРУНТОВ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ КРИТЕРИЕВ ДРУКЕРА-ПРАГЕРА И КУЛОНА-МОРА И ИХ МОДИФИКАЦИЙ

Многие современные задачи геомеханики требуют проведения прочностных расчетов таких процессов, на которые в равной степени оказывает влияние неупругое деформирование твердых тел и течение жидкости, а также взаимосвязь этих явлений. Например, совместного рассмотрения поведения твердой, жидкой, а иногда и газообразной фаз требуют задачи о распространении трещин гидроразрыва, задачи устойчивости грунтовых плотин, фильтрации в приразломных зонах оснований ответственных сооружений, и многие другие.

Традиционно рассмотрение задач консолидации грунтов, требующих учета жидкой и газообразной фаз, производится в упругой постановке с использованием концепции эффективных напряжений, предложенной Био [1] (линейная теория эффективных двухфазных сред, состоящих из жесткого пористого каркаса и флюида, заполняющего поры). Вместе с тем, для грунтов, которым свойственна отмеченная многофазность, характерен переход в пластическое состояние при относительно невысоких напряжениях. Повышение требований к точности проводимых расчетов требует одновременного учета обоих этих явлений (фильтрация, пластичность), в связи с чем актуальной является задача исследования существующих, разработки новых моделей поропластичности, их идентификации и апробации на модельных задачах.

В [2] авторами приводятся основные уравнения поропластической модели деформирования грунта. При этом, в предположении аддитивности деформаций, их упругая составляющая  $\varepsilon^{e}$  вычисляется классическим способом с учетом перекрестного члена, пропорционального поровому давлению *p*:

$$\boldsymbol{\varepsilon}^{\mathbf{e}} = {}^{4}\mathbf{S} \cdot \cdot \boldsymbol{\sigma} + \frac{p}{3H}\mathbf{1}, \qquad (1)$$

где  ${}^{4}$ **S** - тензор упругих податливостей  $4^{ro}$  ранга в дренированных условиях, H – пороупругий модуль, **1** – единичный тензор второго ранга.

Пластическая деформация  $\varepsilon^{p}$  также оказывается перевязанной с поровым давлением, т. к. в выражение пластического потенциала  $\Phi(\sigma, c)$  попадает эффективное напряжение, равное общему, уменьшенному на величину порового давления:

$$\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}' \boldsymbol{\cdot} \boldsymbol{\alpha} \, p \, \mathbf{1}. \tag{2}$$

Использование модели Друкера-Прагера [3–5] с учетом (2) приводит к следующему выражению пластического потенциала  $\Phi(\mathbf{\sigma}, c)$ :

$$\Phi(\boldsymbol{\sigma}, c) = (\sigma_{\max} - p)(1 + \sin \varphi) - (\sigma_{\min} - p)(1 - \sin \varphi) - 2c \cos \varphi = 0.$$
(3)

Применение неявных методов численного интегрирования к уравнениям (1)–(3) приводит к поиску решения систем нелинейных алгебраических уравнений и является наиболее эффективным. Применения явного метода Эйлера позволяет напрямую вычислять значения  $\dot{\lambda}$  на каждом шаге интегрирования, однако приводит к неустойчивости численной схемы.

На рис. 1 и 2 приводится сравнение результатов расчета однородного напряженнодеформированного состояния, полученных с использованием моделей Друкера-Прагера и Кулона-Мора, полученных с использованием программе CES [4], для двух тестовых примеров. Анализируется отклик материала при жестком непропорциональном (рис. 1) и жестком циклическом пропорциональном (рис. 2) нагружении. Следует отметить, что при непропорциональном нагружении наблюдаются заметные отличия в предсказаниях двух рассматриваемых моделей материала, в то время как при пропорциональном нагружении подобные отличия незначительны.

На рис. 3 и 4 представлено поле вертикальных напряжений и пластических деформаций в задаче о раскрытии трещины гидроразрыва под действием нагнетаемой жидкости. Задача решается с использованием модели Кулона-Мора с учетом фильтрации.



Рис. 1. Сравнение моделей Кулона-Мора и Друкера-Прагера. Сдвиговая деформация предварительно сжатого образца



Рис. 2. Сравнение моделей Кулона-Мора и Друкера-Прагера. Циклическая сдвиговая деформация



Рис. 3. Распределение вертикальных пластических деформаций в вершине трещины гидроразрыва



Рис. 4. Поле вертикальных напряжений в вершине трещины гидроразрыва

Полученные результаты решения тестовых задач могут быть использованы для идентификации параметров материала и поиска оптимальных методов численного решения нелинейных краевых задач.

#### ЛИТЕРАТУРА:

1. Biot M.A. General theory of three-dimensional consolidation // J. Appl. Phys. 12, 155. 1941.

2. Ле-Захаров С.А., Мельников Б.Е., Семёнов А.С. Моделирование неупругого деформирования грунтов на основе связанной модели поропластичности с учетом фильтрации // XLI Неделя науки СПбГПУ: Мат. Всеросс. межвуз. научн. конф. студ. и асп. 2012.

3. Neto E.A., Peric D., Owen D.R.J. Computational Methods for Plasticity. John Wiley & Sons. 2008.

4. Семенов А.С. Вычислительные методы в теории пластичности. Учебное пособие. Изд-во СПбГПУ, 2008.

5. Simo J.C., Hughes T.J.R. Computational Inelasticity. Springer. 1998.

# А.В. Лукин, И.А. Попов, Д.Ю. Скубов, Л.В. Штукин (Санкт-Петербургский государственный политехнический университет)

# УПРАВЛЯЕМЫЙ ПЕРЕХОД ЧЕРЕЗ РЕЗОНАНС ПРИ ПОМОЩИ МАГНИТНОЙ ОПОРЫ ИЗМЕНЯЕМОЙ ЖЕСТКОСТИ

Целью исследования является математическое моделирование нового устройства преодоления критической частоты вращения сильно неуравновешенного ротора. Для построения такой конструкции используется изменение жесткости опор при переходе через критическую скорость вращения. Управляемое изменение жесткости опор достигается за счет применения «магнитной» пружины. Магнитная пружина состоит из постоянных магнитов с магнитопроводами. Принципиальная схема дифференциальной магнитной пружины представлена на рис. 1. Её важным достоинством является возможность легко изменять величину эквивалентной жесткости упругой опоры. Это позволяет в процессе разгона ротора управлять величиной жесткости таким образом, чтобы добиться уменьшения амплитуд колебаний ротора, и, следовательно, нагрузки на опоры до приемлемых величин даже при большом небалансе и обеспечить разгон до закритической частоты вращения. Технически быстро изменить (уменьшить) жесткость магнитной пружины (увеличить начальный зазор) вполне возможно. Если сделать крепление магнитов с помощью защелки, то при её освобождении магниты можно раздвинуть под действием силы их взаимного отталкивания, тем самым увеличивая начальный зазор за достаточно малое время.



Рис.1. Схема магнитной пружины, состоящей из трех постоянных магнитов

Магнитная опора (пружина) содержит три постоянных магнита, крайние магниты закреплены неподвижно, промежуточный, а соединенный с валопроводом, может перемещаться В вертикальном направлении, и сам установлен на амортизированной опоре. Зависимости величины силы F(x), действующей на

промежуточный постоянный магнит, от вертикального смещения x при различных значениях начального зазор  $d_0$  приведены на рис. 2. Такие зависимости построены путем построения стационарного магнитного поля в системе магнитов с последующим вычислением силы их взаимного отталкивания.



Рис. 2. Характеристика «жесткости» магнитной пружины

Варьируя величину начального зазора крайними магнитами. между можно изменять величину эквивалентной 2), жесткости (рис. тем самым меняя кривую. Установившиеся скелетную колебания платформы при фиксированном положении магнитов И, следовательно, амплитудно-частотные характеристики могут быть найдены решением уравнений динамики валопровода методом гармонического баланса. На рис.3 показана зависимость амплитуды колебаний платформы от

частоты вращения ротора при различных значениях начального зазора в магнитной пружине (амплитудно-частотные характеристики) [1].



Рис. 3. Амплитудно-частотные характеристики (АЧХ)

Суть предлагаемого алгоритма управляемого перехода резонанс через Пусть рабочему состоит в следующем. режиму соответствует частота в точке А, а жесткость опор в рабочем режиме выбрана соответствующей скелетной кривой АЧХ-1. При такой жесткости при разгоне ротора неизбежно приходится преодолевать резонансную зону с большими амплитудами колебаний. Если установить перед пуском жесткость опор, соответствующую скелетной кривой АЧХ-4, то можно легко двигатель разогнать до частоты, соответствующей точке С. Затем, дождав-

шись установившихся колебаний на этой частоте, резко изменить (уменьшить) жесткость опор за счет раздвигания магнитов до величины, соответствующей кривой 1. После чего, дождавшись установления колебаний, амплитуда которых будет соответствовать точке *B*, разогнать ротор до рабочего режима (точка *A*). В течение всего процесса амплитуда колебаний останется ограниченной, меньшей, чем при непосредственном пуске.

При конструировании такой опоры возникает целый ряд вопросов. В частности, насколько быстро должен быть осуществлен процесс изменения жесткости, так как при медленном изменении зазора режим колебаний будет почти установившимся, при этом он будет соответствовать верхней ветви АЧХ-4, и попасть на нижнюю ветвь (точка *B*) не получится. Для анализа такой нелинейной динамической системы необходимы численные и аналитические исследования, в результате которых могут быть получены ее необходимые характеристики, соответствующие различным критериям, например, минимальному времени перехода на требуемую частоту, минимальным (по амплитуде) возникающим вибрациям и т.п.

Для исследования поперечных колебаний неуравновешенного ротора рассматривается нелинейное неоднородное дифференциальное уравнение [2] с одной степенью свободы, отвечающей смещению вала. При этом предполагается учет только одной (первой) формы колебаний. Уравнение динамики в безразмерном виде:

 $\ddot{x} + 2\varepsilon n \dot{x} + \lambda x + F(x, t) = e\Omega^2 \cos{(\Omega t)},$ 

(1)

где n – коэффициент трения,  $\Omega$  – отношение частоты возбуждения (частоты вращения ротора) к частоте малых свободных колебаний системы,  $\varepsilon$  – параметр, соответствующий малой диссипации подвеса, e – параметр дисбаланса,  $\lambda$  – частота свободных колебаний, отвечающая начальному положению магнитов.

Используя статическую характеристику «жесткости» магнитной пружины, примем ее в виде полиномиальной зависимости с коэффициентом, зависящим от времени. В случае малых скоростей изменения жесткости опоры можно записать как  $F(x,t) = (1 - e^{-\varepsilon t})(\alpha x^3 - \delta x)$ . Тогда уравнение (1) принимает вид:

 $\ddot{x} + 2\varepsilon n \dot{x} + (\lambda - \delta(1 - e^{-\varepsilon t}))x + \alpha(1 - e^{-\varepsilon t})x^3 = e\Omega^2 \cos(\Omega t).$ <sup>(2)</sup>

Коэффициент  $\delta$  отвечает снижению собственной частоты колебаний за счет раздвижения магнитов. Решение уравнения (2) при малом отклонении частоты возбуждения от резонансной может быть найдено проекционным методом в виде суммы гармоник с медленно меняющимися коэффициентами [3, 4]:  $x(t) = z_1(\varepsilon t) \sin\Omega t + z_2(\varepsilon t) \cos\Omega t.$  (3)

В результате применения проекционного метода получаем систему дифференциальных уравнений относительно медленно меняющихся коэффициентов:

$$\begin{cases} \ddot{z}_{1} + 2n\varepsilon\dot{z}_{1} + \left(\lambda - \delta(1 - e^{-\varepsilon t})\right)z_{1} - 2\Omega\dot{z}_{2} - 2n\varepsilon\Omega z_{2} + \frac{3}{4}\alpha(1 - e^{-\varepsilon t})(z_{1}^{3} + z_{1}z_{2}^{2}) = 0\\ \ddot{z}_{2} + 2n\varepsilon\dot{z}_{2} + \left(\lambda - \delta(1 - e^{-\varepsilon t})\right)z_{2} + 2\Omega\dot{z}_{1} + 2n\varepsilon\Omega z_{1} + \frac{3}{4}\alpha(1 - e^{-\varepsilon t})(z_{2}^{3} + z_{2}z_{1}^{2}) = e\Omega^{2}, \end{cases}$$
(4)

где  $(\lambda - \delta(1 - e^{-\varepsilon t}))$  – функция изменения (уменьшения) собственной частоты малых колебаний при медленном раздвижении магнитов.

Сравнение приближенного решения (4) с численным решением исходного уравнения (2) показало хорошее соответствие результатов при значениях безразмерной частоты воздействия  $\Omega > 1$ , немного превышающих резонансное значение (рис. 4).



Рис. 4. Сравнение приближенного решения (4) с численным решением уравнения (2)

На графике видно постепенное расхождение приближенного проекционного и численного решения, вполне согласующееся с общими теоремами о проекционных решениях системы дифференциальных уравнений с медленно меняющимися коэффициентами [5].

Предметом дальнейшей работы является построение приближенных решений при более быстром отклонении магнитов с целью выявления сочетания параметров, отвечающих тому или иному критерию перехода через критическое число оборотов.

Отдельно был рассмотрен случай мгновенного изменения жесткости - предельный случай больших скоростей изменения жесткости опоры. Применялась модель линейного осциллятора с трением под действием гармонической силы. При достижении установившихся вынужденных колебаний опорная жесткость системы скачком уменьшается и наблюдается переходный процесс. Такое грубое приближение переходного процесса быстрого изменения жесткости показало, что амплитуды колебаний во время переходного процесса существенно ниже амплитуды колебаний на резонансной частоте.

#### ЛИТЕРАТУРА:

1. А.А. Андронов, А.А. Хайкин, С.Э. Витт. Теория колебаний. – М.: Главное издательство физикоматематической литературы, 1959, 915 с.

2. В.И. Арнольд. Обыкновенные дифференциальные уравнения: Учеб. Пособие для вузов. – 3-е изд., перераб. и доп. – М.: Наука, 1984.

3. Найфе А. Введение в методы возмущений: Пер. с англ. – М.: Мир, 1984, 535 с.

4. Моисеев Н.Н. Асимптотические методы нелинейной механики. М.: Наука, 1981, 400 с.

5. Боголюбов Н.Н., Митропольский Ю.А. Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. Изд. 4-ое. М.: Наука, 1974, 504 с.

# А.О. Марков, Л.М. Яковис (Санкт-Петербургский государственный политехнический университет)

## ОБНАРУЖЕНИЕ РАЗЛАДКИ СИСТЕМ УПРАВЛЕНИЯ

Параметры алгоритмов управления разнообразными технологическими процессами (TT) определяются аналитически или путем компьютерного моделирования использованием математических моделей объектов управления [1, 2]. Вместе с тем, в силу изначальной неточности моделей или неконтролируемых изменений характеристик ТП в процессе работы расчетные настройки алгоритмов могут не обеспечивать не только оптимальное, но и удовлетворительное качество управления. В этом случае имеет место так называемая разладка системы управления. Автоматическое обнаружение разладки позволяет своевременно и соответствующим образом изменять параметры алгоритма управления и возвращать систему к эффективному режиму ее функционирования, то есть обеспечивать системе свойство адаптивности. Сложность обнаружения разладки определяется тем, что технологические объекты работают в условиях случайных возмущений. При этом важно суметь быстро обнаружить разладку, но избежать ложной тревоги.

Методам обнаружения момента изменения свойств случайных процессов посвящено множество публикаций [3, 4], однако обнаружение разладки систем управления с обратной связью имеет свою специфику, изучению которой и посвящена данная работа. Более конкретно, рассматривается задача обнаружения разладки системы управления применительно к инерционным объектам с запаздыванием, которые подвержены случайным возмущениям, представляющим собой стационарные случайные процессы.

Общепринятым показателем качества управления для ТП, функционирующих в стационарных условиях, как правило, считают дисперсию выходных переменных. Тогда, на первый взгляд, признаком разладки следует считать существенное увеличение дисперсии выходной переменной по отношению к минимальному возможному значению. Однако дисперсия может увеличиться из-за увеличения средней мощности возмущений, что (по крайней мере, для линейных динамических систем) само по себе не означает разладку и не требует изменений настроек регулятора. Казалось бы, чтобы учесть подобные варианты, можно ввести в рассмотрение нормированный показатель типа отношения реально наблюдаемой дисперсии к расчетной минимальной, но и это предложение следует отвергнуть из-за трудностей оценки минимальной возможной дисперсии. Чтобы выйти из тупика, вспомним, что инженеры издавна оценивают качество управления по виду т.н. переходной характеристики, то есть реакции системы на специально организуемое ступенчатое возмущение. Естественные возмущения, однако, не являются «ступеньками», представляя собой случайные процессы, а подавая специальные ступенчатые возмущения, можно вывести объект из режима нормальной эксплуатации. Вместе с тем, исчерпывающей характеристикой случайного сигнала, как известно, является его корреляционная функция. Нельзя ли, оценивая текущим образом без вмешательства в работу системы «объект регулятор» корреляционную функцию выходной переменной, по ее виду сделать заключение о присутствии либо отсутствии разладки? В проверке этой идеи и заключается суть данной работы.

Пусть передаточными функциями объекта управления H(p) и регулятора W(p) заданы уравнения системы "объект – регулятор" в отклонениях от заданных режимных значений

$$y = H(p)u + n, \quad u = -W(p)y.$$
<sup>(1)</sup>

Пусть  $\lambda_i$ ,  $i = \overline{1,\infty}$  - корни характеристического уравнения замкнутой системы управления (бесконечное количество корней имеет место, если модель объекта содержит запаздывание). Будем для простоты считать, что все корни различны. Тогда переходная характеристика, то есть реакция выходной переменной y(t) на управляющее воздействие u(t), имеет вид

$$h(t) = \sum_{i=1}^{\infty} a_i e^{\lambda_i t}, \qquad (2)$$

причем особенности ее поведения определяются значениями  $\lambda_i$ . Так, длительность переходного процесса зависит от наименьшего по модулю корня, а наличие и частота колебаний – от пары комплексно-сопряженных корней, расположенных наиболее близко к мнимой оси на плоскости комплексной переменной  $\lambda$ .

Чтобы получить соотношение для расчета корреляционной функции, представим спектральную плотность возмущений n(t) в виде произведения  $S_{nn}(\omega) = H_n(p)H_n(-p)\Big|_{p=-j\omega}$ , где  $H_n(p)$  имеет полюсы  $\eta_j$ ,  $j = \overline{1,m}$  лишь в левой, а  $H_n(-p)$  – лишь в правой части комплексной плоскости p. Тогда для корреляционной функции выходной переменной справедливо выражение

$$R_{yy}(\theta) = \frac{1}{2\pi j} \int_{-j\infty}^{j\infty} H_{3}(p) H_{3}(-p) H_{n}(p) H_{n}(-p) e^{p\theta} dp .$$
(3)

Данный интеграл может быть взят с помощью теории вычетов. В результате получим

$$R_{yy}(\theta) = \sum_{i=1}^{\infty} c_i e^{\lambda_i \theta} + \sum_{i=1}^{m} d_i e^{\eta_i \theta}.$$
(4)

Из сравнения выражений (2) и (4) видно, что поведение обеих функций h(t) и  $R_{yy}(\theta)$  определяется одними и теми же факторами – корнями характеристического уравнения замкнутой системы  $\lambda_i$ . Это дает основания ожидать, что *признаками разладки системы* управления могут служить либо сильная колебательность, либо затянутое время спада корреляционной функции выходной переменной. Для проверки выдвинутой гипотезы была рассмотрена задача адаптивного управления инерционным объектом с запаздыванием посредством наиболее распространенного в промышленности пропорционально-интегрального (ПИ) регулятора, когда

$$H(p) = \frac{Ke^{-\tau p}}{Tp+1}, \quad W(p) = k_p + \frac{k_i}{p}.$$

Предполагалось также, что приведенные к выходу возмущения представляют собой марковский случайный процесс с известной корреляционной функцией  $R_{nn}(\theta) = D_n e^{-|\theta|/T_n}$ . Рассматривалась ситуация, когда параметры объекта управления известны лишь с точностью диапазона значений, до ИХ ВОЗМОЖНЫХ то есть заданы неравенствами <u> $K \leq K \leq \overline{K}$ </u>, <u> $T \leq T \leq \overline{T}$ </u>, <u> $\tau \leq \tau \leq \overline{\tau}$ </u>, причем изменения параметров в указанных рамках происходят в заранее неизвестные моменты времени, после чего они достаточно долго не меняют своей величины. Для управления в условиях неопределенности параметров ТП был применен метод робастно-адаптивного управления. Идея метода состоит в том, чтобы, имея заранее рассчитанные преднастройки типового регулятора (ПИ-регулятор в рассматриваемой задаче), осуществлять переключение с одних на другие в процессе функционирования системы исходя из того, какие из них обеспечивают лучшее качество процесса управления объектом в актуальной конфигурации параметров. В настоящей работе рассматривался тот вариант, когда преднастройки ПИ-регулятора соответствуют оптимальным (минимизирующим дисперсию выходной переменной) и робастным (то есть оптимальным для объекта с параметрами  $K = \overline{K}, T = T, \tau = \overline{\tau}$  [5]) коэффициентам.

Проверка возможности обнаружения разладки проводилась в достаточно сложных для этого условиях относительно узкой зоны неопределенности, когда отклонения параметров от известных средних значений  $K_0$ ,  $T_0$ ,  $\tau_0$  составляют не более 20%. При этом были определены такие соотношения параметров  $\tau_0 / T_0 \le 1$  и  $0.03 \le \tau_0 / T_n \le 0.2$ , при которых номинальные значения параметров ПИ-регуляторов в отсутствие расстройки обеспечивают эффективное (более, чем в 2 раза по дисперсии) подавление возмущений и вместе с тем целесообразно робастно-адаптивное управление, включающее обнаружение разладки при существенном «уходе» характеристик объекта управления от номинала.

Идентификация разладок осуществлялась при помощи статистической оценки параметров корреляционной функции выходного случайного процесса, причем учитывались 2 показателя: время спада корреляции  $T_c$  (аргумент  $R_{nn}(\theta)$ , при котором ее модуль уменьшается в *e* раз по сравнению с  $R_{nn}(0)$ ) и коэффициент колебательности (определяется

как 
$$\eta = \int_{0}^{T_c} R_{nn}(\theta) d\theta / \int_{0}^{T_c} |R_{nn}(\theta)| d\theta$$
).

По данным серии численных экспериментов установлено, что выдачу сигнала о наступлении разладки следует производить при  $\eta \ge 0.25$ . Это является признаком того, что коэффициенты номинального регулятора стали слишком велики для актуального объекта управления и ослабить управляющий сигнал следует переключением на робастные настройки ПИ-регулятора. Признаком разладки является и условие  $T_c \ge 1.25\overline{\tau}$ . Здесь, наоборот, система нуждается в усилении настроек регулятора, и слабые робастные настройки должны быть заменены номинальными.

Имитационное моделирование показало, что для надежного обнаружения существенных разладок (а именно это и требуется для повышения качества управления в условиях неопределенности) достаточно получить статистические оценки корреляционной функции лишь на относительно коротком отрезке  $\theta \in [0, T_c]$ . Это, в свою очередь, позволяет для достижения достаточной точности статистических оценок использовать относительно короткие отрезки реализаций выходной переменной.

В целом, проведенное исследование позволяет сделать предварительный положительный вывод о возможности использования корреляционной функции выходных переменных управляемых ТП как для обнаружения разладки, так и для определения направления изменений параметров типовых регуляторов.

### ЛИТЕРАТУРА:

1. Первозванский А.А. Курс теории автоматического управления. СПб.: Издательство «Лань», 2010, 624 с.

2. Яковис Л.М. Простые способы расчета типовых регуляторов для сложных объектов промышленной автоматизации // Автоматизация в промышленности № 6, 2007, С. 51 – 56.

3. Клигине Н., Телькснис Л. Методы обнаружения моментов изменения свойств случайных процессов // Автоматика и телемеханика, № 10, 1983, С. 5 – 66.

4. Химмельблау Д. Обнаружение и диагностика неполадок в химических и нефтехимических процессах. Л.: Химия, 1983, 352 с.

5. Кибардин С.А., Яковис Л.М. Робастное управление инерционными объектами с запаздыванием // XLI Неделя науки СПбГПУ: материалы научно-практической конференции с международным участием СПб.: Изд-во СПбГПУ, 2012, С. 71 – 72.

## УДК 539.4

Е.А. Неклюдова, А.С. Семенов, С.Г. Семенов (Санкт-Петербургский государственный политехнический университет)

# ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ И КОНЕЧНО-ЭЛЕМЕНТНЫЙ АНАЛИЗ УПРУГИХ И ПРОЧНОСТНЫХ СВОЙСТВ СТЕКЛОВОЛОКОННОГО КОМПОЗИЦИОННОГО МАТЕРИАЛА

Корректный анализ прочности и долговечности элементов конструкций, выполненных из композитов, требует разработки и применения новых усложненных критериев, а также их тщательной экспериментальной проверки. Исследуемый в работе композиционный материал представляет собой эпоксидную смолу, армированную стеклотканью. Композит имеет слоистую структуру, представляющую собой чередование стеклоткань и эпоксидной смолы. При изготовлении композита использовалась стеклоткань полотняного плетения T-23, изготовления композит имеет 1]. Толщина одного композитного слоя (стеклоткань + эпоксидная смола) – 1 мм. На рис. 1 представлена конечно-элементная (КЭ) модель элементарного плетения, окруженная эпоксидной смолой). КЭ модель имеет 221 013 степеней свободы. Свойства материалов модели определялись экспериментально. Свойства эпоксидной смолы:  $E_3 = 3.6$  МПа,  $v_3 = 0.2$ , свойства стеклонитей:  $E_c = 70$  ГПа,  $v_c = 0.23$ . Геометрические характеристики полотняного плетения вычислены на основе [1].

Рассматриваемый композит принадлежит к классу ортотропных материалов. Его упругие и прочностные свойства зависят от направления, но симметричны относительно осей ортотропии 1,2,3 (см. рис. 1). Оси 1 и 2 совпадают с направлениями нитей основы и утка. Оси x, y, z связаны с лабораторной системой координат. Угол Ф – УГОЛ МЕЖДУ ОСЬЮ Х И НИТЬЮ ОСНОВЫ.

Справедлив закон Гука:



Рис. 1. КЭ модель ЭПО композита

 $\varepsilon = {}^{4}S \cdot \sigma.$ 

(1)

Для ортотропного материала тензор упругих податливостей  ${}^{4}S$  имеет 9 независимых компонент, которые полностью определяют упругие свойства композита в произвольной системе координат.

В работе рассмотрены три критерия статической прочности для ортотропного материала: Хилла, Цай-Ву и Захарова. Ниже эти критерии записаны для плоского напряженного состояния. Также на основе критериев были получены зависимости предельного напряжения при одноосном нагружении  $\bar{\sigma}_x$  от направления нагружения, т.е. от угла  $\phi$  между приложенной нагрузкой и нитью основы.

Критерий прочности Хилла для плоского напряженного состояния имеет вид [2]:

$$\frac{\sigma_1^2}{\bar{\sigma}_1^2} + \frac{\sigma_2^2}{\bar{\sigma}_2^2} - \left(\frac{1}{\bar{\sigma}_1^2} + \frac{1}{\bar{\sigma}_2^2} - \frac{1}{\bar{\sigma}_3^2}\right)\sigma_1\sigma_2 + \frac{\tau_{12}^2}{\bar{\tau}_{12}^2} = 1,$$
(2)

где  $\bar{\sigma}_1, \bar{\sigma}_2, \bar{\sigma}_3, \bar{\tau}_{12}$  – критические значения напряжений, определяемые экспериментально.

Этот критерий содержит только квадраты напряжений и дает одинаковый прогноз для растяжения и сжатия:

$$\overline{\sigma}_{x} = \left[\frac{\cos^{4}\phi}{\overline{\sigma}_{1}^{2}} + \frac{\sin^{4}\phi}{\overline{\sigma}_{2}^{2}} + \left(\frac{4}{\overline{\sigma}_{45^{\circ}}^{2}} - \frac{1}{\overline{\sigma}_{1}^{2}} - \frac{1}{\overline{\sigma}_{2}^{2}}\right)\cos^{2}\phi\sin^{2}\phi\right]^{-\frac{1}{2}}.$$
(3)

Для ортотропного материала в плоском напряженном состоянии критерий Цай-Ву записывается таким образом [3]:

$$F_1\sigma_1 + F_2\sigma_2 + F_{11}\sigma_1^2 + F_{22}\sigma_2^2 + F_{12}\sigma_1\sigma_2 + F_{66}\tau_{12}^2 = 1,$$
(4)

где

$$F_{1} = \frac{1}{\bar{\sigma}_{1t}} - \frac{1}{\bar{\sigma}_{1c}}, \qquad F_{2} = \frac{1}{\bar{\sigma}_{2t}} - \frac{1}{\bar{\sigma}_{2c}}, \qquad F_{11} = \frac{1}{\bar{\sigma}_{1t}\bar{\sigma}_{1c}},$$

$$F_{22} = \frac{1}{\bar{\sigma}_{2t}\bar{\sigma}_{2c}}, \qquad F_{12} = -2\sqrt{F_{11}F_{22}}, \qquad F_{66} = \frac{1}{\bar{\tau}_{12}^{2}}.$$
(5)

В (5) индекс t соответствует растяжению, а индекс с – сжатию. На основе критерия Цай-Ву получены две зависимости предельного напряжение от угла ф между приложенной нагрузкой и нитью основы:

$$\overline{\sigma}_{xc} = \frac{-(F_1 cos^2 \phi + F_2 sin^2 \phi) - \sqrt{(F_1 cos^2 \phi + F_2 sin^2 \phi)^2 + 4(F_{11} cos^4 \phi + F_{22} sin^4 \phi + (2F_{12} + F_{66})cos^2 \phi sin^2 \phi)}{2(F_{11} cos^4 \phi + F_{22} sin^4 \phi + (2F_{12} + F_{66})cos^2 \phi sin^2 \phi)}$$

(6)

$$\overline{\sigma}_{xt} = \frac{-(F_1 cos^2 \phi + F_2 sin^2 \phi) - \sqrt{F_1 cos^2 \phi + F_2 sin^2 \phi^2 + 4(F_{11} cos^4 \phi + F_{22} sin^4 \phi + (2F_{12} + F_{66}) cos^2 \phi sin^2 \phi)}{2(F_{11} cos^4 \phi + F_{22} sin^4 \phi + (2F_{12} + F_{66}) cos^2 \phi sin^2 \phi)}$$

Критерий Захарова для ортотропного материала в плоском напряженном состоянии имеет вид [4]:

$$\sigma_1^2 + A\sigma_2^2 + B\sigma_1\sigma_2 + C\sigma_1 + D\sigma_2 + E = 0,$$
 (8)

где

$$A = \frac{\bar{\sigma}_{1t}\bar{\sigma}_{1c}}{\bar{\sigma}_{2t}\bar{\sigma}_{2c}}, \qquad B = -1 - A - 4\left(\frac{E + \frac{\bar{\sigma}_{45^{\circ}}}{2}(C+D)}{\bar{\sigma}_{45^{\circ}}^2}\right), \qquad C = (\bar{\sigma}_{1c} - \bar{\sigma}_{1t}),$$

$$D = A(\bar{\sigma}_{2c} - \bar{\sigma}_{2t}), \qquad E = -\bar{\sigma}_{1t}\bar{\sigma}_{1c}.$$
(9)

На основе критерия Захарова также получены различные прогнозы для растяжения и сжатия:

$$\overline{\sigma}_{xc} = \frac{-(B\cos^2\phi + C\sin^2\phi) - \sqrt{(B\cos^2\phi + C\sin^2\phi)^2 - 4(\cos^4\phi + A\sin^4\phi + D\cos^2\phi\sin^2\phi)E}}{2(\cos^4\phi + A\sin^4\phi + D\cos^2\phi\sin^2\phi)}$$
(10)  
$$\overline{\sigma}_{xt} = \frac{-(B\cos^2\phi + C\sin^2\phi) + \sqrt{(B\cos^2\phi + C\sin^2\phi)^2 - 4(\cos^4\phi + A\sin^4\phi + D\cos^2\phi\sin^2\phi)E}}{2(\cos^4\phi + A\sin^4\phi + D\cos^2\phi\sin^2\phi)}$$

Проводились эксперименты на растяжение и сжатие образцов из стекловолоконного композиционного материала под углами 0°, 15°, 30°, 45°, 60°, 75° и 90° к основе. Испытания проводились на машине Instron 8801 на статическое растяжение и статическое сжатие

согласно действующим стандартам испытаний на прочность. Испытывались призматические образцы прямоугольной формы сечения. Размеры образцов на растяжение: 250×25×10 мм, размеры образцов на сжатие: 140×25×10 мм [5]. Экспериментально получены значения предельных напряжений при различных видах нагружения.

Результаты эксперимента сопоставлены с прогнозами (3), (6) и (10) (см. рис. 2).





различных критериев

В табл. 1 приведено среднеквадратическое отклонение  $\delta$  от эксперимента, рассчитанное для каждого критерия при определении  $\overline{\sigma}_x$ . Наилучшее совпадение с экспериментом показал критерий Цай-Ву.

Табл. 1. Сравнение прогнозов различных критериев для  $\overline{\sigma}_x$  с результатами экспериментов.

Критерий	Критерий Хилла	Критерий Цай-Ву	Критерий Захарова
б, МПа	6.75	4.40	6.57

Методом КЭ гомогенизации получены 9 упругих констант композита (табл. 2).

Табл. 2. Упругие константы композита, полученные методом КЭ гомогенизации

Величина	Значение	Величина	Значение	Величина	Значение
<i>E</i> <sub>11</sub>	8417 МПа	$v_{12}$	0.160	<i>G</i> <sub>12</sub>	2356 МПа
E <sub>22</sub>	5511 МПа	$\nu_{13}$	0.217	G <sub>13</sub>	1764 МПа
<i>E</i> <sub>33</sub>	4257МПа	$v_{23}$	0.225	G <sub>23</sub>	1797 МПа

Полученные в работе результаты использованы в расчетах на прочность и жесткость подземного водовода из данного композиционного материала.

Рассмотренные критерии прочности, а также методы определения упругих констант, могут быть применены для анализа упругих и прочностных свойств аналогичных композиционных материалов и при расчете конструкций, выполненных из композиционных материалов.

### ЛИТЕРАТУРА:

1. ТУ 6-48-53-90. Ткани стеклянные марок Т-23 и Т-23Р. Технические условия.

2. Hill R. The mathematical theory of plasticity. Oxford University Press, 1950. – 392 c.

3. Кристенсен Р.М. Введение в механику композитов: Пер. с англ. – М.: Мир, 1982. – 336 с.

4. Гольденблат И.И., Копнов В.А. Критерии прочности и пластичности конструкционных материалов. – М.: Машиностроение, 1968. – 192 с.

5. ГОСТ 25.601 – 80. Расчеты и испытания на прочность. Методы механических испытаний композиционных материалов с полимерной матрицей (композитов). Метод испытания плоских образцов при нормальной, повышенной и пониженной температурах.

# УДК 534.143

# И.А. Попов, А.В. Лукин, Д.Ю. Скубов, Л.В. Штукин (Санкт-Петербургский государственный политехнический университет)

# ОХЛАЖДЕНИЕ ПРОВОДНИКА ПЕРЕМЕННОГО ТОКА ПОСРЕДСТВОМ ПОВОРОТНЫХ КОЛЕБАНИЙ ПРОВОДЯЩЕЙ РАМКИ

Целью данной работы является исследование создания автономной системы охлаждения высокоамперного проводника с переменным электрическим током. Система должна быть автономна в том смысле, что ни возбуждение колебаний, ни перекачка воздуха не должны требовать дополнительных затрат в виде источников питания или двигательных устройств.

Для аналитической оценки рассматривается токопроводящий провод, несущий высокоамперный переменный ток. Сам проводник представлен в виде бесконечно длинного медного цилиндра. Плоскость присоединенной рамки «сонаправлена» аксиальной оси провода с током. Пластина рамки широкая и достаточно длинная для создания мощного «обдувающего» воздушного потока. Пластина подвешена на вертикальных упругих нитях, присоединенных к серединам верхней и нижней (или левой и правой) сторон пластины. По «периметру» пластины размещена проводящая (медная) рамка, охватывающая внутреннюю пластину из изолятора. При протекании переменного тока по прямолинейному проводу создается переменный магнитный поток, пересекающий проводящий контур рамки. Переменность потока (50 Гц) вызывает внутреннюю ЭДС в рамке, что приводит к появлению переменного индуцированного тока в ней, величина которого довольно сложным образом зависит от времени, т.к. при угловом повороте рамки меняется сам поток и наводимая ЭДС. Поперечное сечение провода и прямоугольной рамки с проводящим контуром представлено на рис. 1.



Рис. 1. Поперечное сечение провода и прямоугольной рамки с проводящим контуром

Из-за взаимодействия наводимых в рамке токов индукции внешнего поля И (в противоположных сторонах рамки наводимые противоположно токи направлены И периодически меняются за счет изменения магнитного потока) возникают пондеромоторные силы  $F_{-}$ ,  $F_{+}$  и, следовательно, крутящий момент.

В строгой постановке как поток через рамку, так и возникающие в ней токи (и, в результате, крутящий момент) зависят не только напрямую от времени, но и от угла поворота. Тем самым, задачи нахождения механических и электрических колебаний подвешенной рамки оказываются взаимосвязаны.

В общем случае эти задачи нужно решать совместно, как систему двух обыкновенных дифференциальных уравнений с отысканием максимально возможной амплитуды крутильных колебаний, используя возможные изменения параметров, в том числе и настройку на резонансные колебания.

Для получения периодического процесса, необходимо учесть нелинейность взаимосвязанных уравнений динамики электромеханических процессов. Для подбора параметров, обеспечивающих возможность параметрических крутильных колебаний, вместо рамки с проводящим контуром можно взять плоскую, тонкую проводящую пластину, например, из алюминия.

Полный ток, текущий по цилиндру:

$$I_0(t) = I_0 \sin \nu t. \tag{1}$$

Напряженность магнитного поля:

$$\underline{H} = H_{\varphi} \underline{e}_{\varphi} = \frac{I_0(t)}{2\pi r} \underline{e}_{\varphi}.$$
(2)

Пондеромоторные силы на единицу длины провода, определяются по закону Ампера:  $d\underline{F} = \mu\mu_0 i \ d\underline{l} \times \underline{H}.$  (3)

Возникающая индуцированная ЭДС, определяется изменением потока индукции через рамку [5]:

$$E = -\frac{\partial \Phi}{\partial t}.$$
(4)

А сам поток индукции внешнего магнитного поля, пересекающей рамку:

$$\Phi = \int_{(S)} \underline{B} \cdot d\underline{S} = \mu \mu_0 l \int_{(S)} \underline{H} \cdot \underline{n} ds$$
<sup>(5)</sup>

При интегрировании воспользуемся представлением напряженности через магнитный потенциал:

$$\underline{H} = rot\underline{A}, \qquad \underline{A} = \{A_r \ A_{\varphi} \ A_z\} \rightarrow \qquad \underline{A} = \{0 \ 0 \ -\frac{l_0(t)}{2\pi} lnr\}^T$$

Перепишем равенство (5), используя теорему Стокса [1]

$$\Phi = \int_{(S)} rot \underline{A} \cdot \underline{n} dS = \oint_{(l)} \underline{A} \cdot d\underline{l} = -\mu \mu_0 l \frac{l_0}{2\pi} sin vt \ln \left[ \frac{r_+(\varphi)}{r_-(\varphi)} \right]$$
(6)

Для определения крутящего момента нужно найти силы и плечи сил, действующих на «вертикальные» длинные провода рамки.

Электромагнитные силы, действующие на противоположные вертикальные провода:

$$\underline{F}_{-} = \mu \mu_0 i \, l(H_{\varphi-}) \underline{e}_{r-} , \quad \underline{F}_{+} = -\mu \mu_0 i \, l(H_{\varphi+}) \, \underline{e}_{r+}, \tag{7}$$

где  $\underline{e}_{r-}$ ,  $\underline{e}_{r+}$  - радиальные орты в соответствующих точках

Выражение для крутящего момента принимает вид:

$$M = -\mu\mu_0 ilb\left(\frac{H_{\varphi^+}}{r_+} + \frac{H_{\varphi^-}}{r_-}\right)acos\varphi = \mu\mu_0 i \ I_0 sinvt \ l\frac{ab}{2\pi}\left(\frac{1}{r_+^2} + \frac{1}{r_-^2}\right)cos\varphi,$$
(8)

или, окончательно:

$$M = -\mu\mu_0 \frac{abl(a^2+b^2)}{\pi \left[(a^2+b^2)^2 - 4a^2b^2\sin^2\varphi\right]} I_0 i \sin \nu t \cos\varphi.$$
(9)

Для рамки длины *l* момент инерции запишется следующим образом:

$$J = \left(\frac{4}{3}\rho_1 b^3 \delta + 2\rho_1 b^2 \delta l + \frac{2}{3}\rho_2 b^3 l\right)h,$$
(10)

где  $\rho_i$ , i = 1, 2 – объемные плотности материалов рамки. Проводящая часть (медь или аллюминий) с плотностью  $\rho_1$ , непроводящая плотности  $\rho_2$ , h - толщина рамки.

Система уравнений динамики электромеханических процессов [4] в данном случае имеет вид

$$\begin{cases} J\ddot{\varphi} + \beta\dot{\varphi} + c\varphi = -\mu\mu_0 \frac{i \ l_0 \sin \nu t \ abl \ cos\varphi \ [a^2 + b^2]}{\pi \ [(a^2 + b^2)^2 - 4a^2b^2 \sin^2\varphi]}, \\ L(i)' + ri = -\mu_0 \mu \frac{l_0 l}{2\pi} \left\{ \nu \cos \nu t \ln \left[ \frac{r_+(\varphi)}{r_-(\varphi)} \right] + \sin \nu t \ \frac{dr_+}{d\varphi} r_- - \frac{dr_-}{d\varphi} r_+}{r_+ r_-} \dot{\varphi} \right\}, \end{cases}$$
(11)

где c – жесткость опор рамки при ее повороте,  $\beta$  – коэффициент вязкого трения, L – самоиндукция рамки.

Из-за взаимодействия наводимых в рамке токов и напряженности внешнего поля (напряженности в противоположных сторонах рамки токи противоположно направлены и периодически меняются за счет изменения магнитного потока) возникают пондеромоторные силы и, следовательно, крутящий момент. Если предположить, что токи в боковых сторонах сечения меняются гармоническим образом, но с обязательным сдвигом по фазе относительно переменной магнитной индукции, то можно прийти к выводу, что крутящий момент в стационарном режиме меняется в сумме с частотами как 50, так и 100 Гц.

Для определения вносимых параметров, в первую очередь, жесткостей подвесов проводящей рамки, выбор которых может обеспечить резонансные условия поворотных колебаний плоской рамки, рассмотрим решение линеаризованной задачи в предположении малого угла отклонения  $\varphi$ .

Произведем «обезразмеривание» системы (11), введем обозначения

$$\tau = \nu t \rightarrow \frac{\partial}{\partial t} = \nu \frac{\partial}{\partial \tau}, \quad \tilde{\iota} = \frac{i}{I_0}, \quad \frac{c}{J} = \lambda^2, \quad \alpha = \frac{2ab}{a^2 + b^2},$$
$$\frac{\beta}{I\nu} = 2n, \quad r = \frac{R}{L\nu}, \quad \chi = \mu \mu_0 \frac{l}{4\pi L}, \quad \gamma = \mu \mu_0 \frac{lI_0^2}{2\pi I \nu^2}$$

Система (11) запишется в виде:

$$\begin{cases} \varphi'' + 2n\varphi' + \frac{\lambda^2}{\nu^2}\varphi = -\gamma \tilde{\imath} \sin \tau \frac{\alpha \cos \varphi}{1 - \alpha^2 \sin^2 \varphi} \\ \tilde{\imath}' + r\tilde{\imath} = -\chi \left[ \nu \cos \tau \ln \left( 1 + \frac{2\alpha \sin \varphi}{1 - \alpha \sin \varphi} \right) + \sin \tau \cos \varphi \frac{\alpha}{\sqrt{1 - \alpha^2 \sin^2 \varphi}} \varphi' \right] \end{cases}$$
(12)

В результате расчета вынужденных колебаний описываемых системой нелинейных дифференциальных уравнений с периодическими меняющимися коэффициентами (12) получены периодические поворотные колебания проводящей рамки с частотой равной частоте переменного тока. Кроме того, на приведенной временной зависимости угла поворота рамки (рис. 2) наблюдаются быстро затухающие свободные колебания как при переходе рамки через нейтральное (нулевое) положение, так и при максимальных отклонениях. Колебания индуцируемого тока согласно зависимости, представленной на



рис. 3, носят характер релаксационных [2,3].

Для возбуждения параметрических колебаний достаточно попасть в зону неустойчивости равновесного положения рамки. Зона неустойчивости равновесия может быть определена по параметрам системы дифференциальных

уравнений динамики. Для выхода на стационарный периодический режим в зоне его неустойчивости учитывается нелинейность дифференциальных уравнений.

Окончательное решение этой инженерной задачи нуждается в серии физических экспериментов.

## ЛИТЕРАТУРА:

1. А.П. Аксенов Математика. Математический анализ. Ч. 2 – СПб: Изд. Политехн. ун-та, 2005 – 759 с.

2. А.А. Андронов, А.А. Хайкин, С.Э. Витт. Теория колебаний. – М.: Главное издательство физикоматематической литературы, 1959, 915 с.

 Е.Ф. Мищенко, Ю.С. Колесов, А.Ю. Колесов, Н.Х. Розов. Периодические движения и бифуркационные процессы в сингулярно возмущенных системах. – М.: Физматлит, 1995. – 336 с.
 Ю.И. Неймарк, Н.А. Фуфаев. Динамика неголономных систем - М.: Наука, Физматлит, 1959, 915 с.
 И.Е. Тамм. Основы теории электричества — М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1989 – 504 с.

#### УДК 622.274.36, 624.131

# Г.Д. Рукавишников, А.С. Семенов (Санкт-Петербургский государственный политехнический университет), С.А. Неверов (Институт горного дела СО РАН)

# АНАЛИЗ НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННОГО СОСТОЯНИЯ ВЫРАБОТОК ШЕРЕГЕШСКОГО ЖЕЛЕЗОРУДНОГО МЕСТОРОЖДЕНИЯ С УЧЕТОМ ПЛАСТИЧЕСКИХ СВОЙСТВ ПОРОД

Одной из основных проблем геомеханики является контроль напряжённодеформированного состояния (НДС) подземных выработок. Этот контроль необходим для предотвращения внезапных обрушений пород и горных ударов, ведущих к самым опасным последствиям, таким как уничтожение дорогостоящей горнодобывающей техники и гибель рабочих. При контроле НДС, важным является расчет поля напряжений вокруг рабочих выработок. В настоящее время при решении задач об НДС породных массивов наибольшее распространение получили численные методы и особенно метод конечных элементов.

В данной работе представлен расчёт поля напряжений вокруг выработок очистного горизонта Шерегешского железорудного месторождения на глубине работ 600 м, с которой месторождение отнесено к опасным по горным ударам. В настоящее время отработка месторождения ведётся на глубине 450 м, а на глубине 600 м ведутся подготовительные работы. НДС массива горных пород исследуемого геологического района характеризуется высокими тектоническими полями напряжений [1], где преобладающими являются горизонтальные составляющие, в 1,5-3,0 раза превышающие вертикальные  $\gamma H$  (табл. 1).

Напряжения	Глубина горных работ, м			
	300	600	830	
Вертикальные ( $\sigma_v$ ), МПа	γН	γH	γH	
Горизонтальные вкрест простирания ( $\sigma_{h \min}$ ),	14	27	31	
МПа				
Горизонтальные по простиранию ( $\sigma_{\rm H max}$ ), МПа	21	39	43	

Табл. 1. Исходные поля напряжений в массиве, действующие в районе месторождения

Была создана подробная геометрическая модель этажной системы разработки Шерегешского месторождения в стадии отработки очистного горизонта (рис. 1), в соответствии с чертежом-схемой системы разработки Шерегешского рудника [2]. На рис. 1а представлена твердотельная модель геометрии выработок (туннелей) очистного горизонта. На рис. 1б изображен вид сверху на очистной горизонт; красной линией выделен фрагмент одного очистного блока, в котором распределение напряжений представляло наибольший интерес, так как именно в нём на данной стадии отработки будут находиться люди и дорогостоящая техника.

После получения результатов, с использованием модели упругого, линейнодеформируемого поведения пород [3], было отмечено, что в некоторых участках исследуемой геотехнологии напряжения превышают известные из эксперимента пределы прочности пород на одноосное сжатие и растяжение.



Рис. 1. Геометрическая модель очистного горизонта

Конечно-элементное решение краевой задачи с учетом пластических свойств горных пород, было получено с использованием критерия Друкера-Прагера с линейной огибающей конуса текучести и неассоциированным законом пластического течения. Граничные условия были идентичны граничным условиям упругой задачи. В качестве характеристик материала помимо упругих модулей, задавались значения коэффициента сцепления и угла внутреннего трения, взятые из экспериментальных данных (табл. 2), а так же значение угла дилатансии, который был принят равным 65° [4].

табл. 2. Механические своиства пород, используемые в расчетах						
	Плотность,	Коэффициент	Модуль Юнга, ГПа	Сцепление,	Угол внут-	
	$\kappa\Gamma/M^3$	Пуассона		МПа	реннего тре-	
					ния, град	
Породы	3800	0.27	72	20	35	

Табл. 2. Механические свойства пород, используемые в расчетах

Критерий пластичности Друкера-Прагера [5] применим к материалам, чувствительным к давлению (какими и являются горные породы). В терминах главных напряжений критерий Друкера-Прагера может быть записан следующим образом:

$$\sqrt{\frac{1}{2} \left[ \left( \sigma_{1} - \sigma_{2} \right)^{2} + \left( \sigma_{2} - \sigma_{3} \right)^{2} + \left( \sigma_{3} - \sigma_{1} \right)^{2} \right]} + \alpha \left( \sigma_{1} + \sigma_{2} + \sigma_{3} \right) = k ,$$

где  $\alpha$  и k – коэффициенты, выражающиеся через сцепление и угол внутреннего трения материала следующим образом:

$$\alpha = \frac{2\sin\varphi}{(3-\sin\varphi)}, \qquad k = \frac{6C\cos\varphi}{(3-\sin\varphi)},$$

где С - сцепление в материале [МПа], а  $\varphi$  - угол внутреннего трения, соответственно.



Рис. 2. Зоны пластической деформации пород

На рис. 2 представлены результаты расчета для вертикального разреза исследуемого блока по месту сочленения основных выработок (рис. 2а) и горизонтального разреза исследуемого блока по своду туннеля (рис. 2б). На разрезах показаны области пластической деформации пород.

По картине распределения зон пластической деформации можно судить об устойчивости массива. На рис. 2а отчетливо видна зона пластичности, простирающаяся между камерой ВДПУ (на рисунке цифра 1) и пространством обрушенных пород (на рисунке цифра 3). В этой зоне вероятно обрушение пород. На рис. 26 стоит отметить, что зоны пластичности охватывают все участки примыкания камер ВДПУ к откаточному орту (на рисунке цифра 2), и частично, пространство между ними. Это говорит о неустойчивости свода откаточного орта, и о возможности его обрушения. Все это показывает, что геотехнология этажного обрушения при принятых технологических параметрах в условиях сложного геодинамического поля напряжений Шерегешского месторождения и глубины разработки 600 и более метров становится небезопасной. Зоны проявления пластических деформаций требуют значительного укрепления.



Рис. 3. Распределение поля минимального главного напряжения

На рис. 3 представлена картина распределения минимального главного напряжения по результатам упругого (рис. 3а) и пластического (рис. 3б) расчетов. Хорошо видно, что в

случае учета пластических свойств, напряжения в участках примыкания камер ВДПУ к откаточному орту ниже.

Подводя итоги работы, следует отметить, что учет пластических свойств пород оказывает заметное влияние на картину распределений полей НДС в массиве, и, безусловно, позволяет получить результаты расчета более близкие к реальности. В действительности, горные породы имеют довольно сложную кривую деформирования, и линейное упругое приближение не всегда гарантирует приемлемую точность. В целях дальнейшего повышения точности расчетов НДС массива горных пород необходимо учитывать также дилатансию, нелинейное упрочнение и нелинейность огибающей конуса текучести.

### ЛИТЕРАТУРА:

1. Шрепп Б.В. Проблемы разработки месторождений Горной Шории и Хакасии на больших глубинах – М.: ИПКОН АН СССР, 1979, С. 200 – 213.

2. Гайдин А.П. Шерегешский рудник: Технический прогресс, вопросы реконструкции и наращивания объёмов производства в новых экономических условиях // Новосибирск: ЦЭРИС, 2002.

3. Рукавишников Г.Д., Неверов С.А., Неверов А.А. Оценка устойчивости горизонта выпуска руды при системе разработки этажного обрушения // Всероссийская конференция «Горняцкая смена - 2013», сборник докладов, ИГД СО РАН 2013.

4. Kwasniewski M., Rodríguez-Oitabén P. Study on the dilatancy angle of rocks in the pre-failure domain // Harmonising Rock Engineering and the Environment: 681-686, 2012.

5. Семенов А.С. Вычислительные методы в теории пластичности. Изд-во СПбГПУ, 2008.

УДК 539.376

О.М. Рыбакова, А.С. Семенов, С.Г. Семенов (Санкт-Петербургский государственный политехнический университет)

# АНАЛИЗ ВЛИЯНИЯ КРИСТАЛЛОГРАФИЧЕСКОЙ ОРИЕНТАЦИИ НА ПОЛЗУЧЕСТЬ НИКЕЛЕВОГО ЖАРОПРОЧНОГО МОНОКРИСТАЛЛИЧЕСКОГО СПЛАВА ВЖМ-4

Жаропрочные монокристаллические материалы [1, 2] в настоящее время применяются для изготовления деталей газотурбинных двигателей, в частности — рабочих лопаток. В них при высокой температуре под действием напряжений наблюдается ползучесть, которая может служить причиной изменения частотных характеристик, появления значительных остаточных деформаций и даже поломок лопаток. Чтобы избежать подобных ситуаций, необходимо проводить расчеты с использованием адекватных моделей неупругого деформирования монокристаллов с учетом их анизотропии. Целью данной работы является исследование влияния кристаллографической ориентации на ползучесть монокристаллических сплавов на никелевой основе.

кафедре "Сопротивление материалов" СПбГПУ была проведена серия Ha экспериментов исследованию ПО свойств ползучести никелевого жаропрочного монокристаллического сплава ВЖМ-4, разработанного в ВИАМ. В ходе исследований были получены экспериментальные кривые зависимости деформации ползучести от времени нагружения (рис. 1).

При проведении анализа влияния кристаллографической ориентации на ползучесть монокристаллов использовались физические модели неупругого деформирования, учитывающие, что деформация ползучести в монокристаллах происходит в определенных плоскостях и направлениях скольжения. Совокупность указанной плоскости и направления называется системой скольжения. Для рассматриваемого класса монокристалллов с

кубической сингонией насчитывается 12 октаэдрических систем скольжения вида {111}<011>.



Рис. 1. Кривые ползучести сплава ВЖМ-4 для ориентации <001>

При формулировке уравнений, связывающих деформации ползучести со временем при постоянном напряжении, использовался закон ползучести Нортона [3-5]:

$$\boldsymbol{\varepsilon}^{\text{creep}} = \sum_{\alpha=1}^{12} \mathbf{A} (\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{P}^{\alpha})^{n} \mathbf{t}^{m} \mathbf{P}^{\alpha} - \text{для I (неустановившейся) стадии,}$$
(1)

$$\varepsilon^{\text{creep}} = \sum_{\alpha=1}^{12} \mathbf{A} (\mathbf{\sigma} \cdot \mathbf{P}^{\alpha})^{n} \mathbf{t} \mathbf{P}^{\alpha} -$$
для II (установившейся) стадии, (2)

где  $\mathbf{P}^{\alpha}$  - тензор Шмида, определяемый нормалью к плоскости скольжения и направлением скольжения, A и n - константы материала. В проведенных экспериментах нагружение происходило только вдоль оси образца (оси Z). Тензор напряжений в лабораторной системе координат XYZ имеет вид:  $\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{k} \mathbf{k} \boldsymbol{\sigma}_{zz}$ , поэтому соотношения (1) и (2) упрощаются:

$$\varepsilon_{zz}^{\text{creep}} = \sum_{\alpha=1}^{12} A(\sigma_{zz} P_{zz}^{\alpha})^n t^m P_{zz}^{\alpha}$$
(3)

$$\varepsilon_{zz}^{\text{creep}} = \sum_{\alpha=1}^{12} A(\sigma_{zz} P_{zz}^{\alpha})^n t P_{zz}^{\alpha}$$
(4)

Для изучения влияния аксиальной ориентации на кривые ползучести были рассмотрены повороты тензора Шмида относительно оси Х. Координаты тензора Шмида определялись на основе равенства

$$\mathbf{P}^{\alpha} = \mathbf{R} \cdot \mathbf{P}^{\alpha} \cdot \mathbf{R}^{\mathrm{T}},\tag{5}$$

где **Р**<sup>*a*'</sup>, **Р**<sup>*a*</sup> - тензоры Шмида в кристаллографической и лабораторной системе координат соответственно, β - угол поворота кристаллографической оси <001> относительно оси

образца ОХ, **R** - тензор поворота, задаваемый матрицей  $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\beta & \sin\beta \\ 0 & -\sin\beta & \cos\beta \end{pmatrix}$ 

8

В ходе работы для определения зависимости деформации ползучести от аксиальной ориентации образца было необходимо, во-первых, определить константы модели материала, и, во-вторых, связать значения тензора Шмида для локальной (кристаллографической) и глобальной (лабораторной) систем координат.

На рис. 2 представлена зависимость деформации ползучести от времени для различных углов отклонения аксиальной ориентации образца (при нагрузке в 250 МПа), полученная для двухстадийной аппроксимации кривой ползучести с использованием уравнения (3) (A=6.75 $\odot 10^{-17}$  $\odot$  1/(с МПа<sup>n</sup>), n=6.35, m=0.395) на начальном участке. На стадии установившейся ползучести - соотношения (4) (A=2.03 $\odot 10^{-22}$  $\odot 1/(с МПа<sup>n</sup>)$ , n=8.55). Следует отметить, что с ростом угла отклонения влияние кристаллографической ориентации ослабевает. На рис. 3 построены кривые зависимости деформации ползучести от угла поворота  $\beta$  при времени выдержки при ползучести t = 1час. Эти кривые представлены для трех значений напряжения — 250, 280 и 320 МПа. Из графика видно, что при отклонении аксиальной ориентации на 20° деформация ползучести увеличивается более чем в два раза.





Рис. 2. Расчетные кривые ползучести при различных кристаллографических ориентациях

Рис. 3. Зависимость кривых ползучести от угла отклонения от аксиальной ориентации

На рис. 4 представлены зависимости деформации ползучести от времени для различных углов отклонения аксиальной ориентации образца, полученные с использованием уравнения (3) во всем временном диапазоне (A= $2.81 \circ 10^{-17} \circ 1/(c \text{ MTa}^n)$ , n=6.52, m=0.662).



Рис. 4. Расчетные кривые ползучести при различных кристаллографических ориентациях



Рис. 5. Зависимость кривых ползучести от угла отклонения от аксиальной ориентации

Сравнение результатов расчета кривых ползучести монокристалла с раздельным описанием стадий с использованием уравнений (3) и (4) (см. рис. 2 и 3) и с использованием единой аппроксимации (3) во всем диапазоне времен без разделения на стадии (см. рис. 4 и 5) показало незначительное отличие.

Полученные в данном исследовании результаты многовариантных вычислительных экспериментов позволили установить, что аксиальная ориентация, в отличие от азимутальной ориентации, оказывает заметное влияние на ползучесть монокристаллического сплава ВЖМ-4, что указывает необходимость тщательного контроля аксиальной ориентации монокристалла при изготовлении образцов и лопаток. В дальнейшем планируется оценить влияние аксиальной ориентации на явление пластичности монокристаллов, и сравнить полученные результаты.

#### ЛИТЕРАТУРА:

1. Р.Е. Шалин, И.Л. Светлов, Е.Б. Качанов и др. Монокристаллы никелевых жаропрочных сплавов – М.: Машиностроение, 1997. – 336 с.

2. Л.Б. Гецов, В.Е. Михайлов, А.С. Семенов, В.В. Кривоносова, Ю.А. Ножинский, Б.С. Блинник, Л.А. Магераммова. Расчетное определение ресурса рабочих и направляющих лопаток ГТУ. Часть 2. Монокристаллические материалы. Газотурбинные технологии. 2011, №8, С. 18 – 25.

3. А.С. Семенов, С.Г. Семенов, Л.Б. Гецов, Б.Е. Мельников. Моделирование процессов неупругого деформирования и разрушения монокристаллических лопаток ГТУ, Вестник гражданских инженеров, 2014 (в печати).

4. Л.Б. Гецов, А.С. Семенов, А.И. Рыбников. Сопротивление термической усталости жаропрочных сплавов, Теплоэнергетика, 2009, № 5. С. 51 – 58.

5. L. Getsov, A. Semenov, A. Staroselsky. A failure criterion for single-crystal superalloys during thermocyclic loading. Materiali in Tehnologije, 2008, T. 42. № 1. C. 3 – 12.

УДК 662.642:621.926.7

Д.Д. Федоров, Л.М. Яковис (Санкт-Петербургский государственный политехнический университет)

# ИСПОЛЬЗОВАНИЕ ДИНАМИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ С ЗАПАЗДЫВАНИЕМ ДЛЯ УПРАВЛЕНИЯ НЕПРЕРЫВНЫМИ ТЕХНОЛОГИЧЕСКИМИ ПРОЦЕССАМИ

Динамические модели многих управляемых технологических процессов (TП) содержат запаздывание, имеющее либо транспортную, либо информационную природу [1]. В системах регулирования с обратной связью в условиях неконтролируемых возмущений регулирующие воздействия вырабатываются по данным контроля отклонений характеристик системы от заданных значений. Наличие запаздывания в системе затрудняет регулирование процессов из-за более или менее длительного отсутствия реакции объекта на управляющее воздействие.

Сложности управления объектами с запаздыванием привлекают к тематике управления такими объектами многочисленных исследователей. Вместе с тем, в практике автоматизированного управления ТП наметился значительный разрыв между мощными методами современной теории управления и реально применяемыми достаточно примитивными регуляторами. Задача работы состоит в выявлении объективных причин этого разрыва и анализе некоторых методов его сокращения. Более конкретно, необходимо проанализировать известные методы синтеза алгоритмов управления, использующие идею «устранения» запаздывания из моделей процессов и сведения задач управления к стандартным схемам современной теории. Следует также проанализировать на конкретных примерах альтернативную тактику введения запаздывания в динамические модели, изначально не содержащие запаздывания. Идея широко известного упредителя Смита сводится к «устранению» запаздывания благодаря включению в контур управления динамической модели с запаздыванием, позволяющей рассчитать будущую реакцию объекта на управляющие воздействия. Его весьма ограниченное использование на практике можно объяснить высокой чувствительностью к неточностям используемой динамической модели и сложностью обобщения на многомерный случай [2].

Наиболее мощные результаты современной теории управления связаны с методом пространства состояний, позволяющим привести разнообразные системы к стандартной форме векторно-матричных дифференциальных уравнений первого порядка, а затем синтезировать алгоритмы управления, решая хорошо разработанными численными методами матричное уравнение Риккати относительно коэффициентов усиления регулятора с обратной связью. Поскольку методы пространства состояний непосредственно не применимы к объектам с запаздыванием, то возникает стремление приближенной замены моделей с запаздыванием динамическими моделями более высокого порядка без запаздывания с последующим применением метода пространства состояний. Математической основой подобного подхода может служить соотношение

$$e^{-p\tau} \approx \frac{1}{\left(\frac{\tau}{n}p+1\right)^n},$$

приближенно заменяющее передаточную функцию звена запаздывания передаточной функцией последовательного соединения *n* инерционных звеньев первого порядка. К сожалению, получаемое таким образом формальное решение трудно осуществимо на практике. Дело в том, что получаемый в расширенном пространстве состояний регулятор при его реализации приводит к необходимости использовать в качестве характеристик состояния производные высоких порядков (вплоть до *n*) от выходной переменной исходного объекта управления. При наличии характерных для многих ТП измерительных шумов результаты расчета производных теряют достоверность и практически не могут использоваться для управления. Отсюда становится понятным стремление практиков применять простые законы регулирования типа пропорционально-интегрального (ПИ) или пропорционально-интегрально-дифференциального (ПИД), реализация которых не требует вычисления производных высокого порядка.

Приводя к отрицательным практическим результатам при «лобовом» применении, приемы «устранения» запаздывания могут оказаться весьма полезны при их грамотном использовании. Рассмотрим типичную задачу стабилизации выходной переменной y(t) на заданном уровне  $y^*(t)$  для объекта с передаточной функцией H(p) с помощью регулятора с передаточной функцией W(p). Зависимость выходной переменной y(t) от задающего воздействия  $y^*(t)$  и приведенного к выходу возмущающего воздействия n(t) запишется с использованием передаточной функции замкнутой системы в виде:

$$y = H_{3}(p)y^{*} + (1 - H_{3}(p))n,$$

где

$$H_{_{3}}(p) = \frac{H(p)W(p)}{1 + H(p)W(p)}.$$
(1)

Рассмотрим объект управления, представляющий собой последовательное соединение двух инерционных звеньев и звена запаздывания

$$H(p) = \frac{Ke^{-p\tau}}{(T_1p+1)(T_2p+1)}.$$
(2)

Чтобы осуществить аналитический синтез просто реализуемого закона управления, «избавимся» от запаздывания с помощью аппроксимации  $e^{-p\tau} \approx 1 - p\tau$ . Полученный таким образом объект управления

$$H(p) = \frac{K(1 - p\tau)}{(T_1 p + 1)(T_2 p + 1)}$$
(3)

не содержит запаздывания, однако он является не минимально-фазовым, поскольку его передаточная функция имеет положительный корень в числителе.

Применим для синтеза регулятора метод динамической компенсации. В качестве эталонной передаточной функции замкнутой системы выберем фильтр Баттерворта второго порядка, обеспечивающий достаточно короткий переходный процесс при ступенчатых возмущениях n или ступенчатых изменениях задания  $y^*$  [3]. При этом необходимо учесть отмеченную особенность объекта управления, включив в эталонную передаточную функцию замкнутой системы неустойчивое звено  $1 - p\tau$ . В итоге задаем передаточную функцию замкнутой системы в виде

$$H_{3}(p) = (1 - p\tau) \left[ \left(\frac{p}{\omega}\right)^{2} + \sqrt{2} \left(\frac{p}{\omega}\right) + 1 \right]^{-1}, \tag{4}$$

где частота среза  $\omega$  является настраиваемым параметром фильтра Баттерворта.

Подставляя (3) и (4) в (1) и решая полученное уравнение относительно W(p), получим передаточную функцию регулятора в виде

$$W(p) = K_n (1 + K_u \frac{1}{p} + K_o p) \frac{1}{T_p p + 1}$$

где

$$K_{n} = \frac{T_{1} + T_{2}}{K\left(\frac{\sqrt{2}}{\omega} + \tau\right)}, \ K_{u} = \frac{1}{T_{1} + T_{2}}, \ K_{o} = \frac{T_{1}T_{2}}{T_{1} + T_{2}}, \ T_{p} = \frac{1}{\omega^{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{\omega} + \tau\right)}$$

Регулятор просто реализуется на практике, представляя собой последовательное соединение стандартного ПИД-регулятора со сглаживающим фильтром.

Для облегчения расчета настроек типовых регуляторов может служить и обратный по отношению к «устранению» запаздывания прием – аппроксимация передаточных функций высокого порядка без запаздывания передаточными функциями пониженного порядка с запаздыванием. Для иллюстрации рассмотрим ту же задачу стабилизации объекта (1) и аппроксимируем последовательность двух инерционных звеньев одним инерционным звеном с запаздыванием

$$H(p) = \frac{Ke^{-p\tau}}{(T_1p+1)(T_2p+1)} \approx \tilde{H}(p) = Ke^{-p\tau} \frac{e^{-p\tilde{\tau}}}{(\tilde{T}p+1)} = \frac{Ke^{-p(\tau+\tilde{\tau})}}{(\tilde{T}p+1)}.$$

Такая аппроксимация может быть выполнена стандартными средствами системы Matlab. Далее для полученного объекта  $\tilde{H}(p)$  по любой из известных методик могут быть рассчитаны параметры ПИ- или ПИД-регуляторов. Например, при использовании компенсационного метода настройки находятся по формулам [4]:

• для ПИ-регулятора

$$W(p) = K_n (1 + K_u \frac{1}{p}), \quad K_n = \frac{a\tilde{T}}{K(\tau + \tilde{\tau})}, \quad K_u = \frac{1}{\tilde{T}},$$

• для ПИД-регулятора

$$W(p) = K_n(1 + K_u \frac{1}{p} + K_o p), \ K_n = \frac{b\tilde{T} + c(\tau + \tilde{\tau})}{K(\tau + \tilde{\tau})}, \ K_u = \frac{b}{b\tilde{T} + c(\tau + \tilde{\tau})}, \ K_o = \frac{c\tilde{T}(\tau + \tilde{\tau})}{b\tilde{T} + c(\tau + \tilde{\tau})}$$

Значения констант *a*, *b*, *c* определяются критерием оптимизации переходных процессов, возникающих при действии ступенчатых возмущений. Например, для интегрального квадратичного критерия a = 0.739, b = 0.796, c = 0.453, а для критерия минимизации длительности переходного процесса a = 0.507, b = 0.743, c = 0.281.

Работоспособность рассмотренных в статье регуляторов была подтверждена имитационным моделированием в среде Matlab-Simulink [5].

## ЛИТЕРАТУРА:

1. Гурецкий Х. Анализ и синтез систем управления с запаздыванием. М.: Машиностроение, 1974, 328 с.

2. Рей У. Методы управления технологическими процессами. М.: Мир, 1983, 368 с.

3. Первозванский А.А. Курс теории автоматического управления. СПб.: Лань, 2010, 624 с.

4. Яковис Л.М. Простые способы расчета типовых регуляторов для сложных объектов промышленной автоматизации // Автоматизация в промышленности № 6, 2007, С. 51 – 56.

5. Яковис Л.М. Имитационное моделирование – ключ к решению задач управления сложными технологическими процессами // Автоматизация в промышленности, №7, 2006, С. 25 – 30.

УДК 681.51

О.Б. Шагниев, С.Ф. Бурдаков (Санкт-Петербургский государственный политехнический университет)

## СТАБИЛИЗАЦИЯ ПЕРЕВЕРНУТОГО МАЯТНИКА ПРИ ОГРАНИЧЕННОМ РЕСУРСЕ УПРАВЛЕНИЯ

Перевернутый маятник является классической проблемой динамики и теории управления [1, 2]. Рассматриваются:

- перевёрнутый маятник с подвижным основанием (маятник на тележке).
- перевёрнутый маятник с колеблющимся основанием (маятник Капицы).
- перевёрнутый маятник с неподвижной точкой опоры.



Рис. 1. Схема маятника

В работе проведено исследование управляемого движения однозвенного перевернутого маятника с неподвижным основанием, на котором закреплен маховик с двигателем (рис.1). Целью работы является исследование устойчивости вертикального положения маятника в зависимости от вида обратных связей.

Математическая модель маятника взята из статьи [1].

$$\begin{cases} J\chi\ddot{\psi} + (J_r + \chi J_m)\dot{\omega} - (Mb + mh)g\chi\sin\psi = 0\\ (J_r + \chi J_m)\chi\ddot{\psi} + (J_r + \chi^2 J_m)\dot{\omega} + c_2\omega = \chi c_1u \end{cases}$$

На ее основании в предположении  $\sin \psi \approx \psi$  построена система уравнений в переменных состояния. Управление ведётся по трем обратным связям: углу отклонения маятника  $\psi$ , угловой скорости маятника  $\psi$  и угловой скорости маховика  $\omega$ . Управлением является подаваемое на двигатель напряжение. Для поиска оптимального управления с помощью пакета Matlab [4] решается линейно-квадратичная задача [2, 3, 5].

Если ограничение на управление отсутствует, то линейная система стабилизируется при любых углах начального отклонения маятника. На графиках (рис.2) приведены переходные процессы для угла отклонения маятника и напряжения на электродвигателе при  $\psi_0 = 1$  радиан в случае, когда ограничение на управление отсутствует.



Рис. 2. Переходные процессы при отсутствии ограничения на управление

По графикам (рис. 2) видно, что система переходит в вертикальное положение, однако для этого требуется напряжение более 70 вольт. Если же ограничить напряжение  $|u| \le 12B$ , то переходный процесс  $\psi(t)$  станет расходящимся (рис. 3).



Рис. 3. Переходные процессы при ограниченном управлении

Таким образом, в условиях ограниченного управления система может стабилизироваться не при любых углах начального отклонения маятника. Следовательно, существует некая область притяжения, которой должен принадлежать угол начального отклонения, чтобы система не потеряла устойчивость.

Далее в работе была проанализирована зависимость между величиной весового коэффициента в функционале и размером области притяжения системы при наличии ограничения на управление. Сделан вывод о том, что максимальная область притяжения наблюдается при больших значениях весового коэффициента.

Проанализирована зависимость между углом наклона линейной части ограничителя и размером области притяжения. Сделан вывод о том, что при увеличении угла наклона зона притяжения системы сужается, а при уменьшении - расширяется, однако это ведет к увеличению времени установления и последующей потерей устойчивости. Максимальная область притяжения соответствует углу наклона линейной части ограничителя в 26,8 градусов.

Рассмотрены альтернативные способы управления перевернутым маятником. Для метода компенсации [2] сделан вывод о том, что он негрубый, поскольку при неизбежных в реальных системах малых отклонениях параметров управления, система становится неустойчивой. Также рассмотрен метод перебора коэффициентов управления на сетке. Этот метод крайне неэкономичен с точки зрения времени и вычислений, однако с его помощью удалось расширить область притяжения за счёт увеличения времени установления.

#### ЛИТЕРАТУРА:

1. Гришин А.А., Ленский А.В., Охоцимский Д.Е., Панин Д.А., Формальский А.М. О синтезе управления неустойчивым объектом. Перевёрнутый маятник./ Известия академии наук. Теория и системы управления, 2002, №5, с. 14–24.- Москва, Институт механики МГУ.

2. Первозванский А.А. Курс теории автоматического управления: Учебное пособие. 2-е изд., стер. — СПб: Издательство "Лань", 2010. - 624 с.

3. Бурдаков С.Ф. Управление механическими системами при параметрической неопределённости.-СПб: Изд-во Политехн. ун-та, 2010. - 180с.

4. Кетков Ю., Кетков А., Шульц М. Самоучитель. МАТLАВ 7: программирование, численные методы.- СПб, БХВ-Петербург, 2005. - 742 с.

5. Ричард К., Дорф, Роберт Х. Бишоп Современные системы управления.-Москва, Лаборатория базовых знаний, 2004.- 831 с.

## СЕКЦИЯ «МЕХАНИКА И МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ»

#### УДК 539.3

О.В. Бразгина (Санкт-Петербургский государственный политехнический университет)

# СРАВНЕНИЕ МАТЕРИАЛЬНОГО И ПРОСТРАНСТВЕННОГО ПОДХОДОВ В МЕХАНИКЕ СПЛОШНЫХ СРЕД

При моделировании деформационного поведения различных материалов используют два основных подхода — это материальное и пространственное описание. При материальном описании деформирование тела рассматривается относительно некоторой отсчетной конфигурации  $K_0$ , в которой каждая точка имеет определенные координаты  $\mathbf{R}$ . Все величины при этом определяются как функции изменения координат  $\mathbf{r}$  точек в актуальной конфигурации  $K_t$  относительно их положения в отсчетной конфигурации (рис. 1а). При материальном описании принимается гипотеза сохранения локальной топологии, т.е. близкие материальные частицы в процессе движения среды остаются близкими [4, 5]. Однако данный подход неприемлем при описании, например, жидких или сыпучих сред, где движение может сопровождаться локальным перемешиванием частиц: определение координат точек в некоторый начальный момент времени является невозможным. В некоторых случаях подобная ситуация характерна и для пластических сред. В таком случае более удобным является пространственное описание, при котором для каждой точки пространства в текущий момент времени задается скорость движения среды, все величины определены как поля скоростей и пространственных координат  $\mathbf{r}$  (рис. 16).



Рис. 1: а) изображение материального описания движения сплошной среды; б) изображение пространственного описания движения сплошной среды

Необходимо сравнение зависимостей напряжений и деформаций для материального и пространственного подходов моделирования, определение мер деформаций, энергетически связанных с тензорами силовых и моментных напряжений.

Рассмотрим адиабатический процесс. Пусть U — это плотность внутренней энергии среды, отнесенная к массе. При пространственном описании уравнение баланса энергии записывается в виде

$$\rho \frac{\delta U}{\delta t} = \mathbf{T}^T \cdots (\nabla \mathbf{V} + \mathbf{E} \times \boldsymbol{\omega}) + \mathbf{M}^T \cdots \nabla \boldsymbol{\omega}, \tag{1}$$

где  $\rho$  — это плостность среды, **V** — вектор скорости, **E** — единичный тензор,  $\omega$  — вектор угловой скорости, **M** и **T** — тензора силовых и моментных напряжений,  $\frac{\delta(\cdot)}{\delta t} = \frac{d(\cdot)}{dt} + \mathbf{V} \cdot \nabla(\cdot)$  — материальная производная.

Уравнение (1) преобразуется к виду [2]:

$$\rho \frac{\delta U}{\delta t} = \mathbf{g}^{-1} \cdot \mathbf{T}^T \cdot \cdot \frac{\delta \mathbf{g}}{\delta t} - \frac{1}{2} \left( \mathbf{T}_{\times}^T \times \mathbf{P} \right)^T \cdot \cdot \frac{\delta \mathbf{g}}{\delta t} + \mathbf{M}^T \cdot \cdot \frac{\delta \mathbf{F}}{\delta t} + \frac{1}{2} \left[ \left( \mathbf{M}^T \cdot \mathbf{F} \right)_{\times} \times \mathbf{P} \right]^T \cdot \cdot \frac{\delta \mathbf{P}}{\delta t} - \mathbf{g}^{-1} \cdot \mathbf{F} \cdot \mathbf{M} \cdot \cdot \frac{\delta \mathbf{g}}{\delta t}.$$
(2)

Здесь **g** — деформационный градиент, определяемый уравнением  $\mathbf{g} = \mathbf{E} - \nabla \mathbf{u}$ , где **u** — вектор перемещений. **F** — тензор, определяющий изменение тензора поворота **P** по пространству:  $\nabla \mathbf{P} = \mathbf{F} \times \mathbf{P}$ .

Запишем полученные для этого уравнения соотношения Коши-Грина:

$$\mathbf{T} = \rho \frac{\partial U}{\partial \mathbf{g}} \cdot \mathbf{g}^{T} - \rho \frac{\partial U}{\partial \mathbf{F}} \cdot \mathbf{F}^{T}, \quad \mathbf{M} = \rho \frac{\partial U}{\partial \mathbf{F}},$$

$$\left[\rho \frac{\partial U}{\partial \mathbf{P}} \cdot \mathbf{P}^{T} + \mathbf{M}^{T} \cdot \mathbf{F} - \mathbf{T}\right] \cdot \mathbf{B} = 0 \quad \forall \mathbf{B} : \mathbf{B} = -\mathbf{B}^{T}.$$
(3)

Последнее соотношение получено с учетом зависимости компонент тензора поворота, которая описывается уравнением Пуассона  $\frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{P} \Leftrightarrow (\mathbf{A} \cdot \mathbf{P})^T \cdot \cdot \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t} = 0 \ \forall \mathbf{A} = \mathbf{A}^T$ ; произвольный симметричный тензор **A** в уравнении исключен умножением соотношения Коши-Грина в форме  $\rho \frac{\partial U}{\partial \mathbf{P}} = \frac{1}{2} (\mathbf{M}^T \cdot \mathbf{F} - \mathbf{T})_{\times} \times \mathbf{P}^T + \mathbf{A} \cdot \mathbf{P} = 0$  на  $\mathbf{P}^T$  и вычисления векторного инварианта уравнения. С учетом зависимостей для тензоров силовых и моментных напряжений, описываемых первыми двумя уравнениями, имеем

$$\left(\frac{\partial U}{\partial \mathbf{g}}\right)^{T} \cdots \left(\mathbf{B} \cdot \mathbf{g}\right) + \left(\frac{\partial U}{\partial \mathbf{P}}\right)^{T} \cdots \left(\mathbf{B} \cdot \mathbf{P}\right) + \left(\frac{\partial U}{\partial \mathbf{F}}\right)^{T} \cdots \left(\mathbf{B} \cdot \mathbf{F} - \mathbf{F} \cdot \mathbf{B}\right) = 0 \quad \forall \mathbf{B} : \mathbf{B} = -\mathbf{B}^{T}.$$
(4)

Таким образом, внутренняя энергия не может быть произвольной функцией аргументов **P**, **g**, **F**. Чтобы выявить, от каких именно аргументов зависит внутренняя энергия, необходимо найти общее решение уравнения (4) с частными производными первого порядка. Теория таких уравнений хорошо разработана [3]. При произвольном выборе антисимметричного тензора **B** решение данной системы должно удовлетворять характеристической системе

$$\frac{d\mathbf{g}}{ds} = \mathbf{B} \cdot \mathbf{g}, \quad \frac{d\mathbf{P}}{ds} = \mathbf{B} \cdot \mathbf{P}, \quad \frac{d\mathbf{F}}{ds} = \mathbf{B} \cdot \mathbf{F} - \mathbf{F} \cdot \mathbf{B}.$$
(5)

Данная система уравнений 21-го порядка имеет не более 20 независимых интегралов. В ходе работы были найдены те интегралы, независящие от антисимметричного тензора **B**, которые необходимы для определения мер деформации:

$$\frac{d\mathbf{g}^{-1}\cdot\mathbf{P}}{ds} = 0, \quad \frac{d\mathbf{g}^{-1}\cdot\mathbf{F}\cdot\mathbf{P}}{ds} = 0.$$
(6)

Тогда уравнение баланса энергии (2) можно записать в виде

$$\rho \frac{\delta U}{\delta t} = \mathbf{T}_{U}^{T} \cdots \frac{\delta \mathbf{g}_{U}^{T}}{\delta t} + \mathbf{M}_{U}^{T} \cdots \frac{\delta \mathbf{g}_{U}^{M}}{\delta t}, \qquad (7)$$

где тензоры  $\mathbf{T}_U$  и  $\mathbf{M}_U$  — энергетические тензоры силовых и моментных напряжений, которые равны

$$\mathbf{T}_{U} = \mathbf{g}^{-T} \cdot \mathbf{T} \cdot \mathbf{P}, \quad \mathbf{M}_{U} = \mathbf{g}^{-T} \cdot \mathbf{M} \cdot \mathbf{P}, \tag{8}$$

а тензора  $\mathbf{g}_U^T = \mathbf{g}^{-1} \cdot \mathbf{P}$  и  $\mathbf{g}_U^M = \mathbf{g}^{-1} \cdot \mathbf{F} \cdot \mathbf{P}$  — меры деформации, на которых совершают работу энергетические тензоры напряжений  $\mathbf{T}_U$  и  $\mathbf{M}_U$ . Из (7) следует, что внутренняя энергия является функцией мер деформации  $\mathbf{g}_U^T$  и  $\mathbf{g}_U^M$ , тогда соотношения Коши-Грина могут быть записаны в виде:

$$\mathbf{T} = \mathbf{g}^{-T} \cdot \frac{\rho \partial U}{\partial \mathbf{g}^{-1} \cdot \mathbf{P}} \cdot \mathbf{P}^{T}, \quad \mathbf{M} = \mathbf{g}^{-T} \cdot \frac{\rho \partial U}{\partial \mathbf{g}^{-1} \cdot \mathbf{F} \cdot \mathbf{P}} \cdot \mathbf{P}^{T}.$$
(9)

Для материального описания в работе [1] в случае адиабатических процессов было получено уравнение баланса в следующем виде:

$$\rho \frac{dU}{dt} = \mathbf{T}_{*}^{T} \cdot \cdot \frac{d\mathbf{A}}{dt} + \mathbf{M}_{*}^{T} \cdot \cdot \frac{d\mathbf{K}}{dt}, \qquad (10)$$

где обобщенные меры деформации получены в виде

$$\mathbf{A} = \stackrel{o}{\nabla} \mathbf{r} \cdot \mathbf{P}, \quad \mathbf{K} = -\left(\stackrel{o}{\nabla} \mathbf{P} \cdot \mathbf{P}^T\right) \cdot \cdot \left(\mathbf{E} \times \mathbf{P}\right) / 2, \tag{11}$$

энергетические тензора напряжений

$$\mathbf{T}_{*} = \stackrel{\circ}{\nabla} \mathbf{r}^{-T} \cdot \mathbf{T} \cdot \mathbf{P}, \quad \mathbf{M}_{*} = \stackrel{\circ}{\nabla} \mathbf{r}^{-T} \cdot \mathbf{M} \cdot \mathbf{P}.$$
(12)

В данном случае  $\overset{\circ}{\nabla}$  — оператор градиента в отсчетной конфигурации.

Нетрудно показать, что тензоры А и К можно преобразовать к следующему виду:

$$\mathbf{A} = \mathbf{g}^{-1} \cdot \mathbf{P}, \quad \mathbf{K} = \mathbf{g}^{-1} \cdot \mathbf{F} \cdot \mathbf{P}.$$
(13)

Соотношения Коши-Грина для материального описания при этом записываются в следующей форме:

$$\mathbf{T}_{*} = \rho \frac{\partial U}{\partial \mathbf{A}}, \quad \mathbf{M}_{*} = \rho \frac{\partial U}{\partial \mathbf{K}}.$$
(14)

Сравнивая полученные для материального и пространственного описания соотношения Коши-Грина, получено, что тензоры силовых и моментных напряжений при пространственном описании совпадают с тензорами силовых (Коши) и моментных напряжений при материальном описании. Меры деформаций, энергетически связанные с данными тензорами напряжений, совпадают.

Полученные соотношения Коши-Грина позволяют корректно строить определяющие соотношения для нелинейной неупругой среды с использованием как материального, так и пространственного описания. Задавая U как функцию тензоров **A** и **K**, можно получать конкретный вид определяющих соотношений, который будет равнозначен в случае материального и пространственного подходов. Заметим, что при этом плотность внутренней энергеии U должна быть гладкой функцией энергетических мер деформации.

### ЛИТЕРАТУРА:

<sup>1.</sup> Грекова Е. Ф., Жилин П. А. Уравнения нелинейных упругих полярных сред и аналогии: среда Кельвина, неклассические оболочки и непроводящие ферромагнетики / Е. Ф. Грекова, П. А. Жилин // Изв. вузов. Северо-Кавказский регион. Естественные науки. Спец. вып. по проблемам нелинейной упругости. — 2000. — С. 25 – 41.

<sup>2.</sup> П. А. Жилин. Рациональная механика сплошных сред: учеб. пособие / П. А. Жилин. — Санкт-Петербург. : Изд-во Политехн. ун-та, 2010. 584 с.

3. Курант Р. Уравнения с частными производными / Курант Р. — М.: Мир, 1964. — 830 с.

4. П.В. Трусов, О.И. Дударь, В.Д. Онискив. Механика сплошной среды. Ч. 1: Кинематика. — Пермь: ПГТУ, 1994, 88 с.

5. Truesdell C. The non–linear field theories of mechanics. Encyclopedia of Physics. III/3 /Truesdell C., Noll W. // Springer–Verlag, 1965.

УДК 531.011

И.Р. Бублий (Санкт-Петербургский государственный политехнический университет)

#### АНАЛИЗ ПОВЕДЕНИЯ ТЕЛА-ТОЧКИ ВБЛИЗИ ГРАВИТАЦИОННОГО ЦЕНТРА

В классической задаче о движении тела вблизи гравитационного центра используется модель материальной точки. При рассмотрении движения спутника по орбите пользуются моделью твердого тела [1,2], которой в большинстве случаев достаточно для описания поведения объекта. Для более точных расчетов траекторий движения космических тел таких моделей становится недостаточно, поскольку они не позволяют учесть ряд особенностей. Например, современные наблюдения за Луной демонстрируют вращение плоскости орбиты вблизи классического решения. Чтобы справиться с этой проблемой обратимся к модели тела-точки предложенной П.А. Жилиным [3,4] и получившей механическое обоснование в статье Е.А. Ивановой [5]. Для этого поставим задачу о движении тела-точки вблизи ньютоновского гравитационного центра.

Начало декартовой системы координат положим в центре гравитации. Радиус вектор тела-точки обозначим через **R**. Кинетическая энергия тела-точки имеет вид [3,4]:

$$K = \frac{1}{2}m\boldsymbol{v}^2 + B\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{\omega} + \frac{1}{2}J\boldsymbol{\omega}^2 \tag{1}$$

Здесь m – масса тела-точки, B, J – инерционные характеристики (моменты инерции), *v*, *w* – векторы трансляционной и угловой скоростей соответственно.

Количество движения тела-точки определяется как частная производная от кинетической энергии по трансляционной скорости:

$$\boldsymbol{K}_1 = \frac{\partial \boldsymbol{K}}{\partial \boldsymbol{v}} = \boldsymbol{m}\boldsymbol{v} + \boldsymbol{B}\boldsymbol{\omega} \tag{2}$$

Собственный кинетический момент тела-точки (динамический спин) определяется как частная производная от кинетической энергии по угловой скорости:

$$\boldsymbol{K}_2 = \frac{\partial \boldsymbol{K}}{\partial \boldsymbol{\omega}} = \boldsymbol{B}\boldsymbol{v} + \boldsymbol{J}\boldsymbol{\omega} \tag{3}$$

Кинетический момент тела-точки относительно произвольной неподвижной точки Q определяется как сумма момента количества движения и собственного кинетического момента:

$$\boldsymbol{K}_{2}^{Q} = (\boldsymbol{R} - \boldsymbol{R}^{Q}) \times \boldsymbol{K}_{1} + \boldsymbol{K}_{2} \tag{4}$$

Здесь **R** – радиус-вектор тела-точки, **R**<sup>Q</sup> – радиус-вектор, определяющий положение точки Q. Запишем уравнения динамики Эйлера для рассматриваемой системы [4]:

$$\dot{K_1} = -\frac{GmM}{|R|^3}R\tag{5}$$

$$\dot{\boldsymbol{K}}_{2}^{Q} = (\boldsymbol{R} - \boldsymbol{R}^{Q}) \times \left(-\frac{GmM}{|\boldsymbol{R}|^{3}}\boldsymbol{R}\right)$$
(6)

Здесь G – гравитационная постоянная, М – масса гравитационного центра. Подставив выражение (4) в уравнение (6) с учетом уравнения (5), получим:

$$\dot{\boldsymbol{R}} \times \boldsymbol{K}_1 + \dot{\boldsymbol{K}}_2 = 0 \tag{7}$$

С учетом выражений (2), (3) и кинематического выражения  $\boldsymbol{v} = \dot{\boldsymbol{R}}$  систему (5), (7) можно привести к виду:

$$m\ddot{\boldsymbol{R}} + B\dot{\boldsymbol{\omega}} = -\frac{GmM}{|\boldsymbol{R}|^3}\boldsymbol{R}$$
(8)

$$B\ddot{R} + J\dot{\omega} = B\omega \times \dot{R} \tag{9}$$

Далее система (8), (9) решается численно, поэтому проведем ее обезразмеривание. Характерными параметрами задачи являются  $m, M, B, J, G, R_0, T$ . Здесь  $R_0$  – значение модуля радиуса-вектора тела-точки в начальный момент времени, T – период обращения материальной точки массой m вокруг центра гравитации массой M. В качестве независимых параметров выберем  $m, R_0, T$ . Введем в рассмотрение безразмерные параметры  $M^*, B^*, J^*, G^*$ . Нетрудно показать, что они связаны с размерными параметрами следующими соотношениями:

$$M = m M^*, \ B = m R_0 B^*, \ J = m R_0^2 J^*, \ G = \frac{R_0^3}{m T^2} G^*$$
(10)

Введем в рассмотрение безразмерное время  $\tau$ , безразмерный радиус-вектор r и безразмерную угловую скорость  $\Omega$ :

$$t = T\tau, \ \boldsymbol{R} = R_0 \boldsymbol{r}, \ \boldsymbol{\omega} = T^{-1} \boldsymbol{\Omega}$$
(11)

Согласно (10), (11) система (8),(9) приводится к безразмерному виду:

$$\mathbf{r}^{\prime\prime} + b\mathbf{\Omega}^{\prime} = a \frac{\mathbf{r}}{|\mathbf{r}|^3} \tag{12}$$

$$\boldsymbol{r}^{\prime\prime} + c\boldsymbol{\Omega}^{\prime} = \boldsymbol{\Omega} \times \boldsymbol{r}^{\prime} \tag{13}$$

где штрихом обозначена производная по безразмерному времени  $\tau$  и введены следующие обозначения

$$a = -G^*M^*, \quad b = B^*, \quad c = \frac{J^*}{B^*}$$
 (14)

Система (12), (13) имеет три параметра, которые удовлетворяют соотношениям:

$$a < 0 < b \ll c \tag{15}$$

Проведено численное исследование поведения системы, с использованием вычислительного пакета Wolfram Mathematica 8.0. Основная цель исследования заключается в анализе поведения системы в зависимости от параметра В. Остальные параметры задачи были выбраны в соответствии с механическими параметрами системы земля-луна. Момент инерции луны вычислялся как момент инерции шара. Интервал, в котором варьировался параметр В, был выбран из условия положительной определенности квадратичной формы кинетической энергии тела-точки. Результаты приведены на рис. 1 в виде диаграммы зависимости типа траектории от показателя степени п в выражении  $b = 3,54 \cdot 10^{n-32}$ .

Обнаружены пять типов траекторий: эллипс, в одном из фокусов которого находится центр гравитации; траектория, которую можно условно назвать колеблющийся эллипс (рис.2.а); траектория, которую можно условно назвать эллипсоид (рис.2.б); сложная регулярная кривая (рис.2.в); нерегулярная траектория, когда точка падает на гравитационный центр или улетает на бесконечность.

В соответствии с представленными результатами можно сделать вывод о том, что даже малое значение параметра В может сильно повлиять на характер траектории объекта. Для значения параметра  $b = 3.54 \cdot 10^{-8}$  получена траектория, характер которой совпадает с характером траектории Луны (рис.2а).


Рис. 1. Зависимость характера траектории от параметра n. Здесь на вертикальной оси расположены типы траекторий:1 – эллипс, 2 – колеблющийся эллипс, 3 – эллипсоид, 4 – сложная регулярная траектория, 5 - нерегулярная траектория



Рис. 2. Типы регулярных траекторий: а – колеблющийся эллипс, б – эллипсоид, в – сложная кривая

#### ЛИТЕРАТУРА:

1. Движение спутника относительно центра масс в гравитационном поле. /Белецкий В.В.// Изд-во МГУ, 1975. — 308 с.

2. Очерки о движении космических тел. / Белецкий В.В.// Изд-во ЛКИ, 2009. — 432 с.

3. Рациональная механика сплошных сред / Жилин П.А.// СПбГПУ. 2012. – 584 с.

4. Исходные понятия и фундаментальные законы рациональной механики / Жилин П.А. // Труды XXII летней школы "Анализ и синтез нелинейных механических колебательных систем", Санкт-Петербург, 1995., С. 10 – 36.

5. Ivanova E.A. On one model of generalised continuum and its thermodynamical interpretation. Mechanics of generalized Continua (Ed. H. Altenbach, G.A. Maugin, V. Erofeev). Berlin: Springer, 2011. P. 151 – 174.

## УДК 004.942

А.А. Соколов, В.В. Ванюшкина, А.Л. Хайтин, А.М.Кривцов (Санкт-Петербургский государственный политехнический университет)

# МОДЕЛИРОВАНИЕ ПОВЕДЕНИЯ ЧЕЛОВЕКА В ПРИРОДНОЙ И ТЕХНОГЕННОЙ СРЕДЕ

Последняя статистика поисково-спасательных работ свидетельствует об их малой эффективности [1]. Около 38% работ «прекращены», то есть потерпевший не найден и поисково-спасательные прекращены. В 34% случаев человек выходит самостоятельно, найден родственниками и др. и лишь в 28% случаев его находят спасатели. Спасатели определяют местоположение человека путем догадок и предположений, что делает поиск долгим и не точным. При поиске человека поисковая группа прочесывает лес и подает звуковые сигналы, затем ждет ответа от потерявшегося человека. Данный метод не работает во многих случаях: пострадавший может находиться без сознания и не сможет подать звуковой сигнал; пострадавший может плохо слышать (из-за травмы, возраста и т.д.); рельеф местности может искажать или заглушать звуковой сигнал спасателей. Одной из основных проблем является сложность определения зоны поиска, что приводит к прочесыванию больших территорий, на что тратится много времени и людских ресурсов. Таким образом видна необходимость создания метода локализации зоны поиска.

Предлагается алгоритм позволяющий на основании данных о местности [2] и начальном состоянии пострадавшего определить его наиболее вероятное местонахождение. На основании входных данных формируется растровая карта, на которой происходит моделирование поведения человека и расчет предполагаемых траекторий движения пострадавшего. На первом шаге моделирования задается начальное положение человека. На основании данных, которые содержатся в соседних ячейках выберается следующая позиция. Процесс повторяется определенное количество раз, которое зависит от параметров пострадавшего и времени, прошедшего с начала проведения поисковых работ. Результатом работы алгоритма является траектория движения. Поскольку движение человека в природной среде является случайным процессом, то недостаточно иметь информацию только об одном треке, необходимо получать статистические результаты. Поэтому работа алгоритма повторяется максимальное количество раз, в результате получается карта

Предлагаемые решения имеют принципиальную новизну как по сравнению с чисто статистическим подходом, игнорирующем свойства конкретной местности ISRID [3], так и по сравнению с баейсовской моделью перемещения человека в природной среде [4], использующей значительное количество параметров местности, затрудняющее создание ее модели.

В отличие от указанных выше подходов предлагаемое решение использует комбинацию двух простых моделей:

- Модели человека, которая характеризует свойства человека, как то скорость движения, предельное расстояние и т.п.;
- Модели местности, объединяющей два параметра: «привлекательности» и «проходимость», к которым приводятся все свойства моделируемой местности.

Получена карта вероятностей для реально проведенных поисково-спасательных операций на территории Ленинградской области. Данные полученные в программе соответствуют данным, полученным от поисково-спасательного отряда «Экстремум» [5].



Рис. 1



Результаты, полученные на данном этапе показывают, что использование данной модели позволяет спрогнозировать местонахождение пострадавшего, однако с недостаточной степенью точности. Следовательно необходимо улучшить алгоритм для большей локализации зоны поиска.

## ЛИТЕРАТУРА:

1. Поисково-спасательный отряд ЭКСТРЕМУМ [Электронный ресурс] URL: http://www.extremum.spb.ru.

2. Букштынов А.Д., Грошев Б.И., Крылов Г.В. Леса. М., 1981.

3. International Search & Rescue Incident Database [Электронный ресурс] URL: http://www.dbs-sar.com/SAR\_Research/ISRID.htm.

4. Lanny Lin · Michael A. Goodrich, A Bayesian approach to modeling lost person behaviors based on terrain features in Wilderness Search and Rescue [Электронный ресурс] http://tanglefoot.cs.byu.edu/~lannyl/Publications/Lanny.Lin.CMOT2010.Final.pdf).

5. ПСР 156 Лешозеро лодейнопольский р-н Никитин 50 гр. [Электронный ресурс] URL: http://www.extremum.spb.ru/data1/extremum/ex.nsf/88d57b4f394c050ec325773a004499cf/893922c0c420ee e7c3257a470024407a!OpenDocument&TableRow=2.0#2.

#### УДК 539.3

Е.Ю. Витохин (Санкт-Петербургский государственный политехнический университет)

## ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ЗАДАЧИ ТЕРМОУПРУГОСТИ ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО ТИПА В СЛУЧАЕ ГАРМОНИЧЕСКИХ ВОЗМУЩЕНИЙ

В настоящее время в большинстве задач термоупругости для описания процессов переноса тепла используется параболическое уравнение теплопроводности, которое получается на основе *закона* Фурье:

$$\underline{h} = -\lambda \nabla T,\tag{1}$$

где <u>h</u> - тепловой поток,  $\lambda$  – коэффициент теплопроводности,  $\nabla$  - оператор Гамильтона, *T* – температура. Однако данный закон не позволяет учесть конечную скорость распространения тепловых волн [1], учет которой необходим при рассмотрении ряда задач [2]. Таковыми являются задачи с тепловыми процессами, протекающими с большой скоростью, с высокой частотой или на микро масштабах. Примером таких воздействий является кратковременное лазерное воздействие на материал.

Каттанео [3, 4] и Vernotte [5] предложили расширенный закон Фурье (2) с учетом времени релаксации теплового потока т:

$$\tau \underline{\dot{h}} + \underline{h} = -\lambda \nabla T. \tag{2}$$

Время релаксации теплового потока позволяет учесть тот факт, что тепло в среде распространяется не мгновенно, а с некоторой задержкой, которую этот параметр и определяет. Его реальную величину в настоящий момент не удалось измерить точно. На основании (2) можно получить гиперболическое уравнение теплопроводности:

$$\lambda \Delta \tilde{T} - \rho c_{\nu} \left( \dot{\tilde{T}} + \tau \ddot{\tilde{T}} \right) - \alpha K_{iz} T^* (\dot{\varepsilon} + \tau \ddot{\varepsilon}) = 0, \qquad (3)$$

где  $c_v$  – удельная теплоемкость при постоянном объеме,  $T^*$  - температура, при которой определены параметры системы,  $\tilde{T}$  – отклонение температуры от значения  $T^*$ ,  $\rho$  – плотность,  $\alpha$  – коэффициент температурного расширения,  $K_{iz}$  – изотермический модуль объемного сжатия,  $\varepsilon$  – объемная деформация (след тензора деформации). Уравнение (3) описывает волновой характер распространения тепла в среде. Гиперболичность данного уравнения обеспечивается конечной величиной времени релаксации теплового потока  $\tau$ .

Запишем уравнения динамики. Уравнения движения в локальной форме имеют вид:

$$7 \cdot \underline{\sigma} + \rho \underline{f} = \rho \underline{\ddot{u}} \tag{4}$$

где <u></u>*σ* – тензор напряжений, <u>*f*</u> – вектор массовой плотности объемных сил, <u>*u*</u> – вектор перемещений. Закон Дюамеля-Неймана позволяет представить напряжения следующим образом:

$$\underline{\underline{\sigma}} = \left(K_{iz} - \frac{2}{3}G\right)\varepsilon\underline{\underline{E}} + 2G\underline{\underline{\varepsilon}} - \alpha K_{iz}\tilde{T}\underline{\underline{E}},\tag{5}$$

где G – модуль сдвига, <u>Е</u> – единичный тензор, <u>е</u> – тензор деформаций. Подставив (5) в (4) и проведя ряд преобразований, получим уравнение динамики в следующем виде:

$$\left(K_{iz} + \frac{4}{3}G\right)\Delta\varepsilon - \alpha K_{iz}\Delta\tilde{T} = \rho\ddot{\varepsilon}$$
<sup>(6)</sup>

Система уравнений (5) – (6) представляет собой уравнения связанной задачи термоупругости гиперболического типа. Отличие их от классических состоит в наличие вторых производных по времени от температуры, которые обуславливают гиперболичность системы. В классическом случае теплопроводность является параболической. В несвязанной задаче термоупругости гиперболического типа механический процесс описывается волновым уравнением, а теплопроводность - транспортным уравнением.

Решим одномерную задачу, в которой волны распространяются вдоль координаты *х*. Произведем оценку погрешности, которую имеет результат численного расчета, полученный с помощью написанной программы. Для этого произведем его сравнение с аналитическим решением. Рассмотрим термоупругое полупространство, на границе которого приложено гармоническое возмущение, и задается нулевое приращение температуры. Уравнения, описывающие объемные колебания, могут быть представлены следующим образом:

$$\begin{pmatrix} K_{iz} + \frac{4}{3}G \end{pmatrix} \frac{\partial^{2}\varepsilon}{\partial x^{2}} - \alpha K_{iz} \frac{\partial^{2}\tilde{T}}{\partial x^{2}} = \rho \frac{\partial^{2}\varepsilon}{\partial t^{2}}$$

$$\frac{\partial^{2}\tilde{T}}{\partial x^{2}} = \frac{\rho c_{v}}{\lambda} \left( \frac{\partial\tilde{T}}{\partial t} + \tau \frac{\partial^{2}\tilde{T}}{\partial t^{2}} \right) + \frac{T^{*}\alpha K_{iz}}{\lambda} \left( \frac{\partial\varepsilon}{\partial t} + \tau \frac{\partial^{2}\varepsilon}{\partial t^{2}} \right)$$
(7)

Система (7) получается из уравнений связанной термоупругости (5) – (6). Граничные условия имеют вид:

$$\tilde{T}(0,t) = 0, \qquad u(0,t) = u_0 \sin \Omega t.$$
 (8)

Для нахождения численного решения задачи (7) – (8) воспользуемся методом конечных разностей и напишем программу в среде программирования Dephi. Полупространство представим в виде бесконечной полосы, с произвольными граничными условиями на правом конце, а в качестве начальных возьмем однородные нулевые условия. В работе [6] приведено аналитическое установившееся решение данной задачи. Произведем сравнение с этим аналитическим решением. На рис. 1 приведены результаты численного моделирования и аналитические графики.



Рис. 1. Сравнение численного и аналитического решения задачи. (а) – деформации, (б) – температуры. Пунктирная линия – численное решение, сплошная линия – аналитическое

Введем относительную погрешность численного решения:

$$P(f_{num}, f_{an}) = \frac{\|f_{an} - f_{num}\|}{\|f_{num}\|} \cdot 100\%,$$
(9)

где  $f_{an}$  – аналитическая функция,  $f_{num}$  – численная функция. Определим норму  $\|\cdot\|$  функции f в момент времени t как евклидову норму вектора, компоненты которого равны значениям функции в точках сетки:



Рис. 2. Зависимость полной относительной погрешности вычисления деформаций и температуры от шага по пространству. Сплошная линия – погрешность деформаций, пунктирная – температур

Как видно из рис. 2, численный алгоритм дает погрешность порядка 2% при шагах по пространству ~ 10 нм. Измельчение сетки приводит к снижению погрешности лишь до определенного предела. Анализ решения позволяет судить о высокой степени точности совпадения амплитуд численного и аналитического решения, однако о заметной разнице в фазе, которая и вносит основной вклад в погрешность. Такая разница возникает по той причине, что аналитическое решение является установившемся, а для установления численного решения необходимо использовать более длительные времена расчета. В таком случае сравнение будет более корректным, а погрешность значительно меньше.

В работе рассмотрены гиперболические уравнения термоупругости, которые позволяют учесть конечную скорость распространения тепловых волн. Для случая объемных колебаний в полупространстве численно решена задача с гармоническим возмущением на границе с учетом времени релаксации теплового потока. Осуществлено сравнение численного решения с аналитическим и оценена погрешность численного решения.

### ЛИТЕРАТУРА:

1. Шашков А.Г. Волновые явления теплопроводности. Системно-структурный подход / Шашков А.Г., Бубнов В.А., Яновский С.Ю. Минск.: Наука и техника, 1993.

2. Жоу Д. Расширенная необратимая термодинамика / Жоу Д., Касас-Баскес Х., Лебон Дж. Москва - Ижевск: 2006.

3. Cattaneo C. Sulla coduzione del calone / Cattaneo C., Atti semin. Mat. Fis. Univ. Modena 3 (1948) 83

4. Cattaneo C. A form of heat conduction equation which eliminates the paradox of instantaneous propagation / Cattaneo C., Comp. Rend. 247 (1958), C. 431 – 433.

5. Vernotte P. Les paradoxes de la theorie continue de l'equation de la chaleur / Vernotte P., Comp. Rend. 246 (1958) P. 3154 – 3155.

6. Бабенков М.Б. Анализ распространения гармонических возмущений в термоупругой среде с релаксацией теплового потока / Бабенков М.Б., Прикладная механика и техническая физика. 2013. том. 54, № 2.

УДК 539.3

П.С. Волегов, Д.С. Грибов (Пермский национальный исследовательский политехнический университет)

## МОДЕЛИРОВАНИЕ ЦИКЛИЧЕСКОГО НАГРУЖЕНИЯ ПОЛИКРИСТАЛЛИЧЕСКОГО АГРЕГАТА

В работе рассматривается возможность описания упруговязкопластического циклического деформирования поликристаллического агрегата с использованием многоуровневых физических теорий пластичности. Предложена математическая модель для описания поведения поликристаллического образца на макроуровне, также для описания поведения материала включен мезоуровень - кристаллит. Пластическое деформирование на мезоуровне реализуется за счет скольжения краевых дислокаций.

При обработке металлов часто необходимо получить конкретные механические свойства детали по окончании процесса обработки. Важным свойством получившейся детали является предел текучести – напряжения, вызывающие пластическое деформирование. Повышение предела текучести может позволить как уменьшить затраты в материальном плане, так и делать более легкие конструкции, что, несомненно, очень важно для

современной техники. Большинство моделей неупругого деформирования рассматривают один уровень материала – макроуровень, характеризующий поведение некоторого представительного объема материала. При разработке таких моделей используется достаточно сложный математический аппарат, и данные модели достаточно хорошо могут предсказывать свойства материала в конкретном диапазоне условий. Однако переменные, входящие в данные модели не всегда имеют ясно выраженный физический смысл, часто данные модели не учитывают реальную дефектную структуру материала. Также достаточно трудной является задача идентификации параметров, входящих в эти модели, данные задачи связаны с проведением большого числа весьма дорогостоящих экспериментов, причем для каждого материала необходимо проводить свой цикл экспериментов.

Используя модели, рассматривающие структуру материалов на низших уровнях, можно избежать многих проблем, связанных с определением физического смысла уравнений модели, так как он следует из самой постановки, использующей реальную структуру материалов. В данной работе используется двухуровневая модель упруговязкопластического деформирования металлических поликристаллов [1 – 3]. Макроуровень – это механическая точка, имеющая свойства представительного объема, содержащая в себе некоторое число зерен (мезоуровень), некоторым образом ориентированных и имеющих четко определенные (анизотропные) механические характеристики. Мезоуровень - это кристаллит, имеющий заранее заданную кристаллическую решетку. В кристаллите интегрально содержатся лислокации. скользяшие ПО системам скольжения (определяемым с помошью кристаллической решетки).

На макроуровне рассматриваются интегральные характеристики процесса деформирования. Зачастую поведение материала именно на этом уровне интересует исследователей при описании конструктивных свойств различных деталей. В качестве определяющего соотношения (ОС) на этом уровне используется закон Гука в скоростной релаксационной форме. Используется гипотеза разложения скорости деформации на упругую и пластическую составляющие. Тензор упругих характеристик находится с помощью осреднения соответствующего тензора с мезоуровня.

Элемент мезоуровня представляет собой зерно (кристаллит) с введенным типом решетки, особым образом ориентированным относительно закрепленной лабораторной системы координат. Деформирование монокристалла происходит за счет скольжения краевых дислокаций по системам скольжения, при скольжении дефектная структура кристаллита изменяется, что сказывается на критических напряжениях, необходимых для продолжения скольжения дислокаций. В качестве определяющего соотношения используется закон Гука [4]. Деформирование кристаллита задается с макроуровня, при этом для передачи воздействия на мезоуровень используется гипотеза Фойгта. Системы ориентационным тензором, скольжения определяются который определяется как симметричная часть диады единичного вектора в направлении вектора Бюргерса и нормали к плоскости скольжения дислокации. Пластические деформации осуществляются скольжением краевых дислокаций.

Закон упрочнения состоит из двух слагаемых: первое отвечает за неориентированное упрочнение по всем системам скольжения, второе отвечает за накопление и сброс упругой энергии при реверсивном нагружении.

Будем считать, что поликристаллический агрегат находится в разгруженном состоянии, когда макронапряжения равны нулю. Разгрузка происходит по лучевой траектории до достижения макронапряжениями значения машинного нуля. Разгрузка производится с помощью итерационной процедуры [5]. Тензор деформации скорости определяется с помощью использования закона Гука, для нахождения значения тензора напряжений используется специальная итерационная процедура.

В рамках работы рассмотрен цикл опытов на циклическое деформирование образцов (авторы Беналлал А., Марки Д. [6]). Данные статьи показывают, что при циклическом нагружении поликристалла кривая напряжений – деформация выходит на стационарную кривую после некоторого числа растяжений – сжатий образца, а также происходит дополнительное упрочнение при непропорциональном нагружении – серьезное увеличение (до десятков процентов) предела текучести.

В рамках работы был произведен ряд численных экспериментов на одноосное растяжение-сжатие монокристалла. Кристалл деформируется в направлении [100],  $\tau_{c0}^{(k)}$  =17.5 МПа, значения тензора упругих модулей соответствуют технически чистой меди. Была идентифицирована процедура разгрузки монокристалла. На рис. 1 приведена диаграмма напряжение-деформация, на первом этапе проводится упругопластическое растяжение до интенсивности деформаций в 10%, далее идет упругая разгрузка до значения напряжений, равных нулю, и затем нагрузка образца и следующая пластическая деформация. Как и предполагалось, разгрузка осуществляется упругим образом, и обращает значение тензора напряжений в необходимо малое значение, близкое к (машинному) нулю.



Рис. 1. Процедура разгрузки монокристалла

Также проведен численный эксперимент на растяжение-сжатие кристаллита с рассмотрением нескольких циклов нагрузки, была выявлена закономерность падения разности максимального значения критических напряжений, что свидетельствует о возможности выхода на стационарное значение кривой деформаций – напряжений. На рис.2 представлена зависимость напряжений от деформаций при циклическом нагружении.

Таким образом, рассмотрена двухуровневая модель описания деформирования поликристаллического агрегата, представлена процедура разгрузки. Проведен ряд численных экспериментов на циклическое растяжение-сжатие модельного монокристалла, выделена способность модели к описанию процессов, происходящих при циклическом деформировании. В дальнейшем планируется реализация модели поведения материала на макроуровне, данная модель позволит более широко и богато описывать процессы, происходящие при циклической обработке материалов.



Рис. 2. Зависимость напряжений от деформаций, по горизонтали – абсолютное значение интенсивности тензора деформаций

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (гранты №12-01-31094-мол\_а, №12-08-33082 мол а вед, №13-01-96006-р урал а), гранта Президента РФ №МК-390.2013.1.

## ЛИТЕРАТУРА:

1. Трусов П.В., Волегов П.С. Физические теории пластичности: теория и приложения к описанию неупругого деформирования материалов. Ч. 1: Жесткопластические и упругопластические модели // Вестник ПГТУ. Механика. – 2011. – № 1. – С. 5 – 45.

2. Трусов П.В., Волегов П.С. Физические теории пластичности: теория и приложения к описанию неупругого деформирования материалов. Ч. 2: Вязкопластические и упруговязкопластические модели // Вестник ПГТУ. Механика. – 2011. – № 2. – С. 101 – 131.

3. Трусов П.В., Волегов П.С. Физические теории пластичности: теория и приложения к описанию неупругого деформирования материалов. Ч. 3: Теории упрочнения, градиентные теории // Вестник ПГТУ. Механика. – 2011. – № 3. – С. 146 – 197.

4. Трусов П.В., Волегов П.С., Янц А.Ю. Двухуровневые модели поликристаллов: о разложении движения на макроуровне// Физическая мезомеханика. – 2013. – Т. 16, № 5. – С. 17 – 23.

5. Волегов П.С., Янц А.Ю. Несимметричная физическая теория пластичности гцк-поликристаллов: особенности численной реализации некоторых схем деформирования// Вестник Пермского национального исследовательского политехнического университета. Механика. – 2011. – № 1. – С. 121 – 137.

6. Беналлал А., Марки Д. Определяющие уравнения упруговязкопластичности для непропорционального циклического нагружения // Теоретические основы инженерных расчетов. 1998. - № 3. — С. 68 – 76.

# В.И. Антонов, Р.В. Давыдов (Санкт-Петербургский государственный политехнический университет)

# ПОЛУЭМПИРИЧЕСКОЕ УРАВНЕНИЕ СОСТОЯНИЯ ПЛОТНОЙ ПЛАЗМЫ МЕТАЛЛОВ

Результаты, полученные на основании фундаментальных исследований в области физики высоких плотностей энергии, имеют множество практических применений в различных отраслях промышленности и энергетики. Особенно быстро развиваются направления связанные с воздействиями мощного лазерного излучения на вещество. Круг задач, которые вынуждены решать различные исследователи и разработчики новых технологий, очень широк, начиная от простой обработки металлов лазерным излучением до проблем с термоядерным синтезом. Проведение подобных экспериментов является дорогостоящим процессом и требует, как специального оборудования, так и привлечения значительного числа обслуживающего персонала, причем вероятность в таких экспериментальных исследованиях получения «положительного» результата не высока. Это объясняется тем, что очень сложен эксперимент, и его проведение зависит от большинства мало связанных между собой факторов и условий. Поэтому перед тем, как проводить дорогостоящие и трудоемкие экспериментальные исследования необходимо оценить на основе теоретических моделей будущие возможные результаты, на основании чего сделать вывод о целесообразности исследований в этом конкретном направлении, особенно если теория показывает отсутствие возможного «положительного» результата. Это один из основных факторов стимулирующих разработку новых и усовершенствование используемых математических уравнений для описания плотной плазмы, в том числе и для металлов.

При воздействии на металлы интенсивных потоков энергии происходит быстрый нагрев вещества с последующим расширением. В этих процессах достигаются значительные температуры и плотности – вещество ионизируется, образуя плотную плазму. Расчет термодинамических свойств такой плазмы представляет весьма сложную задачу [1].

Строгие теоретические подходы применимы лишь в ограниченной области фазовой диаграммы [2]. Химическая модель плазмы основана на уравнениях ионизационного равновесия и широко используется для моделирования свойств слабонеидеальной плазмы. Но учет эффектов не идеальности представляет собой серьезную проблему, полностью не решенную до настоящего времени [3]. Метод квантовой молекулярной динамики, основанный на методе функционала плотности для электронной подсистемы и методе классической молекулярной динамики для ионов, может применяться только при сравнительно низких температурах [4]. Квантово-статистические модели, основанные на решении многоэлектронного уравнения Шредингера для изолированного атома или атома в ячейке с различными граничными условиями, не отражают все физические процессы. Чаще всего в таких моделях рассматривают только свойства электронной подсистемы в приближении сферической ячейки и пренебрегают корреляционными эффектами.

Таким образом, несмотря на значительный прогресс в разработке моделей для расчета термодинамических свойств плотной плазмы, при построении уравнений состояния чаще всего используется полуэмпирический подход, в котором в выражение для термодинамического потенциала вводятся константы, определяемые путем сопоставления с экспериментальными и расчетными данными [5]. Однако расчеты по существующим уравнениям часто совпадают с экспериментом лишь в узкой области, чего не достаточно для прогнозирования результатов физических экспериментов.

В представленной работе для описания термодинамических свойств металлов использовалась свободная энергия Гельмгольца *F*, которая представляется суммой трех слагаемых, отвечающих за упругую часть взаимодействия  $(F_y)$  и тепловой вклад ядерной  $(F_g)$  и электронной  $(F_g)$  компонент:

$$F = F_{\rm v} + F_{\rm g} + F_{\rm g}$$

На основе этого выражения была построена модель, в которой первые два слагаемых заданы в виде интерполяционных выражений, а учет последнего осуществляется по модели Томаса-Ферми.

Зависимость энергии упругого взаимодействия задается в виде:  $F = a V_{-} \ln \left(\frac{V_{0c}}{V}\right) - 3V_{0c} \sum_{i=1}^{3} \frac{a_i}{2} \left(\left(\frac{V_{0c}}{V}\right)^{-\frac{i}{3}} - 1\right) + 3V_{0c} \sum_{i=1}^{2} \frac{b_i}{2} \left(\left(\frac{V_{0c}}{V}\right)^{\frac{i}{3}} - 1\right)$ 

$$F_{y} = a_{0}V_{0c}\ln\left(\frac{v_{0c}}{V}\right) - 3V_{0c}\sum_{i=1}^{u}\frac{u_{i}}{i}\left(\left(\frac{v_{0c}}{V}\right)^{-\frac{1}{3}} - 1\right) + 3V_{0c}\sum_{i=1}^{u}\frac{u_{i}}{i}\left(\left(\frac{v_{0c}}{V}\right)^{\frac{1}{3}}\right)$$

где значение коэффициентов *b<sub>i</sub>* имеют вид:

$$b_{1} = -\left[Z^{2} \frac{3}{10} \left(\frac{4\pi}{3}\right)^{\frac{1}{3}} + Z^{\frac{4}{3}} \frac{11}{36} \left(\frac{3}{\pi}\right)^{\frac{1}{3}}\right] a_{B} E_{H} (Am_{u}V_{0c})^{-\frac{4}{3}}$$
$$b_{2} = Z^{\frac{5}{3}} \frac{1}{5} (3\pi^{2})^{\frac{2}{3}} a_{B}^{2} E_{H} (Am_{u}V_{0c})^{-\frac{5}{3}}$$

Здесь  $V_{0c}$  – удельный объем при P = 0 и T = 0 К,  $E_H$  – энергия Хартри,  $a_B$  – радиус Бора,  $m_u$  – атомная единица массы, A – атомная масса, Z – атомный номер элемента.

Для определения коэффициентов  $a_i$  требуется выполнение условий для давления, модуля объемного сжатия и его первой и второй производных при  $V = V_{0c}$ :

$$P(V_{0c}) = 0$$
  

$$B_{y}(V_{0c}) = -\frac{VdP_{y}}{dV} = B_{0}$$
  

$$\dot{B}_{y}(V_{0c}) = -\frac{dB_{y}}{dP_{y}} = \dot{B}_{0}$$
  

$$\ddot{B}_{y}(V_{0c}) = -\frac{d(\frac{dB_{y}}{dV})}{dB_{y}} = \ddot{B}_{0}$$

Параметры  $B_0$ ,  $\dot{B}_0$ ,  $\ddot{B}_0$  подбираются итерациями так, чтобы при нормальных условиях удовлетворялись табличная величина удельного объема и значения модуля изоэнтропического сжатия и его производной по давлению, определенные по данным статических и динамических измерений.

Вклад теплового движения ядерной компоненты в свободную энергию задается следующим образом:

$$F_{\pi} = 3RT ln \left( \frac{\alpha (\frac{V_0}{V})^{2/3} exp\left( \left(\gamma_0 - \frac{2}{3}\right) \frac{B^2 + D^2}{B} arctg \frac{Bln(\frac{V_0}{V})}{B^2 + D(ln(\frac{V_0}{V}) + D)} \right)}{T^2} + \frac{\beta (\frac{V_0}{V})^{2/3}}{T} \right)$$

где  $\gamma_0$  – значение коэффициента Грюнайзена при нормальных условиях, а неизвестные коэффициенты *B*, *D*,  $\alpha$ ,  $\beta$  определялись сравнением с имеющимися термодинамическими данными при высоких и умеренных давлениях.

Тепловой вклад электронной компоненты в уравнение состояния вычислялся по модели Томаса-Ферми с квантовыми и обменными поправками [6]. Это квантово-статистическая

модель, широко используемая для расчетов различных свойств плазмы в экстремальных состояниях. Она основана на решение многоэлектронного уравнения Шредингера для атома в приближении сферической ячейки. Приближения, сделанные в этой модели, в частности, использование сферической ячейки и пренебрежение корреляционными эффектами, могут привести к существенным ошибкам в области умеренных плотностей и температур при расчетах только по этой модели. Однако учет квантовых и обменных поправок, а также вклада ядерной и упругой части взаимодействия в области умеренных давлений и плотностей позволили получить результаты, которые хорошо согласуются с экспериментальными данными.

На основе предложенной модели были рассчитаны широкодиапазонные уравнения состояния алюминия и меди. Было получено хорошее согласование ударных адиабат, полученных с помощью рассчитанных уравнений для обоих металлов с экспериментальными данными в широком диапазоне давлений и плотностей.

#### ЛИТЕРАТУРА:

1. Фортов В. Е., Храпак А. Г., Якубов И. Т. Физика неидеальной плазмы. М., 2010. – 528 с.

2. Ebeling W., Kraeft W. D., Kremp D. Theory of Bound States and Ionization Equilibrium in Plasmas and Solids. Berlin: Akademic-Verlag, 1976.

3. Грязнов В. К., Иосилевский И. Л., Фортов В. Е. Термодинамика ударно-сжатой плазмы в представлениях химической модели // Ударные волны и экстремальные состояния вещества, Под ред. В. Е. Фортова, Л. В. Альтшулера, Р. Ф. Трушша, А. Фунтикова. Москва: Наука, 2000. С. 299 – 387.

4. Car R., ParrinelloM. Unified Approach for Molecular Dynamics and Density-Functional Theory // Phys. Rev. Lett. 1985. - Nov. Vol. 55, no. 22. P. 2471 – 2474.

5. Бушман А. В., Фортов В. Е. Модели уравнения состояния вещества // УФН. 1983. Т. 140, № 2. С. 177 – 232.

6. Никифоров А. Ф., Новиков В. Г., Уваров В. Б. Квантово-статистические модели высокотемпературной плазмы и методы расчета росселандовых пробегов и уравнений состояния. Москва: Физико-математическая литература, 2000. – 400 с.

УДК 539.3

М.А. Клак, Е.А. Иванова (Санкт-Петербургский государственный политехнический университет)

## ИССЛЕДОВАНИЕ ПОТЕРИ УСТОЙЧИВОСТИ СТЕРЖНЯ ПРИ ДИНАМИЧЕСКОМ НАГРУЖЕНИИ СЖИМАЮЩЕЙ СИЛОЙ

В современных конструкциях и сооружениях большое применение имеют детали, являющиеся длинными и тонкими стержнями. Исследование поведения таких стержней под действием осевой сжимающей силой оказывается не таким, как поведение коротких стержней при сжатии. При достижении некоторого критического значения прямолинейная форма стержня становится неустойчивой, и стержень начинает искривляться.

Термин устойчивость используется во многих науках и теориях, начиная с метеорологии и заканчивая численным анализом в авиации и механике, но суть у этого термина практически одинакова. Устойчивости – способность системы, находящейся под действием сил в равновесии, после незначительного отклонения возвращаться в положение равновесия [1].



Рис.1. Схема нагружения

Уроки аварий и катастроф мостовых конструкций дали путь для развития и постановки различных теоретических исследований, а так же экспериментальных проверок. Одним из первооткрывателей-исследователей этой проблемы является Ясинский Феликс Станиславович, который при составлении усилений металлических мостов напрямую столкнулся с проблемой устойчивости сжатых стержней и в период с 1892 по 1896 опубликовал в русских и зарубежных технических журналах ряд статей и монографий по проблеме устойчивости [2]. Одна из последних его работ была удостоена премии профессора П.Н. Андреева [3]. Он решил ряд задач об устойчивости стержней под воздействием нагрузок, в частности рассмотрел стержень с шарнирно опертыми концами в упругой среде [4].

Задача, исследуемая в данной работе отчасти похожа на задачу эластики Эйлера, рассмотренную к книге П.А. Жилина [5], но там, как и в остальных источниках, рассматривается задача о консольно-заделанной балке, один конец которой жестко заделан, а другой свободен. В данной исследовательской работе рассматривается балка, жестко заделанная с одного конца, а с другого конца к ней шарнирно прикреплен груз, на котором сосредоточена вся масса.

Возьмем в рассмотрение первоначально прямолинейный безынерционный стержень. Нижний конец стержня жестко заделан. К верхнему концу стержня шарнирно прикреплена масса, которая перемещается только вдоль вертикальной оси. К этой массе прикладывается динамическая сжимающая сила. Решается задача о потери устойчивости этого стержня с дальнейшим исследование его поведения в закритической зоне. Схема нагружения приведена на рис. 1.

Рассматривается стержень, у которого жесткости на изгиб одинаковы  $C_1 = C_2$ , что соответствует симметричному сечению стержня. Запишем уравнения движения стержня.

$$\underline{N}'(s,t) = 0 \qquad \underline{M}'(s,t) + \underline{R}'(s,t) \times \underline{N}(s,t) = 0 \tag{1}$$

где <u>N</u> – вектор силы, <u>M</u> – вектор момента, <u>R</u> – радиус вектор, определяющий положение сечения стержня в актуальной конфигурации.

Определяющее уравнение для момента, связывающее между собой вектор момента и вектор деформации

$$\underline{\underline{M}} = (C_3 - C_1) \left( \underline{\underline{t}} \cdot \underline{\underline{P}}^T \cdot \underline{\Phi} \right) \left( \underline{\underline{P}} \cdot \underline{\underline{t}} \right) + C_1 \underline{\Phi}$$
(2)

где С<sub>1</sub> – жесткость на изгиб, С<sub>3</sub> – жесткость стержня на кручение, <u>Ф</u> – вектор деформации изгиба кручения, <u>Р</u> – тензор поворота. Связь вектора деформации с тензором поворота

$$\underline{\underline{P}}' = \underline{\Phi} \times \underline{\underline{P}} \tag{3}$$

Задача решается в классической теории стержней, что означает отсутствие сдвиговых деформаций, из этого условия получаем связь вектора <u>*R*</u> и тензора поворота <u>*P*</u>

$$\underline{\varepsilon} = 0 \implies \underline{R}' = \underline{\underline{P}} \cdot \underline{\underline{t}} \tag{4}$$

Теперь рассмотрим граничные условия. На нижнем конце стержня отсутствуют перемещения и поворот, т.к. конец жестко заделан

$$\underline{R}|_{s=0} = 0 , \qquad \underline{\underline{P}}|_{s=0} = \underline{\underline{E}}$$
(5)

Перемещения верхнего конца стержня в вертикальном направлении описываются уравнением:

$$m(\underline{t} \cdot \underline{R})^{"}|_{s=l} = -F(t) - mg - N|_{s=l}$$
(6)

где  $N|_{s=l} = \underline{t} \cdot \underline{N}|_{s=l}$ 

На верхнем конце стержня отсутствует перемещение в плоскости, перпендикулярной оси t

$$\underline{R}|_{s=l} \cdot \left(\underline{\underline{E}} - \underline{t}\,\underline{t}\right) = 0 \tag{7}$$

Так как при s=l груз и стержень соединены шарнирно, отсюда получаем условие отсутствия момента:

$$\underline{M}|_{s=l} = 0 \tag{8}$$

В результате решения уравнений статики стержня доказывается, что конфигурация изогнутого стержня – плоская, а стержень поворачивается относительно своей бинормали. Таким образом, дальнейшее решение задачи сводится к задаче для определения угла поворота ψ(s).

По результатам решения краевой задачи для  $\psi(s)$  было получено значение критической силы для рассматриваемой схемы нагружения.

$$N_{cr} = \frac{(\pi - 2\Theta_0^{cr})^2 C_1}{4l^2},\tag{9}$$

где  $\theta_0^{cr}$  – критический угол,  $C_1$ - жесткость стержня на изгиб, l – длина стержня.

В работе так же была рассмотрена задача для малого угла отклонения в верхней точке закрепления, для которой была выведена зависимость угла от координаты

$$\psi = 2\xi \left[ -\sin\theta_0 + \sin\left(\theta_0 + \sqrt{\frac{N}{c_1}}s\right) \right] + \frac{1}{2}\xi^3 \cos\left(\theta_0 + \sqrt{\frac{N}{c_1}}s\right) \cdot$$
(10)  
$$\cdot \left[ \sqrt{\frac{N}{c_1}}s - \frac{1}{2} \left( \sin\left(2\theta_0 + 2\sqrt{\frac{N}{c_1}}s\right) - \sin2\theta_0 \right) \right]$$

где  $\psi$  – угол поворота,  $\theta_0 = \theta|_{s=0}$ , *s* – продольная координата. Параметры  $\xi$ ,  $\theta_0$  и *N* связаны между собой соотношением

$$\psi_l = 2\xi (1 - \sin\theta_0) \tag{11}$$

Производная радиус-вектора

$$\underline{R}' = \underline{P}(\underline{\psi}\underline{b}) \cdot \underline{t} = \cos\psi \, \underline{t} + \sin\psi \, \underline{n} \tag{12}$$

Проинтегрировав выражение (12) по координате и воспользовавшись условием  $\underline{R}|_{s=0} = 0$  получим уравнение для радиус вектора  $\underline{R}$ 

$$\underline{R} = \left(\int_0^s \cos\psi ds\right)\underline{t} + \left(\int_0^s \sin\psi ds\right)\underline{n}$$
(13)

Из уравнения (13) с учетом граничного условия (7) следует

$$\int_{0}^{l} \sin\psi ds = 0 \tag{14}$$

Это еще одно соотношение, связывающее параметры  $\xi$ ,  $\theta_0$  и N.

Подставив полученный ранее радиус вектор в уравнения движения груза, получаем дифференциальное уравнение, связывающее три величины  $\xi$ ,  $\theta_0$  и N

$$n(\int_0^l \cos\psi ds) = -F(t) - mg - N\cos(\psi_l - 2\xi)$$
(15)

Таким образом, была получена система из трех уравнений (11), (14), (15). Если внешняя сила F(t) известна, то численное решение этой системы позволит определить движение системы и значение силы N как функции времени. Сравнив функцию N(t) со значением N = - F - mg, которое получается при статическом воздействии, можно оценить влияние инерционности

В результате исследования построено решение краевой задачи для стержня. Получено аналитическое значение Эйлеровой критической силы. Если модуль сжимающей силы N не превышает критического значения, то стержень остается в состоянии равновесия, но как только модуль силы N будет превышать значение  $N_{cr}$ , то появится еще одно решение. Выведена система уравнений, позволяющая найти связь между критической силой и внешней нагрузкой.

#### ЛИТЕРАТУРА:

1. Прохоров М.А. Российский энциклопедический словарь – М. Научное издательство «Большая Российская энциклопедия», 2001. Кн. 2: Н – Я. – 2015 с.

2. Ясинский Ф.С. Опыт развития теории продольного изгиба. // Ф.С. Ясинский. Избранные работы по устойчивости сжатых стержней. – М. – Л.: Гостехиздат, 1952. – С. 138 – 194.

3. Васильев Д.М. История сопротивления материалов [электронный pecypc] URL: http://mysopromat.ru

4. Ясинский Ф.С. О сопротивлении продольному изгибу (диссертация). // Ф.С. Ясинский. Избранные работы по устойчивости сжатых стержней. – М. – Л.: Гостехиздат, 1952. – С. 138 – 194.

5. Жилин П.А. Прикладная механика. Теория тонких упругих стержней: учеб пособие. СПб.: Изд-во Политехн. Ун-та, 2007. 101 с.

### УДК 681.518.3

К.А. Нуждин, И.И. Калапышина (Санкт-Петербургский национальный исследовательский университет информационных технологий механики и оптики)

# МОДЕЛИРОВАНИЕ ДИНАМИКИ МЕХАНИЧЕСКИХ СИСТЕМ С СИЛОВЫМ ТРИБОЛОГИЧЕСКИМ ВЗАИМОДЕЙСТВИЕМ

В данной статье исследуются различные по структуре механизмы: трибометрическая установки и узел для полирования оптических стёкол. В первом из рассмотренных механизмов, захват движения верхней платформы осуществляется за счет возвратно-поступательного фрикционного взаимодействия. Во втором механизме, обработка оптических элементов, т.е. процесс износа, происходит за счёт вращательного движения. Моделирование динамики систем с помощью MATLAB/Simmechanics позволяет провести анализ работы механизмов с учетом трибологического взаимодействия для этих систем.

## Введение

Одной из наиболее важных проблем в современной трибологии является задача исследования динамических процессов трения в различных системах. При решении подобных задач, целесообразно использовать современные программные пакеты. В данной статье рассматриваются методы исследования динамики механизма с поступательным движением на примере трибометрической установки и механизма с вращательным примере полировки оптических движением на vзла для элементов В среде Matlab/Simmechanics.

### Моделирование динамики трибометрической установки

В основе работы трибометрической установки «Трибал-2» [1] лежит принцип возвратно-поступательного движения испытываемых образцов относительно друг друга. Схема рабочего узла трибометрической установки представлена на рис. 1. К нижней платформе приводится горизонтальная сила, приводящая платформу в колебательное движение. Под действием силы трения, верхняя платформа, лежащая на нижней, вовлекается в совместное движение. Пружина, прикрепленная к верхней платформе, при превышении силы упругости над силой трения покоя, смещает верхнюю платформу относительно нижней.

Для построения модели использовались зависимости для релаксационных фрикционных автоколебаний, приведенные в [2]. При моделировании системы использовались стандартные блоки пакета Simulink/Simmechanics и учитывались такие факторы как: различие коэффициентов трения для покоя и

скольжения, зависимость коэффициента трения от скорости относительного движения, коэффициенты упругости и демпфирования для упругой системы. На рис. 2 приведены графики, полученные в ходе эксперимента для пары бронза-сталь и данные, полученные из модели. Следует отметить, что характер изменения положения платформ модели соответствует экспериментальным данным, а некоторые количественные расхождения связаны со сложностью определения реальных параметров рабочих элементов системы.



Рис. 1. Схема рабочего узла «Трибал-2»



Рис. 2. Сравнение экспериментальных и теоретических данных

#### Моделирование динамики механизма для обработки оптических элементов

На рис. 3 представлена структурная схема узла для полировки оптических стёкол для элемента заданного диаметра и плоского элемента. Она является условной и объединяет передаточный механизм, шпиндель и двигатель D1 с одной стороны, и кривошипношатунный механизм качания поводка и двигатель D2 с другой. К нижней планшайбе 1 с жёстко закрепленной на ней заготовкой 2, передаётся момент вращения от двигателя D<sub>1</sub>. Двигатель D<sub>2</sub>, передает момент на шарниры 6 и 5, которые обеспечивают необходимый закон движения верхней планшайбы (полировальник).



Рис. 3. Структурная схема узла для полирования оптических стекол: а) полирование элемента заданного диаметра, б) полирование плоского элемента

Следует отметить, что для предотвращения разрыва кинематических связей между элементами 5 и 3, а так же 3 и 2, в схему введена сила Р, т.е. в данном случае происходит силовое замыкание между рабочими органами элементов кинематической цепи. Весь механизм погружен в ёмкость с циркулирующей эмульсией 4, которая непрерывно подаётся на поверхности контакта, она очищает их от продуктов износа и одновременно является полиритом [4].

Основываясь на ранее полученных результатах в [4], а также [5] было решено включить в модель, имитирующую работу исполнительного механизма для обработки оптических элементов, подсистему, описывающую трибологическое взаимодействие за счёт упругодиссипативных сил. В процессе испытаний систематически проводились оценки динамических моделей, соответствующих процессу трения; на каждом из этапов идентифицировались две системные характеристики: импульсная переходная и единичная переходная функции.

На рис. 4 представлены характерные единичные переходные функции, которые идентифицированы моделями в пространстве состояний, полученные с помощью зависимостей, описанных в [6]. Каждой из фаз соответствуют свои значения коэффициентов демпфирования, собственных частот колебаний и качества поверхности.



Рис. 4. Таблица результатов работы модели

#### Заключение

В статье показано, что использование компьютерных моделей позволяет эффективно проводить выбор управляющих параметров для создания нужного режима обработки контртел, а так же исследовать поведение нелинейных систем и изучить возникающие в системах процессы автоколебаний. Организация управляемого автоколебательного процесса реализуется в целях создания соответствующего высокопроизводительного технологического процесса, например, для обработки оптических стекол. Статья будет полезна исследователям процессов трения, использующих в своих работах инструменты среды Matlab.

#### ЛИТЕРАТУРА:

1. Патент - 2289119 РФ, Кл. G01N 19/02, G01N 3/56 Устройство для испытания материалов на трение./ Г.М. Исмаилов, В.М. Мусалимов, Б.В. Соханев, М.А. Сапожков, М.А. Лобачева, А.А. Никифоров Опублик.: 10.12.2006 Бюл. № 34.

2. Чичинадзе А.В., Берлинер Э.М., Браун Э.Д. и др. // Трение, износ и смазка, 2003, Москва., - 576 с., С. 58 – 59.

3. Костерин Ю.И., Крагельский И.В. Релаксационные колебания в упругих системах трения. В кн.: Трение и износ в машинах. Вып. 112, М., Машгиз, 1958, С. 119 – 143.

4. Калапышина И.И. Моделирование динамики станка для обработки стекол // Изв. вузов. Приборостроение. 2012. Т. 55, № 6., С. 74 – 77.

5. Горбач В. Л. Кинематика рабочих органов оптических шлифовально-полировальных станков. М., 1958., 110 с.

6. Мусалимов В.М., В.А. Валетов // Динамика фрикционного взаимодействия, 2006,СПб.,-191 с.

УДК 621.7.054.847

А.В. Курдова, Е.Д. Скобов (Санкт-Петербургский государственный морской технический университет, ОАО Концерн МПО Гидроприбор)

# МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ МАЛОГАБАРИТНОЙ СИСТЕМЫ ИЗМЕРЕНИЯ ПАРАМЕТРОВ КАЧКИ ОБЪЕКТА

Объектом моделирования является бесплатформенная малогабаритная система определения параметров качки, используемая на малых гидрографических судах, сторожевых катерах и прочих малых судах [1-3], построенная на трех волоконно-оптических гироскопах ВГ910, трех акселерометрах АК-10/4 и содержащую блок вычислительного модуля формата PC/104, управляющий работой прибора [4 - 6]. Для математического моделирования использовался пакет программного обеспечения Matlab 5.2, включающий в себя блок Simulink.

На рис. 1 представлена схема модели, состоящая из нескольких основных блоков [6, 7]: - блок выработки параметров движения объекта:

- блок выработки показаний гироскопов и акселерометров;
- блок показания компаса;
- блок реализующий работу алгоритма системы ;
- блок выработки погрешностей;
- блок вывода на экран.

В блоке выработки параметров движения объекта, исходя из заданных начальных условий, вырабатываются идеальные угловые скорости и ускорения в проекции на связанную систему координат.

В блоке выработки показаний гироскопов и акселерометров происходит зашумление идеальных угловых скоростей и ускорений по средствам выбранной модели погрешности гироскопов и акселерометров.

В блоке показания компаса происходит зашумление реального угла курса объекта.

В блоке, реализующем работу алгоритма системы, содержится математическая модель работы реальной системы [8, 9].

В блоке выработки погрешностей происходит реальных углов ориентации, полученными в результате работы прибора.

Блок выработки Алгоритм показаний Блок выработки работы гироскопов и параметров системы акселерометров движения объекта ι угол ψ 1 угол θ 1 угол К Полученный угол Ө Полученный угол К Полученное h Измеренная оо Угловая скорость фо Іолученный Измеренное п. ускорение по Показания компаса Реальный угол ψ Блок выработки погрешностей Реальный угол 0  $\Delta \theta$ AK  $\Delta \psi$ Δh Реальный угол К Блок вывола на экран

Рассмотрим подробнее некоторые из этих блоков.

Рис. 1. Схема модели

### Выработка параметров движения объекта

Для того чтобы произвести математическое моделирование работы прибора необходимо создать среду наиболее соответствующую реальной среде, в которой предстоит работать прибору. В нашем случае такой средой является некий подвижный объект, находящийся на Земле, и двигающийся по некоторому заданному закону.

В начале выбирается закон движения, состоящий из таких движений как:

- качки вокруг трех осей;

- линейное перемещение (равномерное или ускоренное).

Так как наш объект перемещается в пространстве, то задаемся системами координат:

\*  $O_{EN\eta}|$  - географическая система координат (ГСК) со следующей ориентацией осей (ось  $O_E$  - на восток, ось  $O_N$  - на север, ось  $O_n$  - вверх);

\*Оζ\*η\*ζ\*- инерциальная система координат (ИСК), связанная с плоскостями экватора и меридиана начальной точки траектории;

\* хуz - связанная система координат (ССК) (ось Ох - поперечная, ось Оу - продольная, ось  $O_Z$  - нормаль к плоскости палубы);

Качку можно представить в виде трех составляющих, представленных на рис. 2.

Зная в каждый момент времени угол качки можно составить матрицу направляющих косинусов связывающую ССК с ГСК:

 $C_{\gamma}^{0} = \begin{bmatrix} \cos K \cos \theta + \sin K \sin \psi \sin \theta & \sin K \cos \psi & \cos K \sin \theta - \sin K \sin \psi \cos \theta \\ -\sin K \cos \theta + \cos K \sin \psi \sin \theta & \cos K \cos \psi & -(\sin K \sin \theta + \cos K \sin \psi \cos \theta) \\ -\cos \psi \sin \theta & \sin \psi & \cos \psi \cos \theta \end{bmatrix}$ 



Теперь конкретизируем, какое линейное перемещение будет иметь объект. Допустим, что вдоль оси у он будет испытывать ускорение, а в географической системе он будет иметь скорость сноса, все это представляется в следующем виде:

 $\vec{V}_0 \int \overline{W_0} dt$ , где  $\overline{W_0}$  – ускорение в СКК

$$\overrightarrow{V_{ENh}} = C_{\gamma}^{0} \times \overrightarrow{V_{0}} + \overrightarrow{V_{choca}}$$

Зная скорость объекта в ГСК и задавшись начальным местоположением, можно найти текущие значения широты, долготы и высоты места по следующим формулам:

$$\Phi = \phi(0) + \int_0^t \frac{V_N}{R_{\varphi}} dt,$$
  
$$\lambda_z = \lambda(0) + \Omega t + \int_0^t \frac{V_E}{R_{\lambda} \cos\varphi} dt,$$
  
$$h = h(0) + \int_0^t V_h dt.$$

По текущим значениям углов широты и долготы определяется матрица направляющих косинусов, определяющая ориентацию географической системы координат *EMh* относительно инерциальной системы координат, в виде:

$$C_{i}^{\gamma} = \begin{bmatrix} \cos\lambda & -\sin\lambda\sin\varphi & \sin\lambda\cos\varphi \\ 0 & \cos\varphi & \sin\varphi \\ -\sin\lambda & -\cos\lambda\sin\varphi & \cos\lambda\cos\varphi \end{bmatrix}$$

Перемножив две матрицы, найдем матрицу направляющих косинусов, определяющую ориентацию связанной системы координат относительно инерциальной системы координат:

$$C_i^0 = C_i^\gamma \times C_\gamma$$

Получив эту матрицу найдем угловую скорость вращения объекта в ССК:

$$\breve{\omega}_0 = C_0^i \times \dot{C}_i^0$$

где  $\breve{\omega}_0 = \begin{bmatrix} 0 & -\omega_{z0} & \omega_{y0} \\ \omega_{z0} & 0 & -\omega_{x0} \\ -\omega_{y0} & \omega_{x0} & 0 \end{bmatrix}$  - кососимметрическая матрица

Из элементов этой матрицы и образуется вектор угловой скорости вращения объекта в ССК.

Следующий шаг, - это нахождение кажущегося ускорения в проекциях на оси ССК. Ускорение находиться по следующей формуле:

 $\vec{n} = (\dot{\vec{V}})_{\omega} + (\vec{\Omega} + \vec{\omega}) \times \vec{V} - \vec{g}$ , где  $(\dot{\vec{V}})_{\omega}$  означает производную вектора  $\vec{V}$  линейной скорости в системе координат, вращающейся с угловой скоростью  $\vec{\omega}$ , и находится из следующего

соотношения:  $(\vec{V})_{\omega} = C_0^{\gamma} \times \vec{V}_{ENh} + C_0^{\gamma} \times \vec{V}_{ENh}$ , где вектор  $\vec{\Omega}$ . угловой скорости вращения Земли должен быть задан в проекциях на ССК, что достигается уравнением:  $\vec{\Omega}_0 = C_0^i \times \vec{\Omega}_i$ , также преобразуется вектор силы тяжести  $\vec{g}$ :  $g_0 = C_0^i \times \vec{g}_i$ ,

Все вышеперечисленные уравнения взаимно связаны и в виде блок-схемы представлены на рис. 3.



Рис. 3. Выработка параметров движения объекта

Реализуя этот алгоритм, можно в каждый момент времени иметь идеальные углы качки, идеальную угловую скорость вращения объекта в связанной системе координат и кажущиеся ускорения в этой же системе, что и требуется для моделирования среды, в которой будет работать бесплатформенная гировертикаль. Усложняя этот алгоритм можно получить различные интересующие параметры, характеризующие движение объекта.

### Выводы:

1. В статье рассмотрены вопросы организации математического моделирования систем измерения параметров качки малогабаритных судов различного назначения.

2. Измерение параметров качки необходимо для построения систем управления стрельбой малогабаритных боевых кораблей и обеспечения работы вспомогательных систем гражданских малогабаритных судов.

### ЛИТЕРАТУРА:

1. Определение параметров ориентации объекта бесплатформенной инерциальной системой / С.С.Ривкин, З.М.Берман, И.М.Окон - СПб: ГНЦ РФ -ЦНИИ «Электроприбор», 1996. - 226 с.

2. Шереметьев А.Г. Волоконный оптический гироскоп. — М.: Радио и связь, 1987. – 152 с.: ил.

3. Инерциальные навигационные системы морских объектов / Д. П. Лукьянов, А. В. Мочалов, А.А.Одинцов, И. Б. Вайсгант.- Л.: Судостроение, 1989. - 184с., ил.

4. Интегрированные системы ориентации и навигации для морских подвижных объектов / О.Н. Анучин, Г.И. Емельянцев / Под общей ред. чл.-кор. РАН В.Г.Пешехонова. - СПб., 1999. - 357 с.

5. Савельев А.М., СоловьеваТ.И. Волоконно-оптические гироскопы // Зарубежная радиоэлектроника. - 1982. - №6. - 55 с.

6. Парусников Н.А., Морозов В.М., Борзов В.И. Задача коррекции в инерциальной навигации. - М.: Изд-во Моск. Ун-та, 1982. - 176 с.

7. Автокомпенсация инструментальных погрешностей гиросистем. Зельдович С.М., Малтинский М.И., Окон И.М., Остромухов Я.Г. Л.: Судостроение, 1976-255 с.

8. Брокмейстер Ч.Ф. Системы иннерциальной навигации.- Л.: Судостроение, 1967.

9. Расчет характеристик навигационных приборов. Челпанов И.В., Несенюк Л.П., Брагинский М.В. - Л.: Судостроение, 1978.

УДК 523.4-52

А.С. Мурачев, А.М. Кривцов (Санкт-Петербургский государственный политехнический университет)

# РАВНОВЕСИЕ ПРОТОПЛАНЕТНОГО ОБЛАКА СИСТЕМЫ ЗЕМЛЯ-ЛУНА

## Введение. Актуальность работы. Цели и задачи

Проблема образования планетарной системы Земля – Луна остается одним из серьезных вопросов современной космохимии и астрофизики. В разное время существовало множество гипотез, объясняющих образование естественного спутника Земли. Всех их можно свести к трём основным идеям:

- 1. захват Луны. (Изотопное родство лунных и земных пород ставят крест на всех гипотезах, основанных на данной идее. [1], [2])
- 2. совместное формирование Луны и Земли. Проблемной всех гипотез, основанных на этой идее, являются параметры лунной орбиты и дефицит железа на Луне.
- отделение Луны от Земли. На сегодняшний день считается основной. Согласно этой гипотезе Луна образовалась в результате катастрофического столкновения с Землёй крупного космического тела, последующего за ним выброса породы и аккумуляции его в Луну.

К середине 1970-х гг., когда на Землю доставили образцы лунного грунта, достаточно хорошо были изучены геохимические свойства Луны, и с этого времени, именно геохимические аргументы становятся решающими в системе доказательств той или иной версии образования Луны. Лунные породы по ряду параметров, действительно, доказывали ударную версию происхождения Луны. Между тем некоторые подробности геохимического анализа ставят под сомнение гипотезу в целом [3].

В работах [3], [4], [5], [6] была предложена и развита альтернативная модель, по которой Луна и Земля возникли как двойная система при ротационном коллапсе облака нагретых пылевых частиц первичного состава. Эта модель учитывала как геохимические, так и динамические аспекты проблемы образования Луны.

Данная работа является частью проекта по разработке альтернативной гипотезы формирования системы Земля-Луна. В данной работе доказывается возможность продолжительного во времени равновесного существования протопланетного облака, с наличием гравитационных и радиационных сил, вызванных интенсивным испарением льда в протопланетном облаке. Равновесное существование облако необходимо для того, чтобы частицы смогли увеличиться в размерах, а само облако смогло аккумулировать, как можно больше вещества. При истощении запасов газа наступает относительно быстрый коллапс облака, который приводит к образованию планетной системы.

#### Результаты исследования

Опишем исследуемую модель: протопланетным облаком мы будем называть отделившееся, устойчивое образование внутри протопланетного диска, которое впоследствии станет планетой (или планетной системой). Рассматриваем сформировавшееся на ранних стадиях развития системы Земля - Луна газопылевое облако, вращающееся по орбите вокруг Солнца и локализованное внутри своей сферы Хилла.

На каждую частицу в протопланетном облаке действуют гравитационная сила и радиационная сила со стороны всех других частиц облака, а так же сила газового давления. Радиационной силой мы назовём силу отталкивания, обусловленную испарением ледяной составляющей пылевых частиц. В модельном приближении будем считать, что вся пылевая частица состоит изо льда.

Описываемое в данной работе протопланетное облако находится в состоянии равновесия. Устойчивость облака обеспечивается адиабатическим нагревом и усилением испарения при сжатии всего облака или его фрагментов.

Состояния вещества в протопланетном облаке описывается уравнением политропы  $P = C\rho^{\gamma}$  [7], где P – давление,  $\rho$  – плотность, С,  $\gamma$  – константы, которые мы будем считать параметрическими (считаем, что концентрации газа и пыли зависят только от расстояния от центра и пропорциональны друг другу).

Величина радиационной силы, есть функция концентрации испарившихся молекул в данной точке. Для молекул распространяющихся сквозь вещество протопланетного облака, существует эффект экранирования, вызванный тем, что часть молекул задерживается пылевой составляющей облака. Концентрация молекул была найдена из так называемого уравнения переноса излучения [8].

Было показано, что интенсивность испарения ледяной частицы, есть функция температуры, а следовательно в устойчивом протопланетном облаке и функция концентрации частиц.

Из общих термодинамических соотношений мы показали, что интенсивность испарения экспоненциально падает с плотностью:  $j(r) = \alpha \exp(-\beta/\rho^{\gamma-1}(r))$ , где  $\alpha$ ,  $\beta$  – константы.

Можно также показать, что радиационная сила, с которой один объём в протопланетном облаке (с радиус-вектором  $\vec{r_1}$ ) действует на другой объём (с радиус-вектором  $\vec{r_2}$ ), отнесённая к произведению величин этих объёмов есть:  $F(r_1)_{rad} = Kj\rho(r_1)\rho(r_2)\exp\left(-sL\int_0^1\rho(q(\lambda))d\lambda\right)$ , где K – размерная константа, зависящая от массы и импульса молекул и коэффициента поглощения среды, s – средняя площадь частиц,  $L = r_1^2 + r_2^2 - 2r_1r_2\cos\theta$ , а  $q = \lambda^2 r_1^2 + (1-\lambda)^2 r_2^2 - 2\lambda(1-\lambda)\cos\theta$ ,  $\theta$  – угол между  $\vec{r_1}$  и  $\vec{r_2}$ .

Таким образом, проинтегрировав по всему объёму можно найти суммарную радиационную силу, с которой все частицы протопланетного облака действуют на элементарный объём в точке r. В предположении, что протопланетное облако имеет сферическую форму. Радиус облака R. Радиационная сила отталкивания есть:

$$F_{rad}(r) = K\rho(r) \int_0^R dx \,\rho(x) j(x) \int_0^\pi d\theta \,\exp\left(-S \int_{\Delta r} \frac{\rho(a)a}{\sqrt{a^2 - r^2 \sin^2 \theta}} da\right) \cdot \left(\frac{x^2 \sin\theta(r - x \cos\theta)}{(x^2 + r^2 - 2rx \cos\theta)^{3/2}}\right)$$

Уравнение равновесия протопланетного облака запишется в следующем виде:

$$-\frac{Gm(r)}{r^2} + F_{rad}(r) = \frac{1}{\rho(r)}\frac{dP}{dr}$$

где первое слагаемое есть гравитационная сила на расстоянии *r*, действующая на элементарный объем, а *P* давление.

На рис. 1 показано решения уравнения Эмдена (голубым цветом) и найденного уравнения равновесия с радиационной силой (красным цветом). В данном решении предполагалось K=13G, где G – гравитационная постоянная. Решение получено методом итераций [9]. При стремлении **К** к нулю, найденное решение стремится к классическому решению.

Уравнение Эмдена – классическое уравнение, описывающие равновесие газовых сфер под действием сил гравитации и сил газового давления.



Рис. 1.

#### Основные результаты:

- получено уравнение изменения интенсивности излучения новым способом;

- проведён компьютерный эксперимент, подтверждающий вывод теории;

- получено выражение для радиационной силы в общем случае;

- построено численное решение уравнения равновесия протопланетного облака, относительно плотности частиц (и газа).

## ЛИТЕРАТУРА:

1. Рускол Е.А. Происхождение Луны. М.: Наука, 1975. 188 с.

2. Harris A.W., Kaula WM. A co-accretional model of satallite formation // Icarus. 1975. V. 24. P. 516 – 524.

3. Галимов Э.М. Проблема происхождения Луны; Основных направления геохимии, ред. Галимов Э.М. М.: Наука, 1995. С. 8 – 45.

4. Гуревич Л.Е., Лебединский А.И. Формирование планет; Изв. АН СССР. Сер. физич. 1950. 14(6). С. 765 – 775.

5. Энеев Т.М., Козлов Н.Н. Численное моделирование процесса формирования планет и протопланетной небулы; Препр. Ин-та прикл. Математики. 1977. 80 с.

6. Галимов Э.М., Кривцов А.М., Забродин А.В. и др. Динамическая модель образования системы Земля–Луна, Геохимия. 2005. № 11. 1137 – 1149 с.

7. С. Чандрасекхар. Введение в учение о строении звёзд. — М.: Изд-во иностр. лит-ры, 1950. 91 с.

8. С. Чандрасекхар. Перенос лучистой энергии. — М.: Изд-во иностр. лит-ры, 1953.

9. Верлань, А.Ф., Сизиков, В.С.; Интегральные уравнения: методы, алгоритмы, программы, Изд-во: Киев: Наукова думка, 1986 г.

УДК 539.2

А.Е. Осокина, И.Е. Беринский (Санкт-Петербургский государственный политехнический университет)

# УРАВНЕНИЯ ДИНАМИКИ ТРЕУГОЛЬНОЙ И КВАДРАТНОЙ КРИСТАЛЛИЧЕСКИХ РЕШЕТОК

Существует множество способов моделирования структуры материалов. В частности, свойства микроструктуры материала определяются геометрией его кристаллической решётки. С развитием твердотельных физики и электроники стало необходимо всё чаще и точнее описывать процессы, протекающие в кристаллах. Большинство из этих материалов имеют сложную кристаллическую решетку. На данный момент подходы для описания динамики таких систем развиты недостаточно, поэтому в данной работе рассматривались более простые двумерные решетки: треугольная и квадратная, с целью развития методов описания структур материалов. Двумерные материалы, в частности, графен, имеют большие перспективы применения в электронике.

Целью данной работы является вывод и решение уравнений движения двумерной квадратной и треугольной решётки с одинаковым типом частиц. В статье [1] рассматриваются треугольная и квадратная решётки, для которых получены уравнения движения с использованием уравнений Лагранжа второго рода. В данной работе используется другой подход, основанный на тензорной записи выражений для компонент силы. Полученные в результате дискретные уравнения сравниваются, затем проводится их континуализация для получения уравнений движения эквивалентной сплошной среды. При исследовании движения частиц в решетках подразумевается, что атомы можно считать материальными точками, соединёнными между собой линейными пружинами.

#### Квадратная двумерная решетка

Рассматривается взаимодействие частицы (i, j) с 4 ближайшими соседними частицами: (i +1, j), (i-1, j), (i, j +1), (i, j-1) (рис. 1).

Первый способ заключается в выражении силы через тензор жесткости:

$$\vec{F} = \sum_{k=1}^{4} \underbrace{C_k}_{k} \cdot \Delta r_{i,j}^k = c \sum_{k=1}^{4} e_k e_k \cdot \Delta r_{i,j}^k$$

Рассмотрев получившееся выражение покомпонентно, получим уравнения:

$$m \ddot{u}_{i,j} = c \left( u_{i+1,j} - 2u_{i,j} + u_{i-1,j} \right)$$
  

$$m \ddot{v}_{i,j} = c \left( v_{i,j+1} - 2v_{i,j} + v_{i,j-1} \right)$$
  
Решение уравнения ищется в виде суперпозиции волн: [4]

$$u_{i,j} = Ae^{i(k_x ia + k_y ja - \omega t)}$$
$$v_{i,j} = Be^{i(k_x ia + k_y ja - \omega t)}$$



Рис. 1. Квадратная решетка

В процессе решения становится ясно, что удобнее всего выбрать периодические граничные условия Борна-Кармана, заключающиеся в том, что мы требуем периодичности функции по каждой из координат. [2]

Получим, в итоге, следующие [3]выражения для частот:

$$\omega^2 = 4\sin^2\left(\frac{k_x a}{2}\right), \ \omega^2 = 4\sin^2\left(\frac{k_y a}{2}\right)$$

Разложив компоненты уравнений в ряд Тейлора до 2 порядка [5], получим континуальные выражения:

 $m\ddot{v} = C(a^2 u''_{xx})$  $m\ddot{u} = C(a^2 u''_{yy})$ 

Второй способ вывода - через уравнения Лагранжа 2 рода, для этого запишем выражения для кинетической и потенциальной энергий.

$$K = \frac{1}{2}m(\dot{u}_{m,n})^2 = \frac{1}{2}m(\dot{x}_{m,n} + \dot{y}_{m,n})^2$$
$$\Pi = \frac{1}{2}C\sum_{k=1}^{4}\Delta r_k^2$$

Подставив выражения для всех производных, получим из системы

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial T}{\partial \dot{x}_k} - \frac{\partial T}{\partial x_k} = -\frac{\partial \Pi}{\partial x_k}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial T}{\partial \dot{y}_k} - \frac{\partial T}{\partial y_k} = -\frac{\partial \Pi}{\partial y_k}$$

следующие уравнения:

 $m\ddot{x} = C(x_{m+1,n} - 2x_{m,n} + x_{m-1,n})$  $m\ddot{y} = C(y_{m,n+1} - 2x_{m,n} + x_{m,n-1})$ 

Сравнив их с выражениями, полученными первым способом, увидим, что они совпадают, следовательно, решениями являются выражения:

$$\omega^2 = 4\sin^2\left(\frac{k_x a}{2}\right), \ \omega^2 = 4\sin^2\left(\frac{k_y a}{2}\right)$$

Треугольная двумерная решетка (рис. 2)



Выражение для вектора силы через тензор жесткости будет выглядеть следующим образом:

$$\vec{F} = \sum_{k=1}^{6} \underbrace{C_k}_{k-1} \cdot \Delta r_{m,n}^k = c \sum_{k=1}^{6} e_k e_k \cdot \Delta r_{m,n}^k$$

Рассмотрев покомпонентно этот тензор, получим систему [1]:

Рис. 2. Треугольная решетка

$$m\ddot{x} = \frac{C}{4} \left( \left( 4x_{m+2,n} + 4x_{m-2,n} - 12x_{m,n} + x_{m+1,n+1} + x_{m-1,n+1} + x_{m-1,n-1} + x_{m+1,n-1} \right) + \sqrt{3} \left( y_{m+1,n+1} - y_{m-1,n+1} + y_{m-1,n-1} - y_{m+1,n-1} \right) \right)$$
  

$$m\ddot{y} = \frac{C}{4} \left( -12y_{m,n} + \sqrt{3} \left( x_{m+1,n+1} - x_{m-1,n+1} + x_{m-1,n-1} - x_{m+1,n-1} \right) \right)$$
  

$$+ 3 \left( y_{m+1,n+1} + y_{m-1,n+1} + y_{m-1,n-1} + y_{m+1,n-1} \right) \right)$$

Континуальные уравнения в этом случае имеют вид:

$$m\ddot{u} = \frac{Cl^2}{8} \left( 9u''_{xx} + 3u''_{yy} + 6v''_{xy} \right)$$
$$m\ddot{v} = \frac{Cl^2}{8} \left( 3v''_{xx} + 9v''_{yy} + 6u''_{xy} \right)$$

(и и v здесь-континуальные составляющие, соответствующие дискретным смещениям х и у.)

В результате было получены уравнения, описывающие динамику двумерной квадратной решетки и найдены его решения. Получено выражение для треугольной кристаллической решетки. Помимо дискретных, также найдены континуальные уравнения для квадратной и треугольной решеток. В дальнейшем планируется получение решения

уравнения треугольной решетки и моделирование более сложных решеток, в частности, гексагональной двумерной и трехмерных решеток.

## ЛИТЕРАТУРА:

1. Метрикин A.B. «Higher-order continua derived from discrete media: continualisation aspects and boundary conditions».

2. Ашкрофт. «Физика твердого тела» (т.2), С. 122 – 130.

3. А.В. Окомельков. «Спектр нормальных волн в двумерной решётке нейтральных атомов»

4. А.В. Порубов, И.В Андрианов. «Nonlinear waves in diatomic crystals»

5. Борн М., Кунь Х. «Динамическая теория кристаллических решеток», С. 70 – 77.

УДК 539.3

А.В. Пояркин, Р.С. Пальков (Саратовский государственный технический университет имени Ю.А. Гагарина)

# АНАЛИЗ ВОЗМОЖНОСТИ ИСПОЛЬЗОВАНИЯ УПРОЩЕННЫХ ФОРМУЛ 2D ДЛЯ ПРОГНОЗИРОВАНИЯ ЭФФЕКТОВ УСИЛЕНИЯ ОДНОНАПРАВЛЕННО-АРМИРОВАННОГО НАНОКОМПОЗИЦИОННОГО МАТЕРИАЛА С УЧЕТОМ МЕЖФАЗНОГО СЛОЯ

Цель работы - исследование механических характеристик нано- композиционного материала, полученного при внедрении в полимерную матрицу армирующих элементов. Данное исследование проводится с использованием метода конечных элементов (МКЭ).

В настоящее время наука о прочности это большая разветвленная наука о свойствах материалов и принципах их создания, а также о рациональном использовании материала в конструкции. Сейчас для дальнейшего прогресса в создании прочных материалов и прочных конструкций необходимо взаимодействие и объединение ученых разных специальностей – химиков, физиков, механиков, математиков, программистов. Особо важную роль занимает математическое моделирование новых композиционных материалов.

Прочностные характеристики конструкционных композитов во многом определяются структурой и свойствами межфазного слоя. Исследованию влияния межфазного слоя на механические характеристики композиционных материалов посвящен ряд публикаций, в частности работы [1-4], в которых анализируются свойства межфазного слоя и его влияние на эффективные механические характеристики полимерного композита. В литературе приводятся различные законы изменения модуля Юнга по толщине межфазного слоя для различных теорий его возникновения. В работе принято, что модуль Юнга межфазного слоя изменяется по экспоненциальному закону [5].

В работе были вычислены эффективные механические характеристики композиционного материала для двумерной (2D) и трехмерной (3D) сред. После чего проводилось сравнение полученных на основе МКЭ результатов для 2D и 3D сред. Для численного анализа были приняты следующие характеристики матрицы, включения, межфазного слоя:

- модуль упругости матрицы  $E_m = 1.53 \cdot 10^9 \, \Pi a$ , коэффициент Пуассона матрицы  $v_m = 0.45$ ;

- модуль упругости армирующих волокон  $E_f = 1000 \cdot 10^9 \, \Pi a$ , коэффициент Пуассона армирующих волокон  $v_f = 0.27$ ;

- модуль упругости межфазного слоя  $E_i = 154 \cdot 10^9 \, \Pi a$ , коэффициент Пуассона межфазного слоя  $v_i = 0.36$ .

При определении эффективных модулей упругости и коэффициентов Пуассона для 3D представительный элемент (ПЭ) выбирался в виде куба и прямоугольного параллелепипеда имеющего размеры  $a, a, h_z$ , соответствующие расстояниям между центрами включений по направлению осей координат *OX*, *OY*, с плоскостями симметрии, совпадающими с плоскостями периодичности включения в виде цилиндра. Волокна ориентированы параллельно оси *OZ*. На рис. 1,а и б приведены представительные элементы 3D в виде куба и прямоугольного параллелепипеда соответственно.

Средние напряжения на соответствующих гранях представительного элемента:  $\sigma_{xx}^{(i)}, \sigma_{yy}^{(i)}, \sigma_{zz}^{(i)}$  были определены с помощью пакета конечно-элементного моделирования MATLAB.





а) Куб

б) Прямоугольный параллелепипед

Рис. 1. Представительный элемент

Зададим на гранях представительного элемента 3 группы кинематических граничных условий (б=const):

$$u_x^{(1)}\Big|_{x=\pm a/2} = \delta, \ u_y^{(1)}\Big|_{y=\pm a/2} = 0, \ u_z^{(1)}\Big|_{z=\pm h_z/2} = 0;$$
(1)

$$u_x^{(2)}\Big|_{x=\pm a/2} = 0, \ u_y^{(2)}\Big|_{y=\pm a/2} = \delta, \ u_z^{(2)}\Big|_{z=\pm h_z/2} = 0;$$
<sup>(2)</sup>

$$u_x^{(3)}\Big|_{x=\pm a/2} = 0, \ u_y^{(3)}\Big|_{y=\pm a/2} = 0, \ u_z^{(3)}\Big|_{z=\pm h_z/2} = \delta.$$
(3)

Табл. 1. Результаты исследования для 2D и 3D сред

Среда, ПЭ	$E_{e} / E_{m}$	$G_{e}/G_{m}$	$\begin{array}{c} k_{e} \\ k_{m} \end{array}$	V <sub>e</sub>
2D	1.529	1.534	1.483	0.448
3D (ПЭ куб)	1.485	1.485	1.485	0.450
3D (ПЭ параллелепипед)	1.479	1.479	1.479	0.450

Здесь  $E_{e'}/E_m$ ,  $G_{e'}/G_m$ ,  $k_{e'}/k_m$  – отношение эффективного модуля Юнга, эффективного модуля сдвига, эффективного объемного модуля к модулю Юнга, модулю сдвига, объемному модулю основного материала,  $v_e$  – эффективный коэффициент Пуассона.

Как видно из табл. 1 результаты в модуле упругости для 2D и 3D имеют расхождения до 3,4%. Т.е. для прогнозирования эффективных механических характеристик возможно использование упрощенных формул 2D среды.

#### ЛИТЕРАТУРА:

1. Новиков В.У., Козлов Г.В. Фрактальная параметризация структуры наполненных полимеров// Механика композитных материалов. – 1999. – Т. 35. - №3. – С. 269 – 290.

2. Козлов Г.В., Яновский Ю.Г. Фрактальный анализ структуры и свойств межфазных слоев в дисперсно-наполненных полимерных композитах// Механика композиционных материалов и конструкций. – 2002. – Т.8. - №1. – С. 111 – 149.

3. Козлов Г.В., Яновский Ю.Г., Карнет Ю.Н. Фрактальная модель усиления эластомеров дисперсными наполнителями// Механика композиционных материалов и конструкций. – 2005. – Т.11. - №3. – С. 446 – 450.

4. Шилько С.В., Плескачевский Ю.М. Механика адаптивных композитов и биоматериалов// Материалы, технологии, инструмент. – 2003. - №4. – С. 5 – 16.

5. Образцов И.Ф., Лурье С.А., Белов П.А., Волков-Богородский Д.Б., Яновский Ю.Г., Кочемасова Е.И., Дудченко А.А., Потупчик Е.М., Шумова Н.П. Основы теории межфазного слоя// Механика композиционных материалов и конструкций, вып.4, 2004г, С. 596 – 612.

УДК 539.3

В.Р. Вознесенский, А.Н. Прокопенко, П.А. Дятлова (Санкт-Петербургский государственный политехнический университет)

## РАЗРАБОТКА УСТАНОВКИ ДЛЯ ПЕРСПЕКТИВНОГО ПРОИЗВОДСТВА ГИБКИХ ТРУБ

В данной статье рассматривается устройство для производства многослойных труб различного диаметра путем винтовой намотки, которые могут быть использованы, например, в системах вентиляции, кондиционирования воздуха, а также для защиты от коррозии и для транспортирования газов, жидкостей и пластических сред [1, 2]. Задача производства мягких труб представляет значительный экономический интерес, так как их использование позволяет эффективно решать задачи транспортирования газов, жидкостей и сыпучих сред, задачи дренирования почв, фильтрации газов и жидкостей. Кроме того, свивание мягких труб в спирали, образующие тоннели большого диаметра, часто используются при креплении горных выработок, при создании различного рода переходов, временных хранилищ материалов. Мягкие трубы используются в качестве надувных каркасов для различных укрытий и сооружений. Сами трубы и конструкции из них обладают значительными демпфирующими свойствами, позволяющими использовать их для изоляции объектов от ударных воздействий или смягчения этих воздействий.

Целью данного исследования является расширение технологических возможностей конструкции за счет увеличения диапазона диаметра производимых труб. Для этого предлагается в оправке разместить ряд дополнительных устройств, позволяющих варьировать диаметр изготавливаемых труб в процессе намотки. Данное дополнение конструкции позволяет изготавливать трубы как постоянного, так и переменного диаметра.

Для лучшего понимания работы устройства на рис. 1 и 2 представлена его принципиальная схема устройства.

На станине 1 установлены два двигателя 2, передающих движение на лентораскладчик 3 и на ведущий шкив 7.



Рис. 1. Принципиальная схема установки для непрерывного производства труб

Лентораскладчик 3 представляет собой механизм, состоящий из трех бабинодержателей 4 со съемными паковками 5 и дозатор клея 6 (на рисунке не указан), расположенных инвариантно по отношению друг к другу на 120°, сосен оправке и вращается вокруг нее со скоростью, обеспечивающей равномерную спиральную намотку лент на оправку. Связующее вещество подается на внешнюю и внутреннюю сторону армирующей ленты за счет центробежных сил.

Ведущий шкив 7 передает движение сложной ременной передачи8, которая находится на консольно установленной оправке 9. Оправка 9 представляет собой раму 10 из четырех скрепленных между собой уголков. Оправка 9 формирует внутреннюю поверхность трубы по средством сложной ременной передачи 8, представленной на рисунке 2. Ременная передача 8 состоит из ведущего шкива 7, натяжного ролика 11 и системы четырех пар роликов, причем две пары роликов 15 и 17, и 16 и 18 расположены в горизонтальной плоскости, а другие две пары роликов 13 и 19, и 14 и 20, в вертикальной плоскости и бесконечного ремня 12. Ремень 12 огибает верхний ролик 13 вертикальной пары основания оправки, далее верхний ролик 14 вертикальной пары свободного конца, образуя первую направляющую оправки 9, далее на ролик 15 горизонтальной пары основания и затем на ролик 16 свободного конца горизонтальной пары, образуя вторую направляющую оправки, затем на ролик 17 горизонтальной пары основания, далее на горизонтальный ролик 18 свободного конца, образуя третью направляющую, затем на нижний ролик 19 основания вертикальной пары и далее на нижний ролик 20 свободного конца вертикальной пары, образуя четвертую направляющую оправки и далее через механизм 21, компенсирующий изменение рабочей длины ремня на ведущий шкив 7. Образованные ремнем направляющие формируют геометрию поперечного сечения изготавливаемой трубы и продвигают сформированную трубу за счет сил трения через зону сушки, состоящую из четырех оребренных трубчатых электронагревательных элементов 22, закрепленных на раме патрубков 23 в которые подается воздух из системы вентиляции 24. Система сушки размещена внутри движущейся оправки, что повышает КПД устройства за счет того, что горячий воздух циркулирует внутри сформированной трубы и далее после ее схода с

оправки не истекая в внешнее пространство. Этим обеспечивается максимальное поглощение тепла нагретого воздуха трубой, в сторону ее схода с оправки.

Отвод изготовленной части трубы происходит за счет сил трения между ремнями передачи и внутренней поверхностью образованной трубы. Это обеспечивает непрерывную намотку трубы и тем самым увеличивает производительность установки, а также реализацию способа при одновременном упрощении конструкции устройства. Процесс изготовления является непрерывным и установившимся во времени [3].

Данный способ выгодно отличается простотой реализации и позволяет расширить ассортимент и механические свойства труб за счет использования лент, изготавливаемых из различных материалов.

Предложенная технология изменения внешнего диаметра самоподающейся оправки, которая определяет формирующую поверхность, дает возможность изготавливать трубы различных диаметров, что позволяет сокращать затраты на дополнительную оснастку оборудования. Используя одну установку, можно в кратчайшее время перенастроить геометрические параметры формируемой трубы и тем самым расширить ассортимент изготавливаемой продукции.



Рис. 2. Принципиальная схема сложной ременной передачи

Данная технология выгодно отличается простотой реализации и позволяет расширить ассортимент и обеспечение необходимых эксплуатационных свойства труб за счет использования лент, изготавливаемых из различных материалов.

Отсутствие принудительного съема готового изделия с оправки существенно повышает качество изготавливаемого изделия за счет снижения риска нарушения его целостности, что в конечном счете приводит к повышению прочности при сдвиге, препятствует появлению и распространению трещин, в том числе в горячих и влажных условиях [4, 5].

Техническим результатом изобретения является повышение скорости намотки путем достижения равенства скорости движения оправки и скорости схода готовой трубы за счет сил трения между внутренней поверхностью трубы и системой ременных передач, образующих оправку. Повышение качества слоев трубы за счет уменьшения деформируемости слоев и готовой трубы при ее продвижении по оправке и сходе с оправки, а также уменьшение дефектов структуры трубы достигается за счет одновременного формирования трубы тремя лентами, расположенными инвариантно друг относительно друга. В этом случае изгибающие моменты, создаваемые одной из лент, в значительной мере компенсируются моментом, создаваемым другой лентой.

#### ЛИТЕРАТУРА:

1. Е.В. Полякова, В.А. Лутов, А.М. Майоров, П.А. Дятлова, В.А. Чайкин. Устройство для изготовления гибкой многослойной трубы. Патент на изобретение 2430289, 2011.

2. Е.В. Полякова, В.А. Лутов, А.М. Майоров, П.А. Дятлова, В.А. Чайкин. Способ изготовления гибкой многослойной трубы и многослойная труба. Патент на изобретение 2425753, 2011.

3. А. М. Майоров, В. А. Лутов, Е. В. Полякова, П. А. Дятлова, В. А. Чайкин. Напряженно– деформированное состояние ленты, используемой при армировании композитной трубы посредством наматывания. // Дизайн. Материалы. Технология. – 2010. – №3(14) – С. 48 – 51.

4. Е. В. Полякова, П. А. Дятлова, В.А. Лутов. К задаче определения состояния мягкой оболочки при заданных условиях удержания её кромок. // Швейная промышленность. – 2010. – №3 – С. 32 – 34.

5. М.Р. Рудая, П.А. Дятлова, М.И. Голубев. Деформация структур армирующих текстильных лент. // ЛегПром Бизнес. – 2011. – №1 – 27 с.

УДК 52-52

# Д.А. Пятницкая (Санкт-Петербургский государственный политехнический университет)

# МОДЕЛИРОВАНИЕ ОБРАЗОВАНИЯ СИСТЕМЫ ЗЕМЛЯ-ЛУНА В РЕЗУЛЬТАТЕ КОЛЛАПСА ГАЗОПЫЛЕВОГО ОБЛАКА

Система Земля-Луна - это кладезь информации о Земле, о Солнечной системе, о Вселенной, изучение которой может дать ответы на важнейшие вопросы об образовании и дальнейшей эволюции Солнечной системы, появлении жизни на Земле. Луна, с которой Земля образует генетически связанную пару, дает нам, как в зеркале, отражение раннего периода становления Земли, о котором нам ничего не известно [1, 2]. Изучив механизм возникновения нашего спутника, человечество получит огромные возможности дальнейшего покорения космоса, без которого невозможен научный прогресс [3, 4].

Гипотеза образования системы Земля-Луна Э. М Галимова и А.М. Кривцова описывает процесс образования Земли и Луны из крупномасштабного газопылевого сгущения. Сжатие этого супрапланетного газопылевого образования приводит к адиабатическому повышению температуры его внутренних частей, испарению летучих с поверхности частиц, в том числе железа. На определенном этапе, в пределах периода 50–70 млн. лет с начала возникновения Солнечной системы, происходит фрагментация газопылевого диска, отделение Луны и образование зародыша Земли. Аккреция оставшейся части газопылевого материала осуществляется преимущественно Землей. Газопылевая аккреция завершается в период 110– 130 млн. лет (наиболее вероятно ~120 млн. лет) с начала возникновения Солнечной системы. С этого момента начинается история Земли, как конденсированного тела [5].

Целью данной работы является построение математической модели для описания образования системы Земля-Луна в результате коллапса газопылевого облака.

В рамках работы решались следующие задачи:

1. Нахождение зависимости начального кинетического момента системы от отношение масс.

2. Оценка потерь энергии.

3. Определение модели коллапса при различных значениях угловои скорости.



Рис. 1. Математическая модель коллапса

Предлагается следующая модель коллапла газопылевого облака. Первоначально существует газопылевое облако в форме диска массы *M*<sub>0</sub> и радиуса, которое закручивается с

угловой скоростью  $\omega_0$ . Плотность облака распределена по закону  $\rho = \rho_0 \sqrt{1 - \frac{r^2}{R^2}}$ , где

 $\rho_0 = \frac{3}{2}\bar{\rho} = \frac{3}{2}\frac{M_0}{\pi R^2}$ . Ротационная неустойчивость приводит к разделению газопылевого облака

на два тела (численный эксперимент показывает, что может образоваться три тела и более, некоторые из возможных случаев будут рассмотрены в следующих пунктах данной работы), рисунок 2.1. Будем считать, что образовавшиеся тела движутся по круговым орбитам вокруг общего неподвижного центра масс, при этом гравитационные силы уравновешиваются силами инерции. Найдем зависимость масс образующихся тел от начальной угловой скорости облака.

Введем следующие обозначения:

R - радиус газопылевого облака;  $M_0$  - масса газопылевого облака;  $\omega_0$  - угловая

скорость газопылевого облака; r - расстояние между центрами тел;  $h_1, h_2$  - расстояния от центров тел до общего центра масс;  $r_1, r_2$  -радиусы меньшего и большего тел соответственно; m, M - массы меньшего и большего тел соответственно;  $\gamma$  -гравитационная постоянная;

 $\Omega = \frac{\omega_0}{\omega_s}$  - относительная угловая скорость, где  $\omega_s$  - скорость твердотельного вращения т.е

угловая скорость, при которой силы инерции полностью уравновешиваются силами гравитации, т.е критическая угловая скорость, при которой масса удерживается на

поверхности облака за счет гравитационных сил,  $\omega_s = \sqrt{\frac{3\pi}{4}} \sqrt{\frac{\gamma M_0}{R^3}};$ 

В рассматриваемой системе действуют только центральные силы, поэтому выполняется закон сохранения кинетического момента. K - K. (1)

$$K_0 = K$$
,  
 $K_1 = \frac{1}{2}MR^2 \cdot \omega_s = \frac{1}{2}\sqrt{\gamma M_0^3 R}$  - кинетический момент однородного двумерного диска массы

 $M_0$  и радиуса R, вращающегося с такой скоростью, что на его краю центробежные силы уравновешены гравитационными. Таким образом, начальный кинетический момент приобретает вид:  $K_0 = \frac{\Omega}{2\lambda} \sqrt{\gamma M_0 R}$ . (2)

Кинетический момент системы после коллапса газопылевого облака можно представить следующим образом:  $K = \omega(\theta_1 + \theta_2)$ , где  $\theta_1$  и  $\theta_2$  - моменты инерции меньшего и большего тел

соответственно, причем  $\theta_1 = mh_1^2 + \frac{1}{2}mr_1^2$ ,  $\theta_2 = Mh_2^2 + \frac{1}{2}Mr_2^2$ . Введем безразмерные параметры

 $n = \frac{m}{M}$ и  $k = \frac{r}{R}$ , подставляем найденные параметры в закон сохранения кинетического

момента: W =  $/\frac{n^2 + 2nk^2 + 1}{k^{\frac{3}{2}}(n+1)^2}$ ; Таким образом, получена зависимость относительной угловой

скорости от отношения масс и радиусов образовавшихся тел после коллапса.

В предлагаемой модели полная механическая энергия не сохраняется. Часть механической энергии переходит во внутреннюю, в тепловую, часть тратится на взаимодействие с окружающей средой. Для более точного описания модели введем коэффициент потерь энергии  $\beta$ . Закон сохранения энергии приобретет следующий вид:

$$T = T_1 + T_2 + \Pi + \beta T; (1 - \beta)T = T_1 + T_2 + \Pi;$$
(3)

Таким образом, система, состоящая из закона сохранения кинетического момента и закона сохранения энергии может быть преобразована к виду: ( 3/

$$\begin{cases} k^{\frac{\gamma}{2}}(n+1)\Omega - 2\lambda k^{2}n - \lambda(n^{2}+1) = 0\\ \alpha(1-\beta)\Omega^{2}(n+1)^{2}k^{3} + \lambda nk^{2} - \frac{1}{2}\lambda(n^{2}+1) = 0 \end{cases}$$
(4)

Решая систему, находим зависимость относительной угловой скорости от отношения масс.

3/

$$\Omega = f(n) \left( \frac{2n}{\frac{f(n)(n+1)^2}{\lambda} + n^2 + 1} \right)^{\frac{3}{4}};$$
(5)

В данной работе была представлена математическая модель образование системы Земля-Луна в результате коллапса газопылевого облака, по результатам описания которой была получена зависимость кинетического момента газопылевого облака до коллапса от отношения массы образовавшихся тел. Рассмотрены различные модели коллапса: с учетом касания образовавшихся тел, с учетом расстояния между телами, система из двух и системы из трех тел. Получено распределение относительной угловой скорости от количества тел, образующихся после коллапса. Проведена оценка потерь энергии в предлагаемой модели коллапса, проанализированы потери полной механической энергии в существующей системе Земля-Луна.

#### ЛИТЕРАТУРА:

1. W. K. Hartmann & D R. Davis: Satellite-Sized Planetesimals and Lunar Origins, Icarus 24 (1975): P. 504 – 505.

2. Вуд Дж., Метеориты и происхождение солнечной системы, пер. с англ., М., 1971

3. Hartmann, W. K., et al., eds 1986: Origin of the Moon (Houston: Lunar and Planetary Institute)

4. С.В. Васильев, А.М. Кривцов, Э.М. Галимов. Исследование процесса роста системы планетаспутник в результате аккумуляции вещества пылевого облака // Астрономический вестник, 2011, том 45, № 4, C. 1 – 10.

5. E.M. Galimov, A.M. Krivtsov. Origin of the Moon. New Concept. Geochemistry and Dynamics.

3.Р. Сабирова, А.Г. Певнева (Национальный минерально-сырьевой университет «Горный»)

# ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЙ ЭКСПЕРИМЕНТ ПО РАСЧЕТУ ГРАДИЕНТА ДАВЛЕНИЯ В СТВОЛЕ СКВАЖИНЫ

Сравнительный анализ методик расчета градиента давления, используемых для проектирования обработки месторождений, показывает, что в настоящее время для них нет универсального критерия классификации и оптимального выбора.

Актуальность представленного фрагмента исследований обусловлена их практической, прикладной направленностью, а также широким кругом вычислительных задач, возникающих в газовой и гидродинамике.

Широкий разброс параметров, встречающийся в добывающих скважинах, осложняет разработку методов для прогнозирования поведения многофазного потока. Так методы, которые работают для газоконденсатных скважин, не работают для нефтяных, а допущения верные для одних скважин совершенно не допустимы для других. Целью настоящей работы является сравнительный анализ существующих общепринятых методов расчета градиента давления в скважинах [3]. Программное обеспечение, представленное в [4] дает возможность вычисления градиента давления в стволе скважины по корреляции Бегса и Брилла и рациональной модели Ансари. Два эти метода относятся к принципиально различным классам, коротко описанным ниже.

Стоит отметить и то, что существующие в настоящее время общепризнанные методы расчета характеристик многофазного потока в стволе скважины, используемые в России и в мире, разработаны зарубежными учеными. Некоторые из них эмпирические, в других, напротив, делаются попытки моделировать явления, лежащие в основе тех или иных процессов на основе математически рационального подхода. В специальной литературе употребляется термин «механистические модели», который не является строго обоснованным. Он используется для обозначения класса методов расчета, в основе которых лежат законы гидравлики и гидродинамики, выраженные системами дифференциальных уравнений [1].

Самый распространенный среди эмпирических расчетов корреляции - это метод Мукерджи и Брилла (1985)). Для неустойчивых скважин также используют модели дрейфа, расработанные Хасаном и Кабиром в 1988году.

Рациональные математические модели были предложены Ансари в 1994, и Зангом в 2001 [2]. Они характеризуются лучшей сходимостью с экспериментальными и промысловыми данными, но их использование в практических приложениях зачастую бывает затруднительным в связи с требуемыми вычислительными затратами.

Для эмпирических корреляций было предложено следующее разделение на три категории [2]:

Категория «А». Рассматривает многофазный поток без учета режимов потока и эффекта проскальзывания. Плотность смеси рассчитывается на основе газового фактора. То есть, делается допущение, что газ и жидкость движутся с одинаковой скоростью. Используется одна единственная корреляция для двухфазного коэффициента трения. Не выделяются различные режимы потока.

Категория «В». Учитывает эффект проскальзывания, не учитывает режимы потока. Требуется корреляция и для объемного содержания жидкости и для коэффициента трения. Поскольку газ и жидкость движутся с различной скоростью, необходимо предусмотреть метод прогнозирования того, какой объем трубы занят жидкой фазой на любом участке
трубы. Для всех режимов потока используются одни и те же корреляции объемного содержания жидкости и коэффициента трения.

Категория «С». Учитывает эффект проскальзывания и режимы потока. Для прогнозирования объемного содержания жидкости и коэффициента трения необходимы не только корреляции, но и методы определения режима потока. Определив режим потока, можно подобрать корреляцию для прогнозирования объемного содержания.

Модели, основанные на подходе дрейфа, позволяют производить вычисления на порядок быстрее, но характеризуются большей ошибкой расчётов. В частности, для снарядного режима многофазного потока – расхождение расчетов с экспериментальными данными достигает 30% [2].

Для анализа были взяты рациональная модель Ансари и эмпирическая корреляция Бегса и Брилла. Был проведен полный факторный эксперимент. Фрагмент данных изображен в табл. 1.

			ХКИ			Ансари					Бегс	и Брилл	
номер опыта	температура на устье скважины	температура на забое скважины	дебит в стандартных услов	плотность нефти	плотность газа	давление при 540 м	давление при 1080 м	давление при 1890 м	давление на забое	давление при 540 м	давление при 1080 м	давление при 1890 м	давление на забое
1	25	88	14	779	0,7	18,27	46,96	100,53	157,41	36,84	75,42	130,99	187,33
2	25	70	14	779	0,7	18,98	48,32	102,57	159,65	37,42	76,12	132,04	188,84
3	25	80	14	779	0,7	18,5	47,56	101,53	158,38	37,1	75,73	131,45	188
4	25	88	30	779	0,7	12,97	30,05	76,29	132,59	21,27	54,74	111	168,21
5	25	88	50	779	0,7	11,74	23,59	62,97	118,23	16,75	36,15	77,98	133,23
6	25	88	14	800	0,7	18,6	47,78	101,92	159,87	37,79	77,37	134,47	191,93
7	25	88	14	857	0,7	19,63	50,65	107,15	168,16	40,2	82,68	144,51	205,12

Табл. 1. Фрагмент данных для полного факторного эксперимента

Нас интересует влияние на перепад давления нескольких факторов: температура на устье и на забое скважины, дебит скважины, плотность нефти, плотность газа и газовый фактор. Фиксировались значения давления в стволе скважины на высотах 540, 1080, 1890 и на забое – 2700 м. Нулевой уровень выделен цветом – это данные реальной скважины месторождения в Западной Сибири.

Далее мы варьируем факторы в пределах допустимых значений, дабы проследить влияние каждого фактора в отдельности, а также в совокупности с другими факторами на градиент давления. Первичная обработка результатов вычислительного эксперимента представлена графически. Рис. 1 представляет собой зависимости давления от глубины скважины при варьировании дебита скважины и газового фактора для метода Бегса и Брилла (слева) и Ансари (справа).

Проанализировав данные таблицы и графиков а также на основе описательной статистики, было установлено, что наиболее значимыми функциями являются дебит

скважины, температура на забое, плотность газа и газовый фактор, наименее значимыми – температура на устье и плотность нефти.



#### ЛИТЕРАТУРА:

1. Азиз Х., Сеттари Э. Математическое моделирование пластовых систем. – Москва-Ижевск:Институт компьютерных исследований, 2004, 416 с.

2. Бикбулатов С., Пашали А. Анализ и выбор методов расчета градиента давления в стволе скважины//нефтегазовое дело. 2005. URL: http://www.ogbus.ru/eng/2005\_2.shtml.

3. Бузинов С. Н., Ухмирин И.Д.: Исследование нефтяных и газовых скважин пластов М.: Недра, 1984. — 269 с.

4. Гук В. Методы моделирования работы скважин при разработке низкопроницаемых коллекторов. Автореф. дисс. ... канд. техн. наук. М., 2010. – 25 с.

5. Расчет градиента давления в стволе скважины: [электронный ресурс] Центр технологий моделирования. URL: http://www.modeltech.ru/ru/pet/grad.php.

#### УДК 004.942 + 537.634

А.В. Рыжков, П.В. Меленев, Ю.Л. Райхер (Пермский национальный исследовательский политехнический университет, Институт механики сплошных сред Уральского отделения Российской академии наук)

## КОМПЬЮТЕРНОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ МАГНИТОПОЛИМЕРНЫХ НАНОКОМПОЗИТОВ

На протяжении последних десятилетий физики и конструкторы все чаще обращают свое внимание на функциональные материалы. К этому классу относятся так называемые умные материалы (интеллектуальные материалы, smart-материалы). Smart-материалы имеют возможность «чувствовать» изменяющиеся внешние условия, например температуру, кислотность среды, интенсивность света, электрические и магнитные поля. После «обработки» поступившего воздействия такой композит демонстрирует ярко выраженный физико-механический отклик: деформирование и восстановление формы, упрочнение, набухание полимеров, изменение цвета, температурные эффекты и прочее [1].

Особое место среди smart-материалов занимают магнитополимерные композиты (другие наименования – мягкие магнитные вещества, магнитные эластомеры, феррогели, ферроэласты) – комбинации полимерных матриц и наночастиц ферромагнетика. Такие системы обладают высокой чувствительностью к магнитным полям, что делает их исключительно привлекательными для практического применения. Например, мягкие магнитные материалы могут послужить для создания дистанционно управляемых манипуляторов, искусственных мускулов, микромашин, микроконтейнеров для транспорта лекарств и т.д. [2, 3].

Наиболее интересные для практического применения задачи – деформация и изменение механических свойств образца под действием статического однородного поля, гипертермия образца при действии на него переменного магнитного поля, эффект магнитной памяти формы. Интерес к уникальной функциональности привел к накоплению большого объема экспериментальных данных об их свойствах и сформировал запрос на разработку теории для ясного понимания магнитомеханического поведения. Важным компонентом комплексного изучения магнитополимеров является компьютерное моделирование на различных масштабных уровнях материала.

Была рассмотрена задача моделирования системы «полимерная матрица – наночастицы» методом крупнозернистой молекулярной динамики [4, 5] с использованием системы моделирования ESPResSo [6]. Начальная конфигурация частиц имитирует структуру полимерной матрицы с внедренными частицами ферромагнетика. Магнитные частицы представляют собой единые объекты. Полимерные цепочки описываются в виде мономеров, соединенных упругими связями с изгибной жесткостью. Магнитная частица обладает дипольным моментом постоянной величины, способным ориентироваться вдоль локального магнитного поля и испытывать флуктуации вследствие тепловых колебаний. Дипольный момент жестко встроен в частицу, поэтому деформация матрицы обусловлена не только перемещением, но и собственным вращением частиц.

Была решена тестовая задача, в которой распределение дипольных моментов частиц случайно. Частицы расположены в узлах квадратной решетки. Показано, что в следствии диполь-дипольного взаимодействия трансляционное и ротационное движение феррочастиц приводит к деформации полимерной сетки. Кроме того, поворот наночастиц вдоль внешнего поля приводит к возникновению еще большей деформации (рис.1а). При одноосной ориентации всех моментов без включения внешнего поля наблюдалось сжатие вдоль одной из осей (рис. 1б). Таким образом проиллюстрировано, что ограничение на степени свободы магнитных составляющих композита имеет решающее значение для деформационного отклика, а воздействие на систему внешним полем позволяет контролировать этот отклик.



Рис. 1. Деформированное состояние на фоне начальной конфигурации: а) случайное распределение магнитных моментов в присутствии внешнего магнитного поля, б) магнитные моменты направлены вдоль одной оси, поле отсутствует

На текущем этапе работы рассматривается вопрос о магнитной анизотропии наночастицы [7]. В этом случае в выражение для энергии магнитной частицы добавляется дополнительно слагаемое. Таким образом, поворот дипольного момента и частицы определяется соотношением анизотропных свойств и механического воздействия.

В результате работы были поставлены и реализованы тестовые задачи магнитомеханики для двумерной модели полимерного композита методом молекулярной динамики. Учитывались диполь-дипольное взаимодействие и упругие связи между мономерами в цепочках. Проведен расчет в присутствии внешнего магнитного поля. Полученные результаты обосновывают использование метода крупнозернистой молекулярной динамики для исследования магнитомеханического отклика рассматриваемых систем.

#### ЛИТЕРАТУРА:

1. Concise Encyclopedia of Composite Materials / Ed. by A. Kelly. — Elsevier Science, 1994. — 378 p.

2. Y. Li, G. Huang, X. Zhang, B. Li, Y. Chen, T. Lu, T. J. Lu, F. Xu. Magnetic Hydrogels and Their Potential Biomedical Applications // Adv. Funct. Mater. 2012.

3. G. Filipcsei, I. Csetneki, A Szilagyi, M. Zrinyi Magnetic Field-Responsive Smart Polymer Composites // Adv Polym Sci (2007) 206: P. 137 – 189.

4. Frenkel D. Understanding molecular simulation: from algorithms to applications / Frenkel D., Smit B. – San Diego: Academic Press, 2002.

5. Allen M. Computer simulation of liquids / Allen M., Tildesley D. - Oxford University Press, 1989.

6. ESPResSo User's Guide, http://espressomd.org/.

7. C. P. Bean and J. D. Livingston. Superparamagnetism // Journal of Applied Physics (1959).

УДК 004.942

А.А. Соколов, А.М. Кривцов (Санкт-Петербургский государственный политехнический университет)

## МОДЕЛИРОВАНИЕ НАСЫЩЕНИЯ УГЛЕРОДНОЙ СВЯЗИ В КРИСТАЛЛАХ

На сегодняшний день потенциалы взаимодействия являются мощным инструментом для моделирования микроструктуры объектов [1], также потенциалы взаимодействия широко используются для описания межатомных взаимодействий, однако применение классических потенциалов затруднено для описания систем с электронно-ядерным строением. Для описание подобных систем на данный момент используется квантовая механика[2]. Однако использование данного подхода обладает существенным недостатком, решения уравнения Шредингера для сложных систем занимают длительное время, что делает применение квантовой теории поля затруднительным для компьютерного моделирования. Предлагается комбинированный подход, основанный на методах классической молекулярной динамики[3] и эмпирических представлениях квантовой механики.

Используется модификация модели, предложенной Р.В. Власовым, Е.А. Ивановой, А.М. Кривцовым [4]. Атом представляется в виде набора материальных точек. Одна материальная точка представляет центр масс ядра атома, остальные – центры масс ядерных облаков, количество точек, представляющих электронные облака равно максимальной степени окисления элемента. Для описания взаимодействия между материальной точкой, представляющей электронное облако предлагается использовать линейную упругую силу: F(r) = kr, где k — коэффициент упругости. Для описания взаимодействия между материальными точками, представляющих электронные облака одного атома предлагается использовать силу Кулона

$$\underline{f}_{ij}^{k}(\underline{r}_{ij}, q_{i}, q_{j}) = k_{e} \frac{q_{i}q_{j}}{r_{ij}^{3}} \underline{r}_{ij}, \quad \text{где} \quad \underline{r}_{ij} = \underline{r}_{i} - \underline{r}_{j}, \quad k_{e} - \text{электростатическая константа,} \quad q_{i}, q_{j} - \underline{r}_{ij}, \quad k_{e} - \underline{r}_{ij} = \underline{r}_{ij} - \underline{r}_{ij} + \underline{r}_{ij} = \underline{r}_{ij} + \underline{r}_{ij} + \underline{r}_{ij} + \underline{r}_{ij} + \underline{r}_{ij} = \underline{r}_{ij} + \underline{r}_{i$$

заряды і-го и ј-го облака, равные -1 соответственно.

Взаимодействие между материальными точками, представляющих электронные облака различных атомов должны удовлетворять следующим требованиям. Электронные облака должны притягиваться, а в случае когда расстояние между ними становится мало, взаимодействие этих облаков с облаками других атомов должно стать пренебрежимо мало, то есть связь будет обладать свойством насыщения. Используется следующая сила взаимодействия [4]

$$f_{ij}(r_{ij}, s_i, s_j) = -s_i s_j D \left(\frac{a}{r_{ij}}\right)^q , \qquad (1)$$

где  $r_{ij}$  — расстояние между материальными точками, соответствующими электронным облакам і и ј. D, a, q — параметры, выбранные из условия устойчивости,

$$s_{i} = \frac{1}{1 + \sum_{k \in E} \left(\frac{a}{r_{ik}}\right)^{0.5(1+q)}},$$
(2)

где *E* — множество всех электронных облаков, которые не принадлежат атому электронного облака i.

Для моделирования диссипации в системе используется сила вязкого трения, действующая между облаками одного атома и между облаками и ядром  $f_{mp.ij} = -v_{ij}b$ , где

$$v_{ij} = np_{r_{ij}}v_i, \ \underline{r}_{ij} = \underline{r}_i - \underline{r}_j.$$

× 2

Рассмотрено парное взаимодействие материальных точек, представляющих электронные облака. Выражение для силы парного взаимодействия электронных облаков запишется в следующем виде

$$f = \left(\frac{1}{1 + \left(\frac{a}{r}\right)^{0.5(1+q)}}\right) D\left(\frac{a}{r}\right)^q,$$
(3)

Для получения выражения для потенциала проинтегрируем выражение (3)

$$U(r) = \frac{1}{4}a^{-1}Dr^{2}\frac{(\alpha-2)_{2}F_{1}(1,\frac{2}{\alpha},\frac{\alpha+2}{\alpha},-a^{-\alpha}r^{\alpha}) + \frac{2a^{\alpha}}{a^{\alpha}+r^{\alpha}}}{\alpha},$$
(4)

где  $_{2}F_{1}$ - гипергеометрическая функция,  $\alpha = 0.5(1+q)$ 

Характер взаимодействия показан на следующих графиках зависимости силы от расстояния (рис. 1) и энергии взаимодействия от расстояния (рис. 2)



Была рассмотрена система, состоящая из 80 атомов углерода (С). В ходе моделирования, исследовалась устойчивость кристаллической решетки алмаза [5]. В результате расчета объемная структура кристаллической решетки не нарушилась (рис. 3), однако на поверхности обнаружились эффекты, представляющие интерес для дальнейшего исследования.



Рис. 3

Таким образом, предложенная модель позволяет описать углерод-углеродное взаимодействие в кристаллах на электронно-ядерном уровне.

Авторы благодарны В.А. Кузькину за полезные обсуждения.

#### ЛИТЕРАТУРА:

1. Метод частиц и его использование в механике деформируемого твердого тела. Дальневосточный математический журнал ДВО РАН, 2002, Т. 3, No 2, C. 254 – 276.

2. Дирак П. Принципы квантовой механики. 2-е изд. М.: Наука, 1979. — 480 с.

3. Allen M.P., Tildesley D.J. Computer Simulation of Liquids. Oxford: Clarendon Press, 1987. 385 p.

4. Р. В. Власов, Е.А. Иванова, А. М. Кривцов. Компьютерное моделирование молекулярных систем [неопубликовано].

5. Физические свойства алмаза // Справочник, Киев, "Наукова думка", 1987 г. University Press, 1960. 137 р.

УДК 579.26

Е.В. Феоктистова, М.А. Осипенко (Пермский национальный исследовательский политехнический университет), М.С. Куюкина (Институт экологии и генетики микроорганизмов УрО РАН, Пермский национальный исследовательский политехнический университет)

# ВЕРОЯТНОСТНАЯ МОДЕЛЬ МЕЖФАЗНЫХ ПРОЦЕССОВ В СИСТЕМЕ БАКТЕРИИ – ВОДА – УГЛЕВОДОРОД

Актинобактерии рода *Rhodococcus* являются представителями эколого-трофической группы микроорганизмов, окисляющих природные и антропогенные углеводороды, и, следовательно, участвующих в различных биогеохимических процессах и формировании безуглеводородной биосферы [1].

Родококки способны к окислению углеводородов нефти, смол, фенольных и полихлорированных соединений, гумусовых веществ, лигнина и его производных, восков, пестицидов и др. Некоторые родококки способны усваивать непредельные углеводородные соединения, например, ацетилен и пропен, а также ароматические – фенолы, хлорфенолы, ароматические углеводороды нефти. Отдельные виды родококков, в частности R. rhodochrous и R. ruber, обладающие способностью ассимилировать в качестве единственного источника питания газообразные углеводороды (пропан, бутан, ацетилен), являются важным компонентом "бактериального фильтра" районов углеводородных скоплений, представляющего собой своеобразный природный экран, который предотвращает загрязнение атмосферы газообразными углеводородами. Они также находят широкое применение в качестве чувствительных индикаторных организмов при поиске газовых и нефтяных месторождений. Способность данных микроорганизмов разлагать различные ксенобиотики (нефтяные углеводороды, эфиры фталевых кислот, толуол, нафталин, индол, различные пестициды и т.д.) эффективно используется в природоохранных целях, химической и энергетической сферах экономики. На основе представителей *Rhodococcus* spp. создаются различные биопрепараты для биоремедиации земель, воды, заболоченных мест.

Реализация биотехнологического потенциала родококков предусматривает всестороннее изучение механизмов их адгезии к различным веществам. При этом, характерным явлением, которое в настоящее время интенсивно исследуется, оказывается формирование биопленок [2], в особенности, на границе раздела жидких фаз [3-5]. В частности, в лаборатории алканотрофных микроорганизмов Института экологии и генетики микроорганизмов УрО РАН (г. Пермь) изучаются закономерности адгезии клеток родококков к жидким алканам. С помощью установки Sigma 701 проведен эксперимент по измерению методом отрыва кольца межфазного натяжения в системе н-гексадеканклеточная суспензия *R. ruber* ИЭГМ 123. Эксперимент показывает, что с течением времени межфазное натяжение в среднем уменьшается (за счет адгезии клеток к межфазной границе), временном определенном интервале изменение имеет но в его случайный, быстроосциллирующий характер (см. рисунок, более толстая линия, соединяющая точки).

Целью настоящей работы является построение теоретического объяснения этой своеобразной зависимости. Оно заключается в том, что уменьшение межфазного натяжения определяется не только монотонно возрастающей на межфазной границе концентрацией бактериальных клеток, но также некоторым параметром взаимодействия клеток, который можно назвать степенью образования единой биопленки. С увеличением концентрации клеток на межфазной границе, этот параметр, в отсутствие измерений межфазного натяжения, монотонно возрастает. Однако процесс измерений, связанный с периодическим прохождением кольца через межфазную границу, приводит (не меняя концентрации клеток

на границе) к случайному изменению этого параметра, что и имеет результатом случайное изменение межфазного натяжения. На основе этих теоретических представлений построена математическая модель. Предполагается, что концентрация клеток на межфазной границе  $n(t) = n_1 (1 - \exp(-t/t_1))$ , где t – время;  $n_1$ ,  $t_1$  – постоянные. Межфазное натяжение

$$\sigma(t) = \sigma_0 - (\sigma_0 - \sigma_1(s(n(t))))n(t)/n_1,$$

 $\sigma(t) = \sigma_0 - (\sigma_0 - \sigma_1(s(n(t))))n(t)/n_1$ , где  $\sigma_1(s) = \sigma_{10} - (\sigma_{10} - \sigma_{11})s; 0 \le s(n) \le 1$  – случайная величина (степень образования единой биопленки) со средним значением и среднеквадратическим отклонением, соответственно,

$$\mathbf{M}s(n) = \frac{1}{2} + (\frac{1}{\pi})\operatorname{arctg}((n - n_2)/n_3), \quad \sqrt{\mathbf{D}s(n)} = An^{2B}(1 - n)^B,$$

где  $\sigma_0$ ,  $\sigma_{10}$ ,  $\sigma_{11}$ ,  $n_2$ ,  $n_3$ , A, B – постоянные. Построенная модель адекватно описывает экспериментальные данные; соответствующая теоретическая зависимость приведена на рис. 1 (более тонкая линия, не проходящая непосредственно через точки).



Модель является перспективной и допускает дальнейшее развитие, которое должно состоять в уточнении вероятностных характеристик процесса и механизмов поведения бактериальных клеток на границе раздела фаз.

Исследования поддержаны грантами НШ-5589.2012.4 и Программы МКБ 12-П-4-1052.

#### ЛИТЕРАТУРА:

1. Ившина И.Б., Пшеничнов Р.А., Оборин А.А. Пропанокисляющие родококки. - Свердловск: УНЦ AH CCCP, 1987, 125 c.

2. Николаев Ю.А., Плакунов В.К. Биопленка – «город микробов» или аналог многоклеточного организма? // Микробиология, 2007, Т.76, № 2, С. 149 – 163.

3. Kang Z., Yeung A., Foght J.M., Gray M.R. Mechanical properties of hexadecane-water interfaces with adsorbed hydrophobic bacteria // Colloids and Surfaces B: Biointerfaces, 62 (2008), P. 273 - 279.

4. Kang Z., Yeung A., Foght J.M., Gray M.R. Hydrophobic bacteria at the hexadecane-water interface: examination of micrometre scale interfacial properties // Colloids and Surfaces B: Biointerfaces, 67 (2008), P. 59 – 66.

5. Klein B., Bouriat P., Goulas P., Grimaud R. Behavior of Marinobacter hydrocarbonoclasticus CP17 cells during initiation of biofilm formation at the alkane-water interface // Biotechnology and Bioengineering, Vol. 105, No. 3, February 15, 2010, P. 461 – 468.

## К.П. Фролова, О.С. Лобода (Санкт-Петербургский государственный политехнический университет)

#### ПРОСТЕЙШАЯ МЕХАНИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ЛУКА

Лук является одним из первых механических устройств, созданных человеком. Тем не менее, в наши дни такое оружие, как лук, остается популярным. Современные спортивные луки используются в соревнованиях, большим спросом также пользуются охотничьи луки. Причиной движения стрелы является переход потенциальной энергии деформируемого тела в кинетическую энергию полета снаряда. Реализация происходит посредством сравнительно медленного оттягивания тетивы, в течение которого накапливается потенциальная энергия упругости плеч лука, и последующего спуска тетивы, когда плечи, разгибаясь, преобразуют накопленную энергию в кинетическую энергию полета стрелы [1].

Одним из основных боевых качеств лука является его силовая характеристика зависимость силы натяжения лука, прикладываемой к тетиве, от смещения тетивы из положения равновесия. Графиком этой зависимости является так называемая динамическая кривая [2]. Если силовая характеристика *F* известна, то можно вычислить потенциальную

энергию U, накапливаемую в плечах лука за счет оттягивания тетивы [3]:  $U = \int_{0}^{1} F(s) ds$ , где l

– величина рабочего хода (максимальная величина смещения тетивы). Потенциальная энергия деформируемых плеч преобразуется не только в кинетическую энергию полета стрелы, но также и в кинетическую энергию самой тетивы, кинетическую энергию плеч, отдачу стрелку, колебания дуги, преодоление силы трения стрелы о рукоять. Таким образом, необходимо ввести в рассмотрение КПД лука:  $\eta = T/U \cdot 100\%$ , где  $T = mv_0^2/2$  – кинетическая энергия стрелы массой *m*, *U* – потенциальная энергия упругости плеч лука. Если масса стрелы слишком мала, то выстрел будет «холостым», следовательно, КПД лука будет мало. Если же брать слишком большую массу стрелы, то, во-первых, уменьшится ускорение, сообщаемое стреле, во-вторых, увеличится отдача стрелку и сила трения стрелы о рукоять лука, следовательно, КПД будет мало и в этом случае.

Существуют статические и динамические параметры конструкции лука [4]. К статическим параметрам относятся сила натяжения тетивы, величина рабочего хода. К динамическим параметрам относятся скорость распрямления дуг, амплитуда и длительность колебаний в дуге.

В данной работе рассматривается следующая модель лука: плечи являются абсолютно жесткими стержнями, между которыми располагается пружина, имеющая конечную жесткость; тетива моделируется нерастяжимой нитью. В качестве начального рассматривается положение статического равновесия в момент, когда тетива натянута на лук, не деформирована и не оттянута. Целью работы является решение следующих задач: нахождение зависимости силы натяжения лука от смещения и построение динамической кривой, нахождение величины жесткости пружины вследствие сравнения полученного результата с экспериментальными данными, нахождение дальности полета стрелы и выявление зависимости ее от параметров конструкции лука.

В ходе выполнения работы была получена зависимость силы натяжения лука F от смещения тетивы  $\Delta x$ . Также было выявлено, от каких параметров, помимо непосредственно величины смещения тетивы, зависит сила натяжения. В начальный момент плечи лука

представляют собой два прямых стержня длиной *l* каждое, соединенных тетивой длиной 2*p*,  $x_0$  – начальное смещение тетивы относительно точки соединения плеч. Далее тетива оттягивается, середина ее перемещается на некоторое расстояние  $\Delta x$ , а каждое плечо отклоняется на угол  $\Delta \varphi$ . Для нахождения решения данной задачи были рассмотрены следующие уравнения:  $M = c\Delta\varphi$ , где M – момент пружины, c – жесткость пружины,  $\Delta\varphi/2$ угол отклонения плеча от начального положения (когда тетива натянута на лук) при натяжении тетивы (в силу симметрии картины изгиба плеч лука, в уравнение для момента входит величина угла отклонения плеча, умноженная на 2); M = Th, где T – сила упругости тетивы, h – плечо;  $F = 2T \cos \beta$ , где F – сила, приложенная к тетиве,  $\beta$  - угол, образуемый между оттягиваемой тетивой и плечом лука.

Таким образом, сила *F* вычисляется по следующей формуле:  $F = 2\Delta \varphi / h \cdot c \cos \beta$ . Силу, прикладываемую к тетиве, необходимо выразить через известные параметры конструкции лука, а также через величину смещения тетивы от начального положения в некоторой степени. Для этого использовалось разложение силы  $F(\Delta x)$  в ряд Тейлора:  $F(\Delta x) = \partial F / \partial \Delta x \Big|_0 \Delta x + 1/2 \partial^2 F / \partial \Delta x^2 \Big|_0 (\Delta x)^2 + 1/6 \partial^3 F / \partial \Delta x^3 \Big|_0 (\Delta x)^3 + ....$ 

Проведенные расчеты показали, что коэффициенты  $\partial F/\partial \Delta x|_0 = 0, \partial^2 F/\partial \Delta x^2|_0 = 0, \partial^3 F/\partial \Delta x^3|_0 = 12c(l^2 - 2x_0^2)/(l^2 x_0^2(l^2 - x_0^2))$ . Таким образом, при



Рис. 1. Динамические кривые

сохранении в выражении для силы только первого ненулевого слагаемого, оказалось, что  $F = 12c(l^2 - 2x_0^2)/(l^2x_0^2(l^2 - x_0^2)) \cdot \Delta x^3$ , т.е. зависимость силы F от смещения тетивы кубическая.

Далее было проведено сравнение динамической кривой, полученной для рассматриваемой модели, с кривой, построенной по экспериментальным данным. Эксперимент проводился с прямым луком (плечи которого в без состоянии тетивы собой представляют прямой стержень), материал плечей стеклотекстолит. Параметры конструкции лука следующие:

длина плеча лука l = 65 см, начальное смещение тетивы  $x_0 = 18$  см. Максимальная сила натяжения лука  $F_{max} = 11,5$  кгс. Динамические кривые приведены на рис. 1. При построении динамической кривой по полученной в ходе решения зависимости силы натяжения от смещения учитывалось, что параметры l и  $x_0$  в построенной модели совпадают с реальными параметрами лука, с которым проводился эксперимент. Также было принято, что совпадают значения максимальной величины силы натяжения лука.

При сравнении площади под графиком оказывается, что мощность лука, у которого плечи представляют собой упругие стержни, а момент, соответственно, является изгибающим моментом в плечах лука [5], больше мощности лука, у которого плечи являются абсолютно жесткими стержнями, а величина момента зависит от жесткости пружины. Жесткость спиральной пружины находилась из приближения полученной в ходе решения

динамической кривой к построенной по экспериментальным данным. В результате было показано, что  $c = 21.9646 \text{ H} \cdot \text{м}$ .

Решена задача на нахождение дальности полета стрелы, выпущенной из лука, описываемого изучаемой моделью. Весь процесс стрельбы из лука можно разделить на два этапа: натяжение тетивы и полет выпущенной стрелы. Для нахождения дальности полета стрелы необходимо знать начальную скорость, с которой она выпущена. Для нахождения же этой скорости необходимо рассматривать процесс натяжения тетивы. Рассмотрение данного этапа дало, во-первых, указанную ранее зависимость силы натяжения лука от смещения тетивы. Во-вторых, из второго закона Ньютона находится значение ускорения, сообщаемого стреле, а затем выражается начальная скорость снаряда. Она оказалась равной  $v_0 = 2\sqrt{c}\Delta x^2/(lx_0\sqrt{m})$ , где m – масса стрелы. Рассмотрение этапа полета стрелы привело к получению значения дальности. Оно оказалось равным  $s = 4c\Delta x^4 \sin 2\alpha/(l^2 x_0^2 mg)$ , где  $\alpha$ -угол, под которым выпускается стрела, g – ускорение свободного падения.

В результате для простейшей механической модели лука получена зависимость силы, прикладываемой к тетиве, от смещения тетивы. Показано, что данная зависимость является кубической. Проведено сравнение полученной динамической кривой с экспериментальными данными. Показано, что мощность лука с абсолютно жесткими стержнями в качестве плечей меньше мощности лука с упругими плечами. Определена зависимость дальности полета стрелы от смещения тетивы.

#### ЛИТЕРАТУРА:

1. Э. Макьюэн, А. Миллер, А. Бергман, Конструкция и изготовление древних луков, 1991, В мире науки № 8, С. 38 – 75.

2. Ю.В. Шокарев, Луки и арбалеты, АСТ, Москва, 2001.

3. J.E. Gordon, Structures, or why Things don't Fall Down. Penguin Books, Harmondsworth, 1978.

4. Б. Дж. Сорреллс, Стрельба из лука для начинающих, Астрель, 2006.

5. А.В. Звягин, А.А. Лужин, Моделирование выстрела из лука, Вестник Московского университета, Серия 1, Математика и механика, № 4, С. 40 – 45.

УДК 539.3

Д.В. Цветков, А.М. Кривцов (Санкт-Петербургский государственный политехнический университет)

## МОДЕЛИРОВАНИЕ РАЗЛИЧНЫХ ЭВОЛЮЦИОННЫХ ПРОЦЕССОВ С ПОМОЩЬЮ КЛЕТОЧНЫХ АВТОМАТОВ

## Введение

Идея клеточных автоматов появилась в конце сороковых годов 20 века. Она была задумана и сформулирована Джоном Фон Нейманом и Конрадом Цусе независимо друг от друга как универсальная вычислительная среда для построения, анализа и сравнения характеристик алгоритмов.

Клеточные автоматы являются дискретными динамическими системами, поведение которых полностью определяется в терминах локальных зависимостей.

Клеточный автомат включает регулярную решётку ячеек, каждая из которых может находиться в одном из конечного множества состояний, таких как 1 и 0.

Тема клеточных автоматов очень актуальна, т.к. может привести к разгадкам многих вопросов в окружающем мире. Например: игра "Жизнь" (клеточный автомат, придуманный английским математиком Джоном Конвеем в 1970 году) была применена для анализа

социально-экономических схем и применялась к вопросу о спиралевидности большинства галактик.

#### Цель

Цель работы – исследовать некоторые принципы и закономерности эволюции различных видов на основе модели клеточного автомата.

#### Реализация

Для моделирования данной задачи используется программа, написанная на языке Java.

Для каждой ячейки определено множество ячеек, называемых окрестностью. В данной работе используется окрестность Мура.

Окрестность Мура клетки — совокупность восьми клеток на квадратном паркете, имеющих общую вершину с данной клеткой.

Каждая клетка принадлежит к определенному виду, и на каждом шаге может с некоторой вероятностью мутировать. Каждый вид определяется двумя геномами: В – геном рождения, и L – геном выживания. Геном рождения показывает, при скольких клетках рядом с пустой клеткой в этой клетке зародится жизнь, минимальное количество клеток для зарождения новой – 1, максимальное – 8. Например, геном В:01100000 означает, что в пустой ячейке зародится жизнь, если рядом находятся 2 или 3 живых клетки. Геном выживания показывает, сколько клеток должно находиться рядом с живой клеткой, чтобы данная клетка не «умерла» на следующем ходе. Минимальное количество живых клеток поблизости – 0, максимальное – 8.

Геном выживания определяется числом n. Это число означает, что клетки выживут при n и n+1 живых клеток поблизости. n может изменяться (мутировать) от 0 до 7.

#### Результаты

Начальные условия эксперимента:

Ширина поля = 300

Высота поля = 300

Начальные условия жизни: n = 5 (клетки выживают при 5 и 6 живых клетках поблизости)

В = 01000000 (рождение при двух клетках поблизости)

Шанс мутации: 1/30



На рис. 1 мы можем видеть оптимальный вид, вытесняющий все остальные виды. Это вид, у которого геном выживания определяется числом 2.

Произведено исследование скорости распространения фронтов одних видов относительно других.



Рис. 2. Диаграмма скоростей распространения фронта одних видов относительно других

На рис. 2 мы видим, что самые большие скорости наблюдаются при n = 2, а скорости распространения видов с большими n (например, n = 6 относительно n = 7) очень малы.

Также была выведена формула площади распространения нового вида от времени:

$$S(t) = \begin{cases} \pi(vt)^2, & t \le t_{\text{kac}} \\ 4(R\sqrt{(vt)^2 - R^2} + \frac{R^2}{2}(\frac{\pi}{2} - \arccos(\frac{R}{vt})), & t_{\text{kac}} < t < t_{\text{зап}} \\ 4(vt_{\text{kac}}^2), & t_{\text{полн}} \le t \end{cases}$$

где R – длина поля , v – скорость распространения одного вида относительно другого,  $t_{\kappa ac} = \frac{R}{v}, t_{noлh} = \frac{\sqrt{2}R}{v}$ .

#### ЛИТЕРАТУРА:

1. Т.Тоффоли, Н.Маргулос. Машины клеточных автоматов. – М.: Мир, 1991. – 282 с.

2. А. М. Кривцов. Моделирование простейших эволюционных процессов при помощи клеточных автоматов. 2000. – 3 с.

3. Астафьев Г. Б., Короновский А. А., Храмов А. Е. Клеточные автоматы: Учебно - методическое пособие. Саратов: Изд-во ГосУНЦ «Колледж», 2003. 24 с.

4. Е. Е. Чужакин. Живые Пиксели. Эволюция. 27 с.

5. Лобанов А. И. Модели клеточных автоматов. Компьютерные исследования и моделирование, 2010, т. 2, No 3. — С. 273 – 293.

# И.С. Чебышев (Санкт-Петербургский государственный политехнический университет), С.В. Лукин (Газпромнефть НТЦ)

## АНАЛИЗ ВЛИЯНИЯ ФИЛЬТРАЦИОННЫХ ПАРАМЕТРОВ ПЛАСТА НА ПРОЦЕСС ТЕРМИЧЕСКОЙ ЗАКАЧКИ ВОЗДУХА В ПЛАСТ ПРИ ПОМОЩИ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ ВНУТРИПЛАСТОВОГО ГОРЕНИЯ

## Введение

Внутрипластовое горение относится к термическим методам повышения нефтеотдачи пластов являясь вторичным или третичным методом нефтедобычи для извлечения вязких и высоковязких нефтей. Углеводороды могут вступать в экзотермические реакции с кислородом, что может быть использовано внутри самого пласта. Ж. Бурже описал ВПГ, как процесс горения части нефти, содержащейся в пористой среде, для увеличения подвижности несгоревших фракций [1]. Математическая модель разработана в БашГУ и базируется в основном на модели Готфрида [2]. В отличие от модели Готфрида используется другой вид реакции окисления и конкретизируется кинетический параметр. Численная схема для насыщенностей и концентраций компонентов реализована по Азизу [3].

## Цели и задачи

Актуальность данного метода повышения нефтеотдачи пластов состоит в определении нескольких параметров:

- 1. Скорости фронта ВПГ и следовательно скорости фронта для осведомленности персонала и предотвращении чрезвычайных ситуаций.
- 2. Устойчивость численной схемы.
- 3. Определение максимальной температуры фронта горения.

Рассматривается одномерная математическая модель внутрипластового горения нефти. Получены скорости фронта горения в зависимости от изменения энергии активации и фильтрационных параметров пласта (проницаемости). Процесс горения схематично изображен на рис. 1.



Рис. 1. Профили температуры (а) и насыщенности (б) при ВПГ 1 - распространение фронта, 2 - перемещение воздуха, 3 - вода, 4 - газ, 5 - кокс, 6 - нефть

Горение можно распределить на 4 зоны:

Зона 1. В этой области пласта уже произошло горение. Нагнетаемый воздух нагревается при контакте с коллектором, что позволяет утилизировать часть тепловой энергии, выделяемой при горении.

Зона 2. Зона горения. Кислород потребляется при сжигании углеводородов и кокса, осажденного на поверхности коллектора. Температура в этой зоне определяется в основном свойствами и количеством твердых и газообразных веществ.

Зона 3. Зона коксования. Тяжелые фракции, которые не были смещены и не переведены в газообразное состояние, подвергаются пиролизу.

Зона 4. При достаточном падении температуры закачиваются химические превращения. Через эту зону фильтруются газообразная и жидкая продукция. Здесь наблюдается следующие явления: в области, примыкающей к зоне реакций, протекают последовательно испарение и повторная конденсация легких фракций нефти и воды, изначально присутствовавшей в месторождении; происходит также конденсация воды, являющейся продуктом химических реакций. Явления испарения — конденсации способствуют ускорению процесса теплоты к дальней границе зоны 4: в области, где температурный уровень ниже температуры конденса-ции воды, возникает зона, характеризуемая значением водонасыщенности, превышающим начальное значение водонасьпценности данного место-рождения (водяной вал); этот слой проталкивает перед собой вал нефти (зону, характеризуемую повышенной относительно начального уровня нефтенасьпценностью) [1].

## Результаты

Устойчивость модели

В процессе получения времени горения, пришлось решить проблемы связанные с масштабами, как временными, так и масштабами длины пласта, для того чтобы расчеты были близки к реальным условиям, но при этом не измерялись в десятках метрах и десятках дней для расчета модели. Поэтому после некоторых тестовых экспериментов было решено взять метровый пласт и рассматривать его в рамках 12 часов при  $\Delta t = 0.1$  с,  $\Delta x = 0.01$  м.

Как показали расчеты, в этих масштабах можно оценить процессы, связанные с анализом фильтрационных свойств пласта.

Скорость фронта горения

После нахождения времени, определим скорость передвижения фронта окисления пласта для характерных перепадов давления между нагнетающей и добывающей скважинами (табл.1-2). Различие давлений на нагнетающей и добывающей скважинах обусловлено выполнением закона Дарси о способности пород пласта пропускать жидкости и газы при перепаде давления. Рассматриваются случаи при  $\Delta P = 0.25$ , 1, 1.5, 5 атм. Реальные возможности воздухонагнетающей техники позволяют создавать перепад давления от 0.1 атм до 1.5 атм, это к тому же зависит от расстояния до добывающей скважины.

Автор	К, мД	V, м/ч	Метод
Onyekonwu [4]	6000	0.16	Эксперимент на трубе горения
Jaafar Sadiq F. A. Oklany [5]	4000	0.01	Аналитика
Результаты, проведенные в представленной работе	1000	0.18	Аналитика по модели БашГУ

Табл.	1.	Скорости	фронта	горения	по	результатам	своей	работы	ИЗ	зарубежных	исследован	ий
-------	----	----------	--------	---------	----	-------------	-------	--------	----	------------	------------	----

Автор	Е <sub>а</sub> , Дж/Моль	T <sub>max</sub> , K	Метод
Onyekonwu [4]	-	810	Эксперимент
Jaafar Sadiq F.A. Oklany [5]	77000	622	Аналитика
Результаты, проведенные в представленной работе	80000	696	Аналитика по модели БашГУ

Табл. 2. Пиковые температуры по результатам своей работы и зарубежных исследований

## Выводы

Проверка численной схемы на устойчивость позволила сэкономить время расчета каждого эксперимента в десятки раз. В среднем расчет с шагом 0.01 с занимает 2-3 часа, в то время как расчет с шагом 0.001 с около 16ч. Результаты получены на основе 200 расчетов.

Получена скорость прохождения фронта горения для ВПГ в зависимости от различного перепада давления. Отличия результатов с зарубежными исследованиями связаны с различными относительными фазовыми проницаемостями, характерными параметрами пласта [6]. Полученные зависимости позволяют провести экспресс-оценку распространения фронта горения для месторождения-кандидата на внедрение метода вытеснения нефти внутрипластовым горением.

## ЛИТЕРАТУРА:

1. Бурже Ж., Сурио П., Комбарну М. Термические методы повышения нефтеотдачи пластов

2. Gottfrid B.S. A mathematical model of thermal oil recovery in linear systems. SPE , vol.5.

3. Азиз Х., Сеттари Э. Математическое моделирование пластовых систем (2004)

4. Experimental and Simulation Studies of Laboratory In-Situ Combustion Recovery by M.O. Onyekonwu,

U. of Port Harcourt, and K. Pande, H.J. Ramey Jr., and WE. Brigham, Stanford U.

5. An In-Situ Combustion Simulator for Enhances Oil Recovery by Jaafar Sadiq F. A. Oklany Salford U.

6. Чарный И.А. Подземная гидрогазодинамика. – М.: Гостоптехиздат, 1963.- 396 с.

## УДК 69.07

Д.С. Краморов (Санкт-Петербургский государственный политехнический университет), В.А. Полушин (ООО "Йорис Иде")

## ИССЛЕДОВАНИЕ СПОСОБОВ ОБЪЕДИНЕНИЯ ТОНКОСТЕНННЫХ ПРОФИЛЕЙ В ДВОЙНОЕ СЕЧЕНИЕ

Тонкостенный стержень — стержень, у которого все три основных размера (наибольший и наименьший размеры поперечного сечения и длина) являются величинами различного порядка. В отличие от обычных (сплошных) стержней, сечения тонкостенного стержня при деформации не остаются плоскими (явление депланации), что исключает возможность использования при расчёте гипотезы плоских сечений [1]. Благодаря лёгкости и экономичности, тонкостенные конструкции получили широкое распространение в строительстве. Относительно легкий вес также не ограничивает инженеров и производителей

в выборе формы поперечного сечения профилей [2]. В некоторых случаях для восприятия расчетных нагрузок требуется объединить два профиля в составное сечение.

Целью данной работы является исследование влияния различных типов объединения двух тонкостенных Z—образных профилей. Данная форма сечения профиля широко используется, так как при перевозке позволяет наложить несколько профилей друг на друга, существенно уменьшая затраты на транспортировку [3]. За основу был выбран профиль РZ300 из сортамента фирмы Joris Ide [4] с толщиной Змм (в случае выбора другого типа профиля об этом указано дополнительно). Материал конструкции – сталь (E = 210 ГПа, v = 0.3) в упругой постановке. Расчеты производились в конечно-элементной программе ABAQUS [5].

Исследование одиночного Z-профиля (рис. 1) показало, что для простоты моделирования можно опускать скругление и использовать оболочечное построение. Причем, этим можно пользоваться без потери точности, так как оболочечная модель лучше твердотельной и по напряжениям, и по перемещениям на 5%, тогда как отсутствие скругления ухудшает модель примерно на 6% по обоим параметрам.

Рис. 1. Общий вид Z профиля

В ходе расчета балки составного сечения (рис. 2) находилась

зависимость крутильной жесткости и критической силы на устойчивость в зависимости от способа объединения сечений. Также были найдены перемещения профилей при изгибе и Рассматривались следующие сжатии. варианты объединения сечения: объединение отсутствует, объединение соединительными планками по верху и соединительными низу сечения. объединение диафрагмами, объединение диафрагмами и планками по верху и низу.

Соединительные планки и диафрагмы имеют толщину 4 мм, ширина планок – 150 мм, длина планок,

Рис. 2. Общий вид составного сечения

ширина и высота диафрагм определяется габаритами сечения. Крепление планок и диафрагм профилю при моделировании считается идеальными (достигалось за счет объединения узлов планки и профиля). Граничным условием для модели являлась жесткая заделка, реализованная запрещением перемещений для всех узлов крайнего сечения. Крутящий момент для исследования крутильной жесткости моделировался через две пары сил (100 кгс каждая) в верхней и нижней части сечения на расстоянии друг от друга в 150 мм на свободном конце балки. Нагрузка для исследования устойчивости балки при сжатии приложена к свободному концу Z-профилей и равномерно распределена по периметру профиля в направлении оси профиля с интенсивностью 10 кг/см. При моделировании варианта без объединения равномерность приложения нагрузки обеспечивается введением единственной диафрагмы на свободном конце профиля. Это также позволяет исключить из рассмотрения локальные деформации профиля в области приложения нагрузки.

Выводы: введение планок значительно повышает крутильную жесткость составного сечения (в 15 – 20 раз при шаге планок 1.5 м) и несущую способность по устойчивости на сжатие (в 5 раз), перемещения уменьшились на 15%; уменьшение шага планок ведет к повышению несущей способности составного сечения (при уменьшении шага до 0.75 м крутильная жесткость увеличивается в 2-3 раза – относительно шага в 1.5м, коэффициент запаса по устойчивости в 1.5 раза, перемещения уменьшились на 8%); соединительные

диафрагмы не оказывают значительного влияния на крутильную жесткость и несущую способность по устойчивости на сжатие (увеличение в 1.02 раза по жесткости и в 1.2 по устойчивости); эффекта от работы соединительных диафрагм можно добиться в случае значительного уменьшения шага диафрагм, однако, такой подход не может считаться приемлемым с точки зрения экономичности.

В прошлых экспериментах крепление планок к профилю при моделировании считалось идеальным и достигалось за счет объединения узлов планки и профиля. Однако для более точных результатов стоит учесть податливость саморезов. Для моделирования данной ситуации (рис. 3) каждая планка крепится к профилю благодаря четырем стержням (2D балочное построение, с заданным круглым сечением, диаметр – 5.5 мм, длина – 6 мм, материал – сталь). Требуется узнать степень влияния податливости саморезов на несущую способность профилей. Характеристика для сравнения – коэффициент запаса по устойчивости.



Вид нагружения	Сила, тс	Идеальное крепление	Крепление саморезами	Разница
		-		
Сжатие	10	4.13	3.42	17,2%
Сжатие/изгиб	7/3	4.3	3.59	16.5%
Сжатие/изгиб	5/5	3.09	2.69	12.9%
Сжатие/изгиб	3/7	2.47	2.12	14.2%
Изгиб	10	1.88	1.6	14.9%

Табл. 1.	Сравнение	креплений
----------	-----------	-----------



Рис. 4. Кривые несущей способности

После сравнения двух профилей можно сделать вывод, что идеально жесткое крепление планок к профилю уменьшает точность расчета несущей способности примерно на 15%. Этой погрешности можно избежать, учитывая в расчете податливость саморезов. Для этого вводится понижающий коэффициент, после домножения на который происходит уточнение результата. В данном случае стоит взять коэффициент равный 0,85.

Были построены кривые несущей способности. На диаграмме (рис. 4) нанесены точки, соответствующие состоянию, при котором коэффициент запаса достигает значения, равного единице. По горизонтальной оси отложен максимальный изгибающий момент, а по вертикальной – нормальное усилие.

По итогам исследования можно утверждать, что оптимальным способом объединения двух тонкостенных профилей в двойное сечение является объединение соединительными планками. Также был получен понижающий коэффициент – равный 0.85, позволяющий учитывать в расчете податливость саморезов.

#### ЛИТЕРАТУРА:

1. Власов В. З., Тонкостенные упругие стержни, 2 изд., М., 1959. О.В. Лужин.

2. Georgieva IB, Schuereman L, Pyl L, Composed columns from cold-formed steel Z-profiles: Experiments and code-based predictions of the overall compression capacity. Engineering Structures 37 (2012).

3. Georgieva IB, Schuereman L, Pyl L, DeRoec G. Experimental investigation of built-up double-Z members in bending and compression. Thin-Wall Struct 2011.

4. ТУ 1121-001-79850813-2012 «Профили холодногнутые из оцинкованной стали для строительства» Э.Л. Айрумян.

5. Abaqus/CAE User's Manual, Dassault Systèmes, 2012.

УДК 004.492

К.С. Буковская, В.А. Кузькин, А.Ю. Панченко (Санкт-Петербургский государственный политехнический университет)

## ИССЛЕДОВАНИЕ РЕОЛОГИЧЕСКИХ СВОЙСТВ ДВУХФАЗНЫХ СМЕСЕЙ

Одним из методов интенсификации работы нефтяных и газовых скважин является гидроразрыв пласта. Гидравлический разрыв пласта заключается в формирование трещин в массивах газо-, нефте-, водонасыщенных и других горных породах под действием подаваемой в них под давлением жидкости. Операция проводится в скважине для повышения дебита за счет разветвленной системы дренирования, полученной в результате образования протяженных трещин. Реализация гидроразрывов пластов на газовых скважинах стала возможной с появлением насосных агрегатов, обеспечивающих скорость закачки 3–4 куб. м/мин при давлении 100 МПа.

При закачке в скважину рабочей жидкости с высокой скоростью на ее забое создается высокое давление. В качестве рабочей жидкости, как правило, используют загущенные жидкости на водной или углеводородной основе. Вместе с рабочей жидкостью закачивают закрепляющий агент, заполняющий трещину и препятствующий ее смыканию. При применении загущенной жидкости за счет снижения ее утечек в пласт можно поднять забойное давление при значительном снижении скорости закачки и за счет ее песконесущей ее способности транспортировать закрепляющий агент по всей длине трещины. Для поддержания трещины в открытом состоянии, как правило, в терригенных коллекторах используется расклинивающий агент — проппант.

Актуальной задачей является разработка методики проведения предсказательного моделирования процессов гидроразрыва. Создание такого метода связано с разбиением

процесса гидроразрыва на подпроцесс — и подробное моделировании каждого из процессов для создания упрощенных схем их учета. Данная работа посвящена исследованию движения двухфазной смеси в каналах и определению реологических свойств смеси и состоит из трех частей.

В первой части работы проведено моделирование движения двухфазной жидкости (несущая жидкость и проппант) в канале с использованием алгоритма совмещения пакетов ANSYS FLUENT и EDEM (Coupling Module). Целью является установление зависимости скорости движения смеси от концентрации частиц проппанта.

Было смоделировано течение Пуазейля для модели в виде параллелепипеда. На входе и выходе задана разность давлений. На боковых гранях: касательное напряжение  $\tau = 0$ , (проскальзывание без сопротивления)

На верхней и нижней границах скорость отсутствует  $\bar{\upsilon}=0$ , (условие прилипания жидкости).

По графику (рис. 1) можно наблюдать, что с увеличением концентрации частиц отношение вязкостей меняется слабо. В теории [3] и эксперименте отношение вязкостей увеличивается. Таким образом, данная реализация Coupling Module не позволяет учитывать изменение реологии смеси вследствие добавления частиц твердой фазы. Можно сделать выводы, что моделирование с помощью Coupling Module не является достаточно достоверными для случая моделирования процесса течения двухфазных смесей.

Во второй части работы была измерена скорость вытекание смеси под действием силы тяжести из воронки аналогичной воронке Марша. Была задана объемная концентрация частиц, и измерялось время вытекания - воды, жидкости и смеси с частицами из воронки.

Была получена зависимость (рис. 2), с помощью которой можно сделать вывод: с увеличением концентрации частиц время вытекания смеси увеличивается, поскольку увеличивается эффективная вязкость смеси, как и предсказывается теорией [1].



Рис. 1. Зависимость концентрации от отношения вязкостей

Рис. 2. Зависимость отношения времени вытекания смеси к времени вытекания жидкости от объемной концентрации частиц

В третьей части проведено экспериментальное исследование скорости оседания частиц в жидкости. Для измерения скорости оседания частиц в жидкости использовался высокий цилиндрический сосуд и вязкая жидкость, частицы помещались на поверхность жидкости и отпускались, весь процесс осаждения частиц снимался на высокоскоростную камеру. Для определения вязкости жидкости был применен метод Стокса [2]. С помощью программы ТЕМА motion были получены значения для частицы именно координат и времени, с помощью которых были построены графики зависимостей координат от времени, на них были рассмотрены наиболее прямолинейные участки и получены значения средних скоростей по формуле: V\_cp =  $(y_2-y_1)/(t_2-t_1)$ . Из скорости осаждения уединенной частицы была найдена вязкость жидкости, которая составила  $\mu$ =46,3 Poise. Количество частиц и их концентрация принимали следующие значения: 1-0.5%, 2-1.1%, 5-2.8%, 10-5.6%, 100-56.1%.



Рис. 3. Зависимость скорости осаждения частиц от концентрации

По полученным данным была посчитана концентрация частиц и получена зависимость скорости от концентрации частиц (рис. 3), из которой следует что с увеличением концентрации частиц увеличивается и скорость осаждения, но так как в программе ТЕМА подсчет осуществляется с погрешностями и частицы рассматриваются не по отдельности, а как группы частиц, обнаружено что при движении группы частиц их скорость возрастает с увеличением концентрации, в отличие от оседания равномерно распределенных частиц. Таким образом, можно сделать вывод о том, что значение совпадает с теоретическим [2] и зависимость верна.

#### ЛИТЕРАТУРА:

1. В.А. Волков. Коллоидная химия. – Издательство "Мир", Москва, 1979. 768 с.

2. А.С. Чех. Определение вязкости жидкости по методу Стоксая. – Издательство ЮУрГУ, 2010, 100с.

3. Л-Шарма. Влияние ширины трещен на реологические свойства проппанта. – SPE Ежегодная конференция и выставка, Даллас, Техас, США 9-12 Октября 2005.

4. Л.Г.Лойцянский. Механика жидкости и газа. – Гостехиздат, 1950. 676 с.

5. Г.Шлихтинг. Теория Пограничного Слоя. – Издательство МЭИ, 2000. 374 с.

## МОДЕЛИРОВАНИЕ ЭЛЕКТРИЧЕСКОГО ОТКЛИКА ГЕТЕРОГЕННОЙ СРЕДЫ ПРИ УПРУГОМ ИМПУЛЬСНОМ ВОЗДЕЙСТВИИ

В настоящее время для оценки напряженного состояния железобетонных конструкций широко используются методы, основанные на наблюдении первых признаков разрушения области концентрации В напряжений. Однако их применение возможно только в том случае, если известны локальные механические свойства материала в области концентрации напряжений. Их знание также необходимо при проектировании поскольку именно зоны концентрации сооружений, напряжений являются очагами зарождения трещин, развитие которых приводит в конечном итоге к потере несущей способности и разрушению конструкции [1].

Сочетанием аппарата механики сплошных сред и средств дефектоскопии можно осуществлять моделирование состояния несущих конструкций здания, в частности, на основе анализа напряженно-





деформированного состояния (НДС) в бетонных конструкциях. Это позволяет эффективно оценить наличие и количество дефектов, а также предупредить или предотвратить обрушения, что исключает человеческие жертвы. Таким образом, проблема исследования согласования электрического отклика среды с характером неоднородностей в ней и результатами механического нестационарного воздействия является актуальной как в фундаментальном, так и в прикладном отношении.

Эффект механоэлектрических преобразований в диэлектрических материалах известен достаточно давно, некоторые из аспектов его объяснения и использования обсуждаются, например, в [2 - 5]. Появление электрического отклика диэлектрической среды объясняется, в частности, для бетонных конструкций, следующим механизмом: «при деформировании бетонных блоков происходит движение имеющихся и вновь образованных дислокаций, которые вместе с заряженными точечными дефектами, окружающими их, участвуют в электрических образовании двойных слоев. являющихся важным звеном механоэлектрических преобразованиях при воздействии акустических волн. При одноосном сжатии эти перемещения дефектов создают токи, которые имеют направленность из зон нагружения в зоны разгрузки и могут быть зарегистрированы соответствующей аппаратурой. Акустические волны приводят в действие механизм, при котором происходят колебания величины дипольного момента двойных электрических слоев вследствие изменения расстояния между зарядами разного знака. В результате этого происходит эмиссия электрических сигналов».

Таким образом, параметры электрического отклика среды, или электронной эмиссии (ЭЭ), увязываются с характером деформирования среды, приводящего к движению электрических зарядов. Ясно, что количественные оценки параметров деформирования упругой среды в окрестности включений, трещин, неоднородностей и т.п. при прохождении упругой (акустической) волны, заданной на границе анализируемой области в виде импульса известной формы и интенсивности, позволят более точно и физически достоверно связать

параметры НДС с параметрами ЭЭ. Такое описание делается с помощью соотношений механики деформируемого твердого тела с привлечением численных методов.

Рассмотрим образец из цементного камня размером 10х10см. По техническим причинам принимаем во внимание двумерную модель.

На рис. 1 показано схематическое расположение пьезоэлектрического источника в образце, относительно заданного элемента электрического приемника. Символом *i* обозначен единичный вектор направления дипольного момента *P* пьезоэлемента, расположенного в точке *B*, численное значение которого является произведением величины заряда *q* на одной из поверхностей на расстояние между поверхностями *l* (толщина пьезоэлемента), *r* – радиусвектор от источника к заданной точке *A* поверхности приемного датчика. Стрелкой обозначено направление удара по образцу. Образец находится в системе координат *x-y*, *a* - угол между направлением дипольного момента и радиус-вектором *r*.

Начальные и граничные условия: рассматривается невозмущенное начальное состояние на внешней границе. Плотность равна начальной плотности 2.3 г/см<sup>3</sup>. Напряжения равны нулю, продольные и поперечные смещения, скорости смещения на свободных стенках равны нулю, нормальное и касательное напряжение равно нулю, на нижней границе так же продольные и поперечные смещения, скорости смещения равны нулю. Контактные условия с включением: нармальные напряжения равны, сумма касательных составляющих компонент тензора напряжения равна нулю, продольные и поперечные перемещения равны. Нагрузка включает в себя функцию по пространству и времени.

Уравнения, входящие в математическую постановку являются фундаментальными уравнениями механики сплошных сред, а именно: уравнение движения, уравнение неразрывности, соотношения для компонент тензора скоростей полных деформаций, соотношения Коши, физические соотношения – закон Гука.

Численный алгоритм основан на методе Рунге-Кутта. Для вычислений используем двух шаговую схему предкитор-корректор.



Рис. 2. Электрический отклик на ударное возбуждение образца цементного камня размером 10х10см: а) бездефектный, б) с включением

Преобразуем полученный сигнал в амплитудно-частотные спектры ЭС при помощи быстрого преобразования Фурье. На рис. 3 мы можем судить о наличии включений(дефектов) в образце по ширине спектра ЭС и по количеству пиков. Количество пиков увеличивается за счет отражения акустической волны от дефекта в образце, затем вновь об главную грань, боковые грани и т.д. Вследствие чего удлиняется спектр.



Рис. 3. Спектральные характеристики электрических сигналов из образцов цементного камня размером 10х10 см: а) бездефектный, б) с включением

Выводы: характер отражения свидетельствует о наличии неоднородности, а интенсивность, с которой происходит отражение, напрямую связана с размером дефекта. Связь смещения границ раздела в неоднородном образце из диэлектрического материала с параметрами электромагнитного отклика устанавливается достаточно уверенно.

#### ЛИТЕРАТУРА:

1. Hydraulic fracturing stress measurements: Special issue // Int. J. Rock Mech. Min. Sci. & Geomech. Abstr. - 1989. - Vol. 26. - No. 6.

2. Малышков Ю. П., Фурса Т. В., Гордеев В. Ф., Сатарова Р. М., Пак С. С. Способ неразрушающего контроля прочности изделий. Авт. Свид. №1415116. // Бюл. Изобр. 1988, №29.

3. Фурса Т.В, Данн Д.Д. Механоэлектрические преобразования в гетерогенных материалах, содержащих пьезоэлектрические включения - ЖТФ, 2011, т. 81, вып. 8, С. 53 – 58.

4. Люкшин Б.А., Герасимов А.В., Кректулева Р.А., Люкшин П.А. Моделирование физикоматематических процессов в неоднородных конструкциях // Новосибирск: Изд-во СО РАН, 2001.

5. Беспалько А.А., Суржиков А.П., Хорсов Н.Н., Яворович Л.В., Климко В.К., Штирц В.А., Шипев О.В. Наблюдения изменений состояний массивов горных пород после массового взрыва по параметрам электромагнитной эмиссии // Физическая мезомеханика, 2004, т. 7, спец. Вып. Ч. II, С. 253 – 256.

#### УДК 538.911, 539.32

И.Ю. Зубко, М.В. Симонов (Пермский национальный исследовательский политехнический университет)

## ОПРЕДЕЛЕНИЕ УПРУГИХ МОДУЛЕЙ С ПОМОШЬЮ ЭНЕРГЕТИЧЕСКОГО ПОДХОДА ДЛЯ ОБРАЗЦОВ КОНЕЧНЫХ РАЗМЕРОВ С ГПУ-РЕШЕТКОЙ

Возможности современной технологии позволяют получать различные материалы, состоящие из небольшого числа атомов, но свойства таких материалов затруднительно изучать экспериментально, а также отсутствует достаточное количество теоретических исследований механических свойств материалов, состоящих из конечного числа атомов.

В настоящее время большинство научных работ, посвященных теоретическому исследованию механических свойств металлических кристаллов, рассматривают бесконечный набор атомов кристаллической решетки [5, 6, 9]. Метод атомарной статики представляет собой довольно простой инструмент для исследования механических свойств кристаллических материалов.

Проводимые с помощью дискретного подхода теоретические исследования упругих свойств металлов с ГЦК- и ОЦК- решетками [1, 2] показало, что для них наблюдается зависимость модулей от размера образца, наиболее заметно проявляющаяся для тел микро- и нано- размеров.

Целью данной работы является исследование механических свойств конечноразмерных образцов с ГПУ-решеткой и их зависимости от размеров.

Задачи исследования: выбор потенциала межатомного взаимодействия, определение равновесной конфигурации решетки, определить зависимость упругих модулей от числа атомов и исследовать симметрию тензора линейно-упругих свойств для образцов с ГПУ-решеткой.

Для металлов наряду с гранецентрированной (ГЦК) и объемоцентрированной кубической (ОЦК) кристаллической решеткой одним из наиболее распространенных типов является гексагональная плотноупакованная (ГПУ) решетка [4]. Такое строение имеют титан, цинк, цирконий, бериллий, магний и ряд других металлов.

При исследовании механических свойств образца с ГПУ-решеткой конечных размеров для исключения влияния на результат наложения классов симметрий образца и решетки рассматривается тело, имеющее оси симметрии такого же порядка, что и сама кристаллическая решетка [3].

Материалы с ГПУ-строением имеют два параметра кристаллической решетки — расстояние между эквивалентными слоями атомов b и межатомное расстояние а для слоя. Для решения системы двух уравнений, получаемых для определения параметров a, b, была использована итерационная процедура. Для моделирования взаимодействия атомов в металлах с ГПУ-строением выбирается степенной потенциал Леннард-Джонсовского типа, потенциал Ми:  $\varphi(\mathbf{x}) = \beta \left( n(\alpha/|\mathbf{x}|)^m - m(\alpha/|\mathbf{x}|)^n \right) / (m-n), m, n \in N$  (1). Было получено соответствие параметров решетки и параметров потенциала Ми для различных металлов с ГПУ-решеткой (табл. 1).

1 0000						
	Металл	Параметр п	Параметр т	α (мкм)	b/a	Погрешность b/a
1.	цирконий	5	3	0.439	1.594	1.65%
2.	магний	5	3	0.435	1.624	0.20%
3.	титан	5	3	0.401	1.592	1.77%
4.	кобальт	13	12	0.251	1.632	0.06%
5.	гелий	14	9	0.359	1.633	0.00%

Табл. 1

Для расчета упругих модулей материала, состоящего из ячеек ГПУ-решетки, необходимо исследовать симметрию тензора упругих свойств. ГПУ-решетка обладает одной осью симметрии 3-го порядка и двумя взаимно ортогональными осями симметрии 2-го порядка, ортогональными первой оси. В случае ГПУ-решетки с учетом общих свойств и симметрии решетки получается 8 ненулевых независимых компонент для несимметричных мер напряженного и деформированного состояний и 5 независимых компонент для симметричных мер НДС. Что совпадает с известными из литературы [7, 8] значениями. Все

остальные компоненты либо выражаются через найденные компоненты, либо равны нулю. Выбирая различные виды деформирования и записывая для них упругий закон можно получить все 8 независимых компонент тензора линейно-упругих свойств.

Для решения задачи об определении упругих свойств образца конечных размеров с ГПУ-решеткой задается вид деформационного градиента и определяется текущая конфигурация кристалла. Для расчета упругих модулей в текущей конфигурации кристалла вычисляется полная потенциальная энергия образца, отнесенная к его объему. Приравнивая квадратичные слагаемые в ее разложении в степенной ряд по параметрам деформирования упругому потенциалу, определяются упругие модули образца. При повторении расчетов для различного числа атомов в решетке упругие модули образуют числовые последовательности, быстро сходящиеся с ростом размеров образца.

Получено, что упругие модули ГПУ-кристалла зависят от размеров образца. Эта зависимость имеет горизонтальную асимптоту, соответствующую макроскопическому монокристаллическому телу с известными упругими свойствами, что позволяет провести идентификацию параметров потенциала взаимодействия атомов.

На примере магния были проведены численные эксперименты и проведена процедура идентификации параметров потенциала. Значения упругих констант полученных при моделировании (число атомов устремлено к бесконечности):  $C_{1111}^{\infty} = 521,90\beta / \alpha^3$ ,  $C_{1122}^{\infty} = 262,49\beta / \alpha^3$ ,  $C_{1133}^{\infty} = 175,34\beta / \alpha^3$ ,  $C_{3333}^{\infty} = 603,14\beta / \alpha^3$ ,  $C_{1212}^{\infty} = 129,95\beta / \alpha^3 \approx (C_{1111} - C_{1122}) / 2 = 129,71\beta / \alpha^3$  (2).

Из экспериментов [9] для магния известны значения упругих модулей, из которых можно определить параметр  $\beta$  потенциала Ми. Принимая, что  $C_{1111}^{Mg} = C_{1111}^{\infty}$ , получим  $\beta = 4,2118 \cdot 10^{-10}$  (Дж) (3), тогда  $\beta / \alpha^3 = 0.1145$  (ГПа), то есть:  $C_{1111}^{\infty} = 59,76$  (ГПа),  $C_{1122}^{\infty} = 30,05$  (ГПа),  $C_{1133}^{\infty} = 20,08$  (ГПа),  $C_{3333}^{\infty} = 69,06$  (ГПа),  $C_{2332}^{\infty} = 13,75$  (ГПа),  $C_{1212}^{\infty} = 14,88$  (ГПа). (4)

Наибольшее отклонение в вычисленных с помощью указанных параметров модулях (4) от экспериментальных значений составляет 16%. Такое отклонение связано с недостаточной точностью предельного перехода и с тем, что расчеты проводились для идеально чистого металла, а экспериментальные данные получены для технически чистого магния, содержащего примеси.

#### ЛИТЕРАТУРА:

1. Зубко И.Ю., Трусов П.В. Определение упругих постоянных ГЦК-монокристаллов с помощью потенциала межатомного взаимодействия // Вестник Пермского национального исследовательского политехнического университета. Механика. 2011. № 1. С. 147 – 169.

2. Зубко И.Ю., Мелентьева О.В., Морозова В.П., Кочуров В.И. Вывод упругого закона монокристаллов металлов из потенциала межатомного взаимодействия // «Вестник Нижегородского университета им. Н.И. Лобачевского». – Н. Новгород: Изд-во ННГУ им. Н.И. Лобачевского, 2011. №4. Ч.5. – С. 2181 – 2183.

3. Симонов М.В., Зубко И.Ю. Определение равновесных параметров решетки различных ГПУмонокристаллов с помощью потенциала межатомного взаимодействия Ми // Вестник Пермского национального исследовательского политехнического университета. Механика. 2012. № 3. С. 204 – 217.

4. Васильев Д.М. Физическая кристаллография. – М.: Металлургия, 1981. – 248 с.

5. Кривцов А.М. Деформирование и разрушение твердых тел с микроструктурой. – М.: Физматлит, 2007. – 304 с.

6. Кривцов А.М. Упругие свойства одноатомных и двухатомных кристаллов: Учебное пособие. – СПб.: Изд. СПбГПУ, 2010. – 144 с.

7. Черных К.Ф. Введение в анизотропную упругость. – М.: Наука, 1988. – 190 с.

8. Баранов М.А., Дубов Е.А., Дятлова И.В., Черных Е.В. Атомно-дискретное описание влияния анизотропных межатомных взаимодействий на упругие свойства ГПУ-металлов // Физика твердого тела. 2004. Т. 46. № 2., С. 212 – 217.

9. Кривцов А.М., Подольская Е.А. Моделирование упругих свойств кристаллов с гексагональной плотноупакованной решеткой // Механика твердого тела, № 3, 2010., С. 77 – 86.

## СЕКЦИЯ «ВИРТУАЛИЗАЦИЯ, УПРАВЛЕНИЕ И ЗАЩИТА ИНФОРМАЦИИ В КОМПЬЮТЕРНЫХ СЕТЯХ»

УДК 004.89

## А.А. Лукашин (Санкт-Петербургский государственный политехнический университет)

## НЕЙРОУПРАВЛЕНИЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЕМ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫХ РЕСУРСОВ ОБЛАЧНОГО КЛАСТЕРА

Информационно-телекоммуникационные технологии становятся важной составляющей инфраструктуры, используемой для инновационного развития научно-технической и социально-образовательной деятельности [1]. В современных условиях использование методов виртуализации и решений на основе технологии «облачных вычислений» (англ. Cloud Computing) позволяет существенно расширить возможности управления ресурсами информационно-телекоммуникационной среды и гетерогенными компьютерными компонентами, что и обуславливает во многом рост популярности данного подхода [2].

Однако в рамках функционирования облачной инфраструктуры возникает проблема неравномерного распределения ресурсов. Каждый узел виртуализации (физический вычислительный узел, ресурсами которого управляет гипервизор) может поддерживать существование нескольких виртуальных машин, на которых выполняется программное обеспечение пользователей. Можно выделить три базовых типа ресурсов, потребляемых виртуальной машиной (и приложениями на ней): CPU (загрузка процессора), Memory (оперативная память), I/O (операции ввода/вывода).

Так как невозможно заранее определить, какой вид нагрузки будет превалировать в рамках функционирования виртуальной машины, возникают перекосы по потреблению ресурсов. Таким образом, мы получаем неоднородную систему с недетерминированными процессами изменений. Также стоит учитывать, что функционирование большого количества вычислительных узлов это экономически невыгодно. Обобщая вышеизложенное, перед нами стоит задача многокритериальной оптимизации, где минимизируемый функционал отвечает распределению ресурсов. Также эту задачу можно отнести к классу мультиагентных систем – в данном случае под агентами понимаются гипервизоры, которые снимают показания по загрузке узла и сообщают их управляющему узлу.

#### Модель системы управления

Модель облачной инфраструктуры можно представить как иерархическую структуру (рис. 1) [3]:



Рис. 1. Иерархическая модель системы

В работе предложен следующий подход к управлению ресурсами кластера:

- 1. Гипервизоры анализируют загрузку узлов по трем компонентам(CPU, Mem, I/O)
- 2. В рамках изменений в системе решения о конфигурации принимается с применением нейронной сети.

Таким образом, можно говорить о наличии мультиагентной системы, в которой агентами выступают гипервизоры, объектами управления — узлы кластера, ресурсами — CPU, Memory и I/O, а заявки на запуск, остановку или реконфигурацию BM в данном случае являются событиями внешней среды (по отношению к облачной платформе).

Обучение нейросети предлагается проводить методом «без учителя» (unsupervise learning) по следующему алгоритму:

- 1. При изменении в системе на управляющем узле формируется вектор параметров.
- 2. Далее нейросетью формируется решение по оптимальной конфигурации системы.
- 3. Затем оптимальная конфигурация считается на базе математического решения (минимизация функционала).
- 4. Два этих решения сравниваются, и формируется вектор невязки для корректировки связей в нейросети.
- 5. Обучение производится до тех пор, пока решения нейросети не начнут коррелировать с аналитическим решением.

## Математическое обеспечение модели

Задача поиска оптимального распределения виртуальных машин в случае, когда мы хотим добиться минимизации числа используемых узлов облачной системы, родственна N-мерной задаче упаковки контейнеров (Bin Packing Problem), где N отвечает числу выбранных характеристик виртуальных машин, принимаемых в расчет при распределении [4].

Постановка результирующей однокритериальной задачи выглядит следующим образом [5]:

$$\min \frac{1}{3} \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \left( C_{S_{i}} - \sum_{j=1}^{m} C_{j} x_{ij} \right)^{2}} + \frac{1}{3} \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \left( m_{S_{i}} - \sum_{j=1}^{m} m_{j} x_{ij} \right)^{2}} + \frac{1}{3} \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \left( d_{S_{i}} - \sum_{j=1}^{m} d_{j} x_{ij} \right)^{2}}$$
При ограничениях: 
$$\sum_{j=1}^{m} C_{j} x_{ij} \leq C_{S_{i}}, \quad i = \{1, \dots, n\}, \quad j = \{1, \dots, m\}$$

$$\sum_{j=1}^{m} m_{j} x_{ij} \leq m_{S_{i}}, \quad i = \{1, \dots, n\}, \quad j = \{1, \dots, m\}$$

$$\sum_{j=1}^{m} d_{j} x_{ij} \leq d_{S_{i}}, \quad i = \{1, \dots, n\}, \quad j = \{1, \dots, m\}$$

$$\sum_{j=1}^{m} d_{j} x_{ij} \leq d_{S_{i}}, \quad i = \{1, \dots, n\}, \quad j = \{1, \dots, m\}$$

#### Моделирование процесса управления

Разработанная модель будет промоделирована в системе AnyLogic с использованием библиотек, предоставляющих функциональность нейросетей (Neuroph, FANN). Моделирование будет производиться как агентное дискретно-событийное.

По результатам моделирования можно будет говорить о применимости данного алгоритма в реальных системах. В случае положительно решения данный подход предполагается внедрить в облачную платформу OpenStack для управления распределением ресурсов.

## ЛИТЕРАТУРА:

1. Лукашин А.А., Лукашин А.А., Тютин Б.В., Котляров В.П. Архитектура сервиса для решения ресурсоемких задач в распределенной вычислительной среде // НТВ СПБГПУ Информатика. Телекоммуникации. Управление. № 4 (128) 2011 г. – Санкт-Петербург.: Изд-во СПБГПУ. 2. Лукашин А.А., Тютин Б.В. Система для реализации распределенных вычислений на основе облачной архитектуры // Технологии Microsoft в теории и практике программирования. - Санкт-Петербург: Изд-во Политехнического университета, 2011 - С. 101 – 102.

3. Лукашин А.А. Автоматизация процесса решения ресурсоемких вычислительных задач с использованием облачных технологий и сервис-ориентированной архитектуры: выпускная работа бакалавра – СПБ., 2012. – 59 с.

4. Миролюбов М.А. Оптимизация распределения нагрузки в среде облачных вычислений с помощью алгоритма динамического распределения виртуальных машин: дис... магистра – СПБ., 2013. – 115 с. 5. Черноруцкий И.Г. Методы оптимизации и принятия решений. Учебное пособие. – СПБ.: Издательство «Лань», 2001. – 384 с.

УДК 519.248

А.С. Ильяшенко, О.И. Заяц, В.С. Заборовский (Санкт-Петербургский государственный политехнический университет)

## МОДЕЛИРОВАНИЕ ВЕРОЯТНОСТНОГО ВЫТАЛКИВАЮЩЕГО МЕХАНИЗМА ДЛЯ ДВУХПОТОКОВОЙ СИСТЕМЫ МАССОВОГО ОБСЛУЖИВАНИЯ С АБСОЛЮТНЫМ ПРИОРИТЕТОМ

Объем передаваемой информации в современных компьютерных сетях огромен. Телематические устройства не всегда могут справиться с нагрузкой. По этой причине может происходить потеря передаваемых данных в телематических устройствах, используемых в сети. Еще одной проблемой является высокая сложность структуры потоков данных в современных компьютерных сетях. Входящий поток данных на входе телематического устройства, формируется множеством независимых источников и состоит из сетевых пакетов, которые могут классифицироваться по многим критериям:

- скорость передачи через каналы связи;
- алгоритмы обработки в узлах коммутации;
- доступный объем буферной памяти;
- допустимый уровень потерь.

В рамках ранних работ авторов из [4-7] были получены результаты с помощью метода производящих функций для финальных вероятностей состояний системы, описывающих поведение системы при наступлении в системе установившегося режима. Недостатком этого решения является то, что финальные вероятности не дают никакой информации о поведении системы на начальном этапе ее работы. В качестве продолжения решения задачи было принято решение об использовании метода имитационного моделирования и среды имитационного моделирования GPSS, предназначенной для моделирования такого рода систем.

Общий вид исследуемой системы представлен на рис. 1. Данная система принадлежит к классу  $\overline{M_2}/M/1/k/f_2^1$  по стандартной нотации Д. Кендалла [1] и ее модификации Г.П. Башариным [2].

Для получения экспериментальных результатов была разработана имитационная модель рассматриваемой системы в среде моделирования GPSS World. Данная модель позволяет провести процесс моделирования работы рассматриваемой системы массового обслуживания и получить интересующие характеристики вероятностей потерь.

На рис. 2 приведены результаты моделирования системы со слабой нагрузкой ( $\rho_1$ =0.2,  $\rho_2$ =0.9). В этом случае система получает на вход малое количество приоритетных

требований, а поток неприоритетных требований практически близок к пропускной способности системы.



Рис. 1. Схема системы массового обслуживания класса  $\overline{M_2}/M/1/k/f_2^1$ 

На рис. 2 и рис. 3 построены численные зависимости результатов моделирования. Проводя сравнение с результатами из ранних работ [4 – 7], можно сделать вывод, что на начальном этапе работы система ведет себя так же, как и в установившемся режиме.



Рис. 2. Вероятность потери требований при слабой загрузке системы



Рис. 3. Вероятность потери требований при сильной загрузке системы

В данной работе приведено сравнение результатов предыдущего этапа исследований аналитическими методами и результатов текущего этапа, в котором была построена имитационная модель в среде GPSS World для получения вероятностных характеристик исследуемой системы.

Одним из основных достоинств данной модели является простой и эффективный способ управления характеристиками модели, который не зависит от типа входных или выходных данных, а только влияет на поведение системы. Этим способом является изменение вероятности выталкивания неприоритетного требования приоритетным из системы в случае ее переполнения.

#### ЛИТЕРАТУРА:

1. Клейнрок Л. Теория массового обслуживания. М.: Машиностроение, 1979.

2. Башарин Г.П. Некоторые результаты для систем с приоритетами // Массовое обслуживание в системах передачи информации. М.:Наука, 1969, С. 39 – 53.

3. Avrachenkov K.E., Vilchevsky N.O., Shevlyakov G.L. Priority queueing with finite buffer size and randomized push-out mechanism. // Proceedings of the ACM international conference on measurement and modeling of computer. San Diego: ACM, 2003, P. 324 – 335.

4. V. Zaborovsky, V. Mulyukha, A. Ilyashenko, O.Zayats "Access control in a form of active queueing management in multipurpose operation networks", International Journal on Advances in Networks and Services, vol. 4, no 3 & 4, 2011, P. 363 – 374.

5. Заборовский, В.С. Удаленное управление робототехническими объектами в космических экспериментах серии «Контур» / В.С. Заборовский, А.С. Кондратьев, А.В. Силиненко, В.А. Мулюха, А.С. Ильяшенко, М.С. Филиппов // Научно-технические ведомости СПбГПУ. Информатика. Телекоммуникации. Управление – 2012. – №6(162). – С. 23 – 32.

6. Управление пакетными коммутациями в телематических устройствах с ограниченным буфером при использовании абсолютного приоритета и вероятностного выталкивающего механизма. Часть 1 / О.И. Заяц, В.С. Заборовский, В.А. Мулюха, А.С. Вербенко // Программная инженерия: – 2012. – №2. – С. 22 – 28.

7. Управление пакетными коммутациями в телематических устройствах с ограниченным буфером при использовании абсолютного приоритета и вероятностного выталкивающего механизма. Часть 2 / О.И. Заяц, В.С. Заборовский, В.А. Мулюха, А.С. Вербенко // Программная инженерия: – 2012. – №3. – С. 21–29.

#### УДК 004.056.55

## Ю.О. Чернышев, А.С. Сергеев, Е.О. Дубров (Донской государственный технический университет)

## ПРИМЕНЕНИЕ ГЕНЕТИЧЕСКИХ АЛГОРИТМОВ ДЛЯ РЕШЕНИЯ ТЕОРЕТИКО-ЧИСЛОВЫХ ЗАДАЧ КРИПТОГРАФИИ

В настоящее время надежность защиты информации в компьютерных сетях с использованием криптографических методов определяется стойкостью к криптоанализу используемой системы шифрования. Основными задачами криптографии являются разработка новых способов шифрования, стойких к методам вскрытия, а также нахождение новых способов криптоанализа существующих шифров [1].

В настоящее время в науке и технике находят широкое применение алгоритмы, основанные на природных системах. К ним относятся методы моделирования отжига, генетические, эволюционные методы, алгоритмы роевого интеллекта и т.д. [1, 2] Методы

широко используются также и для оптимизации различного круга задач, в том числе задач криптоанализа.

Ранее в [1-3] рассматривалась задача криптоанализа классических криптографических алгоритмов с использованием методов эволюционной оптимизации и генетического поиска. Результаты экспериментальной реализации криптоанализа 2-го типа методов одиночной и двойной перестановки по ключу, простой перестановки с ключом – размером таблицы приведены в [3], а также шифров простой замены на основе генетических методов (шифры Цезаря, Плейфейра, Вижинера, «двойной квадрат», магические квадраты) рассмотрены в [2, 4, 5].

Наряду с классическими симметричными алгоритмами шифрования сравнительно молодой является асимметричная криптография, которая областью включает криптосистемы с открытым ключом (для шифрования данных используется один ключ (открытый), а для расшифрования другой (секретный)). Основные концепции асимметричных криптосистем и требования к ним описаны в [6]. Здесь же рассматривается криптоанализ асимметричных алгоритмов на примере алгоритма RSA, криптостойкость которого определяется трудоемкостью факторизации больших чисел. Для проведения криптоанализа и определения секретного ключа необходимо разложение модуля <sup>N</sup> на простые множители *P* и *Q* (т.е. определение функции Эйлера  $f(N) = (P-1) \cdot (Q-1)$ ), а также

определение секретного ключа  $K_{cek}$  из уравнения  $K_{omkp} \cdot K_{cek} = 1 \mod f(N)$ , где  $K_{i\partial \partial \partial}$ известный открытый ключ (число, взаимно простое с f(N),  $K_{cek}$  - секретный ключ, подлежащий определению).

В докладе рассматривается генетический алгоритм разложения заданного числа на множители, описанный в [7, 8], а также приводятся экспериментальные результаты, представленные в табл. 1, 2.

Алгоритм разложения числа на два взаимно простых сомножителя сформулируем в следующем виде:

1. Задается число в десятичной форме.

2. Задается популяция хромосом 10000х2, где первая часть соответствует первому сомножителю, вторая часть - второму (в двоичной форме).

3. Выполняются генетические операции (кроссинговер, мутация, инверсия, элитная селекция). Применялся 4-х точечный кроссинговер между хромосомами, принадлежащими одной части (норма мутации 5%, норма инверсии 10%, количество потомков варьировалось в пределах 40 – 60%).

4. Подсчитывается целевая функция путем умножения соответствующих хромосом в двоичной форме с идентичными номерами из каждой части.

При криптоанализе асимметричных алгоритмов шифрования актуальной также является задача нахождения простого делителя заданного числа. Для проверки, является ли число простым, использовался аналогично [9] тест Миллера-Рабина, описанный в [10]. Алгоритм нахождения простого делителя числа сформулируем следующим образом:

1. Задается число в десятичной форме (32, 48 или 64 бита), переводится в двоичную форму.

2. Случайным образом генерируется начальная популяция двоичных хромосом.

3. Вычисляется целевая функция путем деления заданного числа на хромосому (деление производится в десятичной форме). В качестве целевой функции принимается остаток от деления.

4. В случае, если после деления получено целое число, переход к 6, иначе к 5.

5. Выполняются генетические операции: 4-х точечный кроссинговер случайно сформированных пар родителей, инверсия (норма 10%), мутация (норма 5%). Выполняется селекция для перехода к следующей генерации.

6. По алгоритму Миллера-Рабина проверяется, является ли число с высокой степенью вероятностью простым; если нет, то осуществляется переход к выполнению генетических операций (пункт 5).

Экспериментальные результаты применения генетического алгоритма для нахождения простого делителя числа представлены в табл. 2. Вычисления проводились на процессоре Intel Core i7 2600K (8 потоков) 8Гб оперативной памяти.

Табл. 1. Экспериментальные результаты применения генетического алгоритма для факторизации числа

Длина ключа	Размер начальной популяции (в парах)	Количество итераций
	2 000	134 664
32	3 000	122 537
	8 000	99 571
	8 000	3 400 274
48	10 000	3 259 667
	20 000	2 564 448
	20 000	84 092 423
64	24 000	79 549 001
	48 000	81 663 284

Табл. 2. Экспериментальные результаты применения генетического алгоритма для нахождения простого делителя числа

Длина ключа	Размер начальной популяции (в парах)	Количество итераций
	2 000	84 315
32	3 000	80 448
	8 000	77 304
	8 000	247 558
48	10 000	210 589
	20 000	209 557
	20 000	1 014 899
64	24 000	1 144 346
	48 000	987 467

Таким образом, представленные результаты свидетельствуют о возможности применения генетических алгоритмов для решения основных теоретико-числовых задач криптографии: факторизации числа и нахождения простого делителя числа.

В заключение заметим, что наряду с генетическими алгоритмами в последнее время все большее распространение получают биоинспирированные методы, в которых осуществляется поэтапное построения решение задачи, т.е. добавление нового оптимального частичного решения к уже построенному частичному решению [11,12].

#### ЛИТЕРАТУРА:

1. Дубров Е.О., Рязанов А.Н., Сергеев А.С., Чернышев Ю.О. Исследование возможности применения бионических оптимизационных методов для реализации криптоанализа алгоритмов шифрования // XLI Неделя науки СПбГПУ: материалы научно-практической конференции с международным

участием. Ч. VIII. – СПб.: Изд-во Политехн. ун-та, 2012. – С. 157 – 158.

2. Дубров Е.О., Рязанов А.Н., Сергеев А.С., Чернышев Ю.О. Разработка методов криптоанализа шифров перестановок и замены в системах защиты информации на основе эволюционнооптимизационных методов // Радиоэлектронные устройства и системы для инфокоммуникационных технологий: научная конференция, посвященная дню радио. – Москва, 2013. – С. 220 – 224.

3. Чернышев Ю.О, Сергеев А.С., Дубров Е.О. Применение биоинспирированных методов оптимизации для реализации криптоанализа классических и блочных криптосистем //Теоретические и прикладные вопросы современных информационных технологий: Материалы 11 Всероссийской научно-технической конференции. - Улан-Удэ: Изд-во ВСГТУ, 2012, С. 121 – 131.

4. Чернышев Ю.О., Сергеев А.С., Дубров Е.О., Рязанов А.Н. Применение эволюционных методов оптимизации для реализации криптоанализа классических шифров замены // Информатика: проблемы, методология, технологии: материалы XIII междунар. науч.-метод. конф./ВГУ. – Воронеж, 2013, С. 415 – 418.

5. Чернышев Ю.О., Сергеев А.С., Дубров Е.О., Рязанов А.Н. Разработка методов информационной защиты в экономических информационных системах на основе эволюционно-оптимизационных методов// Образование и наука в третьем тысячелетии: сб. науч. тр./ под общ. ред. В.И.Степанова. – Барнаул: Изд-во Алтайского университета, 2013, С. 134 – 140.

6. Романец Ю.В., Тимофеев П.А., Шаньгин В.Ф. Защита информации в компьютерных системах и сетях. – М.: Радио и связь, 1999. – 328 с.

7. Сергеев А.С. О возможности применения методов генетического поиска для реализации криптоанализа асимметричного алгоритма шифрования данных RSA. - Известия ВУЗов. Сев.-Кавк. Регион. Техн. Науки. 2008. № 3, С. 48 – 52.

8. Чернышев Ю.О., Сергеев А.С., Венцов Н.Н.Исследование и разработка методов генетического поиска для реализации криптоанализа алгоритма IDEA и решения основных теоретико-числовых задач криптографии. - Вестник Ростовского государственного университета путей сообщения, 2009, № 3, С. 70 – 79.

9. Кажаров А.А., Кажаров Х.А. Разработка модели криптоанализа RSA при помощи генетических алгоритмов // Информационное противодействие угрозам терроризма, 2008, № 10, С. 155 – 161.

10. Макконелл Д. Основы современных алгоритмов. – М.: Техносфера. 2004.

11. Чернышев Ю.О., Сергеев А.С., Дубров Е.О. Применение биоинспирированных методов оптимизации для реализации криптоанализа классических симметричных и асимметричных криптосистем // Системный анализ в проектировании и управлении: Сборник научных трудов 16 Международной научно-практической конференции. С-Пб.: Изд-во Политехн. Ун-та, 2012, С. 112 – 122.

12. Сергеев А.С., Третьяков О.П., Васильев А.Е., Чернышев Ю.О. Биоинспирированные методы криптоанализа асимметричных алгоритмов шифрования на основе факторизации составных чисел. - Вестник ДГТУ, том 11, № 9(60), 2011, С. 1544 – 1554.

УДК 061.68

А.С. Клюшкин, Ю.Е. Подгурский (Санкт-Петербургский государственный политехнический университет)

## АНАЛИЗ ТРАФИКА В СОВРЕМЕННЫХ КОМПЬЮТЕРНЫХ СЕТЯХ

Большинство современных средств контроля доступа в КС использует принцип перехвата всех проходящих сетевых пакетов (сетевого трафика) и классификацию их на разрешённые, запрещённые и др. потоки в соответствии с принятой политикой информационной безопасности. Для эффективной работы средств ЗИ (например, МЭ) их архитектура и алгоритмы фильтрации должны соответствовать специфическим особенностям трафика в современных компьютерных сетях. Такими особенностями являются состоятельные статистические характеристики трафика, такие как число, тип и
частота использования различных сетевых протоколов, количество одновременно открытых сеансов информационного обмена (сессий), среднее число пакетов в сессии, ожидаемый уровень сетевых атак и т.п.

Получение доступа к файлам регистрации (дампам) реального трафика какой-либо организации затруднительно, так как многие сетевые администраторы считают (и обоснованно!), эту информацию конфиденциальной и никому ее не предоставляют [1].

Для классификации сетевого трафика обычно применяются стандартные методы, основанные на анализе информации, характеризующей пакеты (номера портов, IP-адреса отправителей и получателей, типы приложений и протоколов и т.д.). Некоторые из этих методов рассмотрены ранее [2, 3]. Задача анализа в современных компьютерных сетях усложнена тем, что некоторые сетевые приложения и сервисы используют нестандартные TCP-порты. Так же стоит учесть широкое распространение P2P (peer-to-peer) трафика и приложений, туннелирующих HTTP.

В данной работе для исследования использовались дампы трафика, снятые на граничном маршрутизаторе организации, насчитывающей несколько сотен компьютеров. По соображениям конфиденциальности IP-адреса в заголовках пакетов были изменены. Файлы регистрации сетевого трафика были предоставлены организацией НПО РТК и был сняты в разное время и в разные дни при различной нагрузке сети. Всего было обработано 19 дампов, каждый из которых содержит по 1 млн. пакетов. В имени дампа (табл. 1) содержится дата и время его получения. Стоит учитывать, что трафик снимался на внешнем узле, после которого установлен межсетевой экран, который мог внести свои коррективы в полученную информацию. В ходе исследования использовались программные средства для анализа трафика Wireshark, утилита, для разбиения дампов памяти на сессии SplitCap, а так же для обработки и анализа полученной информации собственные скрипты на языке программирования python. Основная цель исследования заключалась в получении достоверной информации о характере трафика в компьютерных сетях в современных условиях. Разработчиков интересует процентное содержание в трафике пакетов разных протоколов, соотношение сессий различных протоколов, средняя длина сессий (в пакетах). Важным также является определение абсолютных и относительных значений числа пакетов в сессии к числу отдельных пакетов, так как их обработка осуществляется по различным алгоритмам [4, 5]. Подобные результаты в литературе отсутствуют. Результаты исследования приведены в таблицах.

По информации предыдущих исследований приблизительно 98,2% трафика содержит информацию о TCP-протоколе [4]. Увеличение UDP-трафика судя по всем связано с ростом использования в компьютерных сетях различных мультимедийных и интерактивных приложений.

Так же были проанализированы TCP- и UDP-сессии, попавшие в снятые дампы на предмет их количества, процентного соотношения, а так же количество пакетов в них. Под TCP-сессией будем понимать процесс обмена пакетами между двумя хостами с момента установки TCP-соединения до момента разрыва. А пот UDP-сессией будем иметь ввиду отправку пакетов от источника с ip «А» и портом «Б» к приёмнику с ip «В» и портом «Г» и в обратном направлении. То есть установившийся обмен пакетами между двумя хостами. Далее в таблице 2 приведены соотношение количества отдельных пакетов и пакетов в сессиях для TCP и UDP. Эта информация может быть полезна, так как сессии и отдельные пакеты, как правило, обрабатываются различными алгоритмами. Таким образом можно будет оптимизировать обработку пакетов в таких устройствах как, например, межсетевой экран.

Дамп	Всего пакетов	TCP	UDP	Остальные протоколы	Кол-во ТСР сессий	Кол-во UDP сессий
2013.04.08-10.00	1000000	936539	62110	1351	15315	9004
2013.04.08-10.20	1000000	940503	57861	1636	18256	10780
2013.04.08-10.40	1000000	911299	86979	1722	21252	10858
2013.04.08-14.00	1000000	579373	418594	2033	10172	6855
2013.04.08-14.20	1000000	586748	410281	2971	12573	8140
2013.04.08-14.50	1000000	626863	372130	1007	7868	5135
2013.04.08-17.20	1000000	862595	136809	596	5944	3575
2013.04.08-17.40	1000000	814356	184755	889	5950	3221
2013.04.08-18.00	1000000	460414	537474	2112	9148	7530
2013.04.08-18.30	1000000	812001	178288	9711	10481	11489
2013.04.11-10.30	1000000	780140	215230	4630	23356	17233
2013.04.11-10.50	1000000	945275	51428	3297	17692	20214
2013.04.11-12.15	1000000	959169	38584	2247	16956	9313
2013.04.11-14.00	1000000	912998	83562	3440	24164	15724
2013.04.11-14.50	1000000	894989	101321	3690	14737	8976
2013.04.11-15.15	1000000	824486	171768	3746	20007	12245
2013.04.11-17.00	1000000	884798	90214	24988	26219	15700
2013.04.11-17.20	1000000	255128	721570	23302	7459	4844
2013.04.11-17.40	1000000	888733	92778	18489	24005	14787
Итого	19000000	13939868	4011736	1048396	291554	195623

Рис. 1. Общие сведения, полученные при анализе дампов

Дамп	Отдельные tcp пакеты	Пакеты в tcp сессии	Отдельные пакеты udp	Пакеты в udp сессии
2013.04.08-10.00	1099	935440	2820	59290
2013.04.08-10.20	567	939936	5086	52775
2013.04.08-10.40	493	910806	4295	82684
2013.04.08-14.00	377	578996	1982	416612
2013.04.08-14.20	411	586337	2412	407869
2013.04.08-14.50	733	626130	1527	370603
2013.04.08-17.20	297	862298	1297	135512
2013.04.08-17.40	293	814063	1183	183572
2013.04.08-18.00	563	459851	3144	534330
2013.04.08-18.30	746	811255	5850	172438
2013.04.11-10.30	821	779319	8012	207218
2013.04.11-10.50	0	945275	0	51428
2013.04.11-12.15	963	958206	4209	34375
2013.04.11-14.00	753	912245	6424	77138
2013.04.11-14.50	538	894451	4457	96864
2013.04.11-15.15	589	823897	5168	166600
2013.04.11-17.00	701	884097	6824	83390
2013.04.11-17.20	403	254725	2767	718803
2013.04.11-17.40	914	887819	7145	85633
NTOPO	11261	13928607	74602	3937134

Рис. 2. Соотношение количества отдельных пакетов и пакетов в сессиях для TCP и UDP

Выводы. На текущем этапе исследования были проанализированы файлы регистрации сетевых пакетов. Так же были получены численные показатели соотношения протоколов TCP и UDP к остальным протоколам в сети. Определив количество сессий в исследуемом трафике, было посчитано соотношение количества пакетов к количеству сессий. Осмысление полученных результатов позволит более эффективно распределить вычислительные мощности средств защиты информации и повысить их пропускную способность.

Полученные результаты показывают:

- относительное увеличение числа пакетов и сессий UDP;
- увеличение числа одиночных пакетов TCP и UDP;
- практически постоянное наличие вредоносного трафика.

#### ЛИТЕРАТУРА:

1. H.Kim, M.Fomenkov, D.Barman, M.Faloutsos, and K.Lee, Internet traffic classification demystified: myths, Caveats, and the Best Practices // Proceedings of the 4th Conference on Emerging Network Experiment and Technology, December 09–12, 2008, P. 112–124.

2. P. Gupta and N.McKeown, Algorithms for packet classification // IEEE Network Magazine. 2001, Vol. 15, No. 2, P. 24 – 32.

3. M.L.Bailey, B.Gopal, M.A.Pagels, L.L.Peterson, and P. Sarkar, PathFinder: A pattern-based packet classifier. Proceedings of the First Symposium on Operating Systems Design and Implementation, November 1994. P. 115 – 123.

4. Андрющенко А.А. Исследование и оптимизация алгоритмов поиска данных в подсистеме фильтрации межсетевого экрана: Диссертация магистра. – СПб.: СпбГПУ, 2013.-16.06.2013.-СпбГПУ.-95 с.

5. И.К. Корсиков. Исследование алгоритмических методов повышения производительности межсетевых экранов: Диссертация магистра. – СПб.: СПбГПУ, 2013.-16.06.2013.-СпбГПУ.-102 с.

#### УДК 004.056.55

В.Ю. Аранов (Санкт-Петербургский государственный политехнический университет)

#### ОБФУСКАЦИЯ МАШИННОГО КОДА ПРИ ПОМОЩИ СЕТЕЙ ПЕТРИ

В связи с тем, что положение дел на рынке программного обеспечения (ПО) таково, что органы государственного регулирования не в силах обеспечить защиту производителей ПО от создания контрафактных копий ПО [1], встает задача обеспечения защиты прав авторов при помощи технических средств. Разработка подобных технических средств является одним из краеугольных камней в создании эффективного барьера на пути распространения контрафактного ПО. Таким образом, не смотря, на постоянное изменение законодательной базы, защита программного кода, как от нелицензионного копирования, так и от банальной кражи наукоемких алгоритмов, является актуальной задачей.

Технические средства для защиты от нелицензионного копирования можно разделить на аппаратные, подразумевающие создание доверенной вычислительной среды, и программные основанные на методах криптографии и обфускации [2]. Однако, в связи с развитием технологий облачных вычислений, создание доверенных вычислительных средств зачастую представляется либо невозможным, либо приводит к значительному увеличению эксплуатационных издержек использования облачной инфраструктуры, что приводит к предпочтительности использования программных средств основанных на иных методах.

Существует два основных программных подхода к защите ПО, которые не допускают запуск нелицензионной копии на неавторизованном оборудовании: создание криптоконтейнеров, запакованных при помощи стойких криптоалгоритмов, распаковка которых зависит от отпечатка оборудования, на котором запущен криптоконтейнер, и введенного ключа пользователя, и обфускация исполняемого машинного кода с с помощью различных методов.

К сожалению, следует отметить, что первый метод является ненадежным в том случае, если злоумышленником оказывается легальный покупатель ПО, что приводит к возможности извлечения кода из криптоконтейнера и его дальнейшего распространения без ведома правообладателя ПО.

Таким образом, обфускация является основным способом защиты ПО от создания контрафактных копий в случае невозможности или экономической нецелесообразности создания доверенной вычислительной среды. Следует отметить, что большинство методов обфускации является неустойчивым против современных технических средств анализа кода, таких как IDA+Hex-Rays или OllyDbg, что приводит к необходимости использования

принципиально новых методов защиты основанных на методах преобразования кода, для которых не существует эффективного метода их обращения либо в принципе, либо, по крайней мере, на текущий момент. Сети Петри, благодаря своим свойствам, являются одним из таких методов.

Задача достижимости подмаркировки сети Петри ограничивает задачу достижения до рассмотрения только подмножества позиций, не принимая во внимания маркировки других позиций. Задача достижимости нуля выясняет, является ли достижимой частная маркировка с нулем фишек во всех позициях. Задача достижимости нуля в одной позиции выясняет, возможно ли удалить все фишки из одной позиции. Все эти четыре задачи являются эквивалентными [3].

Поскольку задачи подмножества и равенства для множеств достижимости сетей Петри неразрешимы, то возможно, что неразрешима также и сама задача достижимости. Однако в настоящее время вопрос, разрешима ли (или неразрешима) задача достижимости, открыт. На сегодняшний день не существует ни алгоритма, решающего задачу достижимости, ни доказательства того, что такого алгоритма не может быть [4].

Для анализа свойств сетей Петри наиболее удобно использовать граф представления множества достижимости сетей Петри. В этом дереве представлены все достижимые состояния сетей Петри. Общий путь построения дерева достижимости сети Петри заключается в определении всех разрешенных переходов в соответствующей маркировке с последующим анализом соответствующего очередного состояния (маркировки), достигающихся при независимых автоматических последовательностях запусков всех разрешенных переходов предыдущей маркировки. Таким образом, решение задачи достижимости с использованием дерева достижимости фактически сводится к методу полного перебора. Поэтому защищенность здесь определяется только временем и ресурсами, затраченными на полный перебор. А это два наиболее важных критерия, определяющие степь защищенности, что приводит к тому, что сети Петри являются прекрасным инструментарием для защиты исходного кода.

Для использования данного инструментария будем использовать модель, схожую по поведению с сетью Петри, представив ее в терминах, описанных выше.

В качестве меток сети выступают ячейки памяти. Разобьем метки на три типа:

- фиксированные метки;
- метки с вычисляемыми значениями;
- метки с автоматически сгенерированными значениями.

Первая группа - это те метки, в которых мы хотим получать искомые константы (целевые значения). Эти константы берутся из исходного кода, и именно вместо них подставляются инструкции, которые вычисляют сеть. Такие метки строго фиксированы, потому что необходимо уметь однозначно определять, в какой ячейке находится константное значение для той или иной операции исходного кода. Каждый раунд (шаг эволюции сети, при котором метки могут изменить свою позицию) изменяет сеть: все метки могут быть пересчитаны. Целевые значения в сети идут в том же порядке, что и в коде (т.е. чем позже команда в коде, тем больше номер раунда).

Ко второй группе относятся те метки, значение которых неизвестно в момент создания сети. Эти значения должны быть подобраны таким образом, чтобы после очередного раунда в заданной ячейке из первой группы получилось искомое значение.

Но если все метки сети считать неизвестными, то сложность построения такой сети возрастает. Поэтому часть неизвестных заполняется случайным образом сгенерированными значениями (третья группа).

В ходе исследования было получено, что при заполнении половины меток сети случайными значениями, всегда существует решение для данной сети, позволяющее построить её по указанным выше правилам.

Каждый узел (метка) имеет двух родителей, соответственно значение каждого узла вычисляется как сумма значений родителей. Исходя из этого, можно построить систему линейных диофантовых уравнений для расчета неизвестных узлов (1).

$$P(x_{1,...,}x_{m}) = 0, (1)$$

)

где Р — целочисленная функция (например, полином с целыми коэффициентами), а переменные принимают целые значения, имеющие вид (2):

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_kx_k = d$$
 (2)

Сложность решения подобного линейного диофантового уравнения полиномиальна и равняется  $O(n^3)$ , значит и сложность построения такой сети Петри тоже равняется  $O(n^3)$ .

При разработке программной реализации данного метода обфускации использовался метод решения системы линейных диофантовых уравнений через нормальную форму Эрмита – Смита в кольце вычетов [5], при помощи которого получалась сеть Петри, которую можно построить за полиномиальное время, а задача достижимости для которой, на сегодняшний день, являлась NP - полной. Очевидно, что такая сеть является хорошим инструментом для защиты исходного кода.



Рис.1. Результаты работы обфускации на базе сетей Петри: незащищенный код слева, защищенный – справа

В разработанной программной реализации использовалась однопоточная реализация сети Петри, однако, даже в этом случае, IDA 6.4, был не в состоянии преобразовать защищенную подпрограмму для вычисления факториала к деобфусцированному виду. Оба состояния этой подпрограммы представлены на Рис. 1. Следует отметить, что справа представлена уже упрощенная блоксхема данной функции, после применения всех доступных для IDA плагинов.

Для улучшения степени обфускации, т.к. все изменения в сети выполняются параллельно, перенос меток по сети может осуществляться как параллельно при помощи различных потоков центрального процессора, так и при помощи специализированных графических процессоров, что особенно актуально в том случае, когда число элементов сети Петри измеряется тысячами или даже десятками тысяч.

#### ЛИТЕРАТУРА:

1. Shadow Market, 2011 BSA global software piracy study, Ninth edition, may 2012 URL: http://portal.bsa.org/globalpiracy2011/ (дата обращения 30.05.2012).

2. Носов А.С., Губенко Н.Е, Анализ методов защиты программных кодов с помощью обфускации, Донецкий национальный технический университет, 2013.

3. Hack M., Analysis of Production Schemata by Petri Nets, Department of Electrical Engineering, Massachusetts Institute of Technology, Cambridge, Massachusetts, Febriary 1972, pp. 119; Technical Report 4. James L. Peterson. Petri net theory and the modeling of systems, Prentice-Hall, Englewood cliffs, 1981.

5. Авдошин С.М., Савельева А.А. Алгоритм решения систем линейных уравнений в кольцах вычетов. Информационные технологии, № 2, 2006, С. 50 – 54.

УДК 004.415

# Л.Ю. Лабошин, А.А. Лукашин (Санкт-Петербургский государственный политехнический университет)

# СОЗДАНИЕ НАУЧНЫХ ОБЛАЧНЫХ СЕРВИСОВ С ДОСТУПОМ К АППАРАТНЫМ УСКОРИТЕЛЯМ ВЫЧИСЛЕНИЙ

Облачные технологии являются современным, высокотехнологичным способом управления вычислительными ресурсами. Вычислительные услуги переводятся в класс сервисов и предоставляются с помощью удаленного доступа. Такой подход является обоснованным, так как аренда вычислительных ресурсов стоит значительно ниже, чем закупка и обслуживание собственных решений. Аналогичная ситуация сложилась и в области научных расчетов: научные учреждения организуют совместный доступ к вычислительным суперкомпьютерным ресурсам. Актуальным является создание научных облачных сервисов, которые включают доступ к уникальным программно-аппаратным решениям, включая суперкомпьютеры, реконфигурируемые ускорители и вычислители на базе графических ускорителей.

Задачей исследования является проработка вопросов поддержки реконфигурируемых ускорителей на базе ПЛИС для распространенных гипервизоров с открытым исходным кодом, и разработка методик создания облачных сервисов для среды облачных вычислений.

В докладе представлены идеи и результаты, полученные в рамках проекта разработки облачного сервиса, предоставляющего реконфигурируемые ускорители.

Ускоритель представляет собой плату с рабочими ПЛИС (ускорителями вычислений), которая по высокоскоростному интерфейсу взаимодействует с универсальным микропроцессором. К каждой рабочей ПЛИС может быть подключено статическое и динамическое ОЗУ. Плата-ускоритель содержит необходимую инфраструктуру для обеспечения электропитания, отладочного доступа к ПЛИС по каналу JTAG, синхронизации, мониторинга технического состояния ПЛИС.

В рамках работы проведено исследование, которое показало принципиальную возможность использования ПЛИС в виртуальных машинах. Были отработаны различные варианты использования ПЛИС в виртуальных машинах – например, возможность подключения всех ПЛИС сервера к одной виртуальной машине, либо же подключение

нескольких групп ПЛИС к различным виртуальным машинам и их одновременное использование. Для подключения устройств к виртуальной машине был использован метод обеспечения непосредственного доступа средствами технологии аппаратной виртуализации IOMMU [1].

В результате исследования были получены положительные результаты с гипервизорами XEN и KVM. Исследование проводилось на макете, включающем в себя сервер, к которому подключался блок с 2-мя платами по 8 рабочих и одной управляющей ПЛИС.

Для обоих гипервизоров было проведено экспериментальное исследование. В качестве программы для тестирования работоспособности платы в виртуальной машине запускался тест измерения пропускной способности канала при обмене данными с ПЛИС, так как негативное влияние виртуализации может проявляться в первую очередь именно в снижении скорости взаимодействия с ПЛИС, а не в расчётах на самих ПЛИС как таковых. Тест запускался с размером передаваемых данных равным 204800 слов. Тестирование производилось в системе без виртуализации и в виртуальных машинах под управлением гипервизоров XEN и KVM на вычислительном стенде, характеристики которого сведены в табл. 1.

Операционная система	Ubuntu 12.04.2 LTS (precise) x86_64
Процессор	2x Intel(R) Xeon(R) CPU E5-2670 0 @ 2.60GHz
Чипсет	Intel® C602
ОЗУ	64 Gb
Версия ядра	3.2.0-39- generic

Табл. 1. Конфигурация исследовательского стенда

Общая схема конфигурации гипервизоров при передаче ускорителей в ВМ приведена на рис. 1.



Рис. 1. Схема передачи устройств в виртуальную машину

В стенд были установлены две группы ПЛИС. Были проведены эксперименты по передаче двух групп в одну виртуальную машину и одновременно по одной группе в две виртуальные машины. Полученные результаты сведены в табл. 2.

Полученные результаты демонстрируют принципиальную возможность использования реконфигурируемых ускорителей в виртуальном окружении, в том числе индивидуально и независимо для множества ВМ, но при этом необходимо отметить потери средней пропускной способности и довольно большой разброс значений.

В настоящее время ведётся разработка средств поддержки использующихся в виртуальных машинах реконфигурируемых ускорителей для в облачной среды на базе платформы OpenStack.

При разработке архитектуры и реализации программных средств необходимо будет учесть следующую функциональность разработанного решения:

- подключение и отключение ПЛИС к виртуальной машине;
- подключение ПЛИС к гипервизору или к служебной виртуальной машине для реконфигурации.

	Система виртуали	без зации, МБ/с.	Виртуалы	Зиртуальная машина XEN, МБ/с.		
Количество ПЛИС	16	8	16	8	8,.2 конкурентных ВМ	3
Среднее значение	4133.042	2133.137	2578.831	1672.485	1620.71	450.24
Максимальное значение	4454.583	2231.942	4264.838	2339.467	2240.435	474.725
Минимальное значение	3858.239	2028.293	1095.464	670.945	916.458	377.366

Табл. 2. Результаты проведенных тестов

В докладе предложено решение по организации поддержки реконфигурируемых ускорителей в виртуальной среде и сформулированы идеи по организации гетерогенной среды облачных вычислений, включающей в себя сервис расчетов с использованием ПЛИС. Такой подход позволит предоставить уникальные разработки отечественных ученых широкому кругу научных организации, а также организовать подготовку специалистов в рамках лабораторных курсов университетов.

Полученные результаты можно применять для использования в виртуальной среде ускорителей других типов, включая ускорители GPGPU [2 – 5]. Использование облачных сервисов для управления гетерогенными вычислительными ресурсами позволяет реализовать гибкие схемы использования современных ускорителей и осуществить реконфигурацию вычислительной среды под решаемую задачу. Механизмы живой миграции виртуальных машин, реализованные в облачной платформе OpenStack, позволяют осуществить перенос виртуальной машины на сервер виртуализации, к которому подключены ПЛИС, осуществить подключение заранее сконфигурированной платы, а потом, при необходимости, передать виртуальную машину на сервер виртуализации с графическим ускорителем, где может быть произведен следующий этап решения расчетной задачи. В представленном сценарии

виртуальная машина становится «транспортом» для решения вычислительной задачи в облаке с гетерогенной архитектурой. И это не единственный возможный способ использовать технологии облачных вычислений и виртуализации для решения сложных наукоемких вычислительных задач.

#### ЛИТЕРАТУРА:

1. Fedora Documentation. Chapter 13. PCI passthrough. [Электронный ресурс] – Режим доступа: http://docs.fedoraproject.org/en-US/Fedora/13/html/Virtualization\_Guide/chap-

VirtualizationPCI\_passthrough.html (Дата обращения 28.05.2013)

2. Лабошин Л.Ю., Лукашин А.А., Семеновский В.Б. Поддержка вычислений на графических ускорителях в виртуальной среде XEN для обработки потоков данных робототехнических систем [Текст] / Научнотехнические ведомости СПбГПУ. Информатика, Телекоммуникации, Управление. №6 (162) 2012. – СПб.: Изд-во Политехн. Ун-та, С. 97 – 100.

3. Абрамов С.М., Дбар С.А., Климов А.В., Климов Ю.А., Лацис А.О., Московский А.А., Орлов А.Ю., Шворин А.Б. Разработка методов поддержки различных моделей параллельных вычислений и систем гибридного программирования на суперкомпьютерах с ПЛИС // Результаты целевых ориентированных фундаментальных исследований и их использование в российской промышленности // Материалы ежегодной научной конференции. — Таганрог: Изд-во ТТИ ЮФУ, 2010. — С. 49 – 59.

4. К.Ю. Беседин, П.С. Костенецкий Моделирование обработки запросов на гибридных вычислительных системах с многоядерными сопроцессорами и графическими ускорителями // Труды международной суперкомпьютерной конференции. — Новороссийск: Издательство Московского университета, 2013. — С. 202 – 211.

5. Соловьев В. М., Сперанский Д. В., Щербаков М. Г., Ирматов П. В. Облачные технологии при высокопроизводительных вычислениях // Інформаційно-керуючі системи на залізничному транспорті. – 2011. - No 4. – С. 32 – 38.

УДК 681.324

К.Р. Наумова, М.В. Хлудова (Санкт-Петербургский государственный политехнический университет)

### ОЦЕНКА ЖИВУЧЕСТИ УСЛУГ НА БАЗЕ ОБЛАЧНОЙ ПЛАТФОРМЫ

Одним из современных направлений повышения эффективности использования информационных систем является переход к Cloud computing. Cloud computing, кроме удаленного выполнения приложений, предполагает весь комплекс информационных услуг, включая хранение, поиск и передачу информации, обеспечение ее безопасности и многое другое, поэтому уместнее употреблять термин "Услуги на базе облачных платформ".

Ожидаемый прирост прибыли обуславливается снижением стоимости обработки и хранения информации в центрах обработки данных (ЦОД), реализующих режим облачных технологий, по сравнению с традиционной обработкой: многократное увеличение объема вычислительной работы в расчете на одного сотрудника; существенное повышение коэффициента загрузки оборудования; повышение отказоустойчивость и живучесть ЦОД обеспечивается за счет использования отказоустойчивых адаптивных распределенных вычислительных систем.

Хотя понятие живучести известно в технике давно и практически используется при создании технических систем различного назначения, до сих пор не создано развитой теории.

Под живучестью сложных технических систем понимается способность системы к сохранению своих основных функций (хотя бы с допустимой потерей качества их

выполнения) при воздействии факторов внешней среды катастрофического характера — неблагоприятных воздействий, выходящих за рамки проектных условий нормальной эксплуатации [1]. В работе [2] под живучестью системы понимается ее качество активно, с помощью соответствующим образом организованной структуры, противостоять вредным воздействиям внешней среды или другой системы.

В развивающейся теории живучести сложных систем можно выделить ряд направлений и соответственно несколько видов анализа: теоретико-игровой, вероятностный, детерминированный, графовый. Для технических приложений наиболее полно разработаны вероятностный и детерминированный подходы. Основные идеи построения этих моделей изложены в [3].

Детерминированные модели живучести строятся на основе сопоставления конкретных видов поражающих факторов и стойкости к ним элементов и объекта в целом. В этом направлении наметились два подхода: статический и динамический. Суть статического подхода состоит в том, что задаются область поражения объекта и уровень поражающих факторов, определяется список элементов, которые могут быть повреждены, и с помощью логических функций работоспособности находится уровень качества функционирования системы[4]. Динамический подход основывается на использовании имитационных моделей, включающих динамические модели. Графовые модели, характеризующиеся простотой описания и высокой наглядностью, традиционно используются при исследовании структурной живучести и введении понятия «разрушения»[5].

Рассмотрим подход к оценке показателей живучести ЦОД на базе проекта Eucalyptus. Eucalyptus реализует схему IAAS (Infrastructure-as-a-Service), а именно "нижний" уровень облачных услуг, позволяющий запускать виртуальные машины по запросу вышестоящих приложений. Иерархическая структура Eucalyptus выглядит так (Рис.1): Контроллер узла (Node Controller, NC) управляет запуском, работой и остановом виртуальных машин на подведомственном узле. Узел – это машина с работающим гипервизором (например, Xen),



Рис. 1. Иерархическая структура Eucalyptus

виртуальных машин. Контроллер кластера (Cluster Controller, СС) управляет подведомственными контроллерами узлов (NC): собирает информацию 0 загруженности узлов И принимает решения, на каких узлах будет выполнен запуск виртуальных машин. Контроллер хранилиша (Storage Controller) – место для хранения образов (image) виртуальных машин. В качестве

который осуществляет работу

хранилища выступает Walrus. Контроллер облака (Cloud Controller, CLC) представляет собой точку входа. Со стороны конечного пользователя (или вышестоящего приложения) поступают запросы на запуск виртуальных машин. Со стороны контроллеров кластеров поступают данные о загруженности узлов ЦОД. Избыточное число узлов, входящих в кластер, гарантирует предоставление сервиса в случае отказа одного или нескольких серверов. Типичное число узлов — два, это минимальное количество, приводящее к повышению живучести.

Создано множество программных решений для построения такого рода кластеров. В целом, системы строятся по трем основным принципам: с холодным резервом. Активный узел выполняет запросы, а пассивный ждет его отказа и включается в работу, когда таковой произойдет; с горячим резервом: все узлы выполняют запросы, в случае отказа одного нагрузка перераспределяется между оставшимися; с теплым резервом. Вторичный узел находится в режиме ожидания, что позволяет ему быстрее включиться в работу, нежели при холодном резервировании.

Оценим выживаемость ЦОД для случая с 2-мя отказами и теплым резервированием. Модель ЦОД описывается графом, включающим 10 состояний-вершин (рис. 2). Каждое из состояний характеризуется вектором  $S = \{n_1; n_2; n_3\}$ , где  $n_i$  – состояние i-ого узла кластера. Состояние узла кластера может принимать одно из значений: А – узел активен; S – узел вышел из строя; W – узел находится в режиме «теплого» ожидания.

Модель, включающая уравнения баланса марковской цепи с непрерывным временем (рис.2), позволяет получить выражение для расчета вероятностей состояний (не приводится).

Кроме того, можно получить уравнение для вычисления выживаемости [2] ЦОД:

$$P_{cloud} = P_{CLC} \cdot (1 - \prod_{j=1}^{k} (P_{CC_j}) \cdot (1 - \prod_{i=1}^{n} P_{node_i}))$$

Параметр Обозначение Значение,ч. Среднее время наработки на 1 1 1 1 отказ узла при нахождении в 183.7114  $\overline{\lambda}$  $t_{HOA}$ λ1  $\lambda 2$  $\lambda 3$ активном состоянии Среднее время наработки на 1 1 отказ узла при нахождении в 200.4537  $t_{HOH}$  $\lambda_{HOH}$  $\lambda 5$ неактивном состоянии Среднее время ремонта узла 1 1 1 0.938883  $\mu 2$ μ3  $\mu 1$ μ Среднее время активации узла 1 1 1 0.004166 λ7 λ6 λ

Табл. 1. Исходные параметры модели системы

Для систем трех видов: с одним кластером, с двумя кластерами, с тремя кластерами, найдем значение выживаемости при избыточности трех видов: только в облачной подсистеме, только в кластерной подсистеме, и в облачной и в кластерной подсистеме.



Рис. 2. Марковская цепь для модели с 3 узлами кластера и теплым резервированием

Опыт	Выживаемость	Время простоя	Стоимость (\$)	
	(%)	ЦОД (ч.)		
Э1	98,21	156,8	8838	Избыточность в
Э2	99,96	3,5	14729	облачной подсистеме
Э3	99,98	1,8	20620	
Э4	97,59	211,1	8838	Избыточность в
Э5	99,36	56,1	16202	кластерной подсистеме
Э6	99,39	53,4	23567	
Э7	99,29	62,3	10311	Избыточность в
Э8	99,97	2,6	17675	облачной и кластерной
Э9	99,99	0,9	25040	подсистеме

Табл. 2. Выживаемость, время простоя и стоимость для каждого из экспериментов

Несмотря на низкую стоимость расходов в Э1, приобретение данной архитектуры не считается возможным, так как можно понести убытки (потери доходов и штрафы из-за нарушения Service Level Argeement). Выбор в пользу той или иной архитектуры можно произвести на основе анализа трехфакторной модели, базирующейся на значениях выживаемости, времени простоя и стоимости, которые приведены в табл. 2.

#### ЛИТЕРАТУРА:

1. Флейшман Б.С. Элементы теории потенциальной эффективности сложных систем. — М.: Сов. радио, 1971. — 225 с.

2. Черкесов Г.Н. Методы и модели оценки живучести сложных систем. – М.: Знание, 1987. – 54 с.

3. Додонов А.Г., Кузнецова М.Г., Горбачик Е.С. Введение в теорию живучести вычислительных систем. — К.: Наук. думка, 1990. — 184 с.

4. Путятин В. Г., Валетчик В. А., Додонов А. Г. Оценка живучести противоборствующих информационно-управляющих систем. – Киев: Ин-т проблем регистрации информации НАН Украины, 2002, Т.4, №3 – С. 104 – 112.

5. Стекольников Ю.И. Живучесть систем. – СПб.: Политехника, 2002. – 120 с.

### СЕКЦИЯ «ПРОГРАММНОЕ ОБЕСПЕЧЕНИЕ МОБИЛЬНЫХ РОБОТОВ»

УДК 004.35, 04.031.6

П.П. Василевский, С.Г. Попов (Санкт-Петербургский государственный политехнический университет)

# ТЕХНОЛОГИЯ ИНТЕГРАЦИИ ИМИТАЦИОННЫХ МОДЕЛЕЙ ТЕЛЕМАТИЧЕСКОЙ КОМПОНЕНТЫ ИНТЕЛЛЕКТУАЛЬНЫХ ТРАНСПОРТНЫХ СИСТЕМ

Интеллектуальные системы управления (ИТС) взаимодействием участников дорожного движения и объектов транспортной инфраструктуры обеспечивают безопасность движения, снижают вредное воздействие на окружающую среду, позволяют снизить общее время поездки путём управления автомобильным трафиком, своевременного информирования и координации действий участников движения. Перспективным направлением развития ИТС является совершенствование телематической компоненты – совокупности программноаппаратных средств, обеспечивающих передачу данных между транспортными средствами и объектами инфраструктуры. Высокая надежность сетевой коммуникации между абонентами обеспечивается передачей данных по технологически различным каналам связи, объединённых едиными правилами маршрутизации. В связи с применением различных технологий возникает потребность поддержки мультипротокольной сети передачи данных. Уникальность сценариев деятельности транспортных средств и инфраструктуры, а также сложность процедур взаимодейстия компонентов ИТС не позволяют создавать масштабные натурные тестовые зоны или разрабатывать адекватную математическую модель телематической компоненты ИТС. В связи с этим, основным способом анализа характеристик телематической компоненты интеллектуальной транспортной системы является имитационное моделирование.

Телематическая компонента находится на вершине иерархии, так как для трафика необходим учёт всех аспектов моделирования сетевого транспортной инфраструктуры ИТС. Исходя из этого, для получения данных о сетевом взаимодействии внутри ИТС необходима интеграция моделей телематической и транспортной компонент. Существуют программные решения для имитационного моделирования транспортной и телематической компонент по отдельности, а также решения для их интеграции в единую процессов передачи данных между среду моделирования с целью исследования транспортными средствами и инфраструктурой внутри ИТС. Для этого требуется исследовать возможности сред имитационного моделирования к интеграции телематической и транспортной компонент с обязательным учётом мультипротокольности и межсетевой маршругизации данных. Для решения поставленной задачи необходимо найти способ интеграции существующих сред моделирования телематической и транспортной компонент, обеспечивающий универсальность модели. Универсальность подразумевает возможность:

- использования заданных сценариев поведения автомобильного трафика и правил сетевого взаимодействия;
- изменения высокоуровневых правил маршрутизации мультипротокольного узла;
- изменения набора интерфейсов мультипротокольного узла;
- применения различных типов мультипротокольных узлов и алгоритмов маршрутизации в одном сценарии.

Важным параметром при выборе систем моделирования является общий принцип работы. Наиболее распространенным подходом моделирования для такого типа задач является дискретно-событийное моделирование – функционирование моделируемой системы представляется как хронологическая последовательность событий.

В качестве среды моделирования сетевого трафика для данной задачи выбрана среда NS-3, являющаяся инструментом моделирования телекоммуникационных систем и распространяющаяся под лицензией GNU GPLv2. NS-3 является гибким и мощным средством моделирования за счёт использования языка программирования С++ в качестве встроенного языка описания моделей. Так же, помимо C++, может использоваться Python. Оба языка в симуляторе равноправны и принимаются для описания моделей телекоммуникационных систем [1].

Для моделирования дорожной сети и движения трафика была выбрана среда SUMO, распространяемая под лицензией GNU GPLv2. Данная среда предназначена для микро- и макромоделирования движения на больших дорожных сетях. SUMO обладает графическими средствами построения модели дорожной сети и возможностью графического вывода результата [2].

Существует несколько проектов, позволяющих интегрировать симуляторы телекоммуникационных систем и симуляторы дорожного трафика. Для данной задачи был выбран проект iTETRIS, позволяющий создать интегрированную платформу симуляции дорожного движения и беспроводной передачи данных между участниками движения и транспортной инфраструктурой. Платформа подходит для тестирования эффективности кооперативных стратегий управления движением с использованием технологий V2V (Vehicle To Vehicle) и V2I (Vehicle To Infrastructure) в рамках сценариев большого масштаба. Структура платформы ITETRIS представляет собой четыре основных блока, показанных на рис. 1.



Рис. 1. Структура ин ITETRIS

Симуляторы NS-3 и SUMO интегрируются при помощи блока iCS (iTETRIS CONTROL SYSTEM). К блоку Приложений (Applications) относятся алгоритмы стратегий движения дорожного трафика. Эти алгоритмы могут реализовываться и выполняться независимо друг от друга и, при помощи специальных команд, вызывают NS-3 для моделирования V2X-коммуникации в сценариях беспроводной передачи данных. Приложения оповещаются о полученных в сетевой симуляции сообщениях от других участников движения, в последствии создавая действия, обрабатываемые уже симулятором дорожного трафика SUMO. В результате, SUMO обеспечивает другие блоки iCS данными об изменении местоположений автомобилей, необходимыми для успешного моделирования сетевого трафика. iCS, как центральный модуль во всей архитектуре, способствует обмену данными между всеми функциональными блоками и поддерживает поток моделирования при помощи функций управления и синхронизации [3 – 5].

В рамках решения поставленной задачи был создан стенд для моделирования телематической компоненты ИТС с развернутой платформой iTETRIS версии 0.2.0. Основой стенда является ЭВМ с ЦП Intel Core 2 Duo 2.6 ГГц и 4 ГБ ОЗУ под управлением ОС Ubuntu 12.04. Были использованы следующие версии симуляторов: SUMO 0.14.0 и NS-3 v.3.7.

Разработанный стенд позволит создавать модели ИТС с целью оценки параметров свойств ее телематической компоненты, а также оценки применимости существующих беспроводных протоколов передачи данных в телематической компоненте ИТС.

#### ЛИТЕРАТУРА:

- 1. Балашев В.А., Обзор сетевого симулятора NS3, [Электронный ресурс] URL: http://lvee.org/en/reports/LVEE\_2010\_31.
- 2. Daniel Krajzewicz, Jakob Erdmann, Michael Behrisch, and Laura Bieker. Recent Development and Applications of SUMO Simulation of Urban MObility. International Journal On Advances in Systems and Measurements, 5 (3&4). P. 128 138.
- 3. iTETRIS Building, Installation and Configuration Guidelines, 2013, [Электронный pecypc] URL: http://www.ict-itetris.eu/10-10-community/wp-content/uploads/code/iTETRIS-Guidelines0.2.0.pdf.
- 4. V. Glazunov, L. Kurochkin, M. Kurochkin, and S. Popov, "Instrumental environment of multi-protocol cloud-oriented vehicular mesh network," in 10th International Conference on Informatics in Control, Automation and Robotics (ICINCO), 2013.
- 5. Vladimir S. Zaborovskiy, Alexey A. Lukashin, Sergey G. Popov, AlexeyV.Vostrov, Adage mobile services for ITS infrastructure.

УДК 004.35

Н.В. Калугин, В.А. Мулюха (Санкт-Петербургский государственный политехнический университет)

### РАЗРАБОТКА МЕТОДОВ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ ФУНКЦИОНАЛЬНОЙ МОДЕЛИ АГРЕГАТНО-МОДУЛЬНЫХ РОБОТОВ

Создание автономной роботизированной базы на Луне – первый шаг по отработке технологий освоения человечеством Луны и других небесных тел. В данный момент исследования, направленные на освоение и колонизацию Луны с помощью роботов, включены в космические программы многих государств, в том числе и Российской Федерации. Согласно принятым нормативным документам, основной составляющей роботизированной лунной базы должен стать парк напланетных роботов, достаточный для решения задач, возникающих в ходе исследования, а затем освоения Луны. К таким задачам можно отнести: манипулирование объектами, перевозку крупногабаритных грузов по поверхности планеты, обеспечение строительно-монтажных работ, проведение научных исследований, добычу полезных ископаемых и прочее [1].

Существует два основных подхода к формированию такого парка робототехнических объектов:

- 1. Малое число многофункциональных, сложных в изготовлении и обслуживании роботов, каждый из которых выполняет широкий спектр задач;
- 2. Большое число разнотипных, простых в изготовлении и эксплуатации роботов, каждый из которых выполняет ограниченный класс задач.

Преимуществом второго подхода является простота в изготовлении роботов и отдельных функциональных модулей, а также, как следствие, более высокая надёжность системы в целом, что в условиях космических исследований является критическим показателем. Также необходимо отметить, что специализированные роботы, сформированные из отдельных функциональных модулей, не обладают избыточностью по отношению к целевой функции решаемой задачи, что, в свою очередь, повышает эффективность робототехнической системы и позволяют достичь оптимума с точки зрения одного из критериев качества. Подобными критериями могут быть: показатель точности выполнения операции, затраты энергии и топлива, время выполнения поставленной задачи и т.д. [2].

Одним из наиболее распространённых методов реализации данного подхода является агрегатно-модульный принцип построения робототехнических объектов. Этот принцип основывается на существовании универсальных интерфейсов информационного и механического взаимодействия отдельных компонент робототехнического объекта, что, в свою очередь, даёт возможность на базе ограниченной группы стандартизованных узлов создать специализированную конструкцию робота, которая наиболее полно удовлетворяет требованиям решения конкретной текущей технологической задачи и обладает минимальной избыточностью [3].

Основной целью научно-исследовательской работы является изучение возможности создания алгоритма автоматического построения оптимальной конфигурации робота из набора унифицированных узлов для реализации конкретной задачи. Предполагается, что такие унифицированные модули обладают едиными механическими и программными интерфейсами. Основными задачами работы являются:

- 1. Проведение классификации робототехнических объектов и их модулей;
- 2. Разработка модели агрегатно-модульного робота;
- 3. Формирование ограничений на модель робота на основании требований оптимальной реализации целевой функции;
- 4. Разработка метода и алгоритма автоматического построения оптимальной конфигурации робота.

В рамках первого этапа работы была произведена классификация унифицированных узлов, составляющих комбинированный робототехнический объект. При этом были выделены следующие группы [4]:

- манипуляционные системы;
- рабочие органы манипуляторов;
- транспортные платформы и системы передвижения мобильных роботов;
- сенсорные системы и датчики;
- устройства управления роботов.

На основе предлагаемой классификации, в рамках поставленной задачи была разработана математическая модель комбинированного агрегатно-модульного робототехнического объекта, отвечающая следующим основным положениям:

 Каждый унифицированный модуль, входящий в состав комбинированного робота, представляется в виде узла графа с исходящими из него «висящими» связями, которые обозначают унифицированные интерфейсы, к которым могут быть присоединены другие узлы-модули. Примеры различных унифицированных модулей представлены ниже (рис. 1);



Рис. 1. Варианты представления различных модулей: 1 - транспортная платформа с тремя интерфейсами; 2 - манипулятор, с одним интерфейсом для рабочего органа; 3 - система

- 2. Весь робототехнический объект описывается в виде графовой сети G (рис. 2), истоком которой является транспортная платформа, а стоком фиктивный узел, с которым могут быть соединены только узлы без исходящих связей, или исток сети;
- 3. Математической моделью предполагается наличие векторной функции оценивания полученного решения F(G). Данная функция должна рассчитывать характеристики робота в сборе, на основании характеристик отдельных модулей и при этом

учитывать синергетические эффекты, т.е. влияние различных модулей на характеристики друг друга, смещение центра масс робота и прочее;

4. Математическая модель предполагает наличие системы функциональных ограничений fl(F(G)), формируемых в соответствии с целевой функцией конкретной задачи, для которой осуществляется комбинирование данного робота:

$$\begin{cases} f_1(F(G)) \le a_1 \\ \dots & , \\ f_t(F(G)) \le a_t \end{cases}$$
(1)

где G – графовая сеть, описывающая реализацию конфигурации робота; F(G) – векторная функция оценивания такой конфигурации; f<sub>i</sub>(F(G)) – параметризованное функциональное описание робота; а<sub>i</sub> – значение функционального ограничения, определяемое решаемой задачей.

5. Математическая модель предполагает наличие оптимизационного критерия качества функционирования такой сборки для решения конкретной задачи J(F(G)).



Рис. 2. Пример представления робота в виде графовой сети G

С учетом вышесказанного можно сформулировать требования к решению задачи представления оптимальной конфигурации агрегатно-модульных роботов. Для решения поставленной задачи необходимо сформировать граф G\*, такой что:

$$\begin{cases} f_1(F(G^*)) \le a_1 \\ \dots \\ f_t(F(G^*)) \le a_t \\ G^* = \arg\min J(F(G)) \end{cases}$$
(2)

Предложенная математическая модель описывает NP-полную оптимизационную задачу (2). В ходе работы, в качестве основных, были рассмотрены следующие методы и типы алгоритмов, позволяющие решать NP-полные задачи [5]:

- переборные алгоритмы, предполагающие полный перебор всех вариантов решения задачи;
- приближенные и эвристические методы, предполагающие применение априорных дынных и эвристик для выбора элементов решения;
- псевдополиномиальные алгоритмы, подкласс алгоритмов динамического программирования, которые целесообразно применять на небольшом разнообразии унифицированных модулей;
- метод локальных улучшений, использующий априорные данные и предлагающий поиск оптимального решения в окрестности некоторого существующего текущего решения;
- метод ветвей и границ, предполагающий отбрасывание заведомо неоптимальных решений в соответствии с некоторой оценкой.

**Выводы.** На текущем этапе исследований была проведена классификация функциональных модулей робототехнических объектов, разработана графовая сетевая модель комбинированного напланетного робота, создана программная реализация предложенной модели, а также рассмотрены основные методы оценки вариантов решений, полученных при помощи данной модели.

#### ЛИТЕРАТУРА:

1. Луна – шаг к технологиям освоения Солнечной системы / Под научной редакцией В.П. Легостаева и В.А. Лопоты. – М.: РКК 'Энергия'. 2011. – 584 с. – Тираж 2000 экз. – ISBN 978-5-91820-046-9.

2. Мирошник И. В.М64 Теория автоматического управления. Нелинейные и оптимальные системы. – СПб.: Питер, 2006. – 272 с.: ил. – (Серия «Учебное пособие»). ISBN 5-469-00351-5.

3. Промышленные роботы агрегатно-модульного типа/ Е. И. Воробьев, Ю. Г. Козырев, В. И. Царенко; Под общ. ред. Е. П. Попова. – М.: Машиностроение, 1988. – 240 с.: ил. – (Автоматические манипуляторы и робототехнические системы). ISBN 5-217-00166-6.

4. Юревич К. И. Основы робототехники. – 2-е изд., перераб. и доп. – СПб.: БХВ-Петербург, 2005. – 416 с.: ил. ISBN 5-94157-473-8.

5. Кормен Т., Лейзерсон Ч., Ривест Р. Алгоритмы: построение и анализ. – М.: МЦНМО, 1999. – 960 с., 263 ил. ISBN 5-900916-37-5.

УДК 004.9, 629.3.06

А.П. Финагин, С.Г. Попов (Санкт-Петербургский государственный политехнический университет)

### МОДЕЛЬ СИНТЕЗА СЕРВИСОВ КИБЕР-ОБЪЕКТОВ В МУЛЬТИПРОТОКОЛЬНОЙ СЕТИ ОПЕРАЦИЙ

Трудность синтеза моделей современных информационных транспортных систем является следствием высокой размерности математических моделей отдельных физических компонент, сложности идентификации параметров и структуры системы, а также тем, что в ее состав могут входить так называемые кибер-объекты, способные генерировать, передавать информацию, связанную с особенностями обрабатывать И своего функционирования. Обязательными атрибутами современных кибер-объектов являются встроенные вычислители, интерфейсы, поддерживающие сетевые протоколы, и сенсоры. Примерами таких объектов являются автомобили, входящие в MESH структуры [2], а также промышленные роботы, участвующие в сборочных операциях, медицинское оборудование, подключенное к сети Интернет, которое используется в удаленном режиме человекомоператором. Тогда в процессе реализации алгоритмов управления, физические сущности кибер-объектов заменяются виртуальными прототипами, а процессы их функционирования рассматриваются как процессы информационного взаимодействия, что позволяет реализовать новые классы информационных сервисов, в том числе основанных на построении сети операций как виртуальной сети последовательных транзакций, реализуемых с использованием информационно-сетевых ресурсов [1]. На рис. 1. представлена общая структура организации информационного обмена в сетях кибер-объектов.

Объединение сетей операций обеспечивает реализацию совокупности сервисов, объединенных в инфраструктуру среды облачных вычислений [4]. Для конструктивной реализации предлагаемой модели взаимодействия формализуем описания виртуальной сети кибер-объектов.

Для этого рассмотрим множество объектов, модель которых представляет собой расширенную абстракцию сетевого сокета:

$$M^{o} = \{name, IP, port\},$$
(1)

где переменная *name* – есть имя предоставляемого сервиса, IP – адрес объекта, port – порт приложения, который используется для организации процессов взаимодействия на транспортном уровне. На множестве объектов М<sup>о</sup> введем множество сервисов:

$$M^{s} = \{name, \{\langle p_{i}, type \rangle\}\},$$
 (2)

где *пате* – имя сервиса,  $\{p_i\}$  – набор типизированных параметров, имеющих атрибуты type.



Рис. 1. Структура информационного взаимодействия в сети кибер-объектов

Рассмотрим отображение  $T = M_o^o M_s$ , формируемое отношением  $\Lambda(t)$  для различных моментов времени  $t = t_0,...,t_n$ , которое определяет доступность сервиса для субъектов информационного взаимодействия из  $M^o$ .

Тогда, ориентированный динамический мультиграф G = (V,E), где V множество вершин, состоящее из поименованных сервисов из  $M^s$ , а E – множество рёбер, определяющее последовательность предоставления сервисов V, задаёт модель предоставления ресурсов, которая характеризует доступность выбранной последовательности сервисов  $\{m_1^s, ..., m_n^s\} \in V$ .

В свою очередь, каждая вершина мультиграфа является ориентированным динамическим графом

$$g = (v,e), \tag{3}$$

где v – множество параметров сервиса из  $p_i$ , а е – множество рёбер, которые определяют допустимость реализации заданной последовательности операций при выбранном параметре  $\{p_i\}$ . В рамках рассмотренной иерархии моделей допустимость операций характеризуется количественной оценкой отношения  $\lambda_i(t)$ , выбранной из множества всех оценочных функций операций  $\{\lambda\}$ .

В этом, случае задача выбора m<sup>o</sup> из множества {M<sup>o</sup>} для получения последовательности сервисов  $\{m_1^s, ..., m_n^s\}$  с параметрами {{p<sub>1</sub>},...,{p<sub>n</sub>}} из {M<sup>s</sup>} может быть сформулирована как задача поиска пути в динамическом мультиграфе G отвечающего отношению:

$$\exists (E_1...E_n) \in E, \ \exists \{e_1...e_n\} \in e \ | (E_1...E_n) == \{m_1^s...m_n^s\} \lor \forall e_i = p_i,$$
(4)

которая решается с помощью модифицированного алгоритма маршрутизации Дейкстры, в котором для каждого момента времени задается вектор параметров, учитывающий как информационную, так и географическую связанность кибер-объектов.

Как показано выше, виртуальные сети кибер-объектов могут быть представлены как мультиграфы G. Реализация многоцелевой операции заключается в поиске пути на мультиграфе в соответствии с вектором выбранных критериев {{p<sub>1</sub>},...,{p<sub>n</sub>}}.

Одним из наиболее конструктивных методов решения данной задачи является организация наложенных виртуальных сетей кибер-объектов, связанность которых обеспечивается с помощью маршрутизатора приложений, который осуществляет формирование маршрута от субъекта к источнику сервиса, локализованного в узле мультиграфа. Основные отличия предложенного решения от классической сетевой архитектуры заключается в том, что критерий выбора маршрута определяется не стандартной сетевой метрикой, а многокритериальным показателем, учитывающим такие характеристики как безопасность и экономичность передачи данных.

Примером реализации предложенного подхода может служить создание виртуальной сети для отправки экстренных сигналов о дорожно-транспортных происшествиях (ДТП) в городской транспортной инфраструктуре. В этом случае, транспортное средство, попавшее в ДТП, в автоматическом режиме отправляет сигнал к доступным по беспроводному каналу связи маршрутизатору приложений (МП), который передает полученные данные в одну из виртуальных сетей. Экстренный сигнал, в форме адаптивного запроса к нескольким сервисам, передается в виртуальные сети машин полицейских и скорой помощи. В каждой из сетей обрабатываются данные, входящие в описание параметров сервиса {p<sub>i</sub>}, входящих в виртуальную сеть. В соответствии с алгоритмом управления средой облачного вычисления определяются объекты из разных виртуальных сетей, которые объединяются в сеть операций для оказания требуемого сервиса в соответствии с выбранным критерием.

Предложенная формализация задачи прикладной маршрутизации, обеспечивающая возможность построения конструктивной многофункциональной иерархической модели информационно транспортной инфраструктуры, позволяет реализовать различные классы сервисов [3], в том числе передачу специального класса экстренных сообщений и потоковых данных.

#### ЛИТЕРАТУРА:

1. Заборовский В.С., Лукашин А.А., Купреенко С.В., Мулюха В.А. Архитектура системы разграничения доступа к ресурсам гетерогенной вычислительной среды на основе контроля виртуальных соединений, Вестник УГАТУ, Уфа: УГАТУ, т. 15, № 5 (45), 2011, С. 170 – 174.

2. Arbabi H., Weigle M.C. Highway Mobility and Vehicular Ad Hoc Networks in NS-3, Proceedings of the Simulation Conference (WSC), 2010, P. 2991 – 3003.

3. Kurochkin M., Glazunov V., Kurochkin L., and Popov S. Instrumental Environment of Multi-Protocol Cloud-Oriented Vehicular Mesh Network, In 10th International Conference on Informatics in Control, Automation and Robotics (ICINCO), 2013, P. 568 – 574.

4. Zaborovsky V., Lukashin A., Kupreenko S., and Mulukha V. Dynamic Access Control in Cloud Services, International Transactions on Systems Science and Applications, Vol. 7, No. 3/4, December 2011, P. 264 – 277.

5. Vladimir S. Zaborovskiy, Alexey A. Lukashin, Sergey G. Popov, AlexeyV.Vostrov, Adage mobile services for ITS infrastructure.

А.С. Тучков, С.Г. Попов (Санкт-Петербургский государственный политехнический университет)

# ИНТЕГРАЦИЯ ПРОГРАММНО-АППАРАТНЫХ КОМПОНЕНТ АВТОМОБИЛЬНОГО МУЛЬТИПРОТОКОЛЬНОГО УЗЛА

Развитие современных интеллектуальных транспортных систем (ИТС) обеспечивается наращиванием сервисов телекоммуникационной компоненты, главной функцией котороей является взаимодействие транспортного средств между собой, транспортных средств с дорожной инфраструктурой сервисами облачной среды. функциям И К телекоммуникационной компоненты информационной системы относятся предоставление данных о расположении других транспортных средств, оперативных данных о дорожных условиях, предоставления информационных услуг водителям и пассажирам, что позволяет оптимизировать дорожный трафик, повысить безопасность дорожного движения и ускорить реакцию неотложных служб на дорожные инциденты. В процессе интеграции телекоммуникационных технологий возникает задача разработки мультипротокольного узла с предметно-зависимыми правилами маршрутизации трафика между каналами различных технологий, к которым, например, относятся: 3G (LTE), Wi-fi, WiMAX, DSRC [1].

С целью проверки работоспособности предложенного подхода необходимо разработать макет мультипротокольного узла, способного продемонстрировать работоспособность предложенных алгоритмов маршрутизации [6, 7]. К анализируемым техническим характеристикам телекоммуникационной компоненты следует отнести: скорость передачи данных; рабочие частоты; дальность действия; время установления соединения в сети, [2, 4] к исследуемым технологиям: LTE, DSRC, WiMAX, Wi-fi, MESH, GPS/GLONASS [3, 5].

В табл. 1 приведены технические характеристики первых четырёх коммуникационных технологий.

		1 7 7		2
Технология	Рабочий диапазон	Максимальная	Скорость	Время
		дальность	передачи	подключения
		действия	данных	к сети
DSRC	5850-5925 МГц	1 км	до 27 Мбит/с	менее 0,25 с
LTE				
2G (GSM/GPRS/	800 МГц	в зависимости от	до 14,4	3-4 c
EDGE)		зоны покрытия	КБит/с	
3G	1920 - 1980 МГц	оператором связи	до 2 Мбит/с	82 мс - 242 мс
(UMTS/HSPA/HS				
PA+)				
4G	2500-2700 МГц		до 100 Мбит/с	13 мс - 173 мс
WiMAX				
WiMax (802.16d)	1,5-11 ГГц	25-80 км	до 75 Мбит/с	20 мс
WiMax (802.16e)	2,3-13,6 ГГц	1-5 км	до 40 Мбит/с	20 мс
Wifi				
Wi-Fi (802.11a)	5,0 ГГц	до 300 м	до 54 Мбит/с	20-30мс
Wi-Fi (802.11b)	2,4 ГГц	до 300 м	до 11 Мбит/с	20-30мс
Wi-Fi (802.11g)	2,4 ГГц	до 300 м	до 54 Мбит/с	20-30мс
Wi-Fi (802.11n)	2,4 — 2,5 или 5,0	до 300 м	до 450 Мбит/с	20-30мс
	ГГц			

Табл. 1. Технические характеристики беспроводных технологий мультипротокольного узла

По данным критериям было подобрано соответствующее оборудование, которое могло бы войти в состав мультипротокольного узла, к которому относится:

- DSRC: DCMA 86Р2. Интерфейс подключения: mini-PCI. Данное оборудование было специально разработано для ИТС V2V и V2I.
- LTE:
  - Sierra MC7710. Интерфейс подключения: mini-PCI. Поддерживает сети LTE, HSPA+, EDGE, GPRS, GSM.
  - о Cinterion® EHS5. Интерфейс подключения: mini PCIe.
- Wi-fi:
  - о DXHA-222. Интерфейс подключения: mini-PCIe. Включает в себя Bluetooth 4.0.
  - о DXHA 225. Интерфейс подключения: mini-PCIe.
- WiMAX:
  - WiMax/WiFi PCI Express Half Mini Card Модуль Intel 512ANX HMW Yota. Интерфейс подключения: mini-PCIe
  - WiMax/WiFi PCI Express Mini Card Модуль Intel 512AGX MRU Yota. Интерфейс подключения: mini-PCIe.
- GPS/GLONASS:
  - PX1 GLONASS & GPS PCI Express® Mini Card. Интерфейс подключения: mini-PCIe.

Выбор набора используемых телекоммуникационных технологий доступа должен соответствовать требованиям приложений, окружающей среды, а также её актуальности на территории страны использования. Конкретная реализация мультипротокольного узла может сочетать комбинацию из представленных устройств. Дальнейшим направлением исследования является разработка методов высокоуровневой маршрутизации трафика мультипротокольного узла.

### ЛИТЕРАТУРА:

1. IEEE P802.11p/D3.0, "Draft Amendment to Standard for Information Technology-Telecommunications and Information Exchange between Systems-Local and Metropolitan Area Networks-Specific Requirements -- Part 11: Wireless LAN Medium Access Control (MAC) and Physical Layer (PHY) Specifications-Amendment 7: Wireless Access in Vehicular Environment," 2007.

2. U.S. Department of Transportation, Research and Innovative Technology Administration - SIGNAL PHASE AND TIMING (SPAT) APPLICATIONS, COMMUNICATIONS REQUIREMENTS, COMMUNICATIONS TECHNOLOGY POTENTIAL SOLUTIONS, ISSUES AND RECOMMENDATIONS, [Электронный ресурс] URL: www.its.dot.gov/index.htm.

3. Жанказиев С.В. Российская специфика построения интеллектуальных транспортных Систем// Сборник докладов восьмой международной конференции «Организация и безопас-ность дорожного движения в крупных городах»/ СПб гос. архит. - строит. ун-т. СПб., 2008. 313 с.

4. National ITS Architecture Version 6.1, 2009, [Электронный ресурс] URL: http://www.iteris.com/itsarch/. 5. Хараев В.Ю., Ярославцев А.Ф. «Сравнительный анализ мобильных телекоммуникационных технологий для управления транспортными средствами», Вестник СибГУТИ, № 1, 2010, С. 56 – 69.

6. V. Glazunov, L. Kurochkin, M. Kurochkin, and S. Popov, "Instrumental environment of multi-protocol cloud-oriented vehicular mesh network," in 10th International Conference on Informatics in Control, Automation and Robotics (ICINCO), 2013.

7. Vladimir S. Zaborovskiy, Alexey A. Lukashin, Sergey G. Popov, Alexey V. Vostrov, "Adage mobile services for ITS infrastructure" in 13 th International Conference on ITS Telecommunications, Tampere, Finland, 2013.

# содержание

ИНСТИТУТ ПРИКЛАЛНОЙ МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ	3

Стр.

## Секция «Гидрогазодинамика»

Колесник Е.В., Панов Д.О. Опыт использования алгоритма поиска экстремумов	
сложных функций с применением вспомогательных аппроксимаций	3
Котов Е.В., Галаев С.А. Влияние геометрических параметров циклона с	
тангенциальным подводом газа на эффективность работы устройства	6
Скворцов К.А., Клементьев В.А., Филиппенко А.В. Экспериментальные	
исследования клапанов системы жидкостного дыхания	8
Стабников А.С., Гарбарук А.В. Разработка поправки на кривизну линий тока и	1 1
вращение на основе алгеораической модели реинольдсовых напряжении	11
Блудовская С.Д., Гатаулин Я.А. Исследование закрученного течения за двоиным	1.4
поворотом методом цветного доплеровского картирования	14
Федорова Е.А., Гатаулин Я.А. Исследование закрученного пульсирующего	
течения за скрученной лентой ультразвуковым доплеровским методом	17
Шалыгин С.Е., Кулеш Р.Н., Половников В.Ю., Долгов С.В. Исследование	• •
характеристик нового универсального дроссельного устройства	20
Васильев Г.С., Гатаулин Я.А. Расчет струйного истечения жидкости из модели	
поврежденной вены в симуляторе внутреннего кровотечения	22
Гусева Е.К., Гарбарук А.В. Исследование возможностей метода частичного	
осреднения уравнений Навье-Стокса	25
Синицына Д.Э., Юхнев А.Д. Исследование гидродинамических характеристик	
нового полнопроточного искусственного клапана сердца	28
Денисов Г.К., Левченя А.М. Расчет турбулентного обтекания полого крылового	
профиля с затеканием потока во внутреннюю полость	31
Куняшева З.Ф., Левченя А.М. Расчет обтекания вязкой жидкостью передней	
кромки продольно обтекаемой пластины	34
Пожилов А.А., Зайцев Д.К. Применение многосеточного метода для решения	
задач теплопроводности на сетках с полиэдральными ячейками	36
Пялов К.Н., Петров Н.В. Моделирование поведения кавитационного пузыря при	
изменении внешних параметров с учетом энерго- и массообмена	39
Смирнов С.И., Иванов Н.Г. Численное исследование влияния резкого изменения	
диаметра цилиндра на развитие дорожки кармана	41
Тимофеев В.В., Колешко С.Б. Численное моделирование стационарных и	
нестационарных естественноконвективных течений в вертикальном канале со	
стенками различной температуры	44
Юркина Н.С., Булович С.В. Расчет характеристик метательного устройства для	
моделирования ударной нагрузки на элементы двигателей летательных аппаратов	46

## Секция «Теплофизика»

Коковина Е.С., Цой А.С., Снегирев А.Ю. Численный расчет теплового излучения	
турбулентного естественно-конвективного пламени	50
Симанова А.А., Штейнберг В.Б. Экспериментальное определение температуры	

продуктов сгорания поющего пламени	53
Марков С.А., Пашкевич Д.С. Термодинамические основы получения безводного	
фтористого водорода из его водного раствора, в том числе азеотропного, с помощью	
реакции водяного газа	56
Розанов В.О., Степанов В.В. Исследование теплофизических характеристик	
материалов электромагнитного насоса (ЭМН) и электромагнитного насоса –	
дросселя (ЭМНД)	58
Радченко М.В., Степанов В.В. Исследование влияния концентрации азота в	
потоке окислителя на окисление продуктов пиролиза полистирола	60
Крючковой Н.А., Егоров М.Ю. Использование теплонасосных установок для	
теплоснабжения	63
Черных И.В. Экспериментальная метолика расчета коэффициентов теплоотлачи	
лля оребренных труб с развитой поверхностью теплообмена	66
Пацей П.С., Талалов В.А. Молелирование полей скорости и температуры в печи	
взвешенной плавки	69
Пискунов М В. Численное исследование температурных напряжений	07
пискулов м.D. тисленное исследование температурных напряжении,	72
Vрасилус $AC$ Феректистор $IR$ Wapacity $3E$ Adamaci co $IA$ Пиноминорсий	12
привчук л.С., Феоктистов Д.С., тиривин Э.Е., Афинисьев И.А. Динамический	75
краевои угол при смачивании твердои подложки дистиллированной водой	15

## Секция «Прикладная математика»

Беляев С.Ю., Виноградов А.К. Применение масс-пружинной модели обуви для ее	
виртуальной примерки	78
Иголкина А.А., Гурский В.В. Математическое моделирование механизмов	
транскрипции генов в раннем развитии Drosophila	81
Терских А.В., Козлов К.Н. Получение количественных характеристик рецептор -	
опосредованного эндоцитоза	84
Чистякова О.И., Руколайне С.А. Аналитическое и численное исследование	
решения задачи коши для уравнения типа Джеффриса в трехмерном случае	87
Янкина М.А. Поиск мобильных элементов в геномах древних людей	90
Дегтярев Ю.М., Жуков С.Ю. Объемное освещение системы частиц с	
использованием вычислительных шейдеров	93
Дымова А.В., Козлов К.Н. Численное исследование механистической модели	
ревматоидного артрита у крыс Льюиса	96
Мужиченко В.В. Тестирование алгоритма полностью параллельной разностной	
ЭВОЛЮЦИИ	99
Погарская Т.А., Фролов А.С. Численный анализ работы механико-гидравлической	
системы	102
Федоров А.Е., Григорьев Б.С. Математическое моделирования термонеустойчиво-	
сти ротора, совершающего синхронную прецессию (эффект Мортона)	104

## Секция «Физика прочности и пластичности материалов»

Ржавцев Е.А., Гуткин М.Ю. Динамика	фрагментации	зерен	при	ударном	
нагружении металлов и сплавов					108
Смирнов А.М., Гуткин М.Ю. Прямоугольные призматические петли дислокаций					
несоответствия в наноструктурах					111
Балай И.А., Герасимов В.И. Влияние	структуры фул	ілерена	В	процессе	

растворения в органических маслах	114
Красницкий С.А., Гуткин М.Ю., Колесникова А.Л., Романов А.Е. Круговые	
призматические петли дислокаций несоответствия в полых и сплошных	
композитных наночастицах типа «ядро-оболочка»	117
Панпурин С.Н., Золоторевский Н.Ю. Использование искусственно сгенерирован-	
ной двухмерной структуры для развития техники EBSD-анализа	120
Бритвина Г.А., Галлай И.Я. Увеличение мощностных характеристик высоковольт-	
ных монолитных керамических конденсаторов К15-20 группы Н-50	123

## Секция «Конечно-элементная механика и компьютерный инжиниринг»

Галактионова А.П., Сергеев В.Н., Клявин О.И., Боровков А.И. Исследование	
процессов разрушения в композитных панелях вертикального хвостового оперения	
самолета	126
Алексеев С.В., Клявин О.И., Боровков А.И. Разработка и модификация	
дополнительных элементов силового каркаса кузова легкового автомобиля и анализ	
их влияния на его параметры	129
Харалдин Н.А., Боровков А.И., Клявин О.И. Модификация конечно-элементной	
модели манекена Hybrid-III для задач моделирования столкновения автомобиля с	
пешеходом	132
Лукин А.В., Лобачев А.М., Модестов В.С., Боровков А.И. Исследование	
нелинейных моделей деформирования и прочности железобетона под действием	
нестационарных нагрузок	135
Лагуткина А.Д., Боровков А.И., Немов А.С., Антонова О.В., Сычева С.Н.	
Особенности расчёта общей прочности высокоскоростных судов из композиционных	
материалов на основе прямого конечно-элементного моделирования	138
Федотов А.В., Немов А.С., Боровков А.И. Конечно-элементное исследование	
напряженно-деформированного состояния образца композитной панели летательного	
аппарата при наличии дефекта	141
Шевчук Р.Э., Гаев А.В. Методы конечно-элементного моделирования	
вибрационного состояния элементов электрических машин, содержащих	
композитные структуры	143
Журавлев Д.Н., Гаев А.В. Использование прямого конечно-элементного	
моделирования при разработке современных нормативных подходов определения	
предельного состояния элементов тепломеханического оборудования	146
Керестень И.А., Войнов И.Б., Боровков А.И. Конечно-элементное моделирование	
и анализ напряженно-деформированного состояния резьбового соединения при	
свинчивании	150
Пояркин А.В., Пальков Р.С. Замена структуры «включение-межфазный слой» на	
эффективное включение для нанокомпозиционных материалов	153

## Секция «Механика и процессы управления»

Беляев М.О., Семенов А.С. Конечно-элементное	моделирование	процесса	
возникновения овальности поперечного сечения монок	фисталлических об	бразцов при	
растяжении			156
Бобылев Е.О., Семенов А.С. Реономные модели сегн	етопьезокерамики		159
Ведь Б.А., Семенов А.С., Семенов С.Г. Моделиро	ование процессов	ползучести	
жаропрочных монокристаллических сплавов при ступе	нчатом нагружении	· · · · · · · · · · · · ·	162

Вилданов В.Р., Семенов А.С., Гецов Л.Б. Анализ термоусталостной прочности	
рабочей лопатки стационарной газотурбинной установки	165
Грищенко А.И., Семенов А.С. Моделирование процессов вязкоупругого деформи-	
рования и разрушения костной ткани на наноуровне	168
Грудинин А.Н., Семенов А.С. Моделирование процессов неупругого	
деформирования с учетом взаимного влияния октаэдрических и кубических систем	
скольжения	171
Зубаха П.А. Разработка алгоритма управления ориентацией космического	
аппарата при неисправных измерителях угловых скоростей	174
Ивашов И.В., Семенов А.С. Моделирование процессов разрушения поликристал-	
лической пьезокерамики при учете электропроницаемости трещин	176
Катанаха Н.А., Гецов Л.Б., Семенов А.С. Анализ длительной прочности гибов	
высокотемпературных паропроводов с учетом третьей стадии ползучести	179
Коковцева А.В., Семенов А.С., Семенов С.Г., Бенин А.В. Моделирование процесса	
выдергивания стеклопластиковой арматуры из бетонного блока	182
Ле-Захаров С.А., Мельников Б.Е., Семенов А.С. Моделирование неупругого	
деформирования грунтов с использованием критериев Друкера-Прагера и Кулона-	
Мора и их модификаций	185
Лукин А.В., Попов И.А., Скубов Д.Ю., Штукин Л.В. Управляемый переход через	
резонанс при помощи магнитной опоры изменяемой жесткости	188
Марков А.О., Яковис Л.М. Обнаружение разладки систем управления	191
Неклюдова Е.А., Семенов А.С., Семенов С.Г. Экспериментальное исследование и	
конечно-элементный анализ упругих и прочностных свойств стекловолоконного	
композиционного материала	194
Попов И.А., Лукин А.В., Скубов Д.Ю., Штукин Л.В. Охлаждение проводника	
переменного тока посредством поворотных колебаний проводящей рамки	197
Рукавишников Г.Д., Семенов А.С., Неверов С.А. Анализ напряженно-	
деформированного состояния выработок шерегешского железорудного	
месторождения с учетом пластических свойств пород	200
Рыбакова О.М., Семенов А.С., Семенов С.Г. Анализ влияния	
кристаллографической ориентации на ползучесть никелевого жаропрочного	
монокристаллического сплава ВЖМ-4	203
Федоров Д.Д., Яковис Л.М. Использование динамических моделей с	• •
запаздыванием для управления непрерывными технологическими процессами	206
Шагниев О.Б., Бурдаков С.Ф. Стабилизация перевернутого маятника при	• • • •
ограниченном ресурсе управления	209

## Секция «Механика и математическое моделирование»

Бразгина О.В. Сравнение материального и пространственного подходов в	
механике сплошных сред	212
Бублий И.Р. Анализ поведения тела-точки вблизи гравитационного центра	215
Соколов А.А., Ванюшкина В.В., Хайтин А.Л., Кривцов А.М. Моделирование	
поведения человека в природной и техногенной среде	218
Витохин Е.Ю. Численное моделирование задачи термоупругости	
гиперболического типа в случае гармонических возмущений	219
Волегов П.С., Грибов Д.С. Моделирование циклического нагружения поликрис-	
таллического агрегата	222
Антонов В.И., Давыдов Р.В. Полуэмпирическое уравнение состояния плотной	

плазмы металлов	226
динамическом нагружении сжимающей силой	228
с силовым трибологическим взаимодействием	231
Курдова А.В., Скобов Е.Д. Математическое моделирование малогабаритной	
системы измерения параметров качки объекта	234
Мурачев А.С., Кривцов А.М. Равновесие протопланетного облака системы Земля-	
Луна	238
Осокина А.Е., Беринский И.Е. Уравнения динамики треугольной и квадратной	0.4.1
кристаллических решеток	241
Пояркин А.В., Пальков Р.С. Анализ возможности использования упрощенных	
формул 2D для прогнозирования эффектов усиления однонаправленно-	244
Вознесенский В.Р., Прокопенко А.Н., Дятлова П.А. Разработка установки для	244
перспективного производства гибких труб	246
Пятницкая Д.А. Моделирование образования системы Земля-Луна в результате	• 10
коллапса газопылевого облака	249
Сабирова З.Р., Певнева А.І. Вычислительный эксперимент по расчету градиента	252
Давления в стволе скважин	252
Рыжков А.В., Меленев П.В., Раихер Ю.Л. Компьютерное моделирование	255
Магнитополимерных нанокомпозитов	233
Соколов А.А., Кривцов А.М. Моделирование насыщения углеродной связи в	257
Феоктистова Е.В., Осипенко М.А., Куюкина М.С. Вероятностная модель меж-	231
фазных процессов в системе бактерии – вода – углеводород	260
Фролова К.П., Лобода О.С. Простейшая механическая модель лука	262
Цветков Д.В., Кривцов А.М. Моделирование различных эволюционных процессов	064
с помощью клеточных автоматов	264
Чеоышев И.С., Лукин С.В. Анализ влияния фильтрационных параметров пласта	
на процесс термической закачки воздуха в пласт при помощи математической	267
Модели внутрипластового горения	207
Краморов Д.С., Полушин Б.А. Исследование спосооов объединения тонкостен-	260
ных профилеи в двоиное сечение $R \wedge D$ исстаторациа разлостинаских	209
сройств прихфазицих смосой	272
$III_{agr Memor} P M V_{Ublu} \Gamma F Молелипорацие электрического отклика$	<i>212</i>
гетерогенной среды при упругом импульсном воздействии	275
Зубко ИЮ Симонов МВ Определение упругих молулей с помощью	215
энергетического подхода для образцов конечных размеров с ГПУ-решеткой	277
r r r r r r r r r r r r r r r r r r r	

# Секция «Виртуализация, управление и защита информации в компьютерных сетях»

<i>Лукашин А.А.</i> Нейроуправление распределением вычислительных ресурсов	
облачного кластера	281
Ильяшенко А.С., Заяц О.И., Заборовский В.С. Моделирование вероятностного	
выталкивающего механизма для двухпотоковой системы массового обслуживания с	
абсолютным приоритетом	283

285
288
291
294
297

# Секция «Программное обеспечение мобильных роботов»

Василевский П.П., Попов С.Г. Технология интеграции имитационных моделей	
телематической компоненты интеллектуальных транспортных систем	301
Калугин Н.В., Мулюха В.А. Разработка методов представления функциональной	
модели агрегатно-модульных роботов	303
Финагин А.П., Попов С.Г. Модель синтеза сервисов кибер-объектов в	
мультипротокольной сети операций	306
Тучков А.С., Попов С.Г. Интеграция программно-аппаратных компонент	
автомобильного мультипротокольного узла	309