ПОЛИТЕХ
Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого

Физико-механический институт



НЕДЕЛЯ НАУКИ ФИЗМЕХ

Сборник материалов
Всероссийской научной конференции

31 марта — 4 апреля 2025 года

ПОЛИТЕХ-ПРЕСС
Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого

Министерство науки и высшего образования Российской Федерации

САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ
ПОЛИТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ ПЕТРА ВЕЛИКОГО

Физико-механический институт

НЕДЕЛЯ НАУКИ ФИЗМЕХ

Сборник материалов
Всероссийской научной конференции

31 марта – 4 апреля 2025 года

ПОЛИТЕХ-ПРЕСС
Санкт-Петербургский
политехнический университет
Петра Великого

Санкт-Петербург
2025

УДК 51;53
ББК 22
Н42

Неделя науки ФизМех : сборник материалов Всероссийской научной конференции, 31 марта – 4 апреля 2025 г. – СПб. : ПОЛИТЕХ-ПРЕСС, 2025. – 527 с.

В сборник включены статьи студентов, аспирантов, молодых ученых и сотрудников СПбПУ, университетов, научных организаций и предприятий Санкт-Петербурга, России, зарубежных стран, принятых на секционные заседания конференции «Неделя науки ФизМех». Статьи отражают современный уровень научно-исследовательской работы участников конференции в области прикладной математики, физики и механики.

Представляет интерес для специалистов в различных областях знаний, для учащихся и работников системы высшего образования и Российской академии наук.

Редакционная коллегия
Физико-механического института СПбПУ:
Н. Г. Иванов (директор института),
Я. А. Гатаулин, *Е. М. Смирнов*, *М. Е. Фролов*,
Е. Е. Журкин, *С. А. Щербак*, *Д. Д. Коробко*,
Н. Ю. Золоторевский, *А. Н. Баженов*, *А. С. Семенов*,
С. А. Галаев, *А. С. Мурачев*

Печатается по решению
Совета по издательской деятельности Ученого совета
Санкт-Петербургского политехнического университета Петра Великого.

ISBN 978-5-7422-9235-7

© Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого, 2025

СЕКЦИЯ "ФИЗИКА КОНДЕНСИРОВАННЫХ СРЕД И НАНОСТРУКТУР"

УДК 539.213.27

А.Ю. Мороз[1], В.П. Каасик[1,2]
[1]Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого(*)
[2]Алферовский Университет

ПОЛЯРИЗАЦИЯ ФОТОКРИСТАЛЛИЗУЮЩИХСЯ СТЕКОЛ, СОДЕРЖАЩИХ Ag^{+} и Ce^{3+}

Введение. В настоящее время большой интерес вызывают методы 2D и 3D структурирования стекла. К числу распространенных и простых способов структурирования стекол относятся их поляризация [1,2] и, для фоточувствительных стекол, модификация при ультрафиолетовом (УФ) облучении [3,4]. В настоящей работе мы совместили эти два подхода к структурированию и исследовали их воздействие на фотураноподобное фотокристаллизующееся стекло следующего состава (масс. %): 75.55 SiO_2, 10.44 Li_2O, 5.33 Al_2O_3, 5.74 K_2O, 1.17 Na_2O, 1.13 ZnO, 0.236 Ag_2O, 0.085 CeO_2, 0.33 Sb_2O_3.

Методы. Эксперимент состоял из трех основных этапов: 1) поляризация, 2) УФ облучение и 3) термообработка. В процессе поляризации стекло помещалось между двумя электродами, нижний из которых (катодный) полностью закрывал поверхность стекла, а верхний (анодный) лишь часть. Далее конструкция нагревалась до температуры 300 °C, после чего к электродам прикладывалось напряжение от 400 до 1000 В (в зависимости от эксперимента). Для поляризации использовались различные электроды: два вида электродов из нержавеющей стали и стеклографитовый электрод. Во всех экспериментах наблюдалось «вспучивание» и растрескивание поверхности стекла вблизи границы электрода.

Для УФ облучения образцов использовались фемтосекундный лазер (длина волны 343 нм) и светодиод (длина волны 280 нм). Механизм и результаты воздействия УФ излучения на исследуемое стекло подробнее описаны в [5]. В данной работе лазером облучались области в виде наборов точек, линий и наборов линий. Диаметр области локализации лазерного воздействия в нашем случае составлял 6-10 мкм. При облучении лазером стекло перемещалось в фокальной плоскости фокусирующего объектива с помощью моторизованного транслятора. Для облучения больших участков поверхности использовался УФ-светодиод. До проведения термообработки облученные области не имели визуальных отличий, какие-либо изменения рельефа поверхности также не были зарегистрированы. Облучение проводилось так, чтобы облученная область каждого типа попадала и в поляризованную, и в неполяризованную область стекла. В результате каждый образец содержал четыре различных области стекла: 1) исходное стекло, 2) облученное, 3) поляризованное, 4) поляризованное и затем облученное.

Температурная обработка состояла из двух этапов: первый отжиг при 500 °C и второй при 600 °C. Были выбраны следующие времена отжигов: 60 минут для первого и 40 минут для второго.

Полученные результаты. После первого отжига облученные области стекла приобретали характерный желтый цвет за счет кластеризации атомарного серебра. Изменений поверхности на этом этапе отмечено не было.

В результате второго отжига происходит кристаллизация метасиликата лития, при этом кластеры (наночастицы) серебра являются центрами кристаллизации, и облученные области меняют цвет с желтого на белый. В поляризованной области стекла происходят изменения, зависящие от типа использованного при поляризации электрода. В экспериментах со стеклографитовым электродом после второго отжига поверхность стекла приобрела

(*)А.Ю. Мороз, alex.moroz97@mail.ru

повышенную шероховатость. В то же время при использовании электродов из нержавеющей стали поверхность стекла оставалась ровной, но покрывалась крупными трещинами. Авторы связывают эти различия с разной степенью прилегания электродов к стеклу, следовательно, с различными эффектами при поляризации в этих областях. В области поляризации в приповерхностном слое стекла не было обнаружено кристаллов метасиликата лития.

Исследования образцов после поляризации показали наличие ярко выраженной границы электрода для всех его видов. Она представляет собой растрескавшуюся и «вспученную» полосу стекла шириной до 0.5 мм и высотой до 40 мкм. В процессе поляризации в стекле начинались формирование и миграция черной субстанции, предположительно оксида серебра, в сторону катодной области. В точках соприкосновения данной субстанции с поверхностью наблюдалось растрескивании стекла, что, в свою очередь, приводило к пробою и раскалыванию образцов.

Выполненные с помощью конфокального микроскопа исследования образцов, подвергнутых второму отжигу, показали, что в облученных областях, которые не подвергались поляризации, наблюдается проседание поверхности на глубину 0.3-3 мкм. В поляризованной области поверхности УФ-облученных и необлученных участков не отличались.

Поверхность облученной области в эксперименте со стеклографитовым электродом приобрела приобрела повышенную шероховатость, что свидетельствует о том, что в этой области уменьшилась температура стеклования. С помощью последующих экспериментов было установлено, что это уменьшение составило ~40 °C. Так как поверхность стекла потеряла прозрачность, что не позволило использовать конфокальную микроскопию, для исследования поляризованной области была использована рамановская спектроскопия. Исследования показали, что и в поляризованной, и в неполяризованной областях кристаллы формируются только в облученных участках (рис. 1).

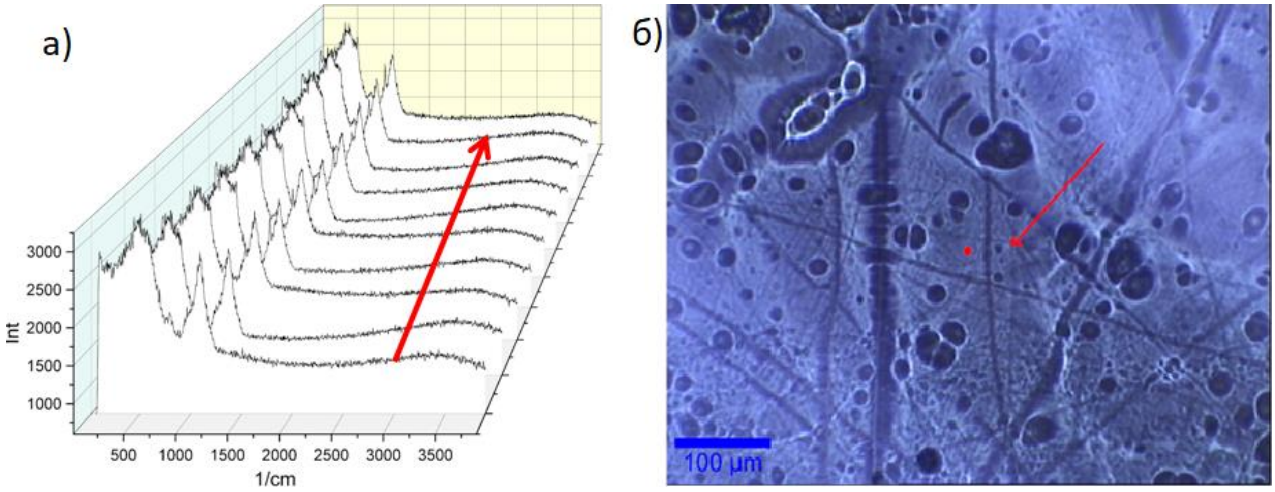


Рис. 1. а) Рамановская спектроскопия; б) область сканирования с направлением движения

Как видно из графиков, пики на частотах 615 $см^{-1}$ и 990 $см^{-1}$, соответствующие метасиликату лития, появляются только при переходе в облученную область, то есть эффект облучения локальный. Рамановское сканирование облученной и поляризованной области по глубине показало, что кристаллы появляются на глубине примерно 60 мкм и существуют и дальше в толще стекла (рис. 2).

Также нами было проведено травление образцов в 4% растворе плавиковой кислоты, которое показало, что поверхность поляризованной области стекла, в отличие от областей без поляризации, не подвержена травлению. Этот наблюдалось как для образцов, поляризованных

с использованием стеклографитового электрода, так и для образцов с электродом из нержавеющей стали, поверхность которых осталось ровной и прозрачной, но потрескалась. Это свидетельствует об изменении состава приповерхностного слоя области поляризации, и что в нем полностью отсутствуют кристаллы метасиликата лития, легкорастворимые в использованном травителе.

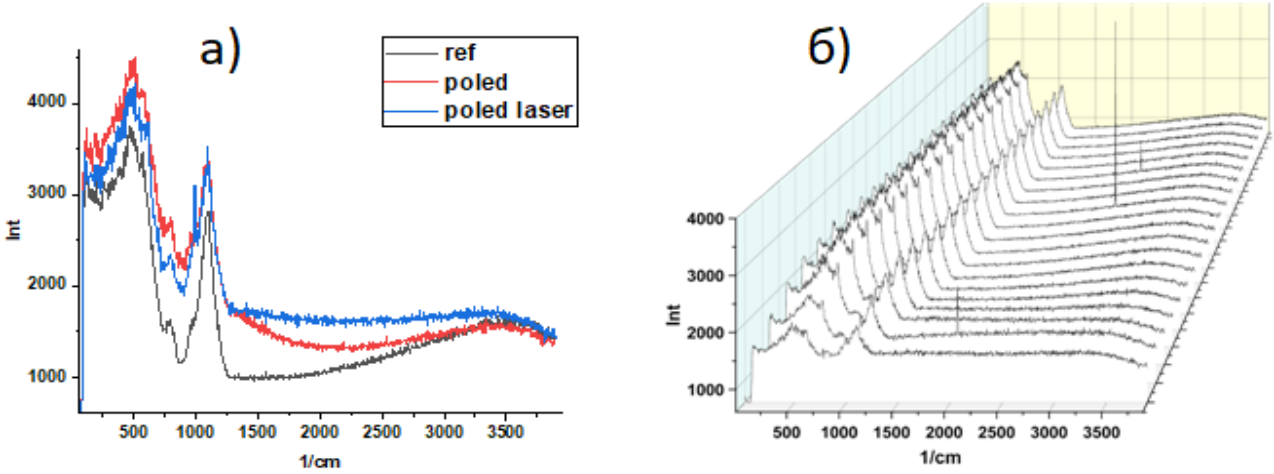


Рис. 2. а) Рамановские пики для области у поверхности и в глубине стекла;
б) Рамановская спектроскопия по глубине образца

Заключение. Таким образом, проведенное исследование показало, что для исследованных фоточувствительных стекол совмещение поляризации и УФ-облучения представляет интерес, позволяя использовать независящие друг от друга эффекты. Поляризация приповерхностного слоя полностью подавляет его кристаллизацию, но никак не влияет на процесс кристаллизации более глубоких областей. Также необходимо отметить, что поляризация с помощью стеклографитового электрода значительно понизила температуру стеклования приповерхностного слоя, чего раньше не наблюдалось. Скорее всего, этот эффект не связан напрямую с изменением состава, поскольку наблюдался и при поляризации с помощью электрода из нержавеющей стали, однако в последнем случае уменьшение температуры стеклования поляризованной области замечено не было.

Работа поддержана Госзаданием Минобрнауки РФ FSRM-2023-0009.

ЛИТЕРАТУРА

1. Graca M.P.F., Ferreira da Silva M. G., Valente M. A. Influence of thermal and thermoelectric treatments on structure and electric properties of B2O3–Li2O–Nb2O5 glasses // Journal of Non-Crystalline Solids.– 2008.– V. 354.– P. 901-908.
2. Lind F., Palles D., Möncke D., Kamitsos E. I., Wondraczek L. Modifying the surface wetting behavior of soda-lime silicate glass substrates through thermal poling//Journalof Non-Crystalline Solids.– 2017.–V. 462.– P. 47-50.
3. Sima F., Kawano H., Miyawaki A., Obata K., Serien D. 3D glass nanofluidics fabricated by femtosecond laser processing for study of cancer cell metastasis and invasion // Proc. of SPIE.– 2020.– N. 11267.– P. 1-8.
4. Royon A., Petit Y., Papon G., Richardson M., Canioni L. Femtosecond laser induced photochemistry in materials tailored with photosensitive agents // Opticalmaterials express.– 2011.– N 5(8).–P. 866-882.
5. Moroz A.Y., Babich E.S., Kaasik V.P., Lipovskii A.A., Melekhin V.G., Redkov A.V., Tagantsev D.K. Laser-induced optical nonlinearity in a Li-rich glass // Journal of Physics: Conference Series.– 2021.– V. 2086.– P. 12-24.

УДК 538.958

Е.Д. Поленок[1,2], В.И. Ушанов[2], В.В.Чалдышев[2]
[1]Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого(*)
[2]Физико-технический институт им. А.Ф. Иоффе РАН

ЛОКАЛИЗОВАННЫЙ ПЛАЗМОННЫЙ РЕЗОНАНС НАНОЧАСТИЦ Bi В МАТРИЦЕ GaAs, УСИЛЕННЫЙ БРЭГГОВСКОЙ ДИФФРАКЦИЕЙ

Введение. Локализованный поверхностный плазмонный резонанс (LSPR) представляет интерес для современной науки из-за ряда его уникальный свойств, среди которых локализация электрического поля световой волны в нанометровом масштабе и многократное усиление поглощения на резонансной частоте [1]. В оптоэлектронике LSPR не находит широкого применения из-за технологической проблемы: методы формирования наночастиц из традиционных плазмонных материалов не совместимы с эпитаксиальными технологиями роста, применяемыми для коммерческого производства полупроводниковых приборов. В связи с этим возникает спрос на альтернативные плазмонные материалы [2].

В рамках данной работы будет рассмотрен многообещающий плазмонный материал для использования с полупроводниками группы $A_{III}B_V$ – висмут [3]. Максимум интенсивности LSPR наночастиц висмута в матрице GaAs находится за пределами окна прозрачности полупроводника, однако, все равно LSPR может быть зафиксирован спектрально из-за большой ширины резонансного пика. Для усиления сигнала мы применили особую конфигурацию структуры: периодическое расположение квазидвумерных слоев наночастиц Bi в матрице GaAs.

Образец, состоящий из 24 дельта-слоев наночастиц Bi в матрице GaAs был выращен методом молекулярно-лучевой эпитаксии. Были проведены оптические, электронно-микроскопические и рентгеноструктурные исследования, в которых определены геометрические параметры системы и получены данные о распределении висмута в образце [4].

Результаты оптических исследований и моделирование. На рис.1а представлены полученные спектры оптического отражения образца в окне прозрачности GaAs при углах падения света от 25° до 70° с шагом 2.5° при S-поляризации. Все максимумы отражения демонстрируют спектральный сдвиг в область коротких длин волн при увеличении угла падения света. Такое поведение свойственно брэгговскому максимуму отражения, который смещается по закону:

$$\lambda = 2d\sqrt{\varepsilon_{eff} - sin^2\theta}, \quad (1)$$

где d — расстояние между слоями, ε_{eff} — эффективная диэлектрическая проницаемость вещества, θ — угол падения света.

Для того, чтобы показать, что сдвиг действительно является брэгговским и соответствует квазипериодической системе наночастиц висмута в матрице арсенида галлия, необходимо прибегнуть к численному моделированию. Первым шагом в этом моделировании является описание взаимодействия между электромагнитной волной и наночастицей висмута. Эта задача может быть решена в рамках теории Ми. Поскольку наночастицы висмута имеют форму, близкую к сферической, их оптический отклик может быть описан с помощью поляризуемости следующего вида:

$$\alpha = 4\pi a^3 \frac{\varepsilon_m - \varepsilon_d}{\varepsilon_m + 2\varepsilon_d}, \quad (2)$$

(*) Е.Д. Поленок, polenok.ed@edu.spbstu.ru

где a — радиус частицы, ε_m — диэлектрическая проницаемость металла, ε_d — диэлектрическая проницаемость среды. Для описания диэлектрической функции материала матрицы GaAs использовалась известная модель Адачи [5]. Данные о диэлектрических свойствах металлических нановключений Bi были взяты из работы Ушанова и др. [3]. Отклик двумерного слоя, состоящего из таких частиц, рассчитывался с помощью модели Перссона-Либша [6]. Моделирование спектров оптического отражения было выполнено с помощью метода матриц переноса.

При построении модели мы принимали во внимание, что в процессе роста производилось пять остановок, при которых проводились промежуточные отжиги. Поэтому в модели вся структура была разделена на пять групп, в каждой из которых толщины разделительных слоев GaAs и параметры квазидвумерных слоев нановключений Bi полагались одинаковыми. При этом период в разных группах варьировался от 119 до 161 нм. Диаметры металлических наночастиц варьировались от 5 до 19 нм. В целом величина вариаций геометрических параметров структуры, использованная при моделировании оптических спектров, соответствовала данным структурных исследований [4].

На рис. 1b представлены рассчитанные спектры отражения для разных углов падения S-поляризованного света с длиной волны от 800 до 1100 нм. Видно, что использованная модель количественно описывает все особенности экспериментального спектра отражения. Моделирование показало, что относительно небольшая амплитуда главного брэгговского пика связана главным образом с непостоянством периода структуры на протяжении 25 слоев. Штриховая кривая показывает смещение основного пика брэгговского отражения при изменении угла падения света, которое соответствует формуле (1) и экспериментальным наблюдениям.

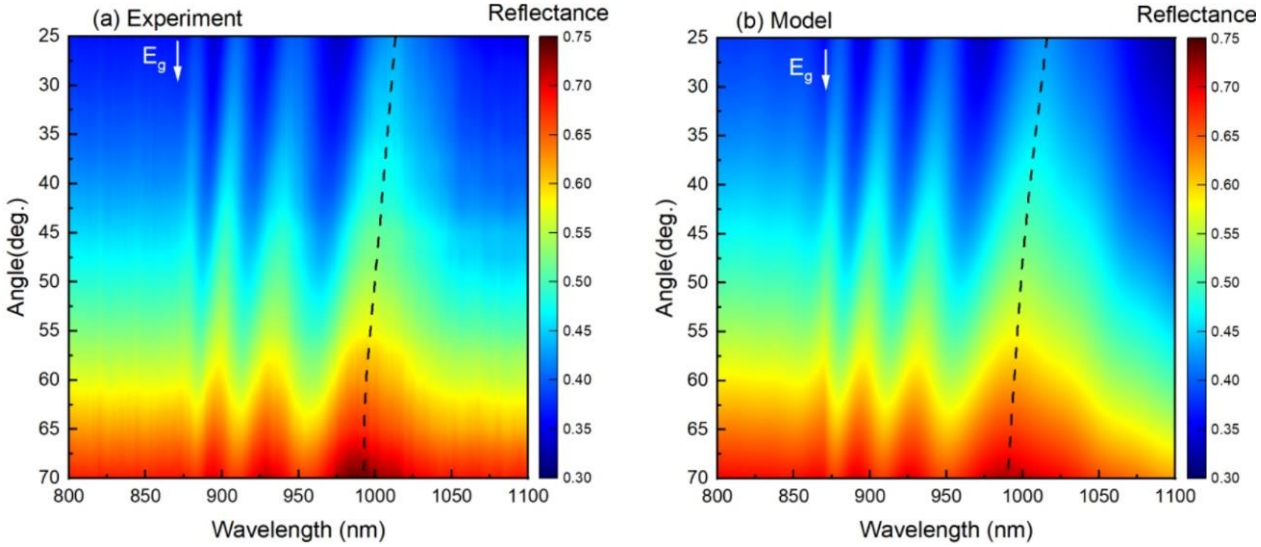


Рис. 1. Экспериментальные (*a*) и полученные в результате моделирования (*b*) спектры оптического отражения от рассматриваемой структуры для S-поляризации и различных углов падения света. Стрелкой отмечена запрещенная зона арсенида галлия (E_g^{GaAs}), пунктирной линией соединены главные максимумы отражения

Обсуждение. Следует отметить, что зависимость оптического резонанса от отклонений от периодичности не является специфическим свойством плазмонных наноструктур. Подобный эффект, например, наблюдался и для квазипериодических систем квазидвумерных экситонов [7-10]. Детальный анализ явлений, связанных с пространственным беспорядком, выходит за рамки настоящей работы.

Брэгговские осцилляции в спектрах оптического отражения, полученные в численной модели, ограничены со стороны коротких длин волн началом полосы межзонного поглощения в матрице GaAs. Как и в эксперименте они так же затухают со стороны длинных волн, больших 1050 нм. Это затухание оказалось связанным с дисперсией диэлектрической функции Bi. Наши расчеты показали, что в длинноволновой спектральной области наночастицы Bi не могут поддерживать локализованный плазмонный резонанс в матрице GaAs. А именно, для резонансного усиления поляризуемости согласно формуле (2) необходимо, чтобы диэлектрическая проницаемость металла была отрицательной, ее абсолютная величина была близка к удвоенной величине диэлектрической проницаемости диэлектрической среды. В соответствии с данными работы [3], диэлектрическая функция висмута не может обеспечивать выполнения этого условия для длин волн света, больших 1200 нм.

Заключение. В данной работе была впервые изучены спектры оптического отражения от эпитаксиальных слоев арсенида галлия, со встроенной системой квазидвумерных слоев плазмонных наночастиц висмута. В спектрах оптического отражения обнаружены брэгговские осцилляции интенсивности света, отраженного от слоев наночастиц Bi. Построена модель, количественно описывающая экспериментальные спектры оптического отражения и согласующаяся с данными рентгено-дифракционных и электронно-микроскопических исследований.

Таким образом, висмут демонстрирует потенциал в качестве альтернативного плазмонного материала для интеграции в полупроводниковые структуры на основе арсенида галлия и родственных соединений III-V, что открывает новые возможности для разработки полупроводниковых оптоэлектронных устройств с использованием LSPR.

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда и Санкт-Петербургского научного фонда № 24-22-20012, https://rscf.ru/project/24-22-20012/.

ЛИТЕРАТУРА

1. Maier S. A. Plasmonics: fundamentals and applications. – New York : Springer, 2007. – Т. 1. – С. 245.
2. Naik G. V., Shalaev V. M., Boltasseva A. Alternative plasmonic materials: beyond gold and silver // Advanced materials. – 2013. – Т. 25. – №. 24. – С. 3264-3294.
3. Ushanov V. I. et al. Plasmon Resonance in a System of Bi Nanoparticles Embedded into (Al, Ga) As Matrix // Nanomaterials. – 2024. – Т. 14. – №. 1. – С. 109.
4. Поленок Е. Д. и др. Формирование квазидвумерных слоев наночастиц висмута в эпитаксиальных пленках арсенида галлия // Физика твердого тела. – 2024. – Т. 66. – №. 9. – С. 1514-1519.
5. Adachi S. GaAs, AlAs, and $Al_xGa_{1-x}As$: Material parameters for use in research and device applications // Journal of applied physics. – 1985. – Т. 58. – №. 3. – С. R1-R29.
6. Persson B. N., J., Liebsch A. Optical properties of two-dimensional systems of randomly distributed particles // Physical Review B. – 1983. – Т. 28. – №. 8. – С. 4247.
7. d'Aubigné Y. M. et al. Polariton effects in multiple-quantum-well structures of CdTe/Cd 1− x Zn x Te //Physical Review B. – 1996. – Т. 54. – №. 19. – С. 14003.
8. Andreani L. C. et al. Effect of inhomogeneous broadening on optical properties of excitons in quantum wells //Physical Review B. – 1998. – Т. 57. – №. 8. – С. 4670.
9. Prineas J. P. et al. Resonant photonic band gap structures realized from molecular-beam-epitaxially grown InGaAs⁄GaAs Bragg-spaced quantum wells //Journal of applied physics. – 2006. – Т. 100. – №. 6.
10. Ivanov A. A. et al. Critical spatial disorder in InGaN resonant Bragg structures //Applied Physics Letters. – 2022. – Т. 121. – №. 4.

УДК 538.915

Н.А. Лямкин[1,2], Д.А. Иванов[2]
[1]Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого(*)
[2]ООО «Софт-Импакт»

ЧИСЛЕННЫЙ РАСЧЕТ ПЛОТНОСТИ СОСТОЯНИЙ И КОНЦЕНТРАЦИИ ДЫРОК В ВАЛЕНТНОЙ ЗОНЕ КУБИЧЕСКИХ КРИСТАЛЛОВ

Введение. Моделирование современных оптоэлектронных полупроводниковых приборов требует точного определения зонной структуры материала, используемого в качестве активной среды. Значительное влияние на оптические свойства полупроводника оказывают гофрировка и непараболичность валентной зоны. Кроме того, на данные особенности может существенно влиять наличие упругих напряжений. Стандартное приближение эффективных масс, предполагающее параболичный закон дисперсии, не позволяет учитывать перечисленные эффекты, поэтому его использование может привести к значительным погрешностям при расчете приборных характеристик.

В данной работе в рамках **k·p**-метода произведен численный расчет энергетического спектра, плотностей состояний и концентраций дырок на примере GaAs, имеющего кубическую структуру. Выполнено сравнение полученных результатов с аксиальным приближением и приближением эффективных масс.

Расчет энергетического спектра. В качестве основы используемой численной модели взят 6×6 гамильтониан Латтинжера-Кона [1], учитывающий спин-орбитальное взаимодействие и наличие упругих деформаций. Ввиду симметрии гамильтониана, решение задачи на собственные значения приводит к секулярному уравнению:

$$[\varepsilon^3 + \Delta\varepsilon^2 - 3\lambda\varepsilon - (\Delta\lambda + \mu)]^2 = 0,$$

где $\varepsilon = E + P$ – редуцированная энергия, Δ – энергия спин-орбитального расщепления, а коэффициенты имеют следующий вид:

$$\lambda = Q^2 + RR^\dagger + SS^\dagger, \mu = Q(2Q^2 - 3(2RR^\dagger - SS^\dagger)) + \frac{3\sqrt{3}}{2}(RS^{\dagger 2} + S^2R^\dagger),$$

$$P = P_k + P_\epsilon, Q = Q_k + Q_\epsilon, R = R_k + R_\epsilon, S = S_k + S_\epsilon,$$

$$P_k = \frac{\hbar^2}{2m_0}\gamma_1(k_x^2 + k_y^2 + k_z^2), P_\epsilon = -a_v(\epsilon_{xx} + \epsilon_{yy} + \epsilon_{zz}),$$

$$Q_k = \frac{\hbar^2}{2m_0}\gamma_2(k_x^2 + k_y^2 - 2k_z^2), Q_\epsilon = -\frac{b}{2}(\epsilon_{xx} + \epsilon_{yy} - 2\epsilon_{zz}),$$

$$R_k = \frac{\hbar^2}{2m_0}\sqrt{3}[-\gamma_2(k_x^2 - k_y^2) + 2i\gamma_3 k_x k_y], R_\epsilon = b(\epsilon_{xx} - \epsilon_{yy}) - id\epsilon_{xy},$$

$$S_k = \frac{\hbar^2}{2m_0}2\sqrt{3}\gamma_3(k_x - ik_y)k_z, S_\epsilon = -d(\epsilon_{zx} - i\epsilon_{yz}),$$

где $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ – параметры Латтинжера, a_v, b, d – деформационные потенциалы, ϵ_{ij} – компоненты тензора деформаций.

Корнями данного кубического уравнения являются энергии E для трех подзон, соответствующим тяжелым, легким и спин-отщепленным дыркам. Представленный подход позволяет рассматривать деформации вдоль любых кристаллографических направлений. Поверхности постоянной энергии для тяжелых и легких дырок в GaAs в отсутствие и при наличии напряжений представлены на рис. 1. Вид поверхностей дает понять, что использование сферического приближения в данном случае является некорректным.

(*) Н.А. Лямкин, lyamkin.na@gmail.com

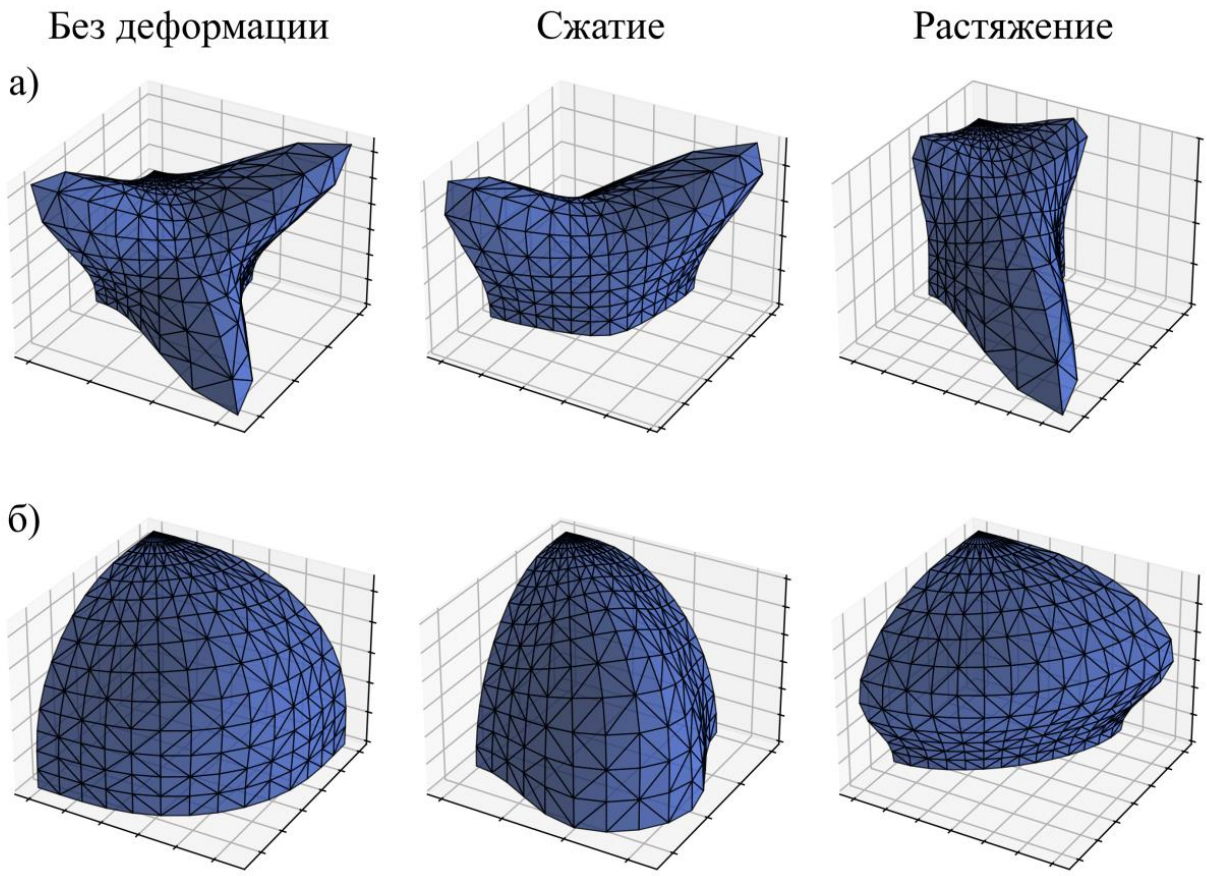


Рис. 1. Изоэнергетические поверхности тяжелых (а) и легких (б) дырок в GaAs при $\mathcal{E}$ = 0.3 эВ и рассогласовании постоянных решетки 3%

Расчет плотности состояний. Плотность состояний для каждой подзоны можно найти путем интегрирования по соответствующей изоэнергетической поверхности [2]:

$$G(E) = \frac{2 \cdot 8}{(2\pi)^3} \int \frac{dS}{|\nabla E(k)|},$$

где множитель 2 в числителе коэффициента учитывает наличие спина, а 8 компенсирует интегрирование по восьмой части всей поверхности, как показано на рис. 1.

Алгоритм включает триангуляцию области $[0, \frac{\pi}{2}] \otimes [0, \frac{\pi}{2}]$ изменения полярного θ и азимутального φ углов направления волнового вектора дырки. Для каждого узла полученной сетки и каждого значения кинетической энергии $\mathcal{E}$ находим значения модуля радиус-вектора k, удовлетворяющего следующему условию:

$$E(0) - E(ksin(\theta)cos(\varphi), ksin(\theta)sin(\varphi), kcos(\theta)) = \mathcal{E}.$$

Затем для каждого треугольного элемента полученной поверхности определяются нормаль $\vec{n}$ и площадь dS. Знание нормали позволяет вычислить требуемое значение градиента $\nabla E(\vec{k}) = (E(\vec{k} + \varepsilon\vec{n}) - E(\vec{k}))/\varepsilon$. Используя значение градиента и площади элемента поверхности, проводится численное интегрирование в соответствии с формулой для $G(E)$.

Описанная выше процедура вычисления плотности состояний предполагает численное интегрирование по поверхности в зоне Бриллюэна, что может быть довольно медленным процессом. Увеличить скорость расчета плотности состояний можно путем аксиально-симметричной аппроксимации поверхности постоянной энергии, что позволяет свести двумерное интегрирование к одномерному.

Это приближение возможно, если недиагональные компоненты тензора деформации равны нулю, $\epsilon_{xy} = \epsilon_{xz} = \epsilon_{yz} = 0$ и, следовательно, равными нулю становятся компоненты гамильтониана $R_\epsilon = S_\epsilon = 0$. Тогда, используя приблизительное равенство $\gamma_2 \approx \gamma_3$, можно получить

$$R = \frac{\hbar^2}{2m_0}\sqrt{3}k_{||}^2\left(\frac{(-\gamma_2+\gamma_3)}{2}e^{2i\varphi} - \frac{(\gamma_2+\gamma_3)}{2}e^{-2i\varphi}\right) \approx -\frac{\hbar^2}{2m_0}\sqrt{3}k_{||}^2\frac{(\gamma_2+\gamma_3)}{2}e^{-2i\varphi},$$

где $k_{||} = \sqrt{k_x^2 + k_y^2}$. В результате изоэнергетические поверхности приобретут аксиальную симметрию.

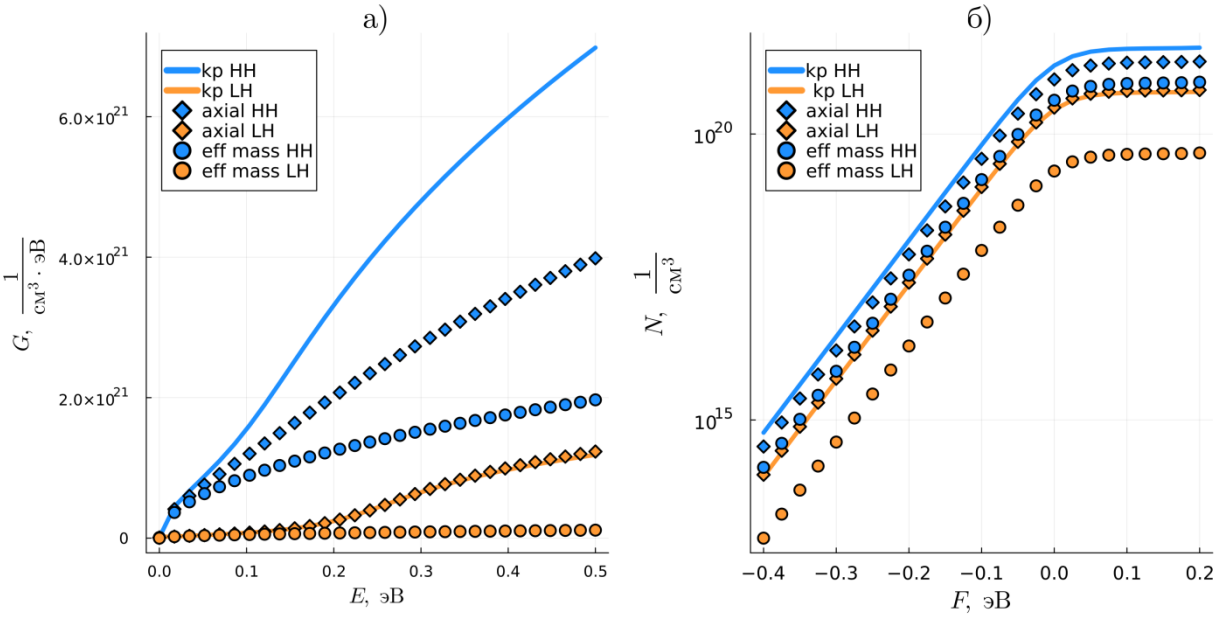


Рис. 2. Сравнение точного и приближенных методов расчета плотности состояний (а) и концентрации как функции уровня Ферми F (б) дырок в GaAs. Сплошные линии – **k·p**-метод, ромбы – аксиальное приближение, точки – приближение эффективных масс

Результаты и выводы. Результаты расчетов для GaAs плотностей состояний и концентраций дырок с использованием различных методов описания энергетического спектра (**k·p**-метода, аксиального приближения, приближения эффективных масс) представлены на рис. 2. При использовании приближений заметно занижение абсолютных значений как плотности состояний (рис. 2а), так и концентрации (рис. 2б) дырок в сравнении с результатом, основанным на **k·p**-методе. Видно, что синяя кривая, соответствующая наиболее важной подзоне тяжелых дырок, проходит заметно выше зависимостей, соответствующих приближенным методам. Следует отметить, что аксиальное приближение дает более близкие к **k·p**-методу результаты, чем стандартное приближение эффективных масс. Особенно наглядно это просматривается для подзоны легких дырок, где и плотность состояний, и концентрация практически совпадают с результатами **k·p**-метода.

Таким образом, учет непараболичности и гофрировки валентной зоны позволяет скорректировать значения плотности состояний и концентрации дырок, что, в свою очередь, может повысить предсказательность свойств проектируемых полупроводниковых приборов.

ЛИТЕРАТУРА

1. Chao C.Y.P., Chuang S.L. Spin-orbit-coupling effects on the valence-band structure of strained semiconductor quantum wells // Physical Review B. – 1992. – Т. 46. – №. 7. – С. 4110.
2. Бонч-Бруевич В.Л., Калашников С.Г. Физика полупроводников. Изд. 2-е. – М.: Наука, 1990. – 688 с.

УДК 539.21: 539.1

Д.А. Стрижкин[1], К.П. Карасев[1,2], П.А. Карасев[1]
[1]Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого(*)
[2]Академический университет им. Ж.И. Алферова, Санкт-Петербург

ВОЗМОЖНОСТИ МОЛЕКУЛЯРНО-ДИНАМИЧЕСКОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ ДЛЯ АНАЛИЗА ОБЛУЧЕНИЯ КЛАСТЕРНЫМИ ИОНАМИ

Введение. Облучение ускоренными ионами – один из наиболее широко распространенных методов модификации свойств поверхности твердого тела. Главным его преимуществом является возможность контролировать получаемые свойства подложки, варьируя такие параметры, как тип ионов, их энергия и ток, угол падения и т.д. Одним из практических применений ионной бомбардировки является ионная имплантация – внедрение ионов в твердое тело для селективного изменения его электрических, оптических и магнитных свойств [1]. Также возможно направленное наноструктурирование поверхности [2].

При попадании атомарного иона в мишень, ее частицам от иона передается энергия и импульс, что ведет к ионизации атомов и их смещению из положений в решетке [1]. При этом сам ион, потеряв энергию, останавливается на некоторой глубине. Таким образом достигается изменение структуры, химического состава и других свойств приповерхностного слоя мишени. Помимо атомарных ионов можно облучать поверхность подложки ионизованными агломератами – т.н. кластерными ионами. При этом наблюдается ряд существенных особенностей. При падении кластерного иона все составляющие его атомы попадают на поверхность мишени практически в одной точке, что приводит к выраженным коллективным процессам взаимодействия. Проникновение кластера в приповерхностный слой мишени сопровождается возникновением ударной волны, воздействующей на следующие слои; появляется локальная область с повышенной энергией атомов. Это приводит к модификации свойств подложки, наблюдается образование кратера на поверхности и нелинейное увеличение количества распыленного материала. Кластерное ионное облучение может использоваться для выращивания различных покрытий, тонкой полировки и создания наноразмерного рельефа на поверхности твердых тел [3].

Метод молекулярной динамики. Время первичного взаимодействия ускоренного иона с мишенью составляет несколько пикосекунд. Для исследования подобных быстрых процессов удобно использовать метод Молекулярной динамики (МД), поскольку он позволяет изучать движение и взаимодействие атомов в системе [4]. В его основе лежит численное решение уравнений Ньютона. Силы, действующие на частицы, определяются потенциалами, которые могут рассматривать взаимодействие двух (парные потенциалы) или нескольких атомов (многочастичные потенциалы). Метод МД моделирования работает по следующему принципу: задается начальное состояние системы: положения, скорости, типы частиц и другие параметры; далее на каждом шаге моделирования на основе выбранного потенциала рассчитываются силы, действующие на каждую частицу; уравнения движения численно интегрируются по времени. При рассмотрении движения быстрых частиц важно также учитывать потери энергии на взаимодействие с электронной подсистемой, которые существенны в диапазоне энергий более 10 эВ.

Расчетная модель. МД-моделирование падения ускоренной молекулы C_{60} на поверхность монокристалла кремния выполнялось с применением свободно распространяемого пакета LAMMPS [5]. В латеральных направлениях расчетной ячейки задаются периодические граничные условия. Во избежание дрейфа кристалла при

(*) Д.А. Стрижкин, strdenis02@gmail.com

столкновении с ним укоренного кластера, положение нижних 3 слоев атомов фиксируются. Над ними задается зона термостатирования по Берендсену [6] шириной в 1 элементарную ячейку для диссипации излишков энергии из системы (см. рис. 1а). Для ускорения процесса получения моделей кристаллов при повышенных температурах и минимизации возникающих численных артефактов был разработан специальный метод [7]. В начале моделирования молекуле C_{60}, размещенной над поверхностью кристалла, задается вектор скорости в выбранном направлении в соответствии с требуемой энергией, и запускается расчет. Для уменьшения статистических ошибок производится несколько идентичных расчетов, перед каждым из которых мишень сдвигается в латеральных направлениях на некоторую случайную величину. Для облегчения и ускорения анализа большого объема получаемых данных моделирования были разработаны специальные обработчики [8].

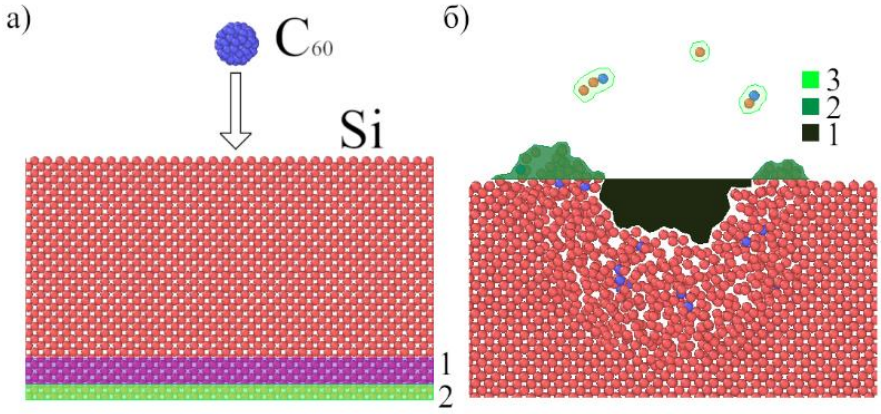


Рис. 1. Поперечный срез расчетной ячейки: а) перед началом симуляции, 1 – зона термостатирования. 2 – фиксированные атомы; б) после падения ускоренного кластера, 1 – кратер, 2 – бруствер, 3 – распыленные частицы и кластеры.

Результаты моделирования. После падения ускоренного кластера на поверхности подложки образуется кратер, часть атомов при этом выталкивается на поверхность образуя бруствер (рис. 1б). Вокруг точки касания формируется кратер, глубина и площадь открытия которого зависит от энергии иона C_{60}. Частицы, получившие достаточную энергию, отрываются от поверхности (происходит распыление мишени), причем улетать могут как одиночные атомы, так и кластеры из нескольких частиц. Ранее уже было проведено исследование этих эффектов при падении ионов C_{60} с энергиями от 2 до 14 кэВ на открытую поверхность (100) монокристалла кремния при температурах 0 и 1000 К [9]. Сравнивались результаты, получаемые при использовании потенциала Tersoff/ZBL [10] – для связей Si-Si, Si-C, C-C и гибридного варианта с использованием потенциала Airebo [11] для связей C-C. Показано, что температура влияет на ход процесса термализации каскада смещений и объем результирующего кратера.

Методика проведения моделирования последовательных падений ионов C_{60} (кумулятивного облучения) описана в [9]. В качестве потенциала взаимодействия был выбран Tersoff/ZBL. Размер мишени кремния 23×23×17 нм (~ 450000 атомов), рассматривались температуры 0 и 700 К. Анализировалось изменение шероховатости поверхности мишени, выход распыления и состав частиц, изменение состава приповерхностного слоя. Обнаружено, что на начальном этапе коэффициент распыления практически не зависит от температуры, однако после ~ 100 упавших ионов при 700 К он становится больше, чем при 0 К, что продемонстрировано на рис. 2.а. Шероховатость поверхности в начале облучения быстро увеличивается при обеих температурах (рис. 2б), достигает некоторой величины, а затем

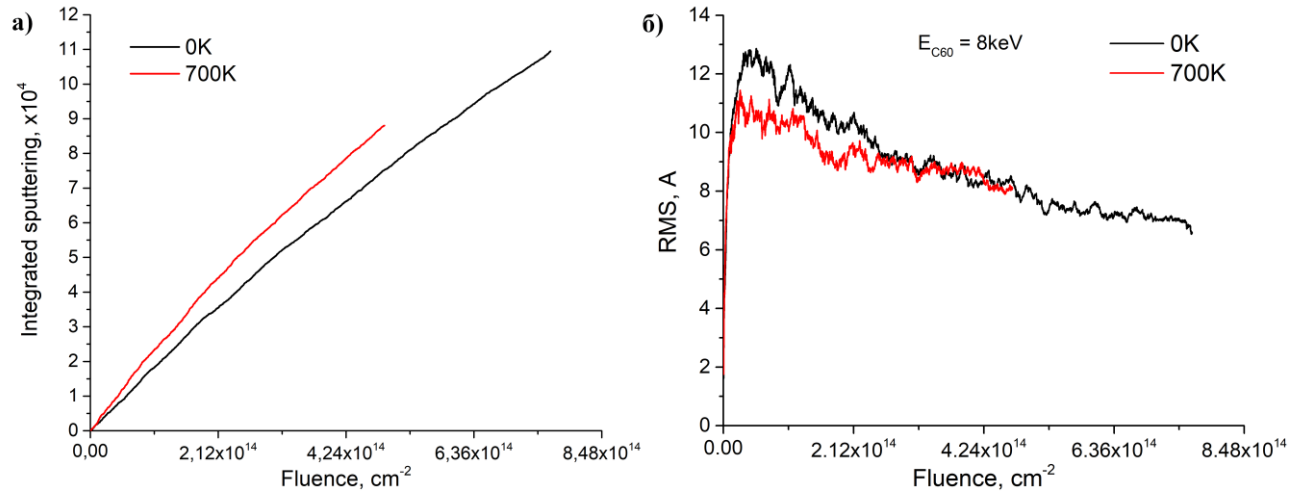


Рис. 2. а) Интегральное количество распыленных частиц при температурах 0 и 700 К;
б) Изменение шероховатости поверхности при температурах 0 и 700 К с увеличением дозы ионов.

постепенно убывает, выходя на насыщение. Приповерхностный слой насыщается атомами углерода. Наблюдается образование карбида кремния и включений углеродных кластеров.

Заключение. В работе продемонстрированы возможности применения метода МД для исследования быстрых процессов, происходящих при торможении ускоренных ионов в материале мишени. Приведены примеры анализа формируемых облучением свойств поверхности, а также параметров распыления мишени.

Работа выполнена в рамках Государственного задания на проведение фундаментальных исследований (код темы FSEG-2023-0016)

ЛИТЕРАТУРА

1. Аброян И.А., Андронов А.Н., Титов А.И. Физические основы электронной и ионной технологии // М.: Высш. шк. – 1984. – С. 56-61.
2. Ritter M., Stindtmann M., Farle M., Baberschke K. Nanostructuring of the Cu(001) surface by ion bombardment: a STM study // Surface Science. – 1996. – Vol. 348 (3). – P. 243–252.
3. Yamada, I., Materials Processing by Cluster Ion Beams: History, Technology, and Applications (1st ed.). CRC Press. – 2015.
4. Vollmayr-Lee K. Introduction to molecular dynamics simulations // American Journal of Physics. – 2020. – Vol. 88 (5). – P. 401-422.
5. Thompson A.P., et al. LAMMPS - a flexible simulation tool for particle-based materials modeling at the atomic, meso, and continuum scales // Computer Physics Communications – 2022. – Vol. 271. – P. 108171.
6. Berendsen H.J.C., Postma J.P.M., van Gunsteren W.F., DiNola A., Haak J.R. Molecular dynamics with coupling to an external bath // Journal of Chemical Physics. – 1984. – Vol. 81. – P. 3684.
7. Karasev K., Strizhkin D., Karaseov P. Convenient Way to Create an MD Model of a Hot Crystal with an Open Surface // 2022 International Conference on Electrical Engineering and Photonics (EExPolytech) – 2022. – P. 242.
8. Karasev K., Strizhkin D., Karaseov P. The Way to Analyse MD Simulation Results of Cluster Ion Bombardment // 2023 International Conference on Electrical Engineering and Photonics (EExPolytech) – 2023. – P. 282.
9. Карасев К.П., Стрижкин Д.А., Титов А.И., Карасев П.А. Моделирование облучения кремния ионами C_{60} и роль потенциала взаимодействия // Поверхность. Рентгеновские, синхротронные и нейтронные исследования – 2024. – С. 68.
10. Tersoff J. New empirical approach for the structure and energy of covalent system // Phys.Rev. B – 1988. – Vol. 37 (12). – P. 6991–6999.
11. Stuart S.J., Tutein A.B., Harrison J.A. A reactive potential for hydrocarbons with intermolecular interactions // J. Chem. Phys. – 2000. – Vol. 112 (14). – P. 6472–6486.

УДК 535.016

Ч. Цуй[1], Г. Кан[2], С.А. Щербак[1,2], В.В. Журихина[1,2]
[1]Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого[(*)]
[2]СПбАУ РАН им. Ж.И. Алферова

ГЕНЕРАЦИЯ ВТОРОЙ ГАРМОНИКИ В ИОННООБЕННЫХ СТЕКЛАХ

Введение. Использование стекол в нелинейной оптике ограничено центральной симметрией этих материалов. Одним из способов устранения изотропии стекла является сочетание структурирования с помощью метода ионного обмена (ИО) – одного из наиболее часто используемых методов модификации стекла – и последующее приложение постоянного электрического напряжения при комнатной температуре [1]. Ионный обмен в стекле формирует градиентный профиль концентрации внедряемых ионов, что приводит к пространственному распределению проводимости. В такой системе при приложении внешнего электрического поля возникает эффект поляризации Максвелла-Вагнера (М-В), накапливающий неравновесный заряд на градиентном профиле [2]. Электростатическое поле этого заряда создает эффективную квадратичную оптическую нелинейность (эффект EFISH) в модифицированном слое [3]. В данной работе рассматриваются моделирование процессов ионного обмена, зарядовая динамика полученных структур и результирующая генерация второй гармоники (ГВГ) в стеклах с ИО при температуре немного ниже температуры стеклования.

Материалы и методы. Для проведения $K_{расплав}$-$Na_{стекло}$ ИО был использован KNO_3, нагретый до T_{IE} = 500 °C. Одна из поверхностей исследуемых образцов была приведена в соприкосновение с жидким расплавом в течение выбранного времени. В этом процессе внешние катионы K^+ замещают катионы Na^+ внутри стекла. После к полученной структуре при комнатной температуре было приложено электрическое напряжение в течение 25 мин. В стекле электрическое поле сосредоточено в основном в модифицированном слое из-за большой разницы в проводимости носителей: проводимость ионов K^+ намного меньше проводимости ионов Na^+. В процессе был измерен ток, протекающий через образец, который зависит от процессов накопления и релаксации заряда М-В. После «зарядки» ИО структуры была проведена оптическая характеризация ГВГ методом полос Мейкера [4]. Детали измерительной установки приведены в [5].

Табл. 1. Состав используемого стекла

Оксид	SiO_2	Na_2O	CaO	MgO	K_2O	Al_2O_3	SO_3	Fe_2O_3
Масс. %	72,20	14,30	6,40	4,30	1,20	1,20	0,30	0,03

Результаты и обсуждение. На рис. 1а показан результат моделирования в среде «COMSOL» процесса ионного обмена, путем численного решения уравнений диффузии и Пуассона [6].

$$\begin{cases} \vec{J}_i = -D_i \nabla C_i + D_i C_i \dfrac{e\vec{E}}{kT} \quad i = K, Na \\ \nabla \cdot \left(\varepsilon \vec{E} \right) = \rho_V \end{cases},$$

где J – диффузионный поток, D – коэффициент диффузии, C – концентрация, e – элементарный заряд, E – напряженность электрического поля, k – постоянная Больцмана, T – температура, ε – диэлектрическая проницаемость, ρ_V – объемный заряд.

(*) Чжихао Цуй, tsuj.ch@edu.spbstu.ru

Рис. 1б демонстрирует концентрационное распределение в ИО стекле, экспериментально полученное с помощью метода EDX.

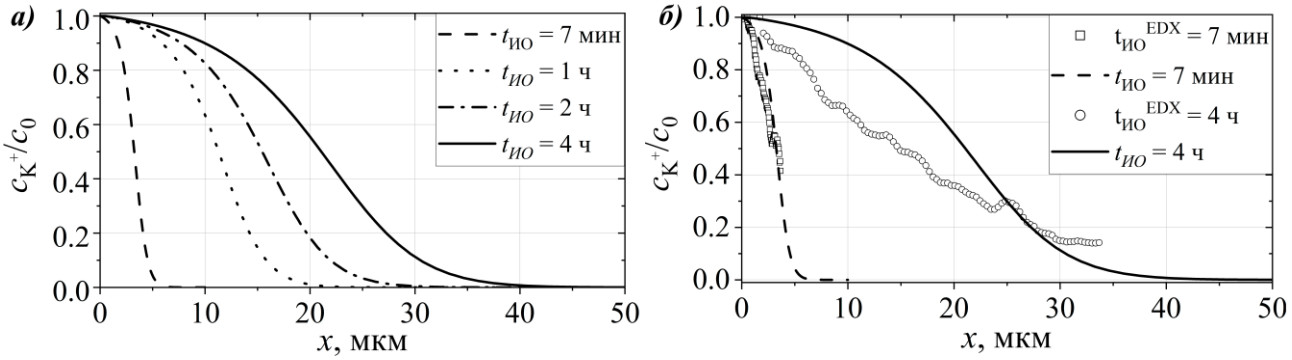


Рис. 1. а) Профили концентрации K^+ с различными временами ИО,
б) Экспериментально полученный профиль ИО стекол с $t_{ИО}$ = 7 мин и 4 ч.

Процесс накопления и релаксации заряда Максвелла-Вагнера показан на рис. 2: при приложении напряжения происходит накопление заряда в области градиентного распределения, что создает внутреннее электрическое поле. После снятия напряжения накопленный заряд релаксирует. Эксперимент (рис. 2а) и моделирование (рис. 3а) демонстрируют, что накопление заряда М-В связано с величиной градиентного распределения.

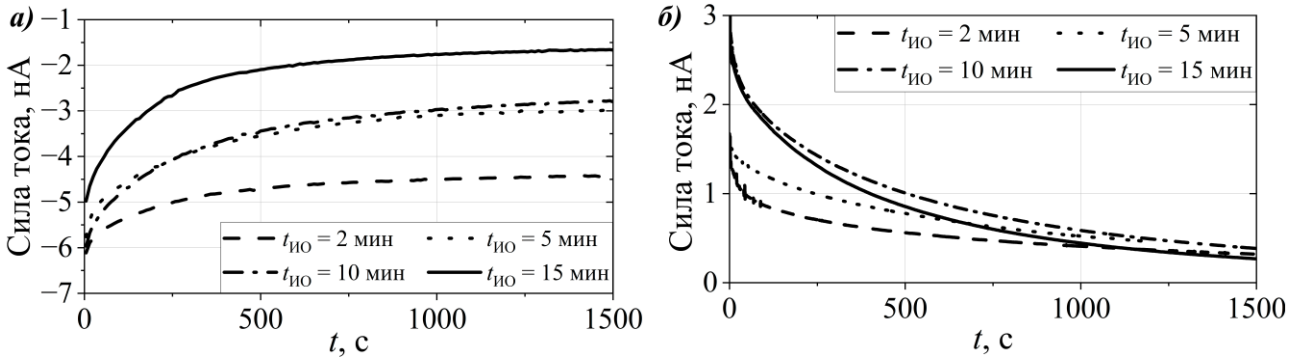


Рис. 2. Измерения динамики тока при (а) зарядке и (б) разрядке

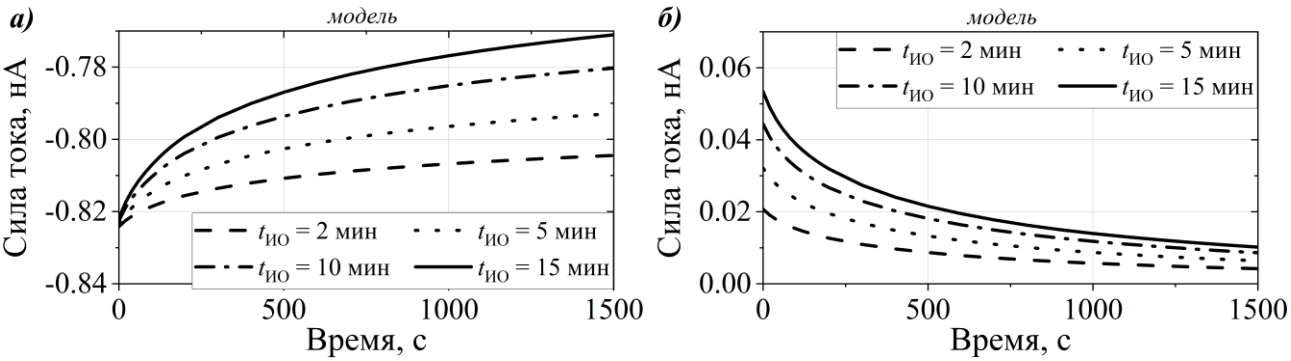


Рис. 3. Моделирование динамик тока (а) зарядки и (б) разрядки

Известно, что глубина диффузии x зависит от времени ИО как $x \sim t_{IE}^{1/2}$, а интенсивность ГВГ $I^{2\omega}$ пропорциональна $|E \cdot x|^2$, тогда:

$$I^{2\omega} \sim t_{IE}$$

Результаты оптических измерений демонстрируют (рис. 4), что максимальное значение сигнала второй гармоники линейно зависит от времени ионного обмена.

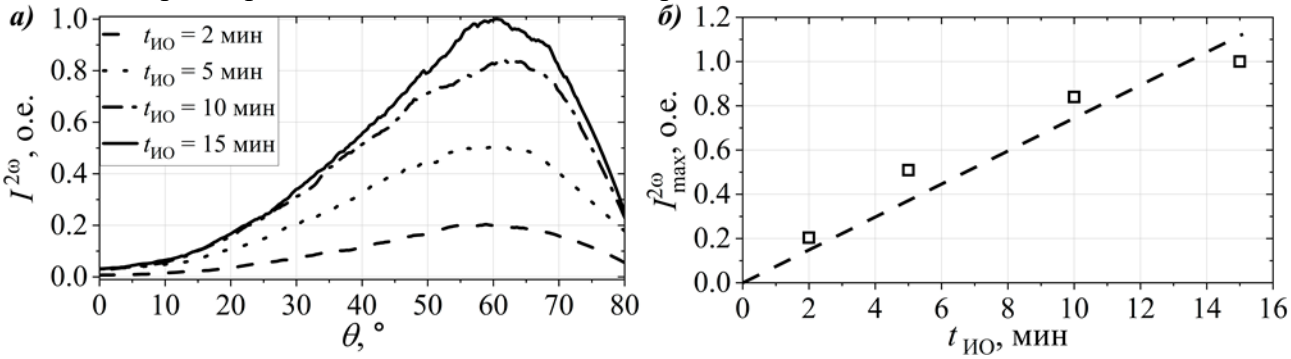


Рис. 4. а) Кривые Мейкера для заряженных стекол с различным временем ИО.
б) Угловой максимум ГВГ в зависимости от времени обмена

Заключение. Мы успешно выявили характеристики градиентного распределения ионов-носителей заряда в ионообменном стекле и провели моделирование изменений концентрации ионов с помощью среды численного моделирования «COMSOL». С помощью моделирования и эксперимента продемонстрирована динамика формирования заряда Максвелла-Вагнера в ионообменном стекле. Установлена линейная зависимость интенсивности сигнала второй гармоники от времени ионного обмена.

Работа выполнена при поддержке гранта Министерства образования и науки РФ, проект FSRM-2023-0009.

ЛИТЕРАТУРА

1. Scherbak S. Reshetov I., Zhurikhina V., Lipovskii A. Maxwell–Wagner effect and second harmonic generation in gradient structures // Journal of the American Ceramic Society. – 2024. – Vol. 107. – № 8. – P. 5569–5577.
2. Iwamoto M. Maxwell–Wagner Effect BT – Encyclopedia of Nanotechnology. – Dordrecht: Springer Netherlands. – 2014. – P. 1–13.
3. Kazansky P.G., Kamal A., Russell P.S.J. High second-order nonlinearities induced in lead silicate glass by electron-beam irradiation // Optics letters. – 1993. – Vol. 18. – № 9. – P. 693–695.
4. Jerphagnon J., Kurtz S.K. Maker fringes: a detailed comparison of theory and experiment for isotropic and uniaxial crystals // Journal of Applied Physics. – 1970. – Vol. 41. – № 4. – P. 1667–1681.
5. Scherbak S.A., Reshetov I.V., Zhurikhina V.V., Lipovski A.A. Second harmonic generation by surface of poled glasses: modeling and measurement of Maker fringes // St. Petersburg State Polytechnical University Journal: Physics and Mathematics. – 2021. – Vol. 14. – № 4. – P. 95–113.
6. Никоноров Н.В., Сгибнев Е.М., Сидоров А.И., Евстропьев С.К. Ионный обмен в щелочесодержащих стеклах: технологии, механизмы, применения. Часть I: Серебряные, медные и таллиевые катионы: Учебное пособие. – СПб: Университет ИТМО. – 2020. – 106 с.

УДК 538.975

К.В. Ненашева[1], А.Н. Терпицкий[2]
[1]Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого(*)
[2]Академический университет им. Ж.И. Алферова

ОПТИЧЕСКАЯ НЕЛИНЕЙНОСТЬ В ДЕНДРИТНЫХ СТРУКТУРАХ

Введение. Композитные структуры на основе стекол с внедренными в них металлическими наноструктурами находят все больше применений в оптике. Свою эффективность они уже продемонстрировали в усилении сигнала комбинационного рассеяния [1], люминесценции [2] и ряде других применений. Увеличение сигнала основано на многократном усилении электрических полей вблизи поверхности металлических наноструктур за счет плазмонного резонанса. Наиболее эффективное усиление при этом происходит в так называемых «горячих точках» — на заостренных краях структур, например, на концах дендритных игл. Усиление электрического поля может быть использовано и в нелинейной оптике, в том числе для генерации второй оптической гармоники (ГВГ), изначально запрещенной в стеклах из-за их изотропности [3].

Данная работа направлена на изучение особенностей ГВГ серебряными дендритными структурами и наночастицами, синтезированными в матрице силикатного стекла. Рост дендритов проводился по методике, включающей в себя ионный обмен для насыщения приповерхностного слоя стекла ионами серебра и приложение электрического поля, при котором ионы серебра восстанавливаются и собираются в частицы и дендриты [4]. Наночастицы были получены при обработке стекла с ионами серебра в приповерхностном слое в восстановительной атмосфере [1].

Материалы и методы. В экспериментах использовались пластинки натрий-кальций-силикатного стекла фирмы Menzel толщиной 1 мм, состав которого представлен в таблице 1.

Табл. 1. Состав стекла Menzel (в ат. %).

Si	O	Na	K	Ca	Mg	Al	Fe	S
24.77	60.08	9.51	0.53	2.35	2.20	0.49	0.01	0.08

Ионный обмен проводился в расплаве смеси солей $AgNO_3$ и $NaNO_3$ в соотношении 5/95 (в массовых долях) в течение 20 минут при температуре 350°C. После ионного обмена на обогащенную серебром поверхность стекла терморезистивным методом (Boc Edwards Auto 500) осаждалась тонкая алюминиевая пленка толщиной 200 нм в виде двух параллельных полосок — анод и катод. Рост серебряных дендритов проводился при температуре 250°C и приложенном к данным контактам постоянном напряжении величиной 300 В до достижения короткого замыкания по синтезированным металлическим структурам в приповерхностной области стекла.

Для сравнения в матрице стекла были синтезированы серебряные наночастицы. Первый этап синтеза аналогичен первому этапу получения дендритов – ионный обмен стекла Menzel в расплаве солей $AgNO_3/NaNO_3$. Непосредственное формирование наночастиц происходило в ионообменной области при термообработке образцов в атмосфере водорода при температуре 250°C в течение 15 минут.

Для оптических измерений использовался фемтосекундный лазер (Авеста-Проект YFOA-5000) с длиной волны 1030 нм. В качестве приемника излучения второй гармоники выступал детектор фотонов (Hamamatsu H11890-110). Генерация второй гармоники исследовалось по методу Мейкера [5]. Измерение кривых Мейкера и диаграмм

(*) К.В. Ненашева, n.kseniya2017@yandex.ru

направленности излучения гармоники осуществлялось с помощью вращательной платформы (Standa 8MR190-2). Набор оптических фильтров позволял выделить сигнал второй гармоники (515 нм). Для получения изображений полученных структур использовался конфокальный лазерный микроскоп (OLYMPUS LEXT OLS5000 Evident).

Результаты и обсуждение. Изображения серебряных дендритов, полученные с помощью оптического микроскопа, приведены на рис. 1. Наблюдается большое количество «веток» с иглообразными отростками, средняя длина которых составляет 20-30 мкм.

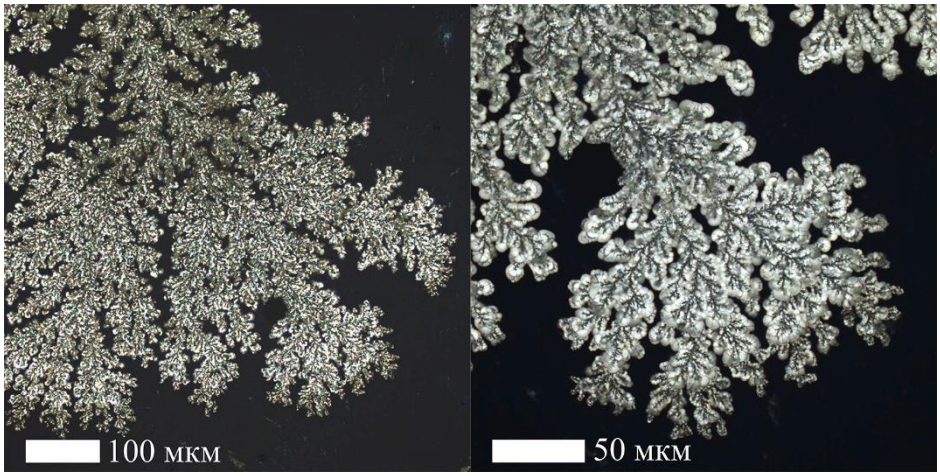


Рис. 1. Оптические изображения серебряных дендритов

При исследовании ГВГ сформированными структурами измерялись угловые зависимости сигнала второй гармоники (кривые Мейкера) излучения фемтосекундного лазера (рис. 2). 0° соответствует нормальному падению лазерного луча на поверхность образца. Наблюдается относительно слабый сигнал, при этом уровни сигнала при нормальном падении и падении на больших углах практически не отличаются. В свою очередь, серебряные наночастицы продемонстрировали существенно больший уровень сигнала, причем кривая Мейкера имеет характерную «нарезку» [5]. Возможный вклад люминесценции в регистрируемый сигнал гармоник был исключен проверкой квадратичного характера измеряемого сигнала от мощности лазера как для дендритов, так и для наночастиц.

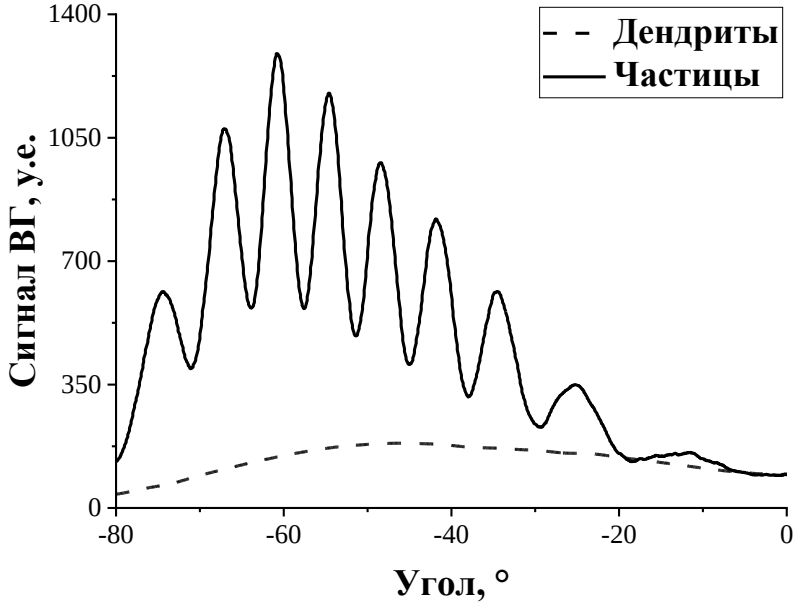


Рис. 2. Кривые Мейкера от серебряных дендритов и наночастиц

Далее были измерены диаграммы направленности излучения второй гармоники исследованными структурами (рис. 3). Облучение лазером проводилось по нормали к поверхности стекол. Из рис. 3а и 3б видно, что и дендриты, и наночастицы при нормальном падении фундаментального луча характеризуются достаточно большими углами рассеяния сигнала ВГ. При этом из предыдущих измерений можно сделать вывод, что при больших углах падения луча лазера наблюдается значительный рост сигнала ВГ от серебряных наночастиц. Для проверки была снята диаграмма направленности при угле падения 60°, фрагмент которой приведен на рис. 3в. В данном случае наблюдается четкий пик рассеяния «вперед» (0°), что соответствует кривой Мейкера, представленной на рис. 2.

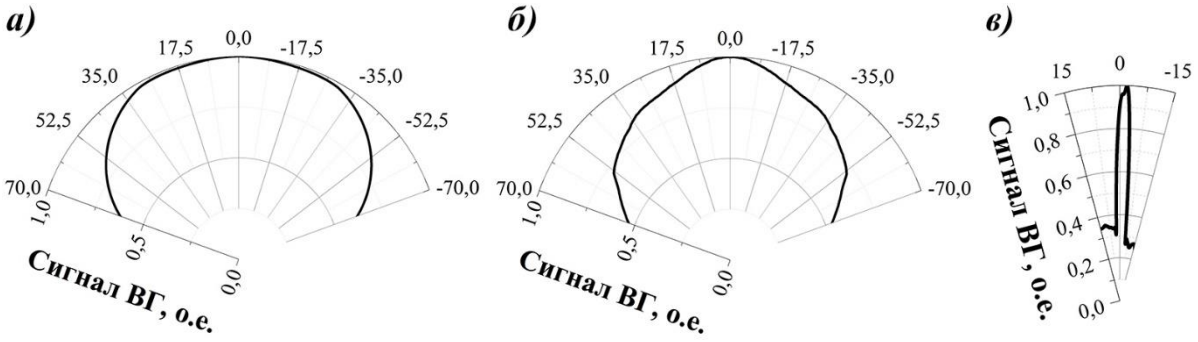


Рис. 3. Диаграммы направленности излучения ВГ серебряных дендритов (а) и наночастиц (б) при нормальном падении фундаментальной волны; (в) диаграмма направленности излучения ВГ серебряных наночастиц при угле падения пучка лазера 60°

Заключение. Таким образом, в данной работе были исследованы нелинейные оптические свойства серебряных дендритов и наночастиц. Проведенные измерения продемонстрировали генерацию второй оптической гармоники дендритами, однако ее эффективность в «прямом» направлении оказалась значительно ниже, чем у наночастиц. Измерения диаграмм направленности излучения второй гармоники от исследуемых структур показали, что серебряные наночастицы при наклонном падении света излучают сигнал второй гармоники узконаправленно «вперед». Дендритные же структуры имеют более широкую диаграмму излучения второй гармоники, делая интегральный (суммарный по всем направлениям) выход сигнала второй гармоники от дендритных структур и от частиц сравнимыми.

Работа выполнена при финансовой поддержке Минобрнауки РФ в рамках Госзадания FSRM-2023-0009.

ЛИТЕРАТУРА

1. Babich E.S., Raskhodchikov D.V., Redkov A.V., Hmima A., Nashchekin A. V., Lipovskii A.A. Self-assembled silver nanoparticles in glass microstructured by poling for SERS application // Current Applied Physics. – 2019. – Vol. 19 (10). – P. 1088-1095.

2. Fu L., Tamann T., Hu W.-J., Yu A. Chemical preparation and applications of silver dendrites. – 2014. – Vol. 68 (10). – P. 1283-1297.

3. Gottheim S., Zhang H., Govorov A.O., Halas N.J. Fractal Nanoparticle Plasmonics: The Cayley Tree // ACS Nano. – 2015. – Vol. 9 (3). – P. 3284-3292.

4. Aoyama H., Matsusaka S., Kawamura H., Hidai H., Chiba A., Morita N., Itoi T. Dendritic growth of silver nanowires in borosilicate glass formed by field-assisted solid-state ion exchange // Mater Chem Phys. – 2018. – Vol. 219. – P. 51-56.

5. Щербак С.А., Решетов И.В., Журихина В.В., Липовский А.А. Генерация второй оптической гармоники поверхностью поляризованных стекол: моделирование и измерение полос Мейкера // Научно-технические ведомости СПбГПУ. Физико-математические науки. – 2021. – Т. 14. – № 4. – С. 95-113.

УДК 543.428.2

В.Е. Ремеле[1,2], М.В. Кузьмин[1]
[1]Физико-технический институт им. А.Ф.Иоффе[(*)]
[2]Санкт-Петербургский государственный электротехнический университет им. В.И.Ульянова (Ленина)

ИСПОЛЬЗОВАНИЕ ЭЛЕКТРОННОЙ ОЖЕ-СПЕКТРОСКОПИИ ДЛЯ КОЛИЧЕСТВЕННОГО АНАЛИЗА ПРОЦЕССОВ ФОРМИРОВАНИЯ ГРАНИЦ РАЗДЕЛА И МОРФОЛОГИИ ТОНКИХ ПЛЕНОК

Электронная Оже-спектроскопия (ЭОС) является одним из наиболее часто используемых методов исследования поверхности и тонких пленок. С его помощью можно определять, как качественный, так и количественный состав верхних слоев рассматриваемого образца, а также проводить исследования морфологии и границ раздела, анализируя концентрационные зависимости интенсивности оже – пиков от покрытия $I(N)$.

Описанный выше анализ ранее проводился преимущественно на качественном уровне – о состоянии поверхности судили по виду зависимости и по некоторым ее характерным особенностям, количественный же анализ морфологии проводился, как правило, только для пленок, растущих послойно. В этом случае, сигнал от подложки и пленки может быть найден с помощью соотношений:

$$I_s(N) = I_0 \exp\left(-\frac{Nd_f}{\lambda_f}\right); \quad I_f(N) = I_{ML}\sum_{i=1}^{N}\exp\left(-\frac{(N-i)d_f}{\lambda_f}\right)$$

где I_s и I_f – интенсивности оже – сигнала от подложки и пленки соответственно, d_f – толщина монослоя пленки, λ_f – эффективная длина свободного пробега электрона в пленке, I_0 – интенсивность сигнала от подложки, I_{ML} – интенсивность сигнала от монослоя адсорбата.

В случае же, если механизм роста отличается от послойного, возникает проблема, связанная с тем, что нет выражений, которые бы позволили определить зависимость $I(N)$ и провести количественный анализ. Эта проблема ранее была решена авторами в работе [1]. В статье была предложена модель, позволяющая получить зависимость $I(N)$ и на основе этого с использованием ЭОС проводить анализ морфологии пленок, которые формируются по механизмам роста Странского – Крастанова (СК) и Фольмера – Вебера (ФБ). В рамках этой модели концентрационная зависимость находилась с помощью интегрирования экранирующей функции $\rho(x,y,z)$, определяемой геометрией системы и особенностями морфологии, по всему пространству в соответствии с выражением:

$$I_0\int \rho(x,y,z)dxdydz.$$

В таком подходе задача сводится к поиску экранирующей функции.

Рассмотренные выше результаты позволяют находить концентрационные зависимости для всех классических механизмов роста, однако реальные системы могут обладать специфическими особенностями, которые будут приводить к отличиям от классических случаев. Одной из таких особенностей может стать наличие реакционно – способных границ раздела, которые характерны для многих систем, в частности, например, для систем редкоземельный металл – кремний [2]. Исходя из этого, возникает потребность обобщить полученные ранее результаты на случай реакционно – способных систем, и именно этому вопросу посвящена текущая работа. Как и выше, мы начнем рассмотрение с систем, растущих послойно, как с более наглядного и простого с точки зрения описания случая, который в

(*) В.Е. Ремеле, vremele@bk.ru

дальнейшем можно будет распространить и на более сложные ситуации, что будет сделано в конце.

В работе будут рассматриваться системы, у которых в процессе формирования происходит диффузия атомов подложки в пленку с последующим образованием переходного слоя переменного состава. При этом будем полагать, что диффузия начинает происходить после достижения определенного покрытия $N_{\text{кр}}$, называемого критическим, при покрытиях же меньших критического рост будет классическим послойным. В таком случае искомую зависимость $I(N)$ можно представить в кусочно – непрерывном виде:

$$I(N) = \begin{cases} I_0 \exp\left(-\dfrac{Nd_f}{\lambda_f}\right), & N < N_{\text{кр}} \\ I_0 \exp\left(-\dfrac{Nd_f}{\lambda_f}\right) + I'(N), & N \geq N_{\text{кр}} \end{cases}.$$

Таким образом, выражение отличается от классического послойного роста лишь тем, что при достижении послекритических покрытий появляется слагаемое $I'(N)$ обусловленное диффузией. Для его нахождения необходимо знать распределение атомов подложки по структуре пленки, для чего нужно решить уравнение Фика. Стационарное одномерное уравнение Фика имеет вид:

$$\frac{d^2n(z)}{dz^2} = 0$$

где n – концентрация атомов подложки в пленке и z – координата вдоль нормали к поверхности. Для его решения сформулируем граничные условия: $n(N_m) = 0$ и $n(1) = n_0 = \gamma n_{ML}$. Тогда этому уравнению будет соответствовать функция распределения:

$$f(i) = \begin{cases} -\dfrac{1}{N_m - 1} i + \dfrac{N_m}{N_m - 1}, & i < N_m \\ 0, & i \geq N_m \end{cases}$$

Здесь γ – коэффициент перемешивания, определяющий стехиометрию первого слоя, n_{ML} – концентрация атомов в одном монослое, N_m – номер первого беспримесного монослоя. Зная функцию распределения, можно показать, что итоговое расчетное соотношение имеет следующий вид (подробный вывод формулы можно найти в работе [3]):

$$I(N) = \begin{cases} I_0 \exp\left(-\dfrac{Nd_f}{\lambda_f}\right), & N < N_{\text{кр}} \\ I_0 \displaystyle\prod_{j=1}^{N} \exp\left(-\frac{d(j)}{\lambda(j)}\right) + \sum_{i=1}^{N} \gamma f(i) \left(1 - \exp\left(-\frac{d_s}{\lambda_s}\right)\right) \prod_{j=i+1}^{N} \exp\left(-\frac{d(j)}{\lambda(j)}\right), & N \geq N_{\text{кр}} \end{cases}.$$

Используя результаты, полученные выше, можно по аналогии с работой [1] ввести статистические множители, которые будут учитывать наличие перемешивания:

$$\theta_s(x,y,z) = \frac{\gamma f(x,y,z) d_s}{d_f + \gamma f'(x,y,z) d_s}; \quad \theta_f(x,y,z) = \frac{d_f}{d_f + \gamma f'(x,y,z) d_s}$$

В этом случае f' – непрерывная функция распределения, полученная из решения уравнения Фика, но уже для трехмерного случая. С учетом этого оже - сигнал равен:

$$I_0 \int \theta(x,y,z) \rho(x,y,z) dx dy dz.$$

Изложенный подход был апробирован на ряде систем типа редкоземельный металл (РЗМ) – кремний. Для примера анализа островкового роста была рассмотрена система Sm-Si(111), которая формировалась при повышенных температурах. В ходе анализа была получена разностная зависимость интенсивности оже-сигнала, показанная на рисунке 1а. Из нее следует, что эффектность экранирования островков при 900К существенно выше, о чем

также свидетельствуют и графики на вставке к рисунку – концентрационная зависимость, отвечающая случаю 900К находится значительно выше, чем зависимость, полученная для 1140К. Рассмотрение показало, что такие отличия будут обеспечиваться, если аспектное отношение островков изменится примерно в 7 раз. Такой результат, вероятно, связан с изменением структуры смачивающего слоя – при больших температурах на подложке формируется смачивающий слой с реконструкцией (5x1), которая, будучи более устойчивой чем $'\sqrt{3}'$, препятствует разрастанию островков в латеральных направлениях.

В качестве примера для послойного роста с диффузией рассматривались Gd-Si(111), Gd-Si(001), Yb-Si(111), Yb-Si(001), Sm-Si(111) и Eu-Si(111). Моделирование показало, что существуют корреляции между выраженностью диффузного интерфейса и теплотами плавления и сублимации. Также было установлено, что вид переходных слоев для систем с Yb и Gd не зависит от ориентации подложки. Исходя из вышеизложенного, можно сделать предположение о том, что при росте пленки РЗМ на подложке кремния происходит фазовый переход порядок – беспорядок, который аморфизирует поверхность кремния.

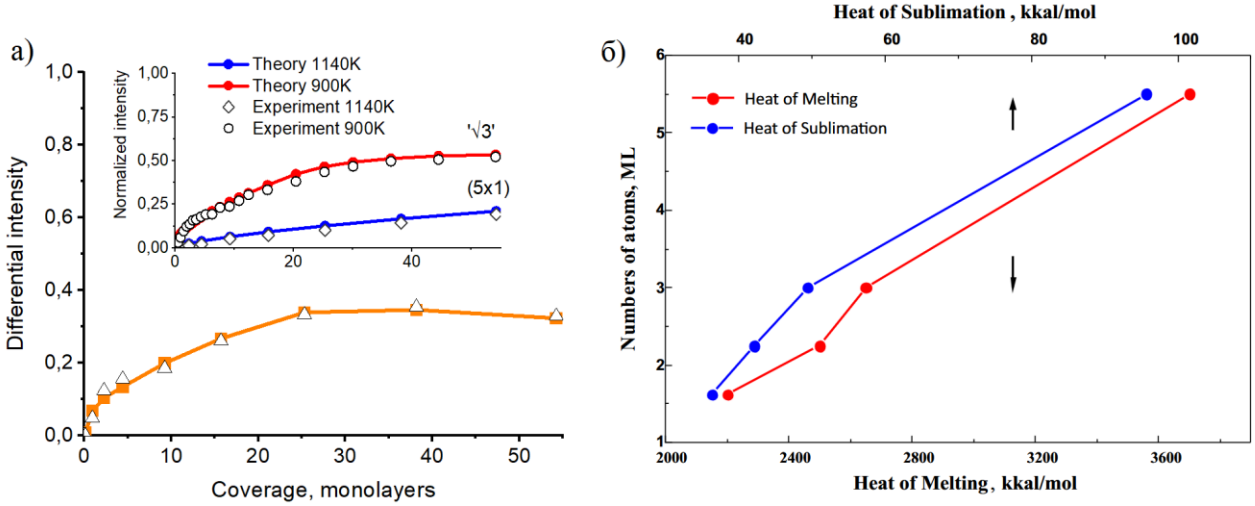


Рис. 1. а) Сплошная линия – теоретическая разностная зависимость интенсивности, треугольники – экспериментальные точки. На вставке: сплошными линиями – теоретические концентрационные зависимости оже-сигнала, фигурами – экспериментальные точки. б) Корреляционная зависимость термодинамических параметров от количества продиффундировавших атомов подложки

Таким образом, в данной работе была предложена численная модель, которая позволяет проводить количественный анализ процессов роста пленок на чужеродных подложках с учетом диффузии с помощью ЭОС, что может быть полезно для многих приложений. В частности, представленная модель была апробирована для ряда реакционно – способных пленочных структур типа редкоземельный металл – кремний, что в свою очередь, позволило выявить связь термодинамических свойств осаждаемых на подложку металлов и параметров, формируемых диффузных границ раздела в случае систем, растущих послойно, а также провести исследование морфологии пленочных систем, растущих по островковым механизмам роста.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ремеле В.Е., Кузьмин М.В. Численная модель для исследования 3D – островковых пленок методом электронной Оже-спектроскопии. Система Sm-Si(111) // Физика твердого тела. – 2025. – Т.67 - №1.
2. Rossi G. d and f metal interface formation on silicon // Surface Science Reports – 1987. 7, 1-101.
3. Ремеле В.Е., Митцев М.А., Кузьмин М.В. Количественный анализ пленочных структур с диффузной границей раздела, исследованных методом электронной Оже-спектроскопии // Физика твердого тела. – 2023. – Т. 65 - №9.

УДК 538.915

Г.И. Шелых[1], Н.И. Руль[1,2], К.Б. Таранец[1,2], Н.Т. Баграев[2]
[1]Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого (*)
[2]Физико-технический институт имени А.Ф. Иоффе РАН

АНДРЕЕВСКИЕ МОЛЕКУЛЫ С ОТРИЦАТЕЛЬНОЙ КОРРЕЛЯЦИОННОЙ ЭНЕРГИЕЙ

Введение. Изучение таких макроскопических квантовых явлений, как осцилляции Шубникова – де Гааза, де Гааза – ван Альфена, квантовая лестница Холловского сопротивления, обусловленных квантованием Ландау [1], является важной задачей современной физики конденсированного состояния. Однако при высоких температурах их экспериментальное исследование часто затруднено из-за диссипативных процессов, возникающих вследствие электрон-электронного взаимодействия, приводящего к декогерентности транспорта.

Перспективным подходом к решению этих проблем является использование содержащих одиночные носители андреевских молекул (АМ – сложных квантовых систем, состоящих из последовательностей джозефсоновских барьеров. Они формируют среду для реализации джозефсоновских переходов и многократного андреевского отражения (МАО) [2].

В данной работе цепочки из джозефсоновских барьеров представляют собой последовательности примесных дипольных центров с отрицательной корреляционной энергией в кремниевых наноструктурах (рис. 1) [2-4]. Наличие центров с отрицательной корреляционной энергией эффективно подавляет электрон-электронное взаимодействие и обеспечивает характеристики бездиссипативного транспорта, открывая новые возможности для создания устойчивых квантовых устройств [3-5].

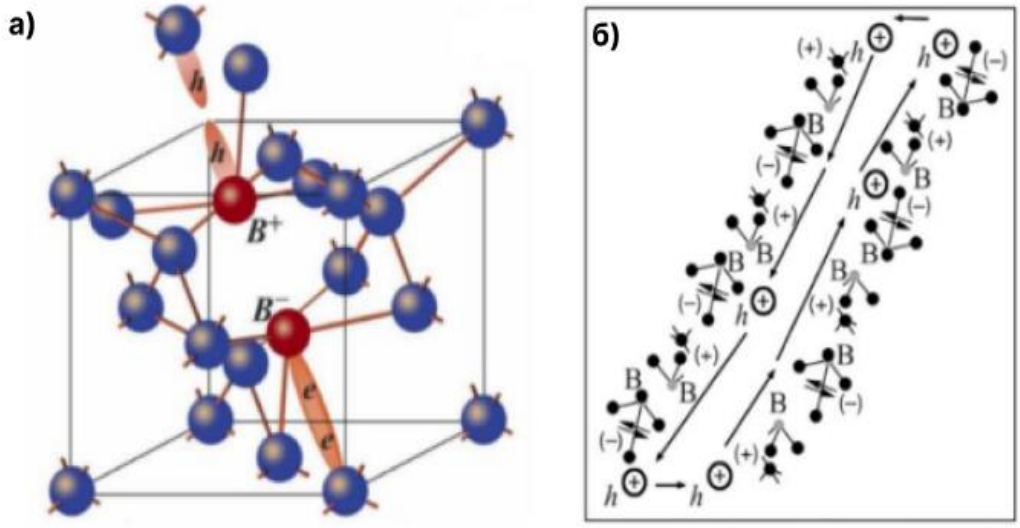


Рис. 1. а) Дипольный центр бора с отрицательной корреляционной энергией, б) Джозефсоновский барьер, представляющий собой цепочку дипольных центров бора с отрицательной корреляционной энергией: $2B^0 \rightarrow B^+ + B^- + \Delta$ где $\Delta = 44$ мэВ - величина отрицательной корреляционной энергии, обусловленная наличием локальной фононной моды [3]

Андреевская молекула. АМ, содержащая одиночный носитель, состоит из двух цепочек последовательных джозефсоновских барьеров (рис. 1б). Одиночные носители (дырки или электроны) возникают в процессе формирования АМ на краях дипольных цепочек вследствие отсутствия спаривания двух соседних центров бора (рис. 1б). Эти носители могут

(*) Г.И. Шелых, shelt4383@gmail.com

перемещаться вдоль цепочек в условиях индуцированного тока, что является ключевым элементом для наблюдения джозефсоновских переходов и МАО.

В исходном состоянии цепочка нейтральных центров распадается в последовательность кристаллографически-ориентированных примесных диполей вследствие отрицательной корреляционной энергии: $2D^0 \rightarrow D^+ + D^- + \Delta$, где D^+ и D^- – заряженные состояния примесных диполей (рис. 1 и 2). В процессе транспорта одиночных носителей через примесные диполи происходит следующий циклический процесс: $D^+ + D^- + \Delta + h \rightarrow 2D^0 + h \rightarrow D^+ + D^- + \Delta + h$. Этот цикл повторяется, обеспечивая движение носителя по цепочке. Важно отметить, что при попадании носителя на диполь, он временно разрушается, но сразу восстанавливается после перехода носителя на следующий диполь. Это происходит благодаря отрицательной корреляционной энергии, которая компенсирует энергетические потери, связанные с движением носителя. Таким образом, система поддерживает бездиссипативный транспорт, так как энергия Δ, запасенная в цепочке, компенсирует энергетические потери.

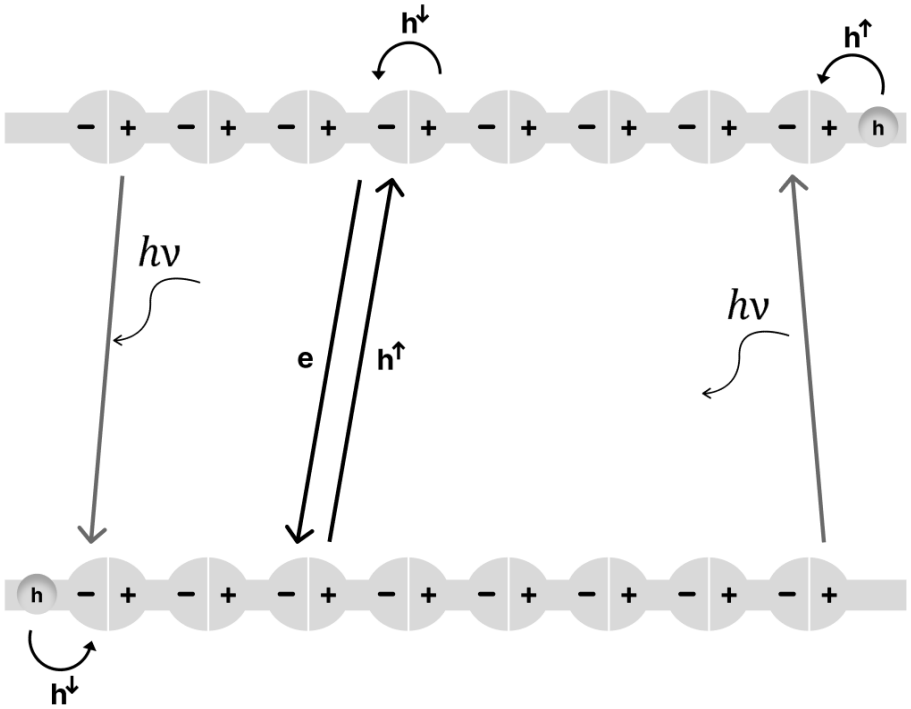


Рис. 2. Джозефсоновский переход и андреевское отражение в АМ вследствие перехода носителя (дырки) между барьерами, состоящими из цепочек дипольных центров с отрицательной корреляционной энергией. Показаны излучательные переходы и вклад в спектры поглощения вследствие наличия спин-орбитального взаимодействия

В процессе транспорта носителя возможен его переход на соседнюю параллельную цепочку в результате джозефсоновских переходов и/или МАО (рис. 2). При этом переход носителя на соседнюю цепочку сопровождается переворотом спина вследствие наличия спин-орбитального взаимодействия (т.е. АМ представляет собой спиновый контур, в рамках которого возможно изучение процессов спиновой квантовой интерференции). Величина спин-орбитального взаимодействия отражается в энергетическом спектре многомодового излучения, обусловленного джозефсоновскими и МАО переходами. После перехода носитель движется по цепочке в противоположном направлении, при этом возможен обратный переход вследствие захвата носителем кванта излучения. Данный обратный процесс также сопровождается переворотом спина и таким образом является циклическим в рамках формирования спинового контура. Наличие спинового контура способствует образованию

конденсата фотонов различной энергии в зависимости от номера МАО, $hv_n = \frac{\Delta}{n}$, где n – номер МАО, Δ – величина отрицательной корреляционной энергии [2].

Предлагаемая модель АМ, представляющая собой спиновый контур, объясняет спектральные характеристики индуцированного излучения и оптического поглощения в кремниевых наноструктурах, ограниченных цепочками центров с отрицательной корреляционной энергией (рис. 3, где позиции пиков соответствуют отмеченному выше соотношению для hv_n, определенному из ВАХ МАО [2, 6]).

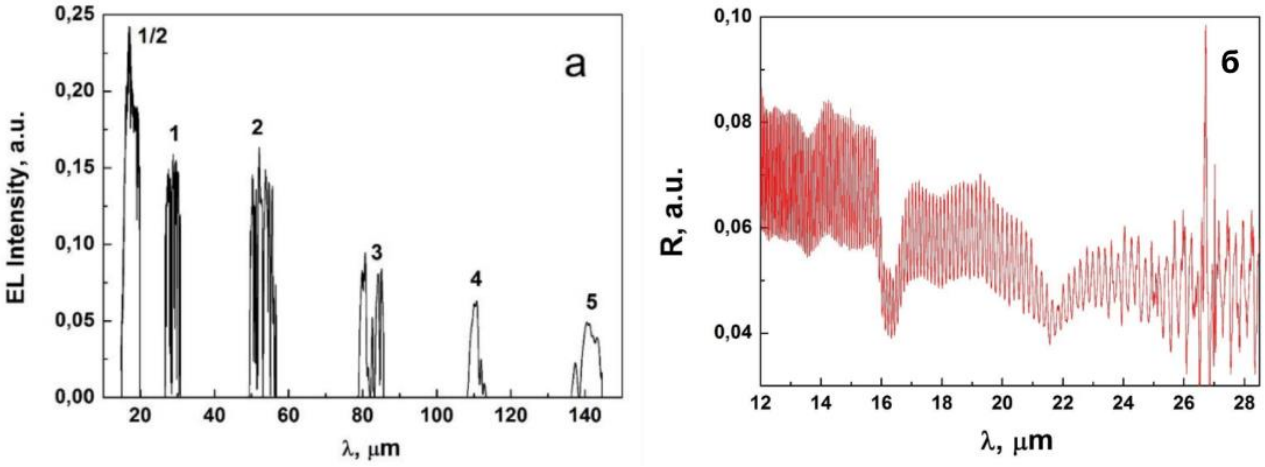


Рис. 3. а) Индуцированное излучение из краевых каналов кремниевой наноструктуры, обусловленное МАО, T=300K, для ширины корреляционной щели Δ, где Δ = 44 мэВ, б) Спектр пропускания, выявляющий проявление как локальной фононной моды, λ = 16.4 мкм, так и сверхпроводниковой щели, λ = 26.9 мкм

Заключение. Предложена модель АМ, состоящей из цепочек центров с отрицательной корреляционной энергией, формирующих спиновый контур, который способствует формированию конденсата фотонов, наличие которого объясняет возникновение индуцированного излучения вследствие джозефсоновских и МАО переходов в кремниевых наноструктурах [6].

ЛИТЕРАТУРА

1.Ландау, Л.Д. Теоретическая физика. Квантовая механика (Нерелятивистская теория) / Л.Д. Ландау, Е.М. Лифшиц – М.: Наука, 1989. – 768 с.

2. Bagraev N.T., Klyachkin L.E., Koudryavtsev A.A., Malyarenko A.M., Romanov V.V. Superconductivity — Theory and Applications. — SCIYO International Offices, Rijeka Croatia, 2010. — 25 p.

3. Bagraev N.T., Mashkov V.A. Tunneling negative-U centers and photo-induced reactions in solids // Solid State Communications. — 1984. — Vol. 51, No. 7. — P. 515–520.

4. Anderson P.W. Model for the Electronic Structure of Amorphous Semiconductors // Physical Review Letters. — 1975. — Vol. 34. — № 15. — P. 953–955.

5. Newton J.L., Chatterjee A.P., Harris R.D., Watkins G.D. Negative-U Properties of the Lattice Vacancy in Silicon // Physica B. — 1983. — Vol. 116. — P. 219–223.

6. Баграев Н.Т., Клячкин Л.Е., Кукушкин С.А., Маляренко А.М., Осипов А.В., Романов В.В., Руль Н.И., Таранец К.Б. Андреевские генераторы терагерцевого излучения // Физика твердого тела. — 2024. — Т. 66. — № 11. — С. 2052-2058.

УДК 538.911

И.С. Рачеев[1,2], М.В. Годяев[1,2], И.С. Тетенькин[1,2], В.Е. Кабурнеев[1,2]
[1]СПбГЭТУ «ЛЭТИ» имени В. И. Ульянова (Ленина) (*)
[2]Физико-технический институт им. А.Ф. Иоффе

ОСОБЕННОСТИ РОСТА И ПОСТРОСТОВЫХ ОПЕРАЦИЙ ОБЪЕМНЫХ КРИСТАЛЛОВ Ga_2O_3

Введение. Оксид галлия (Ga_2O_3) является перспективным ультраширокозонным (ΔEg = 4.4-5.3 эВ) полупроводником нового поколения. Ряд особенностей выделяет его среди других широкозонных материалов. Существование термостабильной β-фазы, которая имеет температуру плавления ~1850 °C, позволяет выращивать массивные объемные кристаллы методом Чохральского (Cz). Для производства полупроводниковых приборов можно получать подложки различных ориентаций. Наибольший интерес для эпитаксии представляет основная плоскость спайности (100). С практической точки зрения кристаллы с такой ориентацией поверхности довольно легко получить выкалыванием, не прибегая к разрезке материала. Тем не менее, при росте β-Ga_2O_3 и последующих операциях с его поверхностью возникают определенные трудности, которые рассматриваются в данной работе.

Оптимизация роста β-Ga_2O_3. Одной из таких проблем, с которой сталкивается β-Ga_2O_3, является очень медленный процесс Cz-роста. Средняя скорость вытягивания кристалла из расплава ~ 3 мм/час, что связано с его очень низкой теплопроводностью [1]. Для оптимизации ростовых процессов без проведения большого количества опытов часто обращаются к методам моделирования. В работах [2-4] по численному моделированию роста β-Ga_2O_3 методом Cz, были продемонстрированы анизотропия термических напряжений, изгиб внутрь кристалла фронта кристаллизации (ФК) при увеличении диаметра були и контроль формы ФК с помощью использования экрана-крышки из различных материалов. Однако, в перечисленных статьях не рассматривалось, что неравномерная концентрация кислорода в среде, свойственная методам роста из расплава, приводит к флуктуациям концентрации кислородных вакансий. Они считаются основным источником свободных носителей заряда (СНЗ) в Ga_2O_3. Поглощение β-Ga_2O_3 в ИК диапазоне зависит от концентрации СНЗ, и ее сильная анизотропия может приводить к дополнительному разогреву и последующему плавлению кристалла во время роста, то есть нарушению его цилиндрической формы.

В данной работе была проведена оценка этого явления с помощью компьютерного моделирования роста кристаллов методом Cz из расплава β-Ga_2O_3 в среде CGSim (Crystal Growth Simulator). Были рассмотрены две крайние ситуации:

1) концентрация СНЗ одинаковая вдоль були и соответствует специально нелегированному (UID) кристаллу β-Ga_2O_3 – усредненное поглощение в ИК диапазоне;

2) случай вырожденного (как полупроводника) β-Ga_2O_3 - полное поглощение ИК излучения кристаллом.

За основу расчетов взята схема установки, используемая нашей лабораторией для роста Ga_2O_3 по методу Cz. Вычисления проводились для кристалла диаметром 20 мм при различных положениях тигля и высоты расплава относительно индуктора. Физические свойства для использованных материалов взяты из работ [2-4]. Изначальный ФК задан плоским. Расчет формы ФК проводился с помощью определения вертикальной компоненты скорости роста на основании рассчитанного теплового поля на границе фаз, а затем с ее учетом выполнялся перенос узлов ФК с перестроением его профиля. Во всех рассмотренных задачах ФК резко изменялся с вогнутого на выпуклый при добавлении расчета теплового излучения через растущий кристалл (рис. 1а).

(*) И.С. Рачеев, ilyaracheev@yandex.ru

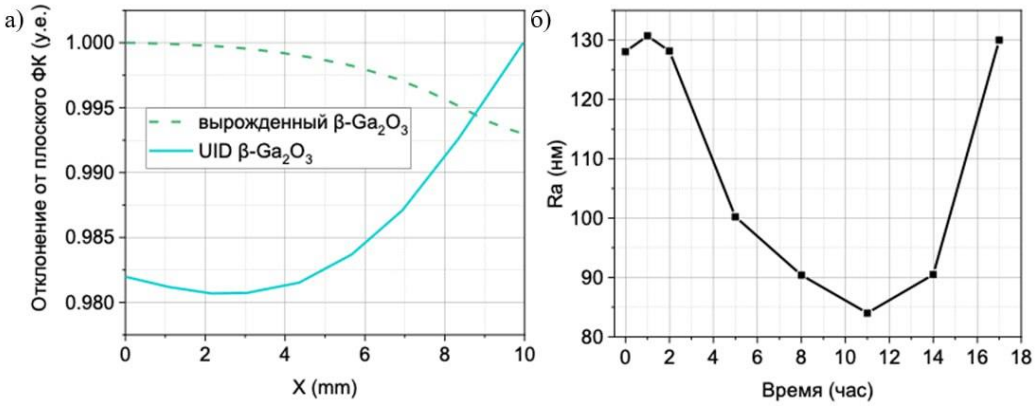


Рис. 1. а) ФК UID и вырожденного кристаллов β-Ga_2O_3 по расчетам в CGSim;
б) Изменения шероховатости поверхности (100) за время травления в HF

Рассчитанное изменение формы ФК, говорит о том, что блоки кристалла с большой концентрацией СНЗ могут плавиться, и вероятно, не только на границе расплав-кристалл. Таким образом, изменение потока теплового излучения через растущий кристалл в связи с флуктуациями концентрации СНЗ в его разных частях должно учитываться при расчете тепловых зон роста β-Ga_2O_3.

Полировочное травление поверхности (100) β-Ga_2O_3. Плоскость (100), будучи плоскостью спайности, привлекает внимание исследователей благодаря своим особенностям, прежде всего, минимальной поверхностной энергией [5]. Однако наличие микронных ступеней на поверхности препятствует эпитаксиальному росту. Для решения этой проблемы применяют полирование, позволяющее добиться гладкой поверхности. Механическая полировка, несмотря на свою распространенность, вызывает повреждение поверхностного слоя кристалла, что отрицательно сказывается на последующей эпитаксии. Поэтому более предпочтительным является химическое полирование. В данной работе исследовано влияние ряда кислот и щелочей на полировочное травление поверхности (100).

Охира и др. [6] впервые описали скорость травления различных кислот и щелочей поверхности (100). Авторы приходят к выводу, что кристаллы β-Ga_2O_3 имеют высокую химическую инертность к исследованным реагентам, за исключением HF и NaOH. Раствор плавиковой кислоты обладает наибольшей скоростью травления на плоскости (100). Чжаон Си и др. [7] описывают использование химического травления вместе с механической полировкой. Авторы приводят результаты, в которых HF показывает лучший результат в скорости травления и значению RMS (среднеквадратичное отклонение профиля шероховатости) поверхности среди других исследуемых кислот и щелочей на плоскости (100).

В данной работе объемные образцы β-Ga_2O_3 были подвергнуты химическому травлению в кислотах и щелочах, представленных в табл. 1, выбранных на основе работ [5,6]. Результат травления контролировался с помощью профилометра MarSurf PS 10. В качестве характеристики шероховатости используется параметр Ra (среднее арифметическое из абсолютных значений отклонений профиля в пределах длины).

Табл. 1. Режимы травления поверхности (100) β-Ga_2O_3

Используемый травитель	**Температура травления, ˚C**
22,5% HF	Комнатная температура
70% HNO_3	50
48% HCl	50
48% HBr	50
30% NaOH	Комнатная температура
100% CH_3COOH	60

В результате работы была подтверждена химическая инертность поверхности (100) β-Ga_2O_3 относительно выбранных условий травления (табл. 1) – большинство кислот и щелочей никак не повлияли на поверхность кристалла. Наиболее эффективно себя показала только плавиковая кислота. Минимальное значение шероховатости поверхности (100) составило 84 нм и было получено при 11 часах травления в HF при комнатной температуре (рис. 1б). Полученный результат можно использовать как перспективный режим полировочного травления для (100) β-Ga_2O_3

Нанесение контактов на поверхность (100) β-Ga_2O_3. Создание приборных структур на основе β-Ga_2O_3 требует изучения его полупроводниковых свойств методами электрофизики с помощью нанесения контактов.

Перед нанесением контактов с помощью вакуумного напыления поверхность кристалла была очищена в ультразвуковой ванне. Далее на них через Mo маски были нанесены Ti/Al и Ti/Ni контакты в вакуумном универсальном посту (ВУП-2). После этого кристаллы с контактами отжигались при температурах 600 ˚C в течение 1 часа и при 250 ˚C в течение 30 минут, соответственно, для снятия механических напряжений и улучшения адгезии контактов.

Вольт-амперные характеристики (ВАХ) были измерены с помощью осциллографа С1-65А с использованием схемы «ВАХ»-метра. Измеренные ВАХ продемонстрировали, что наши образцы с Ti/Al контактами проявляют омические характеристики, тогда как Ti/Ni контакт проявил диодное поведение.

Оптимизация процесса Cz роста требует учета неравномерной концентрации кислорода в среде, приводящей к флуктуациям концентрации кислородных вакансий. Они считаются основным источником СНЗ в Ga_2O_3. Рассчитанное изменение формы ФК говорит о том, что блоки кристалла с большой концентрацией СНЗ могут плавиться, и скорее всего, не только на границе расплав-кристалл. Таким образом изменение потока теплового излучения через растущий кристалл должно учитываться при расчете тепловых зон роста β-Ga_2O_3. Плоскость (100) β-Ga_2O_3 из-за характерных для нее микронных ступеней требует полировки поверхности. Механическое воздействие на кристалл способно повредить поверхностный слой, что негативно повлияет на процесс эпитаксии. Проведенное исследование химического травления поверхности показали, что HF эффективнее других исследуемых кислот и щелочей уменьшает шероховатость поверхности (100). Дальнейшее создание полупроводниковых структур требует исследования электрических свойств β-Ga_2O_3. Для этого на его поверхность наносятся Ti/Al и Ti/Ni контакты. Анализ ВАХ показал, что Ti/Al-контакты обладают омическим поведением, в то время как Ti/Ni-контакты характеризуются диодными свойствами.

ЛИТЕРАТУРА

1. Galazka Z. Growth of bulk β-Ga_2O_3 single crystals by the Czochralski method // Journal of Applied Physics. – 2022. – Vol. 131. – P. 031103.

2. Miller W., Böttcher K., Galazka Z., Schreuer J. Numerical. Modelling of the Czochralski Growth of β-Ga_2O_3 // Crystals – 2017. – Vol *7*. – P. 26.

3. Tang X., Liu B., Yu Y., Liu S., Gao B. Numerical. Analysis of Difficulties of Growing Large-Size Bulk β-Ga_2O_3 Single Crystals with the Czochralski Method // Crystals – 2021. – Vol. *11*. – P. 25.

4. Wu D., Xia N., Ma K., Wang J., Li C., Jin Z., Zhang H., Yang D. Numerical Simulation of β-Ga_2O_3 Single Crystal Growth by Czochralski Method with an Insulation Lid. // Crystals – 2022. – Vol. *12*. – P. 1715.

5. Chou T.-S., et al. Controlling the morphology transition on MOVPE-grown (100) β-Ga2O3 film between step-flow growth and step-bunching: A machine learning-assisted approach. // Research Square – 2025.

6. Shigeo O., Naoki A.. Wet chemical etching behavior of β-Ga2O3 single crystal // Physica status solidi – 2008. – Vol. 5. – P. 3116-3118.

7. Xi Z., et. al. Etching of Ga_2O_3: an important process for device manufacturing // Journal of Applied Physics. – 2024. – Vol. 57. – P. 493002.

УДК 532.517

А.С. Некрасов, В.В. Золотарев, И.В. Орешко, А.Е. Казакова, Н.А. Пихтин
ФТИ им. А.Ф. Иоффе, Санкт-Петербург (*)

ПОВЕРХНОСТНО-ИЗЛУЧАЮЩИЙ ПОЛУПРОВОДНИКОВЫЙ ЛАЗЕР С РЕЗОНАТОРОМ НА ОСНОВЕ ДВУМЕРНОГО ФОТОННОГО КРИСТАЛЛА

Введение. Мощные полупроводниковые лазеры на основе двойных гетероструктур с полосковым контактом могут обладать сильной ассиметричной расходимостью лазерного пучка в дальней зоне и многомодовым режимом работы [1], что усложняет их применение в оптоэлектронике. Данная проблема решается в поверхностно-излучающих лазерах с резонатором на основе двумерного фотонного кристалла (ФК), так как они позволяют получить выходной пучок большой площади и с небольшой расходимостью [2-5].

Сформировав в слоях гетероструктуры двумерный ФК, обеспечивающий распределенную обратную связь, можно добиться наличия вывода лазерного излучения перпендикулярно поверхности чипа. В работах [6,7] представлены конструкции лазеров с зарощенным ФК, сформированным в волноводном слое, однако такие структуры требуют более сложных технологических процессов, таких как двухступенчатый эпитаксиальный рост. Для упрощения технологии производства можно сформировать ФК в верхних слоях гетероструктуры, тем самым получив поверхностный (незарощенный) ФК.

В данной работе проводились теоретические исследования модового состава резонатора лазера на основе 2D-ФК с квадратной решеткой конечного размера. ФК формировался в эмиттере гетероструктуры GaAs/AlGaAs/InGaAs, излучающей на длине волны порядка 1040 нм. Проводился анализ выходной оптической мощности и распределения интенсивности излучения в плоскости ФК, которые определяют эффективность вывода излучения через поверхность лазерной структуры. Были проведены расчеты данных характеристик в зависимости от размера отверстий, формирующих ФК.

Методика расчетов. В данной работе мы рассматривали поле TE-поляризации. Решение волнового уравнения и переход к системе связанных мод подробно описаны в работе [7]. Уравнения связанных мод можно преобразовать в задачу поиска собственных чисел:

$$(\delta + i\alpha)\begin{pmatrix} R_x \\ S_x \\ R_y \\ S_y \end{pmatrix} = C\begin{pmatrix} R_x \\ S_x \\ R_y \\ S_y \end{pmatrix} + i\begin{pmatrix} \partial R_x/\partial x \\ -\partial S_x/\partial x \\ \partial R_y/\partial y \\ -\partial S_y/\partial y \end{pmatrix},$$

где R_x, S_x, R_y, S_y – амплитуды базовых волн, распространяющихся в направлениях $+x, -x, +y, -y$ соответственно, причем для случая ФК конечных размеров данные амплитуды являются функциями координат, δ – отклонение волнового вектора от брэгговского, а α – потери/усиление электромагнитной волны, C – матрица связи, которая учитывает оптические эффекты обратной связи [6,7]. Поиск собственных чисел и собственных векторов можно провести, используя метод конечных разностей на смещенной сетке. Тогда данная система преобразуется в задачу поиска собственных чисел $(\delta + i\alpha)$ и собственных векторов $\left(R_x^{j,k}, S_x^{j,k}, R_y^{j,k}, S_y^{j,k}, R_x^{j+1,k}, S_x^{j+1,k}, R_y^{j+1,k}, S_y^{j+1,k}, \dots\right)^t$.

Описание исследуемых структур. Исследуемая структура представлена в табл. 1. Данная структура излучает на длине волны порядка 1040 нм, поэтому был выбран период решетки ФК $\Lambda = 300$ нм. Апертура ФК составляет 200 мкм.

(*) А.С. Некрасов, nekrasov.74as@gmail.com

Табл. 1. Материалы, показатели преломления *n* и толщины *d* слоев исследуемой гетероструктуры

Слой	**Материал**	***n***	***d*, нм**
n-эмиттер	$Al_{0.35}Ga_{0.65}As$	3.347	1500
Волноводный слой	$Al_{0.15}Ga_{0.85}As$	3.432	250
КЯ	$InGaAs$	3.560	9
Волноводный слой	$Al_{0.15}Ga_{0.85}As$	3.432	50
Остаточный слой p-эмиттера	$Al_{0.20}Ga_{0.80}As$	3.410	50
ФК	$Al_{0.20}Ga_{0.80}As/Air$	n_{av}	1950

В табл. 1 $n_{av} = \sqrt{n_{air}^2 \cdot f + n_{em}^2 \cdot (1-f)}$ – средний показатель преломления ФК, где $f = S_{air}/S_{PC}$ – фактор заполнения ФК, $n_{air} = 1$ – показатель преломления воздуха, n_{em} – показатель преломления эмиттера, в котором сформирован ФК.

Результаты моделирования. Для увеличения взаимодействия электромагнитного поля с ФК требуется увеличивать размеры воздушных отверстий, то есть увеличивать фактор заполнения. Однако с ростом фактора заполнения уменьшается средний показатель преломления ФК, следовательно в этот слой проникает меньше электромагнитной волны – уменьшается фактор оптического ограничения слоя ФК. Это приводит к уменьшению коэффициентов связи и, как следствие, к ослаблению обратной связи. Таким образом, ФК перестает выполнять функцию резонатора. Чтобы решить эту проблему нужно оптимизировать дизайн двойной гетероструктуры.

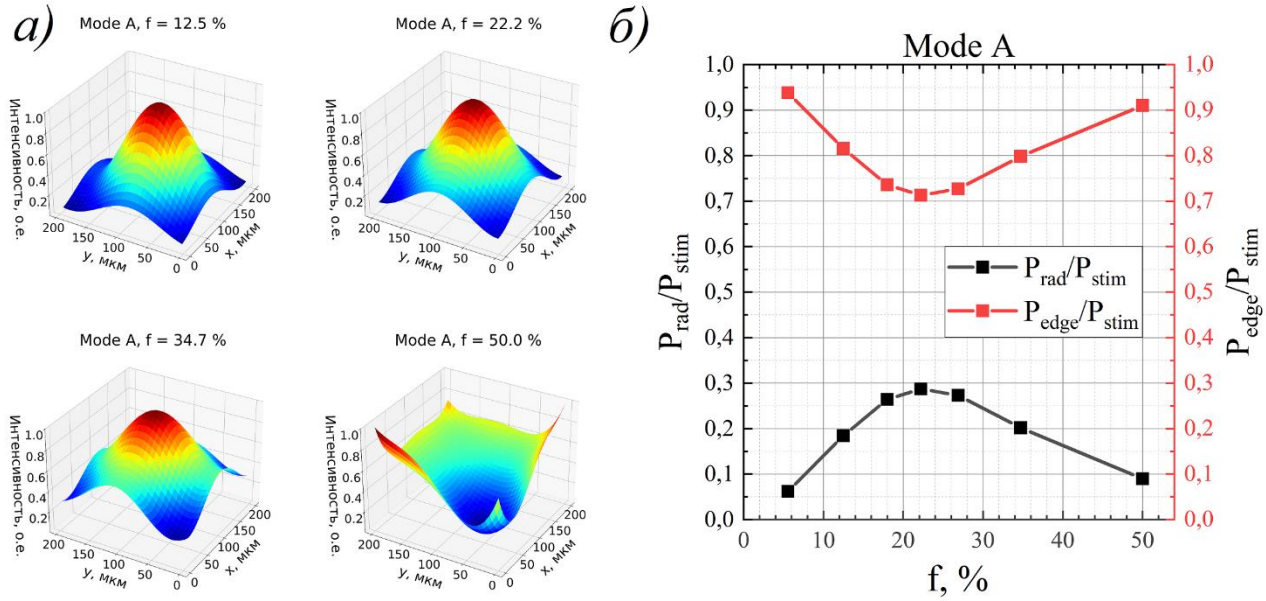


Рис. 1. а) Распределения интенсивности электромагнитной волны в плоскости ФК для разных факторов заполнения; б) зависимость полезной и паразитной мощности от фактора заполнения

На рис. 1а показаны полученные распределения интенсивности излучения в плоскости ФК для моды А первого порядка. С увеличением фактора заполнения электромагнитное поле меньше концентрируется в центре ФК, что связано с уменьшением коэффициентов связи. Для $f = 50\ \%$ распределенная обратная связь ослабевает настолько, что большая часть интенсивности излучения концентрируется на границах ФК, следовательно ФК теряет свойства резонатора. На рис. 1б представлены соотношения мощности, которая излучается через поверхность лазера P_{rad} (полезная мощность), и которая излучается через боковые границы лазера P_{edge} (паразитные потери на выход в плоскости гетероструктуры), к мощности

стимулированного в структуре излучения P_{stim} [7]. Полезная мощность имеет максимум на $f = 22.2\ \%$, связано это с тем, что сначала сильнее увеличивается взаимодействие электромагнитной волны с ФК, а затем становится сильнее влияние снижения фактора оптического ограничения ФК.

Заключение. Мы провели расчеты зависимости полезной и паразитной мощностей излучения поверхностно-излучающего лазера с резонатором на основе поверхностного (незарощенного) ФК квадратной симметрии в зависимости от фактора заполнения. Результаты исследования показали наличие максимума полезной мощности для фактора заполнения 22.2 %, полезная мощность при этом составляет всего 30 %. Однако, расчеты показали, что влияние фактора оптического ограничения световой волны в ФК невелико в малых областях значений фактора заполнения, что позволяет провести в дальнейшем оптимизацию гетероструктуры для увеличения полезной мощности. Также следует отметить, что увеличения данной характеристики возможно посредством увеличения апертуры лазерной структуры, что было показано в работе [7].

Работа выполнена при поддержке гранта РНФ № 23-72-01038.

ЛИТЕРАТУРА

1. Шашкин И.С., Лешко А.Ю., Николаев Д.Н., Шамахов В.В., Рудова Н.А., Бахвалов К.В., Лютецкий А.В., Капитонов В.А., Золотарев В.В., Слипченко С.О., Пихтин Н.А., Копьев П.С. Излучательные характеристики мощных полупроводниковых лазеров (1060 нм) с узким мезаполосковым контактом на основе асимметричных гетероструктур AlGaAs/GaAs с широким волноводом // Физика и техника полупроводников. – 2020. – Т. 54. – № 4. – С. 408-413.

2. Imada M., Noda S., Chutinan A., Tokuda T., Murata M., Sasaki G. Coherent two-dimensional lasing action in surface-emitting laser with triangular-lattice photonic crystal structure // Appl. Phys. Lett. – 1999. – Vol. 75. – P. 316-318.

3. Noda S., Yokoyama M., Imada M., Chutinan A., Mochizuki M. Polarization mode control of two-dimensional photonic crystal laser by unit cell structure design // Science. – 2001. – Vol. 293. – P. 1123-1125.

4. Vurgaftman and Meyer J.R. Design optimization for high-brightness surface-emitting photonic-crystal distributed-feedback lasers // IEEE J. Quantum Electron. – 2003. – Vol. 39. – P. 689-700.

5. Hirose K., Liang Y., Kurosaka Y., Watanabe A., Sugiyama T., Susumu Noda S. Watt-class high-power, high-beam-quality photonic-crystal lasers // Nature Photonics. – 2014. – Vol. 8. – P. 406-411.

6. Liang Y., Peng C. Sakai K., Iwahashi S., Noda S. Three-dimensional coupled-wave model for square-lattice photonic crystal lasers with transverse electric polarization: A general approach // Physical Review. – 2011. – Vol. 84. – P. 195119.

7. Liang Y., Peng C., Sakai K., Iwahashi S., Noda S. Three-dimensional coupled-wave analysis for square-lattice photonic crystal surface emitting lasers with transverse-electric polarization: finite-size effects // Optics Express. – 2012. – Vol. 20. – № 14. – P. 15945-15961.

УДК 544.722.3

А.Г. Бузыкин, К.В. Стародубцева, П.А. Белик, Д.Д. Карцев, М.И. Морозов
НИУ ИТМО(*)

УПРАВЛЕНИЕ СМАЧИВАЕМОСТЬЮ ПОЛИМЕРНЫХ ПЛЕНОК GPOSS-PDM МЕТОДОМ ЛАЗЕРНОЙ АБЛЯЦИИ

Введение. Микроструктурированные покрытия с управляемой смачиваемостью активно применяются в микроаналитических системах, химическом синтезе, медицинской диагностике и разработке новых сенсоров [1]. Перспективным направлением являются поверхности с селективным омнифильным-омнифобным паттерном [2], которые обеспечивают контролируемое перемещение микроколичеств жидкости, формирование локальных реакционных зон и создание высокочувствительных сенсорных платформ [1,3]. Для таких задач критически важны методы прецизионного структурирования полимерных покрытий, сочетающие высокое пространственное разрешение и технологическую гибкость.

Один из подходов — лазерная абляция тонкопленочных покрытий на основе GPOSS-PDMS (**G**lycidyl **P**olyhedral **O**ligomeric **S**ilsesquioxane – **P**oly**dim**ethyl**s**iloxane) [4], позволяющая формировать микрорельеф без использования фотолитографических масок и химического травления. Однако этот метод сталкивается с рядом задач, сопряженных с необходимостью точного контроля энергии лазера для минимизации термических повреждений, обеспечением воспроизводимости паттернов на больших площадях и адгезионной устойчивости структурированного слоя к механическим и химическим воздействиям [5].

Материалы и методы. Формирование функциональных поверхностей с микроструктуризацией осуществлялось методом лазерной абляции тонких полимерных пленок на основе GPOSS-PDMS, нанесенных на стеклянные подложки. Исходный коллоидный раствор полимера наносился методом центрифугирования при 1000 об/мин в течение 60 с на поверхность стеклянных подложек, что обеспечивало формирование равномерного слоя толщиной 800±50 нм. Контроль равномерности покрытия оцененивался методом атомно-силовой микроскопии. Полученные заготовки подвергались нагреву при 80°C в течение 10 мин для стабилизации структуры. Фотополимеризация покрытия проводилась в течение 7 мин при воздействии ультрафиолетового излучения с длиной волны 365 нм и интенсивностью 15 мВт/см², что обеспечивало формирование поперечно-сшитой полимерной матрицы с заданными физико-химическими характеристиками.

Лазерное микроструктурирование выполнялось на системе "Dirona" (ООО "Лазерный Центр") с длиной волны 355 нм, с варьированием средней мощности в пределах от 0.6 до 1.5 Вт, длительностью импульса 14 нс и частотой следования 20 кГц. Обработка проводилась в режиме последовательного сканирования векторов с плотностью 20 линий/мм при различной скорости сканирования в пределах от 0.4 до 0.8 м/с, что обеспечивало формирование абляционных следов различного диаметра и плотности порядка десятков микрометров. Подробная схема экспериментальной установки для абляции полимерной пленки на стеклянной подложке при помощи УФ лазера показана на рис. 1.

Контроль морфологии поверхности осуществлялся методом оптической микроскопии и сканирующей электронной микроскопии, а смачиваемость характеризовалась по краевому углу капли дистиллированной воды объемом 2 микролитра с использованием оптических методов регистрации анализатора формы капли Kruss DSA 25 с использованием метода Юнга-Лапласа для расчета краевого угла.

(*)А.Г. Бузыкин, buzykin@scamt-itmo.ru

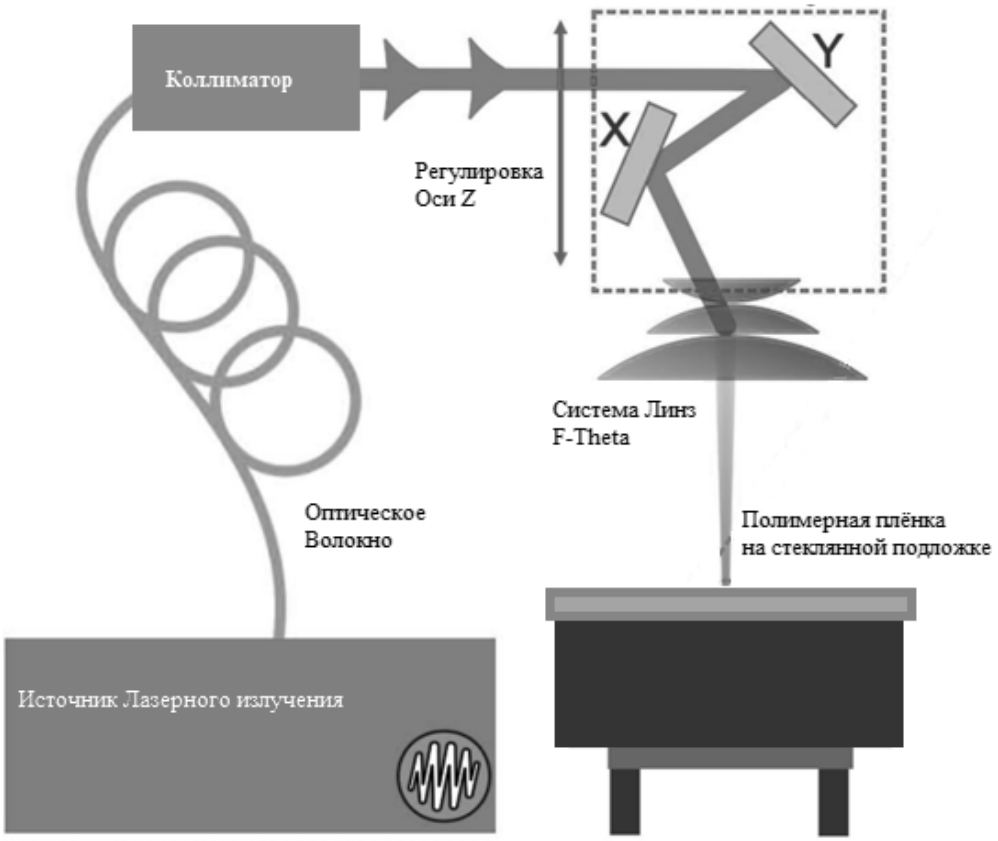


Рис. 1. Схема экспериментальной установки

Параметры лазерной обработки были оптимизированы для минимизации термических повреждений подложки и предотвращения растрескивания краев микроструктур [5].

Результаты. Оптимизация параметров лазерного излучения позволила получить различные по геометрической форме и размеру абляционные следы на поверхности полимерной пленки. Корреляции между скоростью сканирования, средней мощностью лазерного излучения, средним размером следа от попадания единичного лазерного импульса и характеристикой смачиваемости поверхности приведены в табл. 1.

Табл. 1. Результаты измерения размера абляционного следа от единичного лазерного импульса и кумулятивного эффекта смачиваемости на паттерне в зависимости от различных параметров лазерной обработки

Образец	2.1	2.2	2.3	2.4
Средняя мощность, Вт	1.5	1.5	0.9	0.6
Скорость сканирования, м/с	0.4	0.8	0.6	0.55
Средний размер абляционного следа, мкм	25±5	24±5	22±4	18±3
Контактный угол, °	101.2	103.1	105.1	103.6

Для каждого типа паттерна был оценен кумулятивный эффект смачиваемости.

Примеры измерений и наиболее близкие к средним полученные в ходе измерений значения приведены на рис. 2.

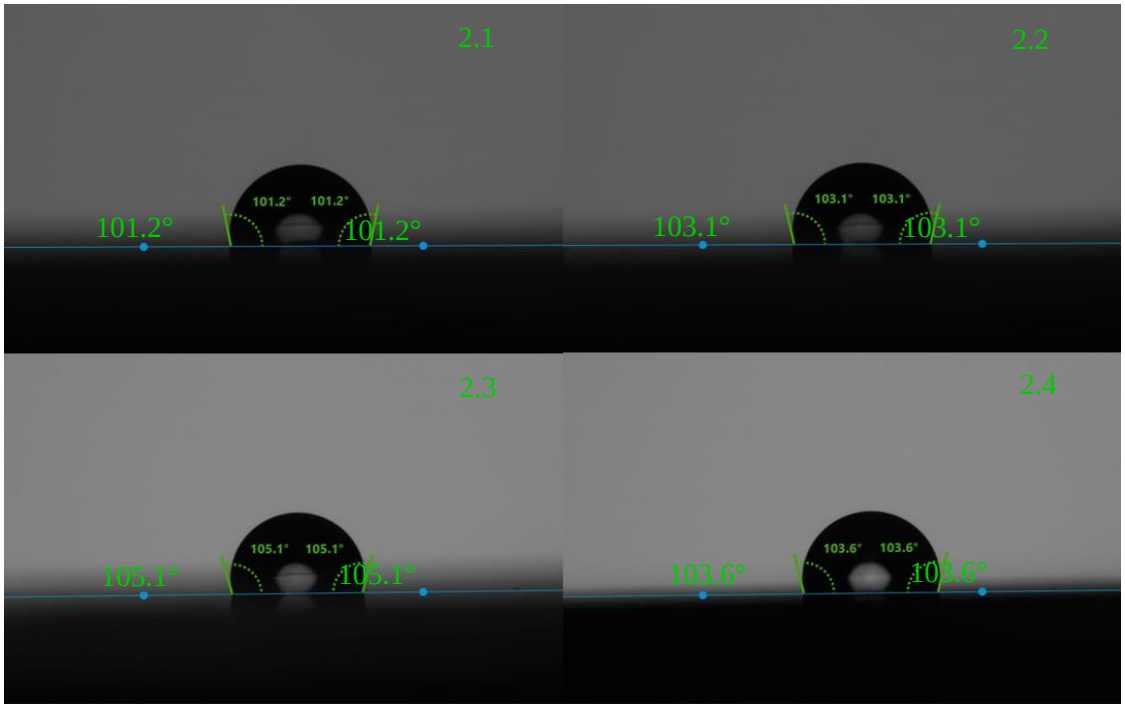


Рис. 2. Оценка кумулятивной смачиваемости паттерна по методу Юнга-Лапласа.

Выводы. В ходе данной работы получены различные значения единичных абляционных следов в зависимости от параметров обработки лазерным излучением тонких полимерных пленок. Для паттерна, представляющего из себя совокупность единичных абляционных следов с заданной последовательностью, был оценен кумулятивный эффект смачиваемости поверхности при помощи анализатора формы капли. Следует отметить тенденцию к уменьшению единичного абляционного следа при снижении средней мощности лазерного излучения. При этом наиболее высокое значение гидрофобности демонстрирует образец 2.3, не обладающий наименьшим размером смачиваемой области, что предположительно может быть проявлением эффекта Касси и переходом к состоянию Венцеля [6] в случае образца 2.4 при более плотном расположении абляционных следов в случае последнего.

ЛИТЕРАТУРА

1. Han Y. et al. Exploring NP-GLIDE coatings: a leap forward in the innovation of omniphobic surfaces // Reactive and Functional Polymers. – 2024. – Vol. 205. – P. 106050.
2. Kartsev D. D. et al. Fabrication of Omniphobic-Omniphilic Micropatterns using GPOSS-PDMS Coating // Advanced Materials Interfaces. – 2023. – Vol. 10. – №. 16. – P. 2300156.
3. Shchedrina N. N. et al. Elementary autonomous surface microfluidic devices based on laser-fabricated wetting gradient microtextures that drive directional water flows // Optics Express. – 2021. – Vol. 29. – №. 8. – P. 12616-12624.
4. Zhang K. et al. Transparent omniphobic coating with glass-like wear resistance and polymer-like bendability // Angewandte Chemie. – 2019. – Vol. 131. – №. 35. – P. 12132-12137.
5. Xu J. et al. Study on the ultraviolet nanosecond laser ablation and heat-affected zone of polydimethylsiloxane films based on comprehensive surface analysis // Optics & Laser Technology. – 2023. – Vol. 167. – P. 109769.
6. Дубов А. Л. «Интеллигентный» дизайн супергидрофобных поверхностей для микрофлюидики» дис. Магистра. – Москва: МГУ им М.В. Ломоносова, 2011. – 83 с.

УДК 538.955

А.А. Горшков[1], Я.А. Могунов[2], А.М. Калашникова[2]
[1]Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого (*)
[2]Физико-технический институт им. А.Ф. Иоффе

ПЕРВОЕ ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНОЕ НАБЛЮДЕНИЕ ДИНАМИКИ НАМАГНИЧЕННОСТИ В МАГНИТНОЙ MAX-ФАЗЕ

Введение. В последнее время значительно вырос интерес исследователей к слоистым магнитным структурам, таким как вандерваальсовы магнетики [1], графен [2] и магнитные изоляторы [2]. Благодаря сильной анизотропии свойств внутри слоев и между ними эти материалы перспективны для спинтроники [3] и магнитоакустики [4]. Динамика намагниченности в таких материалах активно исследуется [1]; однако в схожих по структуре и свойствам материалах — магнитных MAX-фазах — динамические магнитные свойства до сих пор не изучены.

MAX-фазы — класс слоистых проводящих керамик, сочетающих тепло- и электропроводность с твердостью и термостойкостью. Их химическая формула $M_{n+1}AX_n$, а структура обладает кристаллической симметрией $\mathrm{P63/mmc}$ и межслойным расстоянием свыше 1 нм [5]. В магнитных MAX-фазах, как и в ван-дер-Ваальсовых магнетиках, наблюдается разнообразие типов магнитного упорядочения: ферро- [5], антиферромагнитное [6], неколлинеарное [7] и спиральное [6], что обусловлено конкуренцией между ферро- и антиферромагнитными взаимодействиями.

В данной работе рассмотрена магнитная MAX-фаза $(Cr_{0.5}Mn_{0.5})_2GaC$, которая обладает наибольшей намагниченностью насыщения среди всех известных магнитных MAX-фаз [7] и упорядочивается ниже температуры 220 К [8,10]. Ее магнитная структура точно не определена, различные исследователи отмечают наличие ферримагнитной компоненты в гистерезисе [8,9]. Целью данной работы является первая экспериментальная демонстрация динамики намагниченности в MAX-фазе.

Эксперимент. Изученный образец представлял собой тонкую пленку (40 нм) $(Cr_{0.5}Mn_{0.5})_2GaC$ на подложке MgO (111). Пленка была получена методом магнетронного напыления. Детали роста описаны в работе [7]. Постоянная гексагональной кристаллической ячейки внутри слоя - 2.897 ±0.001 **Å**, и между слоями (направление (0001)) - 12.596 ± 0.002 **Å** [7].

Измерения динамики намагниченности производились методом фемтосекундной накачки-зондирования [11] с магнитооптическим детектированием по меридиональному и полярному эффекту Керра. В качестве источника излучения использовался фемтосекундный лазерный усилитель с длительностью импульсов 170 фс. Импульсы накачки с длиной волны 515 нм были линейно поляризованы и направлены на образец по нормали. Импульсы зондирования с длиной волны 1030 нм были линейно поляризованы под углом 45°, угол падения на образец составлял 45°. Образец был помещен в криостат, позволяющий варьировать температуру в диапазоне 66–294 К. К образцу прикладывалось внешнее магнитное поле (до 300 мТ) в плоскости слоев исследуемой MAX-фазы. В эксперименте измерялось изменение угла поворота плоскости поляризации импульса зондирования после отражения от образца в зависимости от временной задержки относительно импульса накачки.

Обсуждение результатов. Измеренные сигналы представляли собой резкий скачок при нулевой задержке с последующей релаксацией, сопровождающейся осцилляциями. Чтобы выделить магнитную динамику, были вычислены суммы и разности сигналов с одинаковым

(*) А.А. Горшков, artem.gorshkov@mail.ioffe.ru

по модулю, но противоположным по направлению значением магнитного поля. Это позволило разделить четный и нечетный вклады по магнитному полю (рис. 1а,г). Вычитание из четного вклада термической составляющей позволило выделить затухающую со временем осцилляцию, которая аппроксимировалась экспоненциально затухающей синусоидой с амплитудой A и частотой ω (см. красную линию в вставке на рис. 1а). Нечетный вклад аппроксимировался "ступенькой" с амплитудой A_d и временем экспоненциального нарастания t_d (см. красную линию на рис. 1г). В ходе обработки данных для обоих вкладов были получены зависимости параметров аппроксимации от температуры и внешнего магнитного поля. В пределах погрешностей зависимости этих параметров от магнитного поля обнаружено не было.

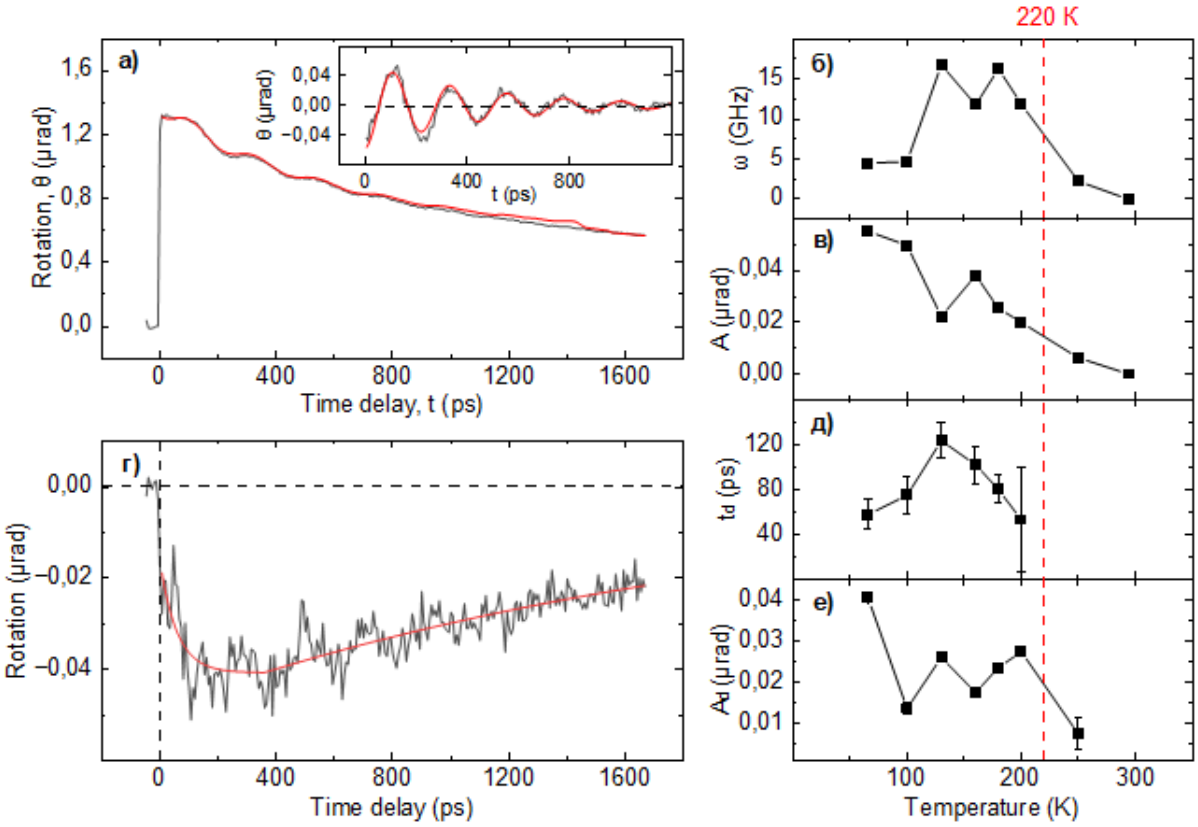


Рис. 1. Анализ четного (а-в) и нечетного (г-е) по полю сигналов при температуре 66 К и магнитном поле |H|=250 мТ: (а) и (г) - измеренный поворот плоскости поляризации отраженных импульсов зондирования в зависимости от времени задержки после возбуждения (черные линии) и его аппроксимации (красные линии), вставка на панели (а) показывает сигнал с вычтенным термическим вкладом; (б) температурная зависимость частоты ω и (в) амплитуды A осцилляций с панели (а); (д) температурная зависимость времени нарастания t_d и (е) амплитуды A_d «ступеньки» с панели (г)

Сначала рассмотрим четные по полю вклады. На рис. 1б представлена зависимость ω от температуры. Сперва наблюдается увеличение ω с 5 ГГц до 16 ГГц, затем при приближении к температуре фазового перехода в парамагнитное состояние (~220 К) начинается плавное снижение частоты. На рис. 1в показана зависимость амплитуды A от температуры. С ростом температуры A постепенно уменьшается, и при достижении температуры ~294 К (выше температуры фазового перехода) осцилляции полностью исчезают. Мы интерпретируем наблюдаемые осцилляции как прецессию намагниченности, а их исчезновение при переходе в парамагнитное состояние является доказательством магнитной природы.

Стоит заметить, что полученные результаты отличаются от данных, представленных в работе [9], где использовался метод ферромагнитного резонанса (ФМР). Во-первых, в работе

[9] наблюдалась зависимость частоты и амплитуды ФМР от величины магнитного поля, тогда как в наших экспериментах зависимость ω и A от магнитного поля в пределах погрешностей обнаружена не была. Во-вторых, в работе [9] ферромагнитный резонанс при температуре 105 К наблюдался на частоте 9.23 ГГц, в то время как в нашем случае ω(100К) = 4.7 ГГц.

Теперь рассмотрим нечетные по полю вклады. Как видно из рис. 1д, в исследуемой металлической MAX-фазе длительность нарастания нечетного вклада составляет ~80 пс. Это значение существенно превышает характерные времена сверхбыстрого размагничивания в металлических пленках (<1 пс) [12], тем не менее по порядку величины близко к временам релаксации в ван-дер-ваальсовых магнетиках (~20 пс) [1], что дает основания отнести наблюдаемый процесс к сверхбыстрому размагничиванию в слоистых материалах.

На рис. 1е показана зависимость амплитуды A_d сверхбыстрого размагничивания от температуры T. Она постепенно уменьшается с ростом T, и при температурах выше фазового перехода сверхбыстрое размагничивание перестает наблюдаться на фоне шумов. Это подтверждает магнитную природу наблюдаемого эффекта.

Выводы. В данной работе впервые зарегистрирована лазерно-индуцированная динамика намагниченности в тонкой пленке (40 нм) $(Cr_{0.5}Mn_{0.5})_2GaC$ при магнитных полях до 300 мТ и температуре от 66 К до 294 К. Были выявлены два эффекта: сверхбыстрое размагничивание с характерным временем ~80 пс и прецессия спинов в диапазоне частот 5-16 ГГц. Оба явления исчезают при приближении к температуре фазового перехода в парамагнитное состояние.

ЛИТЕРАТУРА

1. Lichtenberg T., Schippers C.F., van Kooten S.C.P., Evers S.G.F., Barcones B., Guimarães M.H.D., Koopmans B. Anisotropic laser-pulse-induced magnetization dynamics in van der Waals magnet Fe_3GeTe_2 // 2D Materials. – 2023. – Vol. 10. – No. 1. – P. 015008.
2. Gong C., Zhang X. Two-dimensional magnetic crystals and emergent heterostructure devices // Science. – 2019. – Vol. 363 (6428). – P. eaav4450
3. Sierra J.F., Fabian J., Kawakami R.K., Roche S., Valenzuela S.O. Van der Waals heterostructures for spintronics and opto-spintronics // Nature Nanotechnology. – 2021. – Vol. 16. – P. 856–868.
4. Vlasov V.S., Golov A.V., Kotov L.N., Shcheglov V.I., Lomonosov A.M., Temnov V.V. The Modern Problems of Ultrafast Magnetoacoustics (Review) // Acoustical Physics. – 2022. – Vol. 68. – No. 1. – P. 18–47.
5. Ingason A.S., Dahlqvist M., Rosen J. Magnetic MAX phases from theory and experiments; a review // Journal of Physics: Condensed Matter. – 2016. – Vol. 28. – No. 43. – P. 433003
6. Dey J., Wójcik M., Jędryka E., Kalvig R., Wiedwald U., Salikhov R., Farle M., Rosén J. Non-collinear magnetic structure of the MAX phase Mn_2GaC epitaxial films inferred from zero-field NMR study // Ceramics International. – 2023. – Vol. 49 (14 B). – P. 24235-24238.
7. Petruhins A., Ingason A.S., Lu J., Magnus F., Olafsson S., Rosén J. Synthesis and characterization of magnetic $(Cr_{0.5}Mn_{0.5})_2GaC$ thin films // Journal of Materials Science. – 2015. – Vol. 50. – P. 4495-4502.
8. Salikhov R., Semisalova A.S., Petruhins A., Ingason A.S., Rosen J., Wiedwald U., Farle M. Magnetic Anisotropy in the $(Cr_{0.5}Mn_{0.5})_2GaC$ MAX Phase // Materials Research Letters. – 2015. – Vol. 3 (3). – P. 156-160.
9. Lin S., Tong P., Wang B.S., Huang Y.N., Lu W.J., Shao D.F., Zhao B.C., Song W.H., Sun Y.P. Magnetic and electrical/thermal transport properties of Mn-doped $M_{n+1}AX_n$ phase compounds $Cr_{2-x}Mn_xGaC$ ($0 \le x \le 1$) // Journal of Applied Physics. – 2013. – Vol. 113 (5). – P. 053502.
10. Lai C.-C., Tao Q., Fashandi H., Wiedwald U., Salikhov R., Farle M., Petruhins A., Lu J., Hultman L., Eklund P., Rosen J. Magnetic properties and structural characterization of layered $(Cr_{0.5}Mn_{0.5})_2AuC$ synthesized by thermally induced substitutional reaction in $(Cr_{0.5}Mn_{0.5})_2GaC$ // APL Materials. – 2018. – Vol. 6 (2). – P. 026104.
11. Kirilyuk A., Kimel A.V., Rasing T. Ultrafast optical manipulation of magnetic order // Reviews of Modern Physics. – 2010. – Vol. 82 (3). – P. 2731-2784.
12. Beaurepaire E., Merle J.-C., Daunois A., Bigot J.-Y. Ultrafast Spin Dynamics in Ferromagnetic Nickel // Phys. Rev. Lett. – 1996. – Vol. 76 (22). – P. 4250-4253.

УДК 538.91

Т.Г. Матвеева
Филиал Псковского государственного университета в г. Великие Луки(*)

ФРАКТАЛЬНЫЙ ХАРАКТЕР ТЕМПЕРАТУРНЫХ СВОЙСТВ НАНОСТРУКТУР

Введение. Использование наноструктур, а также нанокомпозитов на основе регулярных систем полостей и каналов пористых диэлектрических матриц (опалов, цеолитов) играет важную роль для создания и исследования новых материалов с заданными свойствами [1,2] в современной физике конденсированного состояния. Особую значимость в исследовании таких материалов имеет установление характера температурных зависимостей электропроводимости, диэлектрической проницаемости, диэлектрических потерь и других физических величин.

Целью исследования, представленного в работе, являлось установление влияния фрактальной размерности на коэффициент объемного расширения у фрактальных структур и наноструктур, находящихся в полостях диэлектрических нанопористых матрицах, экспериментальное исследование физических свойств которых было проделано в работах с сегнетовой солью [3,4].

Интересную возможность для описания физики наноструктур и нанокомпозитов дает фрактальный подход. Он связан с понятием «фрактальная размерность», или «размерность Хаусдорфа», которая оказывается больше топологической размерности объекта, более того, она дробная [5]. Именно дробной размерностью и объясняются многие интересные свойства нанообъектов. У нанообъектов число атомов или молекул, находящихся на поверхности и в объеме, имеет один порядок. Таким образом, дробная размерность наноструктур связана с тем, что атомы или молекулы одновременно принадлежат и поверхности и, условно говоря, внутренней части объекта.

Результаты и обсуждение. Фрактальный подход к теоретическому описанию наноструктур обычно сводится к тому, что для определения некоторой физической величины структуры расширяют соответствующий закон на произвольную размерность пространства. Так, например, авторы [6] предложили его для определения теплоемкости фрактальных наноструктур.

Тепловое расширение решетки или изменение равновесного объема при изменении температуры, характеризуемое температурным коэффициентом объемного расширении $\beta = \frac{1}{V_0}\frac{dV}{dT}$, обусловлено асимметрией взаимодействия между атомами, вызванной тем, что сила отталкивания возрастает быстрее при сближении атомов, чем сила притяжения при их удалении друг от друга.

Представим объем решетки как $V = \langle x\rangle^d$, где $\langle x\rangle$ – среднее расстояние между атомами, $\alpha = \frac{3k_B g}{4x_0\varphi^2}$ – температурный коэффициент линейного расширения вещества. Тогда для температурного коэффициента объемного расширения фрактальной структуры получим:

$$\beta = \frac{1}{V_0}\frac{d\langle x\rangle^d}{dT} = \frac{1}{V_0}d\langle x\rangle^{d-1}\frac{3k_B g}{4\varphi^2} = \left|V_0 = x_0^d\right| = \frac{d\langle x\rangle^{d-1}}{x_0^d}\cdot\alpha\cdot x_0 = d\alpha\cdot\frac{\langle x\rangle^{d-1}}{x_0^{d-1}} = d\cdot\alpha\cdot\left(\frac{\langle x\rangle}{x_0}\right)^{d-1}$$
$$= |\langle x\rangle = x_0| = d\alpha$$

Таким образом, получаем $\beta = d\alpha$.

Полученный результат можно применить к известным нанопористым диэлектрическим матрицам (опалам, цеолитам).

(*) Т.Г. Матвеева, mtg88@yandex.ru

Структура опала – пример фрактальной структуры, образованной при вложении кремнеземных глобул друг в друга. Упорядоченная гранецентрированная кубическая (ГЦК) структура опала образована плотно упакованными сферами с радиусами ~ 100 нм [7]. Для идеальной ГЦК структуры каждая частица граничит с двенадцатью другими: шестью из собственного ростового слоя, тремя из «нижнего» и тремя из «верхнего» (рис. 1). В решетке плотноупакованных шаров опалов имеются пространственно связанные пустоты двух типов: октаэдрические с характерным размером $D_1 = 0.41D$ и тетраэдрические с $D_2 = 0.23D$ (где D — диаметр сфер SiO_2), которые образуют регулярную 3D ГЦК решетку с периодом a ~ 300–400 нм.

Размерность опаловой структуры найдем из соотношения

$$d = \frac{\ln 13}{\ln 3} \cong 2.33$$

Поскольку 2<d<3, то это говорит о том, что данная структура имеет нулевой объем, но, как фрактальный объект, бесконечную площадь поверхности своих пор. Таким образом, коэффициент объемного расширения для опала $\beta = 2.33\ \alpha$.

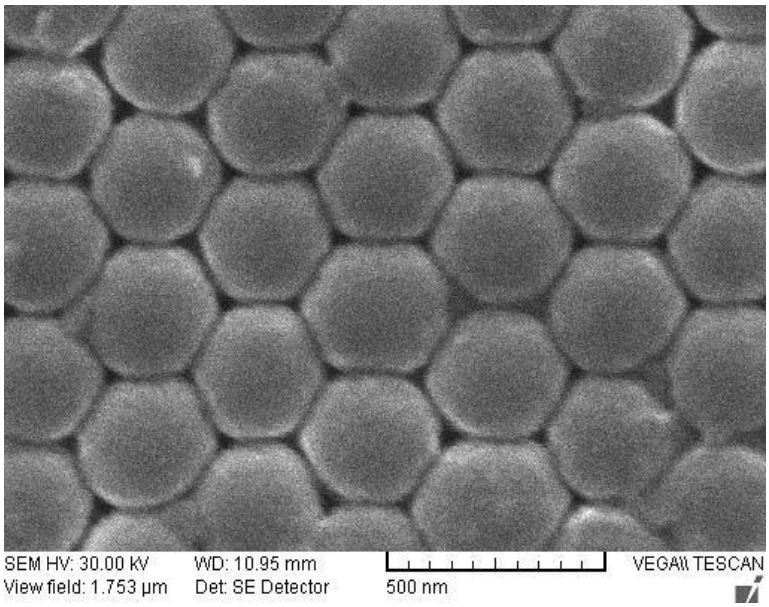


Рис. 1. Электронно-микроскопическое изображение
плотной упаковки глобул из кремнезема в матрице опала [8].

Фрактальную размерность имеют не только нанопористые матрицы, но и ансамбли идентичных упорядоченно расположенных наночастиц вещества-«гостя», которое можно диспергировать в системе полостей и каналов регулярных пористых диэлектрических матриц цеолитов и опалов (метод, предложенный В.Н. Богомоловым [9]). В частности, устойчивость каркаса цеолита к нагреванию до высоких температур является важным свойством таких объектов для использования технологии в тех областях, где температурный режим может варьироваться в широких пределах, например, в автомобильной электронике. За последние десятилетия структура цеолитов интенсивно исследовалась, и на данный момент многие свойства этих соединений можно объяснить особенностями их структур.

Каркас цеолита А образует две пересекающиеся системы каналов (параметр элементарной ячейки a = 12.32Å [10]). Одна из них состоит из α-полостей, соединяющихся через окна диаметром 4.2Å (эти каналы параллельны осям симметрии 4 порядка), вторая – из β-полостей, соединяющихся с α-полостями через окна диаметром 2.2Å (каналы параллельны осям симметрии 3 порядка) [10].

Размерность структуры объектов, которые могут занимать α-полости с учетом размеров входных окон, найдем из соотношения

$$d = \frac{\ln 7}{\ln 5.86} \cong 1.1$$

Это значение немногим больше топологической размерности линии (d = 1).

Следовательно, для наночастиц расположенных в α-полостях цеолита А, коэффициент объемного расширения $\beta = 1.1\,\alpha$.

Выводы. Полученные результаты показывают, что коэффициенты объемного расширения как для нанопористых матриц, так и для структур вещества-«гостя», находящегося в полостях и каналах этих матриц, оказываются отличными от коэффициентов массивных трехмерных объектов. Более того, сам нанокомпозит, в данном смысле, является составной структурой из структур с неравными коэффициентами теплового расширения, что, конечно, должно влиять на тепловые свойства данных объектов, а также на физические величины, которые изменяются при изменении температуры.

ЛИТЕРАТУРА

1. Stucky G.D., Mac Dougall J.E. Quantum confinement and host / guest chemistry: Probing a new dimension // Science. – 1990. – Vol. 247 (4943). – P. 669–678.
2. Kumzerov Y., Vakhrushev S. Nanostructures within Porous Materials // Encyclopedia of Nanoscience and Nanotechnology / Ed. H.S. Nalwa. American Scientific Publishers, – 2004. – Vol. VII. – P. 811–849.
3. Matveeva T.G., Ivanova M.S., Solovyev V.G., Vanin A.I. Electrophysical properties of the Rochelle salt dispersed in a porous dielectric matrix of type A zeolite // Physics of Complex Systems. – 2024. – Vol. 5. – № 4. – P. 195–201.
4. Матвеева Т.Г., Пучков Н.И., Соловьев В.Г., Цветков А.В., Яников М.В. Оптические и электрические свойства нанокомпозита сегнетова соль / опал // XIV Международная конференция по фотонике и информационной оптике: Сборник научных трудов. М.: НИЯУ МИФИ, – 2025. – С. 507–508.
5. Мандельброт Б. Фрактальная геометрия природы. М.: Изд-во ИКИ, – 2002. – С. 654.
6. Байков Ю.А., Кузнецов. В.М. Физика конденсированного состояния: учебное пособие. М.: БИНОМ. Лаборатория знаний, – 2018. – С. 259.
7. Балакирев В.Г., Богомолов В.Н., Журавлев В.В., Кумзеров Ю.А., Петрановский В.П., Романов С.Г., Самойлович Л.А. Трехмерные сверхрешетки в матрицах опалов // Кристаллография. – 1993. – Т. 38. – № 3. – С. 111–120.
8. Ванин А. И., Кумзеров Ю. А., Лукин А. Е., Соловьев В. Г., Ханин С. Д., Яников М. В. Передача и преобразование электромагнитного излучения в фотонно-кристаллических структурах и металлодиэлектрических композиционных системах на основе опалов. Псков: Псковский государственный университет, –2017. – 104 с.
9. Богомолов В.Н. Жидкости в ультратонких каналах (Нитяные и кластерные кристаллы) // Успехи физических наук. – 1978. – Т. 124. – № 1. – С. 171–182.
10. Брек Д. Цеолитные молекулярные сита. М.: Мир, – 1976.

УДК 537.611.45

А.И. Брулев[1,2], Р.М. Дубровин[1], В.Ю. Давыдов[1], Р.В. Писарев[1]
[1]ФТИ им. А. Ф. Иоффе (*)
[2]Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого

КОМБИНАЦИОННОЕ РАССЕЯНИЕ СВЕТА НА МАГНОНАХ ПРИ СПИН-ОРИЕНТАЦИОННОМ ПЕРЕХОДЕ $\Gamma_4 \leftrightarrow \Gamma_2$ В РЕДКОЗЕМЕЛЬНОМ ОРТОФЕРРИТЕ

Введение. Антиферромагнетики, характеризующиеся антипараллельным упорядочением спинов, обладают на порядки более быстрой спиновой динамикой по сравнению с ферромагнетиками и являются перспективными материалами для создания новых энергоэффективных устройств памяти, функционирующей на терагерцовых частотах. Особое внимание исследователей среди антиферромагнетиков занимают ортоферриты $R\mathrm{FeO_3}$, где R – редкоземельный ион, проявляющие поразительное разнообразие магнитных явлений, таких как мультиферройность, линейный магнитоэлектрический эффект и многих других [1]. Ортоферриты обладают ромбической структурой искаженного перовскита с пространственной группой *Pbnm*, изображенной на рис. 1а,б. При температурах ниже температуры Нееля T_N = 650 K спины железа упорядочиваются антиферромагнитно вдоль оси a с небольшим скосом вдоль оси c в результате взаимодействия Дзялошинского-Мория, реализуя магнитную структуру Γ_4, которая показана на рис. 1б. При этом температуры упорядочивания редкоземельных ионов R крайне низкие.

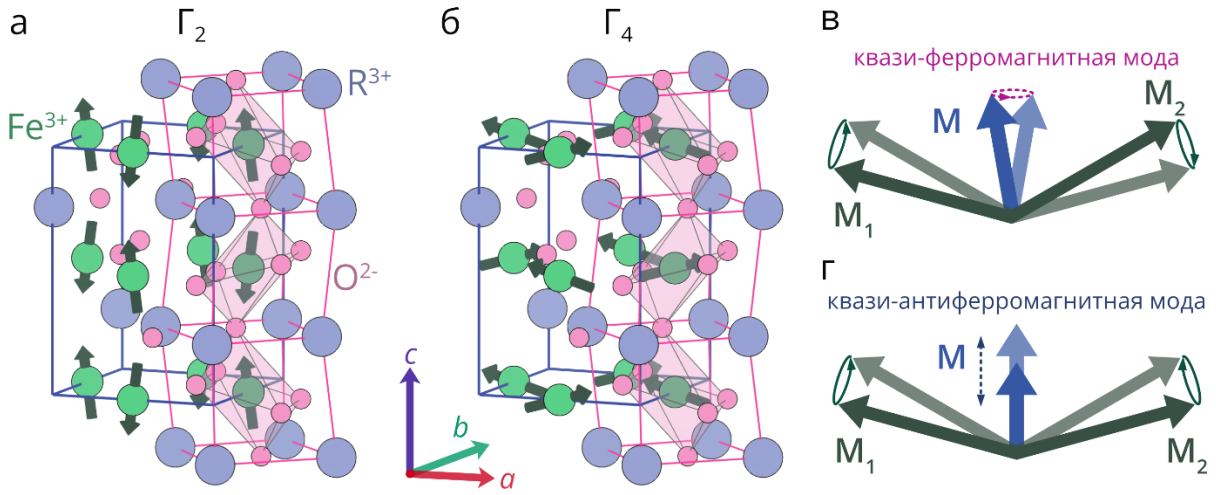


Рис. 1. Кристаллическая и магнитная структуры ортоферрита $Sm_{0.5}Tb_{0.5}FeO_3$ в (а) Γ_2 и (б) Γ_4 магнитных конфигурациях. (в) Прецессия слабого ферромагнитного момента $\mathbf{M} = \mathbf{M}_1 + \mathbf{M}_2$ для квази-ферромагнитной моды и (г) осцилляции амплитуды $\mathbf{M}$ для квази-антиферромагнитной моды.

Конкуренция обменных взаимодействий между ионами железа и редкой земли приводят к множеству магнитных структур. Наиболее общими являются описанная выше Γ_4, реализующаяся в ортоферритах ниже T_N и Γ_2, в которой спины железа упорядочены вдоль оси c как показано на рис. 1а и при низких температурах проявляющаяся в большинстве ортоферритов. Спин-ориентационный переход между структурами $\Gamma_4 \leftrightarrow \Gamma_2$ происходит в диапазоне температур от T_2 до T_1 ($T_2 < T_1 < T_N$) через промежуточную фазу Γ_{24}, в которой

(*) А.И. Брулев, a.i.brulev@mail.ioffe.ru

спины железа поворачиваются в плоскости *ac* [2]. Самые высокие температуры спин-ориентационных переходов наблюдаются в $SmFeO_3$ [3], но изовалентное замещение в $Sm_{1-x}R_xFeO_3$ позволяет их существенно снизить [1].

Спиновая динамика ионов железа в ортоферритах представлена дважды вырожденными акустической и обменной магнонными модами. При этом эффективно взаимодействует со светом только акустический магнон. Взаимодействие Дзялошинского-Мория приводит к снятию вырождения и акустический магнон расщепляется на квази-ферромагнитную, характеризующуюся прецессией намагниченности $\mathbf{M} = \mathbf{M}_1 + \mathbf{M}_2$, и квази-антиферромагнитную, связанную с осцилляциями амплитуды **M** моды. $\mathbf{M}_1$ и $\mathbf{M}_2$ магнитные моменты противоположно направленных подрешеток ионов железа.

Материалы и методы. В данной работе мы экспериментально исследовали эволюцию спиновой динамики в центре зоны Бриллюэна при спин-ориентационных переходах $\Gamma_4 \leftrightarrow \Gamma_{24} \leftrightarrow \Gamma_2$ в монокристалле редкоземельного ортоферрита $Sm_{0.5}Tb_{0.5}FeO_3$ методом поляризационной спектроскопии комбинационного рассеяния света в диапазоне температур от 400 до 78 К. Для возбуждения использовался гелий-неоновый лазер.

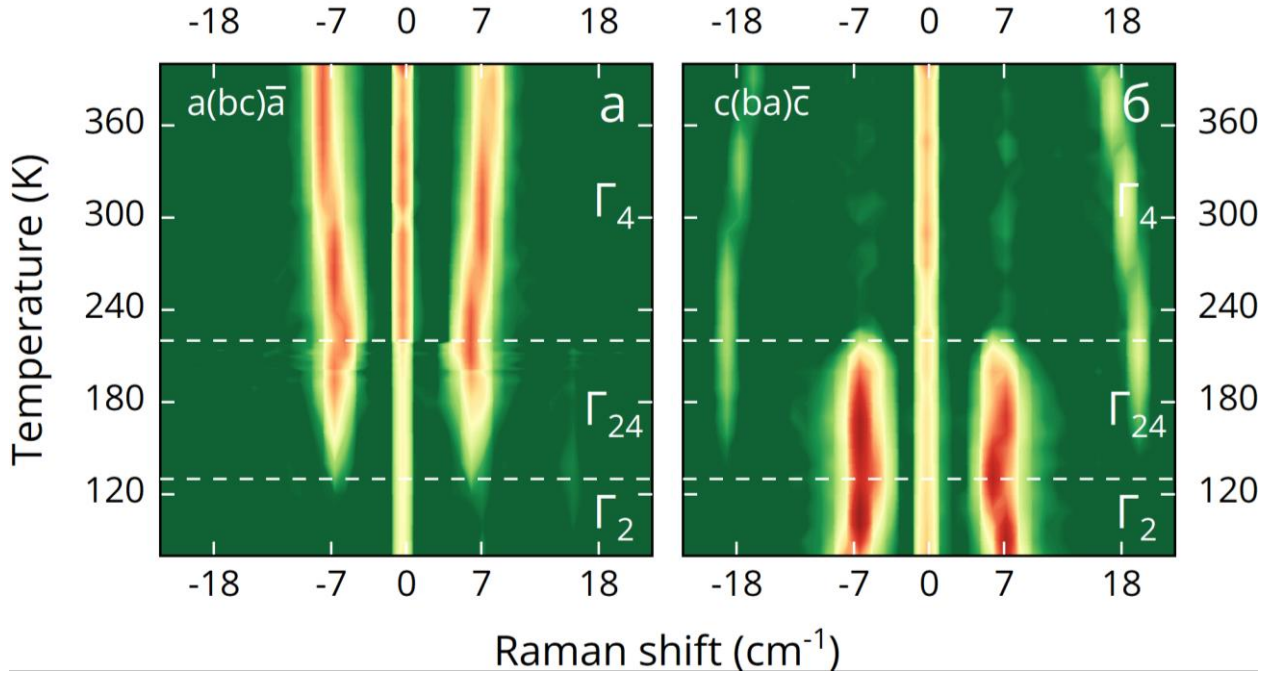


Рис. 2. Температурные карты поляризованных спектров комбинационного рассеяния света на квази-ферромагнитной (±7 $см^{-1}$) и квази-антиферромагнитной (±18 $см^{-1}$) модах в $Sm_{0.5}Tb_{0.5}FeO_3$ в магнитных структурах Γ_4, Γ_2 и Γ_{24} в скрещенных конфигурациях поляризаций с максимальными интенсивностями возбуждений.

Результаты и обсуждение. Были измерены спектры комбинационного рассеяния света для всех поляризаций в диапазоне от -20 до 20 $см^{-1}$ при комнатной температуре, то есть в фазе Γ_4. Соотнесение обнаруженных возбуждений с правилами отбора для магнонов в ортоферритах, взятыми из литературы [2], позволил установить, что квази-ферромагнитная мода имеет частоту около 7 $см^{-1}$, а квази-антиферромагнитная мода – около 18 $см^{-1}$. Далее были измерены спектры при температурах в диапазоне от 400 до 78 К при поляризациях, в которых интенсивности рассеяния света на квази-ферромагнитной и квази-антиферромагнитной магнонных модах максимальны. Полученные спектры представлены в виде цветовых карт на рис. 2. На спектрах видны антистоксовы (энергия рассеянного света

больше энергии падающего на энергию возбуждения) и стоксовы (с энергией рассеянного света меньшей падающего) линии с частотами около ±7 $см^{-1}$ и ±18 $см^{-1}$, соответствующие квази-ферромагнитной и квази-антиферромагнитной модам. Установлено, что в одной поляризации видна только квази-ферромагнитная мода при температурах выше 130 К [см. рис. 2а]. В другой поляризации квази-антиферромагнитная мода проявляется при температурах выше 130 К, а ниже 220 К становится активной квази-ферромагнитная мода [см. рис. 2б].

Анализ спектров позволил установить, что в $Sm_{0.5}Tb_{0.5}FeO_3$ реализуется спин-ориентационный переход $\Gamma_4 \leftrightarrow \Gamma_{24} \leftrightarrow \Gamma_2$ при температурах $T_1 = 220$ К и $T_2 = 130$ К, для которого наблюдается согласие между интенсивностями магнонных мод и правилами отбора [2]. Стоит отметить, что ширина фазы Γ_{24} по температуре $\Delta T = T_1 - T_2 = 90$ К является аномально большой для ортоферритов и мы связываем это с изменением магнитной анизотропии при изовалентном замещении редкоземельного иона. Далее было выявлено, что частота квази-ферромагнитной моды зависит от температуры и имеет два минимума, при T_1 и T_2, что соответствует поведению мягкой моды, однако частота не достигает нуля в результате магнито-упругого взаимодействия. Частота квази-антиферромагнитной моды увеличивается при охлаждении до температуры T_2.

Заключение. В результате впервые была экспериментально исследована эволюция равновесной спиновой динамики в редкоземельном ортоферрите $Sm_{0.5}Tb_{0.5}FeO_3$ в области спин-ориентационных переходов $\Gamma_4 \leftrightarrow \Gamma_{24} \leftrightarrow \Gamma_2$. Экспериментально определены температуры спин-ориентационных переходов $T_1 = 220$ К и $T_2 = 130$ К. Выявлены температурные зависимости частоты, интенсивности и полуширины на полувысоте магнонов в области спин-ориентационных переходов. Показано, что квази-ферромагнитная мода не проявляется в спектрах комбинационного рассеяния в магнитной структуре Γ_2. Мы полагаем, что наши результаты будут способствовать дальнейшим исследованиям равновесной и неравновесной спиновой динамики в редкоземельных ортоферритах.

Работа выполнена при поддержке гранта РНФ № 24-72-00106.

ЛИТЕРАТУРА

1. Li Q., Zhou J., Shang J., Shen H., Li L., Wang F., Wang H., Shen X., Tian T., Kalashinikova A.M., Wu A., Xu J. Recent advances of rare earth orthoferrite $RFeO_3$ magneto optical single crystals // J. Cryst. Growth. – 2025. – Vol. 649. – P. 1-13.

2. Барьяхтар В.Г., Пашкевич Ю.Г., Соболев В.Л. Рассеяние света на магнонах и магнитооптические эффекты в многоподрешеточных магнетиках // Журнал экспериментальной и теоретической физики. – 1983. – Т. 85. – №.5 (11). – С.1625-1637.

3. Li X., Kim D., Liu Y., Kono J. Terahertz spin dynamics in rare-earth orthoferrites // Photonics Insights. – 2022. – Vol. 1 (2). – P. 1-56.

4. Wang B., Zhao X., Wu X., Cao S., Xu J., Kalashnikova A. M., Pisarev R. V. Single crystal growth and magnetic properties of $Sm_{0.7}Tb_{0.3}FeO_3$ orthoferrite single crystal // J. Magn. Magn. Mater. – 2015. – Vol. 379. – P. 192-195.

УДК 532.517

М.В. Шахов, С.П. Рощупкин
Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого(*)

КВАНТОВАЯ ЗАПУТАННОСТЬ СОСТОЯНИЙ КОНЕЧНЫХ ЧАСТИЦ В ПРОЦЕССЕ РОЖДЕНИЯ ЭЛЕКТРОН-ПОЗИТРОННОЙ ПАРЫ И ЭЛЕКТРОНА ПРИ СТОЛКНОВЕНИИ УЛЬТРАРЕЛЯТИВИСТСКИХ ЭЛЕКТРОНОВ С СИЛЬНОЙ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОЙ ВОЛНОЙ

Введение. Процессы КЭД высших порядков по постоянной тонкой структуры во внешнем поле способны протекать резонансно, когда виртуальные промежуточные частицы выходят на массовую оболочку (резонансы Олейника, [1-5]). При этом геометрические и энергетические параметры конечных частиц оказываются кинематически связанными, тем самым конечные частицы оказываются в состоянии квантовой запутанности, когда параметр одной конечной частицы определяет параметры всех остальных частиц.

В рамках настоящей работы получены резонансные относительные вероятности процесса рождения электрон-позитронной пары и электрона при столкновении ультрарелятивистских электронов с сильной электромагнитной волной. Показана квантовая запутанность конечных частиц процесса, а также показано, что относительная вероятность в большом диапазоны частот и интенсивностей волны значительно (на несколько порядков величины) превышает единицу.

Параметры процесса. Основным параметром задачи является классический релятивистски-инвариантный параметр:

$$\eta = eF\lambda\!\!\!^{-}/m, \tag{1}$$

численно равный отношению работы поля над электроном на длине волны к энергии покоя электрона. Данный резонансный процесс рассмотрен для сильных полей, когда параметр $\eta \geq 1$. Отметим, что в случае $\eta << 1$ данная задача изучалась в работе [3]. Кроме этого, в данной задаче имеются квантовые параметры Комптон-эффекта и процесса Брейта-Уиллера, равные отношению энергии начального электрона к характерным энергиям процесса:

$$\varepsilon_{iC} = \frac{E_i}{\hbar\omega_C}, \quad \varepsilon_{iBW} = \frac{E_i}{\hbar\omega_{BW}}. \tag{2}$$

Здесь E_i — энергия начальных электронов, а $\hbar\omega_C$ и $\hbar\omega_{BW}$ характерные квантовые энергии Комптон-эффекта и процесса Брейта-Уиллера [4-5].

В дальнейшем описании будем использовать следующие величины: $x_{f,\pm} = E_{f,\pm} / E_i$ - нормированные энергии конечных частиц, l_1, l_2 - число фотонов волны, поглощенных в первой и второй вершинах, а также угловые ультрарелятивистские параметры:

$$\delta_{if}^2 = \frac{E_i^2\theta_{if}^2}{m_*^2}, \ \delta_{\pm}^2 = \frac{E_i^2\theta_{\pm}^2}{4m_*^2}, \tag{3}$$

где θ_{if}, $\theta_{\pm}$ — углы между импульсами частиц $\mathbf{p}_{i,f,\pm}$.При описании процесса можно выбрать один из угловых параметров (3) и один из квантовых параметров (2), чтобы описать все остальные характеристики процесса (смотри [4-5]).

(*) М.В. Шахов, shahov.mv@edu.spbstu.ru

Квантовая запутанность. В условиях резонанса 4-импульс промежуточного гамма-кванта выходит на массовую оболочку ($q^2 = 0$). В результате этого исходный процесс второго порядка по постоянной тонкой структуры эффективно распадается на два процесса первого порядка: стимулированные внешним полем Комптон эффект и процесс Брейта-Уиллера. В условиях резонанса для первой вершины получаем две ветви для энергии конечного электрона $x_{f(d)}$ и $x_{f(u)}$, а также для второй вершины получаем две ветви энергии пары $x_{\pm(d)}$ и $x_{\pm(u)}$. В силу общего закона сохранения энергии решения согласуются, если решение для нижней ветви энергии электрона соответствует верхней ветви энергии пары и наоборот. Таким образом можно исключить параметры на верхних ветвях, выразив все через энергии и углы на нижних ветвях. При этом энергии и угол вылета конечных частиц однозначно связаны. В результате получаем 4 комбинации регистрируемых величин: 2 угол-угловые и 2 энерго-угловые (смотри (4) — (5)).

Относительная вероятность процесса. Дифференциальная резонансная вероятность процесса для неполяризованных частиц получается стандартным образом [2], [5]. Резонансная бесконечность исключалась процедурой Брейта-Вигнера [2-5]. При этом имеет место несколько вероятностей, определяемых выбором одновременно регистрируемых характеристик (энергия и угол; угол и угол). После интегрирования полученных вероятностей вблизи точки резонанса и нормирования их на полную вероятность соответствующего процесса первого порядка $W_C\left(\eta, \varepsilon_{iC}\right)$ (стимулированный внешним полем Комптон эффект) получим следующие относительные вероятности:

$$R_{l_1 l_2}^{(f)}\left(x_{f(d)}, \delta_{\pm(u)}^2\right) = b_i \Psi_{l_1 l_2}^{(f)}\left(x_{f(d)}, \delta_{\pm(u)}^2\right), \quad \mathrm{H}_{l_1 l_2}^{(f)}\left(\delta_{f(d)}^2, \delta_{\pm(u)}^2\right) = b_i \Phi_{l_1 l_2}^{(f)}\left(\delta_{f(d)}^2, \delta_{\pm(u)}^2\right), \tag{4}$$

$$R_{l_1 l_2}^{(\pm)}\left(x_{\pm(d)}, \delta_{f(u)}^2\right) = b_i \Psi_{l_1 l_2}^{(\pm)}\left(x_{\pm(d)}, \delta_{f(u)}^2\right), \quad \mathrm{H}_{l_1 l_2}^{(\pm)}\left(\delta_{\pm(d)}^2, \delta_{f(u)}^2\right) = b_i \Phi_{l_1 l_2}^{(\pm)}\left(\delta_{\pm(d)}^2, \delta_{f(u)}^2\right), \tag{5}$$

$$b_i = \frac{2\left(4\pi^2\right)^3\left(1+\eta^2\right)}{P\left(\eta, \varepsilon_{iBW}\right)\mathrm{K}\left(\eta, \varepsilon_{iC}\right)\varepsilon_{iC}^2}\left(\frac{m}{\omega_C}\right)^2. \tag{6}$$

Здесь b_i — множитель, зависящий от начальных параметров экспериментальной установки, функции Ψ и Φ зависят от состояний конечных частиц, $P\left(\eta, \varepsilon_{iBW}\right), \mathrm{K}\left(\eta, \varepsilon_{iC}\right)$ — полная вероятность стимулированного внешним полем процесса Брейта-Уиллера и Комптон эффекта.

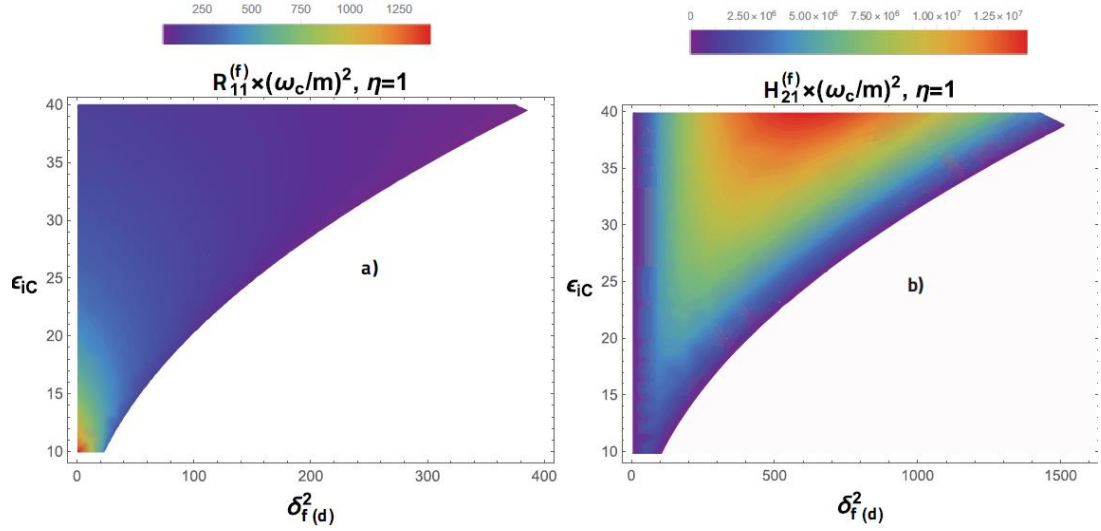


Рис. 1. Зависимость относительных вероятностей $R_{11}^{(f)} \times \left(\omega_C / m\right)^2$ и $H_{21}^{(f)} \times \left(\omega_C / m\right)^2$ (4) от угла вылета конечного электрона и квантового параметра процесса Брейта-Уиллера (a и b).

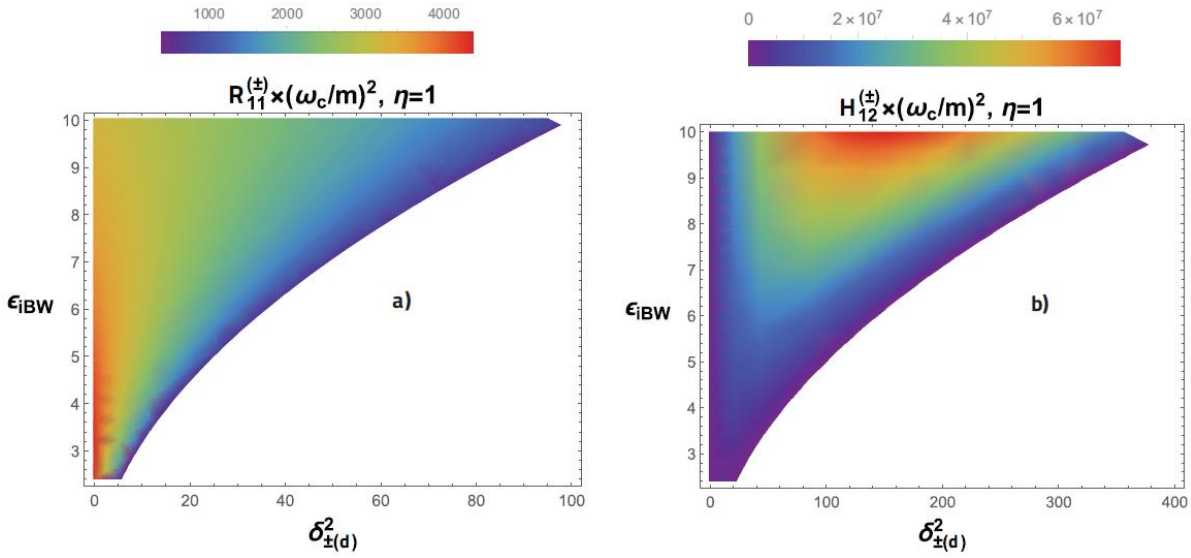


Рис. 2. Зависимость относительных вероятностей $R_{11}^{(\pm)}\times\left(\omega_C/m\right)^2$ и $H_{12}^{(\pm)}\times\left(\omega_C/m\right)^2$ (5) от угла вылета электронной пары и квантового параметра процесса Брейта-Уиллера.

В силу запутанности конечных частиц для описания процесса достаточно менять одну величину (угол или энергию), так как все остальные характеристики либо являются начальными параметрами, либо выражаются посредством кинематические соотношения.

Рассматривая конкретные значения для начальных энергий и частот, мы получаем для небольших энергий электронов и величин квантового параметра Брейта-Уиллера $\left(E_i=50\ \text{MeV},\ \varepsilon_{iBW}=2.41\right)$ в сильных рентгеновских полях относительные вероятности: $(H_{12(\max)}^{(\pm)}\sim H_{21(\max)}^{(f)})\sim(H_{11(\max)}^{(\pm)}\sim H_{11(\max)}^{(f)})\ \sim\ 10^4$. При этом, для больших энергий и величин квантового параметра Брейта-Уиллера $\left(E_i=500\ \text{GeV},\ \varepsilon_{iBW}=10^5\right)$ в сильных рентгеновских полях относительные вероятности $H_{21(\max)}^{(f)}\approx 2.3\times10^{11}$ и $H_{12(\max)}^{(\pm)}\approx 2.8\times10^{15}$. Таким образом, $H_{21(\max)}^{(f)}\sim H_{11(\max)}^{(f)}\sim 10^{11}$ и $H_{12(\max)}^{(\pm)}\sim H_{11(\max)}^{(\pm)}\sim 10^{15}$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Oleinik V.P. Resonance effects in the field of an intense laser beam // Sov. Phys. JETP. – 1967. – Vol. 25 (4). – P. 697-708.
2. Roshchupkin S.P. Resonant effects in collisions of relativistic electrons in the field of a light wave // Laser Phys. – 1996. – Vol. 6 (5). – P. 837-858.
3. Sizykh G.K., Roshchupkin S.P., Dubov V.V. Resonant Ultrarelativistic Electron–Positron Pair Production by High-Energy Electrons in the Field of an X-ray Pulsar // Universe. – 2020. – Vol. 6 (9). – P. 132.
4. Шахов М.В., Рощупкин С.П. Резонансная кинематика рождения электрон-позитронных пар и электрона при столкновении ультрарелятивистских электронов с сильной электромагнитной волной / Неделя науки ФизМех: сборник материалов Всероссийской научной конференции, 1–5 апреля 2024 года. – СПб.: ПОЛИТЕХ-ПРЕСС, 2024 – С.231-233.
5. Roshchupkin S.P., Shakhov M.V. Quantum entanglement of final particle states in the resonant trident pair production in a strong electromagnetic wave // Photonics. – 2025. – Vol. 12 (4). – P. 307.

УДК 539.1.075

П.С. Гуньков, Д.П. Геллер, С.С. Козловский, Я.А. Бердников
Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого(*)

СРАВНИТЕЛЬНЫЙ АНАЛИЗ МОДЕЛИРОВАНИЯ СПЕКТРОВ РЕНТГЕНОВСКОЙ ТРУБКИ МЕТОДОМ МОНТЕ-КАРЛО В РАЗЛИЧНЫХ ПРОГРАММАХ

Рентгенофлуоресцентный анализ позволяет определить количественный состав вещества, что необходимо в металлургии, ювелирном деле, химической, нефтяной и пищевой промышленности, сельском хозяйстве, археологии и др. [1-3]. В настоящее время для проведения количественного рентгенофлуоресцентного анализа используют дорогостоящие стандартные образцы или метод фундаментальных параметров, имеющий невысокую точность [4]. Определение количественного элементного состава образца с помощью программы для расчета прохождения излучения через вещество методом Монте-Карло [5-7] может обеспечить высокую точность получаемых результатов без применения стандартных образцов.

Для получения спектров флуоресценции методом Монте-Карло необходимо предварительно облучать исследуемый образец рентгеновским излучением с уже известным спектром. От точности спектра рентгеновского излучения зависит конечный результат при расчете спектра флуоресценции, таким образом получение расчетным путем спектра рентгеновской трубки, близкого к реальному представляет актуальную задачу. Наиболее точное моделирование спектра рентгеновской трубки проводится методом Монте-Карло. При этом могут использоваться различные программы. В работе был выполнен расчет спектра прострельной рентгеновской трубки с медным анодом с помощью программ Geant4, MCNP5 и MCC и проведен сравнительный анализ результатов.

Цифровая модель прострельной рентгеновской трубки с медным анодом, построенная в программе MCC, представлена на рис. 1.

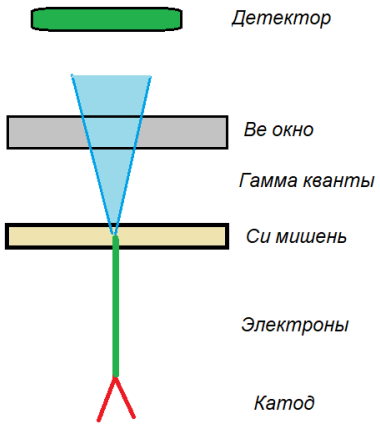


Рис. 1. Цифровая модель прострельной рентгеновской трубки

Электроны с энергией 40 кВ от катода проходят через медную мишень и бериллиевое выходное окно рентгеновской трубки после чего регистрируется детектором гамма-излучения. Аналогичная модель также была построена в программах Geant4 и MCNP. Получившиеся в результате расчетов спектры представлены на рис. 2.

(*) П.С. Гуньков, gunkov-pavel@yandex.ru

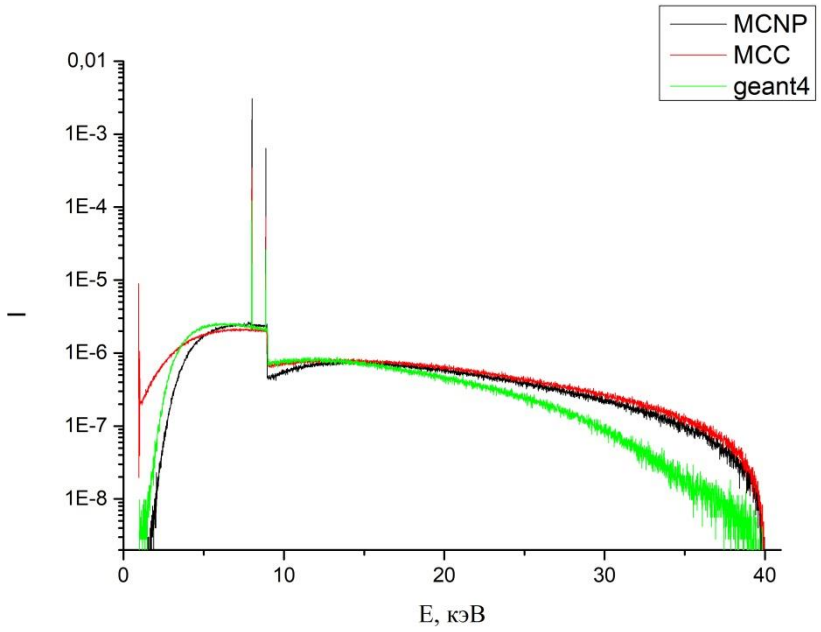


Рис. 2. Спектры рентгеновской трубки, рассчитанные в программах MCNP, MCC и Geant4

На рис. 2 видно, что в низкоэнергетичной области (3-7 кэВ) спектр, рассчитанный в программе MCC, отличается от спектров, полученных в программах Geant4 и MCNP. В области энергий от 15 до 40 кэВ спектры, рассчитанные в программах MCC и MCNP, совпадают, но отличаются от результатов расчетов, выполненных в программе Geant4. Линии флуоресценции меди (Ka 8,03 кэВ и Kb 8,9 кэВ), полученные в разных программах значительно отличаются. Ka линия меди получилась наименьшей в расчете, выполненном в программе Geant4, а наибольшей – в MCNP. Величины Ka и Kb линий, рассчитанные в трех программах представлены в табл. 1.

Табл. 1. Величины Ka и Kb линий, рассчитанные в программах MCNP, MCC и GEANT4

Программа	Ka	Kb
MCNP	3,08E-3	6,40E-4
MCC	3,47E-4	7,25E-5
GEANT4	1,22E-4	2,59E-5

Проведенное исследование показывает, что результаты расчета спектра рентгеновской трубки, выполненные в трех различных программах, не совпадают. Возможно, это связано с разными базами данных по сечениям, которые используются в этих программах. В дальнейшем требуется выяснить, какая из примененных программ позволяет получить наиболее близкий к эксперименту результат, а также причину ошибки при расчете в других программах.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ядерная физика в интернете. [Электронный ресурс]. – Режим доступа: http://nuclphys.sinp.msu.ru/arf/arf01.pdf (дата обращения: 18.03.2024).
2. Duaene W., Hunt F.L. On x-ray wave-lengths // Phys.Rev. 1915. V.6. № 2. P. 166-172.
3. Ulrey C.T. An experimental investigation of the energy in the continuous x-ray spectra of certain elements. // Phys.Rev. 1918. V.11. № 5. P. 401-410.

4. Алов Н. В. Основы аналитической химии. В 2 т. Т.2: учеб. для студ. учреждений высш. проф. образования / [Н. В. Алов и др.]; под ред. Ю. А. Золотова. — М.: Издательский центр «Академия», 2012. — 416 с.
5. Репникова Е.А., Деч А.В., Козловский С.С. Моделирование прохождения гамма-излучения через трехмерные многослойные структуры / 58XXX Юбилейная Неделя науки СПбГТУ. Материалы межвузовской научной конференции. – СПб., 2002. – Ч. V. – С. 58-59.
6. Багаев К.А., Козловский С.С. Применение компьютерного моделирования для калибровки детекторов в водной среде// Научно-технические ведомости СПбГПУ. Физико-математические науки. – 2011. – Т. 4. – С. 106-111.
7. Гуньков П.С., Козловский С.С., Бердников Я.А. Оптимизация параметров измерения на рентгенофлуоресцентном анализаторе с помощью программы для расчета прохождения излучения через вещество / X Всероссийская научно-практическая конференция производителей рентгеновской техники. Программа и материалы конференции. – СПб.: Изд-во СПбГЭТУ «ЛЭТИ», 2023. – С. 52-54.

УДК 539.126

Д.С. Шапаев, Я.А. Бердников, Д.М. Ларионова
Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого (*)

ФАКТОРЫ ЯДЕРНОЙ МОДИФИКАЦИИ АДРОНОВ В D+D СТОЛКНОВЕНИЯХ ПРИ ЭНЕРГИЯХ $\sqrt{s_{NN}} = 13{,}5$ И 27 ГэВ

Введение. Одной из планируемых физических задач в эксперименте Spin Physics Detector (SPD) [1] на коллайдере Nuclotron-based Ion Collider fAcility (NICA) [2] является измерение выходов J/ψ- и π^0- мезонов в $p+p$ столкновениях при энергии $\sqrt{s_{pp}} = 27$ ГэВ и $d+d$ столкновениях при энергии $\sqrt{s_{NN}} = 13{,}5$ ГэВ [1].

Основной механизм образования J/ψ- мезонов происходит через слияние пары глюонов, что приводит к созданию кварк-антикварковой пары ($c\bar{c}$) [1]. В ходе адронизации эта пара ($c\bar{c}$) может образовать J/ψ-мезон. Таким образом, исследование процессов рождения J/ψ может быть использовано для получения информации о свойствах и роли глюонов в $p+p$ и $d+d$ взаимодействиях.

Для анализа процессов рождения адронов используются функции распределения партонов (PDF). Функция распределения партонов $f_i(x;Q^2)$ применяется для описания вероятности нахождения в адроне i-го партона; x – параметр партона, определяющий долю импульса нуклона, которую несет партон; Q^2 – определяет квадрат 4-импульса, переданного партону при взаимодействии.

На основе функций распределения партонов (PDF) для свободных протонов были получены ядерно-модифицированные функции распределения партонов (nPDF), предназначенные для различных ядер [3]. Ключевой особенностью этих ядерно-модифицированных функций является то, что они учитывают нуклонный состав ядер и взаимодействия между нуклонами в ядре.

Цели и задачи. Целью данной работы является исследование особенностей рождения адронов в столкновениях ядер дейтерия ($d+d$) при энергиях $\sqrt{s_{NN}} = 13{,}5$ ГэВ и $\sqrt{s_{NN}} = 27$ ГэВ.

Для решения поставленной цели необходимо провести измерение факторов ядерной модификации адронов в дейтрон-дейтронных столкновениях при энергиях $\sqrt{s_{NN}} = 13{,}5$ ГэВ и $\sqrt{s_{NN}} = 27$ ГэВ. Расчеты [4] выполнены с использованием функций партонного распределения

(*) Д.С. Шапаев, dima.shapaev@yandex.ru

свободных нуклонов (PDF) [5-7] и ядерно-модифицированных функций партонного распределения (nPDF).

Методика исследования. Анализ рождения адронов в дейтрон-дейтронных столкновениях проведен в настоящей работе на основе данных моделирования, полученных с помощью программного пакета Pythia8 [8] при энергиях $\sqrt{s_{NN}} = 13{,}5$ ГэВ и $\sqrt{s_{NN}} = 27{,}0$ ГэВ.

Функции распределения партонов взяты из программного пакета LHAPDF6 [9], который подключается непосредственно к генератору столкновений Pythia8.

Для количественной оценки различия особенностей рождения адронов в дейтрон-дейтронных столкновениях с применением nPDF и с применением PDF используется фактор ядерной модификации R_{dd}.

Величина R_{dd} может быть вычислена с помощью следующего отношения:

$$R_{dd} = \frac{1}{N_{coll}} \cdot \frac{d^2N_{dd}/dp_T dy}{d^2N_{pp}/dp_T dy},$$

где в числителе находится инвариантный спектр адронов, полученный в столкновениях ядер дейтерия в диапазонах быстрот dy и поперечного импульса dp_T, который нормируется на количество бинарных нуклон-нуклонных столкновений N_{coll}, а в знаменателе – инвариантный спектр адронов, рождающихся в протон-протонных столкновениях в тех же диапазонах быстрот и поперечного импульса.

Результаты. На рис. 1 представлены факторы ядерной модификации адронов в зависимости от поперечного импульса p_T при энергиях $\sqrt{s_{NN}} = 13{,}5$ и $\sqrt{s_{NN}} = 27{,}0$ ГэВ в области быстрот $|y| < 3$ с применением разных nPDF.

На рис. 2 представлены факторы ядерной модификации адронов в зависимости от поперечного импульса p_T при энергиях $\sqrt{s_{NN}} = 13{,}5$ и $\sqrt{s_{NN}} = 27{,}0$ ГэВ в области быстрот $|y| < 3$ с применением разных PDF.

Как следует из представленных рисунков, факторы ядерной модификации адронов остаются близкими к единице на всем исследуемом промежутке по поперечному импульсу, как с использованием PDF, так и с использованием nPDF.

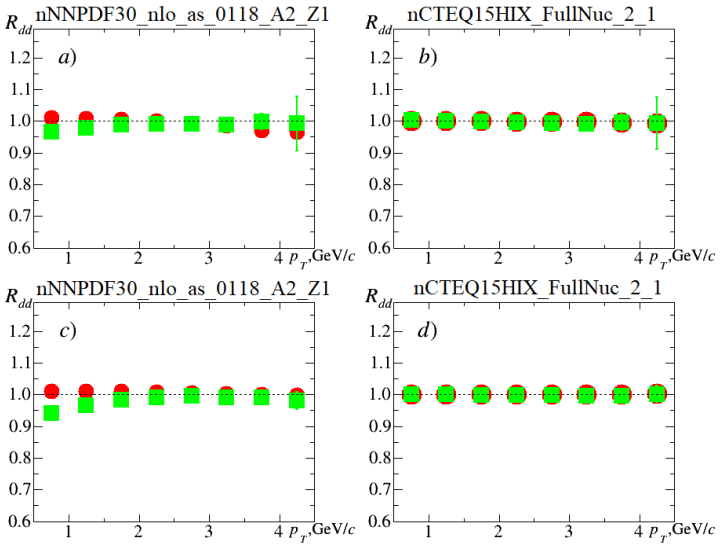


Рис. 1. Факторы ядерной модификации J/ψ (●), π^0 (■) в $d + d$ столкновениях при энергиях $\sqrt{s_{NN}} = 13{,}5$ ГэВ (*a*-*b*) и $\sqrt{s_{NN}} = 27$ ГэВ (*c*-*d*) в зависимости от поперечного импульса p_T в области быстрот $|y| < 3$ с применением nPDF (названия функций представлены над графиками). Вертикальными отрезками показаны статистические неопределенности

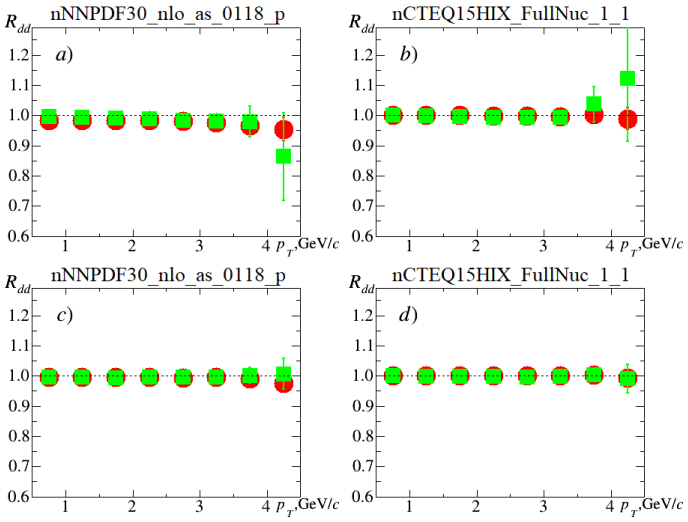


Рис. 2. Факторы ядерной модификации J/ψ (●), π^0 (■) в $d + d$ столкновениях при энергиях $\sqrt{s_{NN}} =$ 13,5 ГэВ (*a*-*b*) и $\sqrt{s_{NN}} = 27$ ГэВ (*c*-*d*) в зависимости от поперечного импульса p_T в области быстрот $|y| < 3$ с применением PDF (названия функций представлены над графиками). Вертикальными отрезками показаны статистические неопределенности

Выводы. В настоящей работе рассчитаны факторы ядерной модификации адронов в $d + d$ столкновениях при энергиях $\sqrt{s_{NN}} = 13{,}5$ и $\sqrt{s_{NN}} = 27{,}0$ ГэВ в зависимости от поперечного импульса в области быстрот $|y| < 3$ с использованием nPDF и с использованием PDF. Значения факторов ядерной модификации адронов находятся в пределах единицы на всем рассматриваемом промежутке по поперечному импульсу, что указывает на отсутствие ядерных эффектов в дейтрон-дейтронных столкновениях при рождении рассматриваемых частиц.

Работа выполнена в рамках Государственного задания на проведение фундаментальных исследований (код темы FSEG-2025-0009).

ЛИТЕРАТУРА

1. Ladygin V.P. Spin Physics Detector at NICA // JPS Conf. Proc. – 2022. – Vol. 37. – P. 011012.
2. Kekelidze V. et al. NICA heavy-ion collider at JINR (Dubna). Status of accelerator complex and first physics at NICA // J. Phys.: Conf. Ser. – 2023. – Vol. 2586. – № 1. – P. 012013.
3. Ethier J.J., Nocera E.R. Parton distributions in nucleons and nuclei // Ann. Rev. Nucl. Part. Sci. – 2020. – Vol. 70. – Pp. 43-76.
4. Шапаев Д.С., Бердников Я.А. Рождение прямых фотонов во взаимодействиях ядер дейтерия при энергиях 13,5 и 27,0 ГэВ // Научно-технические ведомости СПбГПУ. Физико-математические науки. – 2025. – Т. 17. – № 4. – С. 138-146.
5. Khalek R. A. et al. nNNPDF3.0: evidence for a modified partonic structure in heavy nuclei // Eur. Phys. J. C. – 2022. – Vol. 82. – № 6. – P. 507.
6. Helenius I., Walt M., Vogelsang W. NNLO nuclear parton distribution functions with electroweak-boson production data from the LHC // Phys. Rev. D. – 2022. – Vol. 105. – № 9. – P. 094031.
7. Segarra E.P. et al. Extending nuclear PDF analyses into the high-x, low-Q^2 region // Phys. Rev. D. – 2021. – Vol. 103. № 11. – P. 114015.
8. Bierlich C. et al. A comprehensive guide to the physics and usage of PYTHIA 8.3 // SciPost Phys. Codeb. – 2022. – Vol. 2022. – P. 315.
9. Buckley A. et al. LHAPDF6: parton density access in the LHC precision era // Eur. Phys. J. C. – 2015. – Vol. 75. – P. 132.

УДК 532.517

Д.В. Круашвили, А.А. Лобанов, Я.А. Бердников
Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого(*)

РОЖДЕНИЕ ЗАРЯЖЕННЫХ ПИОНОВ В СТОЛКНОВЕНИЯХ ПРОДОЛЬНО ПОЛЯРИЗОВАННЫХ ПРОТОНОВ ПРИ ЭНЕРГИЯХ $\sqrt{S_{pp}}$ = 200 И 510 ГЭВ

Введение. На основе анализа результатов проведенного нами моделирования в программном пакете Pythia8 в работе представлено исследование двойных продольных спиновых асимметрий в рождении пионов, в столкновениях продольно поляризованных протонов. Был проведен сравнительный анализ с экспериментальными данными, полученными на детекторах PHENIX и STAR. Рождение пионов моделировалось при энергиях $\sqrt{S_{pp}} = 200$ ГэВ и 510 ГэВ.

Изучение двойных продольных спиновых асимметрий (DLSA) при рождении пионов, может быть использовано для анализа вклада поляризации кварков и глюонов в полный спин протона. По последним данным, вклад кварков в спин протона составляет лишь 1/3 от полного спина [1]. Оставшаяся часть спина определяется поляризацией глюона и угловыми моментами кварков и глюонов.

Полный спин протона может быть разложен на кварковые и глюонные вклады [2]:

$$S_p = \frac{1}{2}\cdot\ \Delta\Sigma + \Delta G + L_q + L_g$$

где $\Delta\Sigma = \sum_{q=u,d,s}\int_0^1 \Delta q(x,Q^2)dx$ – вклад из распределений спиральности кварков;

$\Delta G = \int_0^1 \Delta g(x,Q^2)dx$ – вклад из распределений спиральности глюонов;

L_q, L_g – представляют собой вклады орбитальных угловых моментов кварков и глюонов;

$\Delta q(x,Q^2), \Delta g(x,Q^2)$ – распределения продольно поляризованных кварков и глюонов.

Изучение различных спиновых асимметрий является одним из способов определения партонных распределений (PDF). Для изучения продольно поляризованных PDF (helicity) измеряется двойная спиновая продольная асимметрия (DLSA) [3].

Цели и задачи. Целью данной работы является изучение DLSA при энергиях 200 и 510 ГэВ с помощью моделирования на языке C++ с использованием Pythia8 и LHAPDF.

В задачи работы входит получение DLSA для заряженных пионов и сравнение их с экспериментальными данными.

Методика исследования. DLSA в столкновениях продольно поляризованных протонов определяется формулой [4]:

$$A_{LL} = \frac{\mathrm{d}\sigma^{++} - \mathrm{d}\sigma^{+-}}{\mathrm{d}\sigma^{++} + \mathrm{d}\sigma^{+-}} = \frac{\mathrm{d}\Delta\sigma}{\mathrm{d}\sigma}$$

где $\sigma^{++}(\sigma^{+-}) -$ сечения процессов столкновения протонов с со направленной (и противоположно направленной) спиральностями; $\Delta\sigma$ и σ – сечения рождения в случае поляризованных и неполяризованных протонов. Сечение рождения адрона в протон-протонном столкновении можно записать в виде свертки партонных функций распределения (PDF) и функции фрагментации [5]:

$$\mathrm{d}\sigma(\mathrm{d}\Delta\sigma)(\mathrm{p}+\mathrm{p}\to\mathrm{A}+\mathrm{X}) =$$

$$= \sum_{\mathrm{a,b,c}}\int \mathrm{dx}_a\cdot \mathrm{f}_a(\mathrm{x},\mathrm{Q}^2)\big(\Delta \mathrm{f}_a(\mathrm{x},\mathrm{Q}^2)\big)\int \mathrm{dx}_\mathrm{b}\cdot \mathrm{f}_b(\mathrm{x},\mathrm{Q}^2)\big(\Delta \mathrm{f}_b(\mathrm{x},\mathrm{Q}^2)\big)\int \mathrm{dz}\cdot \mathrm{F}_\mathrm{c}^\mathrm{A}(\mathrm{z},\mathrm{Q}^2)\cdot\ \sigma^{ab\to cd}$$

a, b – партоны (кварки, глюоны) сталкивающихся протонов, c, d – партоны, образовавшиеся

(*) Д.В. Круашвили, kruashvili.dv@edu.spbstu.ru

в результате процесса $a + b \to c + d$. $\mathrm{x}_a, \mathrm{x}_b$ – доли импульсов партонов a, b по отношению к исходным протонам:

$$\mathrm{x}_{a,b} = \frac{2\mathrm{p}_{a.b}}{\sqrt{s}}$$

$\mathrm{f}_a, \mathrm{f}_b$ $(\Delta\mathrm{f}_a, \Delta\mathrm{f}_b)$ – функции распределения партонов a, b в неполяризованных (поляризованных) протонах соответственно.

$F_i^A(z)$ – функция фрагментации – вероятность того, что партон i фрагментирует в адрон A. z – доля импульса партона i по отношению к импульсу адрона A: $\mathrm{z} = \frac{\mathrm{p}_i}{p_A}$.

Q^2 – характерный энергетический масштаб жесткого партонного подпроцесса, в нашей работе в качестве него брали квадрат поперечного импульса адрона A.

$\sigma^{ab\to cd}$ – амплитуда подпроцесса партонного взаимодействия [6].

Сама по себе Pythia8 не позволяет учитывать эффекты поляризации. Для учета в данной работе использовались поляризованные партонные функции распределения (PDF) из библиотеки LHAPDF [7]. Задав необходимые начальные параметры в Pythia8 и подключив PDF для продольной поляризации, генерировали протон-протонные столкновения. Наша модель заключается в том, что мы отбирали партоны a, b, затем, используя Particle::Status (параметр, который отвечает за информацию о входных и выходных из подпроцесса рассеяния частицах), мы отбирали партоны c, d, такие, которые в результате адронизации образуют заряженные пионы. Далее на частицы a, b, c, d накладывались кинематические ограничения, связанные с областью определения PDF и функций фрагментации. В результате мы получаем всю необходимую информацию (набор нужных нам партонов, определенные PDF и функции фрагментации) для расчета сечения и последующего нахождения DLSA.

Полученные результаты. На рис. 1 представлены значения DLSA для π^+, π^- в зависимости от переменной $x_T = \frac{p_T}{2\sqrt{s}}$. Видно, что асимметрии, полученные с помощью моделирования в Pythia8, с точностью до погрешности совпадают с экспериментальными данными, полученными на PHENIX [8] при энергии 510 ГэВ.

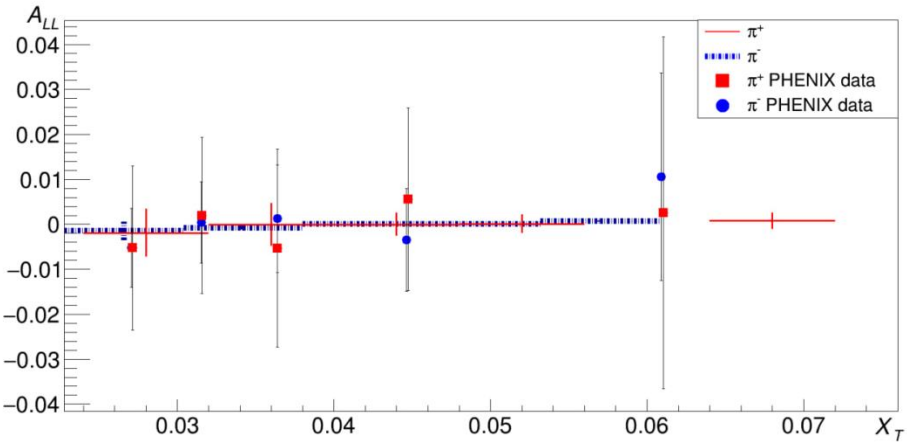


Рис. 1. Графики зависимости двойной продольной спиновой асимметрии от $x_T = \frac{p_T}{2\sqrt{s}}$ для заряженных пионов при энергии 510 ГэВ. Сплошной линией отображены DLSA, рассчитанные в Pythia8 для положительных пионов, пунктирной линией – для отрицательных. Прямоугольниками отмечены экспериментальные данные DLSA PHENIX для положительно заряженных пионов, кружками – для отрицательно заряженных

На рис. 2 представлены значения DLSA для π^+, π^- в зависимости от переменной x_T при энергии 200 ГэВ. Из рисунка следует, что при энергии 200 ГэВ полученные данные так же хорошо совпадают с экспериментальными [9].

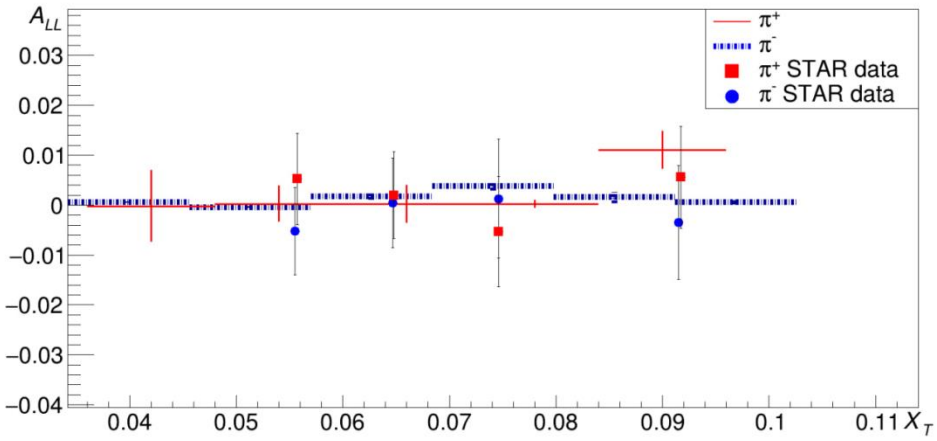


Рис. 2. Графики зависимости двойной продольной спиновой асимметрии от $x_T = \frac{p_T}{2\sqrt{s}}$ для заряженных пионов при энергии 200 ГэВ. Все обозначения такие же, как и на рис. 1.

Заключение. В работе приведены результаты анализа двойных продольных спиновых асимметрий в рождении заряженных пионов в протон-протонных соударениях с функциями партонного распределения NNPDFpol11_100 и NNPDF31_nlo_as_0118 и функциями фрагментациями для соответствующих адронов. Получены результаты, которые совпадают с экспериментальными данными PHENIX и STAR. Преимущества нашей модели заключаются в том, что она позволяет определять DLSA при рождении разных частиц при различных энергиях, в то время как экспериментальные данные в настоящее время очень ограничены как по энергии, так и по типам, рождаемым частиц.

Полученные нами результаты могут быть полезны для проведения экспериментов SPD на ускорителе NICA, целью которого является проведение экспериментов по изучению спиновой структуры нуклонов и других процессов, зависящих от спина, путем измерений асимметрий в процессе процессы рождения π^-, π^+ частиц в столкновениях поляризованных протонов.

Работа выполнена в рамках Государственного задания на проведение фундаментальных исследований (код темы FSEG-2025-0009).

ЛИТЕРАТУРА

1. J. Ashman et. al., A measurement of the spin asymmetry and determination of the structure function g1 in deep inelastic muon-proton scattering, // Physics Letters. – 1988. – Vol. 206 (2). – P. 364.
2. Тимошин Е.С, Тимошин С.И. Извлечение поляризационных структурных функций из асимметрий в глубоконеупругом рассеянии с участием нейтрино. // Письма в ЭЧАЯ. 2014. Т.11. №2. С.153-161.
3. В.А. Салеев, А.В.Шипилова Двойные продольные спиновые асимметрии в прямом рождении фотонов на коллайдере NICA // Письма в ЭЧАЯ. 2023. Т.20, № 3(248). С.417–421
4. R.Kh.Muradov, A. I. Akhmedov,and R.M.Burdjaliev. Polarization Effects in Proton–Proton Collisions. // Baku State University. – 2002. – Vol. 65 (7). – P. 1352–1358
5. Daniel de Florian and Rodolfo Sassot Global analysis of fragmentation functions for pions and kaons and their uncertainties. // PHYSICAL REVIEW. – 2007. – Vol. 5 (2). – P. 13-18.
6. Cedran J. Bomhof and Piet J. Mulders. Gluonic pole cross sections and single spin asymmetries in hadron-hadron scattering. // Journal of High Energy Physics. – 2007.– Vol. 10 (3). – P. 224-245.
7. A.Buckley, J.Ferrando LHAPDF6: parton density access in the LHC precision era // - 2014. - Eur.Phys. – Vol. 75. – P.132.
8.PHENIX Collaboration. Measurement of charged pion double spin asymmetries at midrapidity in longitudinally polarized p+p collisions at √ s = 510 GeV. // Phys. Rev. – 2020. – Vol. 102. – P. 321-340.
9. STAR Collaboration. Double Longitudinal Spin Asymmetries of Inclusive Charged Pion Production in Polarized p+ p Collisions at 200 GeV. // AIPConf.Proc. – 2007. – Vol. 915. – P.355-358.

УДК 539.1.078

Г.В. Филатов, П.В. Кравченко, П.А. Кравцов, Б.В. Бочин
Петербургский институт ядерной физики им. Б.П. Константинова НИЦ «Курчатовский институт» (*)

ПРЕЦИЗИОННОЕ ИЗМЕРЕНИЕ ПОЛОЖЕНИЯ КАТОДНЫХ ПРОВОЛОК В СИСТЕМЕ ПРОПОРЦИОНАЛЬНЫХ КАМЕР ВЫСОКОГО ДАВЛЕНИЯ В ЭКСПЕРИМЕНТЕ ПО ИЗМЕРЕНИЮ ЗАРЯДОВОГО РАДИУСА ПРОТОНА В УПРУГОМ ЭЛЕКТРОН-ПРОТОННОМ РАССЕЯНИИ

Зарядовый радиус протона (R_p) является важной фундаментальной постоянной, которая длительное время считалась точно определенной и неизменной. Ситуация изменилась после прецизионного измерения энергии перехода 2S-2P в мюонном водороде, проведеннго коллаборацией CREMA с относительной погрешностью $\sim 10^{-5}$. Результаты стали основополагающими для появления так называемой “Загадки радиуса протона” (proton radius puzzle). Проблема радиуса протона широко обсуждаемая проблема внутри стандартной модели, проявляется в расхождении на >5 стандартных отклонений между значениями, полученными из измерений лэмбовского сдвига в мюонном водороде ($R_p = 0.84184(87)$ фм [1], $R_p = 0.84087(39)$ фм [2] в коллаборации CREMA) и упругого электрон-протонном рассеяния ($R_p = 0.879(5)_{stat}(6)_{syst}$ фм коллаборации A1 в Майнце [3] и $R_p = 0.875(10)$ фм в Jefferson Lab [4] [5, 12].

"Загадка радиуса протона" является одной из наиболее обсуждаемых проблем в научном сообществе, первые упоминания результаты можно найти, начиная с 2007 года [6]. Существует множество причин, по которым наблюдаемое расхождение экспериментальных данных может быть объяснено: существованием экзотичных пар частиц или различием во взаимодействии лептонов (нарушение лептонной универсальности и возможное появление физики за пределами Стандартной Модели) [7].

Для решения этой проблемы в Петербургском институте ядерной физики был предложен эксперимент PRES, направленный на прецизионное измерение R_p в процессе упругого ep-рассеяния с одновременной регистрацией электрона и протона отдачи. [8] Одновременная регистрация позволяет получить более полную информацию о процессе рассеяния и восстановить полную кинетику события. В ходе проведения эксперимента планируется получение значение R_p с относительной в 0.1% и абсолютной в 0.2% точностями. Именно эксперименты по рассеянию электрона и мюона на протоне в схожих условиях могут пролить свет на указанную проблему [9].

Основными элементами экспериментальной установки являются TPC (Time Projection Chamber – времяпроекционная камера), которая является активной водородной мишенью с возможностью регистрации протона отдачи и FT (Forward Tracker – трековая система), который был спроектирован для высокоточного измерения координат X и Y трека рассеянного электрона относительно линии пучка (рис. 1). FT представляет из себя набор из 8 высокоточных катодно-стриповых камер (CSC). TPC наполнена сверхчистым водородом под давлением свыше 20 бар, а объем FT включает в себя смесь газов Ar + 2% CH_4. Важной особенностью установки является CSC, которая позволяет соблюсти абсолютную линейную шкалу с точностью ~ 0.02% [8].

(*) Г.В. Филатов, filatovgwork@gmail.com

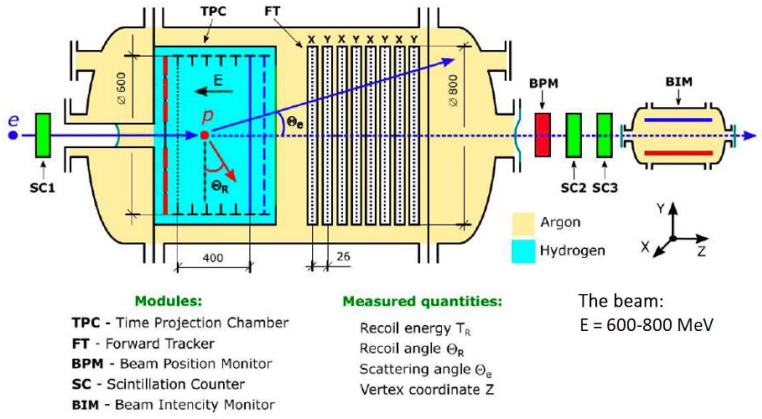


Рис. 1. Схема экспериментальной установки PRES

Для обеспечения точного восстановления координат электронного трека разрабатывается комплексная система измерения положения катодных проволок CSC (рис. 2). Данная система включила в себя систему цифровых микроскопов, механизированную каретку, которая, двигаясь по рельсам позволяет перемещать микроскопы относительно плоскости CSC, а также систему из прецизионных цифровых линеек с приборной погрешностью в 3 мкм, которая помогает фиксировать положение каретки и самих микроскопов. Для управления данной системой используется программа LabView [10], которая помогает управлять электроникой и собирать полученные данные.

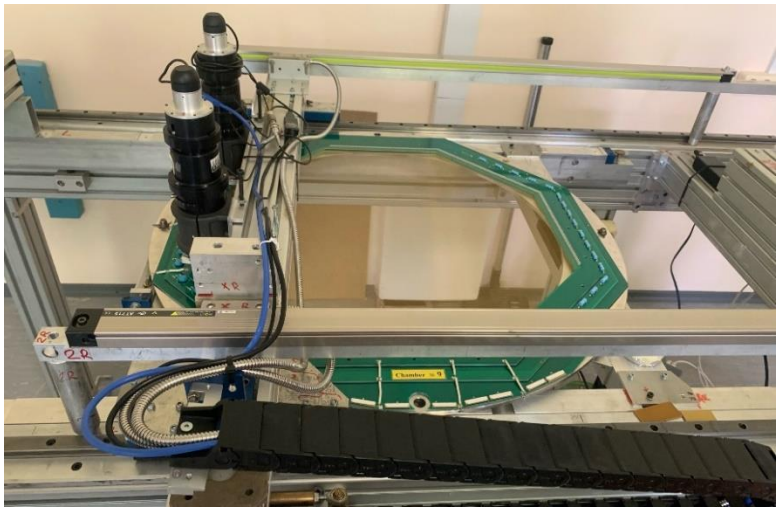


Рис. 2. Фотография системы микроскопов и цифровых линеек

В свою очередь, при дальнейшей обработке снимков микроскопов основная информация о положении катодных проволочек извлекается из усредненного профиля фотографии с помощью разработанного скрипта программного пакета ImageJ [11], способного провести калибровку шкалы координат и извлечь необходимые профили изображений. Можно отметить, что распределение профиля проволочки можно описать нормальным распределением в сумме с полиномом $1^{-й}$ степени для описания фона. Именно параметры σ (которые могут дать оценку попадания проволочки в фокус микроскопа, а также ее поперечные размеры) и x_0 определяют основной вид профиля.

В ходе анализа параметров профилей проволочек применялись алгоритмы кластеризации и усреднения координат положения отдельных проволочек, что стало возможно в силу позиционирования катодов относительно нескольких снимков, а также

алгоритмы оптимизации параметров фитирования профилей и калибровки, что позволило добиться наибольшей точности измерения и уменьшения погрешностей.

В результате удалось проанализировать распределение стрипов (объединений катодных проволочек по 5 единиц) в CSC и заключить, что погрешность определения отдельных стрипов составляет величины до 4.5 мкм и отклонение от линейной шкалы в отдельных случаях может составлять величины до 31 мкм, при этом сигма отклонения от линейной шкалы составило допустимые 7.1 мкм (рис. 3).

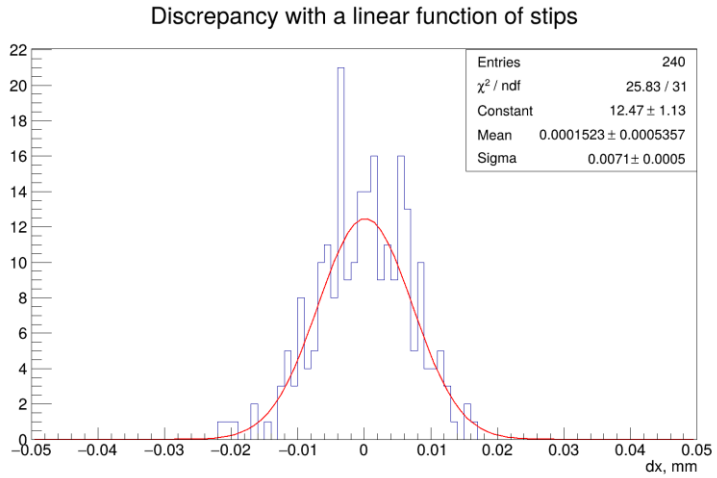


Рис. 3. График отклонения положения проволочки, от линейной функции аппроксимации

ЛИТЕРАТУРА

1. Pohl R., Antognini A., Nez F., Amaro F.D., Biraben F., Cardoso J.M., Covita D.S., Dax A., Dhawan S., Fernandes L.M., Giesen A. The size of the proton // Nature. – 2010. – Vol. 466 (7303). – P. 213–216.
2. Antognini A., Nez F., Schuhmann K., Amaro F.D., Biraben F., Cardoso J.M., Covita D.S., Dax A., Dhawan S., Diepold M., Fernandes L.M. Proton structure from the measurement of 2S-2P transition frequencies of muonic hydrogen // Science. – 2013. – Vol. 339 (6118). – P. 417–420.
3. Bernauer J.C., Achenbach P., Ayerbe Gayoso C., Böhm R., Bosnar D., Debenjak L., Distler M.O., Doria L., Esser A., Fonvieille H., Friedrich J.M. High-precision determination of the electric and magnetic form factors of the proton // Physical Review Letters. – 2010. – Vol. 105 (24). – P. 242001.
4. Zhan X., Allada K., Armstrong D.S., Arrington J., Bertozzi W., Boeglin W., Chen J.P., Chirapatpimol K., Choi S., Chudakov E., Cisbani E. High-precision measurement of the proton elastic form factor ratio μpGE/GM at low Q2 // Physics Letters B. – 2011. – Vol. 705 (1–2). – P. 59–64.
5. Belostotski S., Sagidova N., Vorobyev A. Proton radius reconstruction from simulated electron-proton elastic scattering cross sections at low transfer momenta // arXiv preprint. – 2019. – arXiv:1903.04975.
6. Belushkin M.A., Hammer H.W., Meißner U.G. Dispersion analysis of the nucleon form factors including meson continua // Physical Review C. – 2007. – Vol. 75 (3). – P. 035202.
7. Meißner U.G. The proton radius and its relatives – much ado about nothing? // Journal of Physics: Conference Series. – 2023. – Vol. 2586 (1). – P. 012006.
8. Vorobyev A.A., Vasilyev A.A., Belostotsky S.L., Bochin B.V., Dzyuba A.A., Gavrilov G.E., Grachev V.T., Ivshin K.A., Inglessi A.G., Kravchenko P.V., Kravtzov P.A. Project for precision measurement of the proton charge radius in an electron-proton scattering experiment // High Energy Physics Division. Main Scientific Activities 2013–2018. – 2019. – P. 316–325.
9. Jentschura U.D. Proton radius: A puzzle or a solution!? // Journal of Physics: Conference Series. – 2022. – Vol. 2391 (1). – P. 012017.
10. Kodosky J. LabVIEW // Proceedings of the ACM on Programming Languages. - 2020. - Vol. 4 (HOPL). - P. 1-54.
11. Collins T.J. ImageJ for microscopy // Biotechniques. - 2007. - Vol. 43 (sup1). - P. S25-S30.
12. Walcher T. The Lamb shift in muonic hydrogen and the electric rms radius of the proton // arXiv preprint. - 2023. - arXiv:2304.07035.

УДК 539.12

С.Д. Комарова, Е.В. Банников, Д.О. Котов
Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого(•)

ПЛОСКОСТЬ РЕАКЦИИ В p+Au СТОЛКНОВЕНИЯХ ДЛЯ ИЗМЕРЕНИЯ ЭЛЛИПТИЧЕСКОГО ПОТОКА

Введение. Одной из основных наблюдаемых, характеризующих коллективные эффекты на начальной стадии образования и расширения кварк-глюонной плазмы (КГП), является азимутальная анизотропия распределения частиц [1]. Измерение эллиптического потока (v_2), являющегося проявлением коллективной динамики в столкновениях ядер, позволяет определить механизмы образования адронов относительно плоскости реакции, задаваемой направлениями вектора прицельного параметра столкновения ($\vec{b}$) и оси пучка. Ввиду невозможности измерения направления $\vec{b}$ напрямую в эксперименте, необходимый для измерения v_2 азимутальный угол плоскости реакции оценивается в каждом событии по азимутальным углам зарегистрированных заряженных частиц (φ) [2]. Для этой оценки измеряется плоскость события, которую формируют рассчитанные по азимутальным углам заряженных частиц векторы потока $\vec{Q}(\varphi)$ и ось пучка [2]. Неполный охват по азимутальному углу различных детекторных подсистем обуславливает неоднородность азимутального распределения плоскости события. Посредством осуществления процедур коррекции исходной анизотропии удается восстановить истинное азимутальное распределение плоскости реакции. Степень соответствия между истинным азимутальным распределением плоскости реакции и откорректированным азимутальным распределением плоскости события учитывается с помощью поправки — разрешения плоскости события (*Res*) [3].

Цели и задачи работы. Целью работы является восстановление истинной плоскости реакции в столкновениях p+Au для измерения v_2 нейтральных пионов. В задачи работы входит калибровка азимутального распределения плоскости события в детекторных подсистемах экспериментальной установки PHENIX, используемых для определения значений *Res*.

Методика измерения. v_2 количественно определяется вторым коэффициентом разложения Фурье функции распределения рожденных частиц, который равен среднему косинусу двойного азимутального угла вылета частиц по отношению к азимутальному углу плоскости реакции (ψ_{RP}) [4]. Реконструированный угол плоскости события (ψ_{EP}) отличается от ψ_{RP} на величину $\Delta\psi$, которая варьируется от одного события к другому. Таким образом, значение ψ_{EP} связано с ψ_{RP} соотношением $\psi_{EP} = \psi_{RP} - \Delta\psi$.

Для учета поправки $\Delta\psi$ производятся процедуры корректировки исходного анизотропного распределения плоскости события: центрирование и выполаживание [5]. Процедура центрирования заключается в смещении компонент вектора потока $(Q_{2,x}), (Q_{2,y})$ путём вычитания из полученных величин средних значений $\langle sin2\varphi\rangle$,$\langle cos2\varphi\rangle$. В процедуре выполаживания применяется преобразование Фурье с использованием 2-ой и 4-ой гармоник с целью разложения азимутального распределения плоскости события на синусные и косинусные компоненты $sin2\psi_{EP}$, $cos2\psi_{EP}$, которые и подвергаются корректировке.

Различные детекторные подсистемы позволяют получить несколько независимых оценок ψ_{EP}, которые используются для реконструкции ψ_{RP}. Для опеределения величины *Res* был применен метод трех подсобытий с использованием измеренных ψ_{EP} в детекторных подсистемах FVTXS, BBCS и CNT. Каждый из этих детекторов имеет различный охват по

(*) С.Д. Комарова, snezha.komarova@gmail.com

псевдобыстроте, которая зависит от полярного угла между траекторией зарегистрированной частицы и осью пучка, что оказывает влияние на измерение ψ_{EP} [2].

Результаты. На рис. 1 а) и б) представлены азимутальные распределения плоскости события для детекторов FVTXS и BBCS. Из полученных распределений видно, что исходная анизотропия выражена более отчетливо в случае BBCS по сравнению с FVTXS. Это может быть обусловлено меньшим охватом по псевдобыстроте детектора BBCS, что приводит к меньшей множественности зарегистрированных частиц по сравнению с FVTXS. С помощью процедуры центрирования удалось устранить основные неравномерности в азимутальном распределении плоскости события. Процедура выполаживания позволила избавиться от остаточного эффекта «волнистости». Так, для FVTXS конечное распределение стало изотропным, а в BBCS наблюдаются небольшие флуктуации. С целью дальнейших корректировок распределения BBCS может быть применена процедура выполаживания более высоких гармоник и корректировка других φ-зависимых величин, таких как заряд в башнях BBCS. Предполагается, что данные уточнения улучшат качество оценки значений v_2.

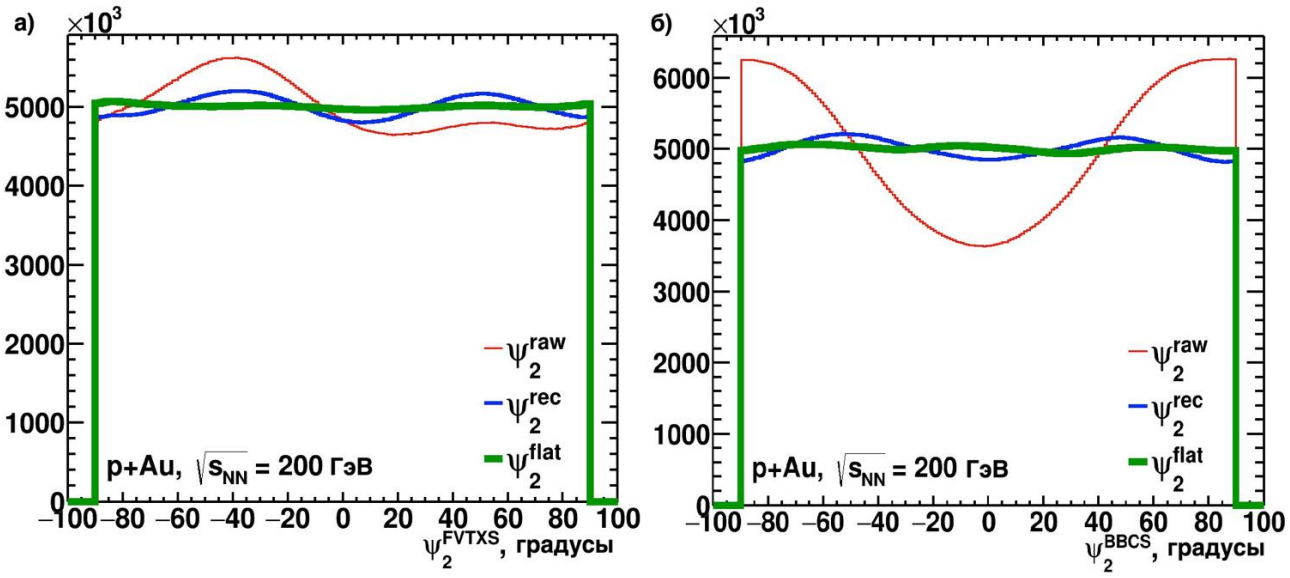


Рис. 1. Азимутальные распределения плоскости события детектора FVTXS а) и детектора BBCS б), полученные в столкновениях p+Au при энергии $\sqrt{s_{NN}}$ =200 ГэВ

Значения *Res* в 7 диапазонах по центральности (0-5%, 5-10%, 10-20%, 20-30%, 30-40%, 40-50%, 50-60%), полученные для детекторов FVTXS и BBCS, представлены на рис. 2. Круглыми маркерами показаны значения для BBCS, а для FVTXS – квадратными. Из полученных зависимостей видно, что величина $Res(\Psi_2^{FVTXS})$ оказывается выше во всем диапазоне по центральности, что свидетельствует о более высокой точности восстановления плоскости реакции [6]. Это может быть связано с меньшим зазором по псевдобыстроте между FVTXS и CNT по сравнению с BBCS и CNT, что оказывает влияние на угловые корреляции между детекторами. Кроме того, зависимость $Res(\Psi_2^{BBCS})$ демонстрирует более монотонное снижение по сравнению с $Res(\Psi_2^{FVTXS})$, что обусловлено наличием непотоковых эффектов [7] при регистрации заряженных адронов в детекторе FVTXS, приводящих к увеличению значений $Res(\Psi_2^{FVTXS})$ в периферических столкновениях. Большие значения статистических неопределенностей $Res(\Psi_2^{FVTXS})$ в нецентральных столкновениях свидетельствуют о низкой точности измерения значений v_2 в данном диапазоне по центральности.

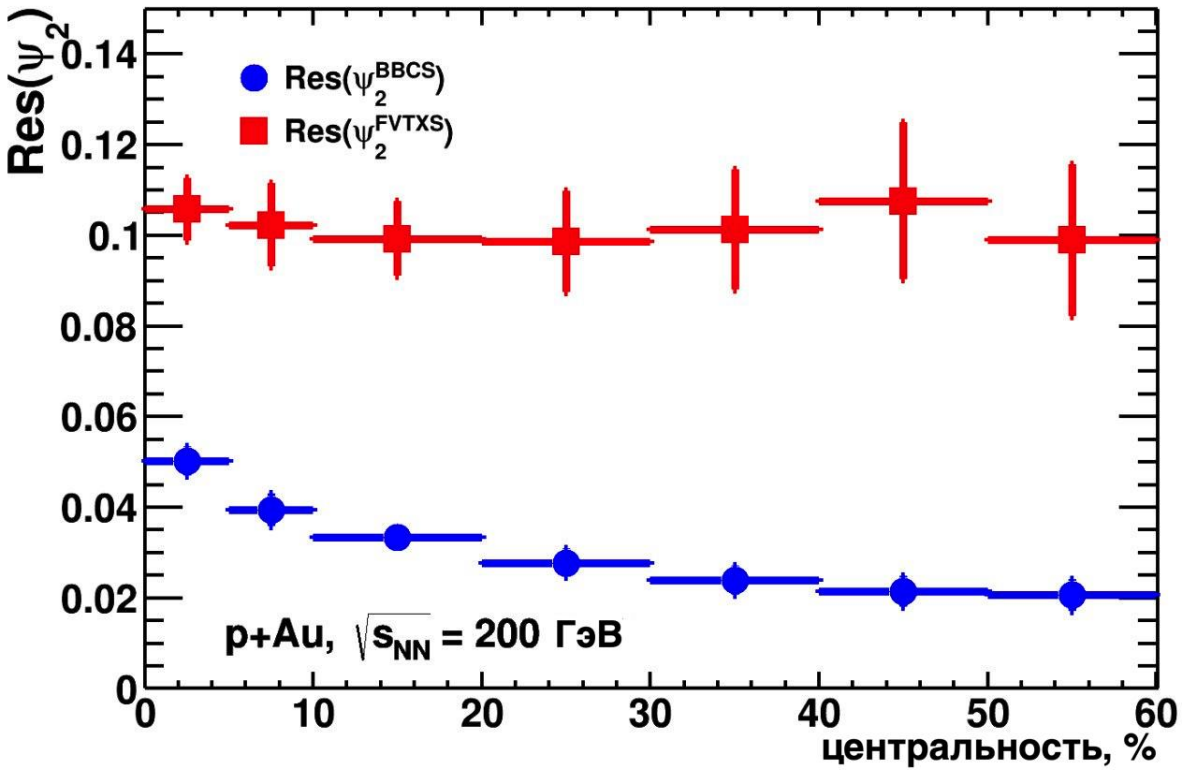


Рис. 2. Зависимость разрешения плоскости события от центральности для детекторных подсистем FVTXS и BBCS

Выводы. В настоящей работе было восстановлено истинное азимутальное распределение плоскости реакции посредством измерения азимутального распределения плоскости события в детекторных подсистемах FVTXS и BBCS. Показано, что эффективность восстановления истинной плоскости реакции выше для детектора FVTXS по сравнению с BBCS.

Установлено, что значения $Res(\Psi_2^{FVTXS})$ оказываются выше, чем $Res(\Psi_2^{BBCS})$, во всем диапазоне по центральности, что говорит о более высокой точности измерения значений v_2 с помощью детектора FVTXS по сравнению с BBCS. Из полученного результата следует, что максимальная степень восстановления плоскости реакции наблюдается в самых центральных столкновениях p+Au (0-5%).

ЛИТЕРАТУРА

1. Voloshin S., Zhang Y. Flow study in relativistic nuclear collisions by Fourier expansion of azimuthal particle distributions // Z. Phys. C – 1996. – Vol. 70. – P. 665-671.
2. Ollitrault J., Borghini N. Reconstructing azimuthal distributions in nucleus–nucleus collisions // Phys. Rev. C. – 2000. – Vol. 63. – P.054906.
3. Poskanzer A., Voloshin S. Methods for analyzing anisotropic flow in relativistic nuclear collisions // Phys. Rev. C. – 1998. – Vol. 58. – P. 1671-1678.
4. Ollitrault J., Borghini N., Mai Dinh P. Flow analysis from multiparticle azimuthal correlations // Phys. Rev. C. – 2001. – Vol. 64. – P.054901.
5. Ollitrault J., Borghini N., Mai Dinh P. Effect of flow fluctuations and nonflow on elliptic flow methods // Phys. Rev. C. – 2009. – Vol. 80. – P.014904.
6. Adare A. et al. (PHENIX Collab.) Measurements of azimuthal anisotropy and charged-particle multiplicity in d + Au collisions at $\sqrt{s_{NN}}$ = 200, 62.4, 39, and 19.6 GeV// Phys. Rev. C. – 2017. – Vol. 96. – P.064905.
7. Allen M. et al. (PHENIX Collab.) PHENIX inner detectors // Nucl. Instrum. Meth. A. – 2003. – Vol. 499. - P. 549-559.

УДК 539.12

Д.А. Трушков, Д.М. Ларионова, Я.А. Бердников
Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого(*)

МЕТОДЫ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ЦЕНТРАЛЬНОСТИ ЯДЕРНЫХ СТОЛКНОВЕНИЙ И ИХ ПРИМЕНИМОСТЬ К ЭКСПЕРИМЕНТУ SPD

Введение. Одной из основных геометрических характеристик начальных условий ядро-ядерного столкновения является центральность, которая характеризует степень перекрытия сталкивающихся ядер [1].

Центральность столкновения может быть теоретически вычислена с помощью прицельного параметра, который характеризует кратчайшее расстояние между центрами сталкивающихся ядер в поперечной плоскости. Однако, величина прицельного параметра не может быть измерена напрямую в эксперименте, поэтому в экспериментах PHENIX [2], STAR [3] и ALICE [4] центральность столкновения косвенно определяют по множественности рожденных заряженных частиц. В рамках эксперимента SPD [5] будут реализованы столкновения системы Al+Al при $\sqrt{s_{NN}} = 4$ ГэВ, характеризующиеся малыми множественностями заряженных частиц, поэтому в данном случае измерение центральности стандартным методом может оказаться недостаточно точным. В связи с этим, исследование методик определения центральности и их применимость к определению центральности в ядро-ядерных столкновениях на SPD является актуальной задачей.

Цели и задачи работы. Целью данной работы является рассмотрение существующих методик измерения центральности ядро-ядерных столкновений. Задача работы заключается в оценке применимости изученных подходов для определения центральности в условиях малых множественностей в эксперименте SPD, расположенном на коллайдере NICA. Все результаты, представленные в данной работе, получены авторами лично.

Методика измерения. Центральность ядро-ядерного столкновения определяется формулой

$$c(b) = \frac{1}{\sigma_{total}} \int_0^b \frac{d\sigma}{db'} db',$$

где b — прицельный параметр, σ_{total} — полное сечение взаимодействия двух сталкивающихся ядер; $\frac{d\sigma}{db'}$ — дифференциальное сечение взаимодействия, зависящее от прицельного параметра. Величины σ_{total} и $\frac{d\sigma}{db'}$ могут быть выражены через прицельный параметр с помощью оптической теоремы [6], а также в рамках модели Глаубера [6]. Однако, величина прицельного параметра не может быть измерена напрямую в эксперименте, поэтому центральность столкновения принято определять косвенно по множественности рожденных заряженных частиц [1, 7-8]. Данный подход основан на предположении (подтверждаемом моделью Глаубера), что прицельный параметр линейно связан с множественностью заряженных частиц.

Результаты. Было проведено моделирование столкновений Au+Au при $\sqrt{s_{NN}} = 200$ ГэВ и Al+Al $\sqrt{s_{NN}} = 4$ ГэВ с помощью пакета Pythia/Angantyr [9], использующей стандартную модель Глаубера.

На рис. 1 представлены графики зависимостей прицельного параметра от множественности рожденных заряженных частиц (а) и дифференциального сечения взаимодействия зарегистрированных частиц от множественности (б) для системы столкновений Au+Au при $\sqrt{s_{NN}} = 200$ ГэВ.

(*) Д.А. Трушков, trushkoov@yandex.ru

Зависимость $b'(M_{ch})$ может быть аппроксимирована линейной функцией $b' = p_1 \cdot M_{ch} + p_2$ с параметрами $p_1 = (-170 \pm 12) \cdot 10^{-4}$, $\delta_1 = 0{,}07$, $p_2 = 12{,}6 \pm 0{,}4$, $\delta_2 = 0{,}03$, а зависимость $\frac{d\sigma}{db'}(M_{ch})$ — квадратичной функцией $\frac{d\sigma}{db'} = p_3 \cdot M_{ch}^2 + p_4 \cdot M_{ch} + p_5$ с параметрами $p_3 = (-537 \pm 292) \cdot 10^{-6}$, $\delta_3 = 0{,}54$, $p_4 = (-532 \pm 176) \cdot 10^{-4}$, $\delta_4 = 0{,}33$, $p_5 = 68{,}6 \pm 1{,}4$, $\delta_5 = 0{,}02$.

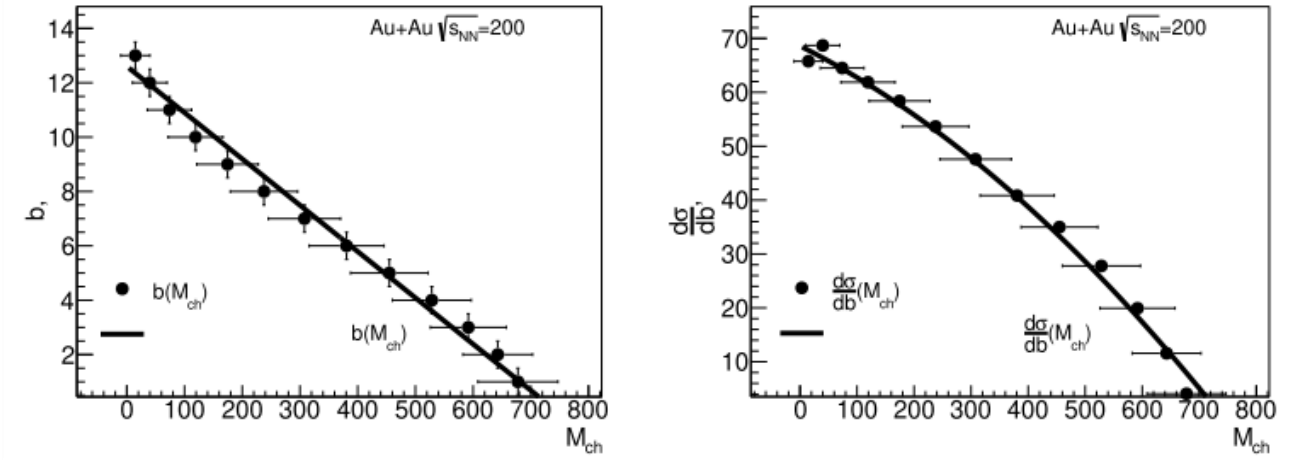


Рис. 1. Графики зависимостей для Au+Au при $\sqrt{s_{NN}} = 200$ ГэВ: а) прицельного параметра от множественности заряженных частиц; б) дифференциального сечения по прицельному параметру от множественности заряженных частиц

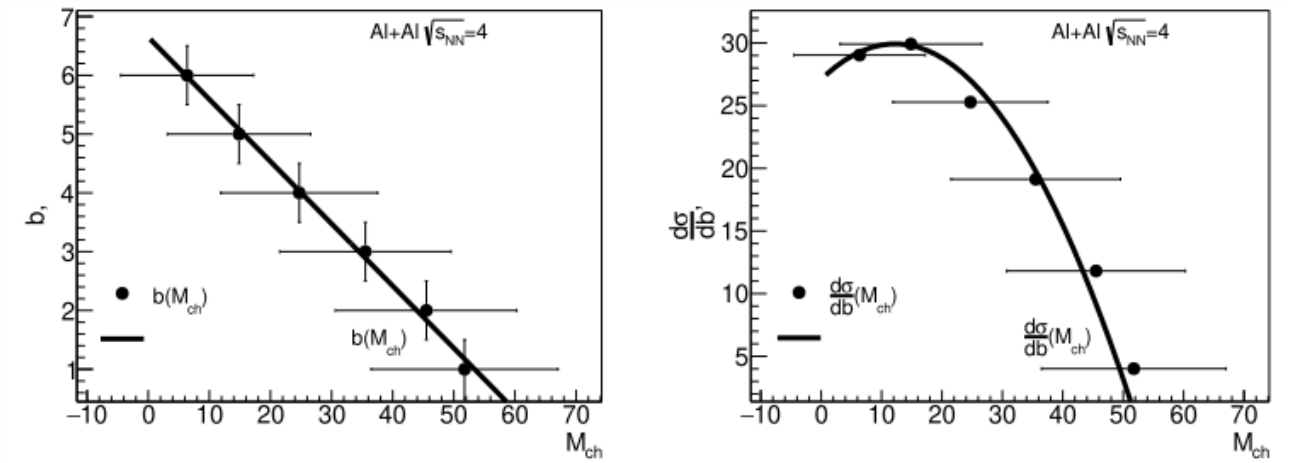


Рис. 2. Графики зависимостей для Al+Al при $\sqrt{s_{NN}} = 4$ ГэВ: а) прицельного параметра от множественности заряженных частиц; б) дифференциального сечения по прицельному параметру от множественности заряженных частиц

Аналогичные зависимости были получены в системе столкновений Al+Al при $\sqrt{s_{NN}} = 4$ ГэВ (рис. 2). Из графиков видно, что обе зависимости также могут быть аппроксимированы линейной функцией $b' = p_6 \cdot M_{ch} + p_7$ с параметрами $p_6 = -0{,}106 \pm 0{,}037$, $\delta_6 = 0{,}35$, $p_7 = 6{,}65 \pm 1{,}15$, $\delta_7 = 0{,}17$, а также квадратичной функцией $\frac{d\sigma}{db'} = p_8 \cdot M_{ch}^2 + p_9 \cdot M_{ch} + p_{10}$ с параметрами $p_8 = -(188 \pm 134) \cdot 10^{-4}$, $\delta_8 = 0{,}71$, $p_9 = 0{,}461 \pm 0{,}526$, $\delta_9 = 1{,}14$, $p_{10} = 27{,}1 \pm 4{,}4$, $\delta_{10} = 0{,}16$ соответственно.

Как видно, для системы Al+Al при $\sqrt{s_{NN}} = 4$ ГэВ относительные погрешности прицельного параметра, определенного по множественности заряженных частиц, составляют ~30% и значительно превышают аналогичные значения для системы Au+Au при $\sqrt{s_{NN}} = 200$

ГэВ (~9%). Увеличенные стандартные отклонения в данном случае приводят к снижению точности определения центральности столкновения.

Обсуждение результатов. Стандартный метод определения центральности по множественности заряженных частиц применим к системе столкновений Al+Al при $\sqrt{s_{NN}} = 4$ ГэВ. Основной источник систематической неопределенности этого метода связан с предположением о линейной зависимости между прицельным параметром и множественностью заряженных частиц. Было установлено, что для Al+Al при $\sqrt{s_{NN}} = 4$ ГэВ такое линейное приближение остается справедливым с точностью ~30%.

Проблема повышения точности определения центральности остается актуальной. В перспективе может быть рассмотрен альтернативный метод, основанный на анализе энерговыделения нуклонов-спектаторов, не участвующих в нуклон-нуклонных взаимодействиях, а также другие подходы.

Следует отметить, что в данной работе использовалась стандартная модель Глаубера, которая не учитывает потери энергии нуклонов в процессе ядро-ядерных столкновений. В связи с этим требуется дальнейшее исследование применимости методов определения центральности, основанных на расчетах модели Глаубера с учетом эффекта потерь энергии.

ЛИТЕРАТУРА

1. Abdallah M. S. et al. Higher-order cumulants and correlation functions of proton multiplicity distributions in $\sqrt{s_{NN}} = 3$ GeV Au+Au collisions at the RHIC STAR experiment //Physical Review C. – 2023. – Vol. 107(2). – P. 024908.
2. Adcox K. et al. PHENIX detector overview //Nuclear Instruments and Methods in Physics Research Section A: Accelerators, Spectrometers, Detectors and Associated Equipment. – 2003. – Vol. 499(2-3) – P. 469-479.
3. Ackermann K. H. et al. STAR detector overview //Nuclear Instruments and Methods in Physics Research Section A: Accelerators, Spectrometers, Detectors and Associated Equipment. – 2003. – Vol. 499(2-3) – P. 624-632.
4. Collaboration A. et al. The ALICE experiment at the CERN LHC //Journal of Instrumentation. – 2008. – Vol. 3(08). – P. S08.
5. Abazov V. et al. Technical Design Report of the Spin Physics Detector at NICA // Natural Science Review. – 2024. – Vol. 1(1).
6. Miller M. L. et al. Glauber modeling in high-energy nuclear collisions //Annu. Rev. Nucl. Part. Sci. – 2007. – Vol. 57(1). – P. 205-243.
7. Pawlak T. et al. Systematic Measurements of Identified Particle Spectra in pp, d+Au and Au+Au Collisions from STAR. – 2009.
8. Abdulhamid M. I. et al. Production of protons and light nuclei in Au+Au collisions at $\sqrt{s_{NN}} = 3$ GeV with the STAR detector //Physical Review C. – 2024. – Vol. 110(5). – P. 054911.
9. Bierlich C. et al. The Angantyr model for heavy-ion collisions in PYTHIA8 //Journal of High Energy Physics. – 2018. – Vol. 2018(10). – P. 1-55.

УДК 539.1.01

М.А. Стариков, Я.А. Бердников
Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого [(*)]

ПРОСТОЙ СПОСОБ ВИЗУАЛИЗАЦИИ СОВМЕЩЕНИЯ ПОПЕРЕЧНОГО СЕЧЕНИЯ ПУЧКА ПРОТОНОВ С МИШЕНЬЮ ЦИКЛОТРОНА

Введение. Ускорители циклотронного типа применяются во многих отраслях: от химии и физики до медицины [1,2]. Эффективная работа ускорителя является приоритетной задачей при эксплуатации установки, начиная от экономии электроэнергии и пространства, до экономии ресурса составляющих циклотрона. В рамках данной работы представлен простой способ визуализации совмещения поперечного сечения пучка протонов с мишенью циклотрона, который позволяет оценить эффективность облучения мишени.

Эффективность облучения определяется отношением площади поперечного сечения пучка к площади мишени. Это отношение называется эффективной площадью.

Для измерения площади поперечного сечения пучка нами был использован метод прожигания (burn test).

Burn test представляет собой процедуру в ходе которой мишень заменяется на цилиндр с закрепленным на нем индикатором. Индикатор представляет собой элемент в форме круга с нанесенными вспомогательными радиальными и прямыми линиями. Индикатор может быть выполнен из разных материалов, в этом исследовании индикатор выполнен из бумаги. При кратковременном облучении пучок прожигает индикатор, позволяя оценить площадь поперечного сечения пучка рис. 1.

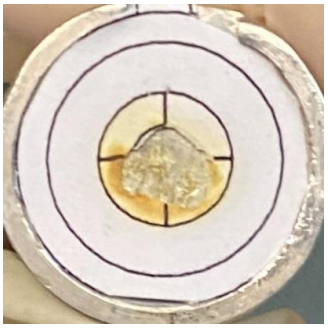


Рис. 1. Вид прожженного индикатора из бумаги после проведения burn test

Совмещение прожженного индикатора с мишенью циклотрона позволяет оценить эффективную площадь. На рис. 2 представлен индикатор с пунктирным контуром мишени, все сравнения результатов burn test были проведены с площадью внутри этого пунктирного контура, таким образом будет рассчитана эффективная площадь облучения.

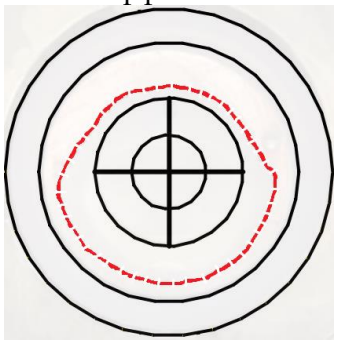


Рис. 2. Индикатор с нанесенным пунктирным контуром мишени

[(*)] М.А. Стариков, misha_ass_2002@mail.ru

Камера циклотрона представляет собой пространство, в котором движется пучок [3]. Давление в камере циклотрона низкое и составляет порядка 10^{-8}-10^{-5} торр, 1 торр = 1 мм ртутного столба или 133,3 Па [4].

Были проведены эксперименты с различным значением давления в камере циклотрона и измерена эффективная площадь для этих значений давления. Далее была проведена проверка повторяемости эксперимента и исследована зависимость результатов от разных типов бумаги, из которой выполнен индикатор.

Подсчеты площадей и вся обработка изображений проводилась с помощью библиотеки «Open CV» на языке python.

Результаты. На рис. 3 представлен график зависимости эффективной площади от значения давления в камере циклотрона. Значения ошибки рассчитаны как погрешность вычисления площади программным пакетом 3%.

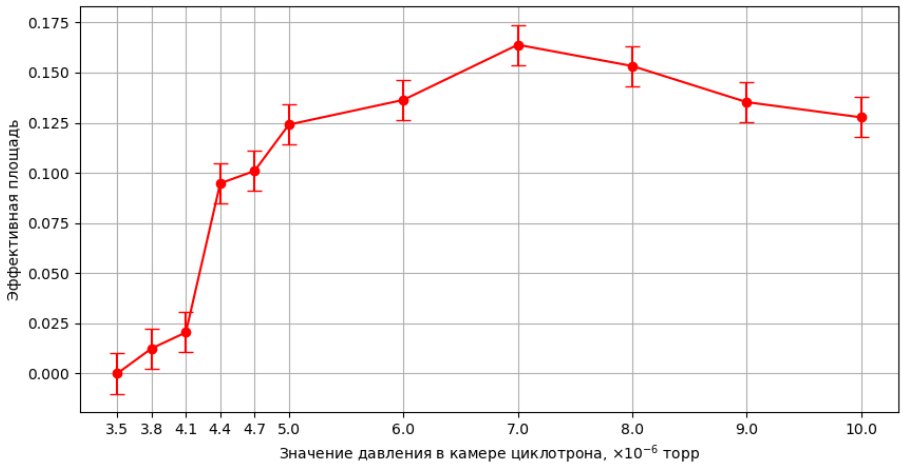


Рис. 3. График зависимости эффективной площади от давления в камере циклотрона

На рис. 4 представлены средние значения эффективной площади для индикаторов из бумаги различной плотности. Значения ошибки рассчитаны как среднеквадратичное отклонение для каждого образца [5].

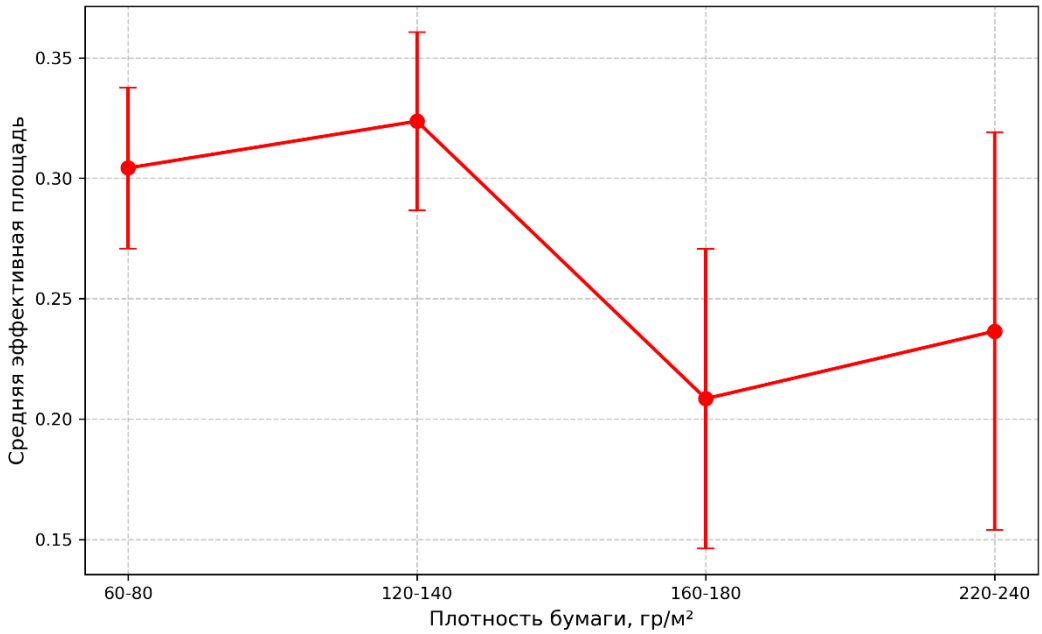


Рис. 4. График зависимости средней эффективной площади от плотности бумаги

Выводы. В данной работе предложен метод измерения площади поперечного сечения пучка (методом прожигания) и на его основе реализован простой способ совмещения поперечного сечения пучка протонов с мишенью циклотрона.

Приведены результаты по измерению площади поперечного сечения пучка в зависимости от давления в камере циклотрона:

- максимальная эффективная площадь достигается при значениях давления в камере циклотрона равном $7*10^{-6}$ торр;

- оптимальной бумагой для проведения burn test является бумага плотностью 60-80 гр/м^2.

ЛИТЕРАТУРА

1. Livingston M.S., Blewett J.P. Particle Accelerators. – McGraw-Hill New York, 1962. – 556 p.
2. Wilson E.J.N. An Introduction to Particle Accelerators. – Oxford University Press Oxford, 2001. – 283 p.
3. Смирнов В.Л. Циклотрон и его моделирование // Физика элементарных частиц и атомного ядра. – 2021. – Т. 52. – № 5. – С. 1158-1304.
4. Van de Graaff R.J., Trump J.G. Electrostatic Generators // Reports on Progress in Physics. – 1948. – Vol. 11. – № 1. – P. 1-18.
5. Агапьев Б. Д., Козловский С. С. Физика. Практическая обработка экспериментальных данных. – СПБ.: СПБПУ, 2012. – 64 с.

УДК 530.22

Д.А. Бабакова, В.Д. Серов, С.П. Рощупкин, В.В. Дубов
Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого(*)

АННИГИЛЯЦИЯ ЭЛЕКТРОН-ПОЗИТРОННОЙ ПАРЫ В МЮОН-АНТИМЮОН В СИЛЬНОМ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОМ ПОЛЕ

Введение. Теоретическое рассмотрение процессов в сильном поле стало актуальным, когда на экспериментальных установках стали достигаемы рассматриваемые интенсивности полей.

Характерным параметром для процессов во внешнем поле является классический релятивистски-инвариантный параметр (здесь и далее использованы единицы $c = \hbar = 1$) [1 - 2]:

$$\eta = \frac{eF}{m\omega}, \quad (1)$$

где e и m – заряд и масса электрона соответственно, F – напряженность электрического поля, ω – частота волны.

Резонанс возможен только благодаря присутствию внешнего поля. В сильном поле обычная масса заменяется на эффективную

$$m_* = m\sqrt{1+\eta^2} \quad (2)$$

В условиях резонанса процесс получает дополнительную энергию от внешнего поля (рис.1.).

Частицы считаем ультрарелятивистскими:

$$\omega \gg m_*, E_{e_+,e_-,\mu_+,\mu_-} \gg m_* \quad (3)$$

В рассматриваемом случае все частицы должны лететь в узком конусе, ось которого должна лежать вдали от направления распространения рентгеновской волны. Если это условие не выполняется, то резонансы пропадают. Поэтому углы между частицами определяются следующим образом: $\theta_1 \approx \theta_2 \approx 1$, - малые углы между частицами и полем.

(*) Д.А. Бабакова, periparus4@gmail.com

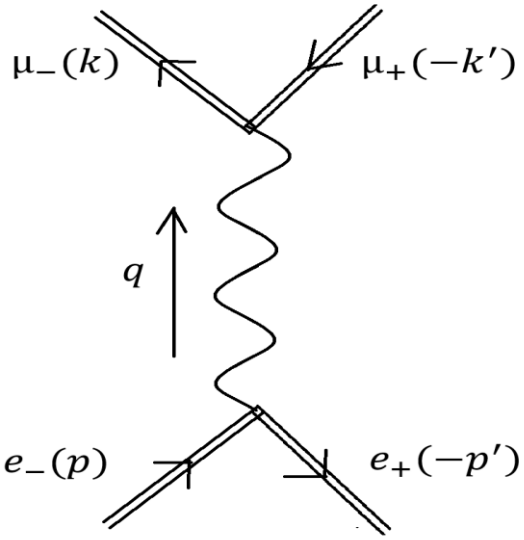


Рис. 1. Фейнмановская диаграмма резонансного рождения мюон-антимюонной пары из аннигилировавшей электрон-позитронной пары

Кинематика в сильном поле.

Рассмотрим закон сохранения 4-импульсов в вершине со стимулированным лазерным полем процессом рождения мюон-антимюонной пары из аннигилировавшей электрон-позитронной пары:

$$q = p_{\mu-} + p_{\mu+} - lk \quad (4)$$

$$q = p_{e-} + p_{e+} + sk \quad (5)$$

Возведем в квадрат выражения. Видно, что энергии распределены независимо у каждой из пар.

$$0 = q^2 = p_{\mu-}^2 + p_{\mu+}^2 - (lk)^2 + 2(p_{\mu-}, p_{\mu+}) - 2l(p_{\mu-}, k) - 2l(p_{\mu+}, k) \quad (6)$$

$$0 = q^2 = p_{e-}^2 + p_{e+}^2 + (sk)^2 + 2(p_{e-}, p_{e+}) + 2s(p_{e-}, k) + 2s(p_{e+}, k) \quad (7)$$

Здесь введены обозначения:

$$\delta_1^2 = \left(\frac{E_1\theta}{m}\right)^2, \delta_2^2 = \left(\frac{E_1\theta}{m}\right)^2 \quad (8)$$

Вычислим соответствующие скалярные произведения для конечных частиц:

$$(p_{\mu-}, p_{\mu+}) = 4E_1E_2 - \frac{{m_*}^2E_2}{2E_1}(1+\delta_1^2) - \frac{{m_*}^2E_1}{2E_2}(1+\delta_2^2) - \frac{{m_*}^2E_2}{2E_1} - -\frac{{m_*}^2E_1}{2E_2} \quad (9)$$

$$(p_{\mu-}, k) = \frac{\omega{m_*}^2}{2E_1}(1+\delta_1^2) \quad (10)$$

$$(p_{\mu+}, k) = \frac{\omega{m_*}^2}{2E_2}(1+\delta_2^2) \quad (11)$$

Решая квадратное уравнение, получаемое из (6), получим 2 решения для энергии вылетевшей частицы:

$$E_1 = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 + 4ac}}{2a}, \text{где}$$

$$a = 8E_2^2 - {m_*}^2 E_2^2 \delta_2^2 - 2{m_*}^2 E_2$$
$$b = 2{m_*}^2 + l^2 k^2 E_2 - {m_*}^2 E_2^2 \delta_1^2 - 2{m_*}^2 E_2^2 - l\omega {m_*}^2 \delta_2^2 \quad (12)$$
$$c = l\omega {m_*}^2 \delta_1^2$$

Заключение. В работе рассмотрена резонансная кинематика аннигиляции электрон-позитронной пары в мюон-антимюон во внешнем сильном поле. Получена зависимость энергий вылетающих частиц.

ЛИТЕРАТУРА

1. Рощупкин С. П., Лебедь А. А. Эффекты квантовой электродинамики в сильных импульсных лазерных полях — НПП «Издательство «Наукова думка» НАН Украины», 2013 —190 с
2. Серов В.Д., Рощупкин С.П., Дубов В.В. Резонансный процесс Брейта-Уиллера в сильном электромагнитном поле. – Теоретическая и математическая физика. т. 216 (2023), в.3, с.577-589.

УДК 539.12

С.М. Анцупов, Я.А. Бердников, Д.О. Котов
Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого(*)

ВОЗБУЖДЕННЫЕ НЕЙТРАЛЬНЫЕ K-МЕЗОНЫ В ЯДРО-ЯДЕРНЫХ СТОЛКНОВЕНИЯХ

Введение. Кварк-глюонная плазма (КГП) [1] — экзотическое состояние вещества, в котором кварки и глюоны не связаны в адроны. Для образования КГП требуется экстремально высокая плотность энергии, достигаемая в столкновениях ультрарелятивистских тяжелых ядер. КГП обладает рядом уникальных свойств, влияющих на процессы формирования частиц в столкновениях, а также на изменение их характеристик при прохождении через эту среду. В данной работе исследованы два таких ключевых эффекта: увеличенный выход странности [2] и гашение струй [3, 4]. Эффект увеличенного выхода странности проявляется в повышенном образовании странных кварков в столкновениях, в которых образуется КГП, по сравнению со столкновениями, в которых КГП не образуется. Гашение струй, в свою очередь, означает значительные потери энергии частиц, имеющих большой импульс ($p_T \gtrsim 4$ ГэВ/c) [4], при прохождении через среду КГП. Для исследования данных эффектов в данной работе были измерены факторы ядерной модификации K*(892) мезона [5] – частицы, которая содержит странный кварк. Для измерения факторов ядерной модификации была использована формула:

$$R_{AB} = \frac{1}{N_{coll}^{AB}} \cdot \frac{1/(2\pi p_T)\, d^2 N_{AB}/dp_T dy}{1/(2\pi p_T)\, d^2 N_{pp}/dp_T dy}, \quad (1)$$

где

- N_{coll}^{AB} - среднее число попарных нуклон-нуклонных соударений в одном ядро-ядерном столкновении A+B,
- $1/(2\pi p_T)\, d^2 N_{AB}/dp_T dy$ – инвариантный спектр частиц в ядро-ядерных столкновениях A+B,
- $1/(2\pi p_T)\, d^2 N_{pp}/dp_T dy$ – инвариантный спектр частиц в протон-протонных столкновениях,
- p_T – поперечный импульс частиц,
- y – быстрота частиц.

(*) С.М. Анцупов, antsupov.sm@edu.spbstu.ru

В формуле (1) для расчета факторов ядерной модификации используется инвариантный p_T спектр частиц в $p+p$ столкновении, так как в $p+p$ столкновении при энергии 200 ГэВ КГП не образуется [6].

Цели работы. Изучение особенностей рождения векторного K*(892) мезона в столкновениях Au+Au при энергии $\sqrt{s_{NN}}$=200 ГэВ на нуклон, а также исследование эффекта увеличенного выхода странности и гашения струй в данных столкновениях.

Задачи работы. Разработка и применение методики для измерения инвариантного p_T спектра и факторов ядерной модификации K*(892) мезона в столкновениях Au+Au при энергии 200 ГэВ на нуклон для разных промежутков по поперечному импульсу и классов событий по центральности при обработке данных в эксперименте PHENIX [7] на коллайдере RHIC [8]. Все результаты, представленные в данной работе, получены авторами лично.

Методика работы. K*(892) является нестабильной частицей, поэтому ее исследование проводилось по каналу распада K*(892)→ $\pi^{\pm}K^{\mp}$. Для различных интервалов p_T и классов событий по центральности были получены распределения инвариантной массы пар $\pi^{\pm}$ и $K^{\mp}$ мезонов. Из полученных распределений были выделены сигналы K*(892) мезонов, а их выходы определялись путем интегрирования сигнала K*(892) мезонов в диапазоне 2Г. Γ – параметр функции Брейта-Вигнера получаемый из аппроксимации сигнала K*(892).

Для оценки корректировки полученного выхода K*(892) на эффективность регистрации K*(892) детекторной системой PHENIX было использовано Монте-Карло моделирование. Выходы K*(892) мезонов были скорректированы на полученную эффективность регистрации K*(892) мезона. Скорректированные выходы K*(892) мезонов были использованы для вычисления инвариантных p_T спектров K*(892) мезонов.

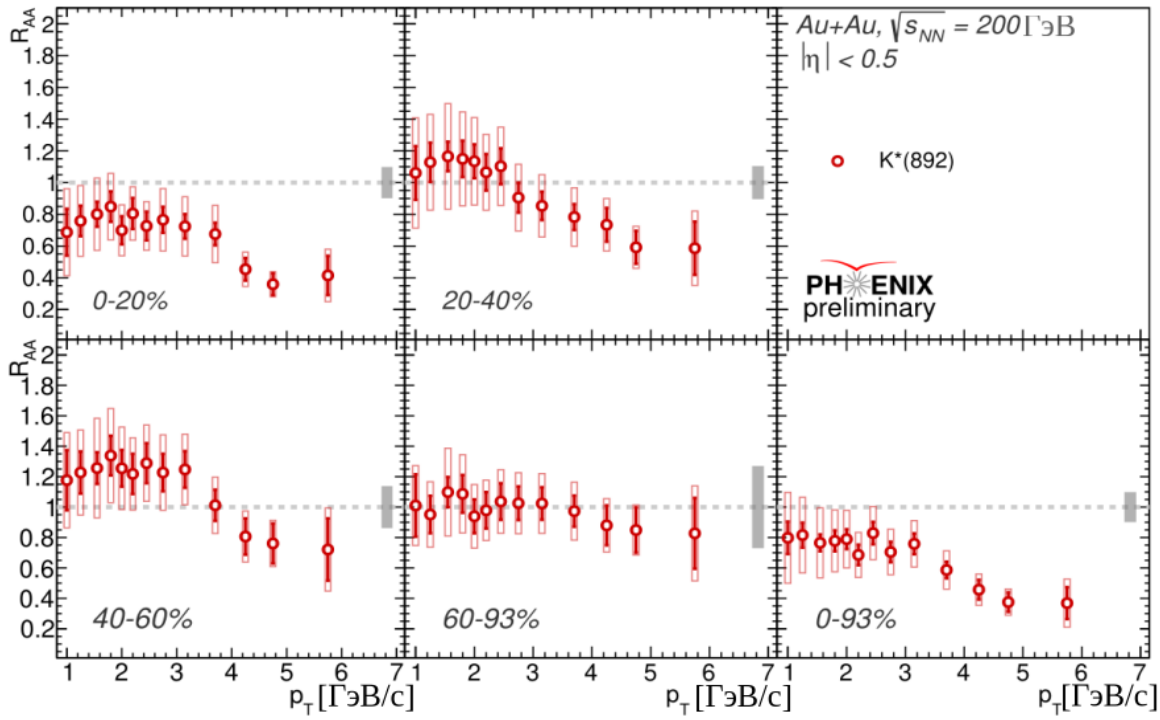


Рис. 1. Факторы ядерной модификации K*(892) мезона (круглые маркеры) в зависимости от поперечного импульса, измеренные в различных классах событий по центральности (0-20%, 20-40%, 40-60%, 60-93%, 0-93%) в центральном диапазоне псевдобыстроты |η|<0.5. Класс событий по центральности обозначен слева снизу на каждой картинке. Вертикальные линии у маркеров отражают статистическую погрешность, незаполненные прямоугольники вокруг маркеров обозначают некоррелируемую систематическую погрешность. Серые прямоугольники справа на каждой картинке отображают коррелируемую систематическую погрешность.

Систематические неопределенности инвариантных p_T спектров оценивались путем варьирования параметров, подверженных систематическим ошибкам, на величину их неопределенностей. Влияние этих вариаций на инвариантный p_T спектр позволило определить систематические неопределенности измерений. На основе полученных инвариантных p_T спектров K*(892) и их неопределенностей были рассчитаны факторы ядерной модификации мезонов K*(892), а также оценены их неопределенности. Результаты представлены на рис. 1.

Выводы. Были получены инвариантные p_T спектры и факторы ядерной модификации K*(892) мезонов в диапазоне ($0.9 \; p_T < 6.5$) ГэВ/c для различных классов событий по центральности. Анализ данных показывает увеличенный выход странности при $p_T \lesssim 3$ ГэВ/с в столкновениях классов событий по центральности 0–20%, 20–40%, 40–60% и 0–93%. При 4 ГэВ/с наблюдается эффект гашения струй, проявляющийся в классах событий по центральности 0–20%, 20–40%, 40–60% и 0–93%.

ЛИТЕРАТУРА

1. Van Hove L.C.P. Theoretical prediction of a new state of matter, the "quark-gluon plasma" (also called "quark matter") // 17th International Symposium on Multiparticle Dynamics. - 1986. - P. 801 - 818.
2. Margetis S., Safarík K., Baillie O.V. Strangeness Production in Heavy-Ion Collisions // Annual Review of Nuclear and Particle Science. - 2000. - Vol. 50. - P. 299 - 342.
3. Wang X.-N., Gyulassy M. Gluon shadowing and jet quenching in A + A collisions at s**(1/2) = 200-GeV // Phys. Rev. Lett. - 1992. - Vol.68. - P. 1480–1483.
4. Baier R., Schiff D., Zakharov B. G. Energy Loss in Perturbative QCD // Annual Review of Nuclear and Particle Science. — 2000. — Vol. 50, no. 1. — P. 37–69. — ISSN 1545-4134.
5. Workman R.L. et al. (Particle Data Group). Reviews of Particle Physics // Prog. Theor. Exp. Phys. - 2022. - Vol. 2020. - I. 8. - № 083C01.
6. Owens J. F., Reya E., and Glück M. Detailed quantum-chromodynamic predictions for high-pT processes // Phys. Rev. D. – 1978. - Vol. 18. - P. 1501-1514.
7. O'Brien E.J. Overview of the PHENIX Experiment // AIP Conference Proceedings. - 2003. - Vol. 698. - P. 745-750.
8. Ludlam T., Harrison M., Ludlam T., Ozaki S. RHIC project overview // Nucl. Instr. Meth. A. - 2004. - Vol. 499. - P. 235-244.

УДК 539.12

К.Н. Басиров, Е.В. Банников, Я.А. Бердников
Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого(*)

ПОТЕРИ ЭНЕРГИИ КВАРКОВ И ГЛЮОНОВ В Cu+Au СТОЛКНОВЕНИЯХ ПРИ ЭНЕРГИИ $\sqrt{s_{NN}} = 200$ ГЭВ

Введение. В релятивистских столкновениях тяжелых ионов образуется кварк-глюонная плазма (КГП) с большими значениями температуры и плотности энергии, в которой кварки и глюоны находятся в состоянии деконфайнмента [1]. Исследовать свойства КГП можно с помощью такой величины, как потеря энергии партонов (кварков и глюонов). Партоны с высокой энергией рождаются в результате жестких нуклон-нуклонных взаимодействий в столкновениях ядер и взаимодействуют с компонентами среды [2]. Полная потеря энергии является функцией от начальной энергии партона E_{in}, массы партона M, температуры среды T, константы сильного взаимодействия α_s и длины пути партона в среде L [3].

(*) К.Н. Басиров, kirill.basirov@mail.ru

Основные экспериментальные величины, связанные с потерями энергии ΔE – это фактор ядерной модификации R_{AB} и доля потери энергии S_{loss} [4]. Фактор ядерной модификации определяется как отношение инвариантных выходов адронов в ядро-ядерных столкновениях и протон-протонных столкновениях с учетом нормировки на число бинарных неупругих взаимодействий N_{coll}

$$R_{AB}(p_T) = \frac{1}{\langle N_{coll}\rangle}\frac{d^2N_{AB}/dp_T dy}{d^2N_{pp}/dp_T dy}$$

Доля потери энергии определяется как отношение средней потери энергии партонов к их средней начальной энергии $S_{loss} = \Delta E/E_{in}$ [4]. В данной работе эти величины вычисляются на основе данных о выходах π^0-мезонов.

Цели и задачи работы. Целью работы является получение оценок потерь энергии кварков и глюонов в КГП, образующейся в столкновениях Cu+Au при энергии $\sqrt{s_{NN}} = 200$ ГэВ. В задачи работы входит получение азимутально зависимых факторов ядерной модификации $R_{AB}(p_T, \Delta\varphi)$ и доли потери энергии $S_{loss}(p_T, \Delta\varphi)$ в четырех классах центральности столкновения и в трех диапазонах по поперечному импульсу p_T

Методика измерения. Величины ΔE и E_{in} для S_{loss} оцениваются на основе данных о поперечных импульсах адронов в ядро-ядерных столкновениях p_T и протон-протонных столкновениях p_T^{pp}. При фиксированном значении инвариантных выходов адронов величина доли потери энергии может быть рассчитана как $S_{loss} = \left(p_T^{pp} - p_T\right)/p_T^{pp} = \Delta p_T/p_T^{pp}$ [4].

Между интегральными по азимутальному углу фактором ядерной модификации и долей потери энергии партонов можно найти аналитическую связь при $p_T > 4$ ГэВ/c [4,5]:

$$S_{loss}(p_T) = 1 - \left(R_{AB}(p_T)\right)^{\frac{1}{n-2}}, \text{ где } n = 8.1 \pm 0.1 \text{ [4].}$$

Чтобы получить азимутальную зависимость фактора ядерной модификации $R_{AB}(p_T, \Delta\varphi)$, нужно учесть форму азимутальной зависимости выходов π^0-мезонов в столкновениях Cu+Au, тогда [4]

$$R_{AA}(\Delta\varphi, p_T) = \frac{2\pi}{N_0}\left[1 + \sum_{n=1}^{\infty} 2v_n(p_T)\,cos(n\Delta\varphi)\right]\cdot R_{AA}(p_T) \approx (1 + 2v_2\,cos(2\Delta\varphi))\cdot R_{AA}(p_T)$$

Здесь множитель в квадратных скобках представляет из себя разложение в ряд Фурье по азимутальному углу $\Delta\varphi$, $v_n = \langle\cos(n\Delta\varphi)\rangle$ – анизотропный поток n-го порядка, N_0 – нормировочная константа. Здесь также учтено, что доминирующий вклад в азимутальную зависимость дает эллиптический поток v_2. Отсюда также получаем азимутальную зависимость доли потери энергии:

$$S_{loss}(\Delta\varphi, p_T) = 1 - \left(R_{AB}(\Delta\varphi, p_T)\right)^{\frac{1}{n-2}}$$

Результаты. На рис.1 показаны интегральные по азимутальному углу зависимости доли потери энергии партонов от числа нуклонов участников N_{part} для двух систем столкновений Cu+Au и Au+Au [6] при энергии $\sqrt{s_{NN}} = 200$ ГэВ. Число нуклонов участников определяется центральностью столкновения ядер и является показателем размера области их перекрытия. Значения средних начальных энергий партонов p_T^{pp} подбирались сопоставимыми. Данные точки аппроксимировались степенной функцией $S_{loss}\left(N_{part}\right) = kN_{part}^a + b$. Методом χ^2 были получены значения параметров: $k = 0{,}011 \pm 0{,}015$, $a = 0{,}561 \pm 0{,}209$, $b = -0{,}030 \pm 0{,}052$. Из рис.1 видно, что точки для обеих систем описываются этой кривой с большой точностью, и полученные параметры удовлетворяют расчетам в модели GLV: $S_{loss}\left(N_{part}\right) = kN_{part}^{2/3}$ [2].

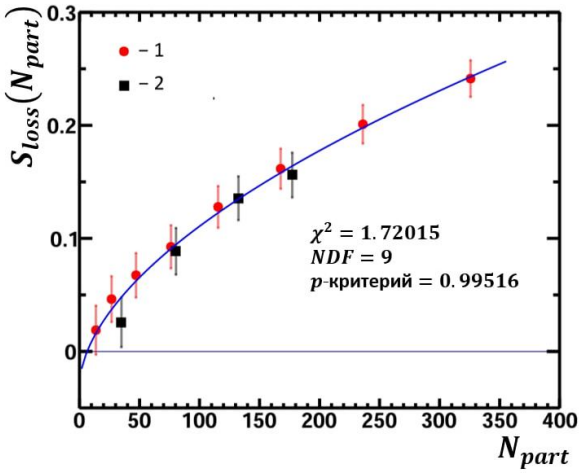


Рис. 1. Зависимость доли потери энергии партонов от числа нуклонов участников $S_{loss}(N_{part})$ для двух систем столкновений: 1 – Au+Au, 2 – Cu+Au ($\sqrt{s_{NN}} = 200$ ГэВ)

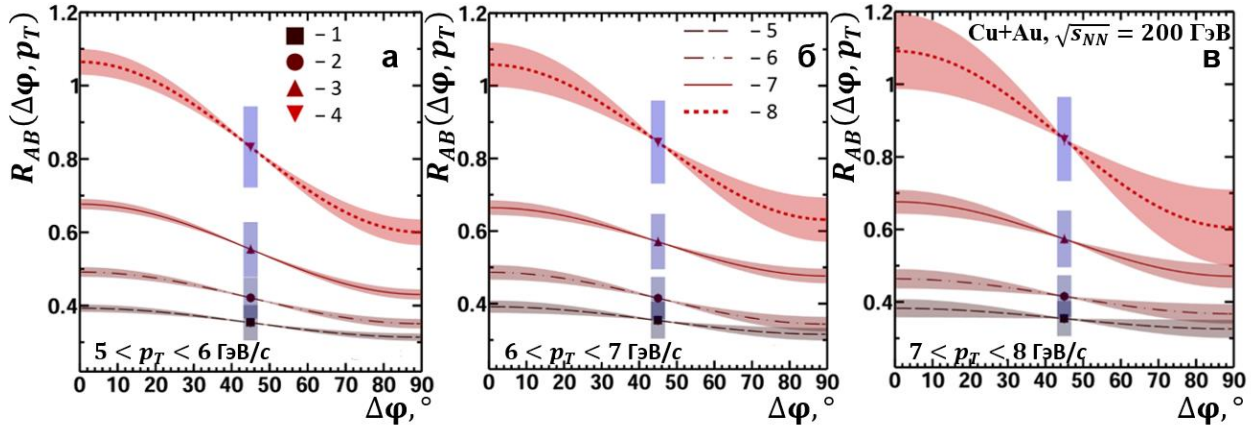


Рис. 2. Азимутальные зависимости факторов ядерной модификации $R_{AB}(\Delta\varphi, p_T)$ в трех диапазонах по p_T: а) $5 < p_T < 6$ ГэВ/c, б) $6 < p_T < 7$ ГэВ/c, в) $7 < p_T < 8$ ГэВ/c; центральные квадратные точки – $R_{AB}(p_T)$, 1 – 0-10%, 2 - 10-20%, 3 – 20-40%, 4 – 40-60%; непрерывные кривые – $R_{AB}(\Delta\varphi, p_T)$, 5 – 0-10%, 6 - 10-20%, 7 – 20-40%, 8 – 40-60%

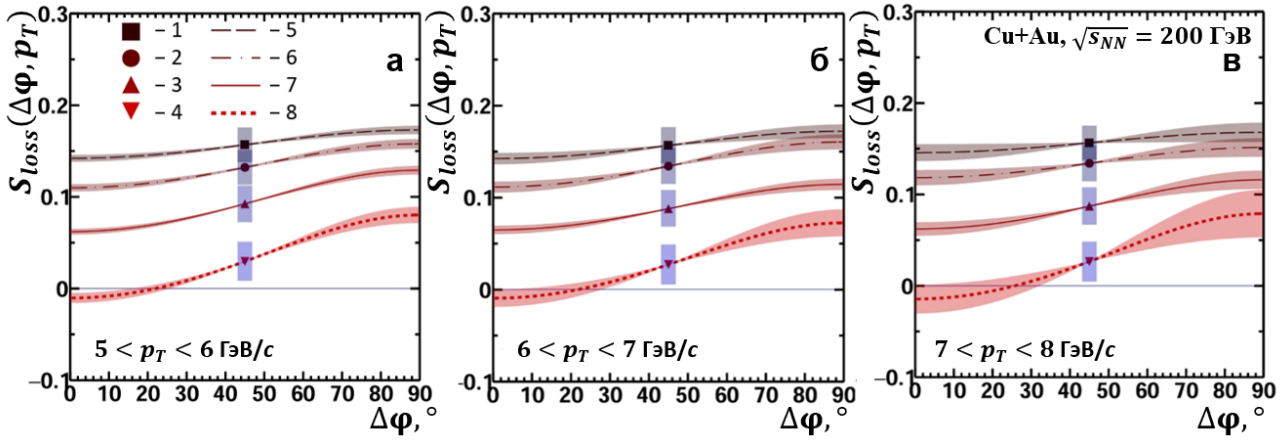


Рис. 3. Азимутальные зависимости доли потери энергии партонов $S_{loss}(\Delta\varphi, p_T)$ в трех диапазонах по p_T: а) $5 < p_T < 6$ ГэВ/c, б) $6 < p_T < 7$ ГэВ/c, в) $7 < p_T < 8$ ГэВ/c; центральные точки – $S_{loss}(p_T)$, 1 – 0-10%, 2 - 10-20%, 3 – 20-40%, 4 – 40-60%; непрерывные кривые – $S_{loss}(\Delta\varphi, p_T)$, 5 – 0-10%, 6 - 10-20%, 7 – 20-40%, 8 – 40-60%

На рис. 2. и рис. 3. представлены азимутальные зависимости факторов ядерной модификации $R_{AB}(p_T, \Delta\varphi)$ и доли потери энергии $S_{loss}(p_T, \Delta\varphi)$, соответственно. Значения интегральных по азимутальному углу $S_{loss}(p_T)$ практически не зависят от p_T, что связано с тем, что факторы ядерной модификации в рассматриваемых диапазонах практически не изменяются. Степень анизотропии потерь энергии, которая определяется как разность между максимальным и минимальным значениями $S_{loss}(p_T, \Delta\varphi)$ в данной центральности, также остается неизменной по мере изменения p_T.

Выводы. В настоящей работе представлены результаты оценок долей потерь энергии в зависимости от числа нуклонов участников N_{part}, поперечного импульса p_T и азимутального угла $\Delta\varphi$ в столкновениях Cu+Au при энергии $\sqrt{s_{NN}} = 200$ ГэВ.

Установлено, что зависимость $S_{loss}(N_{part})$ представляет из себя степенной закон, что согласуется с модельными расчетами [2] с учетом полученных параметров. Наблюдается явная азимутальная зависимость фактора ядерной модификации R_{AB} и доли потери энергии партонов S_{loss} в центальностях 20-40% и 40-60%. Подавление рождения π^0-мезонов (зависящее от величины $S_{loss}(p_T, \Delta\varphi)$) в периферических столкновениях при азимутальном угле $\Delta\varphi = \pi/2$ (перпендикулярно плоскости реакции) примерно в ~1.8 раз больше, чем при $\Delta\varphi = 0$ (в плоскости реакции).

ЛИТЕРАТУРА

1. Adcox K. et al. (PHENIX Collaboration), Formation of dense partonic matter in relativistic nucleus-nucleus collisions at RHIC: Experimental evaluation by the PHENIX collaboration // Nuclear Physics A. – 2005. – Vol. 757, – №1 – P. 184-283.
2. Enterria, D. Jet quenching // Landolt-Boernstein - Group I Elementary Particles, Nuclei and Atoms. – 2010. – P. 471-520.
3. Peigne S., Smilga A.V. Energy losses in relativistic plasmas: QCD versus QED // Phys.-Usp. – 2009. – Vol. 52. – P. 659–685.
4. Adler S.S. et al. (PHENIX Collaboration), A Detailed Study of High-pT Neutral Pion Suppression and Azimuthal Anisotropy in Au+Au Collisions at $\sqrt{s_{NN}} = 200$ GeV // Phys. Rev. C. – 2007. – Vol. 76. – P. 034904.
5. Aidala S. et al. (PHENIX Collaboration), Production of π0 and η mesons in Cu+Au collisions at $\sqrt{s_{NN}} = 200$ GeV // Phys. Rev. C. – 2018. – Vol. 98. – P. 054903.
6. Adare A. et al. (PHENIX Collaboration), Neutral pion production with respect to centrality and reaction plane in Au+Au collisions at $\sqrt{s_{NN}} = 200$ GeV // Phys. Rev. C. – 20

УДК 539.12

И.И. Борисов, Е.В. Банников, Д.О. Котов
Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого(*)

ЭНЕРГЕТИЧЕСКИЕ ПОТЕРИ ПАРТОНОВ В U+U ВЗАИМОДЕЙСТВИЯХ ПРИ ЭНЕРГИИ $\sqrt{s_{NN}} = 193$ ГЭВ

Введение. В столкновениях ультрарелятивистских тяжелых ядер (в частности, в столкновениях ядер урана при энергии в системе центра масс $\sqrt{s_{NN}} = 193$ ГэВ) плотность энергии может превышать значение 1 ГэВ/фм^3, что приводит к переходу ядерной материи в состояние кварк-глюонной плазмы (КГП) [1], которое характеризуется отсутствием конфайнмента кварков и глюонов. Образование КГП сопровождается эффектом гашения адронных струй [2], которые возникают из-за адронизации высокоэнергетических партонов.

(*) И.И. Борисов, borisov.ii@edu.spbstu.ru

При прохождении через КГП высокоэнергетический партон теряет свою энергию, что приводит к уменьшению множественности частиц в адронной струе. Таким образом, по эффекту гашения адронных струй можно судить о потерях энергии партонов, прошедших через среду КГП. Изменение множественности частиц в ядро-ядерных столкновениях по отношению к протон-протонным соударениям характеризуется физической величиной, которую называют фактором ядерной модификации. На основе полученных в эксперименте факторов ядерной модификации, можно рассчитать эффективную относительную потерю энергии [2], которая показывает, какую долю начальной энергии потерял партон при прохождении через КГП.

Важно отметить, что область перекрытия сталкивающихся ядер обладает азимутальной асимметрией (эллиптичностью), вследствие чего партоны проходят неодинаковое расстояние внутри среды КГП. Чем больше путь партона в КГП, тем больше его потери энергии. Таким образом, величины факторов ядерной модификации и эффективной относительной потери энергии должны обладать азимутальной зависимостью.

В данной работе потери энергии партонов исследуются с помощью факторов ядерной модификации π^0-мезонов [3], поскольку данные частицы рождаются в широком диапазоне поперечных импульсов [3-5].

Цели и задачи работы. Цель данной работы – оценка потерь энергии партонов в КГП, образующейся в системе столкновений U+U при $\sqrt{s_{NN}} = 193$ ГэВ, и сравнение полученных результатов с аналогичными результатами для систем столкновений Au+Au при энергии $\sqrt{s_{NN}}$ =200 ГэВ и Cu+Au при энергии $\sqrt{s_{NN}} = 200$ ГэВ. Задача работы – получение из факторов ядерной модификации π^0-мезонов значений величины относительной эффективной потери энергии партонов для разных классов центральности и разных азимутальных углов вылета частиц.

Методика вычисления. Для существования формулы, явно связывающей величину фактора ядерной модификации с относительной эффективной потерей энергии, требуется параллельность инвариантных спектров π^0-мезонов для ядро-ядерных и протон-протонных столкновений хотя бы в некоторой области значений поперечного импульса [6]. Данное требование выполняется для столкновений U+U при энергии $\sqrt{s_{NN}} = 193$ ГэВ в диапазоне поперечных импульсов $4 < p_T < 10$ ГэВ$/c$ [3]. Формула связи эффективной относительной потери энергии с фактором ядерной модификации выглядит следующим образом:

$$S_{loss}(p_T) = 1 - \left(R_{AB}(p_T)\right)^{1/(n-2)}, \quad (1)$$

где $n = 8{,}1 \pm 0{,}1$ – показатель степенной функции, которой аппроксимируется спектр адронов, родившихся в протон-протонных столкновениях [6].

Азимутальная зависимость факторов ядерной модификации учитывается путем умножения их на угловое распределение частиц, которое можно представить в виде разложения в ряд Фурье [7]. При этом основной вклад в анизотропию вносит второй коэффициент разложения – эллиптический поток:

$$R_{AB}(p_T, \Delta\varphi) \approx (1 + 2v_2 \cos(2\Delta\varphi))R_{AB}(p_T), \quad (2)$$

где $\Delta\varphi = \varphi - \Psi_{RP}$ – азимутальный угол вылета частиц, отсчитанный от угла плоскости реакции Ψ_{RP}. Плоскость реакции сталкивающихся ядер определяется прицельным параметром столкновения и осью пучка.

Азимутально зависимая относительная эффективная потеря энергии определяется следующим образом:

$$S_{loss}(p_T, \Delta\varphi) = 1 - \left(R_{AB}(p_T, \Delta\varphi)\right)^{1/(n-2)} \quad (3)$$

Результаты. На рис. 1 изображена зависимость величины эффективной относительной потери энергии от числа нуклонов-участников N_{part}, которое взаимно однозначно связано с центральностью столкновения. Представлены следующие системы столкновений: Au+Au

($\sqrt{s_{NN}} = 200$ ГэВ/c) [4], Cu+Au ($\sqrt{s_{NN}} = 200$ ГэВ/c) [5], U+U ($\sqrt{s_{NN}} = 193$ ГэВ/c) [3]. Как видно из рисунка, точки разных систем ложатся на одну кривую. Также видно, что наиболее центральным столкновениям соответствуют наибольшие потери энергии. При этом полученные точки можно аппроксимировать следующей степенной зависимостью:

$$S_{loss}(N_{part}) \approx kN_{part}^{2/3} + b, \quad (4)$$

где k, b – свободные параметры.

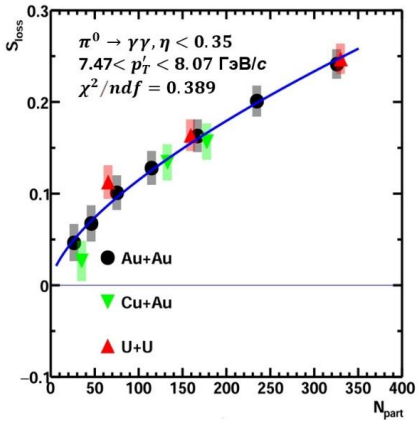


Рис. 1. Зависимости величины относительной эффективной потери энергии от числа нуклонов-участников для разных систем ядро-ядерных взаимодействий в диапазонах $7{,}47 < p_T' < 8{,}07$ ГэВ/c

На рис. 2а представлены азимутальные зависимости величины относительной эффективной потери энергии для трех классов центральности столкновений: 0–20%, 20–40% и 40–60%. Для иллюстрации выбран диапазон поперечных импульсов $5 < p_T < 6$ ГэВ/c. Качественные отличия выбранного диапазона от остальных отсутствуют, поскольку факторы ядерной модификации практически являются константой в диапазоне $4 < p_T < 10$ ГэВ/c поперечных импульсов, а количественные различия обеспечиваются лишь разными значениями величины эллиптического потока. Из рисунка видно, что наибольшие потери энергии соответствуют вылету частиц перпендикулярно плоскости реакции ($\Delta\varphi = 90°$), а наименьшие потери – вылету в плоскости реакции ($\Delta\varphi = 0°$). На рис. 2б показано сравнение азимутальных зависимостей относительной эффективной потери энергии для разных систем столкновений при близких значениях числа нуклонов-участников ($N_{part} \in (155; 184)$). Из рисунка видно, что степень анизотропии в разных системах неодинакова.

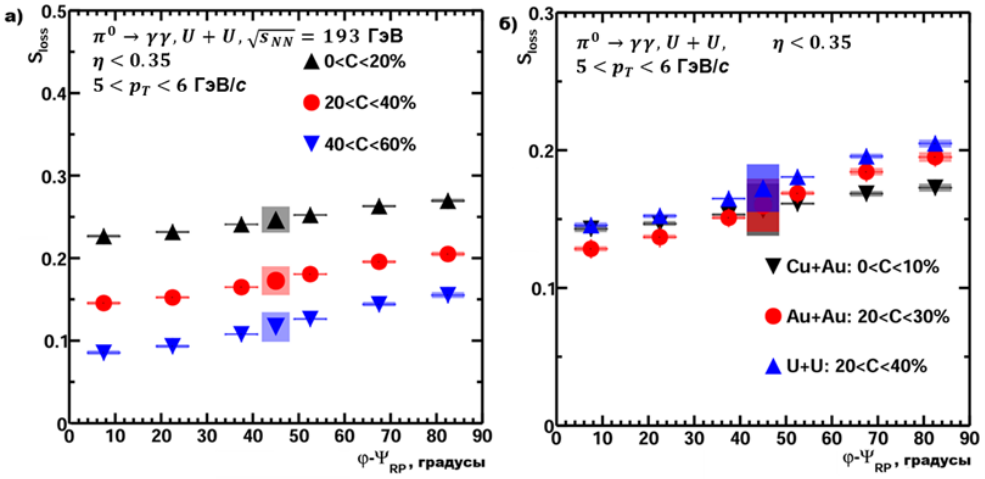


Рис. 2. Азимутальные зависимости относительной эффективной потери энергии для различных классов центральности в одной системе (а) и для близкого значения числа нуклонов-участников для разных систем (б); символом «С» обозначена центральность соударения

Выводы. В данной работе была впервые рассчитана относительная эффективная потеря энергии для системы столкновений U+U при $\sqrt{s_{NN}} = 193$ ГэВ.

Зависимость $S_{loss}(N_{part})$ находятся в соответствии с моделями расширяющейся КГП [2] ($\chi^2/ndf < 1$). Форма данной зависимости для системы столкновений U+U совпадает с формами аналогичных зависимостей для систем столкновений Au+Au и Cu+Au с учетом неопределенности.

Величина относительной эффективной потери энергии обладает явной азимутальной зависимостью. Данный факт указывает на наличие зависимости потерь энергии партонов от длины пути в области КГП. Несмотря на то, что интегральные по углу потери энергии партонов близки во всех трех системах, сравнение их азимутальных зависимостей показало видимое различие в их анизотропии, которое может объясняться зависимостью от начальной геометрии сталкивающихся ядер (в частности, от эксцентриситета второго порядка).

ЛИТЕРАТУРА

1. Adcox K. et al. (PHENIX Collaboration), Formation of dense partonic matter in relativistic nucleus-nucleus collisions at RHIC: Experimental evaluation by the PHENIX collaboration // Nuclear Physics A. 2005. Vol. 757, No. 1/2. P. 184—283.
2. Enterria, D. Jet quenching // Landolt-Boernstein - Group I Elementary Particles, Nuclei and Atoms. 2010. P. 471—520.
3. Acharya U. et al. (PHENIX Collaboration), Production of π^0 and η mesons in U+U collisions at $\sqrt{s_{NN}} = 192$ GeV // Phys. Rev. C 102, 064905 (2020).
4. Aidala C. et al. (PHENIX Collaboration), Production of π^0 and η mesons in Cu+Au collisions at $\sqrt{s_{NN}} = 200$ GeV // Phys. Rev. C 98, 054903 (2018).
5. Adare A. et al. (PHENIX Collaboration), Neutral pion production with respect to centrality and reaction plane in Au+Au collisions at $\sqrt{s_{NN}} = 200$ GeV // Phys. Rev. C 87, 034911 (2013).
6. Adler S.S. et al. (PHENIX Collaboration), A Detailed Study of High-pT Neutral Pion Suppression and Azimuthal Anisotropy in Au+Au Collisions at $\sqrt{s_{NN}} = 200$ GeV // Phys. Rev. C. 2007. Vol. 76. P. 034904.
7. Voloshin, S. Flow study in relativistic nuclear collisions by Fourier expansion of Azimuthal particle distributions / S. Voloshin, Y. Zhang // Z. Phys. C. – 1996. – т. 70. – с. 665-672. – arXiv: hep-ph/9407282.

УДК 539.16

Д.В. Кох, Я.А. Бердников
Санкт-Петербургский политехнический университет Перта Великого(*)

АНАЛИЗ ВОЗМОЖНОСТИ ПРИМЕНЕНИЯ ПОЛИЛАКТИДОВ В КАЧЕСТВЕ ОСНОВНОГО КОНСТРУКЦИОННОГО МАТЕРИАЛА ФИЛЬТРУЮЩИХ МОДУЛЕЙ

Исследование направлено на анализ возможности применения полилактидов в качестве основного конструкционного материала фильтрующих модулей применяемых при воздушной радиационной разведки (ВРР).

Целью работы является подтверждение возможности применения пластика PLA (PolyLactic Acid) в качестве дешевого, легко утилизируемого конструктивного материала для фильтрующих модулей, применяемых при ВРР.

Актуальность проблемы исследования определяется необходимостью наращивания числа средств радиационной разведки в связи с высокими темпами развития атомной промышленности. Снижение стоимости производства и эксплуатации средств ВРР позволяет

(*) Я.А. Бердников, berdnikov@spbstu.ru

в перспективе значительно увеличить покрытие местности средствами наблюдения и обеспечить своевременное реагирование на возникающие радиационные угрозы, чем и обеспечивается актуальность целей и задач нашего исследования.

Одним из способов проведения воздушной радиационной разведки является аэрозольный метод [1].

При применение аэрозольного метода ВРР на внешнем корпусе пилотируемого летательного аппарата размещаются фильтрационные гондолы. В классическом методе основным конструктивным материалом фильтрационных гондол является нержавеющая сталь или любой другой материал, обладающий высокой химической стойкостью и прочностными характеристиками. Такой выбор материала обуславливает необходимость проведения радиационной деактивации между вылетами. Летательный аппарат, снаряженный фильтрующим устройством, вылетает в область предполагаемого радиационного загрязнения после чего проходит исследуемую область. При этом летательный аппарат поддерживает постоянную скорость [2-4].

В работе рассматривается фильтрующее устройство (фильтрующий модуль) созданный для модифицированного метода ВРР. В рамках модификации метода, тяжелые конструктивные материалы, подлежащие деактивации, были заменены пластиком PLA, размеры установки были уменьшены. Модули были сделаны легкосъемными и заменяемыми для возможности их замены в случае избыточного загрязнения. Выбор материала был обусловлен его дешевизной, теоретической простотой его утилизации и его радиационной устойчивостью [5-6].

Для достижения целей работы был проведен эксперимент, в ходе которого модуль, выполненный из PLA, был помещен в радоновую камеру. Объемная активность радона в камере составляла 1000 (Бк/м^3). В радоновой камере поддерживалась температура в 20°C и влажность 45%. Для создания потока, имитирующего движение фильтрующего модуля в воздушном потоке используется вентилятор «ЭНЕРГОПРОМ ТВС 2», создающий скорость потока в 4 (м/с). Модуль находился в радоновой камере на протяжение 8 часов. Были сопоставлены прочностные характеристики свежеизготовленного модуля и модуля, эксплуатируемого в целевых условиях. Сравнение проводилось по вибрационной устойчивости модулей. Данная характеристика была выбрана для сравнения, так как основные нагрузки, которые испытывает модуль в ходе эксплуатации, имеют характер периодических и не периодических вибраций. Для свежеизготовленного модуля предельные значения виброускорения, при которых произошло разрушения конструкции по местам крепления, было зафиксировано на $28\frac{м}{с^2}$. Для модуля, извлеченного из радоновой камеры, аналогичный результат был зафиксирован при значении виброускорения равном $29\frac{м}{с^2}$. Изменений прочностных характеристик обнаружено не было.

Был проведен второй эксперимент, в ходе которого модуль, выполненный из PLA, был разобран и подвергнут процессу утилизации. Модуль был разобран на запчасти, крепеж был помещен в герметичную пластиковую упаковку, элементы, изготовленные из пластика PLA, были помешены в герметичную бочку, объемом 10 литров, выполненную из нержавеющей стали. Влажность в бочке была доведена до 100% с избытком воды, температура поддерживалась на уровне 70°C. На протяжении 20 недель с начала эксперимента проводились замеры с использованием штангенциркуля на элементах прототипа, выполненных из PLA. Замеры снимались с катушек (цилиндр диаметром 8 мм) и с внешнего кожуха (лист толщиной 2 мм) с интервалом в 2 недели. Результаты измерений отражены в табл. 1.

Табл. 1 Гидролиз элементов конструкции фильтрационного модуля

№ недели	Диаметр катушки, мм	Толщина кожуха, мм
0	8.1	2
2	7.9	1.8
4	7.5	1.6
6	7.0	1.1
8	6.6	0.7
10	6.1	0.4
12	5.4	0.1
14	4.9	-
16	4.4	-
18	3.7	-
20	3.1	-

После 12 недели большинство элементов конструкции разложилось на отдельные, хрупкие фрагменты. Объем, необходимый для хранения модуля, был сокращен с $2 * 10^{-3}м^3$ до $3 * 10^{-4}м^3$.

В результате исследования подтверждены прочностные характеристики пластика PLA в качестве конструктивного материала для систем радиационной разведки, и проверена возможность утилизации фильтрующего модуля из пластика PLA.

ЛИТЕРАТУРА

1. Архипов С.Ю., Натальина В.Н., Пагин Д.Ю. Технические средства контроля радиационного загрязнения атмосферы //Москва, Россия. - 2005. - С. 20-25.
2. Васильев А.П., Лобиков Е.А. Роль И.В. Роль Курчатова в создании системы дальнего обнаружения ядерного взрыва ///Москва, Россия. - 2003. - С. 28-34.
3. Васильев А.П. У истоков систем обнаружения ядерных взрывов на больших расстояниях //Москва, Россия. - 2008. - С. 42-45.
4. Матущенко А.М., Натальина В.Н. От СДО ССК до МСМ или об аэрозольном методе контроля ядерных взрывов //Москва, Россия. - 2005. - С. 56-59.
5. Белов Д. Биоразлагаемый полимер полилактид //Наука и инновации. – 2013. – Т. 9. – №. 127. – С. 21-23.
6. Марченко Л. А. и др. Влияние механического, термического и радиационного воздействия на структуру и свойства поли-L-лактида. – 2014.

УДК 532.517

А.А. Лобанов [1,2], Я.А. Бердников [1], В.И. Никитченко[2]
[1]Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого(*)
[2]Петербургский государственный университет путей сообщения Императора Александра I

ПРЕДСКАЗАНИЕ АСИММЕТРИИ ЗАРЯЖЕННЫХ ПИОНОВ В СТОЛКНОВЕНИЯХ ПОЛЯРИЗОВАННЫХ ПРОТОНОВ С ПОМОЩЬЮ ГЕНЕРАТИВНЫХ АЛГОРИТМОВ МАШИННОГО ОБУЧЕНИЯ

Введение. Исследование структуры протона остается одной из ключевых задач физики элементарных частиц. Основная сложность заключается в определении вкладов партонов (кварков и глюонов) в полный спин протона [1]. Для количественной оценки спиновых

(*) А.А. Лобанов, lobanov2.aa@edu.spbstu.ru

вкладов кварков и глюонов требуется анализ двойных продольных спиновых асимметрий (DLSA), возникающих при столкновениях продольно поляризованных протонов [2].

Экспериментальное измерение DLSA сопряжено с необходимостью обработки больших объемов экспериментальных данных, которые не всегда могут быть получены в рамках эксперимента [1]. Одним из подходов к решению этой задачи является применение методов генеративного машинного обучения.

Цели и задачи. Целью данной работы является разработка модели генеративно-состязательной сети (ГСС) [3] для предсказания рождения заряженных пионов в столкновении продольно поляризованных протонов. В задачи работы входит генерация столкновений продольно поляризованных протонов с использованием Pythia8 [4] и набора поляризованных PDF NNPDFpol11_100 [5], обучение модели ГСС и анализ предсказаний ГСС.

Методика исследования. Для описания кинематики рождения пионов в столкновении протонов были использованы следующие величины: z-компоненты импульса $p_{z\,q1}$ первого и $p_{z\,q2}$ второго партонов и p_x-, p_y-, p_z- компоненты импульса рожденного пиона (далее кинематические величины). При этом в процессе обучения ГСС использовались преобразованные версии $T(p_{z\,q1})$ и $T(p_{z\,q2})$ соответствующих величин [3].

С помощью перечисленных выше кинематических величин могут быть рассчитаны значения DLSA по формуле [2]

$$A_{LL} = \frac{d\Delta\sigma}{d\sigma},$$

где $\Delta\sigma$ и σ – сечения рождения в случае столкновения поляризованных и неполяризованных протонов [6].

При разработке модели ГСС была учтена возможность генерации событий при различных начальных энергиях столкновения. В качестве энергий были рассмотрены $\sqrt{s_{NN}}$ = 200 и 510 ГэВ, которые характерны для коллайдера RHIC эксперимента PHENIX [7].

Источником данных для обучения ГСС выступил Монте-Карло генератор Pythia8 [4] с набором поляризованных PDF NNPDFpol11_100 [5]. При каждой из энергий было сгенерировано по 500000 событий столкновения, из которых извлечены значения кинематических величин.

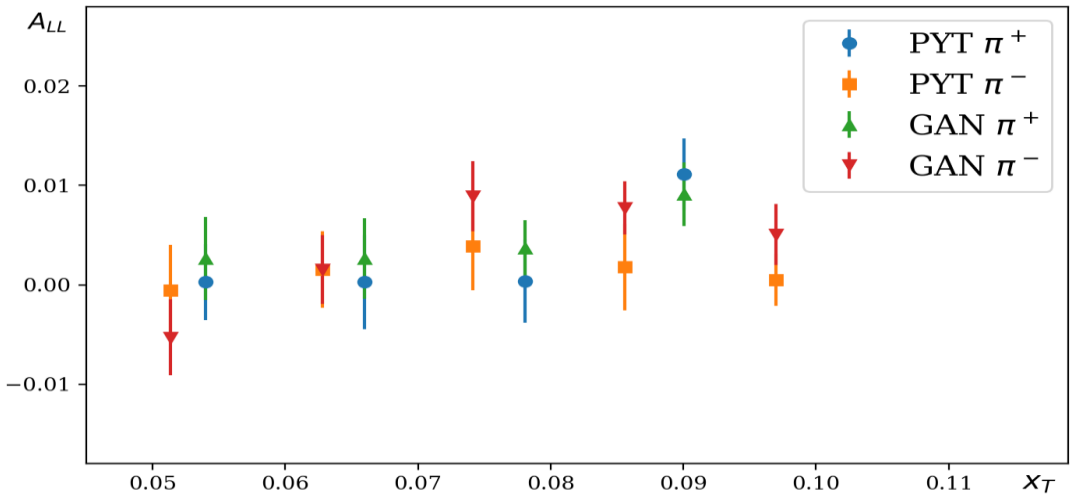


Рис. 1. Графики зависимости DLSA от x_T для положительно (круги и треугольники вверх) и отрицательно (квадраты и треугольники вниз) пионов при энергии $\sqrt{s_{NN}}$ = 200 ГэВ, полученные на основе предсказаний ГСС и Pythia8

На вход генератор ГСС ожидает 128-мерный вектор с элементами из нормального распределения и условные переменные, которые определяют параметры столкновения протонов: начальная энергия $\sqrt{s_{NN}}$, тип поляризации события и тип рожденного пиона. Число

скрытых слоев 8. Каждый слой состоит из 512 нейронами с активационной функцией "Leaky ReLU" с коэффициентом 0,2 [3]. Выход генератора - 6 генерируемых кинематических величин.

Дискриминатор ГСС обладает архитектурой схожей с генератором. На вход дискриминатор принимает 6 кинематических величин, а также условные переменные. Скрытые слои дискриминатора обладают параметрами как у генератора, но с добавлением (Spectral Normalization) [3]. Выходной слой дискриминатора состоит из 1 нейрона с линейной функцией активации.

Функция потерь ГСС была использована в виде наименьших квадратов. Обучение проводилось 1000 эпох. Оптимизатором градиентного спуска был выбран Adam с параметрами: шаг обучения $2 \cdot 10^{-4}$ для генератора и дискриминатора $\beta_1 = 0{,}9$, $\beta_2 = 0{,}5$ [8].

Результаты. На рис. 1 приведена зависимость DLSA A_{LL} заряженных пионов от доли импульса $x_T = \frac{2 \cdot p_T}{\sqrt{s_{NN}}}$, где p_T – поперечный импульс пиона, рассчитанных на основе предсказаний ГСС и PYTHIA8, при энергии $\sqrt{s_{NN}}$ = 200 ГэВ. Из рисунка следует, что предсказания ГСС позволяют получать значения асимметрий A_{LL}, совпадающие со значениями, полученными на основе данных PYTHIA8, с точностью до ошибок для обоих пионов.

На рис. 2 приведена зависимость DLSA A_{LL} от доли импульса x_T заряженных пионов при энергии $\sqrt{s_{NN}}$ = 510 ГэВ. На основе рисунка можно сделать вывод о том, что предсказания ГСС сохраняют свою точность вне зависимости от энергии столкновения.

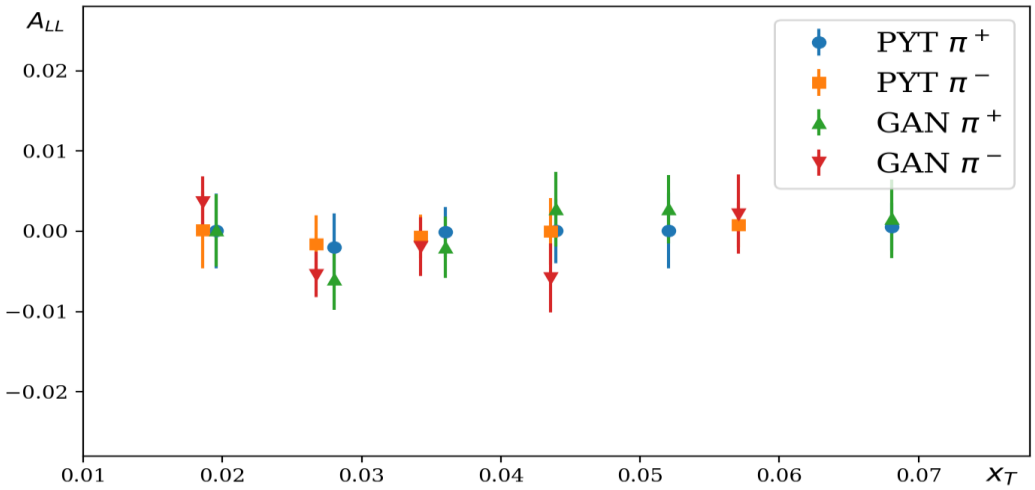


Рис. 2. Графики зависимости DLSA от x_T для положительно (круги и треугольники вверх) и отрицательно (квадраты и треугольники вниз) пионов при энергии $\sqrt{s_{NN}}$ = 510 ГэВ, полученные на основе предсказаний ГСС и Pythia8

Выводы. В данной работе представлена модель на основе генеративно-состязательной сети, предназначенная для предсказания DLSA в столкновениях продольно поляризованных протонов при энергиях в системе центра масс $\sqrt{s_{NN}}$ = 200 и 510 ГэВ. Продемонстрировано, что модель способна точно предсказывать значения асимметрий вне зависимости от типа рожденного пиона и энергии столкновения.

Работа выполнена в рамках Государственного задания на проведение фундаментальных исследований (код темы FSEG-2025-0009)

ЛИТЕРАТУРА

1. Ashman J. et. al., A measurement of the spin asymmetry and determination of the structure function g1 in deep inelastic muon-proton scattering, // Physics Letters. – 1988. – Vol. 206 (2). – P. 364.
2. Салеев В.А., Шипилова А.В. Двойные продольные спиновые асимметрии в прямом рождении фотонов на коллайдере NICA // Письма в ЭЧАЯ. – 2023. – Т.20, № 3(248). – С.417–421

3. Лобанов А.А., Бердников Я.А., Музяев Е.В. Генеративно-состязательная сеть как основа генератора полуинклюзивного глубоконеупругого рассеяния лептона на поляризованном протоне // Научно-технические ведомости СПбГПУ. Физико-математические науки. – 2024. – Т. 17. № 1. – С 93–102.
4. Sjöstrand T., Mrenna S., Skands P. A brief introduction to PYTHIA 8.1 // Computer Physics Communications. – 2008. – Vol. 178. – No. 11. – Pp. 852–867.
5. Nocera E. R., Ball R. D., Forte S., Ridolfi G., Rojo J. A first unbiased global determination of polarized PDFs and their uncertainties // Nuclear Physics B. – 2014. – Vol. 887. October. – Pp. 276–308.
6. Bomhof C.J. and Mulders P.J. Gluonic pole cross sections and single spin asymmetries in hadron-hadron scattering. // Journal of High Energy Physics. – 2007.– Vol. 10 (3). – P. 224-245.
7. PHENIX Collaboration. Measurement of charged pion double spin asymmetries at midrapidity in longitudinally polarized p+p collisions at $\sqrt{s} = 510$ GeV. // Phys. Rev. – 2020. – Vol. 102. – P. 321-340.
8. Imran Khan Mohd J., Ritahani Ismail A., Syed Qamrun N. Adam Optimization Algorithm for Wide and Deep Neural Network // Knowledge Engineering and Data Science. – 2019. – Vol. 2. – No 1. 01 June. – Pp. 41-46.

УДК 52-77

М.Н. Голубев[1], П.А. Кислицын[2], А.В. Иванчик[1,2]
[1]Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого(*)
[2]Физико-технический институт им. А.Ф.Иоффе

СВЕРХТОНКИЕ ПЕРЕХОДЫ В АТОМАХ И ВРАЩАТЕЛЬНЫЕ ПЕРЕХОДЫ В МОЛЕКУЛАХ РАННЕЙ ВСЕЛЕННОЙ КАК ВОЗМОЖНЫЙ ИСТОЧНИК СПЕКТРАЛЬНЫХ ИСКАЖЕНИЙ РЕЛИКТОВОГО ИЗЛУЧЕНИЯ

В скором будущем ожидаются первые измерения искажений спектра реликтового излучения, вызванных сверхтонким расщеплением основного электронного состояния атома водорода. В связи с этим возникает вопрос, какие еще элементы и соединения, существовавшие в Ранней Вселенной, могут вносить подобные искажения и насколько они сильны. В качестве потенциальных кандидатов в данной статье рассмотрено 5 атомов, 6 молекул и их ионы, наиболее распространенные в Ранней Вселенной.

Сверхтонкая структура – расщепление энергетических уровней вследствие взаимодействия спинов электронов и ядер. Линия 21 сантиметр или радиолиния нейтрального водорода широко используется в астрофизике, в частности для определения характеристик межзвездного газа. В работе [1] было показано, что этот переход также влияет на спектр реликтового излучения, вследствие того, что температура реликтового излучения и температура барионного вещества различаются. Это особенно заметно при красных смещениях (z) от 6.5 до 200. Другие атомы и молекулы Ранней Вселенной так же могли влиять на спектр реликтового излучения подобным образом.

В атомах мы рассматриваем изменение спина электрона на основном энергетическом уровне, в то время как в молекулах рассматриваем вращательные переходы в основном колебательном состоянии так как температура достаточно велика для их возбуждения (13-600 К), но недостаточна для возбуждения колебательных степеней свободы. Сверхтонкого перехода в атоме ^{4}He и его ионе не будет наблюдаться, так как спин ядра равен нулю. Также, не будет наблюдаться сверхтонких переходов в основном состоянии $^6Li^+$, $^7Li^+$, ^{3}He, так как в этих случаях полностью заполнены подуровни основного энергетического состояния, и в соответствии с принципом запрета Паули переход невозможен. Отклонение антенной температуры от температуры реликтового излучения задается формулой (1) из [1].

$$\delta T_b = \frac{T_s - T_R}{1+z}\tau_\vartheta \qquad (1)$$

Здесь T_s – спиновая температура атома водорода, T_R – температура реликтового излучения, z – космологическое красное смещение, τ_ϑ – оптическая толща, создаваемая веществом. Определяется формулой (2) из [1].

$$\tau_\vartheta = \frac{3(1-e^{\frac{E}{kT_s}})Anc^2}{8\pi\vartheta^2}\,\varphi(\vartheta) \qquad (2)$$

Здесь E – разность энергий между уровнями, A – коэффициент Эйнштейна, n – концентрация вещества, $\varphi(\vartheta)$ – профиль спектральной линии. В дальнейшем будем считать его дельта-функцией. Для простоты расчетов положим спиновую температуру всех частиц на одном и том же красном смещении одинаковой. Тогда относительная амплитуда

(*) М.Н. Голубев, golubew.maxim2015@yandex.ru

спектрального искажения будет равна отношению оптических толщин, что показано в формуле (3).

$$\alpha = \frac{\delta T_{bi}}{\delta T_{bH}} = \frac{\tau_{\vartheta i}}{\tau_{\vartheta H}} = \frac{\left(1 - e^{\frac{E_i}{kT_s}}\right) A_i n_i E_H^2}{\left(1 - e^{\frac{E_H}{kT_s}}\right) A_H n_H E_i^2} \quad (3)$$

В табл. 1 рассматриваются сверхтонкие переходы атомов и вращательный переход, дающий наибольшее искажение реликтового излучения для каждой молекулы при температуре 200 К.

Табл. 1. Относительная амплитуда спектрального искажения для атомов и молекул

вещество	Длина волны, мм	$\frac{n_i}{n_H}, z = 10, [2]$	Коэффициент Эйнштейна, $с^{-1}$	α	источник
H	216	1	$3 * 10^{-15}$	1	[3]
D	916	10^{-5}	$5 * 10^{-17}$	10^{-6}	[3]
$^3He^+$	34,5	10^{-27}	$2 * 10^{-12}$	10^{-25}	[3]
^6Li	1320	$5 * 10^{-13}$	$2 * 10^{-17}$	$5 * 10^{-25}$	[3]
^7Li	373	$8 * 10^{-12}$	$8 * 10^{-16}$	$2 * 10^{-14}$	[3]
H_2	0,004	$6 * 10^{-7}$	$3 * 10^{-11}$	$2 * 10^{-10}$	[4]
H_2^+	0,006	$9 * 10^{-15}$	$2 * 10^{-10}$	$9 * 10^{-15}$	[5]
HD	0,006	$4 * 10^{-10}$	0,05	$6 * 10^{-4}$	[6]
HD^+	0,009	10^{-18}	0,6	$7 * 10^{-8}$	[7]
HeH^+	0,01	$2 * 10^{-14}$	74	$2 * 10^{-3}$	[6]
LiH	0,021	$9 * 10^{-20}$	23600	$2 * 10^{-7}$	[8]
LiH^+	0,032	$5 * 10^{-20}$	2341	10^{-30}	[8]
H_3^+	0,011	$8 * 10^{-17}$	$2 * 10^{-5}$	$2 * 10^{-12}$	[9]
H_2D^+	0,008	$2 * 10^{-20}$	0,33	$2 * 10^{-12}$	[10]

Из-за того, что все эти линии слабее линии водорода, именно она будет измеряться в первую очередь. Нужно посмотреть, будут ли пересекаться диапазоны частот линии водорода и других веществ. Атомарный водород спектрально искажает реликтовое излучение при Z от 6,5 до 200. Соответственно, сегодня это искажение можно наблюдать на длинах волн от 136,5 до 400 см. Предположим, что остальные атомы и молекулы искажают реликтовое излучение при тех же Z. Найдем диапазон длин волн переходов, которые сегодня пересекаются с диапазоном нейтрального водорода из системы уравнений (4).

$$\begin{cases} z_{recomb}\lambda < z_{init}\lambda_H \\ z_{init}\lambda > z_{recomb}\lambda_H \end{cases} \quad (4)$$

Здесь $z_{recomb} = 6{,}5$ z_{init}=200, λ_H=21,6 см. Решение данной системы уравнений даст нам диапазон длин волн $(0{,}7; 750)$ см. В интервал длин волн, описанный выше, попадают линии D, ^{3}He$^+$, ^{6}Li , ^{7}Li. Как видно из табл. 1, в данном диапазоне относительно водорода самая сильная линия – линия дейтерия, однако она слабее на 6 порядков.

В данной работе было проанализировано влияние веществ Ранней Вселенной на спектр реликтового излучения. После водорода самое сильное влияние оказывает дейтерий, но оно слабее на 6 порядков. Как следствие, при исследовании искажения спектра реликтового излучения влияние веществ помимо водорода можно считать пренебрежимо малым и не учитывать.

ЛИТЕРАТУРА
1. Pritchard J., Loeb A. 21cm cosmology in 21 century // Reports on Progress in Physics, -2012, -Vol.75(8), -id. 086901.
2. Gallie D, Palla F., The Dawn of Chemistry // Annu. Rev. Astron. Astrophys.,-2012, -Vol.51, -P.163-206
3. Wiese W.L., Fuhr J.R. - Accurate Atomic Transition Probabilities for Hydrogen, Helium, and Lithium //J. Phys. Chem. Ref. Data , -2009, -Vol 38, -P.565-720
4. Goldsmith P.,Velusamy,Thangasamy ,Li, Di , Langer - Molecular Hydrogen Emission from the Boundaries of the Taurus Molecular Cloud.// The Astrophysical Journal, -2010, -Vol.715(2), -P. 1370-1382.
5. Pilon H. O., Baye D., Quadropole transitions in the bound rotational-vibrational spectrum of the hydrogen molecular ion // J.Phys.B., -2012, -Vol. 54, -P.1533-1536
6. C. M. Coppola, L. Lodi, J.Tennison. Radiative cooling functions for primordial molecules // MNRAS -2011 -V. 415 (1), -P.487
7. R. E. Moss ,L. Valenzano The dipole polarizability of the hydrogen molecular cation HD+ and other isotopomers // An International Journal at the Interface Between Chemistry and Physics, -2002, Vol.100(10), -P.1527-1535
8. Gianturco F. et.al. Computed distributions of rovibrational transitions in LiH (XXE+) and LiH+ (X2E+) // Astronomy and Astrophysics supplement Series -1996 -V.117 (2) -P.377-392
9. Kawaoka K., Borkman F. Electric, Magnetic, and Spectral Properties of H 3 + Ground State Calculated from SingleCenter Wavefunctions // The Journal of Chemical Physics -1971 -V.55, -P. 4637–4641
10. Khersonskii V.K. et.al. Rotational transitions of the interstellar H2D+ molecule// AZ, -1987 -V.64 , -P.274

УДК 524.387

Д.К. Романов[1], А.В. Бобаков[2], А.Ю. Кириченко[3],
А.В. Карпова[2], Ю.А. Шибанов[2,1], Д.А. Зюзин[2]
[1]Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого(*)
[2]Физико-технический институт А.Ф. Иоффе РАН
[3]Институт астрономии Национального автономного университета Мексики, Мексика

ИССЛЕДОВАНИЕ КАНДИДАТА В МИЛЛИСЕКУНДНЫЕ ПУЛЬСАРЫ В ТЕСНОЙ ДВОЙНОЙ ЗВЕЗДНОЙ СИСТЕМЕ, СВЯЗАННОГО С ГАММА-ИСТОЧНИКОМ 4FGL J2054.2+6904

Миллисекундные пульсары (МСП) – подкласс пульсаров с периодом вращения менее 30 мс. МСП в тесных двойных системах с орбитальным периодом менее 1 дня и маломассивным компаньоном, называют «пауками». Сторона компаньона, обращенная к пульсару, нагревается и испаряется под действием пульсарного ветра. Среди таких пульсаров выделяют «красноспинных пауков» (redback, RB) и «черных вдов» (black widow, BW). В системах типа redback компаньон представляет собой невырожденную звезду с массой $M_c \approx 0.1 - 1\ M_\odot$, а в системах типа black widow компаньон – это частично вырожденная звезда с массой $M_c < 0.05\ M_\odot$.

Неотождествленный гамма-источник 4FGL J2054.2+6904, открытый обсерваторией Fermi, был недавно идентифицирован в рентгеновском и оптическом диапазоне как возможный кандидат в миллисекундные пульсары в тесной двойной звездной системе [1-2]. Поле этого объекта представлено на рис. 1. Согласно каталогу Gaia, его координаты R.A = 20:53:58.99298 и Dec. = +69.05:19.7063. В работе [2] с помощью фотометрических данных из каталога Zwicky Transient Facility (ZTF) была проведена оценка орбитального периода с помощью метода Ломба-Скаргла [3-4]. В полученном спектре мощности колебаний яркости были обнаружены 2 равнозначных пика, соответствующие периодам 7,5 часов и 15 часов. Свернутые с этими периодами кривые блеска демонстрировали один или два горба за период

(*) Д.К. Романов, dr.romanoff2003@gmail.com

соответственно. Амплитуда периодической переменности блеска кандидата составляла ≈0,4 звездной величины, что является типичным для RB систем [2]. Однако соотношение сигнала к шуму архивных данных не позволяет детально исследовать свойства кривых блеска. Целью нашей работы было выяснить какой из возможных периодов является реальным, а также получить более детальную кривую блеска для определения параметров этой тесной двойной системы.

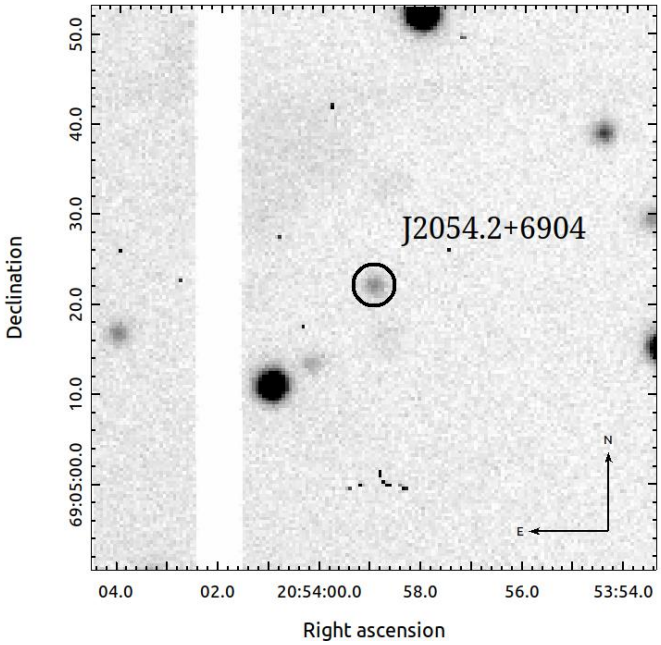


Рис. 1. Поле исследуемого объекта в оптическом диапазоне размером $1' \times 1'$.
Черным кругом обозначено положение объекта

Для осуществления данного исследования были проведены оптические фотометрические наблюдения с помощью 2.1-метрового телескопа OAN-SPM, расположенного в Мексике. Наблюдения прошли в июне 2024 года на протяжении 4 ночей в широкополосных фильтрах V и R. Было получено 68 изображений объекта, из которых 54 изображений в фильтре V и 14 изображений – в фильтре R. Первичная обработка данных, а также фотометрия были выполнены с использованием пакета прикладных программ IRAF. Для калибровки и построения кривых блеска нами была написана программа на языке программирования Python. В результате нами были получены кривые блеска в фильтрах V и R, которые представлены на рис. 2.

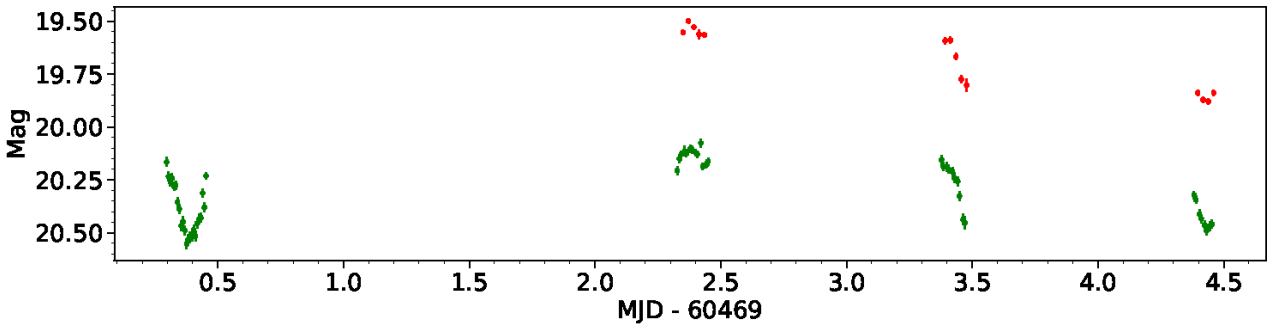


Рис. 2. Кривые блеска по ночам наблюдений в фильтрах V (зеленая) и R (красная)

Мы свернули полученные кривые блеска в фильтрах V и R с орбитальным периодом, полученным ранее. Они представлены на рис. 3. и имеют асимметричную форму, что подтверждает орбитальный период, равный 7,5 часов, и исключает период 15 часов.

Амплитуда переменности блеска исследуемого объекта составила $0{,}43 \pm 0{,}03$ и $0{,}38 \pm 0{,}02$ в фильтрах V и R соответственно. При этом цвет оказался равен $0{,}65 \pm 0{,}04$ и $0{,}60 \pm 0{,}04$ в максимуме и минимуме, что с учетом межзвездного поглощения $E(B-V) = 0{,}35 \pm 0{,}04$ соответствует температуре 5700 ± 300 К в максимуме и 5400 ± 300 К в минимуме. Сильная асимметрия кривых блеска может свидетельствовать о наличии горячего пятна на поверхности звезды-компаньона миллисекундного пульсара, которое обусловлено его несимметричным нагревом пульсарным ветром. Подобная асимметрия встречается в двойных системах типа redback. Одним из примеров подобной асимметрии из-за горячего пятна является недавно подтвержденный пульсар PSR J2055+1545 [5].

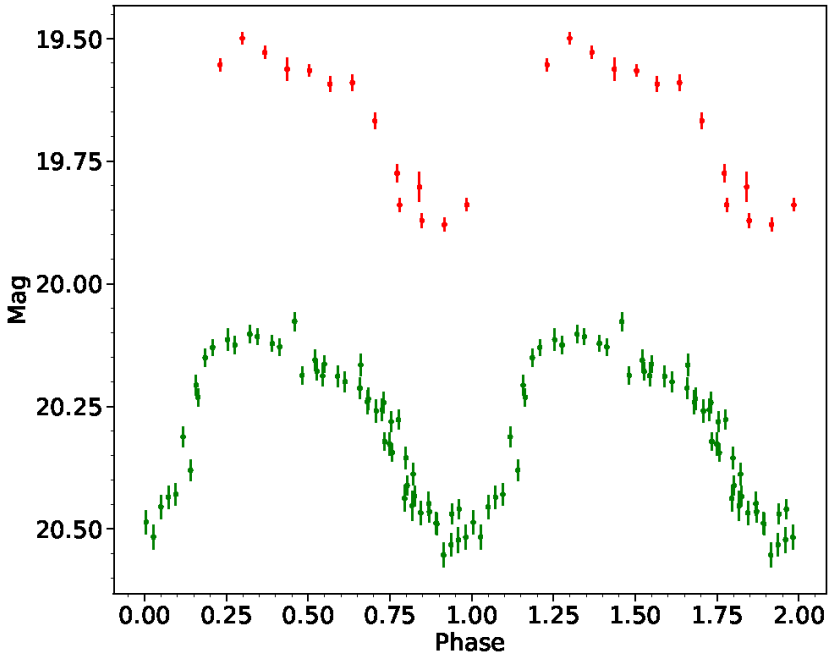


Рис. 3. Кривые блеска в зависимости от фазы орбитального периода, равного 7,5 часов, в фильтрах V (зеленая) и R (красная)

Проведенные наблюдения и анализ полученных данных позволили определить орбитальный период этой системы, равный 7,5 часам, уточнить амплитуду переменности и форму кривой блеска. Полученные амплитуда переменности блеска и орбитальный период позволяют сделать вывод о принадлежности этой двойной системы, связанной с гамма-источником 4FGL J2054.2+6904, к системам типа redback. Спектральные наблюдения этого объекта дадут возможность получить оценку таких параметров, как массы компонент системы, наклонение орбиты, системную скорость и спектральный класс компаньона.

ЛИТЕРАТУРА

1. Kerby S., Kaur A., Falcone A.D., Eskenasy R., Hancock F., Stroh M.C., Ferrara E.C., Ray P.S., Kennea J.A., Grove E. Multiwavelength Spectral Analysis and Neural Network Classification of Counterparts to 4FGL Unassociated Sources // The Astrophysical Journal. – 2021. – Vol. 923. – Issue 1. – id.75. – P. 14

2. Karpova A.V., Zyuzin D.A., Shibanov Yu.A., Gilfanov M.R. A new redback pulsar candidate 4FGL J2054.2+6904 // Monthly Notices of the Royal Astronomical Society. – 2023. – Vol. 524. – Issue 2. – P. 3020-3025.

3. Lomb N.R. Least-Squares Frequency Analysis of Unequally Spaced Data // Astrophysics and Space Science. – 1976. – Vol. 39. – Issue 2. – P. 447-462.
4. Scargle J.D. Studies in astronomical time series analysis. II. Statistical aspects of spectral analysis of unevenly spaced data // The Astrophysical Journal. – 1982. – Vol. 263. – P. 835-853
5. Turchetta M., Sen B., Simpson J.A., Linares M., Breton R.P., Casares J., Kennedy M.R., Shahbaz T. Discovery of the variable optical counterpart of the redback pulsar PSR J2055+1545 // Monthly Notices of the Royal Astronomical Society. – 2025. – Vol. 538. – Issue 1. – P. 380-394.

УДК 530.22; 533.9.

В.А. Елатонцев, С.П. Рощупкин, В.В. Дубов
Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого(*)

РЕЗОНАНСНОЕ РАССЕЯНИЕ УЛЬТРАРЕЛЯТИВИСТСКИХ ЭЛЕКТРОНОВ НА ПОЗИТРОНАХ В СИЛЬНОМ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОМ ПОЛЕ: КАНАЛ А

Введение. Одним из наиболее перспективных направлений исследований в области квантовой электродинамики (КЭД), являются процессы, происходящие в сильных электромагнитных полях. Такой вектор развития науки обусловлен созданием и развитием мощных источников лазерного излучения, и их интенсивное применение в различных областях. Особенностью процессов, происходящих в сильных электромагнитных полях, является возможность их протекания как в резонансных, так и не резонансных каналах. В частности, во внешнем поле могут возникать так называемые резонансы Олейника [1-5], обусловленные тем, что во внешнем поле становятся разрешенными процессы низших порядков по постоянной тонкой структуры (стимулированные внешним полем процессы КЭД). Важно отметить, что вероятность резонансного протекания процессов КЭД во внешнем поле может значительно (на несколько порядков величины) превышать вероятность аналогичного процесса, протекающего в отсутствие внешнего поля. Этот эффект открывает новые возможности для изучения как фундаментальных явлений, так и для прикладных исследований в области сильных лазерных полей.

В данной работе теоретически изучен резонансный канал при рассеянии ультрарелятивистских электрона на позитроне в поле сильной монохроматической рентгеновской волны. Используется релятивистская система единиц: $\hbar = c = 1$.

Исходные положения. В условиях резонанса исходный процесс второго порядка эффективно распадается на два процесса первого порядка. При этом начальные и конечные электроны и позитроны летят в узком конусе, который находится вдали от направления распространения волны. Основным параметром в изучаемом процессе является классический релятивистски-инвариантный параметр $\eta = eF\lambda\!\!\!^{-}/m$, численно равный отношению работы поля на длине волны к энергии покоя электрона. Кроме этого, параметрами задачи являются квантовые параметры Комптон-эффекта $(\varepsilon_{\pm C})$:

$$\varepsilon_{\pm C} = \frac{E_{\pm}}{\omega_C},\ \omega_C = \frac{m_*^2}{4\omega \sin^2(\theta/2)},\ E_i = E_+ + E_-,\ \ E_c = \frac{E_+ E_-}{E_i}. \qquad (1)$$

Здесь ω_C – характерная энергия Комптон-эффекта, $E_{\pm}$ – ультрарелятивистские энергии позитрона и электрона до рассеяния, E_i и E_c – суммарная и комбинационная энергии начальных частиц, $m_* = m\sqrt{1+\eta^2}$ – эффективная масса электрона в поле циркулярно-

(*) В.А. Елатонцев, yelatontsev@gmail.com

поляризованной волны, $\theta = \measuredangle\left(\mathbf{k}, \mathbf{p}_{\pm}\right) \sim 1$ – угол между импульсами электрона (позитрона) и волны.

Резонансная кинематика процесса. В условиях резонанса промежуточный фотон в поле волны становится реальным: $q^2 = 0$. При этом, имеются два резонансных рассеивательных канала реакции (рис. 1). В результате этого исходный процесс второго порядка по постоянной тонкой структуры эффективно распадается на два процесса первого порядка - стимулированные внешним полем процессы Комптон-эффекта. Учитывая законы сохранения 4-импульса в первой вершине и резонансное условие, можно определить зависимость резонансной энергии конечного электрона $\left(E'_{-}\right)$ от квантового параметра Комптон-эффекта $\left(\varepsilon_{-C}\right)$, его углов вылета $\left(\delta'^2_{-} = E^2_{-}\theta'^2_{-}/m^2_{*}\right)$ и числа поглощенных фотонов волны $\left(l_1 \geq 1\right)$:

$$x'_{-A} = \frac{\left(2 + l_1\varepsilon_{-C}\right) \pm \sqrt{\left(l_1\varepsilon_{-C}\right)^2 - 4\delta'^2_{-}}}{2\left(1 + l_1\varepsilon_{-C} + \delta'^2_{-}\right)} \leq 1, \quad x'_{-A} = \frac{E'_{-A}}{E_{-}}, \quad 0 \leq \delta'^2_{-} \leq \frac{1}{4}\left(l_1\varepsilon_{-C}\right)^2. \tag{2}$$

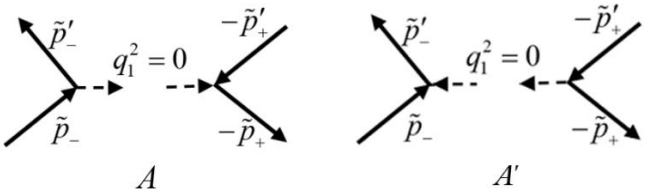


Рис. 1. Диаграммы Фейнмана резонансного рассеяния электрона на позитроне в поле плоской электромагнитной волны. Каналы A и A' – рассеивательные. Сплошные линии отвечают функциям Волкова для электрона и позитрона

Из уравнения (2) следует, что для электрона имеются две ветви энергий: верхняя ($E'_{-(u)}$ со знаком «+» перед корнем квадратным) и нижняя ($E'_{-(d)}$ - со знаком «-» перед корнем квадратным). При этом, для конечного позитрона в силу общего закона сохранения получим также две ветви энергий:

$$E'_{+(d)} \approx E_i - E'_{-(u)}, \quad E'_{+(u)} \approx E_i - E'_{-(d)}. \tag{3}$$

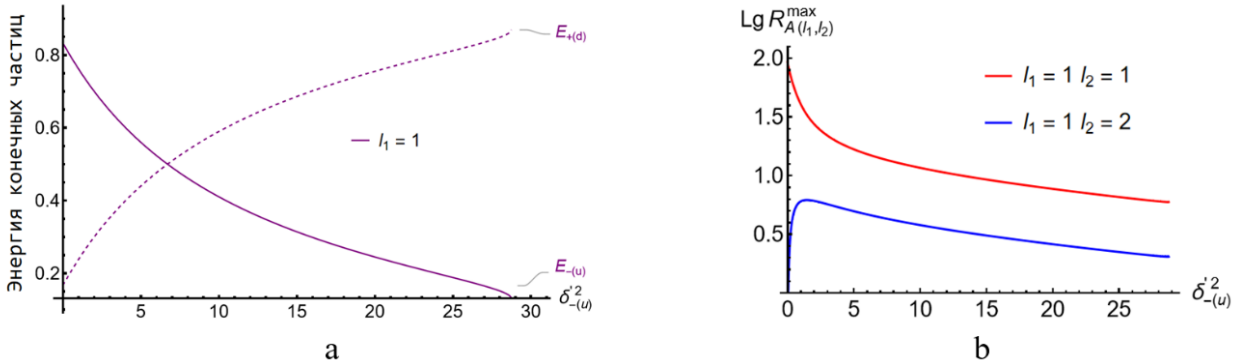


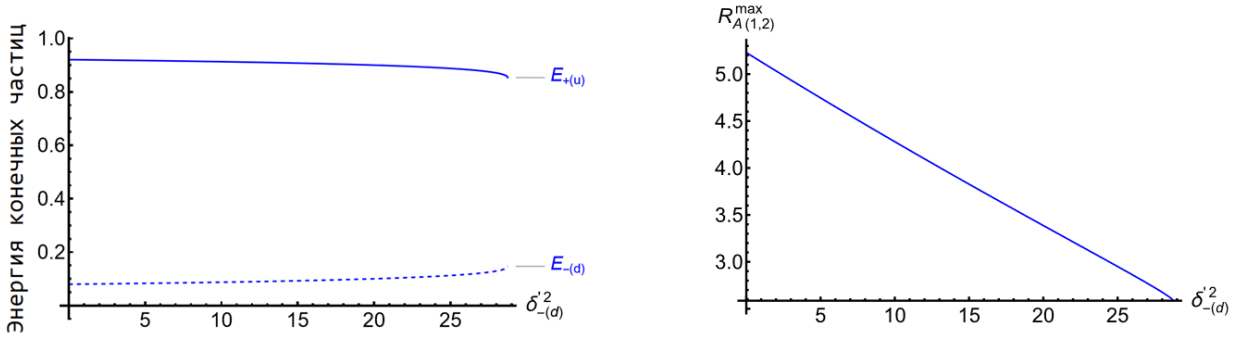
Рис. 2. Зависимости энергии конечных частиц (2), (3) (в единицах E_i) (случай a) и максимального резонансного сечения (5) (в единицах r_e^2) (случай b) от угла вылета электрона (верхняя ветка) для различных чисел поглощенных фотонов волны. Начальные параметры: $E_{+} = 14 МэВ$, $E_{-} = 70 МэВ$, $\omega = 20$ keV, $I = 7.44 \cdot 10^{26}$ Wcm^{-2} $(\eta = 1)$, $\omega_c = 6.52 МэВ$

Важно отметить следующее ограничение на число излученных фотонов волны во второй вершине для нижней ветви энергии позитрона $\left(E'_{+(d)}\right)$:

$$l_2 \geq \lceil \rho_* \rceil, \quad \rho_* = \frac{1}{\varepsilon_{+C}}\left(1+\frac{1}{\beta_{l_1}}\right), \quad \beta_{l_1} = 1+\frac{E_+}{E_-}\left(1+\frac{2}{l_1\varepsilon_{-C}}\right). \tag{4}$$

При этом, для верхней ветви энергий позитрона число фотонов волны во второй вершине заключено в интервале:

$$\lceil \rho'_* \rceil \leq l_2 \leq \lfloor \rho_* \rfloor, \quad \rho'_* = \frac{1}{\varepsilon_{+C}\beta'_{l_1}}, \quad \beta'_{l_1} = 1+\frac{E_+}{E_-}\left(1+\frac{1}{l_1\varepsilon_{-C}}\right). \tag{5}$$



a b

Рис. 3. Зависимости энергии конечных частиц (2), (3) (в единицах E_i) (случай a) и максимального резонансного сечения (5) (в единицах r_e^2) (случай b) от угла вылета электрона (нижняя ветка) для числа поглощенных фотонов волны $l_1 = 1,\ l_2 = 2$. Начальные параметры: $E_+ = 5 МэВ,\ E_- = 70 МэВ,$ $\omega = 20$ keV, $I = 7.44 \cdot 10^{26}$ Wcm^{-2} $(\eta = 1)$, $\omega_c = 6.52 МэВ$

Резонансное дифференциальное сечение. Стандартным образом получено максимальное дифференциальное сечение рассеяния:

$$R^{\max}_{A(l_1 l_2)} = \frac{d\sigma^{\max}_{A(l_1 l_2)}}{d\delta'^2_-} = r_e^2 b_A \Psi_A, \tag{6}$$

$$b_A = \frac{4\pi^3}{\alpha^2\sqrt{\left(1+\delta_i^2\right)\left(1+\delta_i^2-4E_c/E_i\right)}\,\mathrm{P}^2\left(\eta,\varepsilon_{-C}\right)}\left(\frac{m}{E_i}\right)^2, \tag{7}$$

$$\Psi_A = \left(\frac{x'_-}{x'_+}\right) K_{l_1}\left(\eta,\varepsilon_{-C},\delta'^2_-\right)\cdot K_{l_2}\left(\eta,\varepsilon_{+C},\delta'^2_+\right). \tag{8}$$

Здесь функции K_{l_1} и K_{l_2} определяются вероятностью стимулированного внешним полем Комптон-эффекта [3]. Из рис. 2, 3 видно, что максимальное дифференциальное сечение в точках максимума может значительно превышать соответствующее дифференциальное сечение без внешнего поля: $R^{\max}_{A(1,1)} = 91.44,\ R^{\max}_{A(1,2)} = 6.19.$ Отметим, что полученные результаты для канала A можно также использовать и для канала A', если в вышеприведенных формулах сделать переобозначения: $l_{1,2} \to -l_{1,2},\ q \to -q.$ При этом, во второй вершине начальный позитрон поглощает l_2 - фотонов волны и переходит в конечное состояние с излучением промежуточного фотона. В первой вершине начальный электрон сталкивается с промежуточным фотоном и переходит в конечное состояние с излучением l_1 - фотонов волны.

ЛИТЕРАТУРА
1. Roshchupkin, S. P., "Resonant Effects in Collisions of Relativistic Electrons in the Field of a Light Wave" // Las. Phys., Vol. 6, No. 5, 837-858, 1996.
2. Roshchupkin, S. P. and A. I. Voroshilo, Resonant and Coherent Effects of Quantum Electrodynamics in the Light Field // Naukova Dumka, Kiev, 2008.
3. Ritus, V. I. and A. I. Nikishov, "Quantum electrodynamics phenomena in the intense field" // Trudy FIAN, Vol. 111, Nauka, Moscow, 1979.
4. Denisenko, O. I., and S. P. Roshchupkin, "Resonant Scattering of an Electron by a Positronin the Field of a Light Wave" // Las. Phys., Vol. 9, No. 5, 1108-1112, 1999.
5. V.A.Yelatontsev, S.P.Roshchupkin and V.V. Dubov. Resonant Production of an Ultrarelativistic Electron–Positron Pair at the Gamma Quantum Scattering by a Field of the X-ray Pulsar // Universe – 2020, – Vol.6, – P.164.

УДК 533.9.01

И.Р. Мулюков, А.Г. Полетаева, Е.Г. Кавеева, И.Ю. Сениченков, В.А. Рожанский
Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого(*)

ДИНАМИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ КОДОМ SOLPS-ITER РАЗРЯДА С ИЗЛУЧАЮЩЕЙ X-ТОЧКОЙ В УСТАНОВКЕ ASDEX-UPGRADE

Режим с излучающей X-точкой (далее – XPR) широко наблюдается экспериментально на многих токамаках, таких как ASDEX-Upgrade [1-3], JET [3], TCV [2], где при высоком напуске примеси наблюдается область сильного излучения на расстоянии менее 10–15 см над X-точкой. Эта область характеризуется переизлучением потоков тепла в широкий телесный угол внутри сепаратрисы в окрестности X-точки, вследствие чего пластины дивертора оказываются практически полностью защищенными от тепловых нагрузок. При развитии XPR давление плазмы в установке падает не сильно [1], и пропадают опасные краевые неустойчивости. Поэтому XPR является перспективным режимом для будущих термоядерных установок, таких как ITER, где вопрос безопасной и стабильной работы дивертора стоит наиболее остро. Ранее моделирование режима с излучающей X-точкой кодом SOLPS-ITER для токамака ASDEX-Upgrade проводилось только в стационарном режиме, с фиксированными плотностью и температурой на границе расчетной области [4].

В данной работе представлены первые результаты анализа перехода в режим XPR для токамака ASDEX-Upgrade, полученные с помощью динамического моделирования кодом SOLPS-ITER с напуском примесного газа азота ($\Gamma_N = 10^{21}$ атомов/с). В качестве начального состояния взят стационарный расчет без примеси азота, основанный на экспериментальном разряде в режиме улучшенного удержания №28903. Для объяснения процессов, ответственных за формирование холодной излучающей области в X-точке, было проанализировано уравнение для температуры электронов, которое может быть получено из баланса тепла, решаемого в коде SOLPS-ITER, и которое при отсутствии неупругих процессов совпадает с уравнением, представленным Брагинским [5]:

$$\frac{3}{2}n_e\frac{\partial T_e}{\partial t}+\frac{3}{2}\vec{\Gamma}_e\cdot\nabla T_e+\nabla\cdot\vec{q}_{ex}^{\nabla T}+\nabla\cdot\vec{q}_{ey}^{\nabla T}+\nabla\cdot\vec{q}_{e||}^{u}=-p_e\nabla\cdot\vec{V}_{e\parallel}-p_e\nabla\cdot\vec{V}^{E\times B}-p_e\nabla\cdot\vec{V}_e^{\nabla B}-\vec{V}_e^{\nabla B}\cdot\nabla p_e-\frac{3}{2}T_eS_e+Q_{ion}+Q_{rad}-Q_{ei}+Q_e^{fr} \quad (1)$$

(*) И.Р. Мулюков, mulyukov.ir@edu.spbstu.ru

Поток электронов в уравнении (1) определен как: $\vec{\Gamma_e} = n\vec{V}_e^{||} + n\vec{V}_e^{E\times B} + n\vec{V}_e^{\nabla B} - D_e^{AN}\nabla n + n\vec{V}_e^{AN}$, а теплопроводностные потоки тепла: $\vec{q}_{ex}^{\nabla T} \approx -\kappa_{e||}\nabla_{||}T_e$, $\vec{q}_{ey}^{\nabla T} \approx -\kappa_e^{AN}\nabla_{\perp}T_e$.

Схематическое изображение потоков тепла изображено на рис. 1а. При режиме XPR основным потоком тепла в область X-точки является продольный поток за счет классической теплопроводности. Он уравновешивается остальными слагаемыми, которые отражают физические процессы, приводящие к остыванию. Охлаждение X-точки начинается тогда, когда необходимый для такой компенсации продольный поток тепла требует существенной полоидальной вариации электронной температуры. Поэтому в балансе тепла удобно поставить дивергенцию полоидальной проекции продольного потока тепла $\vec{q}_{ex}^{\nabla T}$ в левой части уравнения, а остальные слагаемые объединить по группам в правой части:

$$\nabla\cdot\vec{q}_{ex}^{\nabla T} = -\frac{3}{2}n_e\frac{\partial T_e}{\partial t} - \nabla\cdot\vec{q}_{ey}^{\nabla T} - \overbrace{\left(\frac{3}{2}\vec{\Gamma}_e\cdot\nabla T_e + p_e\nabla\cdot\vec{V}_{e||} - p_e\nabla\cdot\vec{V}^{E\times B} - p_e\nabla\cdot\vec{V}_e^{\nabla B} - \vec{V}_e^{\nabla B}\cdot\nabla p_e + \nabla\cdot\vec{q}_{e||}^{u}\right)}^{\text{конвективное слагаемое: } Q_e^{conv}} + \overbrace{\left(Q_{ion} - \frac{3}{2}T_eS_e\right)}^{\text{ионизация и нагрев}} + Q_{rad} - Q_{ei} + Q_e^{fr} \quad (2)$$

Рассмотрим подробнее физический смысл слагаемых в правой части. Первое слагаемое $\frac{3}{2}n_e\frac{\partial T_e}{\partial t}$ описывает эволюцию температуры во времени, второе слагаемое $\nabla\cdot\vec{q}_{ey}^{\nabla T}$ является дивергенцией потока тепла, связанного с аномальной теплопроводностью.

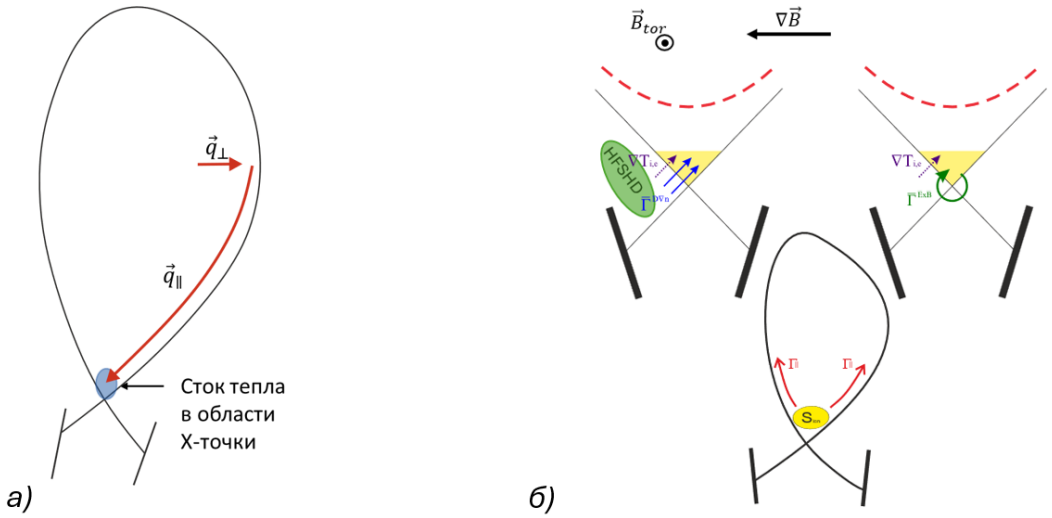


Рис. 1. Схематическое изображение потоков тепла (а), качественное изображение конвективных потоков и источника ионизации, приводящие к охлаждению области X-точки (б)

Конвективный член Q_e^{conv} состоит из нескольких слагаемых. Слагаемое $\sim \vec{\Gamma}_e\cdot\nabla T_e$ представляет собой конвективное перемешивание горячей плазмы внутри сепаратрисы и холодной плазмы снаружи от нее. Оно определяется, в основном, потоками за счет аномальной диффузии и вихревым электрическим дрейфом, что качественно проиллюстрировано на рис. 1б. Рассмотрим подробнее эти механизмы. В токамаке ASDEX-Upgrade наблюдается холодная область с высокой плотностью со стороны сильного магнитного поля (High Field Side High Density, HFHSD), обеспечивающая аномальную диффузию холодной плазмы за сепаратрису (рис. 1б). Такое перемешивание, совместно с источником ионизации, приводит к

уменьшению электронной температуры в области X-точки. В то же время давление возрастает и подбирается таким образом, чтобы продольные потоки частиц уравновешивали отрицательную дивергенцию радиальных потоков и источник частиц за счет ионизации. Возрастание давления, согласно балансу сил для электронов $\nabla_{\parallel}\varphi = \nabla_{\parallel}p_e$, приводит к возникновению максимума потенциала в X-точке. Вокруг него появляется вихревой электрический дрейф, который дополнительно увеличивает перемешивание и охлаждение плазмы (рис. 1б). Также в конвективном члене есть слагаемые $\sim p_e\nabla\cdot\vec{V}_e$, описывающие охлаждение плазмы за счет ее расширения.

Следующее слагаемое в уравнении (2) определяется потерями тепла на ионизацию $Q_{ion} = -E_{ion}S_e$ и нагревом появившихся при ионизации электронов до фоновых температур плазмы $-\frac{3}{2}T_eS_e$. Этот механизм был предложен как основной в наиболее популярной на сегодняшний день модели формирования XPR, представленной в работе [6]. Слагаемое Q_{rad}, связанное с потерями тепла на излучении примеси, согласно этой работе, начинает быть существенным при температуре 10–20 эВ и определяет баланс энергии в режимах с развитой X-точкой [4,6]. Помимо этого, есть источник тепла за счет теплообмена между электронами и ионами Q_{ei}, вклад которого становится заметным только в режимах с развитой X-точкой. Остальные слагаемые в уравнении (2) малы и их вкладом можно пренебречь.

Рассмотрим результаты моделирования. Зависимость температуры электронов в X-точке от времени изображена на рис. 3а. Рассмотрим далее компоненты уравнения (2) в тот момент, когда температура в X-точке начала значительно падать (зеленая область на рис. 2а) и проинтегрируем их по области окрестности X-точки, представленной на рис. 2б. Результаты интегрирования представлены на рис. 3 в зависимости от температуры в X-точке. Все основные слагаемые, показанные на графике сплошными линиями, отрицательны, поскольку они отражают потери тепла. Видно, что основным слагаемым до значения температуры $\sim$40 эВ является конвективное слагаемое, по модулю оно порядка $2.5 * 10^5$Вт. Следующим по величине является слагаемое с ионизацией и нагревом ионизованных частиц, оно порядка $1.3 * 10^5$Вт. Излучение начинает давать основной вклад в баланс уже при температуре $\sim$40 эВ.

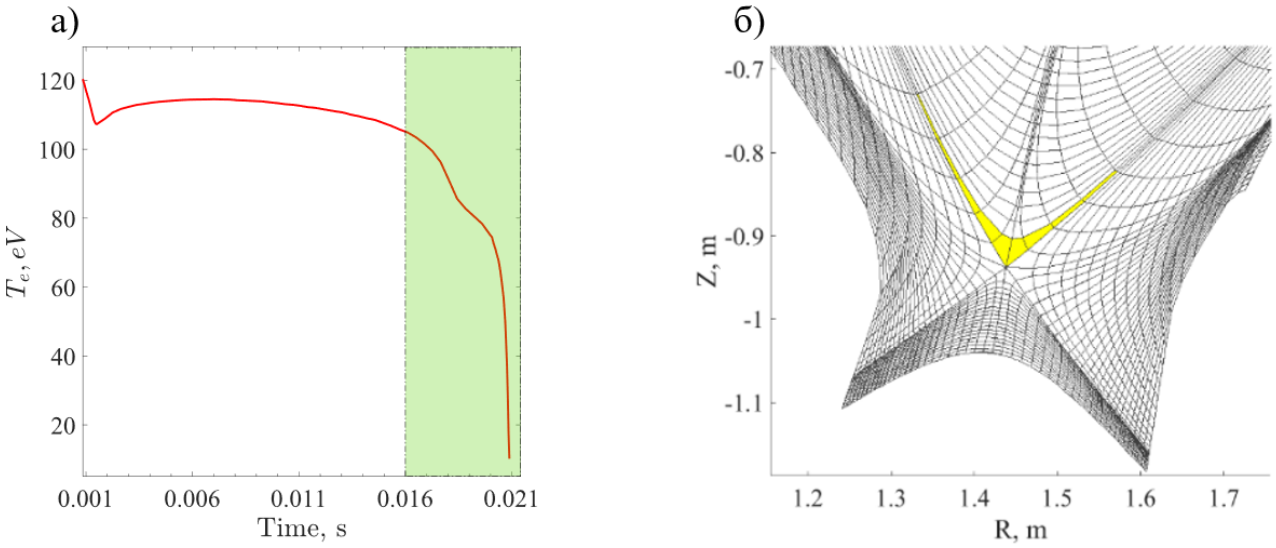


Рис. 2. Зависимость температуры электронов в области X-точки от времени (а), область интегрирования уравнения (2) (б)

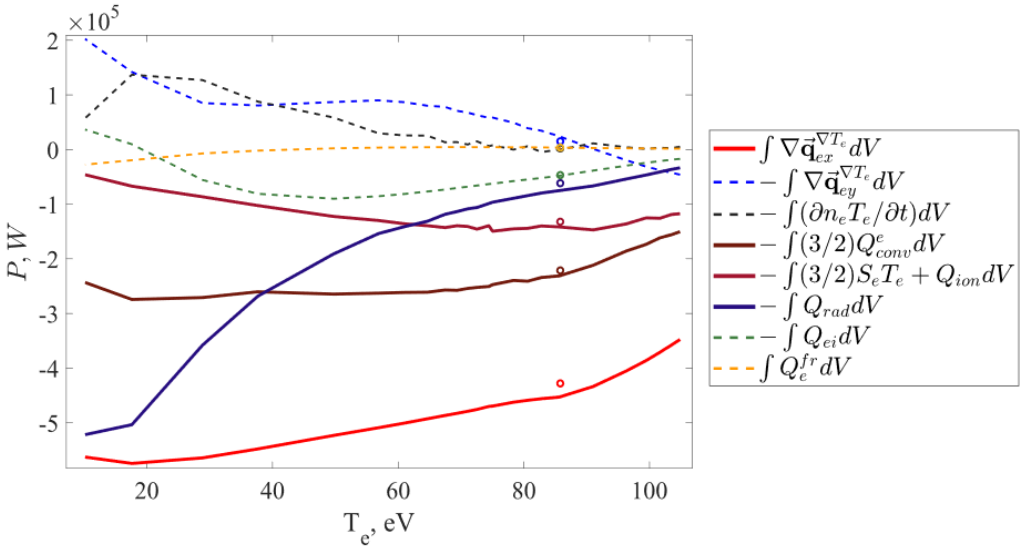


Рис. 3. Проинтегрированное уравнение баланса температуры для электронов (2) как функция температуры электронов в X-точке

Таким образом, в данной работе было продемонстрировано, что конвективные процессы обеспечивают начальное охлаждение температуры электронов и, вместе с потерями на нагрев ионизованных частиц, являются основным механизмом формирования излучающей X-точки для токамака ASDEX-Upgrade. Это существенно расширяет модель, представленную ранее в [6].

ЛИТЕРАТУРА

1. M. Bernert *et al* X-point radiation, its control and an ELM suppressed radiating regime at the ASDEX-Upgrade tokamak // *Nucl. Fusion*. – 2021. – **61** 024001.
2. M. Bernert *et al* The X-Point radiating regime at ASDEX Upgrade and TCV // Nuclear Materials and Energy – 2023 – 34, Article 101376.
3. T.O.S.J. Bosman *et al* X-point radiator control and its dynamics in ASDEX Upgrade and JET deuterium–tritium-discharges // Nucl. Fusion – 2025 – 65 016057.
4. I. Yu. Senichenkov *et al* Approaching the radiating X-point in SOLPS-ITER modeling of ASDEX Upgrade H-mode discharges // *Plasma Phys. Control. Fusion* – 2021 – 63 055011.
5. Braginskii S.I. 1965 Reviews of Plasma Physics ed M.A. Leontovich (New York: Consultants Bureau) vol 1 p 205.
6. U. Stroth *et al* Model for access and stability of the X-point radiator and the threshold for marfes in tokamak plasmas // Nucl. Fusion – 2022 – 62 076008.

УДК 524.38

М.М. Верязов[1], Д.А. Зюзин[2], А.В. Карпова[2], А.Ю. Кириченко[2,3], Ю.А. Шибанов[2]
[1]Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого[(*)]
[2]Физико-технический институт им. А.Ф.Иоффе РАН
[3]Институт астрономии, Национальный автономный университет Мексики, Мексика

ИССЛЕДОВАНИЕ ПРИРОДЫ ОПТИЧЕСКОГО И РЕНТГЕНОВСКОГО ДВОЙНИКА ГАММА-ИСТОЧНИКА 4FGL J1824.2+1231

Космический телескоп Fermi обнаружил в гамма-диапазоне большое количество миллисекундных пульсаров (MSP) в двойных системах, включая представителей класса "spider-pulsar": redbacks (RBs) и black widows (BWs) [1]. Они представляют собой тесные двойные системы с маломассивными звездными компаньонами и орбитальными периодами $\lessapprox$ 1 день, где одна сторона компаньона нагревается пульсаром. Среди RB особый интерес представляют транзиентные миллисекундные пульсары (tMSP). Эти системы демонстрируют переходы между режимами радиопульсара («состояние пульсара»), энергетика которого обеспечивается вращением нейтронной звезды (НЗ), и аккретора с образованием вокруг НЗ диска аккрецируюшего на нее вещества со звезды-компаньона («состояние диска»). Такое поведение подтверждает предполагаемую тесную эволюционную связь между маломассивными рентгеновскими двойными LMXB и радиоизлучающими MSP [2].

На сегодняшний день обнаружено только три tMSP (PSR J1023+0038 [3], PSR J1227-4853 [4] и PSR J1824-2452I [1]) и предложено несколько кандидатов, которые демонстрируют типичные для tMSP наблюдательные проявления: наличие двухпиковых эмиссионных оптических линий H и He из-за присутствия аккреционного диска; степенные рентгеновские спектры с фотонным индексом Γ≈1.7; спорадические периоды высокой и низкой яркости в ультрафиолетовом, оптическом и рентгеновском диапазонах и вспышечная активность.

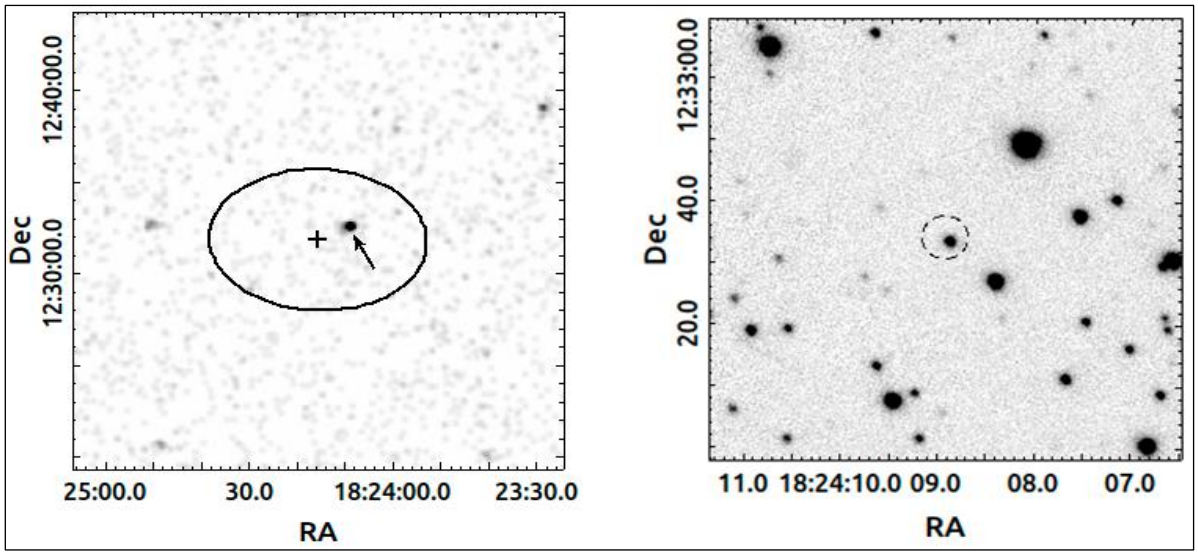


Рис. 1. Слева: поле исследуемого гамма-источника размером 25'x25', полученное телескопом SRG/eROSITA в рентгеновском диапазоне; знак + и эллипс указывают положение источника и его неопределенность в гамма-диапазоне. Стрелкой отмечен источник - кандидат на рентгеновское отождествление. Справа: поле объекта размером 1.2'x1.2' в оптическом диапазоне из обзора Pan-STARRS. Неопределенность положения рентгеновского источника, отмеченного слева, обозначена кругом, в который попадает единственный кандидат на оптическое отождествление

(*) М.М. Верязов, veryazov.mm@edu.spbstu.ru

tMSP представляют большой интерес для изучения эволюции двойных систем, процессов аккреции и фундаментальных физических свойств сверхплотного вещества нейтронных звезд. Следовательно, изучение и открытие новых таких систем является актуальной задачей. Здесь мы сообщаем об обнаружении рентгеновского/оптического источника в качестве вероятного двойника неассоциированного гамма-источника 4FGL J1824.2+1231, который по результатам наших исследований может быть причислен к кандидатам в tMSP.

Отождествление в рентгеновском и оптическом диапазонах осуществлялось с использованием данных обзоров всего неба SRG/eROSITA и Pan-STARRS, соответственно. В результате обнаружен весьма вероятный рентгеновский и оптический двойник гамма-источника с координатами RA=18h24m08.884s, Dec=+12°32'33.31" (рис. 1). Нами проведены фотометрические оптические наблюдения обнаруженного оптического двойника с помощью 2.1-м телескопа OAN SPM. Данные получены в течение 11 ночей в мае, июне и сентябре 2023г. в 3 фильтрах – B, V, R фотометрической системы Jonson-Bessel. Суммарно было получено 439 изображений и построены кривые блеска источника. Как видно из рис. 2, источник демонстрирует мерцания на уровне 0.3 величины на временах ~10-20 мин относительно уровня V ~ 20. Они хорошо видны в данных 22.05.2023, 31.05.2023, 16.09.2023 и указывают на его нестабильность. Данные 23.05.2023, 01.06.2023, 15.09.2023 показывают яркие апериодические вспышки ~1 величины на масштабах 1 часа. Периодичности в кривых блеска не выявлено. Подобная картина наблюдается также в фильтрах B и R.

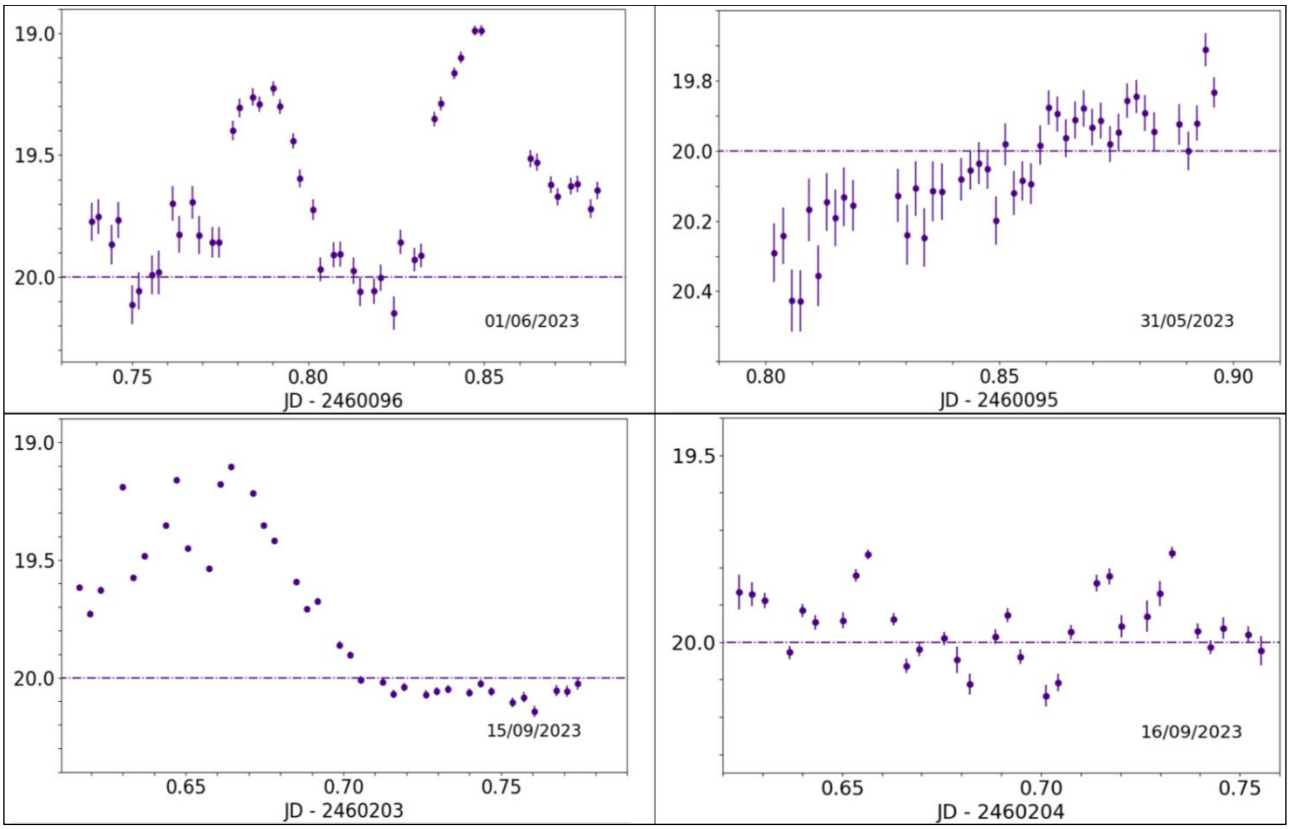


Рис. 2. Примеры кривых блеска оптического двойника в фильтре V в звездных величинах для разных дат наблюдений, указанных на панелях. Время выражено в юлианских днях

Мы также использовали архивные спектральные данные, полученные 19.08.2022 на 8-м телескопе Gemini-North. Были сделаны две экспозиции по 900 с в диапазоне 4500-9000 Å с

решеткой R400. Обработанные и откалиброванные спектры представлены на рис. 3. Они характеризуются плоским континуумом с отношением сигнала к шуму 10, интенсивность которого падает при длинах волн > 8000 Å, и эмиссионными линиями Бальмеровской и Пашеновской серий водорода и гелия 5876 Å, 6678 Å, 7065 Å. Это характерно для излучения аккреционных дисков вокруг компактных объектов в двойных звездных системах. Признаков вклада излучения звезды донора или компактного объекта в данных спектрах не наблюдается.

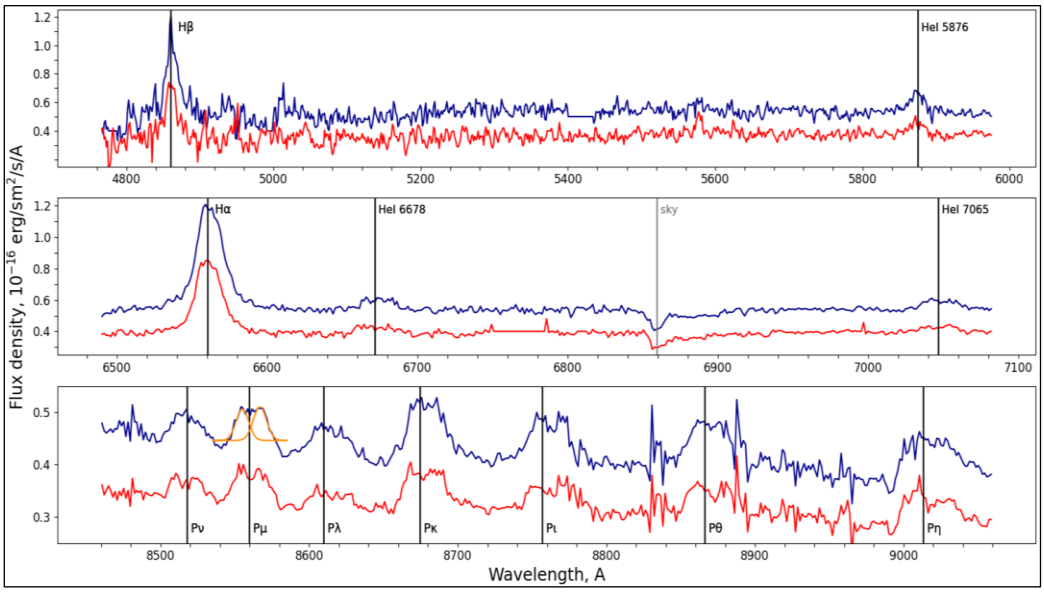


Рис. 3. Спектры объекта, полученные для двух экспозиций на телескопе Gemini-North. На линии Pμ желтыми линиями показаны вписанные гауссианы. Разница уровней потока в спектрах из-за переменности источника

Наиболее яркой в спектре является линия Hα. Двухпиковая структура, типичная для аккреционных дисков, в ней не проявляется: на обоих спектрах она описывается одной гауссианой с шириной 22 Å. Однако в линиях серии Пашена наблюдается двухпиковость, что подтверждает наличии аккреционного диска. Расстояние между пиками составляет 12 Å и соответствует скорости вращения диска $v * sin(i) = 316$ км/с, где i – наклонение орбиты. Для такой же скорости раздвоение для Hα должно составлять 5 Å, что невозможно обнаружить при данном спектральном разрешении. Используя измеренную ширину линии Hα, по формуле (1) из [5] можно оценить орбитальную скорость движения компаньона 234 км/с.

Таким образом, сильная оптическая переменность объекта и его плоский спектр с яркими эмиссионными линиями с двухпиковой структурой, а также наличие рентгеновского излучения показывают, что он является кандидатом в tMSP, находящимся в состоянии диска.

ЛИТЕРАТУРА

1. Papitto, A., Ferrigno, C., Bozzo, E., et al. Swings between rotation and accretion power in a binary millisecond pulsar, 2013, Nature, 501, 517
2. Papitto, A. & de Martino, D. Transitional Millisecond Pulsars, 2022, in Astrophysics and Space Science Library, Vol. 465, Astrophysics and Space Science Library, 157–200
3. Archibald, A. M., Stairs, I. H., Ransom, S. M., et al. A Radio Pulsar/X-ray Binary Link, 2009, Science, 324, 1411
4. Bassa, C. G., Patruno, A., Hessels, J. W. T., et al. A state change in the low-mass X-ray binary XSS J12270-4859, 2014, MNRAS, 441, 1825
5. Casares, J., A FWHM-K_2 Correlation in Black Hole Transients, 2015, ApJ, 808, 80

УДК 530.122

А. Головнев[1], С.А. Климова[2,3], В.П. Вандеев[3], А.Н. Семенова[3]
[1]Центр теоретической физики при Британском университете в Египте, Египет
[2]Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого(*)
[3]Петербургский институт ядерной физики им. Б.П. Константинова национального исследовательского центра "Курчатовский Институт"

ПЕРТУРБАТИВНЫЙ АНАЛИЗ ОБОБЩЕНИЯ ПЯТИПАРАМЕТРИЧНОЙ СИММЕТРИЧНО ТЕЛЕПАРАЛЛЕЛЬНОЙ ТЕОРИИ ГРАВИТАЦИИ

Введение. Гравитация – одно из фундаментальных взаимодействий в природе, играющее ключевую роль в формировании структуры Вселенной и движении небесных тел. В классической механике гравитация рассматривалась в рамках ньютоновской теории всемирного тяготения, однако в начале XX века появились основания полагать, что это описание является неполным. В поисках более точной модели гравитации Альберт Эйнштейн в 1915 году представил общую теорию относительности (ОТО), которая коренным образом изменила представления о природе гравитационного взаимодействия [1]. Разработанная Эйнштейном теория связывает кривизну пространства-времени с распределением материи и энергии. Это революционное представление позволило по-новому взглянуть на гравитационные процессы и предсказать множество физических явлений, не поддававшихся объяснению в рамках ньютоновского формализма [2;3].

Несмотря на выдающиеся успехи, ОТО сталкивается с рядом нерешенных вопросов, связанных с необходимостью объяснения темной материи и темной энергии. Эти обстоятельства ставят перед современной физикой две возможные задачи: либо расширение стандартной модели элементарных частиц для объяснения природы темной материи, либо пересмотр самой теории гравитации, если окажется, что на больших масштабах ее законы требуют модификации. В связи с этим возникает необходимость в создании альтернативных моделей, которые, сохраняя все проверенные экспериментально предсказания ОТО, могли бы расширить ее применимость к более сложным физическим процессам.

Одним из перспективных направлений исследований является симметричная телепараллельная гравитация [4]. Этот подход предлагает альтернативное описание гравитационного взаимодействия на основе иной геометрической структуры пространства-времени и в терминах большего числа независимых гравитационных переменных, поэтому данный подход является независимым и перспективным направлением, способным предложить новые пути решения существующих проблем и расширить современные представления о природе гравитации.

Предел слабой гравитации. В качестве первого шага к лучшему пониманию теории гравитации имеет смысл сначала проанализировать предел слабой гравитации, т.е. небольшие возмущения вокруг тривиального фона. Поэтому мы изучаем свойства вакуумных уравнений движения в линейном приближении теории возмущений над плоским пространством Минковского. Действие теории:

$$S = -\int d^4x\sqrt{-g}\mathfrak{Q} \qquad (1)$$

Здесь $\mathfrak{Q}$ – это скаляр неметричности, который задан для нашей модификации как:

$$\mathfrak{Q} = \frac{1}{2}\mathfrak{B}_{\alpha\mu\nu}Q^{\alpha\mu\nu} = \frac{a_1}{4}Q_{\alpha\mu\nu}Q^{\alpha\mu\nu} - \frac{a_2}{2}Q_{\alpha\mu\nu}Q^{\mu\alpha\nu} - \frac{a_3}{4}Q_\mu Q^\mu + \frac{a_4}{2}\tilde{Q}_\mu\tilde{Q}^\mu + \frac{a_5}{2}Q_\mu\tilde{Q}^\mu,$$

где $\mathfrak{B}_{\alpha\mu\nu}$ – пятипараметрический суперпотенциал, построенный из компонент неметричности. ОТО реализуется при значениях $a_1 = a_2 = a_3 = a_5 = 1$ и $a_4 = 0$:

(*) С.А. Климова, sonia.klim@yandex.ru

$$S_{STEGR} = -\int d^4x\sqrt{-g}\left(\frac{1}{4}Q_{\alpha\mu\nu}Q^{\alpha\mu\nu} - \frac{1}{2}Q_{\alpha\mu\nu}Q^{\mu\alpha\nu} - \frac{1}{4}Q_\mu Q^\mu + \frac{1}{2}Q_\mu\tilde{Q}^\mu\right)$$

По принятым обозначениям:

$$Q_\mu = Q_{\mu\alpha}{}^{\alpha}, \qquad \tilde{Q}_\mu = Q_{\alpha\mu}{}^{\alpha}$$

По определению мы можем представить $\mathfrak{B}_{\alpha\mu\nu}$ в виде:

$$\mathfrak{B}_{\alpha\mu\nu} = \frac{a_1}{2}Q_{\alpha\mu\nu} - \frac{a_2}{2}\left(Q_{\mu\alpha\nu} + Q_{\nu\alpha\mu}\right) - \frac{a_3}{2}Q_\alpha g_{\mu\nu} + \frac{a_4}{2}\left(g_{\alpha\mu}\tilde{Q}_\nu + g_{\alpha\nu}\tilde{Q}_\mu\right) + \frac{a_5}{4}\left(2\tilde{Q}_\alpha g_{\mu\nu} + g_{\alpha\mu}Q_\nu + g_{\alpha\nu}Q_\mu\right)$$

Варьируя действие (1), мы получим полевые уравнения движения, которые имеют вид [5]:

$$\mathfrak{G}^\mu{}_\nu \equiv -\partial_\alpha\mathfrak{B}^{\alpha\mu}{}_\nu - \frac{1}{2}Q_\alpha\mathfrak{B}^{\alpha\mu}{}_\nu - \frac{1}{2}\mathfrak{B}^{\mu\alpha\beta}Q_{\nu\alpha\beta} + \frac{1}{2}\mathfrak{Q}\delta^\mu_\nu = 0$$

Оставив члены выше второго порядка малости:

$$\mathfrak{G}^\mu{}_\nu \equiv -\partial_\alpha\mathfrak{B}^{\alpha\mu}{}_\nu = 0$$

Метрика $g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + \delta g_{\mu\nu}$, где $\eta_{\mu\nu}$– метрика Минковского, $\delta g_{\mu\nu}$ – возмущения фона. Таким образом, возмущения плоского фона:

$$g_{00} = 1 + 2\phi, g_{0i} = \partial_i v + v_i, g_{ij} = -\delta_{ij} + 2\psi\delta_{ij} - 2\partial^2_{ij}\sigma - \partial_i c_j - \partial_j c_i - h_{ij},$$

где $\varphi, v, \psi, \sigma -$ скаляры, векторы v_iи ci бездивергентны, то есть имеют по две независимых компоненты, а матрица h_{ij} симметрична, бесследова и бездивергентна.

Далее мы исследуем линеаризованные по возмущениям уравнения движения в скалярных, векторных и тензорных секторах.

Результаты. В случае предела слабой гравитации интересным случаем является $a_1 = a_2 - a_4$, так как при выполнении такого условия тензорные моды (гравитационные волны) остаются динамическими, а векторные моды разделяются на калибровочные и ограниченные, что аналогично случаю ОТО. Однако в отличие от ОТО, структура скалярного сектора оказывается более сложной и содержит дополнительные степени свободы, что и хотелось получить.

Еще одна модель $a_1 = a_2 - a_4 \neq a_5$ и $a_1 \neq a_3$приводит к появлению не одной, а 1,5 динамическим степеням свободы. На роль физически не противоречивых моделей подходят такие, для которых выполняется условие $a_1 > 0$, при котором существуют гравитационные волны и равенство $a_2 - a_4 = a_1$, влекущее за собой отсутствие духов и градиентных неустойчивостей векторов.

Выводы. Применяя методы теории возмущений, мы получили систему дифференциальных уравнений, из которой установили, какие степени свободы являются динамическими, какие калибровочными, а какие ограничены связями, а также отобрали реалистичные модели. Наиболее перспективными являются модификации, близкие к эквивалентам ОТО, но с изменением параметров $a_1 = a_2 - a_4$, которые могут приводить к новым степеням свободы. Дальнейшие исследования выбранных моделей помогут более точно определить роль параметров a_3 и a_5 и их влияние на наблюдаемые эффекты.

ЛИТЕРАТУРА

1. Einstein A. Die Feldgleichungen der Gravitation // Sitzungsberichte der Preussischen Akademie der Wissenschaften zu Berlin. – 1915. – Pp. 844–847.

2. Роузвер Н.Т. Перигелий Меркурия. От Леверье до Эйнштейна. – М.: Мир, 1985. – 244 с.

3. Hafele J.C. Performance and results of portable clocks in aircraft // PTTI, 3rd Annual Meeting. – 1971. – P. 16–18.

4. Beltran Jimenez J., Heisenberg L., Koivisto T.S. Coincident General Relativity // Physical Review D. – 2018. – Vol. 98. – P. 044048. – arXiv:1710.03116.

5. Golovnev A., Klimova S., Semenova A.N., Vandeev V.P. Weak Gravity Limit in Newer General Relativity // arXiv. – 2025. – arXiv:2501.00376v2. – URL: https://arxiv.org/abs/2501.00376v2 – doi:10.48550/arXiv.2501.00376

УДК 53.533

С.О. Башкатов[1], В.Ю. Сергеев[1], Б.В. Кутеев[2]
[1]Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого(*)
[2]Национальный исследовательский центр «Курчатовский институт», Москва, Россия

СНИЖЕНИЕ ТОКА УБЕГАЮЩИХ ЭЛЕКТРОНОВ ВО ВРЕМЯ СРЫВА РАЗРЯДА С ПОМОЩЬЮ ИНЖЕКТИРУЕМОГО КОЛЛЕКТОРА В ТОКАМАКЕ МАСШТАБА ITER

В результате неустойчивости большого срыва в токамаках могут генерироваться мощные пучки убегающих электронов (RE) опасные для конструкционных элементов установки. Командой ITER [1,2] предлагается подавление лавины RE путем массивной инжекции частиц рабочего газа, которая может создавать трудности для ряда технологических систем, - откачки, разделения изотопов и др. В работе [3] был предложен новый способ управления снижения тока лавины RE без заметного увеличения числа частиц рабочего газа с использованием инжекции в плазму вольфрамового коллектора, собирающего убегающие электроны во время их лавинообразного размножения. В данной работе представлены результаты численного моделирования аварийного вывода тока в токамаке с параметрами масштаба ИТЭР при инжекции одного или одновременной инжекции нескольких коллекторов в плазму на стадии вывода тока (CQ) сразу после вывода тепловой энергии (TQ).

На рис. 1 показана схема для подавления тока лавины I_{RA} убегающих электронов. Цилиндрические коллекторы диаметром d_c и длиной l_c инжектируются снизу вверх вдоль траектории длиной $L_{tr} \cong 6.8$ м. В отличие от работы [3] для инжекции вместо рельсотрона предлагается использовать индукционный ускоритель [4]. При таком способе ускорения отсутствуют продукты эрозии при ускорении коллектора, характерные для рельсотрона.

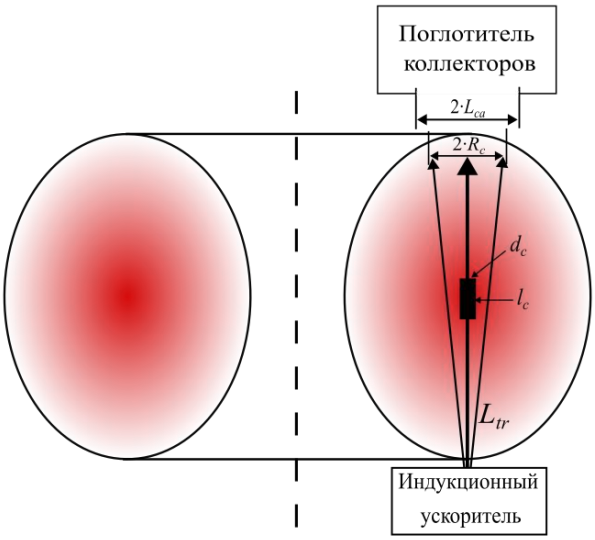


Рис. 1. Схема инжекции коллекторов в токамаке

На рис. 1 показано отклонение от прямолинейной траектории инжектируемого коллектора R_c, которое должно быть заметно меньше радиуса принимающего отверстия

(*) С.О. Башкатов, bashkatov.so@mail.ru

поглотителя коллекторов L_{ca}. Для рабочего режима ИТЭР [3] с током I_{p0} = 15МА и средними значениями плотности $\langle n_e \rangle = 10^{20}$ м$^{-3}$ и температуры $\langle T_e \rangle$ = 10 кэВ электронов сформулированы следующие критерии выбора сценария инжекции коллекторов: 1) Ток $I_{RA} \leq$ 0.15 МА согласно выводам работы [1]; 2) Отклонения коллекторов ΔR_C за счет импульса от RE и за счет силы Ампера вследствие протекания по коллектору тока, ограниченного Альфвеновской проводимостью CQ плазмы [5] не должны превышать 1 см; 3) Температура коллекторов T_c за счет поглощения RE не более 80% от температуры плавления вольфрама $T_W \cong$ 3595 K.

Для описания процесса вывода тока плазмы была усовершенствована нульмерная модель работы [3] в которой рассматривалась система двух уравнений:

$$\frac{dI_p}{dt} = -\frac{I_p - I_{RA}}{\tau_{res}} \qquad (1)$$

$$\frac{dI_{RA}}{dt} = -\frac{I_{RA}}{\sqrt{Z_{eff}+5}\cdot ln\Lambda_{rel}} \cdot \frac{l_i}{I_A} \cdot \frac{dI_p}{dt} - \frac{I_{RA}}{\tau_L} \cdot H\left[\frac{L_{tr}}{v_c} - t\right] \qquad (2)$$

Уравнение (1), описывает эволюцию вывода полного тока плазмы I_{tot} с резистивным временем $\tau_{res} = \frac{L_{int}S}{2R\eta}$, где L_{int}, S, η - индуктивность, площадь поперечного сечения и удельное сопротивление плазмы соответственно, R - большой радиус токамака. В уравнении (2) первый член справа описывает генерацию тока лавины RE I_{RA}. Здесь, Z_{eff} и l_i – эффективный заряд и внутренняя индуктивность плазмы CQ, $I_A \cong$ 17 kA – Альфвеновский ток, $ln\Lambda_{rel} \cong 21$– кулоновский логарифм для RE. В (2) добавлен второй член, учитывающий потери убегающих электронов на движущемся через плазму вольфрамовом коллекторе с характерным временем $\tau_L = V/(cl_c d_c)$. Оно определяется диаметром d_c и длиной l_c коллектора, который поглощает RE, движущиеся со скоростью близкой к скорости света c в плазме токамака объемом V. Время нахождения коллектора в CQ плазме L_{tr}/v_c определяется его скоростью v_c, длиной траектории L_{tr} и учитывается в уравнении (2) с помощью функции Хевисайда H.

Параметры моделирования разряда были выбраны в соответствии с данными работы [2]. В разряд производится напуск аргона с целью получения резистивного времени $\tau_{res} = 34$ мс. Это время достигается напуском Ar до концентрации $n_{Ar} = 5.6 \cdot 10^{19}$ м$^{-3}$. Приведенные ниже параметры плазмы предполагаются постоянными на стадии CQ и рассчитываются из нульмерного баланса омического нагрева электронов за счет излучения инжектированного аргона: $< T_{eCQ} >= 4.4$ эВ, $\langle n_{eCQ} \rangle \cong 2.3\cdot10^{20}$ м$^{-3}$, $< Z_{eff} >= 1.75$, $l_i = 0.7$. Как и в работах [2,3], начальный ток зародышей $I_{RA}(0) = 0.4$ kA был оценен по механизму «hot-tail» на стадии вывода тепловой энергии TQ с ожидаемым временем 1 мс для экспоненциального спада T_e.

Результаты моделирования зависимости тока лавины убегающих электронов от параметров коллекторов представлены в Табл. для пяти сценариев и иллюстрируются на рис. 2 для сценария №1 без инжекции и сценария №4 с инжекцией 3 коллекторов. Из табл. 1 и рис. 2 видно, что без инжекции коллекторов в сценарии №1 генерируется недопустимо большой ток лавины убегающих электронов $I_{RA} \cong$ 8.4 МА.

Табл. 1. Параметры инжектируемых коллекторов

№	N_c	v_c, м/с	d_c, мм	l_c, мм	m_c, кг	T_c/T_W	ΔR_c, см	I_{RA}, МА
1	-	-	-	-	-	-	-	8.4
2	1	450	14.6	146	0.47	0.17	0.96	0.1
3	2	450	14.6	146	0.47	0.17	0.95	$1.9\cdot10^{-6}$
4	3	550	11.8	118	0.25	0.14	0.97	$1.6\cdot10^{-4}$
5	2	550	11.8	118	0.25	0.14	0.97	$6.0\cdot10^{-2}$

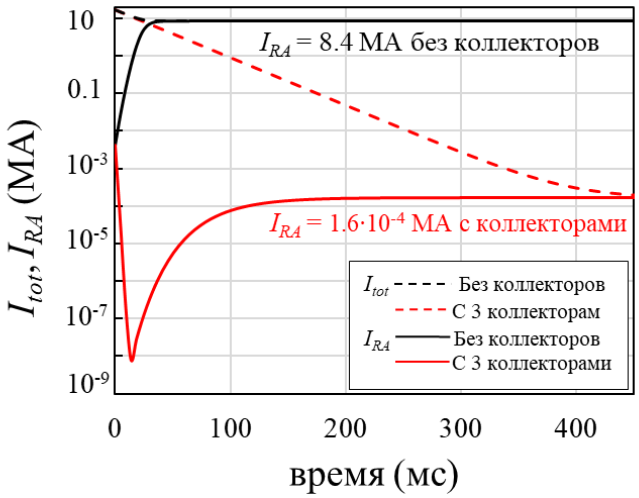


Рис. 2. Эволюция тока при инжекции 3 коллекторов

Из второй строки табл. 1 видно, что удовлетворить всем критериям можно при инжекции одного коллектора большой массы по сценарию №2. Сложности с ускорением растут при росте массы коллектора. Кроме того, в случае аварийного отказа системы инжекции ток убегающих электронов может привести к нарушению целостности установки. Поэтому инжекция двух или трех коллекторов представляется более целесообразной с точки зрения аварийного отказа системы инжекции.

В табл. 1 показаны результаты расчетов сценария №3 при инжекции двух коллекторов, сценария №4 с инжекцией трех коллекторов, а также сценариев №2 с инжекцией одного из двух коллекторов и №5 с инжекцией двух из трех коллекторов в которых предполагается отказ одной из систем инжекции. Сниженные по сравнению со сценарием №2 масса и скорость коллекторов для сценариев №4-5 подбирались так, чтобы в случае отказа одной из систем инжекции также удовлетворить критериям 1-3. Видно, что благодаря почти двукратному снижению массы по сравнению со сценарием №3 предпочтительным выглядит сценарий №4.

Выводы. Были сформулированы критерии выбора параметров системы инжекции коллекторов для предотвращения лавины убегающих электронов на стадии CQ. Усовершенствована нульмерная модель вывода тока в токамаке из работы [3], в которой добавлен член, отвечающий за сбор убегающих электронов инжектированными коллекторами. В рамках нульмерного моделирования наиболее перспективным является сценарий с инжекцией трех вольфрамовых коллекторов умеренных размеров и масс. Для уточнения оптимальных сценариев инжекции коллекторов идет работа над созданием одномерной модели вывода тока в токамаке.

ЛИТЕРАТУРА

1. Vallhagen O. et al. Runaway electron dynamics in ITER disruptions with shattered pellet injections //Nuclear Fusion. – 2024. – V. 64. – №. 8. – C. 086033.
2. Martín-Solís J. R., Loarte A., Lehnen M. Formation and termination of runaway beams in ITER disruptions //Nuclear Fusion. – 2017. – V. 57.– №. 6. – C. 066025.
3. Sergeev V. Y., Kuteev B. V. Disruption mitigation in tokamak reactor via reducing the seed electrons of avalanche //Nuclear Fusion. – 2021. – V. 61. – №. 8. – C. 086021.
4. Kim S., Jang C., Kim J. Design and experiment of discharge control methods for three-stage coil gun experiments //Applied Sciences. – 2023. – V. 13. – №. 3. – C. 1779.
5. Rozhansky V. Plasma Theory. – Springer, 2023. – 237 p.

УДК 523.44

Г.А. Кучеров[1,2], А.К. Павлов[2], А.Ю. Меркулова[2], Д.В. Белоусов[2]
[1]Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого(*)
[2]Физико-технический институт им. А.Ф. Иоффе

НАКОПЛЕНИЕ И РЕКОМБИНАЦИЯ РАДИКАЛОВ КАК ИСТОЧНИК ЭНЕРГИИ ДЛЯ АКТИВНЫХ ПРОЦЕССОВ В ЛЕДЯНЫХ ТЕЛАХ СОЛНЕЧНОЙ СИСТЕМЫ

Введение. Наблюдения показывают, что внутри многих ледяных тел Солнечной системы на больших гелиоцентрических расстояниях происходят активные процессы выделения энергии. Например, внутри некоторых ледяных спутников планет-гигантов предполагается наличие подповерхностного океана из жидкой воды (Энцелад, Европа и др.). Данные космического телескопа «Джеймс Уэбб» свидетельствуют о потенциальной подповерхностной геологической активности на карликовых планетах пояса Койпера Эриде и Макемаке [1]. Источник энергии, поддерживающий такую активность, во многих случаях остается неизвестным. В данной работе мы предполагаем, что рекомбинация свободных радикалов, в частности H и OH, может служить таким источником энергии. Эти радикалы могут накапливаться в водяном льду при низких температурах. Процесс рекомбинации может приводить к нагреванию ледяных тел и изменению их состава. Накопление радикалов вблизи поверхности может происходить эффективно за счет облучения космическими лучами. Было показано, что этот механизм может приводить к кометным вспышкам на больших гелиоцентрических расстояниях [2]. В нашей работе мы предполагаем, что накопление радикалов происходит во всем объеме тела за счет распада долгоживущих радионуклидов. Известно, что в ледяных телах Солнечной системы должна присутствовать определенная доля следующих долгоживущих радионуклидов: ^{26}Al ($t_{1/2}$ = 0.705 млн лет), ^{60}Fe ($t_{1/2}$ = 2.6 млн лет), ^{40}K ($t_{1/2}$ = 1.2 млрд лет), ^{232}Th ($t_{1/2}$ = 14 млрд лет), ^{235}U ($t_{1/2}$ = 690 млн лет) и ^{238}U ($t_{1/2}$ = 4.5 млрд лет) [3]. Обычно предполагается, что распад этих радионуклидов приводит к немедленному нагреву тела, и соответственно все образовавшиеся под воздействием облучения радикалы мгновенно рекомбинируют [4]. В нашей модели мы предполагаем, что распад радионуклидов приводит не к быстрому нагреву тела, а к образованию и накоплению радикалов в водяном льду. Поскольку при низких температурах подвижность радикалов значительно уменьшается, внутри ледяного тела могут накапливаться достаточно большие концентрации радикалов.

Описание модели. Экспериментальные исследования показали, что при накоплении критической концентрации радикалов ($\geq 1\%$) может происходить их спонтанная рекомбинация с быстрым выделением значительного количества энергии [5, 6]. В нашей модели предполагается, что достаточно высокая концентрация радикалов накопилась по всему объему ледяного тела, и в небольшой по размеру области в центре тела возникает начальный импульс спонтанной рекомбинации. Он приводит к резкому повышению температуры в этой области, и процесс далее распространяется по всему объему тела. Мы рассматриваем радикалы только в ледяной составляющей вещества и учитываем следующие реакции рекомбинации:

$$H + H = H_2, \quad (1)$$

$$OH + OH = H_2O_2. \quad (2)$$

Рекомбинация радикалов H происходит при очень низких температурах. Их накопление невозможно при $T > 50$ К, поэтому мы в данной работе не рассматривали тела с такими начальными температурами. Согласно нашей модели, слой ледяного тела должен быть нагрет

(*) Г.А. Кучеров, glebkucherov2002@gmail.com

не менее, чем на 1 К, чтобы началась рекомбинация радикалов H, а рекомбинация радикалов OH начинается при $T > 100$ К.

Для численных расчетов использовалась одномерная сферически симметричная модель ледяного тела, подробно описанная в работе [7]. Основными параметрами нашей модели являются отношение массы пыли ко льду μ, пористость Ψ, герц-фактор h (множитель, уменьшающий теплопроводность пористого материала [7]), радиус тела R, начальная температура тела T_0 и накопленная концентрация радикалов H и OH (их концентрации предполагаем одинаковыми). Все расчеты проводились для тел с $\Psi = 0.65$ и $h = 0.1$ (данное значение герц-фактора соответствует максимальной теплопроводности). Остальные параметры изменялись в процессе моделирования.

Результаты. Были проведены расчеты для нескольких ледяных тел различного состава с начальными температурами 5 К и 50 К. Рассматривались следующие случаи: 1) тело без пыли, состоящее из чистого аморфного льда ($\mu = 0$); 2) тело, состоящее из пыли и аморфного льда с $\mu = 0.5$; 3) тело, состоящее из пыли и аморфного льда с $\mu = 4$; 4) тело, состоящее из пыли и аморфного льда с захваченными газами ($\mu = 1$, молярная концентрация захваченных газов CO и CO_2 по отношению к водяному льду равна 10%); 5) тело, состоящее из пыли и кристаллического льда с $\mu = 0.5$; 6) тело, состоящее из пыли и кристаллического льда с $\mu = 4$. Для каждого из этих случаев были определены минимальные концентрации радикалов H и OH, необходимые для достижения температуры 273 К внутри тела. Результаты представлены на рис. 1. Для тела с начальной температурой 5 К необходимая концентрация радикалов на 0.1% выше, чем для тела с начальной температурой 50 К. Таким образом, необходимая концентрация радикалов слабо зависит от начальной температуры тела, и рассматриваемый процесс в принципе может происходить на любых расстояниях от Солнца (даже в облаке Оорта) при накоплении достаточно больших концентраций радикалов.

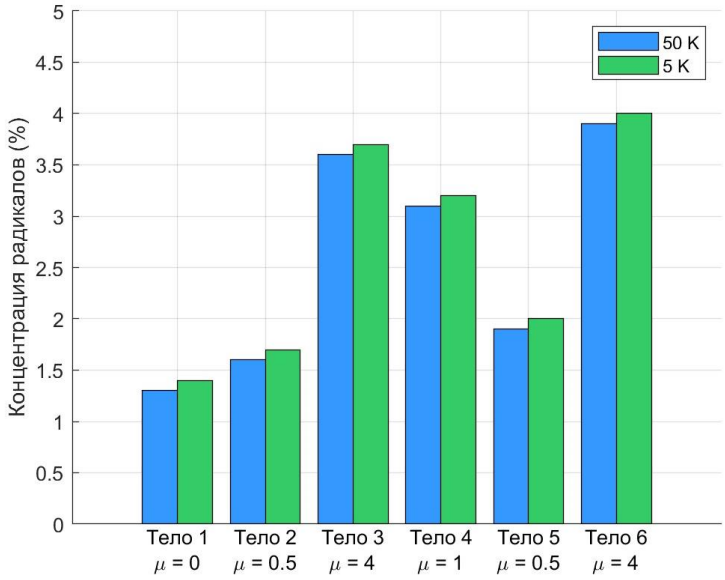


Рис. 1. Концентрация радикалов H и OH, необходимая для достижения температуры 273 К для тел различного состава с начальной температурой 5 и 50 К

Было также смоделировано распространение процесса рекомбинации и дальнейшее охлаждение ледяных тел с радиусами от 1 до 250 км. Рассматривались тела, состоящие из аморфного льда и пыли с μ = 1. Для каждого из этих тел было определено характерное время, в течение которого внутри тела может поддерживаться температура 273 К (время охлаждения тела). Первоначально эта температура достигается во всем объеме тела за счет рекомбинации

радикалов. Затем, в результате охлаждения, этот объем постепенно уменьшается. Время охлаждения мы определяем как время, за которое этот объем уменьшается до нуля. График представлен на рис. 2. Для тела с радиусом 1 км это время составляет несколько тысяч лет. Для тела с радиусом 20 км это время составляет около миллиона лет. Для тела с радиусом 250 км, которое по размеру соответствует Энцеладу, это время составляет более 100 миллионов лет. Стоит отметить, что процесс рекомбинации распространяется по всему телу очень быстро. Для рекомбинации большинства радикалов в теле с радиусом 250 км требуется около 8000 лет.

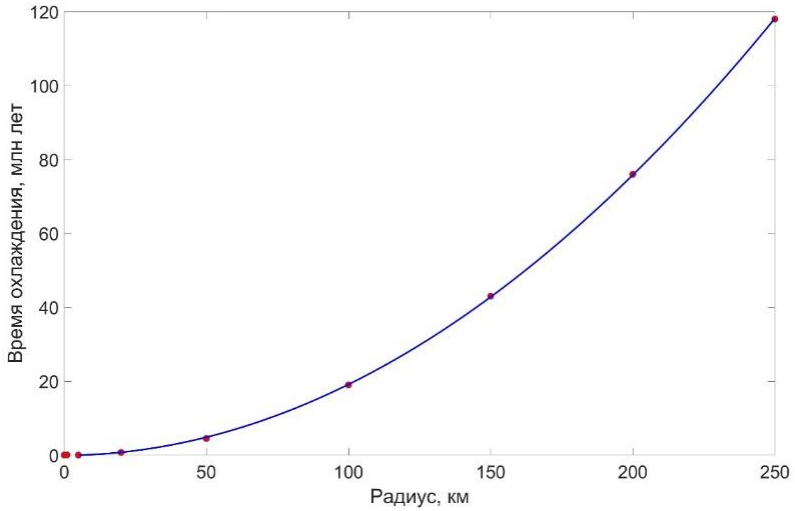


Рис. 2. Зависимость времени охлаждения ледяного тела от его радиуса.
Результаты представлены для тела, состоящего из аморфного льда и пыли (μ = 1)

Работа выполнена при поддержке гранта РНФ № 24-22-00257.

ЛИТЕРАТУРА

1. Grundy W.M., Wong I., Glein C.R., et al. Measurement of D/H and $^{13}C/^{12}C$ ratios in methane ice on Eris and Makemake: Evidence for internal activity // Icarus. – 2024. – Vol. 411. – Art. 115923.
2. Pavlov A.K., Belousov D.V., Tsurkov D.A., Lomasov V.N. Cosmic ray irradiation of comet nuclei: a possible source of cometary outbursts at large heliocentric distances // MNRAS. – 2022. – Vol. 511. – P. 5909-5914.
3. Davidsson B. J. R. Thermophysical evolution of planetesimals in the Primordial Disk // MNRAS. – 2021. – Vol. 505. – P. 5654-5685.
4. Prialnik D., Podolak M. Radioactive heating of porous comet nuclei // Icarus. – 1995. – Vol. 117. – P. 420-430.
5. Moore M.H., Hudson R.L. Far-infrared spectral studies of phase changes in water ice induced by proton irradiation // Astrophys. J. – 1992. – Vol. 401. – P. 353-360.
6. Shabalin E., Kulagin E., Kulikov S., Melikhov V. Experimental study of spontaneous release of accumulated energy in irradiated ices // J. Radiat. Phys. Chem. – 2003. – Vol. 67. – P. 315-319.
7. Belousov D. V., Pavlov A. K. Cometary outbursts in the Oort cloud // Icarus. – 2024. – Vol. 415. – Art. 116066.

УДК 523.3-1/-8

М.А. Лебедева[1], Ю.А. Кропотина[1,2]
[1]Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого(*)
[2]Физико-технический институт им. А.Ф. Иоффе

МОДЕЛИРОВАНИЕ СОЛНЕЧНОГО ВЕТРА ВБЛИЗИ ЛУННОЙ МАГНИТНОЙ АНОМАЛИИ

Введение. Как известно, Луна, в отличие от Земли, не обладает глобальным магнитным полем, способным защищать ее поверхность от воздействия солнечного ветра. В 1970-х годах магнитометр, установленный на субспутнике миссии "Аполлон-15", впервые обнаружил остаточную намагниченность лунной коры. Эти данные подтвердили существование сложных структур локальных магнитных полей, которые могли быть результатом древних геологических процессов или ударов астероидов. В конце 1990-х годов космический аппарат Lunar Prospector провел детальное картографирование магнитного поля Луны [1]. Его измерения выявили сравнительно мощные локальные магнитные поля с интенсивностью до нескольких десятков нТл, что составляет около 0,1% от напряженности земного магнитного поля. Эти локальные поля создают своеобразные "минимагнитосферы", которые могут частично защищать поверхность Луны от солнечного ветра. Наблюдения за лунной поверхностью выявили прямую корреляцию магнитных полей с зонами резкого изменения оптических характеристик реголита [2].

Наибольшая концентрация магнитных аномалий на Луне обнаружена в районе южного полюса, где они локализованы над постоянно затененными кратерами Шумейкер и Свердруп. Спектральный анализ данных показывает [3] повышенное содержание водяного льда именно в этих областях, что коррелирует с пространственным распределением магнитных аномалий [4]. Механизм защиты льда может быть связан со способностью локальных магнитных полей отклонять потоки солнечного ветра. Несмотря на умеренную напряженность приполярных аномалий (~2 нТ на высоте 30 км), низкий угол падения заряженных частиц в полярных регионах может усиливать защитный эффект и снижать скорость сублимации льда на 3-4 порядка по сравнению с незащищенными областями. Для проверки данной гипотезы в данной работе проведено моделирование солнечного ветра вблизи приполярной лунной аномалии.

Гибридная модель. Для реализации гибридного моделирования лунной магнитной аномалии был использован код "Maximus" [5], который предназначен для микроскопического моделирования бесстолкновительной плазмы. В рамках гибридного моделирования ионы описываются как отдельные частицы, тогда как электроны представлены в виде безмассовой нейтрализующей жидкости. Такой подход обусловлен тем, что динамика плазмы в основном определяется ионами, для которых пространственные и временные масштабы существенно больше, чем для электронов. Это позволяет проводить моделирование на ионных масштабах и значительно снизить вычислительные затраты за счет усреднения быстрых электронных осцилляций. Лунная аномалия была представлена в модели как магнитный диполь, параллельный поверхности луны и погруженный в лунный грунт на глубину 35 км. Поверхность Луны считалась идеально поглощающей (все частицы, попадающие под поверхность, исчезали). Солнечный ветер был представлен как однородный поток, натекающий на магнитную аномалию.

Использованные при моделировании параметры солнечного ветра и магнитного диполя представлены в табл. 1. В правом столбце приводятся значения в нормированных единицах

(*)Ю.А. Кропотина, Kropotina@astro.ioffe.ru

гибридного кода. Пространственная область составляет 120 × 120 ячеек (10 × 10d_i, где d_i – инерциальная длина иона).

Табл. 1. Параметры моделирования лунной магнитной аномалии

Параметры	**Значение**	**Норм. значение**
Концентрация n	10 см$^{-3}$	1
Температура СВ T_{SW}	2,4 × 10^5 K	0,4
Скорость СВ V Нормальный поток: Тангенциальный поток:	 [315;0;0] км/с [48;0;310] км/с	 [4,5; 0; 0] [0,69; 0; 4,44]
Магнитный момент M	~ 10^{12} A×m^{-2}	0,3 d_i^{-3}
Размер ячейки Δx	7,2 км	0,1
Межпланетное магнитное поле B_0	6 нТл	1
Инерциальная длина иона d_i	72 км	1

Результаты моделирования. Для моделирования рассматривались небольшие аномалии с магнитными полями в несколько нТл, подобные располагаемым на южных полюсах Луны. Производились вычисления для двух направлений потоков: тангенциального (рис. 1) и нормального (рис. 2).

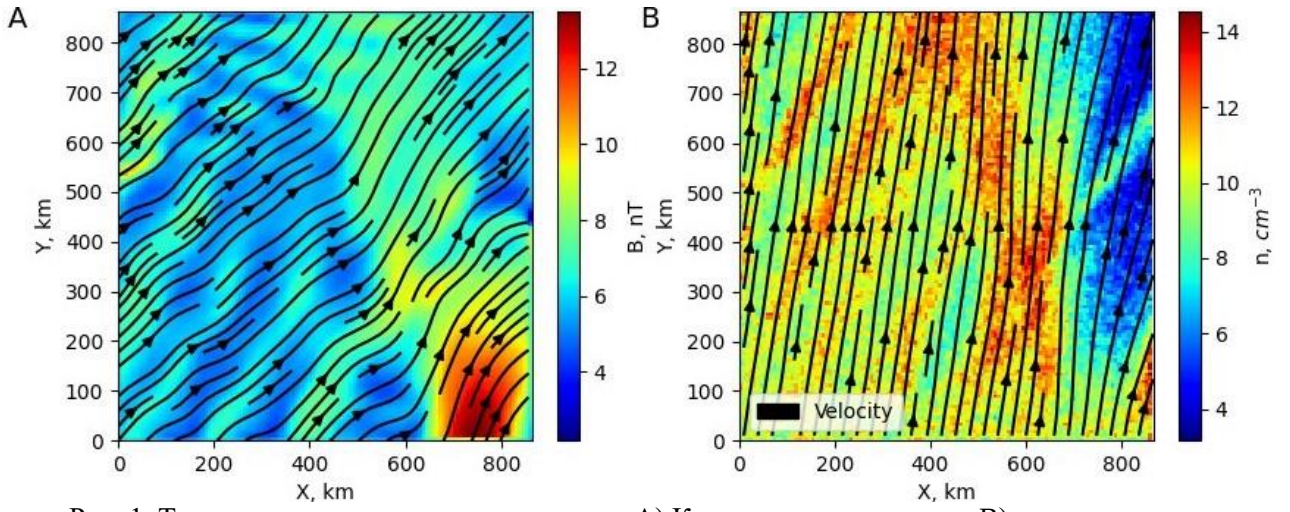


Рис. 1. Тангенциальное направление потока. A) Карта магнитного поля; B) карта плотности

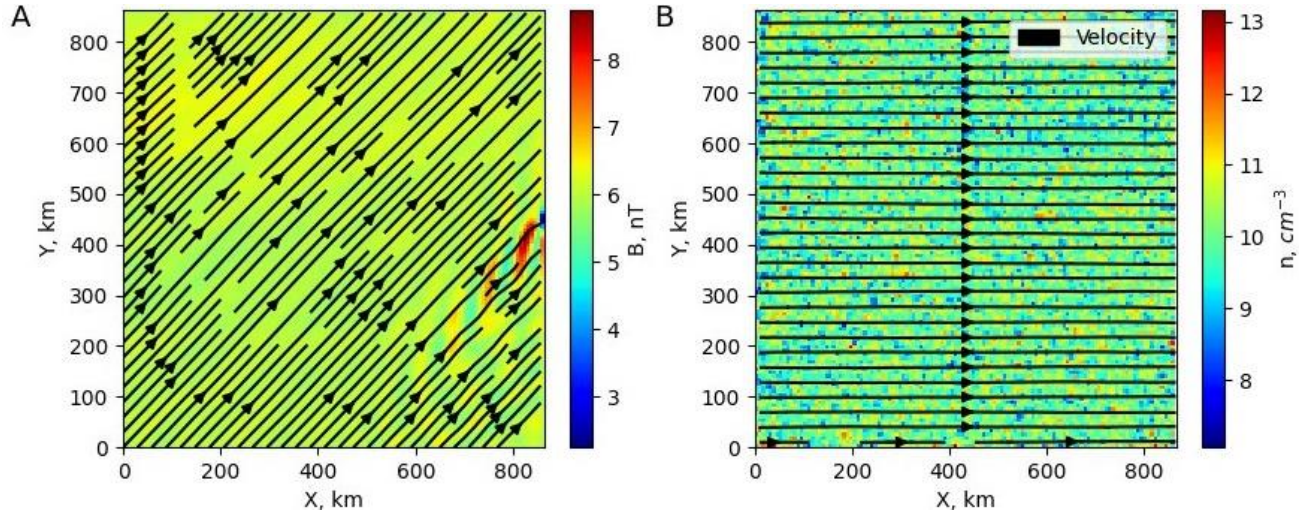


Рис. 2. Нормальное направление потока. A) Карта магнитного поля; B) карта плотности

Тангенциальный поток приводит к крайне малому углу падения ионов на поверхность вблизи магнитных аномалий. Поток плазмы при взаимодействии с магнитной аномалией увеличивает турбулентность в зоне взаимодействия. Формируется неоднородная структура электрического поля из-за перераспределения зарядов. Индуцированные токи, протекающие по внешней границе аномалии, приводят к усилению магнитного поля, которое противодействует проникновению солнечного ветра и приводит к отклонению частиц (происходит проседание концентрации заряженных частиц вблизи поверхности).

При перпендикулярном падении плазмы защитный эффект магнитной аномалии ослабевает. Плотность остается относительно однородной даже вблизи аномалии, что указывает на отсутствие при нормальном потоке достаточно сильных экранирующих электрических полей. В результате частицы могут достигать поверхности Луны, что приводит к увеличению эрозии льда и ионизации грунта.

Выводы. В представленной работе проведено гибридное моделирование взаимодействия солнечного ветра с локальными магнитными аномалиями на поверхности Луны. Аномалии, сопоставимые по интенсивности с теми, что наблюдаются вблизи южного полюса Луны, не способны защитить поверхность в случае нормального падения солнечного ветра, однако при тангенциальном падении силы магнитного поля аномалии оказывается достаточно для снижения приповерхностной концентрации ионов в несколько раз.

Таким образом, малый угол падения частиц, возникающий при тангенциальном направлении потока солнечного ветра и характерный для полюсов, усиливает защиту поверхности Луны от эрозии, образуя локальные магнитосферы и способствуя сохранению водяного льда. Данные регионы могут стать основными целями для будущих космических миссий к поверхности земного спутника.

ЛИТЕРАТУРА

1. Mark A Wieczorek, Benjamin P Weiss, Doris Breuer, David Cébron, Mike Fuller, et al. Lunar magnetism. // Reviews in Mineralogy and Geochemistry. – 2022. – Vol. 35. – P. 207-241

2. R. A. Bamford, B. Kellett, W. J. Bradford, C. Norberg, A. Thornton, K. J. Gibson, I. A. Crawford, L. Silva, L. Gargaté, and R. Bingham. Mini-magnetospheres above the lunar surface and the formation of lunar swirls // Physical Review Letters – 2012 – Vol.109 – 099902.

3. Li, S., Lucey, P. G., Milliken, R. E., Hayne, P. O., Fisher, E., Williams, J.-P., et al. Direct evidence of surface exposed water ice in the lunarpolar regions. // Proceedings of the National Academy of Sciences. – 2018. – Vol. 115 No. 36. – P. 8907–8912

4. Hood, L. L., Bryant, I., & van der Leeuw,J. (2022). Lunar magnetic anomalies and polar ice. Geophysical Research Letters. – 2022. – Vol. 49. – e2022GL100557

5. Kropotina, J., Bykov, A., Krassilchtchikov, A., & Levenfish, K. (2018). Maximus: A Hybrid Particle-in-Cell Code for Microscopic Modeling of Collisionless Plasmas. // Supercomputing. – 2018. – P. 242–253.

УДК 004.89

Ф.В. Белоус[1], В.В. Солоха[2], Е.Е. Ткаченко[2], А.Ю. Яшин[1]
[1]Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого[(*)]
[2]Физико-технический институт имени А.Ф. Иоффе РАН

МОДЕЛИРОВАНИЕ ПИЛИНГ-БАЛЛОННОЙ НЕУСТОЙЧИВОСТИ ДЛЯ ТОКАМАКА ГЛОБУС-М2 С ПОМОЩЬЮ МАШИННОГО ОБУЧЕНИЯ

Введение. Основной режим работы токамаков в настоящее время – режим улучшенного удержания или Н-мода, который характеризуется большими значениями градиента давления

[(*)]Ф. В. Белоус, belous_fv@spbstu.ru

плазмы на периферии [1], что является причиной возникновения периферийных локализованных мод (ELM).

ELM приводят к импульсным выбросам частиц и энергии из области удержания на первую стенку и пластины дивертора, что может привести к повреждению установки [2]. Также в плазме токамаков возникают другие явления, такие как колебания предельного цикла (LCO), которые представляют собой циклические колебательные процессы в установившейся плазме [3] и не представляют опасности для установки. При этом LCO сложно отличимы от ELM с помощью диагностик доплеровского обратного рассеяния (ДОР) и D_α [4], что создает трудности при изучении процессов, происходящих в H-моде.

ELM и LCO можно классифицировать с помощью расчета инкремента неустойчивости пилинг-баллонной моды γ (ПБ) кодом BOUT++ [5]. Описание устойчивости пилинг-баллонной моды производится с помощью диаграммы зависимости значений γ от параметров плазмы. При значениях инкремента выше порога для условий разряда повышается вероятность отнесения события к классу ELM, в ином случае предполагается наблюдение LCO. Вычисления занимают большое количество времени – порядка 100 CPU часов, так как требуют численного решения дифференциальных уравнений в трехмерной геометрии [6]. Применение машинного обучения позволит сократить время получения данных в несколько раз [7], что показывается в данном докладе для токамака Глобус-М2 [8].

Цель. Исследовать возможности прогнозирования значения инкремента пилинг-баллонной моды с использованием методов машинного обучения для классификации явлений в плазме токамака Глобус-М2.

Методы исследования. В исследовании используются данные математического моделирования ПБ-моды с помощью кода BOUT++, позволяющего рассчитывать инкремент неустойчивости на основе решения уравнений магнитной гидродинамики (МГД) плазмы.

В качестве входных данных для машинного обучения нами были выделены следующие параметры плазмы: ширина и высота пьедестала; треугольность (δ) и вытянутость (κ); ток по плазме (I_p) и тороидальное поле ($B_т$).

Полученная выборка состоит из 2000 элементов для 5 сочетаний дискретных значений параметров δ, κ, I_p и $B_т$. Из общей выборки были исключены данные одной диаграммы (δ=0.21, κ=1.95, I_p=300 кА, $B_т$=0.7 Тл) для контроля обобщающей способности моделей. При обучении данные разбивались на обучающую и тестовую выборки в соотношении 80/20 соответственно.

Для классификации явлений будет решаться задача регрессии – построение моделей, позволяющих прогнозировать значение инкремента неустойчивости ПБ-моды γ на основе параметров плазмы. Так как LCO протекают в устоявшейся плазме и являются циклическими процессами, не приводящими к возникновению неустойчивости, инкремент ПБ-моды будет меньше, чем во время ELM. Границу разделения устойчивого состояния плазмы мы задали по значению $\gamma = 0.1$ обратного альфвеновского времени $(1/\tau_A)$.

Методы машинного обучения включают регрессионные модели, основанные на решающих деревьях – random forest regressor (RF), подходах градиентного бустинга – CatBoost [9], нейронных сетях – multi-layer perceptron (MLP). RF и MLP реализованы на основе библиотеки SciKit-Learn [10]. Анализ эффективности моделей проводится с использованием метрик *RMSE*, R^2 и сравнением с референсными результатами численного моделирования из контрольной выборки (не используемой при обучении).

Оптимальные гиперпараметры моделей определялись с помощью метода поиска по сетке (Grid Search) [11] и техникой кросс-валидации (Cross-Validation) [12].

Для балансировки обучающей выборки использовались Random Over-sampling (ROS), Synthetic Minority Over-sampling Technique (SMOTE) [13] и аугментация диаграмм. С их помощью данные о значениях инкремента, менее представленных в обучающей выборке, дублируются (ROS) или дополняются синтетическими данными (SMOTE и аугментация), что

уменьшает смещение модели и улучшает ее обобщающую способность. В качестве “классов” для методов ROS и SMOTE выбирались подвыборки с заданным стандартным отклонением инкремента $\sigma_{std\,\gamma} = 0.005\ (1/\tau_A)$. Аугментация диаграмм подразумевает их интерполяцию и варьирование узлов исходной сетки по параметрам ширины и высоты пьедестала (x, y соответственно) в диапазоне $\Delta_x = 0.002$ и $\Delta_y = 0.05$.

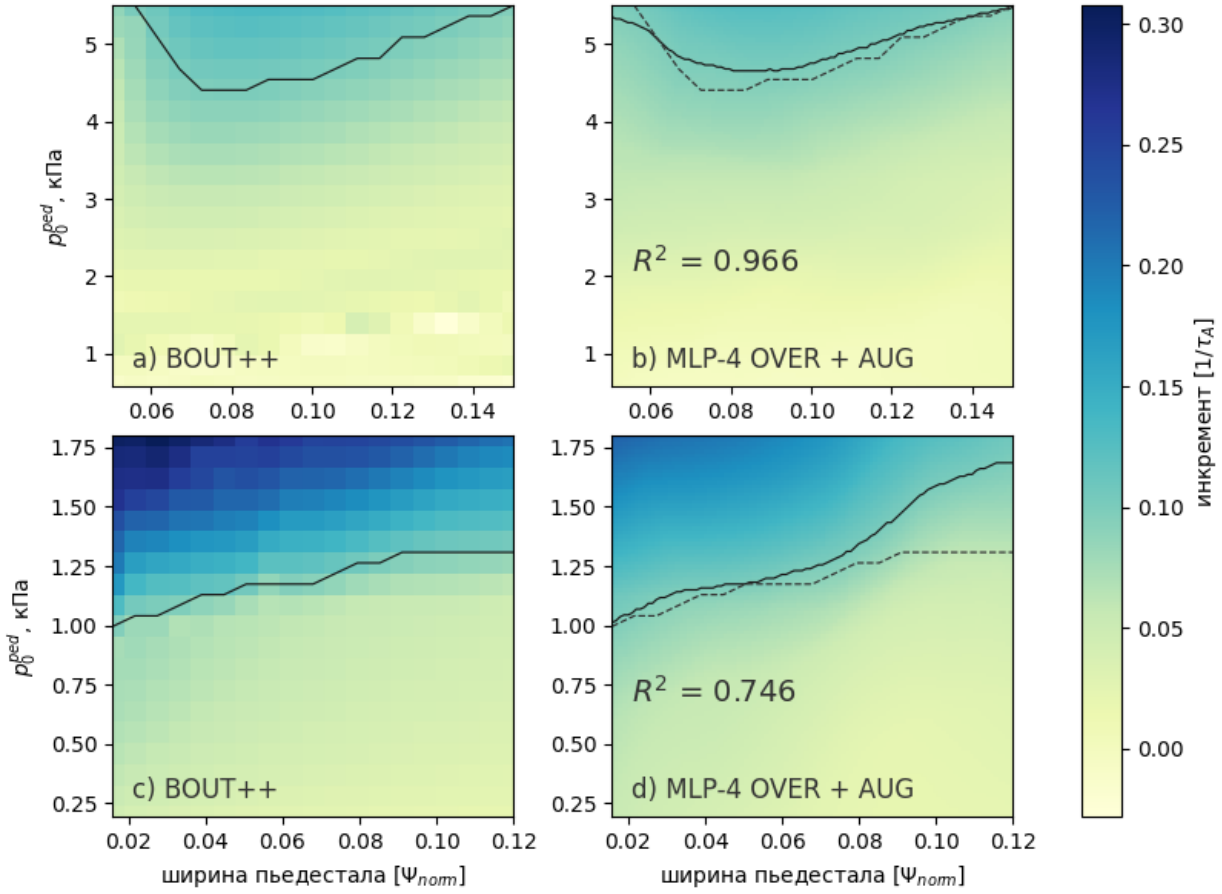


Рис. 1. Диаграммы инкремента ПБ-моды от ширины и высоты пьедестала, построенные для параметров плазмы δ = 0.35, κ = 1.83 (a) и (b), а также для δ = 0.21, κ = 1.9 (c) и (d). Диаграммы слева получены кодом BOUT++, справа – MLP (4 layers), обученной на выборке, дополненной с помощью техник аугментации, ROS и SMOTE. Границы проведены для значения γ = 0.1. Границы из данных BOUT++ также проведены пунктирной линией на (b) и (d) для сравнения. На диаграммах справа также изображено соответствующее значение метрики R^2.

Изложение результатов. Модели RF и CatBoost показали низкую обобщающую способность при прогнозировании инкремента ПБ-моды, так как основаны на решающих деревьях, плохо интерполирующих сложные и разреженные данные. Эти методы не способны корректно обрабатывать непрерывные зависимости в условиях ограниченного объема выборки.

Четырехслойный MLP продемонстрировал лучшую обобщающую способность среди других нейронных сетей на исходных данных (на контрольной выборке: R^2 = 0.725, RMSE = 0.041). Однако показал отрицательную прогностическую способность по показателю R^2 на менее представленных диаграммах, из-за несбалансированности данных.

Применение ROS, SMOTE и аугментации позволило сбалансировать выборку и устранить проблему некорректного обучения. В результате эффективность четырехслойного MLP стала стабильной на всех доступных данных, что можно увидеть на рис. 1: верхняя пара диаграмм соответствует данным, наименее представленным в исходной выборке, нижняя –

контрольной выборке. При этом метрики модели на контрольной выборке составили R^2 = 0.746, RMSE = 0.039, что также говорит об улучшении обобщающей способности.

Заключение. Random Forest и CatBoost оказались малоэффективными для прогнозирования инкремента ПБ-моды из-за разреженности и сложности данных. Четырехслойный MLP показал лучшую обобщающую способность среди моделей на исходных данных, но обучался некорректно из-за несбалансированности выборки. Для балансировки данных были применены техники: ROS, SMOTE и аугментация. Это обеспечило корректное обучение модели и улучшило его характеристики. Время прогнозирования всей диаграммы с помощью MLP составило несколько секунд, тогда как для BOUT++ требуется несколько дней.

Настоящая работа поддержана Министерством науки и высшего образования Российской Федерации в рамках государственного задания в сфере науки по проекту № FSEG-2024-0005.

ЛИТЕРАТУРА

1. Wagner F. A quarter-century of H-mode studies //Plasma Physics and Controlled Fusion. – 2007. – Т. 49. – №. 12B. – С. B1.
2. Connor J. W., Kirk A., Wilson H. R. Edge localised modes (ELMs): experiments and theory //AIP Conference Proceedings. – American Institute of Physics, 2008. – Т. 1013. – №. 1. – С. 174-190.
3. Yashin A. Y. et al. Phenomena of limit-cycle oscillations in the Globus-M spherical tokamak //Nuclear Fusion. – 2018. – Т. 58. – №. 11. – С. 112009.
4. Tokarev A. Y. et al. Application of multi-frequency doppler backscattering for studying edge localized modes at the Globus-M2 tokamak //Plasma Physics Reports. – 2024. – Т. 50. – №. 5. – С. 541-551.
5. Solokha V. V. et al. Classification of Edge Instabilities at Globus-M2 Tokamak //Plasma Physics Reports. – 2023. – Т. 49. – №. 4. – С. 419-427.
6. Dudson B. D. et al. BOUT++: A framework for parallel plasma fluid simulations //Computer Physics Communications. – 2009. – Т. 180. – №. 9. – С. 1467-1480.
7. Heo C. et al. Development of a neural network model for peeling–ballooning stability analysis in the KSTAR tokamak pedestals //Nuclear Fusion. – 2024. – Т. 64. – №. 7. – С. 076031.
8. Minaev V. B. et al. Spherical tokamak Globus-M2: design, integration, construction //Nuclear Fusion. – 2017. – Т. 57. – №. 6. – С. 066047.
9. Prokhorenkova L. et al. CatBoost: unbiased boosting with categorical features //Advances in neural information processing systems. – 2018. – Т. 31.
10. SciKit-Learn: [сайт]. URL: https://scikit-learn.org (дата обращения: 15.02)
11. Lerman P. M. Fitting segmented regression models by grid search //Journal of the Royal Statistical Society Series C: Applied Statistics. – 1980. – Т. 29. – №. 1. – С. 77-84.
12. Stone M. Cross-validation: A review //Statistics: A Journal of Theoretical and Applied Statistics. – 1978. – Т. 9. – №. 1. – С. 127-139.
13. Chawla N. V. et al. SMOTE: synthetic minority over-sampling technique //Journal of artificial intelligence research. – 2002. – Т. 16. – С. 321-357.

УДК 523.62-726

Д.Б. Матросова[1,2], Ю.А. Кропотина[2]
[1]Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого(*)
[2]ФТИ им. А.Ф. Иоффе

ГИБРИДНОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ НАТЕКАНИЯ СОЛНЕЧНОГО ВЕТРА НА ЛУННЫЕ МАГНИТНЫЕ АНОМАЛИИ

Введение. На данный момент Луна, в отличие от Земли, не обладает глобальным дипольным магнитным полем, но при этом имеет локализованные остаточные намагниченности лунных пород, известные как Лунные магнитные аномалии. С магнитными аномалиями ассоциируются лунные завихрения (свирлы — swirls) — необычные особенности, которые можно обнаружить в отдельных местах на поверхности Луны. Они характеризуются высоким альбедо, имеют извилистую форму. Положения всех известных завихрений совпадают с магнитными аномалиями, но обратное утверждение неверно. Хотя точное происхождение лунных завихрений неизвестно, одно из предположений гласит, что лунные магнитные аномалии защищают поверхность от воздействия протонов солнечного ветра, из-за чего грунт выглядит «моложе» [1].

Моделирование. Для моделирования лунной аномалии был использован гибридный код «Maximus» [2], самосогласованно рассчитывающий динамику заряженных частиц в электромагнитных полях. При этом ионы описываются кинетически, а электроны - как безмассовая нейтрализующая жидкость. Модель строилась со следующими параметрами солнечного ветра: магнитное поле B_0 = 3,85 нТ, отношение теплового давление к магнитному β = 1.9, концентрация электронов n_e = 6.99 см$^{-3}$, температура протонов T_p = 9.8 эВ.

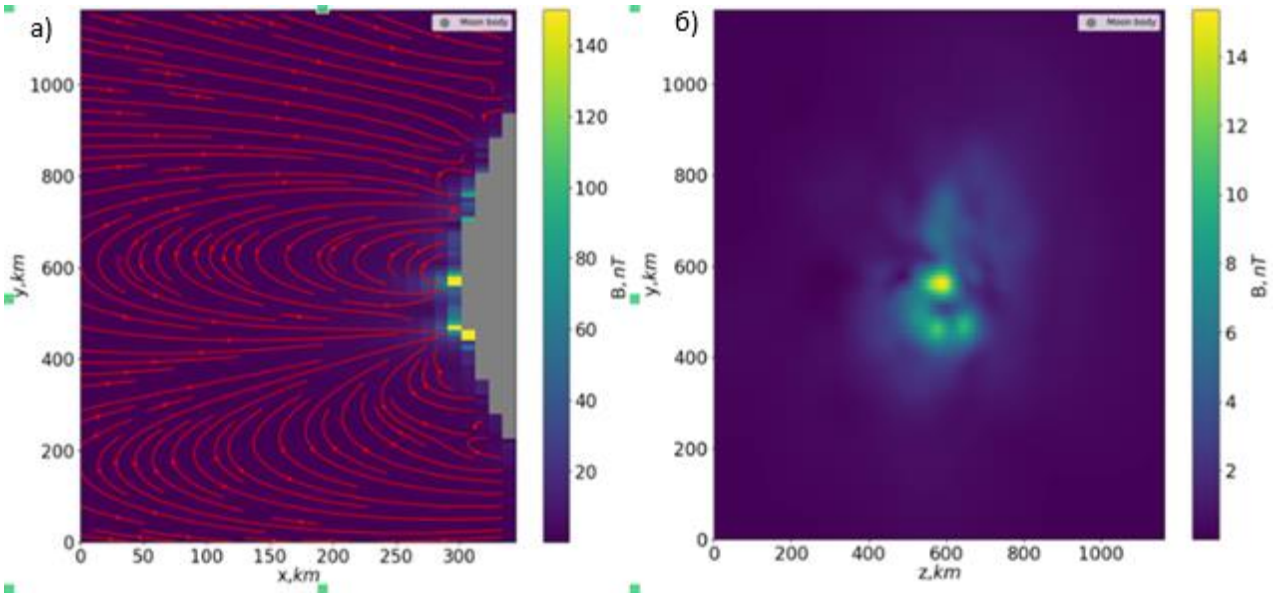


Рис. 1. Смоделированное магнитное поле Луны по данным Kaguya и Lunar Prospector в различных проекциях: а) вид «сбоку» на Луну б) вид «прямо» на Луну

Результаты. В данной работе мы построили две гибридных кинетических модели обтекания лунной магнитной аномалии Герасимовича нормальным к поверхности потоком солнечного ветра с различным составом. Для первой модели был использована чисто водородная плазма, в то время как во второй плазма была приближена к действительному

(*) Матросова Д.Б., DoraSailor@yandex.ru

составу солнечного ветра (75% водород и 25% гелий). Обтекание солнечным ветром лунной магнитной аномалии было смоделировано с использованием структуры магнитных полей Луны, измеренной спутниками Kaguya и Lunar Prospector [3] и показанной на рис. 1.

Оба моделирования показали отражение частиц (рис. 2), однако для гелия отражение было значительно слабее. Изначально предполагалось, что гелий за счет коллективного движения частиц бесстолкновительной плазмы окажет влияние на отражение водорода, однако этого не было выявлено.

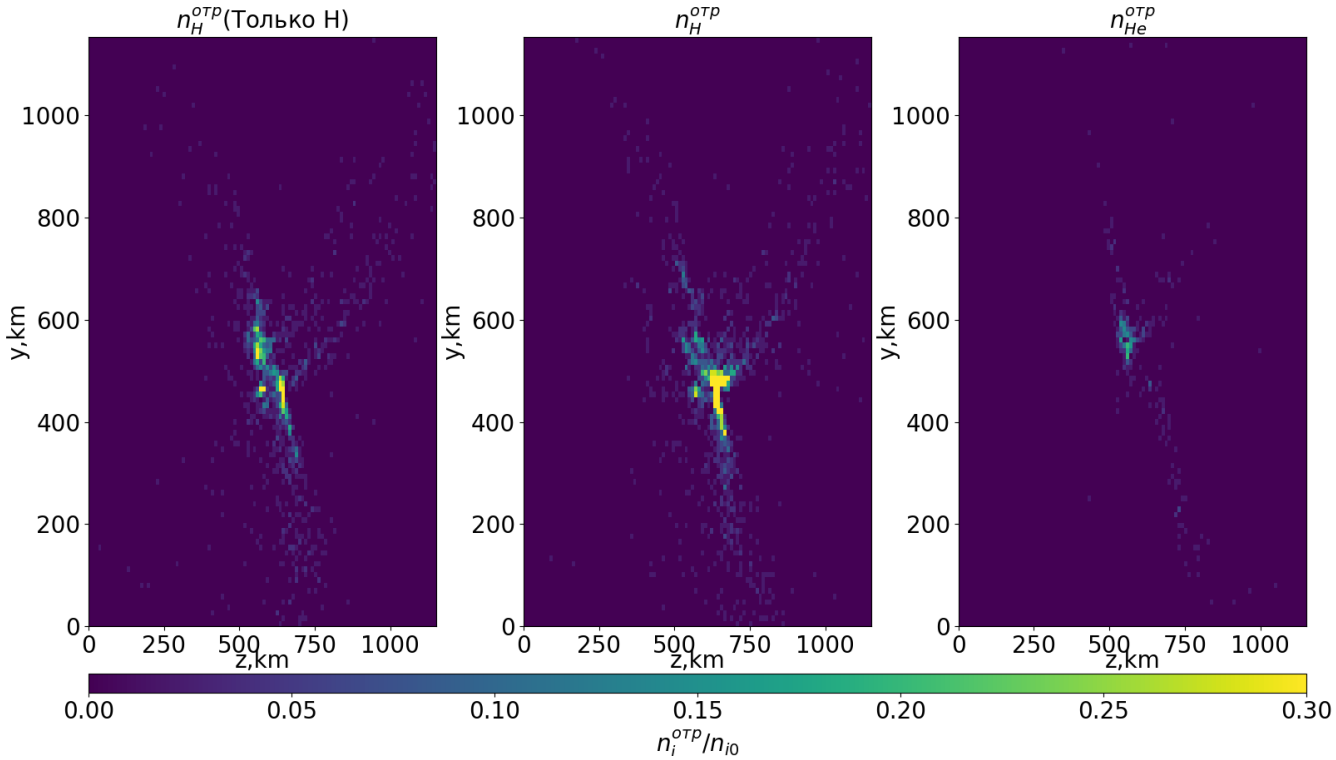


Рис. 2. Концентрация отраженных частиц, нормированная на начальную концентрацию частиц соответствующего сорта (слева: для чисто водородного ветра, посередине: для водорода в водородно-гелиевом ветре, справа: для гелия в водородно-гелиевом ветре)

Выводы. Была разработана модель лунной аномалии на основе гибридного кода «Maximus» и данных спутников Lunar Prospector и Kaguya. Моделирование подтверждает локальное отражение ядер H и He (и, следовательно, теорию о защите поверхности от выветривания протонами солнечного ветра). Результаты показали локальное отражение натекающего вещества до 40% для водорода и 14% для гелия, в то время как по всей области гелий отражается в ~3.76 раз хуже водорода. Влияние наличия гелия в составе на отражение водорода не обнаружено.

ЛИТЕРАТУРА

1. Kramer, G., Deca, J., Shukla, S., et al. The Plethora of Science Afforded by a Lunar Swirl // Bulletin of the AAS. –2021 – Vol. 53(4) – P.

2. Kropotina J., Bykov A., Krassilchtchikov A., et al. Maximus: A Hybrid Particle-in-Cell Code for Microscopic Modeling of Collisionless Plasmas // Communications in Computer and Information Science. – 2019 – №965. – P. 242–253.

3.Hideo Tsunakawa, Futoshi Takahashi, Hisayoshi Shimizu, et al. Surface vector mapping of magnetic anomalies over the Moon using Kaguya and Lunar Prospector observations // J. Geophys. Res. (Planets). – 2015 – Vol. 120(6) – P. 1160-1185.

УДК 523.985.3

Т.Д. Шохин[1(*)], Ю.Е. Чариков[2], А.Н. Шабалин[2]
[1]Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого
[2]Физико-технический институт им. А. Ф. Иоффе РАН

ПРЕДВЕСТНИКИ СОЛНЕЧНЫХ ВСПЫШЕК В УФ ИЗЛУЧЕНИИ

Введение. Предвестники солнечных вспышек — это комплекс явлений на предвспышечной стадии, таких как возрастание потока излучения в ультрафиолетовом (УФ) и мягком рентгеновском (МР) диапазонах, свидетельствующих о формировании нестабильной магнитной конфигурации в атмосфере Солнца. Непосредственное восстановление геометрии магнитного поля (МП) в активных областях возможно по данным SDO/HMI с временным разрешением в 720 с. Однако подобного разрешения оказывается недостаточно для качественной интерпретации динамики вспышек.

Тем не менее, детально наблюдать эволюцию МП в высоком пространственном (~1'') и временном (60 с) разрешении можно по изменениям филаментарных структур в УФ-диапазоне по данным SDO/AIA (например, [1]) и в рентгеновском диапазоне по данным RHESSI (например, [2]) для более интенсивных событий. Мы будем рассматривать "предвестники" - уярчения в УФ и рентгеновском излучении, регистрируемые на стадии, предшествующей началу вспышки на интервале 1 час, и свидетельствующие о формировании нестабильной конфигурации магнитных полей в АО в атмосфере Солнца, приводящей впоследствии к вспышке [3, 4].

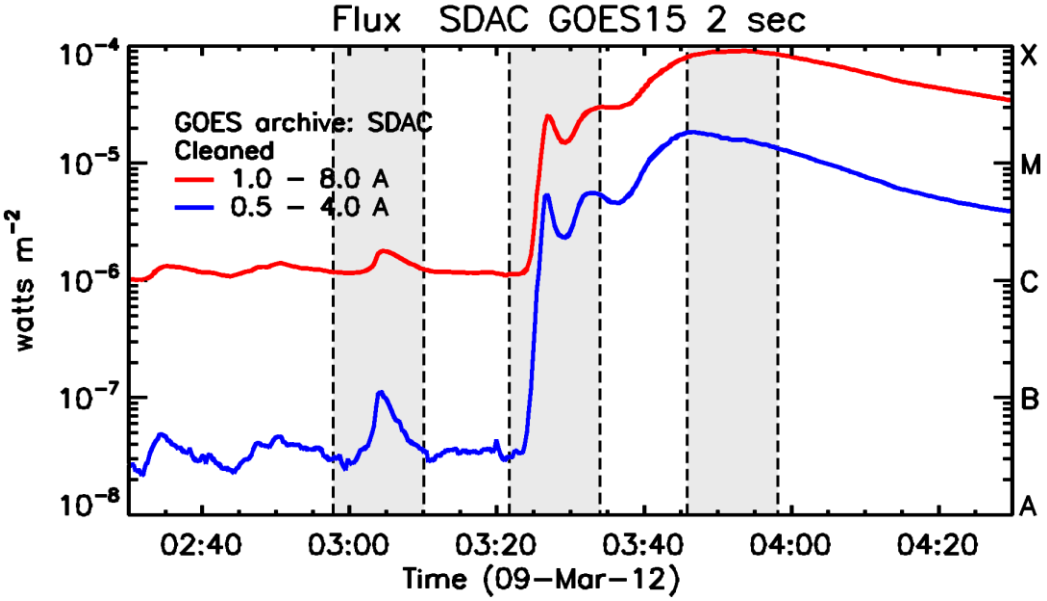


Рис. 1. Вспышка **M9 SOL2012-03-09T03:50** в рентгеновском диапазоне по измерениям GOES; вертикальными областями выделены интервалы, для которых были восстановлены усредненные структуры МП

Цель исследования. Рассмотреть конфигурации МП на различных стадиях эволюции активной области Солнца и сопоставить наблюдения с динамикой УФ и МР излучения для выявления причинно-следственной связи событий на предвспышечной стадии с последующей вспышкой.

(*)Т.Д. Шохин, shohintima@mail.ru

Методы исследования. Была рассмотрена предвспышечная активность локальных областей на Солнце на часовом временном интервале по данным GOES, SDO и RHESSI. По данным GOES для анализа было выбрано событие **M9 SOL2012-03-09T03:50** (рис. 1). Предвспышечная стадия события характеризуется повышением потока в МР излучении за 60, 45 и 25 и 10 минут до вспышки.

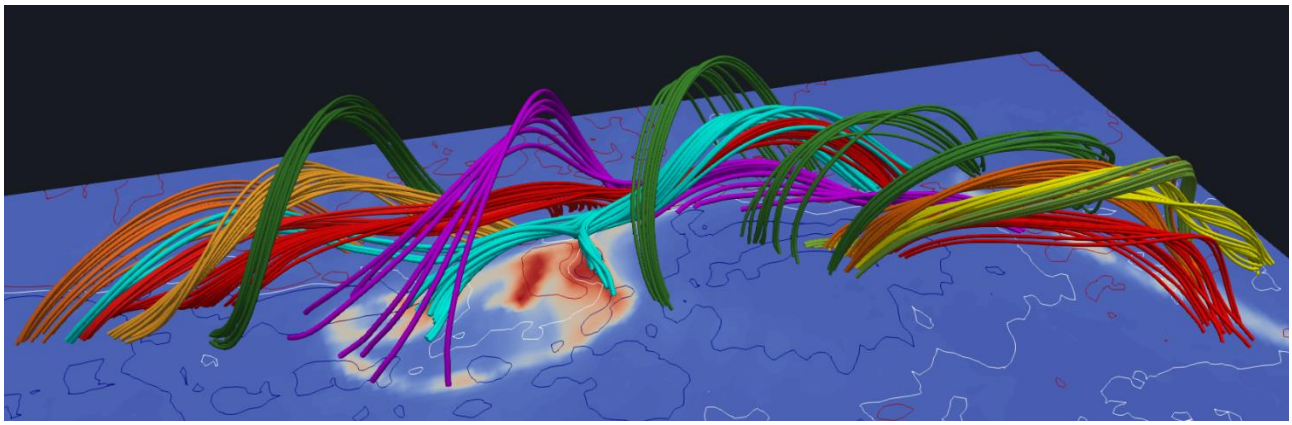


Рис. 2. NLFFF (Non-linear Force-Free Field, [5]) магнитная конфигурация АО события **M9 SOL2012-03-09** в период **03:22-03:34 UTC** по данным HMI, восстановлено в GXS [6], построено в Paraview [7]; фон – изображение в УФ линии 94А по данным SDO/AIA в момент **03:26 UTC**

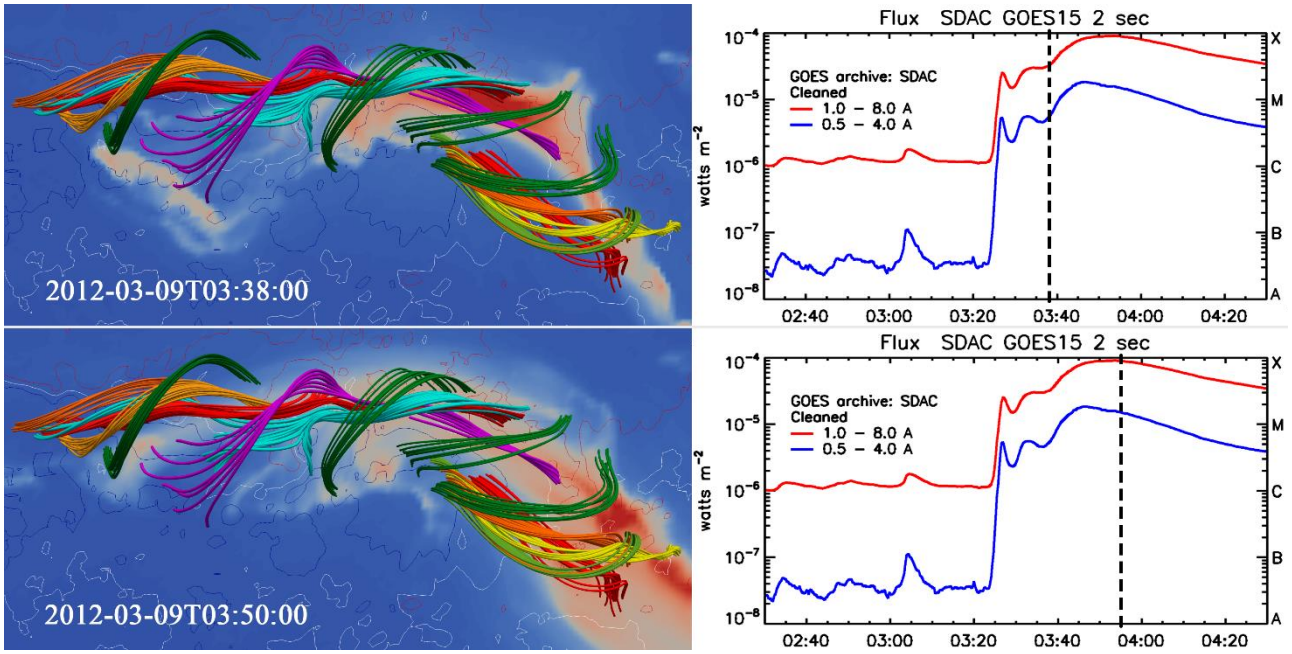


Рис. 3. Модель магнитной конфигурации АО события **M9 SOL2012-03–09** в период **03:22-03:34 UTC**; фон – изображение в УФ линии 94А по данным SDO/AIA в моменты **03:38 UTC** (сверху) и **03:50 UTC** (снизу); справа – графики светимости по данным GOES; пунктирными линиями отмечены моменты, соответствующие УФ изображениям

Для данного события по магнитограммам прибора SDO/HMI была восстановлена структура МП в пакете SolarSoft/GX_Simulator, анализ которого проводился в пакете Paraview (рис. 2). Для анализа эволюции АО с более высоким временным разрешением были использованы изображения в линиях УФ излучения по данным SDO/AIA. Исследование данного события в рентгеновском диапазоне по данным RHESSI имеет смысл только на стадии вспышки в связи с низким пространственным разрешением прибора (~3’’).

Результаты. Временное разрешение магнитограмм прибора SDO/HMI не позволяет зафиксировать конкретные изменения конфигурации МП при переходе от предвспышечной стадии к вспышке, однако становится возможным восстановление общей конфигурации МП рассматриваемой АО. В областях, в которых произошло наибольшее повышение светимости на разных этапах эволюции АО (предвестники, вспышка), наблюдаются более сложные магнитные структуры. Видно, что повышение светимости в данном событии происходит вдоль магнитного жгута, проходящего над линией магнитной инверсии, что свидетельствует о неустойчивости МП в данных структурах и о дальнейшем пересоединении с высвобождением энергии (рис. 3).

Выводы. Совместный анализ восстановленного магнитного поля и УФ- и МР-излучения может указать на возможные причинно-следственные связи между предвестниками и последующими вспышками.

ЛИТЕРАТУРА

1. Warren, H. P., & Warshall, A. D., Ultraviolet Flare Ribbon Brightenings and the Onset of Hard X-Ray Emission // ApJ, - 2001 October - vol. 560, p. L87-L90
2. Chifor, C., Mason, H. E., Tripathi, D., et al. X-ray precursors to flares and filament eruptions // A&A, - 2007 September - vol. 458, pp. 967-979
3. Charikov Yu. E., X-Ray precursors in solar flares//in: 2nd TIGER-Symposium on the Program of SCOSTEP/ISCN/WG 1.2, June 9-11, 1999, SOI, St. Petersburg, p.19-20
4. Charikov Yu. E., X-Ray precursors in solar flares.//2000, Phys. Chem. Earth Pt. C-Solar-Terr. Planet. Sci., v.25, N5-6, p. 407
5. Fleishman G. D., Anfinogentov S., Mysh'yakov I. Casting the Coronal Magnetic Field Reconstruction Tools in 3D Using the MHD Bifrost Model // ApJ, - 2017 – Vol. 839. - 30
6. Nita G. M., Fleishman G. D., Kuznetsov A. A. Data-Constrained Solar Modeling with GX Simulator // ApJS, - 2023 – Vol. 267. - №1. – 6
7. Utkarsh A. The ParaView Guide: A Parallel Visualization Application // Kitware, Inc., Clifton Park, NY, USA – 2015, ISBN: 1930934300

УДК 523.985.3:523.31-852

И.А. Иванов, В.М. Остряков
Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого(*)

ВЛИЯНИЕ СОЛНЕЧНЫХ СУПЕРВСПЫШЕК НА ПЕРЕРАСПРЕДЕЛЕНИЕ ИЗОТОПА ^{14}C В АТМОСФЕРЕ ЗЕМЛИ

Введение. Протоны в космических лучах способны образовывать в атмосфере Земли каскады вторичных частиц, в которых посредством ядерных реакций рождаются нейтроны. Реакция $^{14}\mathrm{N}(n,p)^{14}\mathrm{C}$ является основным каналом образования радиоуглерода в атмосфере. После этого радиоуглерод окисляется до двуокиси углерода $^{14}CO_2$, которая, участвуя в углеродном цикле, поглощается растениями, океаном и осаждается в арктических льдах.

За последние 15 лет появились работы [1-3], авторы которых приводят экспериментальные данные по концентрации изотопа ^{14}C в кольцах деревьев за последние $\sim$ 15-20 тысяч лет. В этих данных обнаружены резкие увеличения ($\sim$ 1-2 года) концентрации радиоуглерода с последующим плавным спадом. Причем этим пикам (их около 10) предшествуют спады в концентрации. Авторы работы [2] объясняют эти пики тем, что на Солнце могли происходить супервспышки, которые увеличивали поток протонов и, соответственно, генерацию ^{14}C, Q. Для объяснения амплитуды и ширины пика в его

(*) И.А. Иванов, i.a.ivanov@vniim.ru

концентрации Q должна быть $\sim 1.7 \cdot 10^8$ ат/см^2 [4], что примерно в 70 раз больше скорости генерации от вспышки 23 февраля 1956 года, равной $2.5 \cdot 10^6$ ат/см^2 [3]. Однако расчеты, выполненные для гипотетической супервыспышки, не объясняют уменьшения концентрации радиоуглерода, предшествующего пикам. Авторы работ [5,6] рассмотрели галактический гамма-всплеск для объяснения пика в концентрации ^{14}C.

В настоящей работе предлагается альтернативное объяснение такой эволюции концентрации ^{14}C, суть которого в рассмотрении дополнительного влияния солнечной вспышки на характеристики атмосферы. Такое рассмотрение можно провести в рамках так называемой резервуарной модели.

Цель. Целью данной работы является объяснение аномального поведения концентрации ^{14}C с характерным временем нарастания 1-2 года.

Задачи. Для достижения поставленной цели необходимо построить математическую модель события и получить решение при увеличении скорости генерации радиоуглерода на примере спектров вспышки 23 февраля 1956 года.

Модель. Рассмотрим 6-резервуарную модель, состоящую из стратосферы, тропосферы, биосферы, гумуса, поверхностного и глубоководного слоев океана. В каждом из резервуаров на начальный момент времени содержится некоторое (стационарное) количество ^{14}C. Между i-ым и j-ым резервуарами происходит, посредством диффузии, обмен радиоуглеродом с характерными временами перехода τ_{ij}. Эта модель описывается следующей системой дифференциальных уравнений вида «сток-исток»:

$$\frac{dN_i}{dt} = Q_i(t) + \sum_{\substack{j \\ i \neq j}} \lambda_{ji} N_j - \alpha_i N_i, \qquad (1)$$

где t – время, N_i – концентрация ^{14}C в i-ом резервуаре, индексы i и j принимают значения s, t, b, h, m, o, обозначающие стратосферу, тропосферу, биосферу, гумус, поверхностный слой океана и глубоководный слой океана, соответственно; $\alpha_s(t) = \lambda + \lambda_{st}(t)$, $\alpha_t = \lambda + \lambda_{tb} + \lambda_{tm} + \lambda_{ts}$, $\alpha_b = \lambda + \lambda_{bt} + \lambda_{bh}$, $\alpha_h = \lambda + \lambda_{ht}$, $\alpha_m = \lambda + \lambda_{mt} + \lambda_{mo}$, $\alpha_o = \lambda + \lambda_{om}$, $\lambda_{ij} = 1/\tau_{ij}$, $\lambda = \ln 2/5730$ год$^{-1}$ – постоянная распада ^{14}C, $\tau_{st}(t) = \tau_{st}^0 \Big((\beta - 1)\big(\theta(t - t_0) - \theta(t - T - t_0)\big) + 1\Big)$, $\tau_{st}^0 = 3$ года, $\tau_{ts} = 18.8$ лет, $\tau_{tb} = 30$ лет, $\tau_{tm} = 7.5$ лет, $\tau_{bt} = \tau_{bh} = 30.6$ лет, $\tau_{ht} = 100$ лет, $\tau_{mt} = 9.7$ лет, $\tau_{mo} = 22.7$ лет, $\tau_{om} = 1130$ лет, $\theta(x)$ – тета-функция Хевисайда, значения τ_{ij} близки данным работы [7]; $Q_s(t) = Q_s^{56}\big(\theta(t - t_0) - \theta(t - \tau - t_0)\big) + Q_s$, $Q_t(t) = Q_t^{56}\big(\theta(t - t_0) - \theta(t - \tau - t_0)\big) + Q_t$, Q_s, Q_t, Q_s^{56}, Q_t^{56} – скорости генерации ^{14}C, соответствующие минимуму солнечной активности в 11-летнем цикле и от вспышки 1956 года в стратосфере и тропосфере, соответственно. $Q_i(t) \equiv 0$ для $i = b, h, m, o$. Функция $\tau_{st}(t)$ моделирует скачкообразное изменение скорости переноса вещества из стратосферы в тропосферу длительностью T от момента времени t_0, вызываемое вспышкой. Параметр β показывает во сколько раз изменяется τ_{st} под воздействием вспышки по отношению к начальному значению τ_{st}^0. Функции $Q_s(t)$ и $Q_t(t)$ моделируют скачкообразное изменение во времени скорости генерации ^{14}C, обусловленное вспышкой, начиная с момента t_0 и длительностью τ.

Система (1) была решена численно методом Рунге-Кутта 4 порядка. Эта система со стационарным временем перехода из стратосферы в тропосферу $\tau_{st} = \tau_{st}^0$ была решена аналитически с помощью преобразования Лапласа. Численное и аналитическое решения системы (1) для события Мияке 774 года н.э. приведены на рис. 1.

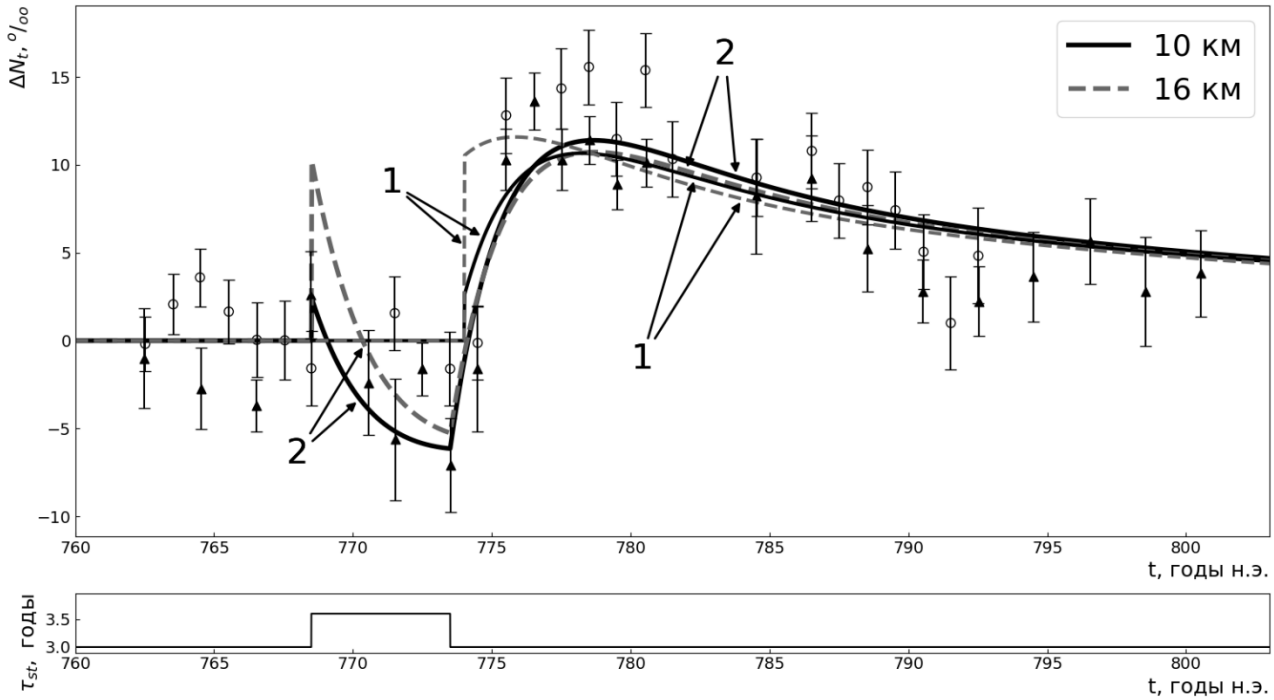


Рис. 1. Временной ход концентрации ^{14}C в тропосфере, рассчитанный из системы (1):
1 – аналитическое решение системы со стационарным τ_{st}^0 и $t_0 = 774$ года н.э., 2 – численное решение системы (1) с переменным $\tau_{st}(t)$. Сплошные кривые соответствует расчету для высоты тропопаузы 10 км, пунктирные – для 16 км. Временная шкала в нижней части рисунка показывает изменение $\tau_{st}(t)$. Экспериментальные данные приведены из работы [8]

Величина ΔN_t на рис. 1 рассчитывалась по формуле $\Delta N_t = (N_t(t)/N_t^0 - 1) \cdot 1000$, где N_t^0 – начальная концентрация радиоуглерода в тропосфере, определяемая из системы уравнений (1) в начальный момент времени при равной нулю левой части. На рис. 1 начало вспышки происходит в момент времени t_0, равный 768.5 лет н.э., длительность которой фактически представляет собой дельта-функцию. Время перехода τ_{st} увеличено на 20% ($\beta = 1.2$), и это увеличение начинается в момент времени t_0. Система находится в этом состоянии 5 лет. На рис. 1 скорость генерации ^{14}C от вспышки 1956 года увеличена в 65 раз для объяснения экспериментальных данных.

На рис. 1 видно, что в момент времени t_0 величина ΔN_t резко возрастает. Такое поведение концентрации обусловлено тем, что в период действия вспышки в стратосфере и тропосфере по сравнению с периодом до вспышки резко увеличивается скорость генерации ^{14}C в $\sim$ 200 и $\sim$ 60 раз, соответственно для комбинации величин $(Q_s(t) + Q_t(t) - Q_s - Q_t)/(Q_s + Q_t)$. Оно создает скачок в концентрации, сменяющийся резким спадом, вызванным увеличением времени перехода между стратосферой и тропосферой. Этот спад в момент времени $t_0 + T$ сменяется нарастанием концентрации с последующим плавным уменьшением.

Выводы. Событий Мияке с таким провалом в концентрации перед резким возрастанием известно уже несколько [8]. Как показано на рис. 1, учет влияния резкого увеличения Q на физическое состояние верхних слоев атмосферы позволяет объяснить этот провал. Это влияние выражается в увеличении всего на 20% времени перехода из стратосферы в тропосферу. Решение системы (1) со стационарными временами переходов, показанное цифрой 1 на рис. 1, не описывает провал во временном поведении концентрации ^{14}C.

Рассмотренная 6-резервуарная модель в сочетании с мощной солнечной вспышкой показывает возможность применения ее к описанию всплесков в концентрации

радиоуглерода, таким как события Мияке. Проведенное моделирование также говорит о необходимости учета изменений физических условий в атмосфере Земли для объяснения такой эволюции концентрации ^{14}C. При этом, как видно, на несколько лет сдвигается и дата самой солнечной супервспышки, что может быть важным в экспериментах по другим космогенным изотопам (^{10}Be и ^{36}Cl) в ледяных кернах, относящихся к рассматриваемым событиям.

ЛИТЕРАТУРА

1. Miyake F., Nagaya K., Masuda K., Nakamura T. A signature of cosmic-ray increase in AD 774-775 from tree rings in Japan // Nature. – 2012. – Vol. 486 (7402). – P. 240-242.
2. Usoskin I.G., Kromer B., Ludlow F., Beer J., Friedrich M., Kovaltsov G.A., Solanki S.K., Wacker L. The AD775 cosmic event revisited: the Sun is to blame // Astron. Astrophys. – 2013. – Vol. 552 (L3). – P. 1-4.
3. Павлов А.К., Блинов А.В., Васильев Г.И., Вдовина М.А., Константинов А.Н., Остряков В.М. “Изотопные следы” гамма- и протонных событий и аномальный сигнал в радиоуглероде в 775 г.н.э. // Письма в Астрон. журн. – 2014. – Т. 40. – № 10. – С. 706-713.
4. Павлов А.К., Блинов А.В., Васильев Г.И., Вдовина М.А., Волков П.А., Константинов А.Н., Остряков В.М. Гамма-всплески и образование космогенных радионуклидов в атмосфере Земли // Письма в Астрон. журн. – 2013. – Т. 39. – № 9. – С. 643-650.
5. Hambaryan V.V., Neuhäuser R. A galactic short gamma-ray burst as cause for the ^{14}C peak in AD 774/5 // MNRAS. – 2013. – Vol. 430 (1). – P. 32-36.
6. Pavlov A.K., Blinov A.V., Konstantinov A.N., Ostryakov V.M., Vasilyev G.I., Vdovina M.A., Volkov P.A. AD 775 pulse of cosmogenic radionuclides production as imprint of a Galactic gamma-ray burst // MNRAS. – 2013. – Vol. 435 (4). – P. 2878-2884.
7. Дорман Л.И. Особенности исследования вариаций космических лучей радиоуглеродным методом / Труды шестого всесоюзного совещания по проблеме «Астрофизические явления и радиоуглерод», 13-15 октября 1978 г. – Тбилиси: изд. Тбилисского ун-та, 1978. – С.49-96.
8. Park J., Southon J., Fahrni S., Greasman P.P., Mewaldt R. Relationship between solar activity and $\Delta^{14}C$ peaks in AD 775, AD 994, and 660 BC // Radiocarbon. – 2017. – Vol. 59 (4). – P. 1147-1156.

УДК 620.172.2

Ю.С. Седова[1,2]
[1]Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого(*)
[2] Институт проблем машиноведения РАН, г. Санкт-Петербург

ИСПЫТАНИЯ КОЛЬЦЕВЫХ ОБРАЗЦОВ КОТЕЛЬНЫХ ТРУБ: АНАЛИЗ ДИАГРАММ ДЕФОРМИРОВАНИЯ НА ОСНОВЕ МОДЕЛЕЙ ВОДОРОДНОЙ ХРУПКОСТИ

Введение. Статистический анализ отказов котельного оборудования выявил преобладание хрупких разрушений труб поверхностей нагрева с тенденцией к увеличению их частоты и сокращению общего срока службы металлических изделий [1]. В то же время экспериментальные исследования демонстрируют корреляцию между концентрацией растворенного в металле труб водорода и их механическими свойствами. Проведенные механические испытания кольцевых и продольных образцов из стали 20, вырезанных из новых и эксплуатировавшихся труб, выявили, что традиционные испытания на продольных образцах [2, 3] не фиксируют значимых различий между ними. Однако испытания кольцевых образцов показали существенные отличия в диаграммах "напряжение-деформация" для металла после длительной эксплуатации [1]. Эти образцы продемонстрировали заметное снижение предела текучести и предела прочности при увеличении пластичности материала (рис. 1). Данные отклонения требуют тщательного анализа и интерпретации как потенциальные диагностические признаки для контроля качества труб.

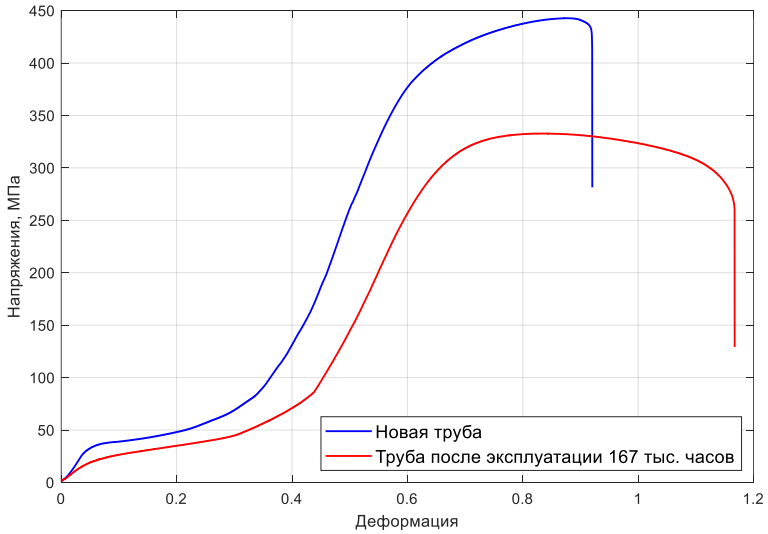


Рис. 1. Экспериментальные инженерные кривые напряжения–деформации кольцевых образцов; [1]

В этой связи, целью настоящей работы является анализ и верификация двух предположений: а) о влиянии растворенного в металле водорода на предел текучести материала; б) о влиянии водорода на величину максимальных когезионных напряжений, связывающих берега микротрещин. Механизм влияния водорода оценивался путем сопоставления кривых деформирования кольцевых образцов, полученных в ходе моделирования, с экспериментальными данными.

(*) Ю.С. Седова, sedova.yus@mail.ru

Для проверки гипотез было проведено численное исследование в среде ANSYS. В качестве модели использованы кольцо из стали 20 с внешним и внутренним диаметрами 60 мм и 48 мм, соответственно, и D-образные опоры диаметром 35 мм.

Влияние предела текучести. Для исследования влияния предела текучести материала на диаграмму деформирования было промоделировано растяжение кольцевого образца с исходным свойствами и с пониженным на 30% значением величины $\sigma_{0.2}$. Восстановленные по результатам расчетов кривые деформирования колец представлены на рис. 2а.

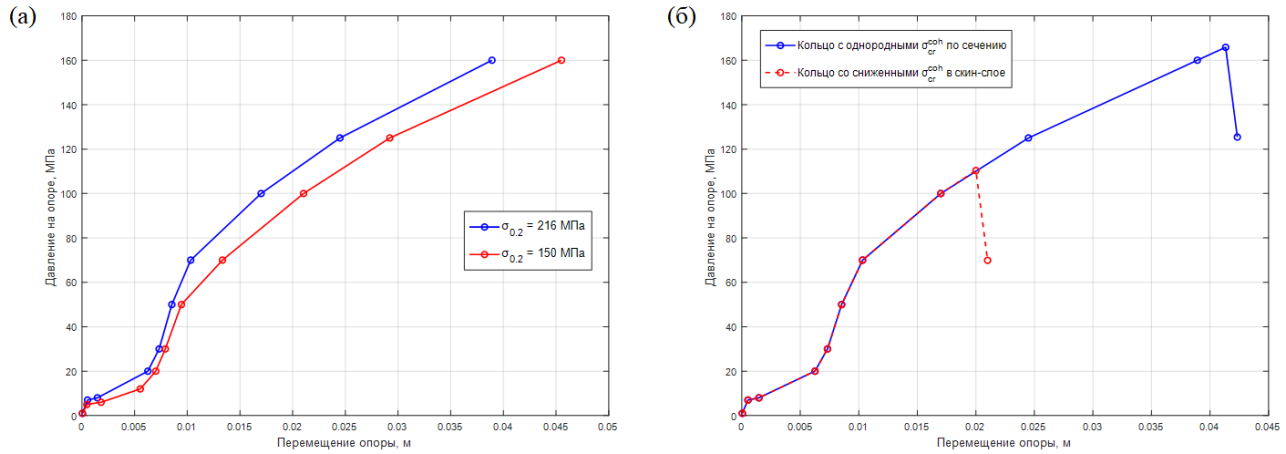


Рис. 2. Диаграммы деформирования кольцевых образцов: а) влияние снижения предела текучести; б) влияние водородной деградации когезионных напряжений

Полученные диаграммы показывают, что при снижении предела текучести материала его кривая деформирования проходит существенно ниже исходной линии. Различие в напряжениях, необходимых для растяжения кольцевого образца на ту же величину, составляет примерно 10÷20%. Это частично объясняет разницу в результатах, фиксируемую при проведении экспериментальных испытаний, однако такая модель еще не дает ответа на вопрос о том, за счет чего снижается предел прочности материала. Для этого требуется включение в модель определяющих уравнений механики разрушений и зависимостей влияния водорода на соответствующие параметры.

Влияние водорода на когезионные напряжения. За основу подхода к описанию влияния водорода на свойства материала использован механизм усиленной водородом декогезии HEDE. Подробный обзор модели и ее численная реализация представлены в работах [4-6].

На данном этапе работы был рассмотрен кольцевой образец с внутренним поверхностным слоем с повышенным содержанием водорода и фоновой концентрацией вещества в остальном объеме материала.

Моделирование растяжения кольца показало, что вследствие водородной деградации когезионных напряжений в поверхностном слое мгновенно инициируется трещина и распространяется по всей его толщине. До этого момента деформирование образца требует такого же усилия, как и растяжение однородного образца без повышенной концентрации водорода (рис. 2б). Однако дальнейшее распространение трещины происходит лавинообразно и приводит к полному разрыву кольца. Разрушение образца с ослабленным водородом поверхностным слоем происходит при существенно более низком (на 33%) уровне нагрузки.

Таким образом, учет влияния водорода на когезионные напряжения и предположение о наличии трещин на внутренней поверхности трубы позволяют объяснить более ранний разрыв образца и разницу в пределе прочности, однако этого недостаточно для полного описания экспериментальной диаграммы деформирования, особенно поведения материала до разрушения. Для адекватного описания необходим более комплексный подход.

Комплексный подход. На следующем этапе было исследовано совместное влияние снижения величины предела текучести и максимальных когезионных напряжений на диаграмму деформирования. Моделирование показало, что в таком случае диаграмма растяжения образца проходит заметно ниже исходной кривой, а влияние присутствия поверхностного слоя со сниженными когезионными напряжениями проявляется непосредственно перед разрывом кольца (рис. 3). Таким образом, удается проследить основные тенденции экспериментальной диаграммы деформирования кольцевых образцов.

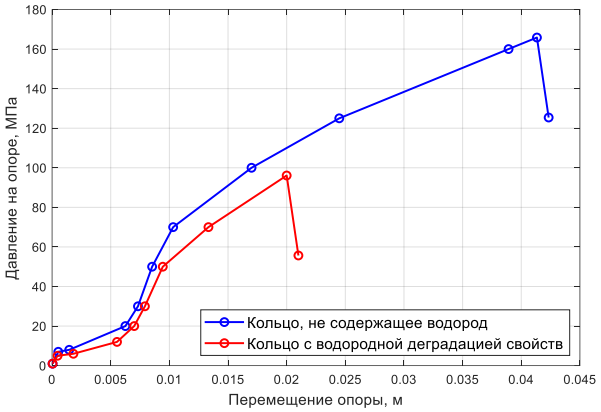


Рис. 3. Диаграмма деформирования кольцевых образцов при комплексном подходе

Вопрос, который остался не раскрыт, состоит в том, что экспериментальная инженерная кривая деформирования показывает увеличение пластичности материала до разрушения. Предложенная нами модель еще не позволяет проследить такой тенденции.

Заключение. Разница в результатах испытаний продольных и кольцевых образцов обусловлена наличием продольных трещин в трубе, существенным образом влияющих на разрушение кольцевых, и не отражающихся на поведении продольных образцов.

Представленный подход позволяет частично объяснить механизм водородной хрупкости металла, возникающей в процессе длительной эксплуатации металлических изделий, включая трубы поверхностей нагрева. Для более полной интерпретации экспериментальных данных необходимо дальнейшее развитие модели.

ЛИТЕРАТУРА

1. Отчет о НИОКР №НИОКР-ИЛ-01-2023 «Количественная оценка концентрации водорода в металлургической продукции при входном контроле и в процессе эксплуатации энергетического оборудования и материалов» (заказчик ТГК-11 ПАО «Интер РАО», руководитель А.В. Нечаева).
2. ТУ 14-3Р-55-2001 Трубы стальные бесшовные для паровых котлов и трубопроводов. М.: РНИИТП, 2001. — 8 с.
3. Федеральные нормы и правила в области промышленной безопасности «Правила осуществления эксплуатационного контроля металла и продления срока службы основных элементов котлов и трубопроводов тепловых электростанций», утв. приказом Ростехнадзора от 15.12.2020 №535.
4. Oriani R.A. A mechanistic theory of hydrogen embrittlement of steels // Berichte der Bunsengesellschaft für physikalische Chem. – 1972. – V. 76(8). – P. 848– 857.
5. Яковлев Ю.А., Полянский В.А., Седова Ю.С., Беляев А.К. Модели влияния водорода на механические свойства металлов и сплавов // Вестник Пермского национального исследовательского политехнического университета. Механика. – 2020. № 3. – С. 136-160.
6. Седова Ю. С., Бессонов Н. М., Полянский В. А. Влияние водородного скин-эффекта на характер разрушения стальных образцов //Научно-технические ведомости Санкт-Петербургского государственного политехнического университета. Физико-математические науки. – 2022. – Т. 15. – №. 3. – С. 169-184.

УДК: 669.018.44:669.017.16:620.186.1

Ю.А. Беликова
НИЦ «Курчатовский институт» – «ЦНИИ КМ «Прометей», г. Санкт-Петербург(*)

МЕХАНИЗМ ФОРМИРОВАНИЯ ИНТЕРМЕТАЛЛИЧЕСКИХ ФАЗ ПРИ ДЛИТЕЛЬНОМ ТЕМПЕРАТУРНОМ СТАРЕНИИ В ЛИТОМ ЖАРОПРОЧНОМ СПЛАВЕ HP40NBTI

Введение. Наиболее эффективными в условиях эксплуатации оборудования нефтеперерабатывающей и нефтехимической промышленности являются жаропрочные аустенитные сплавы на основе системы Fe-Cr-Ni – серии HP с карбидным упрочнением [1-2]. Эти сплавы работают при температурах 700-900 °С с циклическими перепадами ±150-300 °С, внешних нагрузках 5-10 МПа, в науглероживающей и окислительной средах. Длительная работоспособность жаропрочных сплавов в основном определяется морфологией, размером, характером распределения в структуре и стабильностью упрочняющих фаз. Понимание их строения и механизмов формирования при кристаллизации и фазовых превращений в условиях эксплуатации являются необходимым условием для разработки методов повышения рабочего ресурса сплавов. Для материалов этой подгруппы нет достаточной накопленной и сформированной базы сведений о структурных процессах в материалах, протекающих во время эксплуатации, в отличие от имеющегося исследовательского задела по жаропрочным материалам в других отраслях промышленности. По этой причине актуальным является систематическое последовательное изучение исходного строения и эволюции фаз в структуре HP сплавов современными методами электронной микроскопии.

Материалы и методы исследования. Для исследования использовали центробежнолитые трубы длиной 2 м, диаметром 115 мм и толщиной стенки 14 мм из сплава HP40NbTi в исходном литом состоянии и после длительной выдержки при температуре 900°С в течении 500 часов. Химический состав металла труб приведен в табл. 1.

Табл. 1. Фактический химический состав металла трубы

Материал	Содержание химических элементов, масс.%											
	C	Si	Mn	Cr	Ni	Nb	W	Mo	V	Ti	РЗМ	Fe
Труба	0,43	1,80	0,91	25,60	35,92	1,73	0,34	0,23	0,10	0,29	≤ 0,5	Ост.

Исследование структуры в литом состоянии без термической обработки, а также после длительного старения при температуре 900°С проводили с использованием сканирующего электронного микроскопа TESCAN MIRA и просвечивающего электронного микроскопа FEI Tecnai G^2 30 S-TWIN. Пробоподготовка к исследованию на просвечивающем электронном микроскопе осуществлялась с помощью двулучевого электронно-ионного микроскопа TESCAN LYRA 3XM посредством прецизионной резки тонкой фольги из исследуемой области перпендикулярно плоскости шлифа.

Результаты исследования и обсуждение. В исходном литом состоянии микроструктура сплавов HP состоит из богатой никелем и хромом аустенитной матрицы, междендритной сетки карбидов и внутризеренных карбидов с высоким содержанием хрома и ниобия (M_7C_3 и MCN, соответственно). Наибольшую актуальность для исследования представляет карбид ниобия, который, несмотря на более высокую стабильность по сравнению с карбидом хрома, также претерпевает фазовое превращение [3-4]. Однако публикации с результатами систематических исследований фазового превращения карбида ниобия при высоких температурах отсутствуют.

(*) Ю.А. Беликова, ckp@crism.ru

В связи с этим *целью* настоящей работы является анализ строения и стабильности упрочняющих включений на основе ниобия в структуре жаропрочных аустенитных HP-сплавов при длительной высокотемпературной эксплуатации.

Проведенные ранее исследования показали, что упрочняющие включения на основе ниобия, формирующиеся при кристаллизации сплава, правильно считать сложным и неоднородным по химическому составу карбонитридом ниобия и титана (NbTi)(CN) [5].

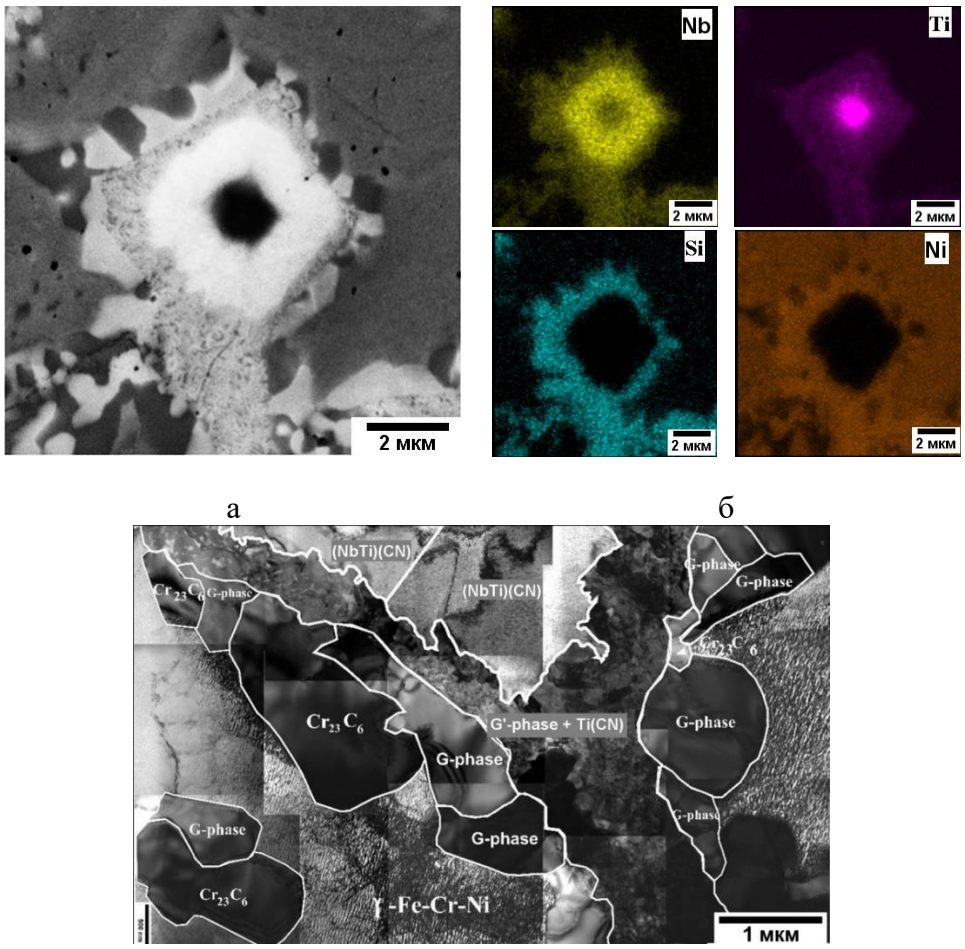


Рис. 1. Микроструктура многофазной частицы на основе ниобия после выдержки сплава HP40NbTi при 900 °C длительностью 500 ч: а – РЭМ, BSE; б – РЭМ, карты распределения химических элементов; в – ПЭМ, светлое поле

После длительной высокотемпературной выдержки при температуре 900 °C в течение 500 ч упрочняющие частицы карбонитрида ниобия в структуре сплава становятся многофазными поликристаллами. При этом каждая фаза в частице формирует отдельный слой (рис. 1а). Центральная фаза представлена карбонитридами (TiNb)CN и (NbTi)(CN), что соответствует исходному состоянию. Внешние слои исследованных частиц обогащены никелем, ниобием и кремнием, что свидетельствует о формировании интерметаллической G-фазы – $Ni_{16}Nb_7Si_6$, которая образуется в определенных условиях из карбида ниобия (рис. 1б). Более детальный анализ строения ниобиевой частицы после высокотемпературной выдержки 500 ч проведен методами просвечивающей электронной микроскопии (ПЭМ). В режиме светлого поля получено панорамное изображение участка тонкой ламели исследованной частицы с окружающим аустенитом (рис. 1в).

ПЭМ-изображение подтверждает послойное многофазное строение частицы карбида ниобия, претерпевшей превращение в течение длительной высокотемпературной выдержки. Наиболее примечательным по строению является слой частицы, основой которого является фаза, обогащенная ниобием, никелем и кремнием и близкая по составу к G-фазе – G'-фаза. В объеме этого слоя присутствуют дисперсные частицы, которые по всей видимости являются остаточными «островками» карбонитрида (NbTi)(CN) с повышенным содержанием титана, не претерпевшими превращения в G-фазу. Предполагается, что при дальнейшей изотермической выдержке произойдет полное превращение дисперсных «островков» в карбонитриды Ti(CN) посредством диффузии ниобия, участвующего в образовании G-фазы.

Идентификация слоев сложного ниобиевого включения позволила предположить следующий механизм трансформации первичного карбонитрида (NbTi)(CN) в интерметаллическую G-фазу. Трансформация (NbTi)(CN) начинается на внешней границе частицы с аустенитной матрицей и протекает в двух направлениях: к центру частицы (NbTi)(CN) и в сторону γ-твердого раствора. На начальной стадии превращения на внешней границе частицы карбида образуется переходный двухфазный слой, состоящий из промежуточной G-фазы и островков первичного (NbTi)(CN). Высвобождающийся при превращении углерод диффундирует в окружающий частицу аустенит, где связывается с матричным хромом, формируя вокруг частицы «ожерелье» карбидов $Cr_{23}C_6$. На внешнюю границу карбонитрида ниобия-титана диффундирует и избыточный ниобий, формируя с никелем и кремнием соединение $Ni_{16}Nb_7Si_6$. При этом превращение карбонитрида ниобия в силицид G-фазу можно считать стадийным, однако деление на стадии является условным, поскольку протекание упомянутых выше процессов происходит одновременно.

Заключение. Выполненные исследования с применением методик сканирующей и просвечивающей электронной микроскопии позволили установить, что фазовое превращение карбида ниобия в интерметаллическое соединение в условиях высокотемпературной эксплуатации сплава HP40NbTi имеет сложный последовательный характер. Выявленный сложный механизм фазового превращения (NbTi)(CN)→G-фаза с учетом значительной разницы параметров кристаллической решетки фаз, одновременно участвующих в превращении, позволяет предположить, что образование G-фазы в структуре сплава HP40NbTi приводит к появлению и росту внутренних напряжений, способствующих зарождению микротрещин под действием внешней нагрузки. Следовательно, необходимым является поиск способов, препятствующих развитию или предотвращающих образование G-фазы в сплавах HP серии при эксплуатации.

ЛИТЕРАТУРА

1. Garbiak M., Jasiński W., Piekarski B. Materials for reformer furnace tubes. History of evolution // Arch. FoundryEng. – 2011. – Vol. 11. – Is. 2 spec. – P. 47-52.

2. De Almeida L.H., Ribeiro A.F., Le May I. Microstructural characterization of modified 25Cr-35Ni centrifugally cast steel furnace tubes // Materials Characterization. – 2002. – Vol. 49. – Is. 3. – P. 219-229.

3. Kenik E.A. Structure and phase stability in cast modified-HP austenite after long-term ageing// Scripta materialia, 2003. Vol. 49. № 2. P. 117–122.

4. Ribeiro A.F., Borges R.M.T., de Almeida L.H. Phase transformation in heat resistant steels observed by STEM (NbTi)C–NiNbSi (G-Phase) // ActaMicroscopica. – 2002. – Vol. 11. – Is. 1. – P. 59-63.

5. Кондратьев С.Ю., Беликова Ю.А., Забавичева Е.В. Экспериментальное исследование структуры первичных карбидов на основе Nb в литых жаропрочных сплавах HP40NbTi //Металловедение и термическая обработка металлов. – 2022. – №. 7. – С. 17-26. [Kondrat'ev S. Y., Belikova Y. A., Zabavicheva E. V. Experimental Study of the Structure of Nb-Based Primary Carbides in Cast Refractory Alloys HP40NbTi //Metal Science and Heat Treatment. – 2022. – V. 64. – №. 7-8. – P. 370-378.]

УДК 531/534

Ю.В. Ермолаева[1], С.А. Красницкий[1,2], М.Ю. Гуткин[3]
[1]АО КИС Исток, [2]Университет ИТМО(*)
[3] Институт проблем машиноведения РАН, г. Санкт-Петербург

ТЕМПЕРАТУРНЫЕ ЗАВИСИМОСТИ КРИТИЧЕСКОЙ ДЛИНЫ ТРЕЩИНЫ В КЕРАМИКЕ α-Al_2O_3

Благодаря относительно высокой температуре плавления и способности пластически деформироваться при повышенных температурах керамические материалы широко используются в современной промышленности [1-3]. Механические свойства, в частности, трещиностойкость керамик в значительной степени определяются температурным диапазоном их эксплуатации [4,5]. Обычно ожидается, что хрупкое разрушение будет происходить при относительно низких температурах, а вязкое – при относительно высоких. Изучение перехода между этими режимами чрезвычайно актуально. Один из возможных подходов – изучение критических условий зарождения и распространения трещин в зависимости от температуры проведения испытаний.

В данной работе исследовался процесс хрупкого микроразрушения – подрост трещины из поры в тройном стыке границ зерен керамического материала α-Al_2O_3. Целью исследования было определение влияния температуры на параметры хрупкого разрушения для этого материала. В качестве параметра хрупкого разрушения рассматривалась критическая длина трещины Гриффитса.

Анализ роста трещины проводился в рамках энергетического подхода, согласно которому изменение полной энергии системы при росте трещины складывается из изменения упругой и поверхностной энергий (случай «жесткого» нагружения) [6]:

$$\Delta W = \Delta W_{el} + \Delta W_{sf}\,, \qquad (1)$$

где ΔW_{el} – изменение упругой энергии тела при зарождении трещины, ΔW_{sf} – изменение поверхностной энергии тела при удлинении трещины.

Изменение упругой энергии системы определялось при параметрическом конечно-элементном (КЭ) моделировании как разность упругих энергий начальной конфигурации без трещины и конфигурации с трещиной длиной a. Эти упругие энергии были получены в двух независимых КЭ расчетах.

Рассматривалась двумерная КЭ модель упругого тела, содержащего круговую пору радиуса R_0 и трещину длиной a (рис.1). Характерный размер КЭ модели L превышал размеры поры и трещины ($L >> R_0$ и $L >> a$). Модель дискретизировалась плоскими 8-узловыми КЭ. Трещина моделировалась как плоский разрез с берегами, свободными от кинематических ограничений. Нижняя грань модели была ограничена в перемещениях вдоль оси y ($U_y = 0$) – условие симметрии. К верхней грани модели было приложено кинематическое перемещение ($U_y = \text{const} = \delta$), моделирующее внешнюю нагрузку P, что соответствует условию «жесткого» нагружения.

Материал модели считался линейно упругим и изотропным. Коэффициент Пуассона принимался равным $\nu = 0.23$. Модуль Юнга для данной керамики зависит от температуры согласно эмпирической формуле [7]:

$$E(\text{ГПа}) = 417 - 0.0525 \cdot T(^\circ\text{C})\,, \qquad (2)$$

где 20 °C ≤ T ≤ 1400 °C.

(*)С.А. Красницкий, krasnitsky@inbox.ru

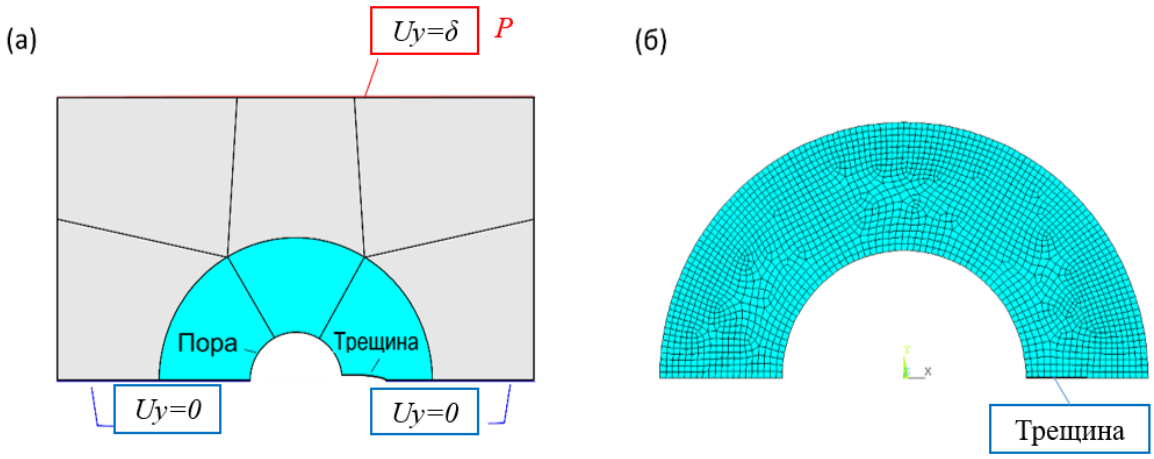


Рис. 1. Конечно-элементная модель системы: а) геометрия расчетной области; б) фрагмент расчетной сетки в окрестности поры радиусом R_0 и трещины длиной a

Изменение поверхностной энергии ΔW_{sf} определялся по обычной формуле:

$$\Delta W_{sf} = 2a\gamma, \quad (3)$$

где γ – удельная поверхностная энергия, оцениваемая по эмпирической зависимости для керамики α-Al_2O_3:

$$\gamma = \gamma_0 - \beta \cdot T, \quad (4)$$

справедливой при T = 300–1400 °C. Здесь γ_0 = 2138 мДж/м^2, β = 0.83 мДж/м^2·К [8].

Зависимости изменения полной энергии системы от приведенной длины трещины a/R_0 определялись по формуле (1) в интервале температур 300–1400 °C для случая двух внешних нагрузок P = 3.0 и 3.4 ГПа. Зависимость для случая P = 3 ГПа представлена на рис. 2.

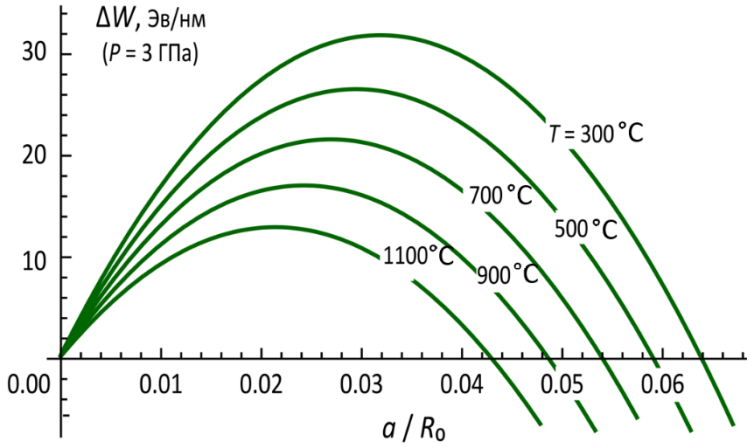


Рис. 2. Зависимость изменения полной энергии системы от приведенной длины трещины при температурах T = 300–1400 °C и внешней нагрузке P = 3ГПа

Из рис. 2 видно, что при превышении некоторой критической длины трещины a_{cr}, дальнейшее развитие трещины сопровождается уменьшением полной энергии системы.

Используя подобные зависимости, исследовали характер влияния температуры на критическую длины трещины для данной керамики. На рис. 3 приведена зависимость отношения a_{cr}/R_0 от температуры T для нагрузки P = 3.0 и 3.4 ГПа. Видно, что критическая

длина трещины уменьшается с увеличением температуры по закону, близкому к линейному. С ростом приложенной нагрузки при постоянной температуре она также уменьшается.

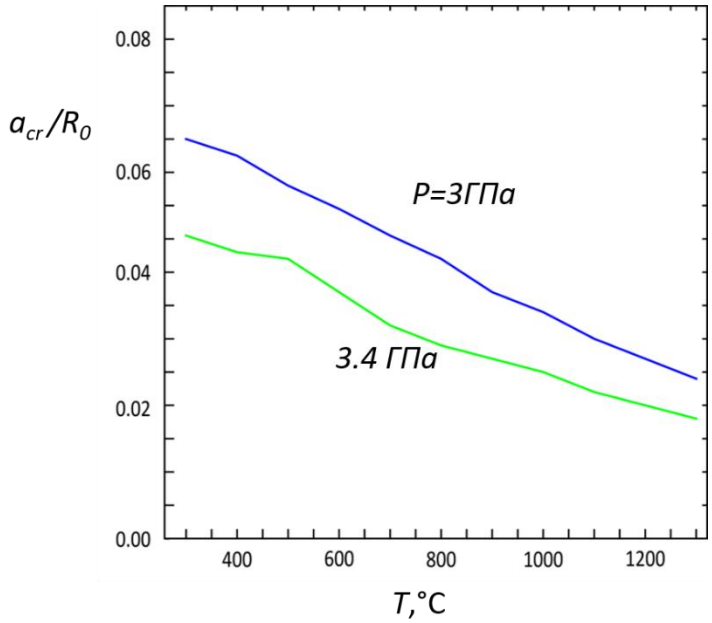


Рис. 3. Зависимость приведенной критической длины трещины Гриффитса от температуры для керамики α-Al_2O_3 при нагрузке P = 3.0 и 3.4 ГПа

Таким образом, проведено параметрическое КЭ исследование, позволившее определить изменение упругой энергии керамического материала при подросте трещины из круговой поры. Соответствующее изменение полной энергии керамики α-Al_2O_3 использовано для определения влияния температуры на критическую длину трещины Гриффитса.

Определение влияния температуры на другой параметр хрупкого разрушения керамики α-Al_2O_3 – критическую нагрузку – составляет предмет дальнейшего исследований авторов.

Работа выполнена при поддержке гранта РНФ № 23-19-00236.

ЛИТЕРАТУРА

1. Simonenko E.P., Simonenko N.P., Sevastyanov V.G., Kuznetsov N.T. ZrB_2/HfB_2-SiC ultra-high-temperature ceramic materials modified by carbon components: The review // Russian Journal of Inorganic Chemistry. – 2018. – Vol. 63. – P. 1772-1795.
2. Savino R., Mungiguerra S., Martino G.D. Testing ultra-high-temperature ceramics for thermal protection and rocket applications // Advances in Applied Ceramics. – 2018. – Vol. 117 (1) – P. 9-18.
3. Fahrenholtz W.G., Hilmas G.E. Ultra-high temperature ceramics: Materials for extreme environments // Scripta materialia. – 2017. – Vol. 129. – P. 94-99.
4. Faoite D., Browne D.J., Chang-Díaz F.R., Stanton K.T. A review of the processing, composition, and temperature-dependent mechanical and thermal properties of dielectric technical ceramics // Journal of Materials Science. – 2012. – Vol. 47. – P. 4211-4235.
5. Zapata-Solvas E., Jayaseelan D.D., Lin H.T., Brown P., Lee W.E. Mechanical properties of ZrB_2- and HfB_2-based ultra-high temperature ceramics fabricated by spark plasma sintering // Journal of the European Ceramic Society. – 2013. – Vol. 33(7) – P. 1373-1386.
6. Anderson T.L. Fracture Mechanics: Fundamentals and Applicatons. – CRC Press, 1991. – 793 p.
7. Munro R.G. Evaluated material properties for a sintered alpha-alumina // Journal of the American Ceramic Society. – 1997. – Vol. 80 (8) – P. 1919-1928.
8. Cheng T., Fang D., Yang Y. The temperature-dependent surface energy of ceramic single crystals //Journal of the American Ceramic Society. – 2017. – Vol. 100 (4) – P. 1598-1605.

УДК 539.3

Д.А. Петров[1], М.Ю. Гуткин[1-3]
[1]Институт проблем машиноведения РАН, Санкт-Петербург (*)
[2]Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого
[3]Университет ИТМО, Санкт-Петербург

НАПРЯЖЕНИЯ НЕСООТВЕТСТВИЯ В СЛОИСТЫХ НАНОПРОВОЛОКАХ

Напряжения несоответствия (НН) возникают при сопряжении кристаллических решеток с разными объемом и формой элементарных ячеек. Механические напряжения, в том числе НН, – это один из ключевых факторов, определяющих эволюцию и свойства (режим роста, структуру энергетических уровней, подвижность носителей заряда, дефектность и т.д.) наногетероструктур [1,2]. Среди наногетероструктур широкий класс представляют нанопроволоки, от состава и геометрии которых существенно зависят НН. Последние могут иметь достаточно сложный характер, что открывает новые возможности для получения уникальных функциональных свойств нанопроволок [3-5].

Один из подходов к описанию НН состоит в решении краевых задач теории упругости о включении [6]. В этом случае несоответствие вводится с помощью тензора собственной деформации, пропорционального параметру несоответствия, который для кубических решеток определяется как $f = 2(a_2 - a_1)/(a_2 + a_1)$, где a_1 и a_2 – параметры решеток материалов, составляющих нанопроволоку. Для некоторых типов нанопроволок аналитические решения уже получены [6], в частности для нанопроволок типа «ядро-оболочка», сегментированных нанопроволок, нанопроволок с продольным массивом квантовых точек. В настоящей работе решена задача линейной изотропной теории упругости о НН в бесконечном упруго-однородном двухслойном цилиндре (рис. 1а), моделирующем слоистую нанопроволоку.

Для модели была выбрана следующая форма тензора собственной деформации:

$$\boldsymbol{\varepsilon}^{eig} = -\mathrm{sign}(y - y_0)(f_{xx}\boldsymbol{ii} + f_{yy}\boldsymbol{jj} + f_{zz}\boldsymbol{kk})/2, \quad (1)$$

где f_{xx}, f_{yy} и f_{zz} – параметры несоответствия в направлениях x, y, и z, а $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$ и $\boldsymbol{k}$ – орты соответствующих направлений. Тензор собственной деформации (1) на поверхности $y = y_0$ претерпевает разрыв, что приводит к скачку компонент тензора напряжений $\boldsymbol{\sigma}$:

$$\lim_{\delta\to 0}\sigma_{xx}\big|_{y=y_0+\delta} - \lim_{\delta\to 0}\sigma_{xx}\big|_{y=y_0-\delta} = \sigma^{+}_{xx}\big|_{y=y_0} - \sigma^{-}_{xx}\big|_{y=y_0} = f_{xx}\frac{2G}{1-\nu} + f_{zz}\frac{2G\nu}{1-\nu}, \quad (2а)$$

$$\lim_{\delta\to 0}\sigma_{zz}\big|_{y=y_0+\delta} - \lim_{\delta\to 0}\sigma_{zz}\big|_{y=y_0-\delta} = \sigma^{+}_{zz}\big|_{y=y_0} - \sigma^{-}_{zz}\big|_{y=y_0} = f_{xx}\frac{2G\nu}{1-\nu} + f_{zz}\frac{2G}{1-\nu}, \quad (2б)$$

где G – модуль сдвига, ν – коэффициент Пуассона. Боковая поверхность свободна:

$$\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{n}\big|_{r=R} = \boldsymbol{\sigma}\cdot(\cos\varphi\boldsymbol{i} + \sin\varphi\boldsymbol{j})\big|_{r=R} = 0. \quad (3)$$

Также полагаются свободными бесконечно-удаленные торцы, что равнозначно условию равновесия любого поперечного сечения цилиндра S:

$$\int_S \sigma_{zz}dS = 0, \quad \int_S y\sigma_{zz}dS = 0. \quad (4)$$

Из (2) видно, что напряженное состояние в слоистой НП зависит только от f_{xx} и f_{zz}. При $f_{zz} = 0$ реализуется плоское деформированное состояние, такое же, как в системе с равномерным распределением краевых дислокаций вдоль линии $y = y_0$ с плотностью вектора Бюргерса $db = -f dx$ (рис. 1б). Такая модель была предложена и рассмотрена в [7] для симметричной нанопроволоки ($y_0 = 0$), а решение получено в виде функции напряжений с бесконечными рядами.

(*)Д.А. Петров, petrov_d_a@ipme.ru

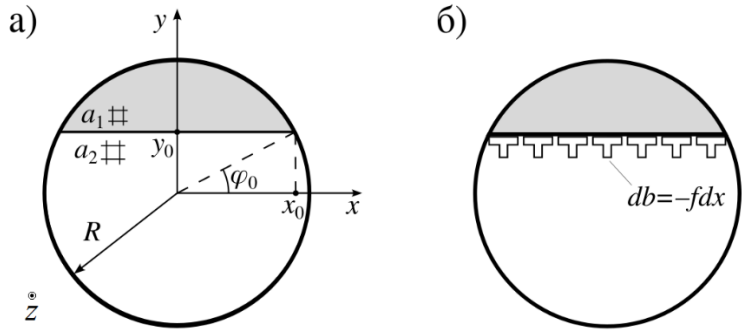


Рис. 1. а) Поперечное сечение двухслойного цилиндра с несоответствием $f = 2(a_2 - a_1)/(a_2 + a_1)$, где a_1 и a_2 – параметры решеток материалов слоев, б) распределение виртуальных краевых дислокаций с векторами Бюргерса $db = -fdx$, моделирующих напряженно-деформированное состояние в двухслойном цилиндре с одноосным несоответствием $f_{xx} = f$, $f_{yy} = f_{zz} = 0$.

В настоящей работе решение получено для общего случая в замкнутом виде:

$$\frac{\sigma_{xx}}{\Upsilon} = \frac{f_{xx} + \nu f_{zz}}{2(1+\nu)} \frac{\partial^2 \chi}{\partial y^2}, \quad \frac{\sigma_{yy}}{\Upsilon} = \frac{f_{xx} + \nu f_{zz}}{2(1+\nu)} \frac{\partial^2 \chi}{\partial x^2}, \quad \frac{\sigma_{xy}}{\Upsilon} = -\frac{f_{xx} + \nu f_{zz}}{2(1+\nu)} \frac{\partial^2 \chi}{\partial y \partial x}, \tag{5а}$$

$$\frac{\sigma_{zz}}{\Upsilon} = f_{zz} \frac{1-\nu^2}{2(1+\nu)} \left(\operatorname{sign}(y - y_0) + \frac{2\varphi_0}{\pi} + \frac{2x_0 y_0}{\pi R^2} - \frac{16 x_0^3}{3\pi R^3} \frac{y}{R} \right) + \frac{\nu f_{xx} + \nu^2 f_{zz}}{2(1+\nu)} \left(\frac{\partial^2 \chi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \chi}{\partial y^2} \right), \tag{5б}$$

$$2\pi\chi = (y - y_0)^2 \left(\arctan \frac{x_0 - x}{y - y_0} + \arctan \frac{x_0 + x}{y - y_0} \right) - x_0 \left(\frac{r^2}{R^2} y_0 + \frac{yR^2}{r^2} \right) +$$
$$+ R^2 \left(\frac{R^2 y^2}{r^4} - \frac{R^2}{2r^2} - \frac{2y^2}{r^2} - \frac{r^2}{2R^2} + \frac{x_0^2}{R^2} + \frac{2yy_0}{R^2} \right) \left(\arctan \frac{r^2 x_0 - R^2 x}{R^2 y - r^2 y_0} + \arctan \frac{r^2 x_0 + R^2 x}{R^2 y - r^2 y_0} \right) -$$
$$- \left(\frac{R^2}{r} - r \right)^2 \frac{xy}{2r^2} \ln \frac{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}{(x + x_0)^2 + (y - y_0)^2}, \tag{6}$$

где $\Upsilon = 2G(1+\nu)/(1-\nu)$. Функция напряжений χ с точностью до множителя описывает случай $f_{zz} = 0$. Поэтому для ее получения использовалось хорошо известное решение для дислокации в цилиндре (см., например, [6]), которое уже удовлетворяет условиям (2) и (4). В выражениях (5а,б) множитель перед χ обеспечивает выполнение условия скачка (2а), а для выполнения условий (2б) введено дополнительное слагаемое в начале выражения (5б). Это слагаемое не противоречит условиям совместности деформации и условию (4). С помощью решения (5) были построены карты напряжений в поперечном сечении цилиндра (рис. 2), а также графики напряжений на линии $x = 0$ (рис. 3).

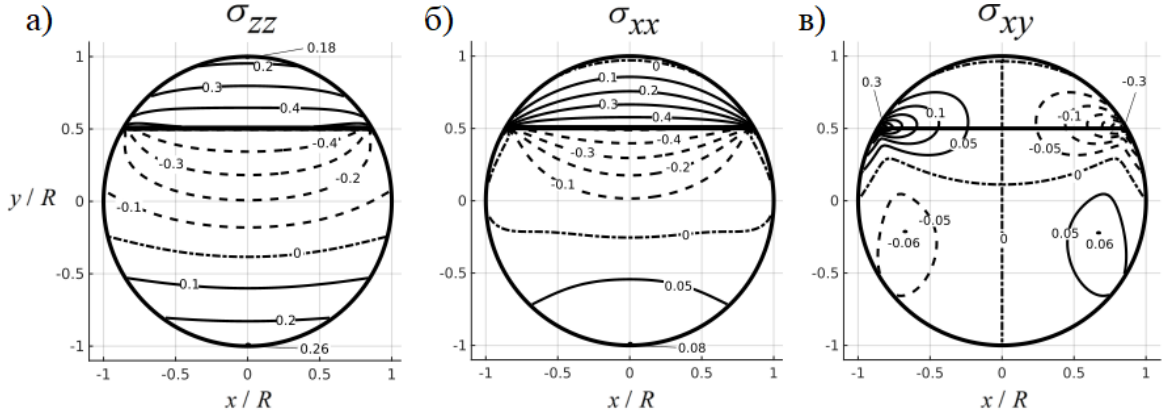


Рис. 2. Карты напряжений: а) σ_{zz}, б) σ_{xx}, в) σ_{xy}. Напряжения даны в единицах Υf при $\nu = 0.3$.

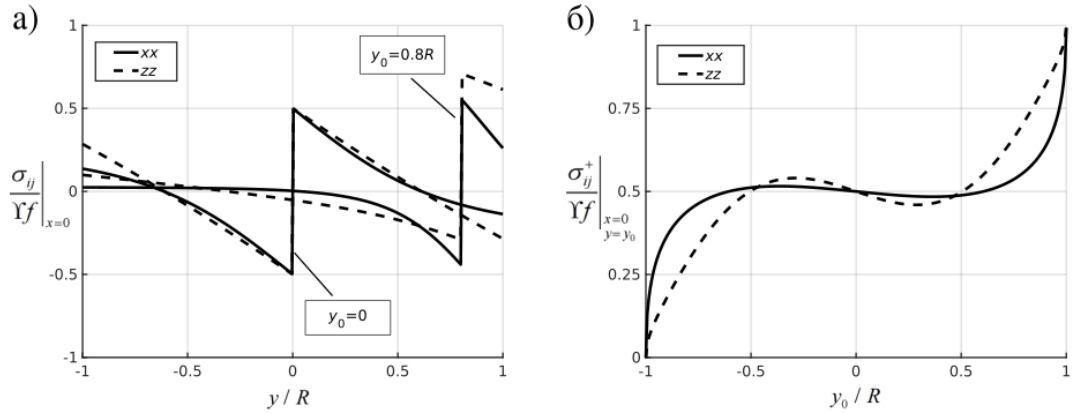


Рис. 3. а) Напряжения σ_{xx} и σ_{zz} на линии $x = 0$ при $y_0 = 0$ и $y_0 = 0.8R$, б) предельные значения σ_{xx} и σ_{zz} при $y \to y_0$ в материале 1 ($y > y_0$). Графики построены для $\nu = 0.3$.

Характерная величина Υf равна однородным напряжениям σ_{xx} и σ_{zz} в тонкой пленке на плоской подложке при $f_{xx} = f_{yy} = f_{zz} = f$ [1]. Однако в цилиндре при сравнимой толщине слоев ($|y_0|<0.5R$) максимальные значения σ_{xx} и σ_{zz} примерно в два раза ниже, чем в пленке. Даже когда толщины слоев отличаются почти в 10 раз (случай $y_0 = 0.8R$ на рис. 3а), напряженное состояние вблизи межфазной границы значительно отличается от двухосного в тонкой пленке. Другое важное отличие заключается в том, что в двухслойном цилиндре не равны нулю напряжения σ_{yy} и σ_{xy}. Однако они сравнительно малы внутри цилиндра и локализованы вблизи точек ($\pm x_0$, y_0), то есть там, где межфазная граница пересекает поверхность (рис. 2в).

Полученные результаты могут быть полезны при построении теоретических моделей различных физических процессов в слоистых нанопроволоках. В частности, полученное впервые решение позволяет вычислить энергию взаимодействия полей несоответствия с возможными дислокациями несоответствия [1,6,7] и исследовать различные механизмы их образования.

Статья подготовлена в рамках выполнения государственного задания Министерства науки и высшего образования Российской Федерации по теме НИР 124041100008-5 для ИПМаш РАН.

ЛИТЕРАТУРА

1. Freund L.B., Suresh S. Thin Film Materials: Stress, Defect Formation and Surface Evolution. – Cambridge University Press, 2004. – 750 p.
2. Fu X., Su C., Fu Q., Zhu X., Zhu R., Liu C., Liao Z., Xu J., Guo W., Feng J., Li J., Yu D. Tailoring Exciton Dynamics by Elastic Strain-Gradient in Semiconductors // Advanced Materials. – 2014. – Vol. 26 (16). – P. 2572-2579.
3. Jia C., Lin Z., Huang Y., Duan X. Nanowire electronics: from nanoscale to macroscale // Chemical Reviews. – 2019. – Vol. 119 (15). – P. 9074-9135.
4. Lewis R.B., Corfdir P., Küpers H., Flissikowski T., Brandt O., Geelhaar L. Nanowires bending over backward from strain partitioning in asymmetric core–shell heterostructures // Nano Letters. – 2018. – Vol. 18 (4). – P. 2343-2350.
5. McDermott S., Lewis R.B. Bending of GaAs–InP core–shell nanowires by asymmetric shell deposition: implications for sensors // ACS Applied Nano Materials. – 2021. – Vol. 4 (10). – P. 10164-10172.
6. Романов А.Е., Колесникова А.Л., Гуткин М.Ю. Внутренние напряжения и структурные дефекты в нанопроволоках // Прикладная математика и механика. – 2022. – Т. 86. – № 4. – С. 527-550.
7. Nabarro F.R.N. The force between misfit dislocations // The Philosophical Magazine. – 1970. – Vol. 22 (178). – P. 803-808.

УДК 539.3

Д.К. Наумов[1], Р.Э. Шевчук[1,2], М.Ю. Гуткин[1,3,4], С.А. Красницкий[1], А.М. Смирнов[1]
[1]Университет ИТМО (*)
[2] БГТУ «ВОЕНМЕХ» им. Д.Ф. Устинова
[3] Институт проблем машиноведения РАН, Санкт-Петербург
[4] Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого

РАСЧЕТ УПРУГОЙ ЭНЕРГИИ МАЛЫХ ИКОСАЭДРИЧЕСКИХ ЧАСТИЦ В РАМКАХ ЧИСЛЕННОГО И АНАЛИТИЧЕСКОГО ПОДХОДОВ

Малые икосаэдрические частицы (МИЧ) – яркий пример частиц с многократным циклическим двойникованием – представляют большой интерес в различных областях науки, включая спинтронику, катализ, фотовольтаику и др. Неоднородное напряженно-деформированное состояние (НДС), возникающее вследствие многократного циклического двойникования, существенно влияет на физические и химические свойства таких частиц и требует строго описания. Специфическая пентагональная форма частиц приводит к увеличению пиков плазмонного резонанса и их расщеплению по сравнению с частицами сферической формы. Данная особенность позволяет применять МИЧ в тонкопленочных солнечных элементах для повышения эффективности захвата падающего излучения [1]. С другой стороны, при некоторых условиях, неоднородное НДС частицы может релаксировать путем образования различных структурных дефектов: дислокаций, пор, трещин, что может приводить в конечном итоге к изменению функциональных свойств МИЧ [2]. Таким образом, анализ НДС и запасенной упругой энергии МИЧ, в частности, необходимы для получения МИЧ с малой плотностью дефектов и прогнозируемыми функциональными свойствами.

Геометрическая модель МИЧ состоит из двадцати монокристаллических тетраэдрических областей с ГЦК решеткой, ограниченных плоскостями типа {111} и разделенных двойниковыми границами, составленных вместе в форме икосаэдра. В свободном состоянии МИЧ имеет щель – дефицит телесного угла $\beta \approx 1.54$ ср. В настоящее время для описания НДС такой частицы, возникающего после устранения несплошности (смыкания краев частицы), часто используется две теоретические модели: распределенная дисклинационная модель (РДМ) и дискретная дисклинационная модель (ДДМ) [3]. В обеих моделях для описания частицы используется изотропная однородная упругая сфера. В случае РДМ напряженное состояние такой частицы равноценно внедрению в сферу дисклинации Маркса-Иоффе мощностью $\chi \approx 0.061$, которую можно представить, как множество малых радиальных конусов, стягивающих бесконечно малый телесный угол $\mathrm{d}\beta$ в центр и заполняющих весь объем (рис. 1a) [4]. Эта модель широко используется в теоретическом анализе процессов релаксации, однако, предположение о радиально однородном распределении собственной дисторсии, положенное в основу РДМ, может быть причиной расхождений в определении упругой энергии по сравнению с более точной ДДМ. Согласно ДДМ, запасенная энергия МИЧ определяется как суперпозиция энергий взаимодействия и упругих энергий шести положительных клиновых дисклинаций (КД) мощностью $\omega \approx 0.128$, расположенных в противоположных вершинах икосаэдра и пересекающихся в центре частицы под углом $\alpha \approx 63.435^{\circ}$ (рис.1b) [5]. ДДМ является более строгой моделью, поскольку учитывает фактическое распределение собственной дисторсии внутри МИЧ.

Упомянутые выше теоретические модели МИЧ не учитывают влияние огранки частицы на запасенную упругую энергию. Учет реальной геометрии МИЧ слишком сложен для аналитических расчетов, однако может быть реализован в рамках численных компьютерных

(*)Д.К. Наумов, cadetnaumov@gmail.com

моделей, например, с помощью метода конечных элементов (КЭ). Как и аналитические модели, численные модели построены в приближении линейной изотропной теории упругости с модулем сдвига материала частицы G и коэффициентом Пуассона ν. На первом этапе построения модели создается сетка КЭ, состоящая из множества восьмиузловых объемных элементов. На границе зазора, необходимого для введения дисторсии, задается поверхность четырехузловых контактных элементов. Смыкание зазора реализуется с помощью кинематических граничных условий. Затем жесткость контактных элементов обнуляется. На втором этапе, после смыкания границ зазора, кинематические граничные условия отключаются, жесткость контактных элементов восстанавливается. Результатом численного решения являются поля перемещений и напряжений.

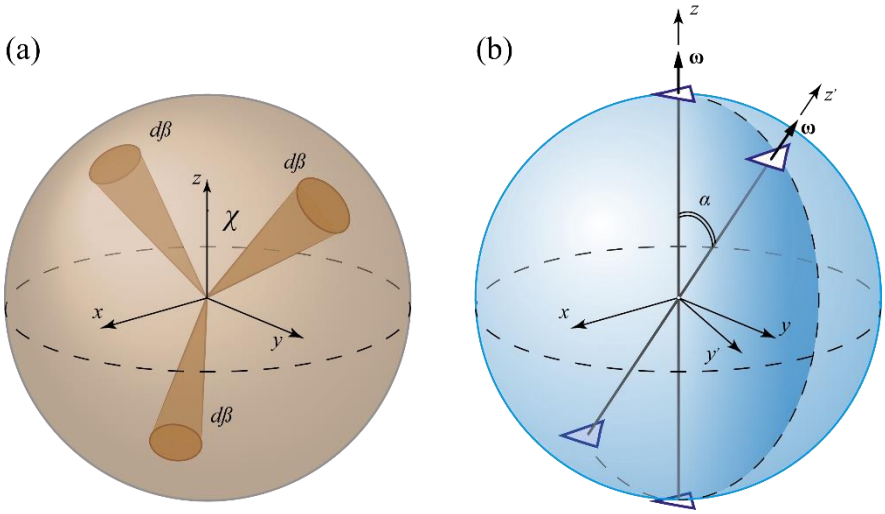


Рис. 1. (a) Упругая сфера с равномерно распределенной дисклинацией Маркса-Иоффе. (b) Упругая сфера, содержащяя две КД, пересекающиеся под углом α

На рис. 2a приведены зависимости энергий взаимодействия КД мощностью $\omega \approx 0.128$ рад от угла пересечения α для двух различных коэффициентов Пуассона материала упругой сферы: $\nu = 0.25,\ 0.5$, необходимые для расчета упругой энергии икосаэдрической частицы. Энергия принимает максимальное значение при $\alpha = 0$, когда оси двух КД совпадают. Показано, что чем больше значение ν, тем больше энергия взаимодействия. При $\alpha \approx 63.435^{\circ}$ (значение угла между КД в ДДМ) для абсолютно несжимаемого материала ($\nu = 0.5$) энергия принимает значение $\sim 0.006 G\omega^2 V_0$ (V_0 – объем частицы); для материала с $\nu = 0.25$ энергия равна $\sim 0.003 G\omega^2 V_0$. Результаты, полученные с помощью КЭ моделирования, согласуются с аналитическим решением.

На рис. 2b показаны зависимости упругой энергии МИЧ, полученные в рамках аналитических расчетов РДМ и ДДМ, а так же КЭ моделирования, от коэффициента Пуассона ν. Установлено, что предположение о радиально однородном распределении собственной дисторсии (РДМ модель) не приводит к значительным расхождениям (различия менее 4 %) в определении упругой энергии по сравнению с ДДМ моделью. Выявлено, что погрешность численного расчета упругой энергии МИЧ методом КЭ с учетом огранки частицы зависит от упругих свойств материала частицы – чем больше коэффициент ν, тем больше различие между численным и аналитическим расчетами (в предельном случае, когда $\nu = 0.5$, различие составляет ~14 %). Незначительное увеличение упругой энергии частицы при численных расчетах по сравнению с аналитическими, по всей видимости, связано с концентрацией механических напряжений на гранях МИЧ.

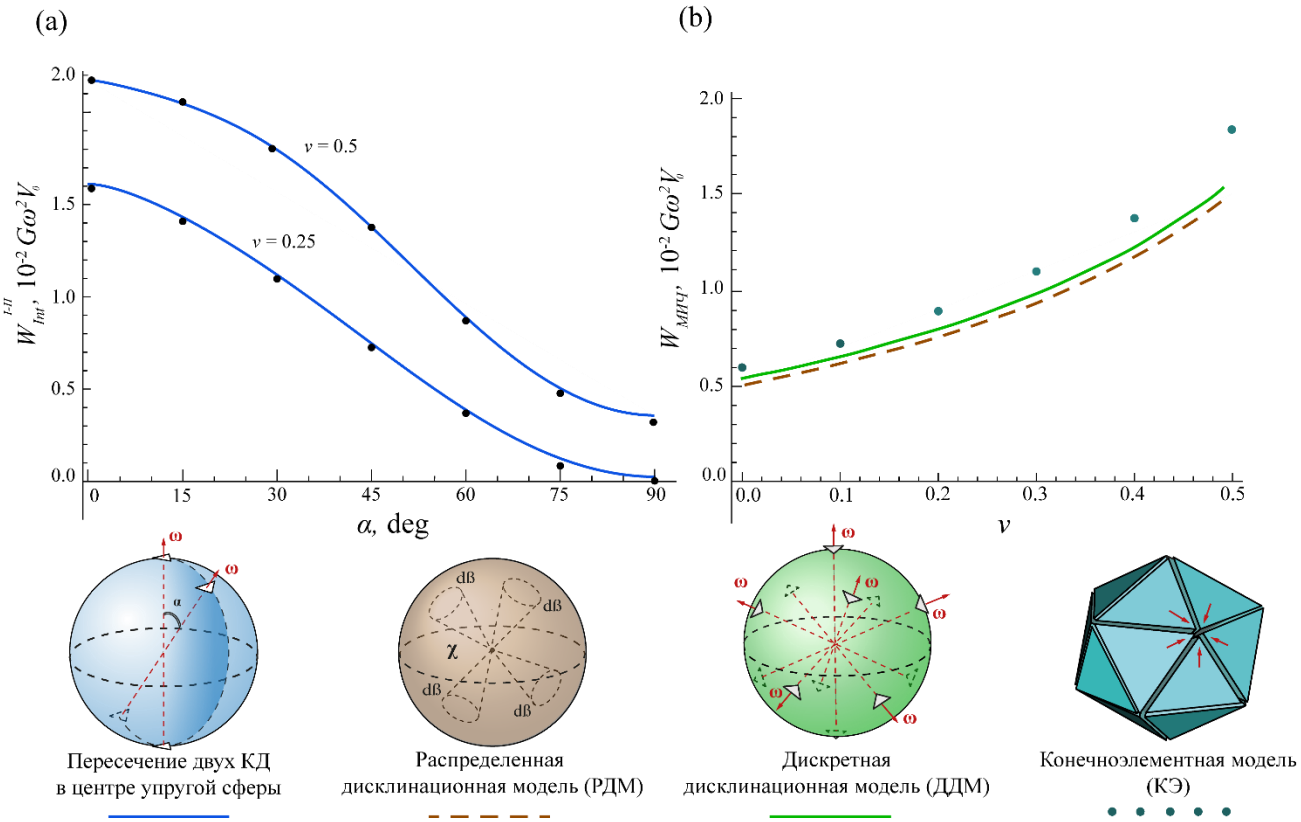


Рис. 2. (a) Зависимости энергии парного взаимодействия двух пересекающихся КД в упругой сфере от угла между осями КД α. (b) Зависимости упругой энергии МИЧ от коэффиента Пуассона материала частицы ν. Сплошная кривая соответствует ДДМ, пунктирная кривая – РДМ, точки соответствуют КЭ моделированию частицы. Под графиками дано схематическое представление рассмотренных моделей

Таким образом, в работе дано сравнение аналитических решений и результатов компьютерного моделирования упругой энергии МИЧ. Показано, что небольшие различия между численным моделированием и аналитическими расчетами позволяют использовать оба метода для последующего анализа физических свойств и механической устойчивости МИЧ. Огранкой МИЧ можно пренебречь.

Работа выполнена при поддержке гранта РНФ № 23-72-10014.

ЛИТЕРАТУРА

1. Sharma M., Pudasaini P.R., Ruiz-Zepeda F., Vinogradova E., Ayon A.A. Plasmonic effects of Au/Ag bimetallic multispiked nanoparticles for photovoltaic applications // ACS Applied Materials & Interfaces. – 2014. – 6 (17). – P. 14745-15610.

2. Gryaznov V.G., Kaprelov A.M., Romanov A.E., Polonskii I.A. Channels of relaxation of elastic stresses in pentagonal nanoparticles // Phys status solidi. – 1991.–167. – P. 441-450.

3. Krasnitckii S.A., Shevchuk R.E., Naumov D.K., Kolesnikova A.L., Gutkin M.Yu., Romanov A.E., Smirnov A.M. Strain energy in multi-twinned icosahedral particles: analytical and finite element analysis // Journal of Materials Science. – 2025. – 60. – P. 5137-5152.

4. Howie A., Marks L.D. Elastic strains and the energy balance for multiply twinned particles //Philosophical Magazine A: Physics of Condensed Matter, Structure, Defects and Mechanical Properties. –1984. – 49 (1). – P. 95-109.

5. Kolesnikova A. L., Dorogov M. V., Krasnitckii S. A., Smirnov A. M., Romanov A. E. Disclination models in the analysis of stored energy in icosahedral small particles //Mater. Phys. Mech. – 2023. – 51 (6). – P. 76-83.

УДК 53.097

Д.В. Троцкая, С.А. Филиппов
Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого (*)

РАЗРАБОТКА МЕТОДИКИ ЭЛЕКТРОХИМИЧЕСКОЙ ПОЛИРОВКИ ОБРАЗЦОВ ИЗ ЖАРОПРОЧНОГО СПЛАВА

Введение. Для исследования структуры металлов существует большое количество различных методов: оптическая металлография, рентгеноструктурный анализ, электронная микроскопия и другие. Для получения достоверных результатов необходима правильная подготовка образцов, позволяющая получать поверхность с минимумом искажений. Чаще всего пробоподготовка включает в себя вырезку образца, шлифовку и полировку. Каждый из этих этапов может привести к наклепу поверхности и, соответственно, к искажениям микроструктуры. Одним из методов, позволяющим удалять поверхностные слои, не внося искажений, является электрохимическая полировка – процесс, основанный на анодном растворении поверхности металла.

Гипотезы, объясняющие механизм электрохимического полирования, основаны на влиянии пленки, образующейся на поверхности образца. Данная пленка состоит из продуктов анодного растворения. Толщина, электрическое сопротивление и вязкость пленки зависят от нескольких факторов: состава электролита, материала анода, а также скорости диффузии пленки в электролите и других.

Впервые подробно процесс электрохимического полирования был описан Пьером Арманом Жаке в середине 20-го века. Согласно его теории, впадины металлической поверхности заполняются вязкой пленкой, а выступы покрываются более тонким слоем. Разная толщина пленки обеспечивает разную скорость растворения металла: выступы растворяются быстрее, чем впадины [1]. Именно это приводит к появлению зеркального блеска поверхности.

Жаке, изучая процесс электрохимического полирования меди, установил интересную зависимость силы тока от напряжения. Схематичный график вышеупомянутой зависимости полученной Жаке изображен на рис. 1.

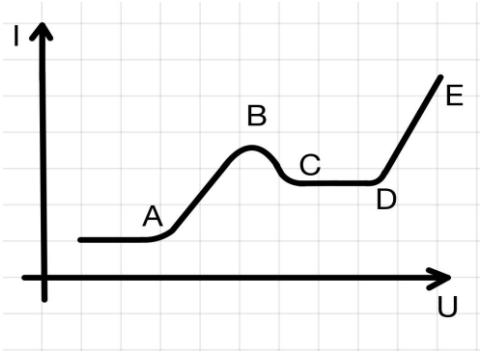


Рис. 1. Схематичный график зависимости силы тока от напряжения

На участке AB сила тока растет пропорционально напряжению, как и должно быть согласно закону Ома, на участке BC сила тока уменьшается при увеличении напряжения, что, согласно гипотезе Жаке, свидетельствует об образовании на поверхности анода пленки. На участке CD при увеличении напряжения сила тока остается постоянной, что теоретически соответствует режиму полирования. При дальнейшем увеличении напряжения наблюдается

(*) С.А. Филиппов, sergey.philippov@gmail.com

активное газообразование, приводящее к отрыву вязкой пленки и, как следствие, коррозии поверхности металла. Другие металлы и сплавы могут иметь вольт-амперную характеристику, подобную полученной Жаке [5].

Материал и методика эксперимента. Объектом исследования в данной работе стали образцы жаропрочного сплава на основе никеля ЖС32-ВИ. Данный сплав применяется для изготовления лопаток газотурбинных двигателей. Химический состав сплава представлен в таблице 1 [2].

Табл. 1. Химический состав сплава ЖС32-ВИ

Содержание элементов, % (по массе)											
Ni	Cr	Co	W	Al	Re	Ta	Nb	C	Mo	B	Ce
Основа	4,9	9,0	8,5	5,9	4,0	4,0	1,6	0,15	1,0	0,02	0,025

В литературе приводятся различные составы электролитов для электрохимической полировки никелевых сплавов ([3-5]). В данном случае состав электролита подбирался с учетом следующих критериев: доступность реактивов, а также отсутствие необходимости постоянного подогрева состава. В табл. 2 представлены использованные составы электролитов (все кислоты, указанные в составах, концентрированные (100%)).

Табл. 1. Используемые составы электролитов

№	**Состав электролита, % (по массе)**	**Температура, °С**
1	Серная кислота - 62 Вода -36,5 Глицерин - 0,5 Хромовый ангидрид - 1 [3]	20-40
2	Серная кислота - 36,5 Ортофосфорная кислота - 62,5 Лимонная кислота - 1 [3]	18-30

Для проведения экспериментов была смонтирована установка для электрохимического полирования, включающая в себя: источник постоянного напряжения, амперметр, штатив с образцом, анод и стеклянная емкость с электролитом. Образец из сплава ЖС32-ВИ со всех сторон, кроме мест контакта и области полировки, был покрыт непроводящим составом для возможности точно измерить площадь полируемой поверхности. Разность потенциалов между образцом и анодом измерялась с помощью вольтметра с погрешностью 0,01В, сила тока измерялась амперметром с погрешностью 0,01А. Скорость стравливания материала с поверхности определялась через изменение толщины образца с помощью цифрового микрометра с погрешностью 1мкм.

Было проведено несколько видов экспериментов:

1. Построение вольт-амперных характеристик для двух составов электролитов и подбор режимов полирования.

2. Исследование процесса полирования. Для этого на поверхность предварительно отшлифованного и отполированного образца были нанесены царапины с помощью шлифовальной бумаги зернистостью 120 по шкале Mesh, что соответствует среднему размеру зерна 80-100мкм. Далее образец подвергался полированию, результаты которого оценивались по толщине сполированного слоя, визуально по наличию царапин с помощью светового

микроскопа Carl Zeiss Jena NU-2 при увеличении 50 крат, а также с помощью рентгеноструктурного анализа на дифрактометре ДРОН по ширине дифракционного максимума.

Результаты эксперимента. На рис. 2 показаны вольт-амперные характеристики, полученные для двух выбранных составов электролитов.

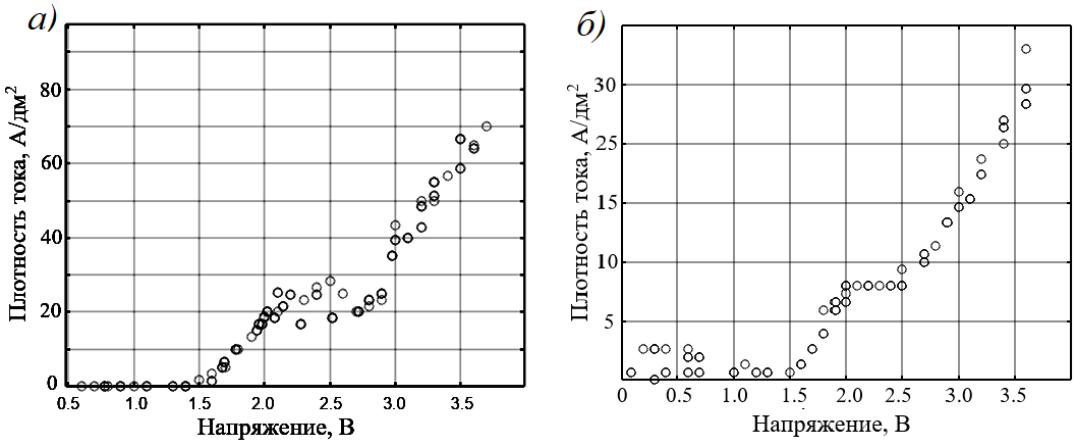


Рис. 2. Вольт-амперные характеристики: а) для электролита №1; б) для электролита №2

Исходя из ВАХ, были выбраны следующие режимы:

- для электролита №1 разность потенциалов 2,5В и плотность тока 22-25 А/дм^2;
- для электролита №2 разность потенциалов 2,3В и плотность тока 8-9 А/дм^2.

Анализ состояния поверхности после травления поцарапанного образца в электролите №1 показал наличие участков точечной коррозии. Для устранения нежелательных эффектов был проведен дополнительный анализ литературы по теории полирования [6] и изменен режим (снижена плотность тока путем увеличения расстояния между образцом и электродом).

Выводы. В рамках данной работы были выполнены: подбор составов и изготовление электролитов, подбор режима полирования, оценка качества поверхности различными методами, оценка скорости изменения толщины поверхности. Наилучший результат полирования был достигнут при использовании электролита №1 при $T_{комн}$, значениях напряжения и плотности тока равных 2,3 В и 13 А/дм^2, соответственно. При данных условиях скорость растворения составила 4,06 $\pm$ 0,72 мкм/мин.

ЛИТЕРАТУРА

1. Пяндрина Т.Н. Электрохимическая обработка металлов. – “Машгиз”, 1961 – 70 с.
2. Назаркин Р.М., Петрушин Н.В., Рогалев А.М. Структурно-фазовые характеристики сплава жс32-ви, полученного методами направленной кристаллизации, гранульной металлургии и селективного лазерного сплавления // Труды ВИАМ. – 2017. – №2. – С. 11-17.
3. Кулик В.И. Подготовительные операции при проведении материалографического анализа: учебное пособие / В.И. Кулик, А.С. Нилов, Е.Е. Складнова. - Балт. гос. техн. ун-т. – СПБ, 2020. – 84 с.
4. Строительный информационный портал. [Электронный ресурс]. - Режим доступа: http://www.stroitelstvo-new.ru/polirovka/nikel.shtml (дата обращения: 11.04.2023).
5. А. И. Кулик, Л. А. Бозина, Г. И. Николаев, В. В. Обуховский, К. И. Хвостынцев. Практическое руководство по металлографии судостроительных материалов. - “Судостроение” - Ленинград, 1982. - 136 с.
6. Тегарт В. Электрохимическое и химическое полирование металлов.: Пер. с англ. – М.: Издательство иностранной литературы”, 1957. - 176 с.

УДК 539.3

И.А. Ковалев[1], А.Л. Колесникова[2,3], М.Ю. Гуткин[1-3]
[1]Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого[(*)]
[2]Институт проблем машиноведения РАН, Санкт-Петербург
[3]Университет ИТМО, Санкт-Петербург

ДИСЛОКАЦИОННАЯ РЕЛАКСАЦИЯ НАПРЯЖЕНИЙ В ЦИЛИНДРИЧЕСКОМ КВАНТОВОМ КОЛЬЦЕ ВБЛИЗИ СВОБОДНОЙ ПОВЕРХНОСТИ

Плоские гетероструктуры с квантовыми кольцами разной формы, в частности, с цилиндрическими, рассматриваются в настоящее время в качестве перспективных элементов современных электронных и оптоэлектронных устройств [1]. В бездефектном композите кристаллическая решетка одного материала стыкуется с кристаллической решеткой другого. Так как параметры решеток разных материалов могут различаться, в гетероструктуре появляются ненулевые напряжения, называемые напряжениями несоответствия. Чрезвычайно важными и актуальными представляются исследования устойчивости таких гетероструктур к образованию в них дислокаций и других дефектов, приводящих к деградации их рабочих характеристик.

В качестве упругой модели квантового кольца, выращенного методом капельной эпитаксии [1] на плоской толстой подложке и зарощенного тонкой эпитаксиальной пленкой, рассмотрим включение в виде полого цилиндра конечной высоты h, погруженное в пленку толщиной $h+d$ на полубесконечной подложке таким образом, что полость цилиндра полностью заполнена материалом пленки (рис. 1а). Несоответствие f в параметрах решетки матрицы (пленки, а1) и включения (а2) определяется как $f=(a_1-a_2)/a_1$. Поля напряжений и механизмы их релаксации в подобных включениях в бесконечной упруго-однородной изотропной среде исследовались в работе [2]. Например, изучалась релаксация за счет образования в наиболее напряженных областях малых прямоугольных призматических дислокационных петель (ПДП).

Напряжения несоответствия в системе, показанной на рис. 1а, можно записать в виде суммы $\sigma_{ij}={}^{HC}\sigma_{ij}+{}^{FS}\sigma_{ij}$, где ${}^{HC}\sigma_{ij}-$ напряжения от полого цилиндрического включения с матрицей в полости в упругом полупространстве из материала пленки, ${}^{FS}\sigma_{ij}-$ напряжения в пленке из-за несоответствия с материалом подложки. Решение для полого цилиндрического включения в упругом полупространстве можно представить в виде: ${}^{HC}\sigma_{ij}={}^{(2)}\sigma_{ij}-{}^{(1)}\sigma_{ij}$, где ${}^{(1)}\sigma_{ij}$ и ${}^{(2)}\sigma_{ij}-$ напряжения соответственно в упругом полупространстве от цилиндрических включений радиуса c1 и c2. При этом высота этих включений h одна и та же, их материалы одинаковы с параметром решетки а2, а параметр решетки материала полупространства в обоих случаях а1.

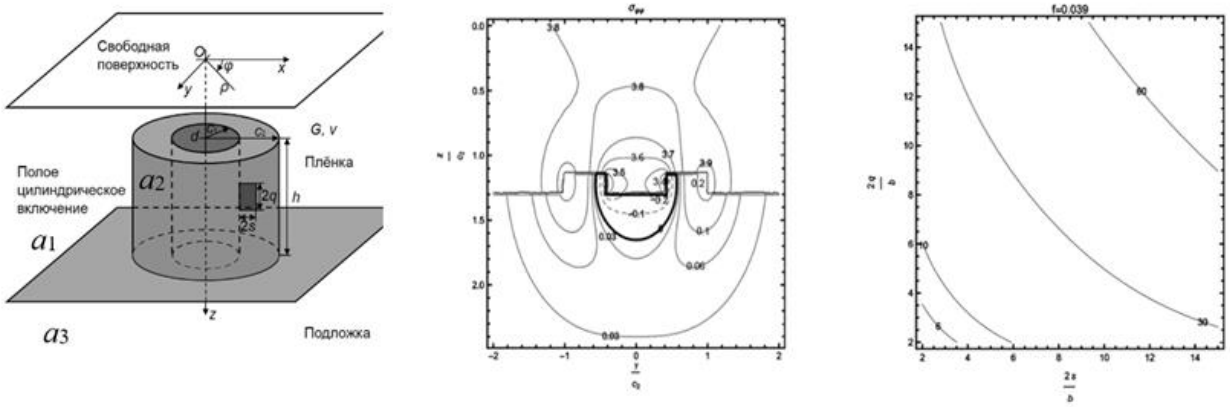
Поле напряжений в упругом полупространстве с цилиндрическим включением будем искать в виде суперпозиции: $\sigma_{ij}={}^{\infty}\sigma_{ij}\big|_{z\to z-d-h/2}+{}^{im}\sigma_{ij}\big|_{z\to z+d+h/2}+\int_0^{+\infty}g(a)\,{}^{S}\sigma_{ij}(a,r)\,da,$ где ${}^{\infty}\sigma_{ij}-$ напряжения от цилиндрического включения в бесконечной среде [3], ${}^{im}\sigma_{ij}-$ напряжения от такого же цилиндрического включения, но с несоответствием противоположного знака, в бесконечной среде; ${}^{S}\sigma_{ij}-$ напряжение от виртуальной поверхностной дислокации Сомилианы в бесконечной среде [4], d – расстояние от свободной поверхности до ближнего торца

(*)И.А. Ковалев, i.kovalev2001@yandex.ru

включения, $g(a)$ – неизвестная функция распределения виртуальных поверхностных дислокаций Сомилианы; r – радиальная координата. Поле напряжений (1) должно удовлетворять граничным условиям на свободной поверхности полупространства $z=0$, которые сводятся к одному интегральному уравнению для определения функции $g(a)$. Для напряжений $\sigma_{\phi z}$ и σ_{zz} граничные условия выполняются для любой функции $g(a)$. При решении полученного интегрального уравнения использовались прямое и обратное интегральные преобразования Ханкеля.

Напряжения несоответствия в упруго-однородной и изотропной системе «пленка-подложка» хорошо известны [5]: ${}^{FS}\sigma_{\rho\rho} = {}^{FS}\sigma_{\phi\phi} = 2GF(1+\nu)/(1-\nu)H(h-z)$, где G – модуль сдвига, $F=(a_1-a_3)/a_3$ – параметр несоответствия кристаллических решеток пленки и подложки, ν – коэффициент Пуассона, $H(h-z)$ – функция Хэвисайда.

Карта итогового окружного напряжения $\sigma_{\phi\phi}$ в плоскости $x=0$ приведена на рис. 1б. В работе [2] показано, что наиболее предпочтительное место образования ПДП – середина продольного сечения включения вблизи внутренней полости (рис. 1а). Полагая, что этот результат остается в силе, рассмотрим изменение энергии системы при образовании в этой же области малой прямоугольной ПДП: $\Delta E = E_l + E_c + W_{\text{int}}$, где E_l – упругая энергия ПДП с учетом свободной поверхности, найденная в [6], $E_c = Gb^2(q+s)/[\pi(1-\nu)]$ – энергия ядра ПДП, b – величина вектора Бюргерса ПДП, 2q и 2s – ее размеры, W_{int} – энергия взаимодействия ПДП с окружным напряжением несоответствия, действующим в области ее образования: $W_{\text{int}} = b\int\limits_{d+h/2-q}^{d+h/2+q} dz \int\limits_{c_1}^{c_1+2s} \sigma_{\phi\phi} dr$. Образование ПДП заданных размеров энергетически выгодно, если $\Delta E<0$. На рис. 1в приведена карта изменения энергии ΔE в пространстве приведенных размеров ПДП $(2q/b,\ 2s/b)$, показывающая, что для выбранных значений параметров системы $\Delta E>0$, т. е. образование ПДП невыгодно.

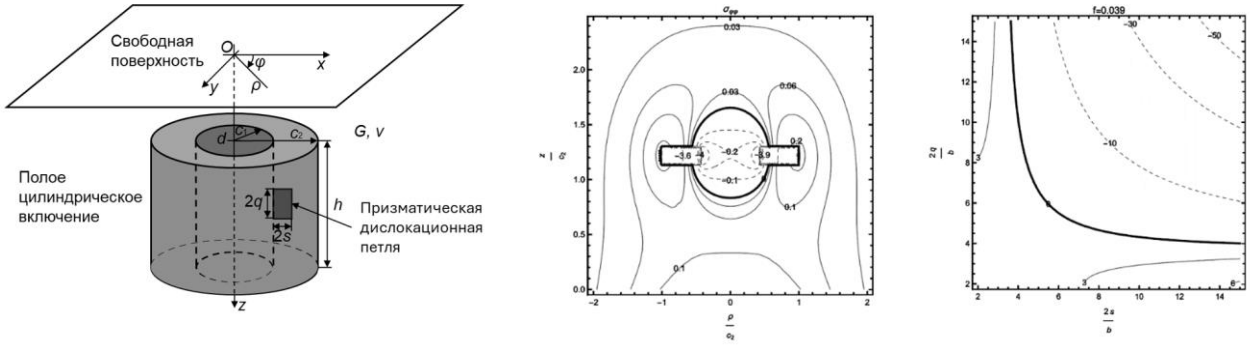


а) б) в)

Рис. 1. а) Полый цилиндр с прямоугольной призматической дислокационной петлей (ПДП), погруженный в материал пленки на подложке. б) Карта окружного напряжения в единицах Gf при ν = 0.3, d = 30 нм, h = 4.5 нм, c1 = 11 нм, c2 = 26.5 нм, f = 0.039 и a2 = a3. в) Изменение энергии системы при образовании ПДП (в единицах Gb3 /[2π(1 − ν)])

Рассмотрим случай, когда между материалами пленки и подложки нет никакого несоответствия (случай гомоэпитаксиального роста [5]), т. е. $a_1 = a_3$ и $F = 0$. С точки зрения упругой модели это соответствует случаю полого цилиндрического включения в однородном

полупространстве (рис. 2а). На рис. 2б показана карта окружного напряжения $\sigma_{\phi\phi}$ в продольном сечении $y=0$, а на рис. 2в – карта изменения энергии ΔE в пространстве приведенных размеров ПДП $(2q/b,\ 2s/b)$, показывающая, что в этом случае ПДП может образоваться, если преодолеет некоторый энергетический барьер.



а) б) в)

Рис. 2. а) Полый цилиндр с прямоугольной призматической дислокационной петлей (ПДП) в полупространстве z > 0. б) Карта окружного напряжения в единицах Gf при ν = 0.3, d = 30 нм, h = 4.5 нм, c1 = 11 нм, c2 = 26.5 нм, f = 0.039 и a1 = a3. в) Изменение энергии системы при образовании ПДП (в единицах Gb3 /[2π(1 − ν)])

Таким образом, предложена теоретическая модель, описывающая упругие поля квантовых колец в плоских гетеро- или гомоэпитаксиальных нанопленках на относительно толстых подложках. Разработан математический аппарат, позволяющий исследовать релаксацию этих упругих полей путем образования малых прямоугольных ПДП в продольном сечении такого квантового кольца. Полученное решение граничной задачи теории упругости о трубчатом включении в упругом полупространстве дает возможность изучать и другие дислокационные механизмы релаксации напряжений несоответствия в квантовых кольцах.

ЛИТЕРАТУРА

1. И.С. Васильевский, А.Н. Виниченко, И.С. Еремина, Д.М. Жигунов, Н.И. Каргина, Ю.Д. Сибирмовский, М.Н. Стриханов. Особенности формирования ансамблей квантовых колец GaAs/AlGaAs и InGaAs/AlGaAs методом капельной эпитаксии // Вестн. НИЯУ МИФИ, 2013, т. 2, № 3, с. 267–272.

2. M.Yu. Gutkin, E.A. Mordasova, A.L. Kolesnikova, A.E. Romanov. Misfit stress relaxation at boundaries of finite-length tubular inclusions through the generation of prismatic dislocation loops. In: Altenbach, H., Bruno, G., Eremeyev, V.A., Gutkin, M.Yu., Müller, W.H. (eds) Mechanics of Heterogeneous Materials. Advanced Structured Materials, vol 195. Springer, Cham, 2023, p. 139-157.

3. A.L. Kolesnikova, M.Yu. Gutkin, A.E. Romanov. Analytical elastic models of finite cylindrical and truncated spherical inclusions // Int. J. Solids & Structures, 2018, Vol. 143, p. 59-72.

4. А.Л. Колесникова, А.Е. Романов. Круговые дислокационно-дисклинационные петли и их применение к решению граничных задач теории дефектов. Препринт №1019 ФТИ им. А.Ф.Иоффе АН СССР, Л., ФТИ, 1986, 62 с.

5. Ю.А. Тхорик, Л.С. Хазан. Пластическая деформация и дислокации несоответствия в гетероэпитаксиальных системах. Киев, Наукова думка, 1983, 304 с.

6. M.Yu. Gutkin, I.A. Ovid'ko, A.G. Sheinerman. Misfit dislocations in composites with nano-wires // J. Phys.: Condensed Matter, 2003, Vol. 15, No. 21, p. 3539-3554.

СЕКЦИЯ "БИОМЕХАНИКА"

УДК 612.755

С.С. Бахметьев, И.Е. Груздев
Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого(*)

МОДЕЛИРОВАНИЕ УСТАЛОСТНОГО РАЗРУШЕНИЯ ДИСТАЛЬНОГО СУХОЖИЛИЯ ДВУГЛАВОЙ МЫШЦЫ ПЛЕЧА

Введение. Тендинопатия сухожилия двуглавой мышцы плеча является распространенной патологией среди спортсменов, особенно в силовых дисциплинах, а также у лиц, чья профессиональная деятельность связана с интенсивными физическими нагрузками [1, 2]. Дистальные повреждения, как правило, представляют собой полные разрывы, наиболее часто наблюдаемые у бодибилдеров и тяжелоатлетов [2]. Согласно статистическим данным, около 80% дистальных разрывов приходится на мужчин, преимущественно затрагивая доминирующую верхнюю конечность [3]. Данные травмы наиболее характерны для спортсменов старше 40 лет. Применение конечно-элементного (КЭ) моделирования в анализе усталостного разрушения сухожилия двуглавой мышцы плеча позволяет детально исследовать механизмы возникновения спортивных травм при выполнении различных упражнений и определить критические нагрузки, ведущие к повреждению.

Цель работы. Разработка математической модели дистального сухожилия двуглавой мышцы плеча для анализа его механических свойств при воздействии нагрузок, возникающих в процессе подъема отягощений (например, гантели).

Задачи исследования. Выбрать адекватную модель материала; провести численный анализ напряженно-деформированного состояния (НДС) сухожилия и усталостный расчет.

Анатомия сухожилия. Сухожилие двуглавой мышцы плеча на дистальном участке представляет собой плоскую внесуставную структуру. Сухожилие пересекает локтевую ямку, поворачиваясь на 90° наружу, и прикрепляется к задней локтевой поверхности лучевого бугорка. Такое расположение волокон позволяет двуглавой мышце плеча действовать как самая мощная мышца, разгибающая предплечье.

Постановка задачи. Моделируется процесс подъема гантели за счет сокращения двуглавой мышцы плеча. Геометрическая модель построена на основе 3D снимков и согласно [4] и включает плечевую, локтевую и лучевую кости, а также дистальное сухожилие бицепса.

Кости рассматриваются как абсолютно жесткие тела: плечевая кость зафиксирована неподвижно, локтевая и лучевая кости кинематически связаны без относительного проскальзывания. Локтевой сустав моделируется в виде цилиндрического шарнира, обеспечивающего движение только в плоскости сгибания-разгибания.

Граничные условия для сухожилия заданы следующим образом: проксимальный конец закреплен по поступательным степеням свободы в области суставной впадины, а дистальный соединен с задней локтевой поверхностью лучевого бугорка посредством жесткого контакта.

Масса гантели задается в виде удаленной нагрузки, направленной вертикально вниз и приложенной к предплечью в области хвата. Такой подход позволяет учесть распределение нагрузок, возникающих при сгибании предплечья под весом отягощения.

Моделирование материала сухожилия. Дистальное сухожилие двуглавой мышцы плеча представляет собой поперечно-изотропную ткань. Для адекватного описания его механического поведения были рассмотрены три модели материала.

(*) С.С. Бахметьев, bahmetiev.st@gmail.com

Для учета нелинейных характеристик использовались гиперэластические модели Нео-Гука и Муни–Ривлина, описывающие сухожилие как изотропный нелинейно-упругий материал. Константы для данных моделей определены в исследованиях [5–6] и представлены в табл. 1.

В работе [7] предложена реологическая модель сухожилия в общем виде, в которой вычислены модули упругости и коэффициенты Пуассона, позволяющие отдельно описать механические свойства волокон и матрикса в рамках линейно-упругого изотропного приближения. На основе этих данных, путем гомогенизации репрезентативного объема волокнистого композита, были получены девять инженерных констант для ортотропной модели линейно-упругого материала, которые представлены в табл. 2.

Функции энергии деформации для моделей Нео-Гука и Муни–Ривлина заданы следующим образом:

Энергия деформации модели Нео-Гука:

$$W_{Neo-Hookean} = \frac{\mu}{2}(I_1 - 3) + \frac{1}{d}(J-1)^2$$

Энергия деформации модели Муни-Ривлина:

$$W_{Mooney-Rivlin} = C_{10}(I_1 - 3) + C_{01}(I_2 - 3) + C_{20}(I_1 - 3)^2 + C_{11}(I_1 - 3)(I_2 - 3) + C_{02}(I_2 - 3)^2 + \frac{1}{d}(J-1)^2,$$

где $\mu, C_{10}, C_{01}, C_{20}, C_{11}, C_{02}, d$ – параметры моделей материалов; I_1, I_2, J – первый, второй и третий инварианты правого тензора деформации Коши–Грина, соответственно.

Табл. 1. Значение констант гиперэластичных моделей материла

μ, МПа	C_{10}, МПа	C_{01}, МПа	C_{20}, МПа	C_{11}, МПа	C_{02}, МПа	d, Па$^{-1}$
143.2	-222.1	290.97	-1.1257	4.7267	79.602	1e-8

Табл. 2. Значение констант композиционного материала

Модуль упругости по оси, МПа			Модуль сдвига в плоскости, МПа			Коэффициент Пуассона в плоскости		
X	Y	Z	XY	YZ	XZ	XY	YZ	XZ
1745.90	1248.50	1248.50	230.78	163.35	230.78	0.39	0.48	0.39

Расчет НДС. Численный анализ напряженно-деформированного состояния дистального сухожилия двуглавой мышцы плеча выполнен в расчетном комплексе ANSYS CAE System. Особое внимание уделено исследованию влияния угла в локтевом суставе на распределение напряжений в сухожильной ткани.

На основе моделирования различных конфигураций определено положение, при котором сухожилие испытывает максимальную нагрузку. Установлено, что критическое напряженное состояние возникает при угле между плечевой и лучевой костями, равном 89°. В этом положении проведен статический расчет для различных значений нагрузки (веса гантели) и рассмотренных моделей материала.

Дополнительно выполнен анализ усталостной прочности, позволяющий оценить долговечность сухожилия при циклических нагрузках. Полученные результаты представлены в табл. 3.

Результаты. Анализ усталостной прочности показал, что при многократных нагрузках, возникающих при подъеме тяжестей, в сухожилии происходит постепенное накопление повреждений, что со временем может привести к его дегенерации и разрыву. Согласно данным табл. 3, критическим значением нагрузки является вес 17,5 кг, при котором срок до разрыва составляет около 22 лет, что соответствует экспериментальным и клиническим исследованиям

[1-3]. Численное моделирование также подтвердило, что разрыв сухожилия преимущественно локализуется в его средней части, что согласуется с результатами натурных испытаний.

Табл. 3. Результаты численного анализа

	Нео–Гук		Муни–Ривлин		Композит		
Вес гантели, кг	Макс. напряжения, МПа	Мин. кол-во циклов	Макс. напряжения, МПа	Мин. кол-во циклов	Макс. напряжения, МПа	Мин. кол-во циклов	Время жизни
15	22.1	4e6	20.7	7e6	25.9	9.5e5	132 года
17.5	25.7	1e6	23.9	2e6	30.2	1.6e5	22 года
20	29.3	3e5	26.9	7e5	34.6	20874	3 года
22.5	32.9	49823	29.9	2e5	38.9	2051	3.5 месяца
25	36.5	8173	32.7	54181	43.2	141	1 неделя

Разработанная модель представляет собой инструмент для оценки риска травмирования и прогноза долговечности сухожилия при различных режимах нагрузки. Полученные результаты могут быть полезны в спортивной медицине для оптимизации тренировочных программ, а также в биомеханических исследованиях, направленных на разработку методик профилактики повреждений сухожильных тканей.

ЛИТЕРАТУРА

1. Singaraju VM, Kang RW, Yanke AB, McNickle AG, Lewis PB, Wang VM, et al. Biceps tendinitis in chronic rotator cuff tears: a histologic perspective // J. of Shoulder and Elbow Surgery. – 2008. – Vol. 17(6). – P. 898-904.
2. Brown DP, Freeman ED, Cuccurullo SJ, Ng U, Maitin IB. Musculoskeletal Medicine. In: Cuccurullo SJ, editor. Physical medicine and rehabilitation board review // 3rd ed. New York: Demos Medical Publishing. – 2014. – P. 171-173.
3. Ward JP, Shreve MC, Youm T, Strauss EJ. Ruptures of the distal biceps tendon // Bull Hosp Jt Dis. – 2014. – Vol. 72(1). – P. 110-119.
4. George S. Athwal MD, Scott P. Steinmann MD, Damian M. Rispoli MD. The Distal Biceps Tendon: Footprint and Relevant Clinical Anatomy // J. of Hand Surgery. – 2007. – Vol. 32(8). – P. 1225–1229.
5. Leonid P. Obrezkov, Taija Finni and Marko K. Matikainen. Modeling of the Achilles Subtendons and Their Interactions in a Framework of the Absolute Nodal Coordinate Formulation // Materials. – 2022. – Vol. 15. – P. 8906.
6. Hsin-Yi Kathy Cheng, Chun-Li Lin, Hsien-Wen Wang, Shih-Wei Chou. Finite element analysis of plantar fascia under stretch—The relative contribution of windlass mechanism and Achilles tendon force // J. of Biomechanics. – 2008. – Vol. 41(9). – P. 1937-1944.
7. Man Xi, Guohong Yun, B. Narsu. A mathematical model for viscoelastic properties of biological soft tissue // Theory in Biosciences. – 2022. – Vol. 141. – P. 13-25.

УДК 612.171.1

В.А. Гуляева, И.Б. Суслова
Санкт-Петербургский политехнический университет имени Петра Великого(*)

ПРИМЕНЕНИЕ ВЕЙВЛЕТ-ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ДЛЯ ИССЛЕДОВАНИЯ МОДЕЛЕЙ СЕРДЕЧНОГО РИТМА МАТЕРИ И ПЛОДА КАК ЧАСТОТНО-МОДУЛИРОВАННЫХ СИГНАЛОВ

*Введение***.** В работе проведен математический анализ сердечного ритма – сложного нестационарного сигнала [1,2], отражающего физиологическое состояние организма [1,3,4]. Совместное исследование вариабельности ритма матери и плода представляет собой важную диагностическую задачу, которая содержит значительные сложности [5], а каждое продвижение в этом направлении вносит свой вклад в ее решение.

Данное исследование основано на математической модели сердечного ритма как частотно-модулированного сигнала [6], позволяющей эффективно анализировать сигналы с помощью непрерывного вейвлет-преобразования [7-10].

Математическое моделирование сигналов ритмограммы сердца матери и плода. В проведенном исследовании была построена модель ритмограммы как совокупности гауссовских пиков с одинаковой амплитудой, расположенных определенным неравномерным образом на оси времени, что соответствует представлению частотно-модулированного сигнала. Моделирование удара сердца (QRS-комплекса), как гауссовского пика с максимумом в момент удара имеет важное значение при применении спектральных методов математической обработки сигналов [2,4,7].

В рамках исследуемой модели частота модулированного сигнала изменяется по синусоидальному закону, примем что f_0 – несущая частота, ε – глубина модуляции, f^{mod} – частота модуляции. В синусоидальной модели изменения частоты со временем необходимо найти явные выражения для *RR*-интервалов. Отметим, что в реальной медицинской ситуации эти интервалы известны из записи ритмограммы сердца. Был построен алгоритм нахождения зависимости *RR* - интервалов от времени при заданной частотной модуляции сигнала. Общая последовательность ударов сердца определяется по предыдущему найденному значению из решения трансцендентного уравнения. На рис. 1 показаны зависимости *RR*-интервалов между соседними ударами сердца матери и плода на интервале времени 20 сек и построенные на основе заданной частотной модуляции модели непрерывных сигналов.

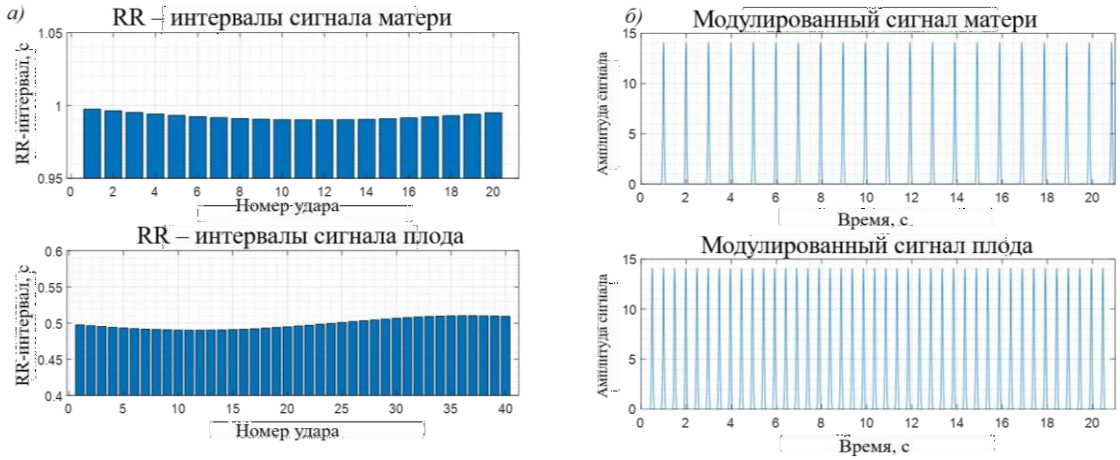


Рис. 1. а) *RR*-интервалы ритмограммы матери и плода в зависимости от номера удара; б) модели ритма матери и плода как частотно-модулированных непрерывных сигналов

(*) В.А. Гуляева, vera.nikol0503@mail.ru

Обработка моделей частотно-модулированных сигналов матери и плода методом непрерывного вейвлет-преобразования. В отличие от оконного преобразования Фурье, которое наиболее часто используется при анализе сердечного ритма [3,4,7], вейвлет-преобразование [6-10] позволяет избежать сложной проблемы подбора ширины окна. Этот вид преобразования представляет собой разложение сигнала по функциям, полученным из материнского вейвлета, путем сжатий, растяжений и сдвигов [6-10].

Материнский вейвлет, играющий роль окна интегрального преобразования, автоматически изменяется при изменении частоты. В данной работе используется видоизмененное по сравнению с классической формой [5-8] вейвлет-преобразование $V(\nu, t)$ [4], которое для гармонического сигнала с заданной частотой f_0 будет иметь максимум точно на этой частоте. С помощью непрерывного вейвлет-преобразования с материнским вейвлетом Морле были построены вейвлет-спектры мощности $|V(\nu, t)|^2$ модельных сигналов матери и плода, которые приведены на рис. 2.

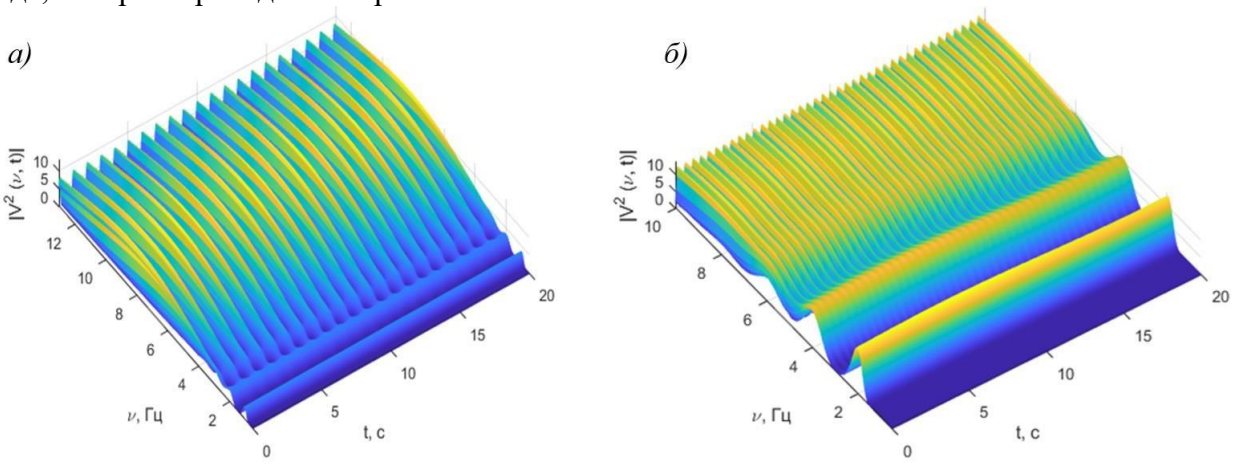


Рис. 2. Спектры мощности вейвлет-преобразования модельных сигналов длительностью 20 с: а) материнского б) фетального

Полученные аналитически вейвлет-спектры мощности сигналов $|V(\nu, t)|^2$ для модельных сигналов матери и плода позволили определить зависимости от времени функций локальной частоты [3]. Локальные частоты рассчитывались по максимальному значению спектра $|V(\nu, t)|^2$ для каждого момента времени. Поведение локальной частоты во времени отражает турбулентность сердечного ритма. Нарушения сердечного ритма матери и плода характерны для осложнений беременности [3,9,10].

Анализ влияния частоты модуляции на изменение локальной частоты для модельных сигналов матери и плода. Сравнение поведения локальной частоты при фиксированной глубине модуляции, но при различных частотах модуляции как в случае материнского, так и в случае фетального ритма показывает, что колебания локальных частот модельных сигналов сглаживаются, то есть период колебаний увеличивается, при уменьшении частоты модуляции, что является ожидаемым эффектом. Отметим также, что при одинаковых частоте и глубине модуляции на фоне разных несущих частот локальные частоты совпадают по своему характеру поведения, то есть синхронизируются.

Оценка влияния глубины модуляции для материнского и фетального сигналов на поведение локальной частоты. Сравнение поведения локальной частоты при разных глубинах модуляции, как представлено на рис. 3, показывает, что увеличение глубины модуляции приводит в обоих случаях к увеличению амплитуды колебаний локальной частоты. Причем в случае модели фетального сигнала амплитуда колебаний локальной частоты возрастает более интенсивно, что говорит о более сильном влиянии глубины модуляции на изменение локальной частоты при более высокой несущей частоте.

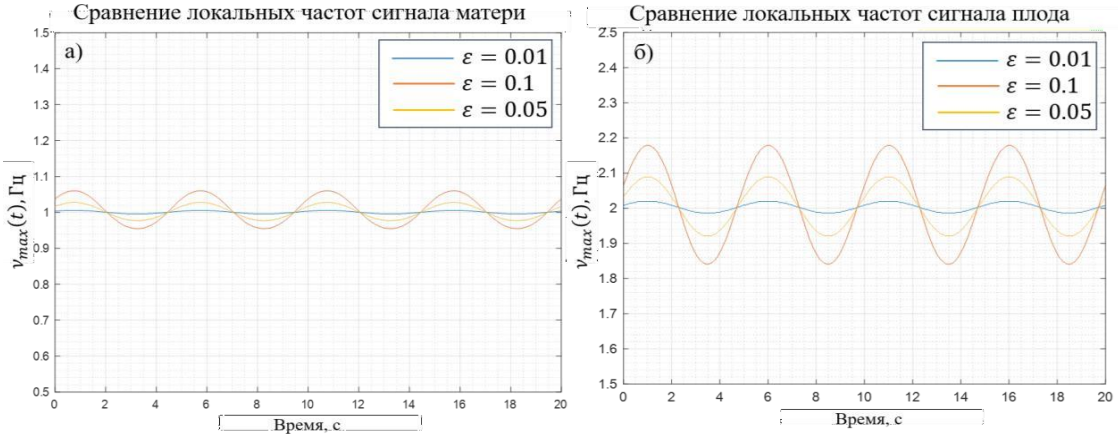


Рис. 3. Графики изменения локальной частоты для моделей материнского (а) и фетального (б) сигналов при различных глубинах модуляции: синяя линия → $\varepsilon_1 = 0.01$; желтая → $\varepsilon_2 = 0.05$; красная→ $\varepsilon_3 = 0.1$. Частота модуляции фиксирована и равна 0.2 Гц

Выводы. В работе использовалась модель частотно-модулированного сигнала, которая имеет преимущество перед моделью сигнала с амплитудной модуляцией поскольку строится с учетом реальных моментов времени, в которые происходит удар сердца. Это особенно важно при исследовании различного вида нарушений ритма в сложной системе матери и плода в период беременности [5, 11, 12]. Представление ритмограммы сердца как суперпозиции гауссовых пиков на неравномерной шкале времени позволяет аналитически вычислять и анализировать вейвлет-преобразование для кардиосигналов с любым количеством сердечных ударов. В работе исследовано влияние глубины и частоты модуляции на поведение во времени локальной частоты при условии различных несущих частот сигналов матери и плода.

ЛИТЕРАТУРА

1. Баевский Р.М. Анализ вариабельности сердечного ритма: история и философия, теория и практика /Р.М. Баевский // Клиническая информатика и телемедицина.– 2004.–№ 1.–С. 54-64.
2. Божокин С.В., Суслова И.Б. Основы теории обработки биомедицинских сигналов. СПб, Изд-во СПБПУ.– 2016.–148 с.
3. Malik M. Heart rate variability: standards of measurement, physiological interpretation, and clinical use // Circulation. – 1996.– 93(5).– P.1043-1065.
4. Acharya U., Joseph K., Kannathal N., Lim C. M., Suri, J. S. Heart rate variability: a review// Medical and biological engineering and computing.– 2006.– 44.– P. 1031-1051.
5. Клещеногов С. А., Флейшман А. Н. Прогнозирование осложнений беременности на основе изучения вариабельности ритма сердца матери // Сибирский научный медицинский журнал.– 2006.– №3.– С. 52-59.
6. Bozhokin S. V., Suslova I. B. Analysis of non-stationary HRV as a frequency modulated signal by double continuous wavelet transformation method // Biomedical Signal Processing and Control.– 2014.– 10(1).– С. 34-40.
7. Короновский А.А., Храмов А.Е. Непрерывный вейвлет-анализ и его приложения.– М.: Физматлит, 2003.–176 с.
8. Чуи К. Введение в вейвлеты.–М.: Мир, 2001.–412 с.
9. Малла С. Вейвлеты в обработке сигналов. –М.: Мир, 2005.–671 с.
10. Смоленцев Н.К. Основы теории вейвлетов. Вейвлеты в MATLAB. –М.: ДМК Пресс, 2008.– 448 с.
11. Bozhokin S. V., Negrusha N. A., & Suslova I. B. Wavelet-based technique to detect gestational complications by analyzing non-stationary heart rate variability// Indian Journal of Fundamental and Applied Life Sciences.–2015.–5(4).– С. 55-68.
12. Weissman A, Lowenstein L, Peleg A, Thaler I and Zimmer E Power spectral analysis of heart rate variability during the 100-g oral glucose tolerance test in pregnant women// Diabetes Care.–2006.– 29(3).– P. 571- 574.

УДК 612.755

И.Е. Груздев, А.Н. Плотников
Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого(*)

КОНЕЧНО-ЭЛЕМЕНТНОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ УСТАЛОСТНОГО РАЗРУШЕНИЯ СУХОЖИЛИЯ КЛЮВОВИДНО-ПЛЕЧЕВОЙ СВЯЗКИ ПРИ ИМПИНДЖМЕНТ- СИНДРОМЕ ПЛЕЧА

Введение. Импинджмент-синдром плеча – это синдром, включающий в себя воспаление сухожилий мышц вращательной манжеты плеча, когда они проходят через пространство под акромиальным отростком лопатки (рис. 1). Данный синдром приводит к следующим последствиям: боль, слабость, потеря подвижности в плечевом суставе. Это распространенная проблема у людей, кто много работает с поднятыми руками (электрики, монтажники), а также у спортсменов любителей.

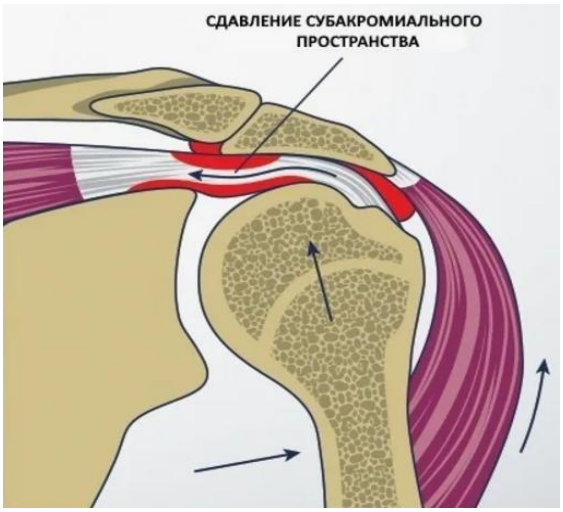


Рис. 1. Иллюстрация импинджмент-синдрома плеча

Диагностика данного заболевания осложняется слабовыраженной симптоматикой. Однако синдром можно обнаружить с помощью таких процедур как рентген, ультразвук и МРТ. Имея конечно-элементную (далее КЭ) модель рассматриваемого сухожилия, появляется возможность оценить результаты диагностики и сделать оценку о наработке сухожилия до его критического отказа. Подобные исследования проводились в США при изучении травм мениска [1].

Моделирование материала сухожилия. Для построения КЭ модели необходимо задать набор инженерных констант. Так как соответствующих данных нет в общем доступе, предлагается задать ткань как волокнистый композит. В [2] была разработана реологическая модель сухожилия в общем виде. В результате данной работы были получены параметры, с помощью которых может быть описан материал сухожилия (табл. 1).

Табл. 1. Константы для моделирования волокнистого композита.

Модуль упругости коллагеновых волокон	3536 МПа
Модуль упругости матрицы композита	130.4 МПа
Модуль вязкости матрицы композита	156.48 МПа·с

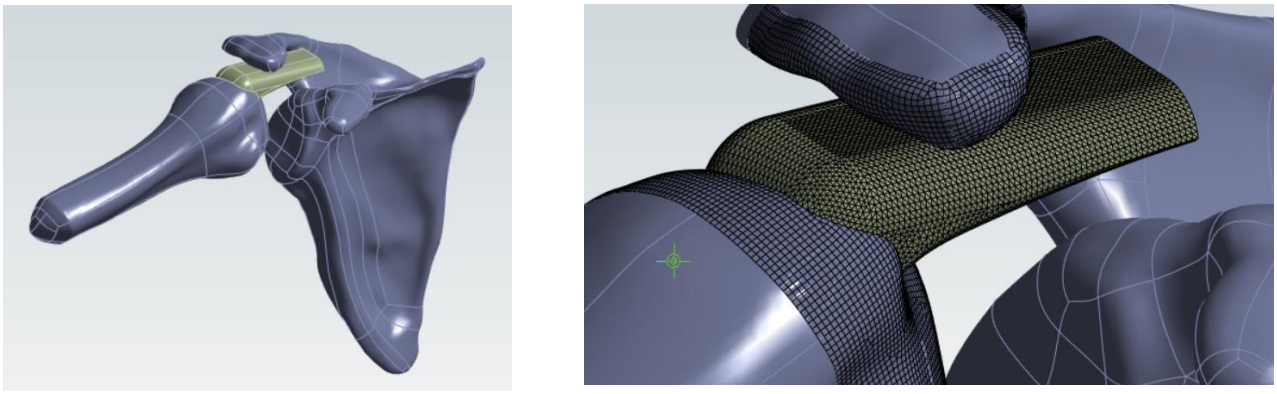
(*)А.Н. Плотников, alex.plotnikov.2003@mail.ru

Для более детального анализа поведения материала сухожилия было создано 4 разных модели. Они отличаются законом распределения волокон: параллельное распределение без закручивания и с закручиванием; и насыщенностью ткани коллагеновыми волокнами. Далее, путем гомогенизации параметров RVE зерна композита были получены 9 инженерных констант (3 модуля упругости, 3 коэффициента Пуассона и 3 модуля сдвига) для каждой модели материала (табл. 2). Найденные значения показывают ярко выраженные ортотропные свойства, что подтверждает корректность гомогенизации RVE зерна.

Табл. 2. Инженерные константы моделей материала сухожилия.

		Модели материалов			
Закон распределения волокон		Без перекручивания		С перекручиванием	
Насыщенность коллагеновыми волокнами		Высокая	Невысокая	Высокая	Невысокая
№ модели		1	2	3	4
Модуль упругости по оси, МПа	X	2855.20	2168.70	1531.10	1654.60
	Y	962.510	495.15	316.33	379.66
	Z	1063.10	500.71	321.68	360.90
Коэффициент Пуассона в плоскости	XY	0.24	0.26	0.29	0.28
	YZ	0.31	0.39	0.43	0.41
	XZ	0.23	0.26	0.29	0.28
Модуль сдвига в плоскости, МПа	XY	366.96	187.27	123.65	146.85
	YZ	402.19	174.81	108.53	120.57
	XZ	409.14	187.77	123.00	136.62

Постановка задачи. Геометрия построена согласно [3, с 49-56]. Для рассмотрения были взяты плечевая кость и лопатка, между которыми находится сухожилие клювовидно- плечевой связки (рис. 2а). Между плечевой костью и сухожилием задается контакт жесткого сцепления, также между акромиальным отростком лопатки и верхней поверхностью сухожилия задается контакт с учетом трения. Закрепление сухожилия и клювовидно-плечевой связки моделируется как удаленное вращение вокруг вертикальной оси.

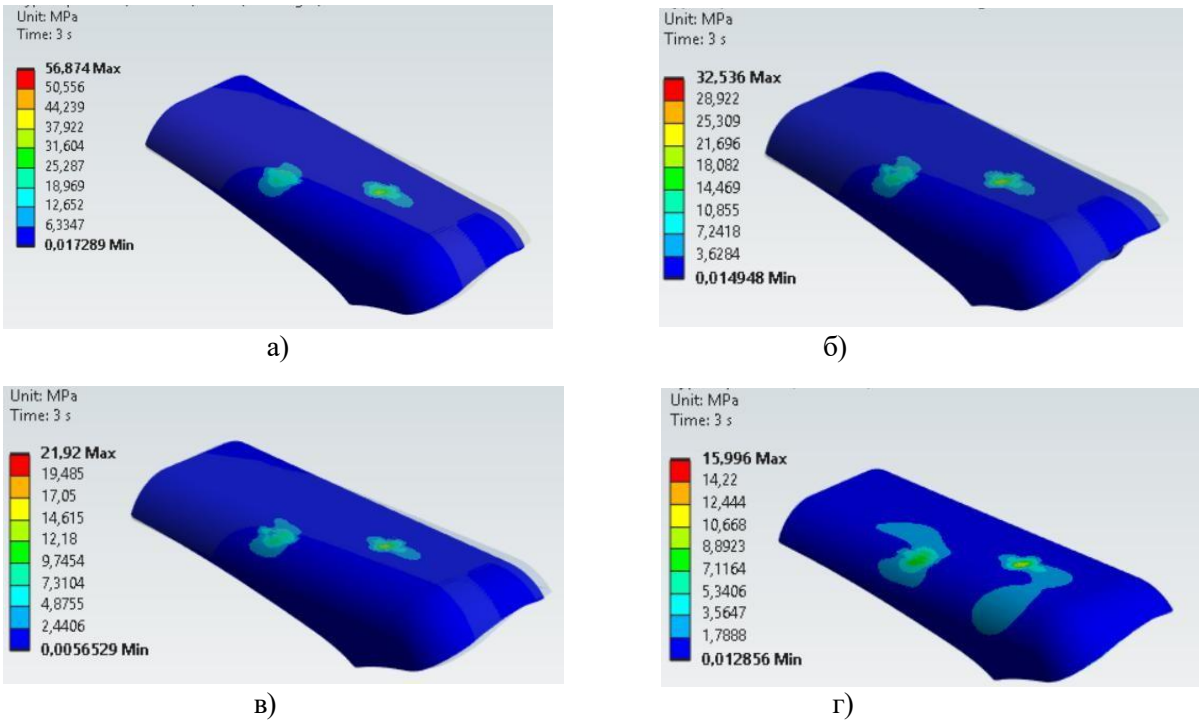


а) б)

Рис. 2. а) геометрия КЭ модели; б) КЭ сетка

При создании КЭ сетки кости рассматриваются как жесткие тела, т.е. не участвуют в расчетах. Сетка на них создается только в местах, где заданы контакты с сухожилием (см. рис. 2.б). Максимальный размер элемента сетки – 0,7 миллиметра.

Расчет напряженно-деформированного состояния (НДС). Вычисления проводятся в расчетном пакете Ansys CAE System. Рассматривается отведение плечевой кости за спину на 3 градуса, а также многоцикловая нагрузка. Проанализируем поля напряжений, полученные при одном цикле нагружения (рис. 3).

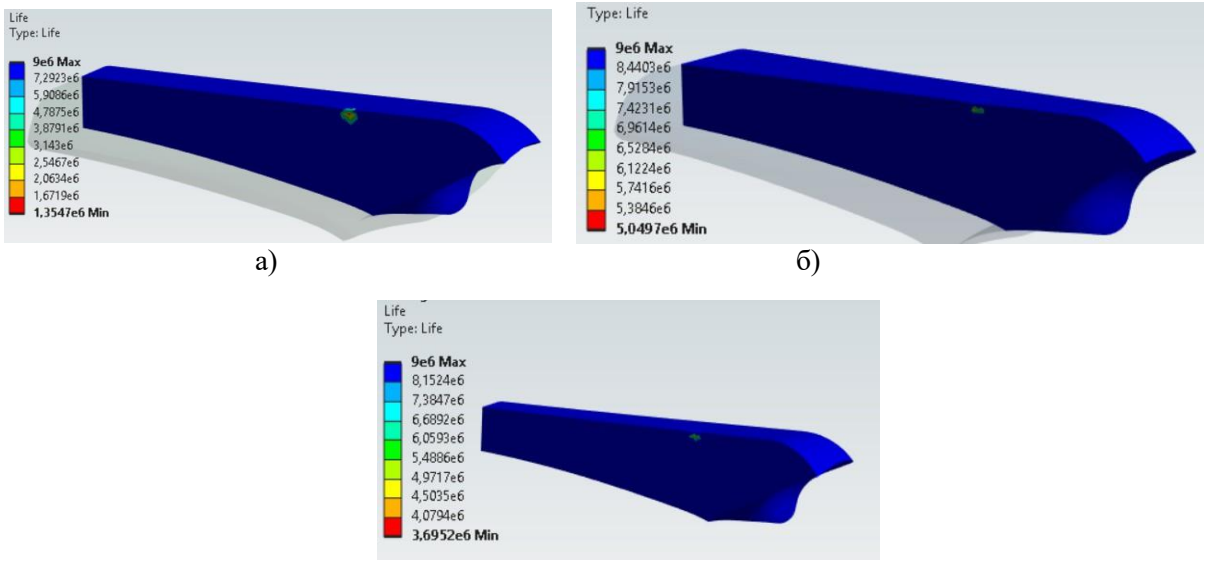


а) б)

в) г)

Рис. 3. Поле напряжений для разных моделей материала: а) № 1; б) № 2; в) № 3; г) № 4

На рис.3а видно, что в случае модели № 1 максимальные напряжения превосходят предел прочности сухожилий (50 МПа) и материал не выдерживает один цикл. Такая модель является некорректной и в дальнейшем рассматриваться не будет. Рассмотрим поле долговечности для трех других моделей при многоцикловом нагружении (9Е6 циклов). Расчет проводился при помощи SN подхода [4, 5] (рис. 4).



а) б)

в)

Рис. 4. Поле долговечности в разрезе сухожилия для трех моделей материала: а) № 2; б) № 3; в) № 4

Результаты. На рис. 4 видно, что возникшие разрушения носят локальный характер и не приносят большого урона человеку. Это обусловлено тем, что SN кривая, используемая в расчетах, есть только до 9E6 циклов, что является сравнительно малым интервалом. Поэтому разумно предположить, что самая корректная модель из предложенных – это та, которая подвергается разрушению позже всех, а именно модель № 3 (рис. 4.б). Также было замечено, что при малом количестве коллагеновых волокон поля напряжений при одноцикловом нагружении имеют большую площадь. Это показывает, что сопротивление изгибу возникает за счет коллагеновых волокон, а не из-за механических свойств матрицы сухожилия.

ЛИТЕРАТУРА

1. Nesbitt D.Q., Burruel D.E., Henderson B.S., Lujan T.J. Finite element modeling of meniscal tears using continuum damage mechanics and digital image correlation // Scientific Reports. – 2023. – Vol. 13:4039. – P.12
2. Xi M., Yun G., Narsu B. A mathematical model for viscoelastic properties of biological soft tissue // Theory in Biosciences. – 2022. – Vol. 141. – P. 13-25.
3. Джонсон Д.Г., Амендола А., Барбер Ф.А. [и др.] Оперативная артроскопия: в 2 т.; пер. с англ. / под ред. С.В. Иванникова. – М.: Издательство Панфилова, 2015. – Т. 1. – 560 с.
4. Берендеев Н.Н. Методы решения задач усталости в пакете Ansys Workbench: учебно-методическое пособие. – 2-е изд., испр. и доп. – Нижний Новгород: Нижегородский госуниверситет, 2020. – 73 с.
5. Henderson B.S., Cudworth K.F., Pena E., Lujan T.J. Modeling fatigue failure in soft tissue using a visco-hyperelastic model with discontinuous damage // Journal of the Mechanical Behavior of Biomedical Materials. – 2023. – Vol. 144(6). – P.31

УДК 531

С.Д. Иванов, О.В. Антонова
Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого(*)

МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРОЦЕССА СВОРАЧИВАНИЯ БАЛЛОНА ДЛЯ АНГИОПЛАСТИКИ

Введение. Ангиопластика — это минимально инвазивная медицинская процедура, направленная на восстановление кровотока в суженных или заблокированных кровеносных сосудах, чаще всего в артериях. Этот метод используется для лечения заболеваний сердечно-сосудистой системы, таких как ишемическая болезнь сердца, периферическая артериальная болезнь и атеросклероз. В ходе процедуры сдутый баллон с надетым поверх стентом, прикрепленный к катетеру, вводится в суженный сосуд и затем надувается до необходимого размера (рис.1). Баллон заставляет кровеносный сосуд и окружающую мышечную стенку расширяться, что позволяет восстановить кровоток. После этого баллон сдувается и извлекается, а стент остается, чтобы гарантировать, что сосуд останется открытым [1].

Целью данной работы является математическое моделирование ключевых этапов сворачивания баллона и последующий анализ возникающих во время моделирования проблем.

Геометрия. Для математического моделирования, с применением программного пакета ABAQUS, была построена геометрическая модель баллона в соответствии с размерами, представленными в [2]. Итоговая модель изображена на рис. 2.

(*) С.Д. Иванов, ivanov.s@compmechlab.ru

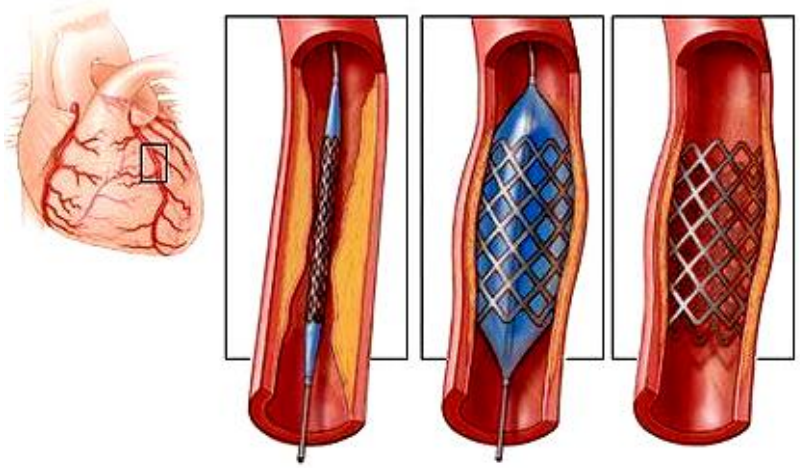


Рис. 1. Процесс установки стента



Рис. 2. Геометрическая модель баллона

Постановка задачи и результаты. Процесс сворачивания баллона был промоделирован, опираясь на исследование, описанное в [3], постановка задачи представлена на рис. 3.

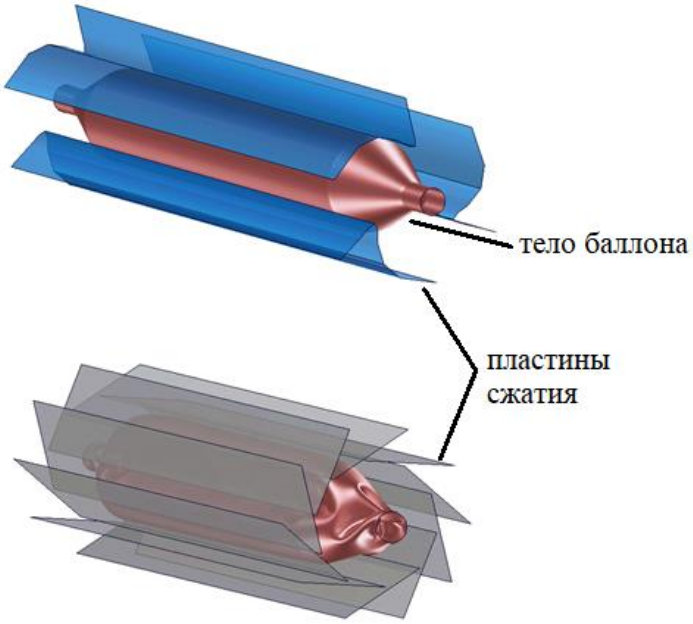


Рис. 3. Постановка задачи

Для описания поведения материала баллона было использована модель материала Огдена 1-го порядка, константы который представлены в [4].

Результаты моделирования процесса сворачивания баллона представлены на рис. 4.

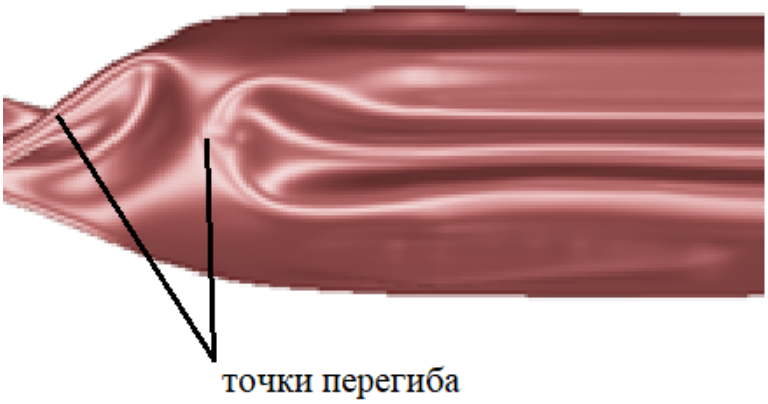


Рис. 4. Деформированный вид баллона

Полученный результат свидетельствует о формировании точек перегиба вблизи концов баллона, что может привести к повреждению баллона и последующим проблемам при его раскрытии, а также повреждениям стента или стенок сосуда.

Заключение. В данной работе были промоделированы ключевые этапы процесса сворачивания баллона, необходимые для описания поведения баллона и выявления его уязвимых областей: формирования формы «трилистника» и сворачивание «лепестков» вокруг центральной оси.

ЛИТЕРАТУРА

1. National Center for Biotechnology Information. [Электронный ресурс]. – Режим доступа: https://www.ncbi.nlm.nih.gov/books/NBK499894/ (дата обращения: 16.03.2025).
2. Geith M.A., Swidergal K., Hochholdinger B., Schratzenstaller T.G., Wagner M., Holzapfel G.A. On the importance of modeling balloon folding, pleating, and stent crimping: An FE study comparing experimental inflation tests // International Journal for Numerical Methods in Biomedical Engineering. – 2019. – P.19.
3. Wiesent L., Schultheiß U., Schmid C., Schratzenstaller T., Nonn A. Experimentally validated simulation of coronary stents considering different dogboning ratios and asymmetric stent positioning // PLOS One. – 2019. – P.25.
4. Helou B., Bel-Brunon A., Dupont C., Ye W., Silvestro C., Rochette M., Lucas A., Kaladji A., Haigron P. Influence of balloon design, plaque material composition, and balloon sizing on acute post angioplasty outcomes: an implicit Finite Element Analysis // International Journal for Numerical Methods in Biomedical Engineering. – 2021. – P.49.

УДК 612.133

Н.А. Иванов[1], Я.А. Гатаулин[1,2], А.Д. Юхнев[1,2], Д.К. Зайцев[1], С.В. Орлов[2]
[1]Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого
[2]Институт экспериментальной медицины, Санкт-Петербург

ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ДИНАМИКИ ЖИДКОСТИ В ЧАСТИЧНО ЗАПОЛНЕННОМ КОНТЕЙНЕРЕ, РАСПОЛОЖЕННОМ НА ОРБИТАЛЬНОМ ШЕЙКЕРЕ

Введение. Сердечно-сосудистые болезни – основная причина смертности во всем мире, большая часть этих смертей связана с осложнениями атеросклероза. Клинические исследования указывают на связь между течением крови и формированием атеросклеротической бляшки [1,2]. Биохимические исследования, проводимые, в отличие от клинических, в известных, контролируемых условиях лаборатории, способны установить такую связь не только качественно, но и количественно.

В биохимических исследованиях клеточных культур используются специальные движущиеся платформы – орбитальные шейкеры [3,4]. На прямоугольную платформу шейкера помещаются различные контейнеры (культуральные флаконы) с культивируемыми клетками и питательной средой. Движение шейкера приводит в движение жидкость внутри контейнера, клетки испытывают сдвиговые напряжения. Актуальной для биохимических исследований является задача настройки параметров шейкера (по амплитуде и частоте вращения) для создания условий на дне внутри контейнера, близких к физиологическим.

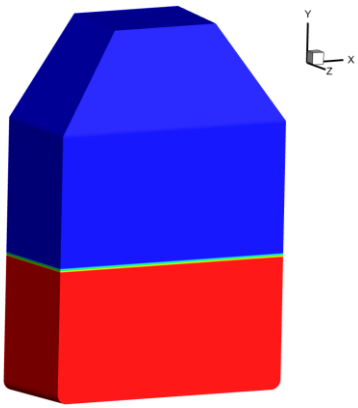
Цель и задачи работы. Целью данной работы является численно-экспериментальное исследование течения в частично заполненном контейнере, установленном на вращающем шейкере, при различных значениях частоты вращения шейкера.

Постановка задачи. Орбитальный шейкер Biosan (модель OS-20) осуществляет движение по круговой орбите радиусом 2 см с постоянной угловой скоростью (от 50 до 250 об/мин) (рис.1а). Контейнер, который вертикально помещается на шейкер, имеет продольной размер 5,1 см и заполнен на 2,6 см питательной средой (по плотности и вязкости сравнимой с водой) (рис.1б). В другой части контейнера находился воздух.

Эксперимент. Контейнер заполнялся пренебрежимо малым относительно жидкости количеством алюминиевой пудры для лучшей визуализации течения. С боковой стороны от контейнера устанавливался лазерный нож для подсветки. Для видеофиксации эксперимента параллельно контейнеру, на одном с ним уровне, закреплялась камера с частотой съемки в 60 Гц. Было поставлено пять экспериментов: для 50, 60, 95, 120 и 140 об/мин вращения шейкера.



а



б

Рис. 1. Экспериментальная установка (а), модель культурального флакона (в 3D): жидкая среда (красный цвет), воздух (синий цвет) (б)

В ходе эксперимента были получены изображения свободной поверхности жидкости в процессе движения контейнера, которые затем сравнивались с численными результатами.

Методика расчета. Решалась система уравнений Навье-Стокса для нестационарных течений несжимаемой жидкости. Течение полагалось ламинарным. Для моделирования поведения свободной границы использовался метод VOF (Volume-of-Fluid). В рамках данного метода решалось вместе с основными уравнение переноса функции-маркера, которое определяет наличие той или иной фазы, а соответственно плотности и вязкости, в ячейке.

Для задания движения контейнера в уравнение движения жидкости вводилось ускорение, вычисленное из закона движения шейкера.

Расчеты проводились в программном пакете Ansys Fluent со вторым порядком точности по пространству и по времени. Для функции маркера использовалась схема Compressive.

Расчетная сетка построена в программе ICEM CFD, была структурированной и содержала около 3 млн ячеек. Шаг по времени составлял 0,0002 с. Указанные параметры являются достаточными для аккуратного моделирования, согласно проведенным тестам на сеточную и временную сходимость.

Результаты. При вращении шейкера в контейнере возникает плескание жидкости. Данные расчетов показывают, что из-за слабой вытянутости контейнера в трансверсальном направлении (по z) течение близко к двумерному. Кроме того, течение достаточно быстро переходит в установившееся периодическое состояние – примерно с 5 цикла. Представленные ниже результаты расчетов взяты из центральной плоскости контейнера с установившегося участка решения.

Приведем качественное сопоставление границы свободной поверхности для двух моментов времени цикла (рис. 2) для режима с частотой вращения шейкера 140 об/мин. Качественно картины схожи. Однако расчет демонстрирует более интенсивное плескание. Анализ амплитуды плескания (рис. 4), вычисленной как разница между максимальной и минимальной высотой свободной поверхности в точке на расстоянии 5 мм от правой стенки контейнера, показал, что для частоты 120 об/мин разница составляет около 20%, для режима с минимальной частотой 50 об/мин – 7%.

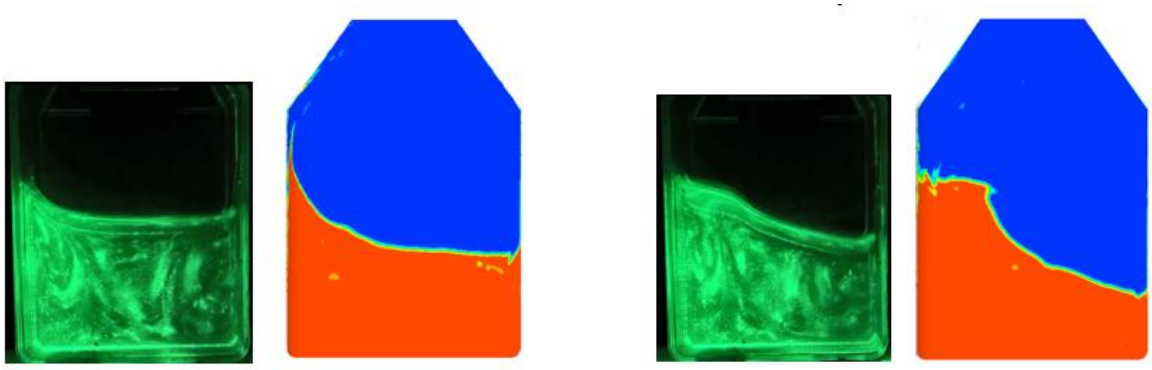
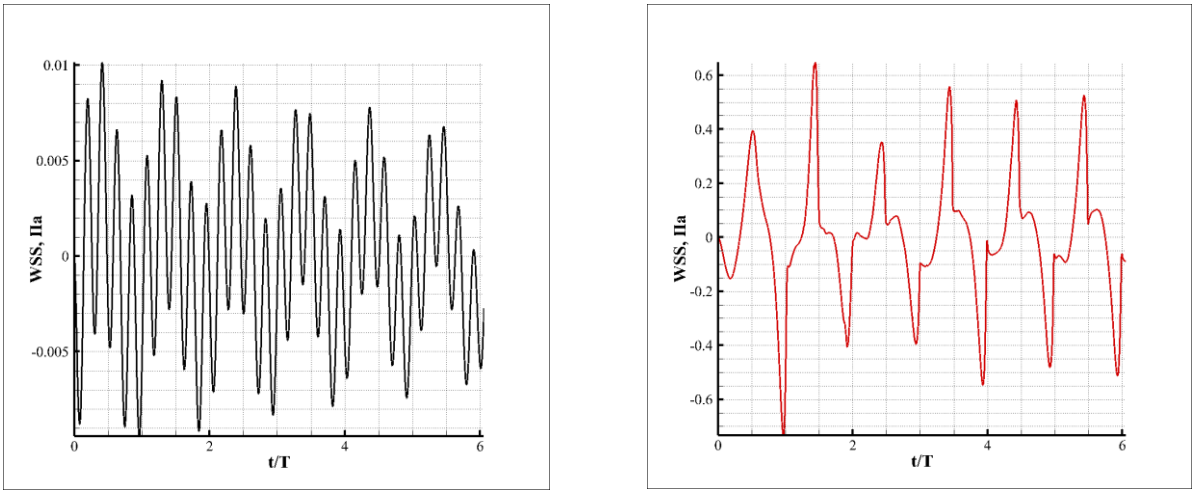


Рис. 2. Граница свободной поверхности в центральной плоскости из эксперимента и расчета в два момента времени: t/T=0.078(а) , 0.289(б) (f = 140 об/мин)

Колебания свободной поверхности ввиду своей близости ко дну контейнера влияют на распределение сдвиговых напряжений на дне. В течении присутствуют иные частоты, отличные от основной, определяемой частотой вращения. Изменение сдвиговых напряжений на дне во времени от начала вращения шейкера для частот 50 и 120 об/мин показано на рис. 3.



а б

Рис. 3. Изменение осредненных по дну контейнера сдвиговых напряжений во времени от частоты вращения шейкера: а – 50 об/мин, б – 120 об/мин

Зависимость осредненных по циклу и дну контейнера сдвиговых напряжений WSSA от частоты вращения (рис. 5) показывает, что напряжения растут экспоненциально, изменяясь в рабочем диапазоне частот (50 – 140 об/мин) вращения шейкера практически на порядок – с 0,015 Па до 0,15 Па. Такие напряжения считаются «опасными»: обычно в областях на стенке сосудов с данным уровнем напряжений происходят атеросклеротические изменения.

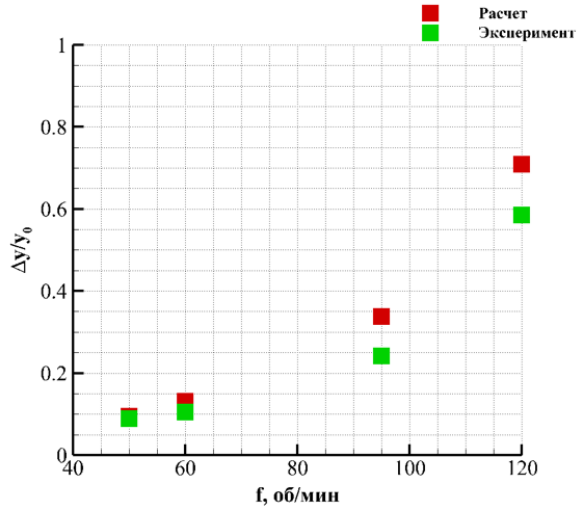


Рис. 4. Сравнение амплитуд плескания из расчета и эксперимента для различных частот вращения

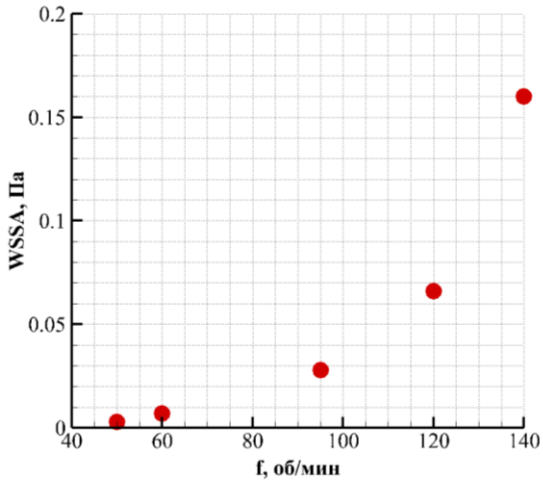


Рис. 5. Изменение осредненных по циклу и дну контейнера сдвиговых напряжений от частоты вращения

Дальнейшие исследования будут посвящены анализу влияния уровня жидкости в контейнере, а также выбору параметров режима шейкера для создания физиологических сдвиговых напряжений, воздействующих на клеточные культуры.

Расчеты проводились с использованием ресурсов СКЦ «Политехнический» (scc.spbstu.ru).

Работа поддержана Госзаданием Минобрнауки РФ «Молекулярно-клеточные механизмы участия макрофагов в регуляции функции эндотелия на разных этапах формирования атеросклеротических поражений» (№ FGWG-2025-0007).

ЛИТЕРАТУРА
1. Franzoni M., Cattaneo I., Ene-Iordache B., Oldani A., Righettini P., Remuzzi A. Design of a cone-and-plate device for controlled realistic shear stress stimulation on endothelial cell monolayers // Cytotechnology. – 2016. – Vol. 68. – P. 1885-1896.
2. Zhou M., Yu Y., Chen R., Liu X., Hu Y. Wall shear stress and its role in atherosclerosis // Frontiers in Cardiovascular Medicine. – 2023. – Vol. 10. – P. 1-11.
3. Driessen R., Zhao F., Hofmann S., Bouten C., Sahlgren C., Stassen O. Computational characterization of the dish-in-a-dish, a high yield culture platform for endothelial shear stress studies on the orbital shaker // Micromachines. – 2020. – Vol. 11. – P. 1-14.
4. Filipovic N., Ghimire K., Saveljic I., Milosevic Z., Ruegg C. Computational modeling of shear forces and experimental validation of endothelial cell responses in an orbital well shaker system // Computer Methods in Biomechanics and Biomedical Engineering. – 2015. – Vol. 16, No. 6. – P. 581-590.

УДК 532.54

А.П. Корчагин[1], А.О. Охотников[1], О.В. Антонова[1], О.И. Охотников[2]
[1]Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого(*)
[2] Курский государственный медицинский университет

ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ РАСПРОСТРАНЕНИЯ ЖЕЛЧИ ВДОЛЬ ДВЕНАДЦАТИПЕРСТНОЙ КИШКИ С УЧЕТОМ ДВИЖЕНИЯ СТЕНКИ

Введение. Эндобилиарное стентирование является основным методом устранения непроходимости желчных протоков в области сужения. Моделирование процесса стентирования представляет собой сложную задачу, требующую учета многих факторов, таких как динамика жидкости, перистальтика, взаимодействие стенок двенадцатиперстной кишки со стентом [1]. Одним из ключевых этапов в решении данной задачи является рассмотрение процесса распространения желчи в двенадцатиперстной кишке (ДПК) за счет перистальтического движения ее стенок.

Целью работы является разработка математической модели, описывающей течение желчи в протоке двенадцатиперстной кишки с учетом движения ее стенок.

Конечно-объемная модель. В качестве рассматриваемого объекта выбран участок двенадцатиперстной кишки длиной 250 мм и диаметром 30 мм (рис. 1) [2].

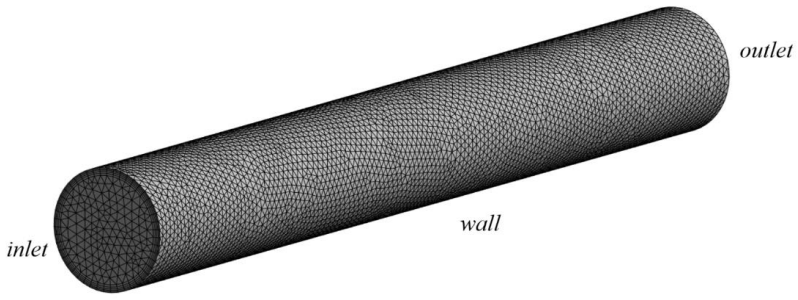


Рис. 1. Конечно-объемная модель участка ДПК

Расчетная модель состоит из 250000 конечных объемов. Вдоль стенок построены призматические пристеночные слои для увеличения точности моделирования пограничного слоя. В качестве граничных условий на входе (inlet) было задано давление 1.12 кПа, а на выходе (outlet) – давление 0.98 кПа [3].

Модель смеси. В качестве начального состояния вся расчетная область заполнена водой. С некоторого (начального) момента времени со входа в участок кишки поступает смесь воды

(*)А.П. Корчагин, alexandr.korchagin16@gmail.com

(70%) и желчи (30%). Желчь имеет плотность ρ = 1014 кг/м^3 и кинематическую вязкость ν = 0.008 МПа·с [3].

Конечно-элементная модель. Геометрическая модель стенки кишки имеет форму трубы с внутренним диаметром 30 мм и толщиной стенки 2 мм (рис. 2). Граничными условиями выступают жесткие заделки с двух краев.

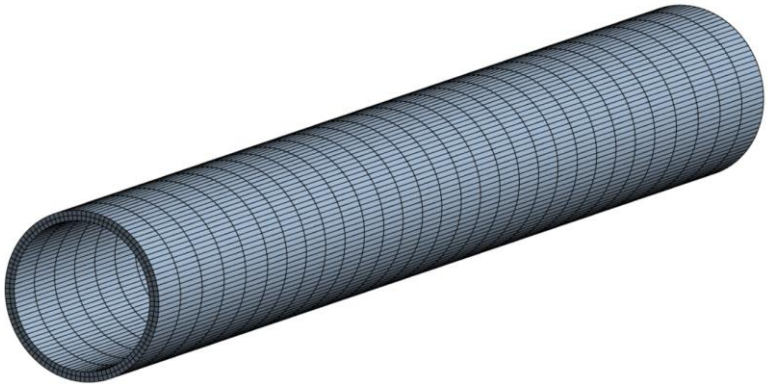


Рис. 2. Конечно-элементная модель стенки участка ДПК

Для моделирования материала стенки кишечника выбрана гиперупругая модель Муни-Ривлина [4] с параметрами c_{10} = 18.68 кПа и c_{01} = 2.7e-7 кПа, определяющая энергию деформации тела в единице объема:

$$W = c_{10}[\bar{I}_1 - 3] + c_{01}[\bar{I}_2 - 3] + \frac{1}{d}[J-1]^2, \quad (1)$$

где W – упругий потенциал; c_{10}, c_{01} – уточняющие коэффициенты; $\bar{I}_i$ – инварианты правого тензора деформации Коши-Грина.

Перистальтическое движение. Моделирования перистальтического движения стенки возможно несколькими способами. В данной работе движение стенки задается приложением перемещений, которые имеют синусоидальный характер и могут быть записаны по формуле [3]:

$$H(z,t) = A\,sin\left(\frac{2\pi}{\lambda}(z-ct)\right), \quad (2)$$

где z – продольная координата; A = 5 мм – амплитуда волны; c = 20 мм/с – скорость волны; λ = 80 мм – длина волны.

Результаты моделирования. Проведен расчет течения смеси желчи и воды с учетом перистальтического движения стенок кишки методом Fluid-Structure Interaction [5]. Картина распространения желчи по участку ДПК изображена на рис. 3.

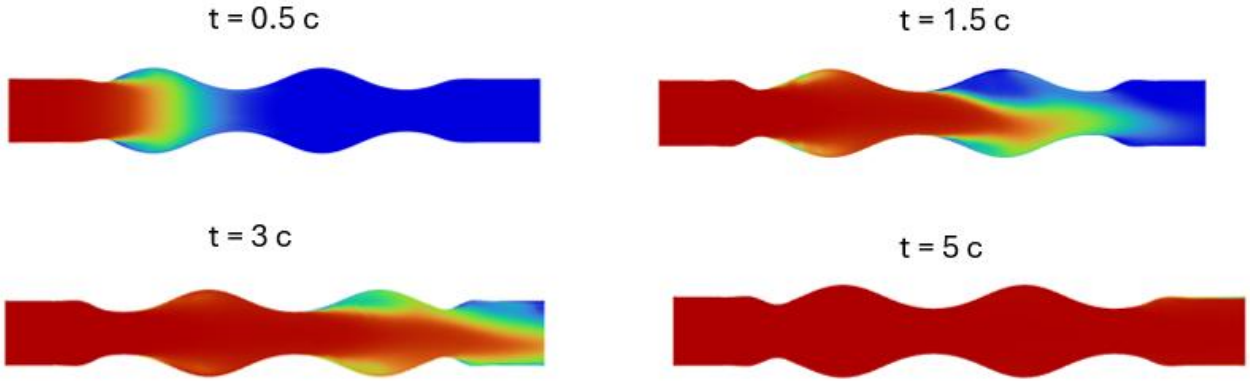


Рис. 3. Смешивание желчи (красное) с водой (синее) с течением времени

По характеру распространения желчи на рассматриваемом участке можно сделать вывод о том, что из-за наличия перистальтического движения стенок смешивание желчи с водой происходит неравномерно.

В результате расчета также получены поля скоростей на участке ДПК для разных моментов времени (рис. 4).

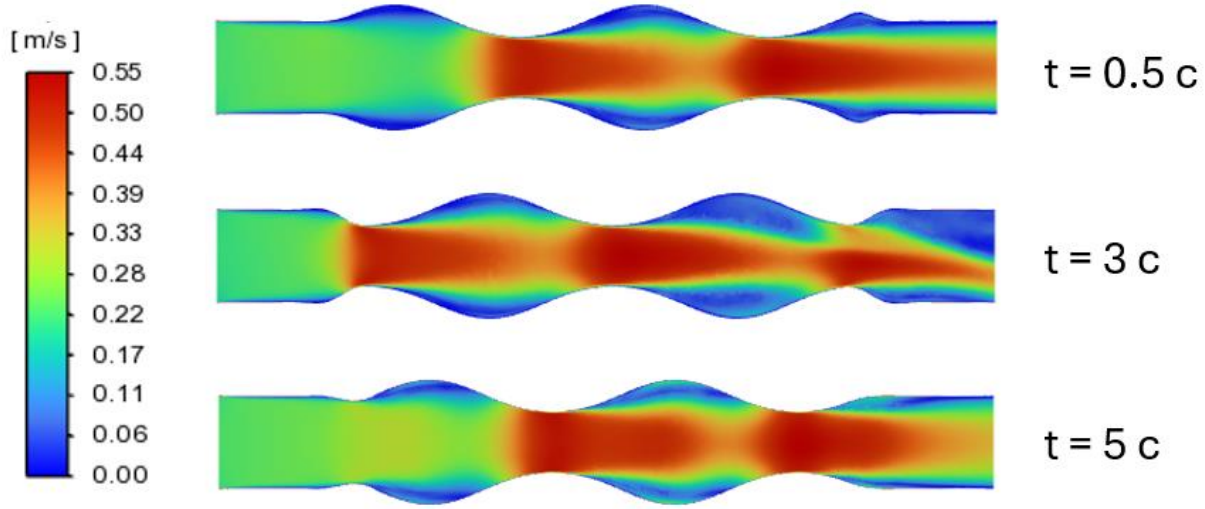


Рис. 4. Изменения в поле скорости с течением времени

Из полученных полей скорости можно заметить, что смешивание желчи с водой влияет на поля скорости, изменяя профиль распределения скорости в месте смешивания.

Заключение. В результате проведенной работы получено численное решение течения желчи в участке двенадцатиперстной кишки с учетом перистальтического движения стенок. Получена картина распространения желчи и полей скорости внутри двенадцатиперстной кишки с течением времени. Построенная модель может быть использована для моделирования хирургических вмешательств, связанных с эндобилиарной системой человека. Использование модели послужит повышению эффективности и безопасности операций, улучшения качества жизни пациентов и снижения риска осложнений.

ЛИТЕРАТУРА

1. Охотников А.О., Рахман М., Антонова О.В., Охотников О.И. Анализ динамики потока содержимого двенадцатиперстной кишки при перистальтическом движении ее стенки // Неделя науки ФизМех: сборник материалов Всероссийской научной конференции. – 2024. – С. 124-126.

2. Sinnott M.D., Cleary P.W., Harrison S.M. Peristaltic transport of a particulate suspension in the small intestine // Applied Mathematical Modelling. – 2017. – Vol. 44. – P. 143-159.

3. Kuchumov A. Biomechanical modelling of bile flow in the biliary system // MATEC Web of Conferences. – 2018. – Vol. 145. – P.15

4. Bellini C., Glass P., Sitti M., Di Martino E.S. Biaxial mechanical modeling of the small intestine // Journal of the Mechanical Behavior of Biomedical Materials. – 2011. – Vol. 4, No. 8. – P. 1727-1740.

5. ANSYS Workbench 17 User's Guide. – Canonsburg: ANSYS, Inc., 2016.

УДК 539.3

Н.А. Кабин, О.В. Антонова
Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого(*)

ПРИМЕНЕНИЕ МОДЕЛИ МАТЕРИАЛА ОГДЕНА ДЛЯ ОПИСАНИЯ МЕХАНИЧЕСКОГО ПОВЕДЕНИЯ МИТРАЛЬНОГО КЛАПАНА

Введение. Работа посвящена исследованию особенностей применения гиперупругой модели Огдена для описания поведения митрального клапана при помощи методов математического моделирования. Изучено влияние порядка модели Огдена и ее параметров на напряженно-деформированное состояние клапана. Полученные в ходе данной работы результаты могут быть полезны для разработки новых, более эффективных методов лечения заболеваний сердца и улучшения результатов хирургических вмешательств.

Геометрическая модель. В данной работе использовалась оболочечная модель митрального клапана без учета влияния хорд, представленная на рис. 1.

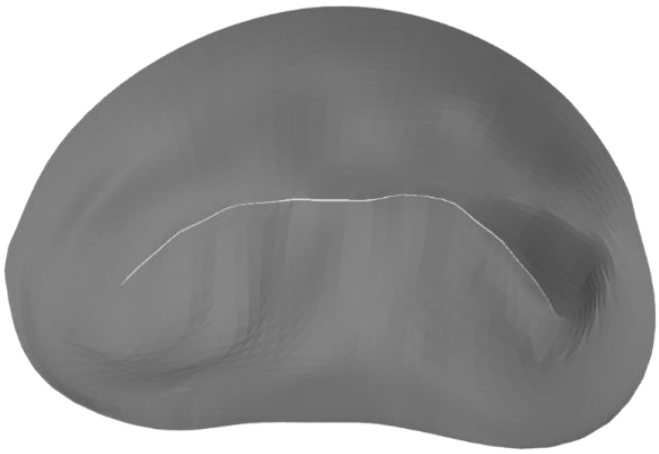


Рис. 1. Оболочечная модель митрального клапана

На основе данной геометрии была построена конечно-элементная оболочечная модель, состоящая из 2397 элементов первого порядка. Толщина оболочки принята равной 1.4 мм [1].

Модель материала. В работе использовался гиперупругий материала Огдена первого, второго и третьего порядков. Энергетический потенциал деформации Огдена выражается через главные растяжения. В программном комплексе ABAQUS используется следующая формулировка [2,3]: $U = \sum_{i=1}^{N} \frac{2\mu_i}{\alpha_i^2}\left(\bar{\lambda}_1^{\alpha_i} + \bar{\lambda}_2^{\alpha_i} + \bar{\lambda}_3^{\alpha_i} - 3 \right) + \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{D_i}(J_{el} - 1)^{2i}$, где $\bar{\lambda}_i = J^{-\frac{1}{3}}\lambda_i \rightarrow \bar{\lambda}_1\bar{\lambda}_2\bar{\lambda}_3 = 1$. Параметры модели материала Огдена, используемые для анализа влияния порядка модели, приведены в табл. 1.

Табл. 1. Параметры материалов Огдена разных порядков, используемы в расчетах [4]

Порядок модели Огдена	μ_1	α_1	μ_2	α_2	μ_3	α_3
1	17.824	17.808	-	-	-	-
2	17.824	17.808	17.660	17.797	-	-
3	17.824	17.808	17.660	17.797	17.592	17.768

(*) Н.А. Кабин, kabinnick@gmail.com

Граничные условия. В качестве граничных условий был задан запрет на перемещение узлов кольцевого пространства митрального клапана, а также задано распределенное давление по всей поверхности клапана, равное 10 кПа.

Результаты численного моделирования. Одним из ключевых вопросов являлась оценка влияния порядка материала Огдена на напряженно-деформированное состояние клапана. Сравнение проводилось при помощи оценки максимальных значений эквивалентных по Мизесу напряжений. График, иллюстрирующий зависимость, представлен рис. 2.

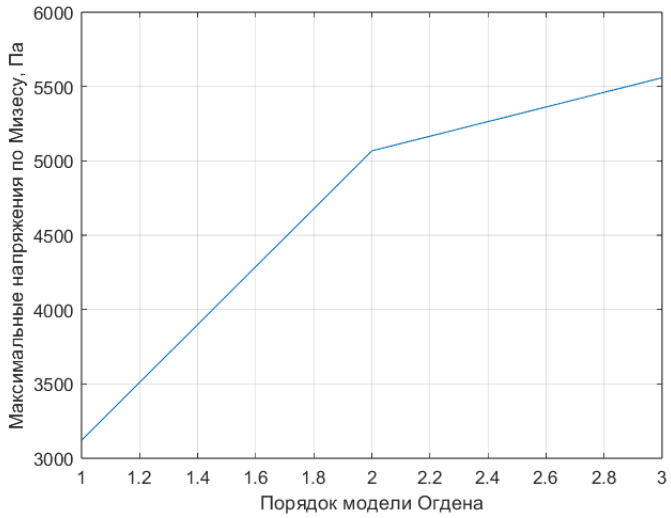


Рис. 2. Зависимость максимальных напряжений по Мизесу от порядка модели материала Огдена

Можем видеть, что при повышении порядка модели материала Огдена значение максимальных напряжений в митральном клапане увеличивается. Различие между первым и вторым порядком составляет 38.5 %, между вторым и третьим – 9 %. Для дальнейшего анализа чувствительности модели митрального клапана к параметрам материала за основу была выбрана математическая модель материала Огдена 2го порядка.

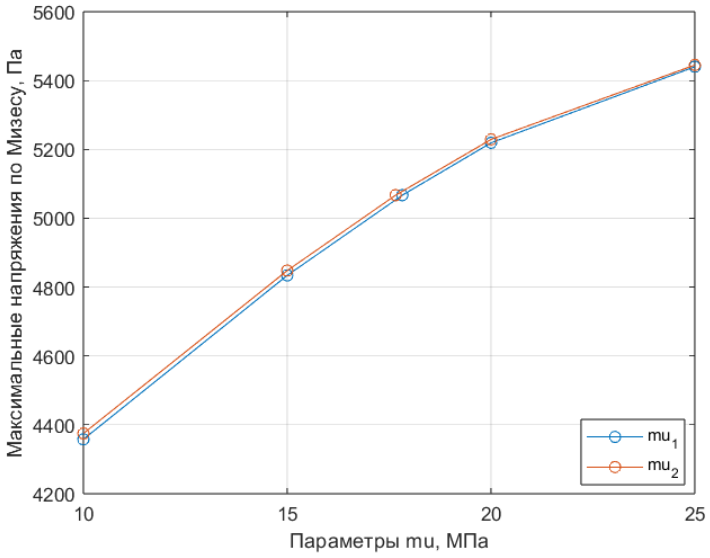


Рис. 3. Сравнение напряжений при варьировании параметров μ_1 и μ_2

На рис. 3 показано, как изменяются максимальные напряжения по Мизесу в зависимости от варьирования параметров μ_i. Видно, что обе кривые, μ_1 и μ_2, имеют схожую форму и показывают тенденцию к увеличению максимальных напряжений по Мизесу по мере роста параметров μ_i.

При этом, на протяжении всего графика, значения напряжений на кривой μ_2 немного выше, чем на кривой μ_1, но разницу между ними можно считать практически незначительной.

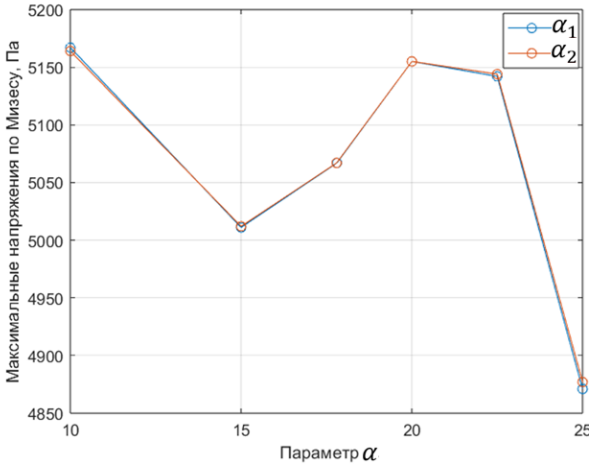


Рис. 4. Сравнение напряжений при варьировании параметров α_1 и α_2

На рис. 4 показано, как изменяются максимальные напряжения по Мизесу в зависимости от варьирования параметров α_i. Видно, что, как и в случае с μ_1 и μ_2 – кривые α_1 и α_2 демонстрируют схожее поведение при варьировании параметров α_i. Однако, в отличие от влияния значений параметров μ_i ,можно видеть, что влияние параметров α_i. имеют сложную нелинейную структуру с промежутками резкого роста – [17.8,20], и с промежутками резкого падения – [22.5,25].

Выводы. Таким образом, при использовании материала Огдена, крайне важно получить корректное значение параметров α_i, поскольку неправильный подбор значений параметров может значительно повлиять на результат. При этом влияние ошибки в задании параметров μ_i является менее критичным.

Дальнейшие исследования. В дальнейшем будет построена модель митрального клапана с хордами, а также проведено сравнение анизотропной гиперупругой модели материала Хользафеля-Гассер-Огдена с изотропной гиперупругой моделью материала Огдена.

ЛИТЕРАТУРА

1. Xu C., Brinster C.J., Jassar A.S., Vergnat M., Eperjesi T.J., Gorman R.C., Gorman J.H. 3rd, Jackson B.M. A novel approach to in vivo mitral valve stress analysis // American Journal of Physiology-Heart and Circulatory Physiology. – 2010. – Vol. 299, No. 6. – P.1790-1794.

2. Ogden R.W. Large Deformation Isotropic Elasticity – On the Correlation of Theory and Experiment for Incompressible Rubberlike Solids // Proceedings of the Royal Society of London. Series A, Mathematical and Physical Sciences. – 1972. – Vol. 326, No. 1567. – P. 565-584.

3. Abaqus Analysis User's Guide, Version 6.14. – Providence: Dassault Systèmes, 2014.

4. Zuo K., Pham T., Li K., Martin C., He Z., Sun W. Characterization of biomechanical properties of aged human and ovine mitral valve chordae tendineae // Journal of the Mechanical Behavior of Biomedical Materials. – 2016. – Vol. 62. – P. 607-618.

УДК 612.133

О.О. Мочалова, Я.А. Гатаулин, Е.М. Смирнов
Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого(*)

ЧИСЛЕННОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ ТЕЧЕНИЯ КРОВЕИМИТИРУЮЩЕЙ ЖИДКОСТИ В МОДЕЛЯХ ТИПОВЫХ КОНФИГУРАЦИЙ ПРИ ЭКСТРААНАТОМИЧЕСКОМ ШУНТИРОВАНИИ

Введение. Окклюзия общей подвздошной артерии (ОПА) возникает по разным причинам, среди которых чаще всего встречаются атеросклероз и образование тромба. Закрытие просвета ОПА вызывает тяжелую недостаточность кровоснабжения ноги, приводя к серьезным осложнениям. До сих пор одним из проверенных способов сохранить конечность служит процедура шунтирования. Однако ввиду индивидуальных особенностей пациента всегда актуален вопрос о выборе шунта и способа его имплантации. Численное моделирование кровотока в сосудистых конфигурациях, включающих тот или иной шунт, может стать эффективным инструментом, помогающим врачу выбрать оптимальный способ шунтирования.

Целью работы является исследование кровотока в сосудистых конфигурациях после операции бедренно-бедренного шунтирования и получение знаний, значимых для повышения эффективности шунтирования.

Постановка задачи. В работе рассматривается модель области бифуркации брюшной аорты (БА) с перекрестным бедренно-бедренным шунтом (ПББШ). Движение кровеимитирующей жидкости моделируется как ламинарное и стационарное, с входным расходом, соответствующим типичному максимальному значению за сердечный цикл.

Для модели бифуркации БА с четырьмя подвздошными артериями (ПА) и ПББШ рассмотрены три варианта шунта, устанавливаемого для восстановления кровотока в окклюзированной правой ОПА, а именно: С- и S-образный шунты и С-образный под углом 90° (рис. 1). На рис.1. показаны также соответствующие данным моделям КТ-ангиограммы после операции [1].

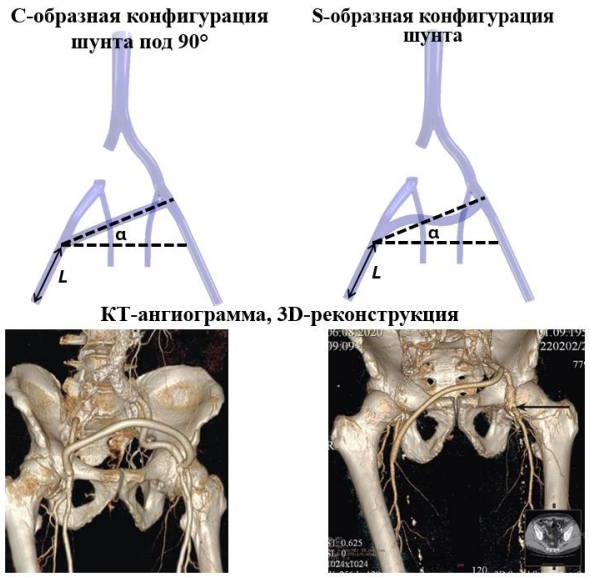


Рис. 1. Исследуемые модели сосудов с окклюзией правой ОПА и КТ-ангиограммы.

(*) О.О. Мочалова, m_lova_ola@mail.ru

Диаметр каждого из шунтов равен диаметру наружных подвздошных артерий (НПА). С-образный шунт под 90° расположен перпендикулярно плоскости НПА. Два других шунта лежат в плоскости НПА.

На входной границе задавалась равномерное распределение скорости, как и в случае модели здоровой бифуркации (обстоятельное исследование течения в модели здоровой бифуркации БА с подвздошными артериями проводилось в работе [2]). На выходных границах ветвей русла давление задавалось как функция местного расхода: $P_i = R_i Q_i$. Коэффициенты пропорциональности R_i определялись из расчета течения в здоровой бифуркации с предписанными расходами на выходных границах, с вычислениями по формуле: $R_i = \frac{P_i - P_{\text{ЛНПА}}}{Q_i}$, где Q_i и P_i– расход и давление жидкости на выходе i, $P_{\text{ЛНПА}}$ – давление на выходе левой НПА.

Вычислительные аспекты. Решались трехмерные уравнения Навье–Стокса. Численное интегрирование проводилось по методу конечных объемов в пакете ANSYS CFX со вторым порядком точности аппроксимации конвективных потоков. Расчетные сетки построены в ICEM CFD. Расчетная сетка содержала около 6 млн ячеек, в основном тетраэдальных, имела 6 призматических слоев у стенки. Сетка выбрана по результатам теста на сеточную сходимость.

Результаты расчетов. В случае здорового сосудистого русла течение в сосудах ниже по потоку от бифуркации брюшной аорты характеризуется преимущественно двухвихревой структурой вторичного (поперечного) течения [2]. В моделях с шунтом возникают свои особенности. Вместе с тем, поля скорости в моделях с различными протезами во многом похожи, поэтому ниже представлены результаты лишь для случая С-образного шунта под 90°. Проведенные исследования показывают, что указанный тип протеза, из трех сравниваемых, дает лучшие показатели по проходимости шунта и (меньшему) риску возникновения «опасных» зон.

По сравнению с течением за здоровой бифуркацией БА, в модели с шунтом скорость потока существенно меньше в правых ПА, но при этом возрастает максимальная скорость в левых ПА. В показанных на рис. 2 сечениях 1, 9, 10 и 11 линии тока поперечного течения практически идентичны полученным в [2] для модели здоровой бифуркации БА с подвздошными артериями. Однако в сечениях С-образного шунта под 90° присутствует лишь один вихрь (кроме первого сечения), центр которого смещен к стенке и смещается против часовой стрелки вниз по потоку. Для S-образного протеза наблюдается более сложная вихревая структура с формированием до четырех вихрей.

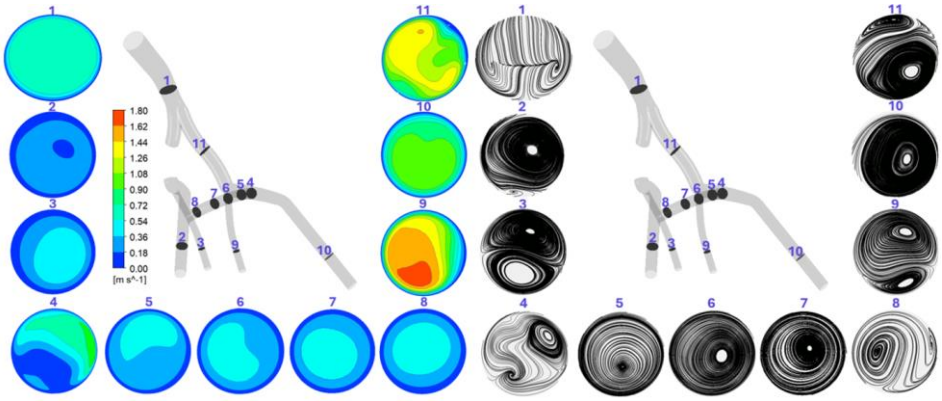


Рис. 2. Распределение модуля скорости и линии тока в поперечных сечениях модели с С-образным шунтом под 90º

В левой части рис. 3 показаны картины пространственных линий тока, по которым можно заключить, что правые НПА и ВПА потенциально подвержены большему риску образованию тромбов (там образуются участки с замедленным потоком). По левым частям

русла поток идет с большей скоростью, чем в случае модели здоровой БА. В области анастомоза правой НПА формируется зона обратного течения. Дистальнее анастомоза по правой НПА идет закрученный поток (рис. 2). Отметим также, что наибольшая по размерам зона обратного течения в области анастомоза правой НПА образуется в случае S-образного шунта.

Справа на рис. 3 приведены картины, иллюстрирующие отдельные особенности распределения сдвигового напряжения на стенке (WSS). Вблизи дистального конца шунта преобладают малые сдвиговые напряжения, что обусловлено отрывом потока. Для разных конфигураций протезов размеры зон с низкими значениями WSS количественно существенно отличаются (табл. 1). На проксимальном конце шунта относительно большую область занимают высокие сдвиговые напряжения на стенке. Однако здесь есть и «вкрапления» низких сдвиговых напряжений, но занимаемая ими площадь незначительна.

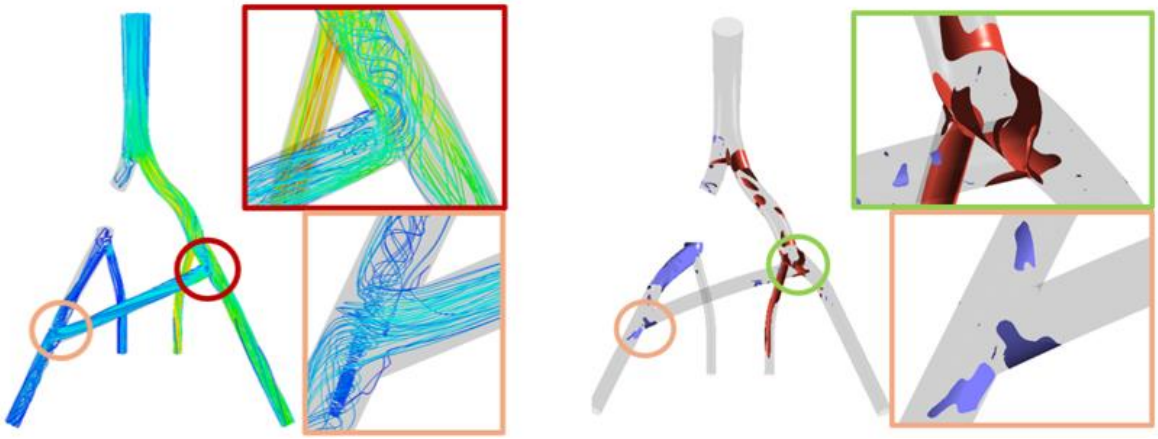


Рис. 3. Трехмерные линии тока в модели бифуркации БА при ПББШ с С-образным шунтом и сдвиговое напряжения на стенке (синим показаны WSS<0.5 Па, красным – WSS>15 Па)

Табл.1. Площади зон низкого и высокого сдвигового напряжения в области анастомозов

Конфигурация шунта	Площадь зоны низкого сдвигового напряжения на стенках (мм^2)	Площадь зоны высокого сдвигового напряжения на стенках (мм^2)
С-образная	214	239
С-образная под 90°	84	238
S-образная	112	270

Заключение. По результатам вариантных расчетов выявлены следующие важные особенности течения кровеимитирующей жидкости в моделях экстраанатомических шунтов: в области соединения шунта с правой НПА преобладают низкие сдвиговые напряжения, обусловленные отрывом потока и формированием рециркуляционных зон; в случае установки С-образного шунта под 90° область низких значений сдвиговых напряжений менее выражена, чем для S-образной конфигурации шунта.

Расчеты проводились с использованием ресурсов СКЦ «Политехнический» (scc.spbstu.ru).

ЛИТЕРАТУРА

1. Пинчук О.В., Кохан Е.П., Образцов А.В., Богатырев А.Р., Жариков С.Б. Экстраанатомическое перекрестное бедренно-бедренное шунтирование // Ангиология и сосудистая хирургия. – 2022. – Т. 28, № 1. – С. 94-103.

2. Синицына Д.Э. Расчетно-экспериментальное моделирование трехмерного кровотока в бифуркации брюшной аорты: дис. ... канд. физ.-мат. наук: 1.1.9. Механика жидкости, газа и плазмы. – Санкт-Петербург: СПбПУ, 2024. – 195 с.

УДК 612.133

Я.В. Жулего, Я.А. Гатаулин, Е.М. Смирнов
Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого(*)

ЧИСЛЕННОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ СТРУКТУРЫ ТРЕХМЕРНОГО ТЕЧЕНИЯ В МОДЕЛИ АРТЕРИОВЕНОЗНОЙ ФИСТУЛЫ

Хронической почечной недостаточностью (ХПН) страдают свыше 850 млн человек в мире, что ведет к высокому уровню смертности и большим затратам на лечение данной болезни. Гемодиализ – метод лечения ХПН с использованием специальных аппаратов и фильтров, которые очищают кровь пациента вне тела. Гемодиализ имеет множество осложнений, одним из которых является тромбообразование в артериовенозной фистуле – соединении артерии и вены.

Для прогнозирования возможных мест тромбообразования можно использовать численные методы моделирования [1,2,3], которые позволяют оценить «опасные зоны» и понять структуру потока в артериовенозной фистуле. Целью данной работы является исследование гидродинамических процессов в модели артериовенозной фистулы с радиоцефальной анастомозной конфигурацией (соединение головной вены и лучевой артерии), найти «опасные зоны» внутри фистулы – с повышенным риском тромбообразования.

Исследуется течение в радиоцефальной фистуле типа “конец в бок”, где конец артерии пришивают к боковой стенке вены (Рис.1). Модель состоит из артерии – трубки диаметром D_1, вены – трубки диаметром D_2=1.25D_1 и их соединения переменного диаметра. В дистальной части лучевой артерии (Вход-1) задается постоянный расход Q_1, а в проксимальной части лучевой артерии (Вход-2) расход Q_2=2.6Q_1. На входах задавался параболический профиль скорости. На стенках ставились условия прилипания и непроницаемости, на выходе – нулевое редуцированное давление.

Расчеты проводились по методу прямого численного моделирования (DNS) для числа Рейнольдса $Re_{s^*} = \frac{\rho D^* U^*}{\mu} = 1560$, построенного по среднерасходной скорости U^* и диаметру $D^* \approx D_1$ в сечении s^*, где происходит соединение потоков. Данное число Рейнольдса соответствует физиологии (диаметр D*= 6мм, скорость U*=1.16 м/с, плотность ρ=1098 кг/м^3, вязкость $\mu = 0.0049$ Па · с). Расчеты проведены с применением программного комплекса ANSYS CFX.

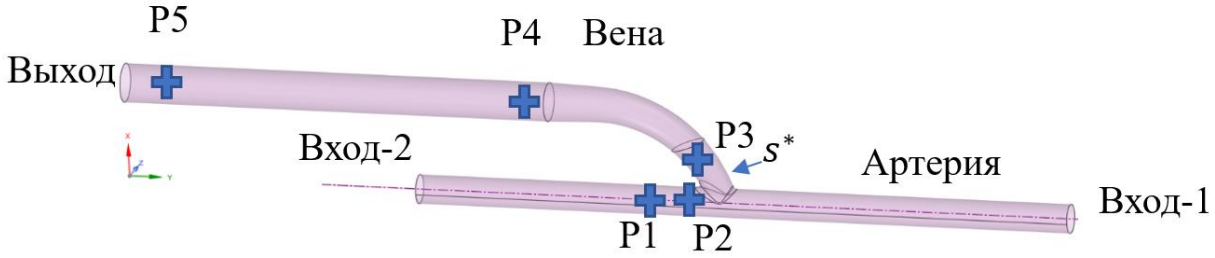


Рис. 1. Модель артериовенозной фистулы с указанием положений точек мониторинга

(*) Я.В. Жулего, ya@zhulego.ru

Расчетная сетка построена с использованием программного модуля ANSYS ICEM CFD. Общее количество элементов составило 10.5 млн. Высота первой пристенной ячейки составила $2.6 \cdot 10^{-3} D^*$. Безразмерный шаг по времени $\Delta t = 9.5 \cdot 10^{-3} \frac{D^*}{U^*}$, при этом число Куранта не превышало 0.6. Использовалась схема второго порядка точности для расчета конвективных слагаемых - Central Differencing.

На рис.2 представлены отдельные результаты расчетов, иллюстрирующие структуру течения. Область повышенной скорости наблюдается у внешней стенки в области соединения, области существенно пониженной скорости находятся у внутренней стенки поворота и сразу за поворотом (рис. 1а). В области поворота возникает разномасштабное вихревое течение (рис. 1б), наиболее интенсивное вихревое движение наблюдается в середине поворота, далее вниз по потоку интенсивность вихревого движения уменьшается. Исходя из анализа картины линий тока (рис. 1в), можно заключить, что имеются три рециркуляционные зоны: на нижней стенке артерии в области соединения двух сосудов, на внешней стенке в начале поворота и на нижней стенке вены за поворотом. Отмеченные места соответствуют зонам пониженных сдвиговых напряжений на стенке (WSS) (рис. 1г).

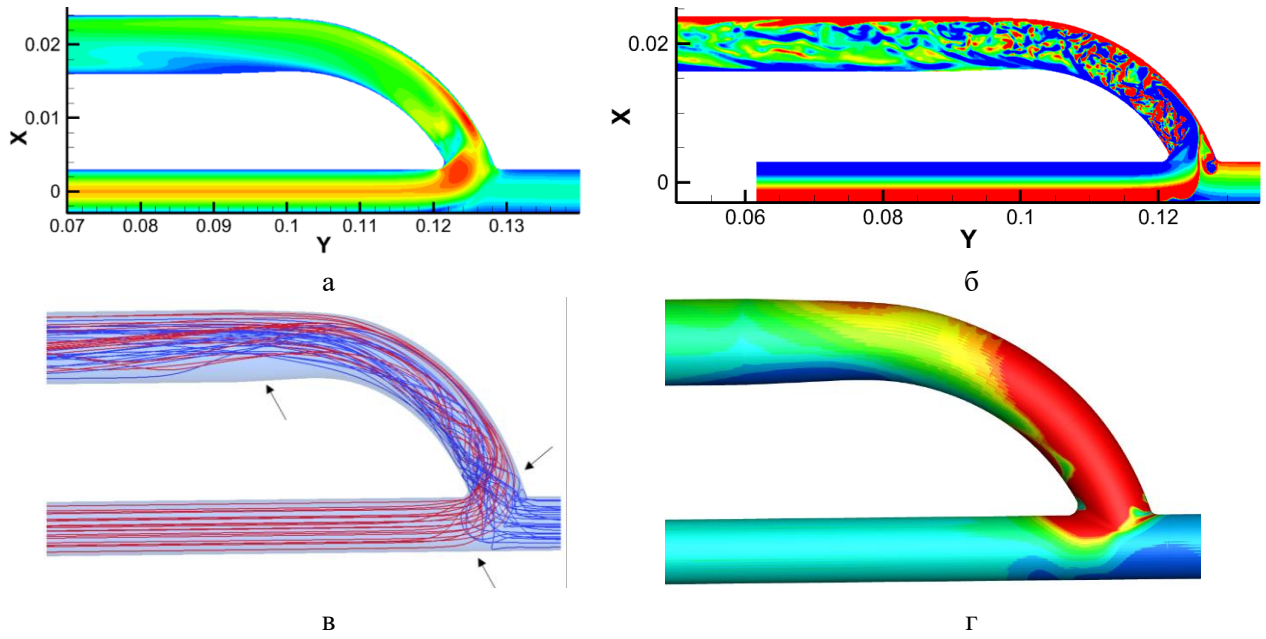


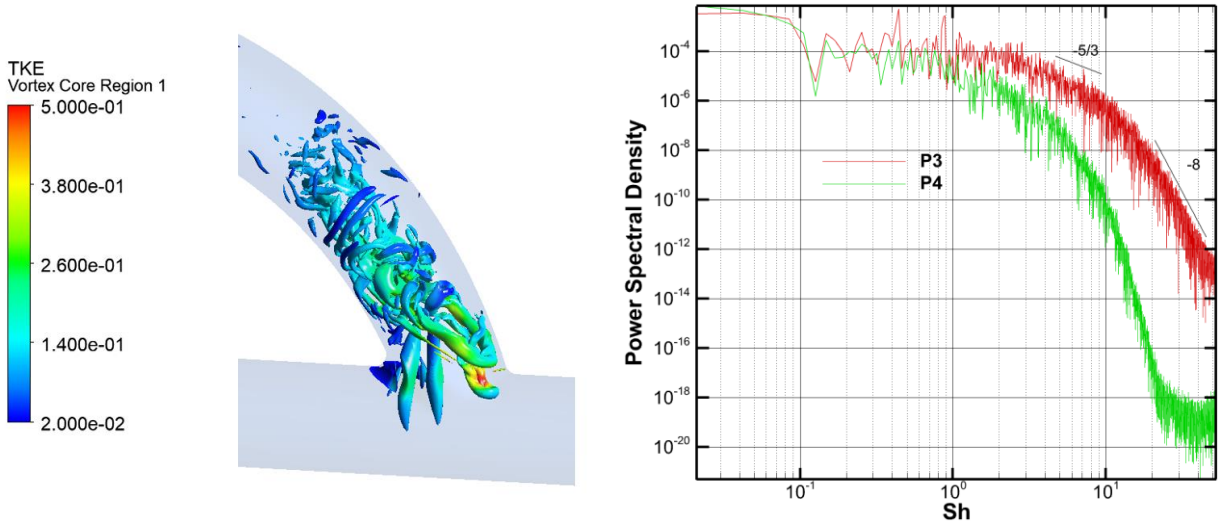
Рис. 2. Осредненное по времени поле скорости (а); мгновенное поле z компоненты завихренности (б); линии тока (красный цвет – идущие от входа 2, синий цвет – от входа 1) (в), распределение осредненного коэффициента трения на стенке (г)

На рис. 3 приведены отдельные характеристики пульсационного движения. По рис. 3а можно видеть, что в месте слияния двух потоков возникает локальная турбулентность с разномасштабными вихревыми структурами. Наибольшие безразмерные значения кинетической энергии турбулентности (TKE), составляющие около 0.6, наблюдаются у внешней стенки в начале поворота. Кинетическая энергия пульсаций постепенно вырождается вниз по потоку от поворота.

Для анализа частотных спектров пульсаций были выбраны пять точек мониторинга (рис.1, крестики): две – до поворота (P1 и P2), две в повороте (P3 и P4) и одна за поворотом (P5). Анализ показал, что в точке P1 поток практически стационарный, перед поворотом (P2) появляются регулярные колебания, в самом повороте (P3, P4) возникают хаотические интенсивные пульсации и на достаточном удалении от поворота (P5) течение

реламинаризуется. Число Струхаля регулярных колебаний в точке P2 составило $Sh = \frac{fD^*}{U^*} = 0.42$.

Спектральные плотности мощности пульсаций скорости в точках мониторинга P3 и P4, расположенных в повороте, иллюстрируются на рис. 3б. Спектр для точки P3 содержит участок с наклоном, близким к 5/3, что говорит о наличии турбулентного каскада энергии.



а б

Рис. 3. Изоповерхности Q – критерия, окрашенные по значениям TKE (а), спектральные плотности мощности пульсаций скорости в двух точках в области поворота (б).

В литературе указывается, что значения сдвиговых напряжений на стенке (WSS) меньшие, чем 1 Па, ведут к таким осложнениям как тромбообразование [4]. В случае задания набора размерных параметров, в совокупности давших $Re_{s^*} = 1560$, «критической» величине WSS = 1 Па соответствует значение коэффициента трения $C_f = 0.0014$. На рис. 4 показаны зоны, в которых $C_f < 0.0014$. общая площадь зон составила $S \approx 2.3S^*$.

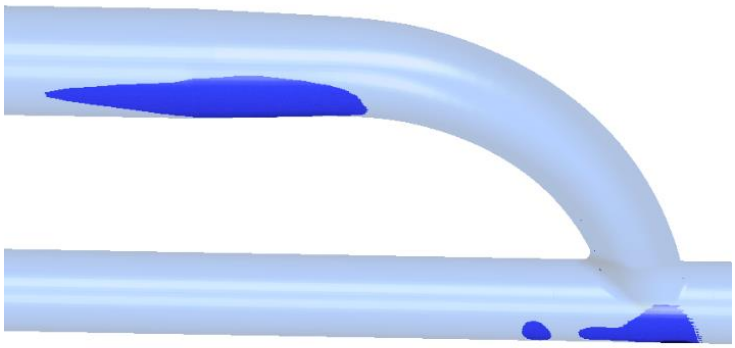


Рис. 4. Визуализация зон пониженных значений коэффициента трения

Результаты расчетов согласуются с литературными данными [4], согласно которым, наиболее опасные в отношении тромбообразования зоны находятся на нижней стенке артерии в области соединения потоков и на нижней стенке вены за поворотом.

Результаты получены при использовании ресурсов СКЦ «Политехнический» (http://www. scc.spbstu.ru).

ЛИТЕРАТУРА
1. Oliveira F., Bessa K., Moreira R. Comparison of flow patterns in the radiocephalic arteriovenous fistula through in vitro and in silico study // Engenharia Térmica (Thermal Engineering). – 2015. – Vol. 14, No. 2. – P. 7-11.
2. Hyde-Linaker G., Barientos P., Stoumpos S. Patient-specific computational haemodynamics associated with surgical creation of an arteriovenous fistula // Medical Engineering & Physics. – 2022. – Vol. 105. – P.12.
3. Ene-Iordache B., Remuzzi A. Disturbed flow in radial-cephalic arteriovenous fistulae for haemodialysis: low and oscillating shear stress locates the sites of stenosis // Nephrology Dialysis Transplantation. – 2012. – Vol. 27. – P. 358-368.
4. Zhou M., Yu Y., Chen R., Liu X., Hu Y., Ma Z., Gao L., Jian W., Wang L. Wall shear stress and its role in atherosclerosis // Frontiers in Cardiovascular Medicine. – 2023. – Vol. 10. – P.11.

УДК 612.133

Е.И. Кокшарова[1], А.Д. Юхнев[1], Е.М. Смирнов[1], В.А. Рева[2]
[1]Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого(*)
[2]Военно-медицинская академия им. С.М. Кирова

ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ СТРУКТУРЫ ТЕЧЕНИЯ В МОДЕЛИ ВРЕМЕННОГО ПРОТЕЗА КРОВЕНОСНОГО СОСУДА ИЗОГНУТОЙ ФОРМЫ

Введение. Для восстановления разрывов магистральных кровеносных сосудов при доставке раненых в госпиталь используют временные протезы, изогнутые в форме петли [1]. Данная форма обеспечивает надежность соединения протеза с сосудом во время любых случайных движений поврежденных конечностей. Однако использование временных протезов приводит к существенному отклонению от физиологического течения, что может вызывать ряд осложнений, ключевым из которых является тромбообразование. Детальное изучение структуры потока внутри временного протеза необходимо для разработки методов предотвращения тромбозов. Недавно было проведено численное исследование течений в моделях таких протезов, направленное на выявление оптимальной конфигурации протеза [2] и улучшение формы его входной кромки [3]. Целью настоящей работы является экспериментальное исследование структуры течения на начальном участке модели временного протеза кровеносного сосуда изогнутой формы.

Модель временного протеза. Разработка экспериментальной модели основывалась на сведениях о том, что на практике используются временные протезы разных внутренних диаметров: d = 2,6; 3,3; 3,6; 4,8 мм, и что наиболее часто травмируются лучевая артерия (среднее значение внутреннего диаметра D = 3 мм) и бедренная артерия (D = 8 мм); в обеих артериях характерная, максимальная за сердечный цикл скорость кровотока достигает 70 см/с [4]. В совокупности, с учетом данных о плотности и вязкости крови, это позволило оценить диапазон возможных «практических» значений числа Рейнольдса Re_{max}, построенного по максимальной скорости и внутреннему диаметру протеза. Это диапазон, как следует из табл. 1, оценивается значениями Re_{max} = 220-3500.

Для экспериментального исследования модель временного протеза была увеличена по размерам в 3,6 раз относительно реального прототипа внутренним диаметром 3,6 мм; при этом диаметр бедренной артерии-«прототипа» был увеличен в 4 раза (см. Табл.1). В качестве рабочей жидкости в экспериментах использовалась вода. Диапазон значений среднерасходной скорости в модели временного протеза определился, исходя из приведенного выше диапазона значений Re_{max}.

(*) Е.И. Кокшарова, lenak12321@yandex.ru

Табл. 1. Параметры течения во временных протезах разного диаметра (при максимальной скорости кровотока в травмированной артерии 70 см/с) и в экспериментальной модели

Протез в лучевой артерии, D = 3 мм				Протез в бедренной артерии, D = 8 мм				Модель протеза 4:1, D = 32 мм			
$\rho = 1040$ кг/м^3 и $\mu = 0{,}00375$ Па · с								$\rho = 1000$ кг/м^3 и $\mu = 0{,}001$ Па · с			
d, мм	D/d	V_{max}, см/с	Re_{max}	d, мм	D/d	V_{max}, см/с	Re_{max}	d, мм	D/d	V, см/с	Re
2,6	1,2	90	670	3,6	2,2	350	3500	13	2,5	2-27	200-3500
3,3	0,9	60	530	4,8	1,7	220	2700				

Экспериментальная установка. Разработан и сконструирован стенд (рис. 1а), в котором место соединения сосуда с протезом смоделировано внезапным сужением, временный протез представлен изогнутой прозрачной трубкой. Выше по потоку от внезапного расширения установлен конфузор. Геометрические параметры рабочего участка (рис. 1б): внутренний диаметр модели сосуда D = 32 мм, временного протеза d = 13 мм, радиус кривизны петли R = 80 мм, коэффициент кривизны K ≈ d/2R ≈ 1/12. Установленный датчик электромагнитного расходомера позволяет измерять расходные характеристики, а регулятор расхода – варьировать их. Для визуализации структуры течения применялась методика добавления алюминиевой пудры в рабочую жидкость (концентрация 1 г/л). Для получения фото- и видеорегистраций рассматриваемое сечение прозрачной трубки подсвечивалось лазерным ножом толщиной 2 мм. Во избежание оптических искажений рабочая трубка помещалась в прозрачный прямоугольный резервуар с водой. Расстановка оборудования для реализации методики показана на рис. 1 б,в.

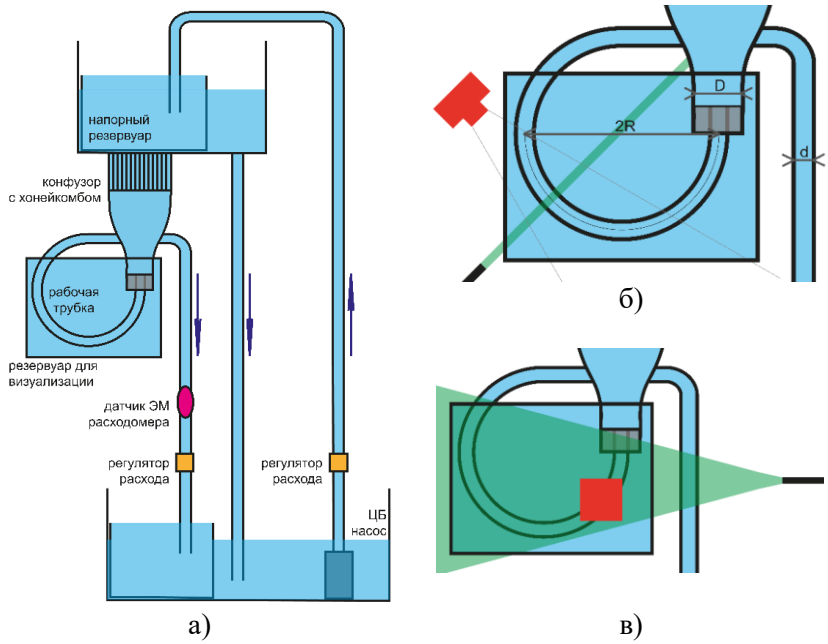


Рис. 1. Экспериментальная установка: а) схема стенда; расположение фотоаппарата и плоскости лазерного ножа при визуализации структуры течения в модели протеза изогнутой формы в поперечном (б) и продольном (в) сечениях

Результаты эксперимента. Визуализация трехмерного течения в модели временного протеза в условиях внезапного сужения потока при входе в протез показала, что уже на расстоянии 2 калибров ниже по потоку от входа при ламинарном режиме течения (Re = 200-

450) отчетливо наблюдается смещение линий тока к внешней стенке (рис. 2а). Это обусловлено сносящим действием поперечного течения, которое быстро развивается вследствие наличия кольцевой зоны низких скоростей, формирующейся за негладким входом: в этой зоне имеет место дисбаланс центробежной силы и градиента давления у боковых стенок. Поперечное (вторичное) течение представляет собой двухвихревое, симметричное относительно плоскости изгиба течение, вихри Дина (рис. 2б,в).

Оценка скорости вторичного потока V_t осуществлялась по длине треков частиц. Установлено, что на одном и том же расстоянии от входа при разных числах Рейнольдса длины треков отличаются, что свидетельствует о росте скорости вторичного течения при увеличении Re (рис. 2б,в). Измерения показали также, что для одного и того же числа Рейнольдса на разном расстоянии от входа длины треков увеличиваются; это позволяет сделать вывод об увеличении интенсивности вихрей Дина вниз по потоку (скорость вторичного потока увеличивается примерно в 2 раза). При Re = 200 на расстоянии 14 калибров ниже по потоку от внезапного сужения скорость вторичного течения, равная V_t = 1,0 см/с, составляет 30% от величины продольной составляющей скорости V_z = 3,6 см/с, что указывает на высокую интенсивность вихрей Дина. Отметим, что продольная составляющая скорости оценивалась по расходу: V_z = Q/S, где Q – измеренный расход, S – площадь поперечного сечения модели временного протеза.



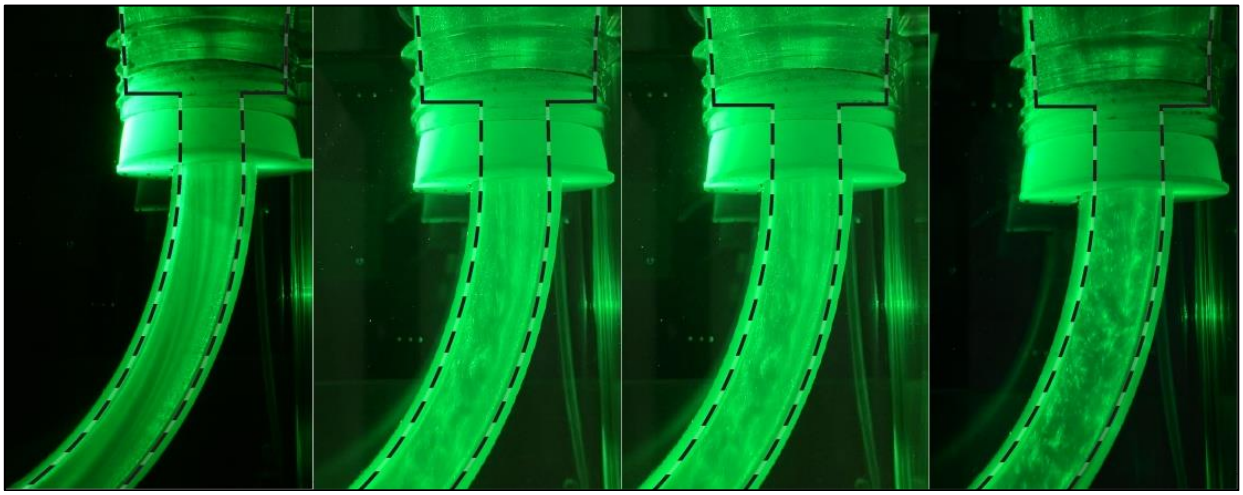
5 калибров; выдержка 0,1 с; Re = 200 б)

5 калибров; выдержка 0,1 с; Re = 450 в)

Re = 200 а)

Рис. 2. Структура течения на входе модели временного протеза: за внезапным сужением в центральном продольном сечении (а) и в поперечных сечениях (б, в)

На следующем этапе с применением той же методики исследовался ламинарно-турбулентный переход в модели входного участка временного протеза. Было установлено, что при Re ≤ 500 поток ламинарный, с выраженным смещением линий тока к внешней стенке (рис. 3). При приближении числа Re к значению 1000 наблюдается возникновение мелких вихрей и общих неоднородностей потока. При дальнейшем увеличении Re интенсивность вихрей увеличивается, развивается турбулентность (рис. 3). Соответственно, в протезах бедренной артерии в фазу максимального расхода может реализовываться достаточно развитое турбулентное течение.



Re = 200 Re = 1000 Re = 1300 Re = 2500

Рис. 3. Изменения в структуре течения на входе модели временного протеза (в центральном продольном сечении) с ростом числа Рейнольдса (штриховыми линиями отмечены внутренние стенки моделей сосуда и временного протеза)

Заключение. Внезапное сужение в месте соединения кровеносного сосуда с изогнутым протезом приводит к быстрому формированию и развитию поперечного течения и, соответственно, быстрому смещению зоны высоких осевых скоростей к внешней стенке. Во временных протезах при числах Рейнольдса порядка нескольких сотен в фазу максимального расхода реализуется ламинарный режим течения. Турбулентные образования возникают при достижении Re значения 1000 на расстоянии около двух калибров вниз по потоку от входа. При увеличении числа Re место, где возникают турбулентные образования, смещается вверх по потоку, и при $Re \geq 2000$ в пределах всего начального участка наблюдается достаточно развитое турбулентное течение. Турбулентный режим течения может реализоваться во временных протезах бедренной артерии в фазу максимального расхода, при $Re_{max} > 2000$. Во временных протезах лучевой артерии турбулентный режим кровотока не может возникать вследствие относительной малости внутреннего диаметра (характерного числа Рейольдса).

ЛИТЕРАТУРА

1. Ибрагимов Р.И., Рева В.А. Временное протезирование магистральных сосудов конечностей: современный опыт и дальнейшие перспективы применения на передовых этапах медицинской эвакуации // Известия Российской военно-медицинской академии. – 2022. – Т. 41, № 2. – С.127–131. DOI: 10.17816/rmmar104694.

2. Синицына Д.Э., Юрина А.В., Рева В.А. Численное моделирование кровотока в моделях временных протезов кровеносных сосудов // Неделя науки ФизМех: сб. материалов Всерос. науч. конф., 1–5 апр. 2024 г. – СПб.: ПОЛИТЕХ-ПРЕСС, 2024. – С. 130–133.

3. Синицына Д.Э., Юрина А.В., Рева В.А. Влияние закругления входной кромки временного сосудистого протеза на характеристики кровотока // Неделя науки ФизМех: сб. материалов Всерос. науч. конф., 1–5 апр. 2024 г. – СПб.: ПОЛИТЕХ-ПРЕСС, 2024. – С. 134–137.

4. Куликов В.П. Основы ультразвукового исследования сосудов. – М.: Медицина, 2015. – 208 с.

СЕКЦИЯ "МНОГОМАСШТАБНОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ПЕРЕНОСА И КОНВЕРСИИ ЭНЕРГИИ"

УДК 534.13

М.А. Алешина, Е.Ф. Грекова
Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого(*)

ПРЕЛОМЛЕНИЕ В УПРУГОЙ ЛИНЕЙНОЙ РЕДУЦИРОВАННОЙ ИЗОТРОПНОЙ СРЕДЕ КОССЕРА НА УПРУГОМ ОСНОВАНИИ

Введение. Редуцированная среда сложной структуры – это упругий континуум, который может быть представлен в виде «несущего континуума» и связанного с ним «распределенного динамического гасителя». Упругая энергия среды зависит от всех возможных видов деформации «несущего континуума», но не зависит от деформации «распределенного динамического гасителя», а лишь от его обобщенного смещения. Е.Ф. Грековой [1] было показано, что такие изотропные континуумы проявляют свойства акустических метаматериалов, то есть обладают либо запрещенными зонами, где волны не распространяются, либо падающими участками дисперсионных кривых при положительной фазовой скорости. Считается, что такие участки соответствуют зонам отрицательного преломления, как в случае электромагнитных метаматериалов [2], однако доказательства этого факта для сред сложной структуры произвольного вида нет в литературе.

В качестве примера такой среды предложена линейная упругая редуцированная изотропная среда Коссера [3] на трансляционно-упругом основании. В этой среде тела-точки могут совершать независимые повороты (соответствующие «распределенному динамическому гасителю») и перемещения (соответствующие «несущему континууму»), причем упругая энергия деформации не зависит от градиента поворота, но зависит от поворота тела-точки относительно окрестности.

Вывод дисперсионных соотношений. Для линейной редуцированной изотропной среды Коссера на упругом основании с плотностью ρ и плотностью шарового тензора инерции $\rho I\boldsymbol{E}$ уравнения динамики в перемещениях принимают следующий вид:

$$(\lambda+2\mu)\nabla\nabla\cdot\boldsymbol{u_3}-(\mu+\alpha)\nabla\times(\nabla\times\boldsymbol{u_3})+2\alpha\nabla\times\boldsymbol{\theta}-\mathrm{C}\boldsymbol{u_3}=\rho\ddot{\boldsymbol{u}}_{\boldsymbol{3}},$$

$$2\alpha\nabla\times\boldsymbol{u_3}-4\alpha\boldsymbol{\theta}=\rho I\ddot{\boldsymbol{\theta}},$$

где λ,μ – параметры Ламе, описывающие упругие свойства среды, α-упругий модуль Коссера, $\mathbf{u_3}$ – перемещение, $\boldsymbol{\theta}$ – поворот, C – модуль упругости основания.

Ищем решение в виде: $\boldsymbol{u_3}=\boldsymbol{u_{30}}e^{i(\omega t-\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{r})},\boldsymbol{\theta}=\boldsymbol{\theta_0}e^{i(\omega t-\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{r})}$.

В случае, если $\omega\neq\omega_0,\omega_0^2=\frac{4\alpha}{\rho I}$, мы получаем решение $\boldsymbol{\theta}=\boldsymbol{\theta_0}e^{i\omega_0 t}$, а в противном случае получим $\boldsymbol{\theta}=-\frac{i\omega_0^2}{2(\omega_0^2-\omega^2)}\mathbf{m}\times\boldsymbol{u_3}$. Для продольной волны имеем $m^2=\frac{\omega^2\rho-C}{\lambda+2\mu}$, а для поперечной: $m^2=\frac{\rho}{\mu+\alpha}\frac{(\omega^2-\omega_1^2)(\omega^2-\omega_0^2)}{(\omega^2-\omega_2^2)}$, где $\omega_1^2=\frac{c}{\rho},\omega_2^2=\frac{\mu\omega_0^2}{\mu+\alpha}=\frac{4\alpha\mu}{(\mu+\alpha)\rho I}$.

На рис. 1 представлены дисперсионные кривые поперечных волн.

Равенство перемещений на границе. Расположим начало системы координат на границе раздела классической среды (сверху) и среды Коссера (снизу). Вектор нормали к границе направим в классическую среду, тогда на границе $\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{N}=\mathbf{0}$. Равенство перемещений примет следующий вид:

$$\boldsymbol{u_{p1}}e^{i(\omega_1 t-\boldsymbol{l_p}\cdot\boldsymbol{r})}+\boldsymbol{u_{p2}}e^{i(\omega_2 t-\boldsymbol{p_p}\cdot\boldsymbol{r})}+\boldsymbol{u_{s2}}e^{i(\omega_3 t-\boldsymbol{p_s}\cdot\boldsymbol{r})}=\boldsymbol{u_{p3}}e^{i(\omega_4 t-\boldsymbol{m_p}\cdot\boldsymbol{r})}+\boldsymbol{u_{s3}}e^{i(\omega_5 t-\boldsymbol{m_s}\cdot\boldsymbol{r})},$$

(*) М.А. Алешина, aleshina.rita00@gmail.com

где $\boldsymbol{u_{p1}, u_{p2}, u_{p3}}$ – амплитуды падающей, отраженной и преломленной продольных волн соответственно, $\boldsymbol{u_{s2}}$, $\boldsymbol{u_{s3}}$ — отраженной и преломленной поперечных волн, $\boldsymbol{l_p}$, $\boldsymbol{p_p}$, $\boldsymbol{p_s}$, $\boldsymbol{m_p}$, $\boldsymbol{m_s}$ – соответствующие волновые векторы.

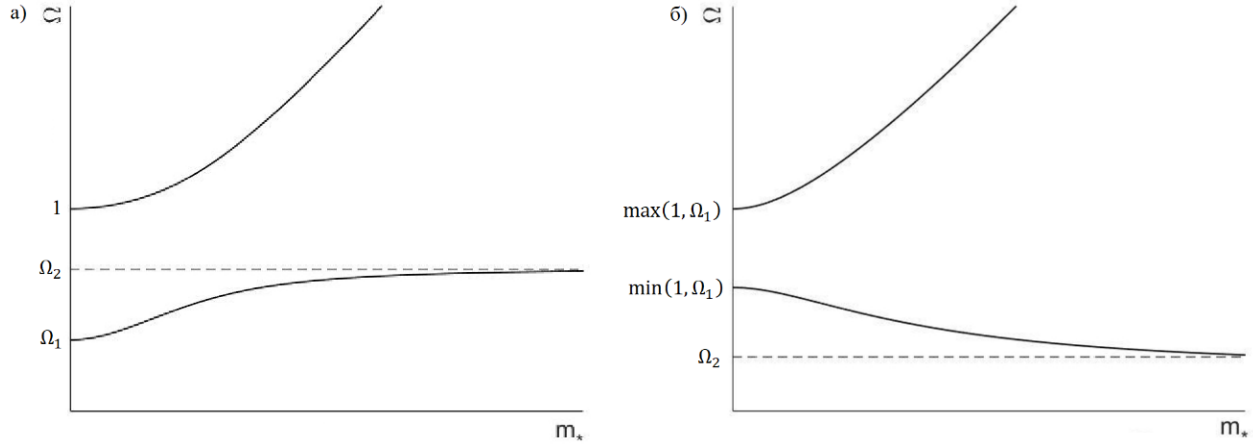


Рис. 1. Дисперсионные кривые поперечной волны

а) в случае $\Omega_2 > \Omega_1$ б) в случае $\Omega_2 < \Omega_1$ $\left(\Omega_1^2 = \frac{\omega_1^2}{\omega_0^2},\ \Omega_2^2 = \frac{\omega_2^2}{\omega_0^2}\ , m_*^2 = \frac{m^2 c_{s\alpha}^2}{\omega_0^2}\right)$

Условие согласования фаз: для того, чтобы равенство выполнялось на границе в любой момент времени и в любой точке на поверхности границы, показатели экспонент должны быть одинаковыми. Это означает, что частоты и проекции волновых векторов на поверхность границы должны быть одинаковыми для всех волн (падающей, отраженной и преломленной).

$\omega_1 t = \omega_2 t = \omega_3 t = \omega_4 t = \omega_5 t = \omega t$ и $\boldsymbol{l_p \cdot r = p_p \cdot r = p_s \cdot r = m_p \cdot r = m_s \cdot r}$

Отсюда получим выражения, связывающие угол падения с углами отражения и преломления:

$$\sin\theta = \sin\theta^*,$$

где θ – угол падения продольной волны, θ^* – угол отражения продольной волны

$$\frac{\sin\theta}{\sin\theta'} = \frac{p_s}{l_p} = \sqrt{\frac{\lambda_{cl} + 2\mu_{cl}}{\mu_{cl}}},$$

где θ' – угол отражения поперечной волны.

Также получим:

$$\frac{\sin\theta}{\sin\varphi} = \frac{m_p}{l_p} = \frac{f(\omega)}{l_p}, \qquad \frac{\sin\theta}{\sin\varphi'} = \frac{m_s}{l_p} = \frac{g(\omega)}{l_p},$$

где φ и φ' – углы преломления продольной и поперечной волн соответственно.

Сокращая экспоненты, получим:

$$\boldsymbol{u_{p1} + u_{p2} + u_{s2} = u_{p3} + u_{s3}}.$$

Домножим полученное уравнение скалярно на $\boldsymbol{N}$ и на $\boldsymbol{r}$:

$$-u_{p_1} cos\,\theta + u_{p_2} cos\,\theta + u_{s_2} sin\,\theta' = -u_{p_3} cos\,\varphi + u_{s_3} sin\,\varphi', \quad (3)$$

$$u_{p_1} sin\,\theta + u_{p_2} sin\,\theta - u_{s_2} cos\,\theta' = u_{p_3} sin\,\varphi + u_{s_3} cos\,\varphi'. \quad (4)$$

Равенство сил на границе. Тензор напряжений для редуцированной линейной изотропной среды Коссера имеет вид:

$$\boldsymbol{\tau} = \lambda\nabla \cdot \boldsymbol{u_3 E} + 2\mu\nabla\boldsymbol{u_3^S} + 2\alpha(\nabla\boldsymbol{u_3^A} + \boldsymbol{\theta} \times \boldsymbol{E}).$$

В среде Коссера распространяются продольная и поперечная волны: $\boldsymbol{u_3} = \boldsymbol{u_{p3}} e^{i(\omega t - \boldsymbol{m_p \cdot r})} + \boldsymbol{u_{s3}} e^{i(\omega t - \boldsymbol{m_s \cdot r})}$. Тензор напряжений классической среды:

$$\boldsymbol{\tau_{cl}} = \lambda_{cl}\nabla\cdot\boldsymbol{u_{cl}E} + 2\mu_{cl}\nabla\boldsymbol{u_{cl}^S},$$

где λ_{cl}, μ_{cl} – параметры Ламе, описывающие упругие свойства классической среды. В классической среде одновременно распространяются падающая продольная волна $\boldsymbol{u_{p1}}e^{i(\omega t-\boldsymbol{l_p}\cdot\boldsymbol{r})}$, а также отраженные продольная и поперечная волны $\boldsymbol{u_{p2}}e^{i(\omega t-\boldsymbol{p_p}\cdot\boldsymbol{r})} + \boldsymbol{u_{s2}}e^{i(\omega t-\boldsymbol{p_s}\cdot\boldsymbol{r})}$, поэтому $\boldsymbol{u_{cl}} = \boldsymbol{u_{p1}}e^{i(\omega t-\boldsymbol{l_p}\cdot\boldsymbol{r})} + \boldsymbol{u_{p2}}e^{i(\omega t-\boldsymbol{p_p}\cdot\boldsymbol{r})} + \boldsymbol{u_{s2}}e^{i(\omega t-\boldsymbol{p_s}\cdot\boldsymbol{r})}$. Запишем равенство сил на границе ($\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{N} = \boldsymbol{0}$):

$$\boldsymbol{N}\cdot\boldsymbol{\tau} = \boldsymbol{N}\cdot\boldsymbol{\tau_{cl}}.$$

Действительная часть: $\boldsymbol{N}\cdot(\boldsymbol{\theta}\times\boldsymbol{E}) = \boldsymbol{0}$; это означает, что повороты в среде осуществляются в плоскости, перпендикулярной вектору нормали.

Из мнимой части мы получаем:

$$-\mu_{cl}l_p\sin 2\theta\, u_{p_1} + \mu_{cl}p_p\sin 2\theta\, u_{p_2} - \mu_{cl}p_s\cos 2\theta' u_{s_2} = \\ = -\mu m_p\sin 2\varphi\, u_{p_3} - (\mu + \alpha\cos 2\varphi')m_s u_{s_3} \quad (5)$$

$$(\lambda_{cl} + 2\mu_{cl}\cos^2\theta)\ell_p u_{p_1} + (\lambda_{cl} + 2\mu_{cl}\cos^2\theta)p_p u_{p_2} + \mu_{cl}p_s\sin 2\theta' u_{s_2} = \\ = (\lambda + 2\mu\cos^2\varphi)m_p u_{p_3} - \mu\, m_s\sin 2\varphi'\, u_{s_3} \quad (6)$$

Вектор Умова-Пойнтинга. Рассмотрим продольную волну $\boldsymbol{u_3} = \boldsymbol{u_{p3}}e^{i(\omega t-\boldsymbol{m_p}\cdot\boldsymbol{r})}$; $\boldsymbol{v_3} = \frac{\partial\boldsymbol{u_3}}{\partial t} = i\omega\boldsymbol{u_3}$. Найдем усредненный вектор плотности потока энергии:

$$<\boldsymbol{J}>= -<\mathrm{Re}\,\boldsymbol{\tau}\cdot\mathrm{Re}\,\boldsymbol{v_3}>= \frac{1}{2}(\lambda+2\mu)u_{p3}^2\omega\boldsymbol{m_p}.$$

Теперь рассмотрим поперечную волну $\boldsymbol{u_3} = \boldsymbol{u_{s3}}e^{i(\omega t-\boldsymbol{m_s}\cdot\boldsymbol{r})}$. Вектор плотности потока энергии:

$$<\boldsymbol{J}>= -<\mathrm{Re}\,\boldsymbol{\tau}\cdot\mathrm{Re}\,\boldsymbol{v_3}>= \frac{1}{2}\left(\mu + \alpha\frac{\omega^2}{\omega^2-\omega_0^2}\right)u_{s3}^2\omega\boldsymbol{m_s}$$

Заметим, что если $\mu + \alpha\frac{\omega^2}{\omega^2-\omega_0^2} < 0$, но m_s вещественно, то вектор Умова-Пойнтинга и волновой вектор направлены в противоположные стороны. Это соответствует падающему участку дисперсионной кривой. Если энергия преломленной волны проникает в среду, необходимо выбрать $m_s < 0$. Тогда $\sin\varphi' < 0$, что соответствует отрицательному преломлению.

Выводы. Отрицательное преломление наблюдается только для поперечных волн определенных частот в случае, если $\Omega_2 < \Omega_1$ (сильные пружины основания, малая плотность, большой момент инерции, малый модуль упругости Коссера). Если $\omega < \omega_2$ или $\min(\omega_0,\omega_1) < \omega < \max(\omega_0,\omega_1)$, то волновое число m является комплексным; тогда волна не распространяется в пространстве, а затухает вблизи границы раздела, переноса энергии не происходит. Если $\omega_2 < \omega < \min(\omega_0,\omega_1)$, то для поперечной волны наблюдается отрицательное преломление:

$$\frac{\sin\theta}{\sin\varphi'} = \frac{m_s}{l_p} = -\sqrt{\frac{\rho}{\mu+\alpha}\cdot\frac{\rho_{cl}}{\lambda_{cl}+2\mu_{cl}}\frac{\omega^2(\omega^2-\omega_1^2)(\omega^2-\omega_0^2)}{(\omega^2-\omega_2^2)}}.$$

Если же $\omega > \max(\omega_0,\omega_1)$, угол преломления может быть найден из следующей формулы:

$$\frac{\sin\theta}{\sin\varphi'} = \frac{m_s}{l_p} = \sqrt{\frac{\rho}{\mu+\alpha}\cdot\frac{\rho_{cl}}{\lambda_{cl}+2\mu_{cl}}\frac{\omega^2(\omega^2-\omega_1^2)(\omega^2-\omega_0^2)}{(\omega^2-\omega_2^2)}}$$

Амплитуды колебаний могут быть найдены из СЛАУ (1) — (4).

ЛИТЕРАТУРА

1. Grekova E.F. Reduced enhanced elastic continua as acoustic metamaterials // Dynamical processes in generalized continua and structures. – 2019. – С. 253–268.

2. Веселаго В. Г. Электродинамика веществ с одновременно отрицательными значениями ε и μ //Успехи физических наук. – 1967. – Т. 92. – №. 7. – С. 517-526.
3. Schwartz L.M., Johnson D.L., Feng Sh. Vibrational modes in granular materials // Physical review letters. — 1984. — Vol. 52, no.10. — P.831.

УДК 534.13

П.С. Алферова[1], Е.Ф. Грекова[2,1]
[1]Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого(*)
[2]Институт проблем машиноведения РАН, Санкт-Петербург

РАСПРОСТРАНЕНИЕ ВОЛН В РЕДУЦИРОВАННОЙ СРЕДЕ КОССЕРА С УЧЕТОМ МАЛОЙ АНИЗОТРОПИИ ОСОБОГО ВИДА

Введение. Редуцированные среды Коссера – среды с вращательными степенями свободы, в которых есть сопротивление повороту частицы относительно континуума центров масс, но градиент поворота не вызывает напряжений. В изотропном линейном случае такая среда была предложена в [1]. Они применяются, в частности, для моделирования геосреды, композитов с включениями. Редуцированные среды Коссера являются акустическими метаматериалами с эффективным отрицательным упругим параметром в определенной зоне частот [2,3]. Такие материалы используют для звукоизоляции, акустической маскировки, фокусировки звука и защиты от вибраций.

При этом недостаточно исследовано распространение волн в подобных анизотропных средах. Особый интерес представляют собой волновые свойства сред с взаимосвязью поворотно-вихревой и трансляционной деформаций, отсутствующей в изотропном материале. Эта взаимосвязь влечет объемную деформацию под действием касательных напряжений и сдвиговую – при гидростатическом давлении, что характерно для сыпучих сред. Частный случай такой трансверсально-изотропной взаимосвязи рассмотрен в [3].

Цель и задачи исследования. Описать распространение свободных волн в редуцированной среде Коссера с учетом трансверсально-изотропной взаимосвязи общего вида между трансляционными и поворотными деформациями: получить дисперсионные соотношения, провести их асимптотический анализ для случая малой анизотропии.

Методы исследования: используются фундаментальные законы механики, прямое тензорное исчисление, асимптотический анализ дисперсионных кривых.

Уравнения динамики линейной редуцированной среды Коссера имеют вид [3]:

$$\nabla\cdot(\mathbf{C}\cdot\cdot\nabla\mathbf{u}^{\mathrm{s}})+\frac{1}{4}\nabla\times\left(\alpha\cdot(2\boldsymbol{\theta}-\nabla\times\mathbf{u})\right)+\nabla\cdot\left(\mathbf{S_k n_k}\cdot(2\boldsymbol{\theta}-\nabla\times\mathbf{u})\right)+$$
$$\nabla\times(\mathbf{n_k S_k}\cdot\cdot\nabla\mathbf{u}^{\mathrm{s}})+\rho\boldsymbol{F}=\rho\ddot{\mathbf{u}}$$
$$-\frac{1}{2}\boldsymbol{\alpha}\cdot(2\boldsymbol{\theta}-\nabla\times\mathbf{u})-2\nabla\mathbf{u}^{\mathbf{s}}\cdot\cdot\,\mathbf{S_k n_k}+\rho\boldsymbol{L}=\boldsymbol{I_0}\cdot\ddot{\boldsymbol{\theta}},$$

где введены следующие тензоры: упругости $\boldsymbol{C}$ (четвертого ранга), характеризующий сопротивление трансляционным деформациям**,** $\boldsymbol{\alpha}$ (второго ранга), ответственный за момент, возникающий при поворотно-вихревой деформации, $\boldsymbol{S_k n_k}$ (третьего ранга), отвечающий за перевязку между поворотно-вихревой и трансляционной деформациями. В изотропной среде последний равен нулю. В данной работе этот тензор принимается трансверсально-изотропным с осью симметрии $\mathbf{n}$: $\mathbf{S_k n_k}=N(\mathbf{E}+\xi\mathbf{nn})\mathbf{n}$. Такая анизотропия может возникать при осаждении сыпучей среды под действием силы тяжести. Тензоры упругости $\boldsymbol{C}$ и $\boldsymbol{\alpha}$ рассматриваются изотропными, так как в работе интересно увидеть влияние анизотропии

(*) П.С. Алферова, alfyorova.polina@yandex.ru

только от перевязочного члена: $\boldsymbol{\alpha} = 4\alpha\mathbf{E}$, $\mathrm{C} = \lambda\mathbf{EE} + 2\mu(\mathbf{i_m i_n})^s(\mathbf{i^m i^n})^s$. Тензор инерции шаровой: $I_0 = I\mathbf{E}$.

Результаты. Разыскивая решение уравнений динамики в виде плоских волн $\mathbf{u} = \mathbf{u_0}e^{i(\omega t+\mathbf{k}\cdot\mathbf{r})}, \boldsymbol{\theta} = \boldsymbol{\theta_0}e^{i(\omega t+\mathbf{k}\cdot\mathbf{r})}$, выражаем из баланса моментов $\boldsymbol{\theta_0}$ через $\boldsymbol{u_0}$:

$$\boldsymbol{\theta_0} = \frac{\omega_0^2}{\omega^2-\omega_0^2}\frac{i}{2}\left(-\mathbf{k}\times\mathbf{u_0} + \frac{1}{\alpha}N\mathbf{nk}\cdot\mathbf{u_0} + \frac{N\xi}{\alpha}\mathbf{nnn}\cdot\cdot\,\mathbf{ku_0}\right)$$

Подставив это выражение в баланс сил, получаем уравнение Кристоффеля

$$\left[\left(\rho\omega^2 - k^2(\lambda+2\mu)\right)\hat{\mathbf{k}}\hat{\mathbf{k}} + \left(\rho\omega^2 - \left(\mu + \alpha\frac{\omega^2}{\omega^2-\omega_0^2}\right)k^2\right)\left(\mathbf{E}-\hat{\mathbf{k}}\hat{\mathbf{k}}\right)\right.$$
$$- Nk^2\frac{\omega^2}{\omega^2-\omega_0^2}\left(\left(\hat{\mathbf{k}}\times\mathbf{n}\right)\hat{\mathbf{k}} + \hat{\mathbf{k}}\left(\hat{\mathbf{k}}\times\mathbf{n}\right) + \xi\left(\mathbf{n}\cdot\hat{\mathbf{k}}\right)\left[\left(\hat{\mathbf{k}}\times\mathbf{n}\right)\mathbf{n} + \mathbf{n}\left(\hat{\mathbf{k}}\times\mathbf{n}\right)\right]\right)$$
$$\left. - \frac{N^2k^2}{\alpha}\frac{\omega_0^2}{\omega^2-\omega_0^2}\left(\hat{\mathbf{k}}\hat{\mathbf{k}} + \xi\left(\mathbf{n}\cdot\hat{\mathbf{k}}\right)\hat{\mathbf{k}}\mathbf{n} + \xi\left(\mathbf{n}\cdot\hat{\mathbf{k}}\right)\mathbf{n}\hat{\mathbf{k}} + \xi^2\left(\hat{\mathbf{k}}\cdot\mathbf{n}\right)^2\mathbf{nn}\right)\right]\cdot\mathbf{u_0} = 0$$

Для нахождения дисперсионных соотношений в случае конечных параметров анизотропии приравняем определитель системы к нулю:

$$\frac{-N^2}{\mu^2}K^2\left(\frac{\mu}{\alpha}F_s\frac{1}{\Omega^2-1} + K^2\left(\frac{\Omega^2}{\Omega^2-1}\right)^2 s^2\right)\left(F_p\xi^2c^2s^2 + (1\pm\xi c^2)^2F_s\right) + F_pF_s^2 = 0$$

где K, Ω, F_s, F_p – нормированные k, ω, f_s, f_p соответственно

$$f_p = \omega^2 - k^2c_p^2, \quad f_s = \omega^2 - \frac{k^2}{\rho}\left(\mu + \alpha\frac{\omega^2}{\omega^2-\omega_0^2}\right), c_p^2 = \frac{\lambda+2\mu}{\rho}, c_s^2 = \frac{\mu}{\rho}$$
$$K = \frac{c_sk}{\omega_0}, \Omega = \frac{\omega}{\omega_0}, F_s = \frac{f_s}{\omega_0^2}, F_p = \frac{f_p}{\omega_0^2}, c = \mathbf{n}\cdot\hat{\mathbf{k}}, s = |\hat{\mathbf{k}}\times\mathbf{n}|$$

График дисперсионного соотношения для конечных анизотропных модулей построен по численным данным (рис. 1).

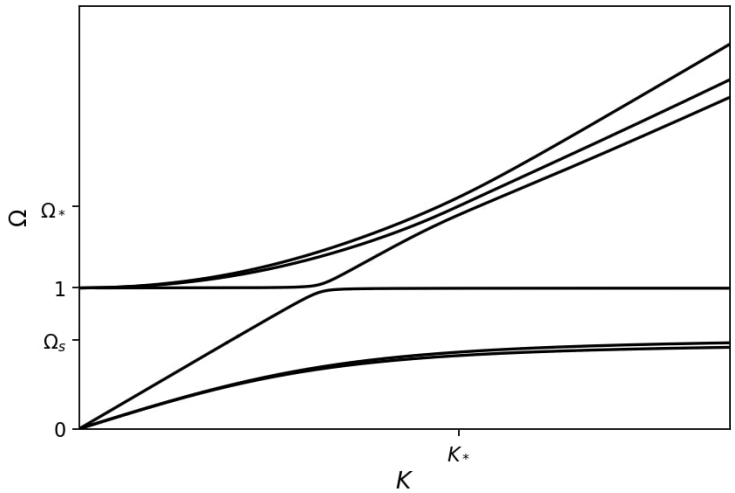


Рис. 1. Дисперсионные соотношения линейной редуцированной среды Коссера с трансверсально-изотропной взаимосвязью между поворотными и трансляционными деформациями

Найдены также асимптотические приближения для дисперсионных соотношений при малой анизотропии. В данной среде все волны являются смешанными. Вдали от точек пересечения парциальных дисперсионных кривых (при нулевой перевязке) малая анизотропия дает малую поправку к дисперсионным соотношениям, а вблизи этих точек качественно изменит ход кривых. Решение вблизи парциальной кривой продольной волны $f_p = 0$ таково:

$$K = K_p - \varepsilon\frac{\Omega\left(1+\xi c^2\right)^2c_s^3}{2c_p^3F_s\left(K_p,\Omega\right)}\left[\frac{\mu}{\alpha}F_s\left(K_p,\Omega\right)\frac{1}{\Omega^2-1} + \frac{c_s^2\Omega^2}{c_p^2}\left(\frac{\Omega^2}{\Omega^2-1}\right)^2 s^2\right], K_p = \frac{c_s\Omega}{c_p}, \varepsilon = \frac{N^2}{\mu^2}$$

Вблизи кривой поперечной волны $f_s = 0: K = K_s\left(1 \pm \varepsilon\frac{\Omega^2\xi cs^2}{2\left(\Omega^2\left(1+\frac{\alpha}{\mu}\right)-1\right)}\right)$, $K_s^2 = \frac{\Omega^2\left(\Omega^2-1\right)}{\Omega^2\left(1+\frac{\alpha}{\mu}\right)-1}, \varepsilon = \frac{N}{\mu}$

Формула верна вдали от частоты отсечки ω_0 и $\omega_s = \omega_0\sqrt{\frac{\mu}{\mu+\alpha}}$. Кривая, близкая к дисперсионной кривой поперечной волны, раздваивается. На высоких частотах различия скоростей – порядка параметра анизотропии $\frac{N}{\mu}$. Запрещенная зона для этой волны – интервал $\left[\frac{\mu\alpha+N^2\xi^2c^2s^2}{\alpha(\mu+\alpha)}; 1\right)$. Асимптотика вблизи частоты отсечки ω_0 будет рассмотрена в дальнейшем.

Решение вблизи точки пересечения парциальных дисперсионных кривых качественно меняется. Оно представлено на рис. 2.

$$-B\left[\left(\Omega_1 - K_1\frac{c_p}{c_s}\right)\xi^2c^2s^2 + A(1+\xi c^2)\left(\Omega_1 - K_1\frac{c_p}{Ac_s}\right)\right] + 4A^2\left(\Omega_1 - K_1\frac{c_p}{c_s}\right)\left(\Omega_1 - K_1\frac{c_p}{Ac_s}\right)^2 = 0$$

$\Omega = \Omega_* + \varepsilon\Omega_1, K = K_* + \varepsilon K_1, K_*$и Ω_* соответствуют значениям в точке пересечения

$$B = K_*^4\left(\frac{\Omega^2}{\Omega^2-1}\right)^2 s^2, A = 1 + \frac{K_*^2}{\Omega_*^2-1}\left[\frac{c_p^2}{c_s^2} + \frac{\alpha}{\mu}\right], \varepsilon = \frac{N}{\mu}$$

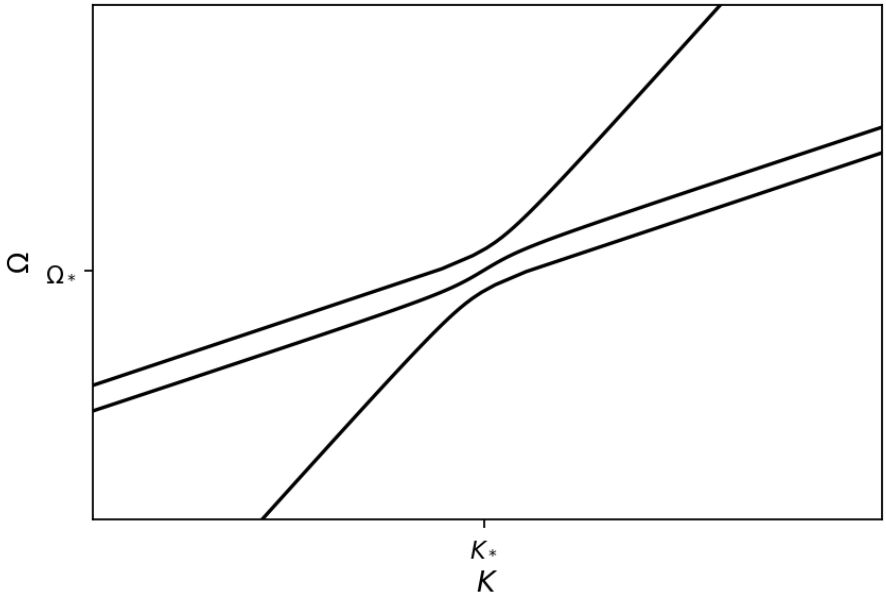


Рис. 2. Дисперсионные соотношения вблизи точки пересечения парциальных дисперсионных кривых при малой анизотропии

Вблизи точки пересечения парциальных дисперсионных кривых проходят три кривые, одна из которых близка к кривой поперечной волны в изотропном случае, а две другие – к гиперболе с центром в данной точке. Вблизи данной точки в двух последних волнах существенно представлены как трансляционная, так и поворотная составляющие. Средняя кривая соответствует волне, близкой к поперечной. Такие точки напоминают точки магнитоакустического резонанса. Вблизи них при помощи поворотного возмущения легко вызвать трансляционную волну и наоборот. Любая нелинейность будет критически важна именно в этом диапазоне частот.

ЛИТЕРАТУРА

1. Schwartz L.M., Johnson D.L., Feng Sh. Vibrational modes in granular materials // Physical review letters. — 1984. — Vol. 52, no.10. — P.831.

2. Grekova E. F. Nonlinear isotropic elastic reduced and full Cosserat media: waves and instabilities //Continuum Mechanics and Thermodynamics. – 2019. – Vol. 31. – №. 6. – P. 1805-1824.
3. Grekova E.F. Plane waves in the linear elastic reduced Cosserat medium with a finite axially symmetric coupling between volumetric and rotational strains // Mathematics and Mechanics of Solids. — 2016. — Vol. 21, no.1. —P.73–93.

УДК 534.11

Е.С. Бутузова[1], С.Д. Ляжков[1,2]
[1]Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого(*)
[2]Институт проблем машиноведения РАН

ПЕРЕНОС ТЕПЛОВОЙ ЭНЕРГИИ В ОДНОМЕРНОМ БЕСКОНЕЧНОМ ЛИНЕЙНОМ КРИСТАЛЛЕ НА УПРУГОМ ОСНОВАНИИ

Описание процессов переноса тепловой энергии в твердых телах является на сегодняшний день систематически изучаемой проблемой в области современной физики и тесно связано с задачей о распространении тепла на микро- и наноуровне, при котором закон Фурье нарушается (см., в частности, [1]). Теоретическое описание данных процессов находит практические приложения, обзор которых представлен в работе [2].

Рассмотрим бесконечную цепочку (одномерный кристалл), состоящую из частиц массой m, соединенных линейными пружинками жесткостью K и прикрепленную к линейному упругому основанию жесткостью c. Предполагая взаимодействие частиц только с ближайшими соседями, напишем уравнение динамики цепочки:

$$\ddot{u}_n = \omega_e^2(u_{n+1} - 2u_n + u_{n-1}) - \omega_{\text{cut}}^2 u_n, \quad n \in \mathbb{Z}, \tag{1}$$

где u_n – перемещение -ой частицы; $\omega_e \stackrel{\text{def}}{=} \sqrt{K/m}$ – элементарная частота колебаний атома; $\omega_{\text{cut}} \stackrel{\text{def}}{=} \sqrt{c/m}$ – нижняя частота отсечки. Начальные условия, предполагающие мгновенное возмущение в точке $n = 0$, запишем в виде:

$$u_n = 0, \qquad \dot{u}_n = v^0 \rho \delta_{n,0}, \qquad \langle \rho \rangle = 0, \qquad \langle \rho^2 \rangle = 1, \tag{2}$$

где v^0 – амплитуда начальной скорости возмущенной частицы; $\delta_{n,0}$ – символ Кронекера; ρ – случайное число с нулевым математическим ожиданием и единичной дисперсией.

С использованием прямого и дискретного преобразований Фурье запишем решение задачи (1-2) в виде [3]:

$$v_n = \frac{v^0}{2\pi} \int_0^{2\pi} \cos(\omega(\theta)t)\, e^{\mathrm{i}\theta n} \mathrm{d}\theta, \ \omega(\theta) \stackrel{\text{def}}{=} \sqrt{\omega_{\text{cut}}^2 + 4\omega_e^2 \sin^2 \frac{\theta}{2}}, \tag{3}$$

где $\omega(\theta)$ – дисперсионное соотношение для гармонической цепочки на упругом основании, соответствующее полосе пропускания; θ – безразмерное волновое число.

Тепловое состояние рассматриваемой системы будем описывать с помощью кинетической температуры, T_n, определяемой как

$$k_{\text{B}} T_n \stackrel{\text{def}}{=} m\langle v_n^2 \rangle, \tag{4}$$

где $\langle \dots \rangle$ – среднее по ансамблю. Целью настоящей работы является нахождение континуального решения для поля кинетической температуры, и для достижения этой цели будем следовать следующему плану:

(*) Е.С. Бутузова, eudokia@bk.ru

1. С использованием подхода Слепяна-Уизема [4,5], обобщенного на дискретные среды [6], строится асимптотика фундаментального решения (3) для скорости частицы на подвижном фронте. Для этого используется метод стационарной фазы [7].
2. С использованием подхода, предложенного в работе [6], выражение для квадрата главного вклада в асимптотику скорости частицы разделяется на «быструю» («осциллирующее» слагаемое) и «медленную» («неосциллирующее» слагаемое) составляющие.
3. Вводится непрерывная функция кинетической температуры $T(t,x)$ (здесь x – пространственная координата), такая, что $T(t,na) \equiv T_n$ (здесь a – длина межчастичной связи в недеформированном состоянии), и для нахождения которой используется уравнение (4), в правую часть которой подставляется квадрат главного вклада в асимптотику скорости частицы.

Следуя вышенаписанному алгоритму, получим следующее выражение для функции $T(t,x)$:

$$T(t,x) = T^{\mathrm{S}}(t,x) + T^{\mathrm{F}}(t,x), \tag{5}$$

$$T^{\mathrm{S}}(t,x) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\mathcal{A}H\left(\max v_g\, t - |x|\right)}{4\pi v_s t}\left(f_1\left(\frac{x}{v_s t}\right)^2 + f_2\left(\frac{x}{v_s t}\right)^2\right), \tag{6}$$

$$f_1(w) \stackrel{\text{def}}{=} \sqrt[4]{\frac{2v_s^2 + \omega_{\mathrm{cut}}^2 a^2 - 2w^2 v_s^2 - 2v_s\sqrt{v_s^2(1+w^4) - w^2(2v_s^2 + \omega_{\mathrm{cut}}^2 a^2)}}{v_s^2(1+w^4) - w^2(2v_s^2 + \omega_{\mathrm{cut}}^2 a^2)}}, \tag{7}$$

$$f_2(w) \stackrel{\text{def}}{=} \sqrt[4]{\frac{2v_s^2 + \omega_{\mathrm{cut}}^2 a^2 - 2w^2 v_s^2 + 2v_s\sqrt{v_s^2(1+w^4) - w^2(2v_s^2 + \omega_{\mathrm{cut}}^2 a^2)}}{v_s^2(1+w^4) - w^2(2v_s^2 + \omega_{\mathrm{cut}}^2 a^2)}}, \tag{8}$$

$$\begin{aligned} T^{\mathrm{F}}(t,x) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\mathcal{A}H\left(\max v_g\, t - |x|\right)}{4\pi v_s t}\Big(& f_1^2\cos(2\mathcal{W}_1 t) + f_2^2\cos(2\mathcal{W}_2 t) \\ &+ f_1 f_2\left(\cos\left((\mathcal{W}_1 + \mathcal{W}_2)t\right) + \sin\left((\mathcal{W}_1 - \mathcal{W}_2)t\right)\right)\Big) \end{aligned} \tag{9}$$

$$\mathcal{W}_{1,2}(w) \stackrel{\text{def}}{=} G_{1,2} - 2w\omega_e \arccos\left(\sqrt{w^2 + \frac{G_{2,1}^2 - \omega_{\mathrm{cut}}^2}{4\omega_e^2}}\right), \tag{10}$$

$$G_{1,2}(w) \stackrel{\text{def}}{=} \sqrt{2\omega_e^2 + \omega_{\mathrm{cut}}^2 - 2w^2\omega_e^2 \mp 2\omega_e\sqrt{\omega_e^2(1+w^4) - w^2(2\omega_e^2 + \omega_{\mathrm{cut}}^2)}}, \tag{11}$$

где $v_s \stackrel{\text{def}}{=} \omega_e a$ – скорость звука; $w = x/(v_s t)$; $\mathcal{A}$ – константа размерностью К·м; $H(x)$ – функция Хевисайда; $\max v_g$ – максимальная групповая скорость, определяемая выражением

$$\max v_g = \frac{v_s\left(\sqrt{4\omega_e^2 + \omega_{\mathrm{cut}}^2} - \omega_{\mathrm{cut}}\right)}{2\omega_e}. \tag{12}$$

Выражение для кинетической температуры $T(t,x)$, определяемое формулой (5), будет именоваться *дискретно-континуальным* решением, а выражение $T^{\mathrm{S}}(t,x)$, определяемое формулой (6), – *континуальным* решением. Для проверки вышеназванных решений проводится численное интегрирование уравнений (1) в безразмерном виде с начальными условиями (2) методом leap-frog. В ходе численного моделирования использовались параметры

$$N = 600, \quad \omega_e \Delta t = 0.01, \quad \omega_{\mathrm{cut}}/\omega_e = 1.25\,, \tag{13}$$

где N – число частиц, Δt – шаг по времени, и периодические граничные условия.

Сравнение аналитических выкладок настоящей работы представлено на рис. 1,2.

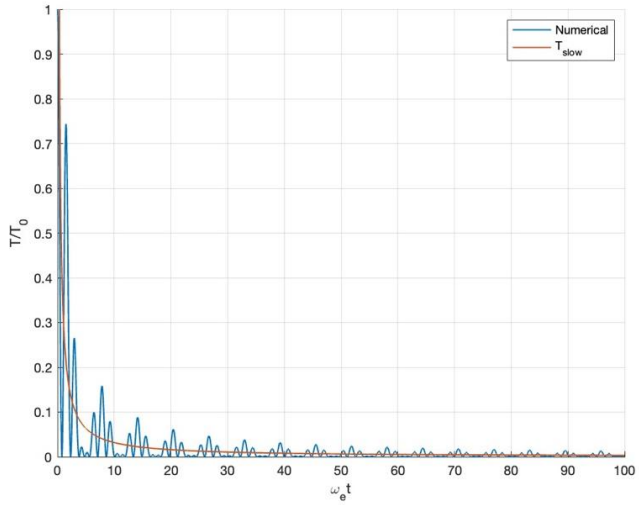


Рис. 1. Сравнение численного и континуального решений для зависимости кинетической температуры нулевой частицы от времени

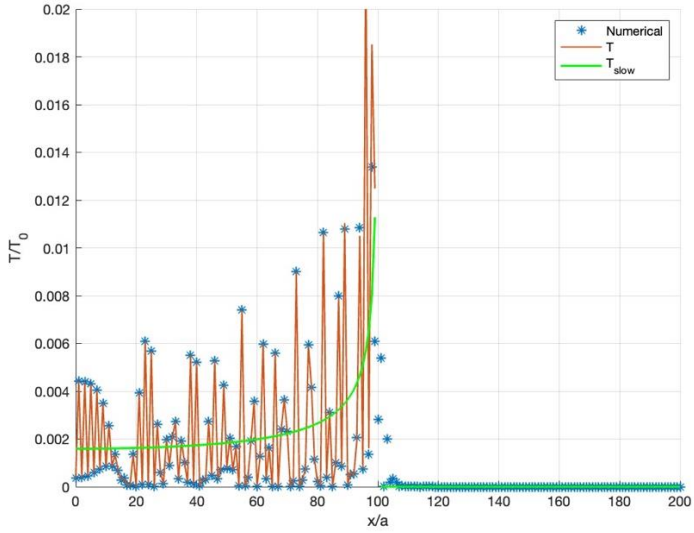


Рис. 2. Сравнение дискретно-континуального, континуального и численного решений для поля кинетической температуры в момент времени $\omega_e t = 200$.

Стоит отметить, что ранее в работе [8] была решена задача переноса энергии в бесконечной цепочке на упругом основании при мгновенном начальном возмущении произвольного профиля, но решение получено только в интегральной форме.

ЛИТЕРАТУРА

1. Vakulov D., Gireesan S., et al. Ballistic phonons in ultrathin nanowires // Nano Letters. – 2020. – Vol. 20, No. 4. – P. 2703-2709.
2. Rebay M., Kakac S., Cotta R.M. (Eds.) Microscale and Nanoscale Heat Transfer: Analysis, Design, and Application. – Boca Raton: CRC Press, 2016.
3. Kuzkin V.A. Unsteady ballistic heat transport in harmonic crystals with polyatomic unit cell // Continuum Mechanics and Thermodynamics. – 2019. – Vol. 31, No. 6. – P. 1573-1599.
4. Slepyan L.I. Nonstationary elastic waves. – Leningrad: Sudostroenie, 1972. – 376 p.
5. Whitham G.B. Linear and nonlinear waves. – New York: John Wiley and Sons, 1974.

6. Gavrilov S.N. Discrete and continuum fundamental solutions describing heat conduction in a 1D harmonic crystal: Discrete-to-continuum limit and slow-and-fast motions decoupling // International Journal of Heat and Mass Transfer. – 2022. – Vol. 194. – Art. 123019.
7. Fedoryuk M.V. The Saddle-Point Method. – Moscow: Nauka, 1977. – (in Russian).
8. Krivtsov A.M., Babenkov M.B., Tsvetkov D.V. Heat propagation in a one-dimensional harmonic crystal on an elastic foundation // Physical Mesomechanics. – 2020. – Vol. 23. – P. 109-119.

УДК 534.111

И.Е. Груздев
Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого (*)

ПОСТРОЕНИЕ СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ ДЛЯ ЭНЕРГЕТИЧЕСКИХ ХАРАКТЕРИСТИК ВОЛНОВОГО УРАВНЕНИЯ С ВЯЗКИМ ТРЕНИЕМ

Введение. Давно известна и исследуется аналогия между массой и энергией [1]. В последнее время начинают рассматриваться аналогии не только между этими двумя величинами, но и импульсом тела для материального тела и потоком в «теле» энергии, моментами инерции и суперпотоками энергии [2, 3]. Такой подход позволяет использовать междисциплинарные методы в решении различных задач, а энергетическая динамика становится связующим мостиком между различными дисциплинами.

В данной работе рассматривается одномерное волновое уравнение, описывающее упругую изотропную среду, с учетом вязкого трения. Для данной системы вычисляются баланс локальной энергии и баланс локального потока энергии. Показываются отличия от «классического» случая без учета трения. В рассматриваемом случае будет еще одна характеристика и еще одно уравнение, замыкающее систему.

Уравнения динамики. Рассмотрим волновое уравнение, описывающее идеальную упругую одномерную среду с вязким трением:

$$\rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = C \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - b \frac{\partial u}{\partial t}, \tag{1}$$

где ρ – плотность среды, C – жесткость среды, b – коэффициент вязкого трения, u – перемещение. Рассматривается безграничная среда с произвольными начальными условиями, дающими конечную энергию.

Баланс энергии. Плотность элементарной энергии в точке среды определяется как сумма кинетической и потенциальной энергии

$$\epsilon = \frac{\rho}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2 + \frac{C}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2. \tag{2}$$

Продифференцируем данное выражение по времени, учитывая (1),

$$\frac{\partial \epsilon}{\partial t} = -\frac{\partial q}{\partial x} + f, \tag{3}$$

где введено обозначение плотности потока энергии

$$q = -C \frac{\partial u}{\partial t}\frac{\partial u}{\partial x}, \tag{4}$$

и диссипации энергии

(*) И.Е. Груздев, superigor_2000@mail.ru

$$f = -b\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2. \quad (5)$$

В случае отсутствия вязкого трения, $b = 0$, отсутствует и диссипация энергии (5), $f = 0$. Следовательно, баланс энергии (3) согласуется с «классической» системой.

Баланс потока энергии. Продифференцируем формулу потока энергии (4), учитывая уравнения динамики (1) и выражение для диссипации энергии (5)

$$\frac{\partial q}{\partial t} = -\frac{C}{\rho}\frac{\partial \epsilon}{\partial x} + \frac{C}{\rho} b \frac{\partial u}{\partial t}\frac{\partial u}{\partial x}. \quad (6)$$

Если рассмотреть систему двух уравнений (3), (6), то в ней будет 4 неизвестных величины: $\epsilon, q, \dot{u}, \frac{\partial u}{\partial x}$, то есть количество уравнений меньше, чем количество неизвестных. Чтобы уменьшить количество неизвестных, воспользуемся уравнением (4) и подставим его во второе слагаемое баланса потока энергии (6).

$$\frac{\partial q}{\partial t} = -\frac{C}{\rho}\frac{\partial \epsilon}{\partial x} - \frac{b}{\rho} q. \quad (7)$$

Таким образом, в системе уравнений (3), (7) будет 3 неизвестных. Чтобы избавиться от неизвестной $\frac{\partial u}{\partial t}$, выразим $\frac{\partial u}{\partial x}$ из (4) и подставим в (2). После чего, данное уравнение можно рассмотреть, как квадратное относительно $\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2$, оно имеет следующие корни:

$$\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2 = \frac{\epsilon}{\rho}\left(1 \pm \sqrt{1 - \frac{\rho q^2}{C\epsilon^2}}\right). \quad (8)$$

Чтобы избавиться от неоднозначности определения введем в рассмотрение плотность лагранжиана системы

$$\lambda^2 = \epsilon^2 - \frac{\rho}{C} q^2. \quad (9)$$

Откуда можно получить выражение

$$\lambda = \pm\epsilon\sqrt{1 - \frac{\rho q^2}{C\epsilon^2}}, \quad (10)$$

которое можно использовать для подстановки в (8). Но введение плотности лагранжиана добавило новую неизвестную в систему уравнений. Чтобы замкнуть ее продифференцируем формулу (9) по времени, с учетом (3), (7)

$$\frac{\partial \lambda}{\partial t} = \frac{1}{\lambda}\left(-\epsilon\frac{\partial q}{\partial x} + \frac{\partial \epsilon}{\partial x} q\right) - \frac{b}{\rho}(\lambda + \epsilon). \quad (11)$$

Таким образом получена замкнутая система уравнений относительно плотности энергии ϵ, плотности потока энергии q и плотности лагранжиана λ

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \epsilon}{\partial t} = -\dfrac{\partial q}{\partial x} - \dfrac{b}{\rho}(\lambda + \epsilon), \\ \dfrac{\partial q}{\partial t} = -\dfrac{C}{\rho}\dfrac{\partial \epsilon}{\partial x} - \dfrac{b}{\rho} q, \\ \dfrac{\partial \lambda}{\partial t} = \dfrac{1}{\lambda}\left(-\epsilon\dfrac{\partial q}{\partial x} + \dfrac{\partial \epsilon}{\partial x} q\right) - \dfrac{b}{\rho}(\lambda + \epsilon) \end{cases} . \quad (12)$$

Заключение. В данной работе рассмотрено одномерное волновое уравнение с вязким трением. Для него построена замкнутая система уравнений относительно энергетических характеристик. Автор выражает благодарность Кривцову А. М. за обсуждение исследования.

ЛИТЕРАТУРА

1. Герштейн С. С. Корпускулярно-волновой дуализм // Физическая энциклопедия : [в 5 т.] / Гл. ред. А. М. Прохоров. — М.: Советская энциклопедия, 1990. — Т. 2: Добротность — Магнитооптика. — С. 464—465
2. Krivtsov A.M. Dynamics of matter and energy // ZAMM - Journal of Applied Mathematics and Mechanics. – 2022. – Vol. 103. – P.32.
3. Кунин И.А. Теория упругих сред с микроструктурой. – М.: Наука, 1975. – 416 с.

УДК 537.8

С.О. Дроздов, А.М. Кривцов
Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого(*)

ДИНАМИКА ЭНЕРГИИ В ЭЛЕКТРОМАГНИТНОМ ПОЛЕ

Введение. Уравнения механики сплошных сред состоят из двух основополагающих уравнений: уравнения баланса массы и уравнения баланса импульса, для замыкания которых добавляются определяющие уравнения, которые и задают свойства сплошной среды. Описание процессов распространения энергии можно строить по такому же принципу: записать уравнение баланса энергии, уравнение баланса потока энергии и добавить определяющие уравнения, которые будут содержать в себе информацию о структуре того или иного физического процесса переноса энергии. Подход к описанию распространения энергии, основанный на построении системы уравнений, аналогичной системе уравнений механики сплошной среды был предложен в работе [1] и назван энергетической динамикой. Преимущество такого способа описания заключается в том, что запись системы уравнений динамики энергии в той же форме, в которой записывается система уравнений динамики массы порождает аналогию, при которой массе соответствует энергия, а импульсу - поток энергии. Эта аналогия может быть использована для интерпретации процессов распространения энергии на языке механических величин. Следует отметить, что на протяжении истории развития физики аналогии с механикой позволяли открывать и исследовать новые теории. Так еще в XIX веке Дж. К. Максвелл [2] использовал эти аналогии для построения электродинамики. Также подход энергетической динамики позволяет смотреть на различные физические модели с единой позиции, что, в частности, дает возможность переносить результаты, полученные в одной области, на другую. Уравнения энергетической динамики записываются в виде:

$$\begin{cases} \dot{w} = -\nabla \cdot \vec{S}, \\ \dot{\vec{S}} = -\nabla \cdot \bar{\bar{g}} + \vec{\varphi}. \end{cases} \tag{1}$$

Здесь и далее точка над переменной обозначает частную производную по времени. В этой системе уравнений w – объемная плотность энергии, $\vec{S}$ – плотность потока энергии, $\bar{\bar{g}}$ – тензор суперпотока (потока потока) энергии, $\vec{\varphi}$ – вектор плотности объемного подвода потока энергии. Известно, что распространение энергии в электромагнитном (ЭМ) поле обладает чертами, характерными для переноса массы [3, 4], вследствие чего возникает вопрос о

(*) С.О. Дроздов, so.drozdov@gmail.com

применении методов энергетической динамики для описания процессов переноса энергии в ЭМ-поле. Этот вопрос для среды без токов и зарядов изучается в рамках данной работы.

Понятие энергетического центра возмущения. Во многих задачах интерес представляет не столько точное решение системы уравнений (1), сколько определение места положения области, в которой локализована энергия. Для этого в рамках энергетической динамики используется понятие энергетического центра, которое вводится по аналогии с понятием центра масс. Данный подход к описанию движения энергии представлен в статье [1], в котором он применен для описания движения энергетического центра возмущения в цепочке точечных масс. Положение энергетического центра возмущения задается выражением

$$\vec{r}_{\text{c}} = \frac{1}{W}\int w\vec{r}\, dV, \tag{2}$$

где интегрирование ведется по всему пространству, а W – полная энергия.

Для описания движения энергетического центра записывается уравнение

$$W\ddot{\vec{r}}_{\,c} = \vec{\Phi}, \tag{3}$$

аналогичное второму закону Ньютона. При этом величина $\vec{\Phi}$ называется энергетической силой. Энергетическая сила позволяет описать движение энергетического центра аналогично тому, как сила позволяет описать движение центра масс. Дифференцирование выражения (2) с использованием (1) и формулы Остроградского-Гаусса, дает выражение для скорости движения энергетического центра: $\vec{v}_c = \frac{1}{W}\int \vec{S}\, dV$. Пользуясь аналогией с механикой, отметим, что величина $W\vec{v}_c$ играет роль полного импульса возмущения. Назовем ее энергетическим импульсом. Дифференцирование величины $W\vec{v}_c$ с учетом (1) и дальнейшее сравнение с (3), показывает, что $\vec{\Phi} = \int \vec{\varphi}\, dV$. Откуда следует, что если $\vec{\varphi} = 0$, то любое энергетическое возмущение распространяется с сохранением величины $W\vec{v}_c$, что в терминах механической аналогии означает сохранение импульса при движение системы. В данной работе будем использовать систему уравнений Максвелла в среде с диэлектрической ε и магнитной μ проницаемостями без токов и зарядов. Все выражения будем записывать в системе единиц СГС. В рамках рассмотрения ЭМ-поля вектор плотности потока энергии, называющийся вектором Умова-Пойнтинга [5], известен и представляется в виде $\vec{S} = \frac{c}{4\pi}\,\vec{E}\times\vec{H}$. Также известен тензор суперпотока энергии, называющийся тензором натяжений Максвелла $\bar{\bar{g}} = \frac{c^2}{\mu\varepsilon}\left(w\bar{\bar{I}} - \frac{1}{4\pi}\left(\varepsilon\vec{E}\vec{E} + \mu\vec{H}\vec{H}\right)\right)$ [7]. Здесь $\bar{\bar{I}}$ – единичный тензор, $w = \frac{1}{8\pi}\left(\varepsilon\vec{E}\cdot\vec{E} + \mu\vec{H}\cdot\vec{H}\right)$ – плотность энергии. В этих выражениях $\vec{E}, \vec{H}$ – напряженности электрического и магнитного поля соответственно.

Движение энергетического центра в ЭМ-поле. Дифференцированием вектора плотности потока энергии и выделением недивергентного слагаемого было получено, что вектор плотности подвода потока энергии представляется в виде:

$$\vec{\varphi} = -\left(\frac{\nabla\varepsilon}{\varepsilon} + \frac{\nabla\mu}{\mu}\right)\cdot\bar{\bar{g}} + \frac{1}{2}\frac{c^2}{\mu\varepsilon}\left(\frac{\nabla\varepsilon}{\varepsilon} + \frac{\nabla\mu}{\mu}\right)w + \frac{1}{2}\frac{c^2}{\mu\varepsilon}\left(\frac{\nabla\varepsilon}{\varepsilon} - \frac{\nabla\mu}{\mu}\right)\lambda,$$

где $\lambda = \frac{1}{8\pi}\left(\varepsilon\vec{E}\cdot\vec{E} - \mu\vec{H}\cdot\vec{H}\right)$ – удельный лагранжиан ЭМ-поля [6]. Видим, что в случае однородной среды $\vec{\varphi} = 0$, а значит и $\vec{\Phi} = \int \vec{\varphi}\, dV = 0$, откуда следует, что энергетический центр ЭМ-возмущения в однородной среде движется с постоянной скоростью. При этом в неоднородной среде вектор подвода потока энергии $\vec{\varphi}$ не равен нулю, откуда следует, что энергетический импульс $W\vec{v}_c$ не сохраняется. Заметим, что имеет место закон баланса суммарного импульса вещества и ЭМ-поля [7, 8]. Роль импульса ЭМ-поля играет величина энергетического импульса, отнесенного к квадрату скорости света. Отличие величины $\vec{\varphi}$ от нуля, связанное с неоднородностью среды, указывает на то, что ЭМ-импульс переходит в импульс среды, в которой распространяется ЭМ-поле, и наоборот.

Пользуясь уравнением (3), в приближении локализованного возмущения, имеющего структуру плоской ЭМ-волны, было получено уравнение движения энергетического центра: $\ddot{\vec{r}}_c = c^2\left(\bar{\bar{I}} - 2\vec{s}\vec{s}\right)\cdot\frac{\nabla n}{n}$, где $\vec{s} = \frac{1}{|\vec{S}|}\vec{S}$ и $n = \sqrt{\mu\varepsilon} -$ показатель преломления среды. Можно показать, что из этого выражения следует, что траектория движения энергетического центра совпадает с траекторией, предсказываемой геометрической оптикой.

Замыкание системы энергетических уравнений в однородной среде. Как говорилось ранее, для замыкания системы уравнений энергетической динамики требуется добавить определяющие уравнения, которые будут содержать в себе информацию о конкретной природе физического процесса распространения энергии. Для формулировки этих уравнений в данной работе были введены следующие величины:

$$\bar{\bar{W}} = \frac{1}{8\pi}\left(\varepsilon\vec{E}\vec{E} + \mu\vec{H}\vec{H}\right), \qquad \bar{\bar{L}} = \frac{1}{8\pi}\left(\varepsilon\vec{E}\vec{E} - \mu\vec{H}\vec{H}\right),$$
$$\bar{\bar{S}} = \frac{c}{8\pi}\left(\vec{E}\vec{H} - \vec{H}\vec{E}\right), \qquad \bar{\bar{T}} = \frac{c}{8\pi}\left(\vec{E}\vec{H} + \vec{H}\vec{E}\right).$$

Тензор $\bar{\bar{W}}$ назовем тензором энергии: $\mathrm{tr}\left(\bar{\bar{W}}\right) = w$. Тензор $\bar{\bar{L}}$ назовем тензором лагранжиана: $\mathrm{tr}\left(\bar{\bar{L}}\right) = \lambda$. Тензор $\bar{\bar{S}}$ назовем тензором потока энергии: $\bar{\bar{S}}_\times = \vec{S}$, здесь $\bar{\bar{S}}_\times -$ векторный инвариант $\bar{\bar{S}}$. Тензор $\bar{\bar{T}}$ назовем угловым тензором ЭМ-поля, так как при известных $\left|\vec{E}\right|, \left|\vec{H}\right|$ он позволяет найти угол между $\vec{E}$ и $\vec{H}$: $\mathrm{tr}\left(\bar{\bar{T}}\right) = \frac{c}{4\pi}\vec{E}\cdot\vec{H}$. Также введем вторую форму тензора по формуле $\bar{\bar{X}}^{\mathrm{II}} = \mathrm{tr}\left(\bar{\bar{X}}\right)\bar{\bar{I}} - 2\bar{\bar{X}}$. Это преобразование обратимо $\bar{\bar{X}}^{-\mathrm{II}} = \frac{1}{2}\left(\mathrm{tr}\left(\bar{\bar{X}}\right)\bar{\bar{I}} - \bar{\bar{X}}\right)$. Отметим, что $\bar{\bar{g}} = \frac{c^2}{\mu\varepsilon}\bar{\bar{W}}^{\mathrm{II}}$. Введение этих величин позволяет записать замкнутую систему уравнений энергетической динамики для ЭМ-поля в однородной среде в виде:

$$\begin{cases} \dot{w} = -\nabla\cdot\vec{S}, \qquad \dot{\vec{S}} = -\nabla\cdot\bar{\bar{g}}, \\ \dot{\bar{\bar{g}}} = \frac{\dot{w}}{w}\bar{\bar{g}} - \frac{2}{w}\frac{\mu\varepsilon}{c^2}\left(\bar{\bar{T}}\times\left(\nabla\cdot\bar{\bar{L}}^{\mathrm{II}}\right) - \bar{\bar{L}}\times\left(\nabla\cdot\bar{\bar{T}}^{\mathrm{II}}\right)\right)^S, \qquad \bar{\bar{W}} = \frac{c^2}{\mu\varepsilon}\bar{\bar{g}}^{-\mathrm{II}}, \\ \dot{\lambda} = -\nabla\cdot\vec{S} - \vec{S}\cdot\nabla\ln(w+\lambda) + \frac{2}{w+\lambda}\left(\bar{\bar{S}} + \bar{\bar{T}}\right)\cdot\cdot\,\nabla\times\left(\bar{\bar{W}} + \bar{\bar{L}}\right), \\ \bar{\bar{L}} = \frac{\lambda}{w}\bar{\bar{W}} + \frac{\mu\varepsilon}{c^2}\frac{1}{w}\bar{\bar{T}}^{II}\cdot\bar{\bar{S}}, \qquad tr\left(\bar{\bar{T}}\right)\bar{\bar{T}} = 2\bar{\bar{S}}\cdot\bar{\bar{S}} + \frac{c^2}{\mu\varepsilon}\left(w\bar{\bar{W}} - \lambda\bar{\bar{L}}\right). \end{cases}$$

Вывод. В данной работе был применен метод энергетической динамики к описанию процессов распространения энергии в ЭМ-поле в среде без токов и зарядов. В рамках этого метода рассматривалась аналогия между динамикой массы в механике сплошной среды и динамикой энергии в ЭМ-поле. Было показано, что в случае распространения ЭМ-поля в однородной среде энергетический центр возмущения движется с постоянной скоростью. Также было получено ненулевое недивергентное слагаемое в уравнении баланса потока энергии в неоднородной среде, что говорит о том, что в неоднородной среде скорость движения энергетического центра непостоянна.

Большое внимание было уделено замыканию системы уравнений энергетической динамики ЭМ-поля в однородной среде. Полученная система уравнений может быть использована для описания движения энергетического возмущения в ЭМ-поле. Особый интерес представляет дальнейшее упрощение этой системы, которое может быть основано на линеаризации уравнений в случае ЭМ-возмущения, близкого к плоской ЭМ-волне.

ЛИТЕРАТУРА

1. Krivtsov A.M. Dynamics of matter and energy // ZAMM - Journal of Applied Mathematics and Mechanics. – 2022. – Vol. 103. – P.32.
2. Maxwell J.C. A treatise on electricity and magnetism. – Oxford: Clarendon Press, 1873. – 500 p.

3. Poincaré H. La théorie de Lorentz et le principe de réaction // Archives Néerlandaises des Sciences Exactes et Naturelles. – 1900. – Vol. 5. – P. 252-278.
4. Морс Ф.М., Фешбах Г. Методы теоретической физики. В 2-х т. Т. 1. – М.: Издательство иностранной литературы, 1958. – 930 с.
5. Сивухин Д.В. Общий курс физики. В 5-ти т. Т. III. Электричество. – М.: Физматлит, 2020. – 656 с.
6. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Теоретическая физика: Учебное пособие. В 10-ти т. Т. II. Теория поля. – М.: Физматлит, 1988. – 512 с.
7. Измайлов С.В. Курс электродинамики. – М.: Государственное учебно-педагогическое издательство Министерства просвещения РСФСР, 1962. – 512 с.
8. Куликовский А.Г., Любимов Г.А. Магнитная гидродинамика. – М.: Государственное издательство физико-математической литературы, 1962. – 252 с.

УДК 531.391

Л.М. Капшуков
Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого(•)

ЭНЕРГЕТИЧЕСКАЯ ДИНАМИКА ТОНКОГО НЕРАСТЯЖИМОГО КОЛЬЦА

Введение. Гироскоп — незаменимый прибор, широко применяемый в системах высокоточной навигации, ориентации судов и самолетов, стабилизации космических аппаратов. Существуют различные виды гироскопов, каждый из которых имеет свои преимущества и недостатки. Одним из таких видов является волновой твердотельный гироскоп, в основе устройства которого лежит способность волн проявлять инерциальные свойства [1]. Тонкое нерастяжимое кольцо — простая и удобная модель одностепенного гироскопа. В данной работе предлагается рассмотреть такую модель и описать движение локального возмущения по кольцу с помощью методов энергетической динамики [2-4].

Основная часть. Составим дифференциальное уравнение вращающегося с угловой скоростью Ω тонкого нерастяжимого кольца, взяв за основу теорию стержней П.А. Жилина [5]. Считаем, что все перемещения происходят в плоскости кольца. Запишем выражение для радиус-вектора точки на кольце:

$$\boldsymbol{R}(\varphi, t) = (R + w)\mathbf{e}_r + v\mathbf{e}_\varphi, \tag{1}$$

где φ — угол в полярной системе координат, t — время, R — радиус кольца, $w = w(\varphi, t)$ и $v = v(\varphi, t)$ — радиальное и касательное перемещения данной точки соответственно, $\mathbf{e}_r = \mathbf{e}_r(\varphi, t)$ и $\mathbf{e}_\varphi = \mathbf{e}_\varphi(\varphi, t)$ — единичные векторы в, направленные по нормали и касательной в данной точке соответственно. Используя определение векторов деформации в теории стержней, в линейной теории их можно представить выражениями

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \frac{1}{R}\boldsymbol{R}' - (\boldsymbol{E} + \theta\mathbf{e}_k \times \boldsymbol{E}) \cdot \mathbf{e}_\varphi, \qquad \boldsymbol{\Phi} = \frac{1}{R}\theta'\mathbf{e}_k, \tag{2}$$

где $\boldsymbol{E}$ — единичный тензор, $\theta = \theta(\varphi, t)$ — угол изгиба элемента кольца, $\mathbf{e}_k = \mathbf{e}_\varphi \times \mathbf{e}_r$ — вектор бинормали, штрихами обозначены производные по углу φ. Для нерастяжимого стержня вектор деформаций $\boldsymbol{\varepsilon}$ равен нулю. Тогда из первого выражения (2) получается связь w, v и θ в линейной теории:

$$\theta = \frac{1}{R}(w' - v), \qquad v' = -w. \tag{3}$$

Из соотношений Коши – Грина получим выражение для собственного момента, действующего на кольцо. В данном случае внутренняя энергия и соотношения Коши – Грина имеют вид

(•) Л.М. Капшуков, leokapshukov@mail.ru

$$U = \frac{1}{2} C \boldsymbol{\Phi}^2, \qquad \boldsymbol{M} = \frac{\partial U}{\partial \boldsymbol{\Phi}} = C\boldsymbol{\Phi}, \tag{4}$$

где C — изгибная жесткость, $\boldsymbol{M} = M\mathbf{e}_k$ — собственный момент, действующий на кольцо.

Применяя полученные выше выражения, получим уравнения динамики:

$$N_r' - N_\varphi = \rho R\left(\ddot{w} - \dot{\Omega} v - 2\Omega\dot{v} - \Omega^2(R + w)\right),$$
$$N_\varphi' + N_r = \rho R\left(\ddot{v} + \dot{\Omega}(R + w) + 2\Omega\dot{w} - \Omega^2 v\right),$$
$$\rho RL + \frac{C}{R^2}(w'' - v') - (w' - v)N_\varphi + RN_r = 0. \tag{5}$$

где $\boldsymbol{N} = N_r\mathbf{e}_r + N_\varphi\mathbf{e}_\varphi$ — вектор сил, ρ — линейная плотность, ρL — внешний распределенный момент, который определяет угловое ускорение кольца, точками обозначаются производные по времени. Преобразовав систему уравнений (5), получаем линейное уравнение тонкого нерастяжимого кольца:

$$\ddot{w}'' - \ddot{w} + 4\Omega\dot{w}' + 2\dot{\Omega}w' - \Omega^2(w^{IV} + 3w'') + \kappa^2(w^{VI} + 2w^{IV} + w'') = 0, \qquad \kappa^2 = \frac{C}{\rho R^4}. \tag{6}$$

Теперь получим баланс энергии. Рассмотрим случай, когда внешний распределенный момент ρL отсутствует, тогда угловая скорость будет постоянной. Локальная энергия кольца записывается в виде

$$\epsilon = \frac{1}{2}\rho\dot{\boldsymbol{R}}^2 + \rho U. \tag{7}$$

Производная по времени от выражения (7) имеет вид:

$$\dot{\epsilon} = \frac{1}{R}\left(\boldsymbol{N}\cdot\dot{\boldsymbol{R}} + \boldsymbol{M}\cdot\dot{\boldsymbol{\theta}}\right)' - \frac{1}{R}\left(\boldsymbol{N}\cdot\dot{\boldsymbol{R}}' + \boldsymbol{M}'\cdot\dot{\boldsymbol{\theta}}\right). \tag{8}$$

Для дальнейшего продвижения необходимо принять во внимание, что в линейной теории энергия — это квадратичная функция, поэтому в определяющих уравнениях нельзя пренебрегать квадратичными слагаемыми. Таким образом, уравнения (3) перепишутся в следующем виде:

$$\theta = \frac{1}{R}(w' - v), \qquad v' = -w - \frac{R\theta^2}{2}. \tag{9}$$

С учетом выражений (9) получим уравнение баланса локальной энергии в кольце, которое является аналогом уравнения неразрывности в механике сплошных сред, и выражение для локального потока энергии q:

$$\dot{\epsilon} = -\frac{1}{R}q', \qquad q = -\left(\boldsymbol{N}\cdot\dot{\boldsymbol{R}} + \boldsymbol{M}\cdot\left(\dot{\boldsymbol{\theta}} - \Omega\mathbf{e}_k\right)\right). \tag{10}$$

Выражение для потока можно переписать в перемещениях. Из уравнения баланса локальной энергии (10) следует закон сохранения глобальной энергии

$$\dot{E} = 0, \qquad E = \int_0^{2\pi} R\epsilon \mathrm{d}\varphi = \mathrm{const}. \tag{11}$$

Для дальнейшего продвижения необходим упрощенный вид уравнения (6):

$$\ddot{w} - \Omega^2(w'' + 4w) + \kappa^2(w^{IV} + 3w'' + 4w) = 0. \tag{12}$$

Рассмотрим случай неподвижного кольца $\Omega = 0$. Взяв производную по времени от локального потока (10), получим уравнение баланса локального потока, являющееся аналогом уравнения движения в гидродинамике:

$$\dot{q} = -\frac{1}{R}g', \tag{13}$$

где g — суперпоток:

$$g = \rho\left(\kappa^2(v^{IV\,2} + 2v''v^{IV} - v''^2 - \frac{1}{2}v'''^2 + 8v'^2 - v'''v^V - v'v^V) + \dot{v}''^2 - \frac{3}{2}\dot{v}^2 + \frac{1}{2}\dot{v}'^2 - \dot{v}''\dot{v} - \dot{v}'''\dot{v}'\right).$$

Отметим, что в нулевом приближении суперпоток кольца совпадает с суперпотоком балки Бернулли–Эйлера и равен:

$$g_1 = \rho[\kappa^2(w'''^2 - w''w^{IV}) + \dot{w}'^2 - \dot{w}''\dot{w}]. \qquad (14)$$

Аналогично закону сохранения глобальной энергии (11), воспользовавшись уравнением баланса потока (13), можно записать закон сохранения глобального потока для неподвижного кольца:

$$\dot{Q} = 0, \qquad Q = \int_0^{2\pi} Rq\mathrm{d}\varphi = \mathrm{const}. \qquad (15)$$

Пользуясь определением координаты энергетического центра и его скорости [2], для кольца можно записать выражения для угловой скорости энергетического центра:

$$\omega_c = \frac{Q}{E} = \mathrm{const}, \qquad \varphi_c = \omega_c t + \varphi_0, \qquad (16)$$

где φ_c — угловая координата энергетического центра, ω_c — угловая скорость энергетического центра, φ_0 — угловая координата энергетического центра в начальный момент времени.

Выражение (16) показывает, что в случае неподвижного кольца угловая скорость энергетического центра локального возмущения является постоянной величиной и может быть вычислена без решения сложного дифференциального уравнения. Достаточно воспользоваться начальными условиями задачи. Таким образом, методы энергетической динамики позволяют отследить движение локального возмущения по кольцу без необходимости учета его формы и размеров. Следующая работа будет посвящена исследованию выражений (13–16) для вращающегося кольца.

Автор благодарен А.М. Кривцову за предложенную работу и полезное обсуждение.

ЛИТЕРАТУРА

1. Журавлев В.Ф., Климов Д.М. Волновой твердотельный гироскоп. – М.: Наука, 1985. – 130 с.
2. Krivtsov A.M. Dynamics of matter and energy // ZAMM - Journal of Applied Mathematics and Mechanics. – 2022. – Vol. 103. – P.32.
3. Baimova J.A., Bessonov N.M., Krivtsov A.M., Trunova I.N. Energy dispersion of localized disturbance in continuum and discrete media // Physical Review E. – 2024. – Vol. 110. – P.18
4. Кривцов А.М. Энергетическая механика в обозначениях В.М. Фридмана. – Рукопись, 2022. – 69 с.
5. Жилин П.А. Прикладная механика. Теория тонких упругих стержней. – СПб.: Изд-во Политехнического ун-та, 2007. – 100 с.

УДК 534.11

А.А. Кедров, В.А. Кузькин
Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого(*)

РАСПРОСТРАНЕНИЕ ГАУССОВОГО ВОЛНОВОГО ПАКЕТА В ЦЕПОЧКЕ ГУКА

Описание системы. Рассматривается одномерная система частиц, соединенных пружинами, определяемая следующими уравнениями:

$$\dot{v}_n = \omega_0^2\left(u_{n+1} - 2u_n + u_{n-1}\right), \quad u_{n+N} = u_n, \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{m}{C}}, \qquad (1)$$

где u_n — смещение частицы относительно положения равновесия, $v_n = \dot{u}_n$ — скорость частицы, m — масса частицы, C — линейная жесткость пружин, N — количество частиц в ячейке периодичности.

(*)А.А. Кедров, kedrovsasha@gmail.com

В настоящей работе рассмотрены решения системы (1) в форме волновых пакетов. На их основе получены выражения для кинетической температуры T_n, определяемой формулой:

$$k_B T_n(t) = m\langle v_n^2(t)\rangle, \tag{2}$$

где $\langle ... \rangle$ — математическое ожидание, k_B — постоянная Больцмана.

Движение волнового пакета. При условии достаточной гладкости функции $A_\beta(x,k) = A(x/\beta, k)$, $\beta \ll 1$ на временах порядка $t\omega_0 \sim \beta^{-1}$ справедливо следующее асимптотическое решение уравнений динамики (3) в виде волнового пакета (см., например, [1]):

$$u_n(t) = A_\beta(na - c_g t, k)\cos\left(kn - \omega t + \varphi\right), \tag{3}$$

где a – расстояние между частицами, φ – случайная фаза, подчиняющаяся равномерному распределению $U[0; 2\pi]$, $\omega = 2\omega_0 \sin\left(k/2\right)$ – частота, $c_g = a\omega_0 \cos\left(k/2\right)$ – групповая скорость. Используя формулу (2), получим выражение для температуры, соответствующее начальным условиям (3):

$$k_B T_n(t) = \frac{m}{2}\omega^2 A_\beta^2(na - c_g t, k) + \mathrm{O}\left(\beta\right). \tag{4}$$

Движение нескольких волновых пакетов. Рассмотрим суперпозицию волновых пакетов:

$$u_n(t) = \sqrt{\frac{2\pi}{N_\omega}}\sum_{i=0}^{N_\omega} A_\beta\left(na - c_g(k_i)t, k_i\right)\cos\left(k_i n - \omega t + \varphi_i\right), \tag{5}$$

где $\varphi_0, \varphi_1, ..., \varphi_{N_\omega}$ – независимые случайные величины, подчиняющиеся равномерному распределению $U[0; 2\pi]$. Тогда, в силу независимости случайных величин, температура выразится в виде суммы, каждое слагаемое которой – температура в системе с начальными условиями вида (3) с соответствующим параметром k_i. Итоговое выражение можно записать в виде интеграла по волновым числам:

$$k_B T_n(t) = \frac{m}{2}\int_k \omega^2(k) A_\beta^2\left(na - c_g(k)t, k\right)dk. \tag{6}$$

Важно отметить, что разным функциям $A_\beta(x,k)$ может соответствовать одинаковое распределение температуры, но разное распределение теплового потока. Таким образом, формула (6) позволяет описывать системы с неравномерным распределением теплового потока в начальный момент времени. Если энергия системы равнораспределена по всем волновым числам k, то ее начальный тепловой поток в каждой точке равен нулю и выражение для температуры принимает вид:

$$T_n(t) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} T^0\left(na - c_g(k)t\right)dk, \quad T^0(na) = T_n(0), \tag{7}$$

где $T^0(x)$ – начальная температура, что совпадает с ранее полученным результатом, описанным в работе [2].

Большие времена. Движение гауссового волнового пакета со случайной фазой. Как было отмечено ранее, асимптотическое решение (3) позволяет получить выражения для динамики температуры (6). Однако данное приближение гарантирует быть справедливым только на малых временах порядка $t\omega_0 \sim \beta^{-1}$. В настоящем параграфе исследуется поведение температуры на временах большего порядка.

Рассмотрим начальными условиями в форме волнового пакета (3), где в качестве $A_\beta(x,k)$ используется функция Гаусса:

$$A_\beta(x,k) = B(k)\exp\left(-\frac{x^2}{\sigma_\beta^2}\right), \quad \sigma_\beta \sim \frac{a}{\beta}, \tag{8}$$

Если воспользоваться решением для эволюции гауссового волнового пакета в диспергирующей среде (см. [3]) и предположить, что начальная ширина огибающей (пропорциональная параметру σ_β) достаточно велика, то решение для кинетической температуры примет следующий вид:

$$k_B T_n = \frac{m}{2}\omega^2(k)B^2(k)\frac{\sigma_\beta}{\tilde{\sigma}_\beta(k,t)}\exp\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{na-c_g t}{\tilde{\sigma}_\beta(k,t)}\right)^2\right), \quad \tilde{\sigma}_\beta(k,t) = \frac{\sqrt{4\sigma_\beta{}^4 + a^2[\omega''(k)t]^2}}{2\sigma_\beta} \tag{9}$$

Формула (12) показывает, что распределение температуры сохраняет форму функции Гаусса, движущегося с групповой скоростью c_g. Однако ее параметр $\tilde{\sigma}_\beta(k,t)$ растет с течением времени, что свидетельствует об уширении профиля температур.

Для волновых пакетов, с параметром k в окрестности числа π, групповая скорость близка к нулю $c_g \approx 0$, поэтому формула (6) приводит к результату $T(x,t) \approx T(x,0)$ и не описывают эволюцию температуры с течением времени. Более точное описание, как видно из рис. 1, возможно с помощью формулы (9), которая учитывает уширение профиля температуры.

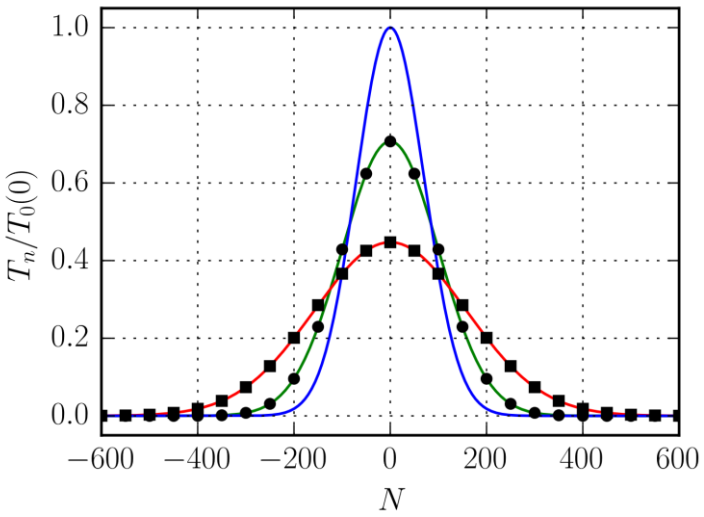


Рис. 1. Сравнение результатов численного интегрирования уравнений динамики цепочки для огибающей вида (8) с полученным приближением по формуле (9). Синяя, зеленая и красная линии изображают поля температур T_n для $k = \pi$, $\sigma = 100a$, полученные с помощью формулы (9) в моменты времени $\tau = 0,\ 2\times10^4,\ 4\times10^4$ соответственно, где $\tau = t\omega_0$. Черные точки и квадраты соответствуют численному решению для $\tau = 2\times10^4,\ 4\times10^4$.

Несколько гауссовых волновых пакетов со случайной фазой. Для начальных условий вида (5) для огибающей вида (8) получим новое выражение для температуры:

$$k_B T_n = \frac{m}{2}\int_k \omega^2(k)A_\beta^2\big(\lambda(k,t)\left(na-c_g t\right),k\big)\lambda(k,t)dk, \tag{10}$$

$$\lambda(k,t)=\frac{\sigma_\beta}{\tilde{\sigma}_\beta\left(k,t\right)}.$$

На временах $t \ll a^{-2}\sigma_\beta^2\omega_0^{-1}$, значение $\lambda \approx 1$, тогда формула (10) совпадает с формулой (6).

Заключение. В работе получено выражение для температуры (6) для стохастических начальных условий (5). Также была рассмотрена задача о движении гауссового пакета и получена формула (10), которая является уточнением формулы (6) для случая, когда профиль температур имеет форму функции Гаусса.

ЛИТЕРАТУРА

1. Kuzkin V. Acoustic transparency of the chain-chain interface // Phys. Rev. E. – 2023. – Vol. 107. – P. 065004.
2. Krivtsov, A. Heat transfer in infinite harmonic one-dimensional crystals // Dokl. Phys. – 2015. – Vol. 60. – P. 407-411.
3. Давыдов А.С. Квантовая механика. – М.: Наука, 1973. – 704 с.

УДК 534.1

А.А. Кедров, С.А. Щербинин
Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого(*)

ИССЛЕДОВАНИЕ УСТОЙЧИВОСТИ НЕЛИНЕЙНОЙ КОЛЕБАТЕЛЬНОЙ π-МОДЫ В ВОЗМУЩЕННОЙ ЦЕПОЧКЕ ТОДЫ

Описание системы. Рассматривается нелинейная одномерная система из N частиц с нелинейным взаимодействием, описываемая следующими динамическими уравнениями:

$$\ddot{u}_n(\tau)=\exp\left(u_{n-1}-u_n\right)-\exp\left(u_n-u_{n+1}\right)+\alpha\left(\left(u_{n+1}-u_n\right)^2-\left(u_{n-1}-u_n\right)^2\right),\quad u_{n+N}=u_n, \tag{1}$$

где u_n — безразмерное смещение частицы под номером n относительно положения равновесия, τ — безразмерное время, α — коэффициент, позволяющий контролировать кубическую компоненту потенциала взаимодействия между частицами. При α равным нулю система (1) принимает вид уравнений динамики цепочки Тоды. Далее систему с ненулевым коэффициентом α будем называть возмущенной цепочкой Тоды.

В настоящей работе исследуется устойчивость режима колебаний π-моды, которое представимо в следующей форме:

$$u_n=(-1)^n U(\tau). \tag{2}$$

Подстановка (2) в (1) сводит систему обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка к одному такому уравнению относительно $U(\tau)$. Это уравнение имеет точное частное решение:

$$U(\tau)=-i\,\mathrm{am}\left(i\tau v_0\middle|-\frac{4}{v_0^2}\right),\quad U(0)=0,\quad \dot{U}=v_0. \tag{3}$$

Решение (3) является периодическим:

$$U\left(\tau+T\right)=U\left(\tau\right),\quad T=4K\left(\frac{v_0^2}{4+v_0^2}\right)\Big/\sqrt{4+v_0^2}\,. \tag{4}$$

(*)А.А. Кедров kedrovsasha@gmail.com

Исследование устойчивости периодического режима. Классическим методом исследования устойчивости периодических режимов является использование теории Флоке для вычисления собственных значений матрицы монодромии соответствующей вариационной системы линейных уравнений, получающейся как результат линеаризации исходной системы в окрестности данного колебательного режима. Ясно, что для систем с большим количеством степеней свободы применение данного метода оказывается затруднительным.

В данной работе был использован метод, предложенный Г.М. Чечиным и К.Г. Жуковым [2] и использующий аппарат неприводимых представлений групп симметрии. Данный метод позволяет свести вариационную систему связанных уравнений вида

$$\dot{\boldsymbol{\delta}} = \mathbf{A}(\boldsymbol{\tau})\boldsymbol{\delta} \tag{5}$$

к эквивалентной системе дифференциальных уравнений, составленной из независимых подсистем конечного размера, каждая из которых может быть исследована на устойчивость независимо от других. Переход к «расщепленной» системе происходит посредством линейного преобразования переменных:

$$\tilde{\boldsymbol{\delta}} = \mathbf{S}\boldsymbol{\delta}, \quad \dot{\tilde{\boldsymbol{\delta}}} = \mathbf{S}\mathbf{A}(\boldsymbol{\tau})\mathbf{S}^{\mathrm{T}}\tilde{\boldsymbol{\delta}}, \tag{6}$$

где $\mathbf{S}$ — матрица, составленная из собственных векторов всех неприводимых представлений группы симметрии рассматриваемого периодического режима.

В настоящей работе использовалась группа симметрии $G = [e, au]$, которая является подгруппой группы симметрии G_0 системы (1). Элементы e, a, u — генераторы группы G_0:

$$\begin{gathered} \mathbf{V} = \{V_0, V_1, ..., V_{N-1}\}, \\ e\mathbf{V} = \mathbf{V}, \quad a\mathbf{V} = \{V_1, V_2, ..., V_{N-1,} V_0\}, \quad u\mathbf{V} = \{-V_0, -V_1, ..., -V_{N-1}\}. \end{gathered} \tag{7}$$

Группа G является абелевой, поэтому каждому неприводимому представлениям Γ_i, $i \in \{0, ..., N-1\}$ соответствую 1×1 матрицы $\gamma_j = \exp\left(\dfrac{2\pi i j}{N}\right)$.

Вариационная система. Вариационную систему для уравнений (1) вблизи решения (2) можно записать следующим образом:

$$\begin{aligned} \ddot{\delta}_{2n} &= c\delta_{2n-1} - (c + c^{-1})\delta_{2n} + c^{-1}\delta_{2n+1} + 4\alpha b(\delta_{2n-1} + \delta_{2n+1}), \quad c = \exp\big(2U(\tau)\big), \\ \ddot{\delta}_{2n+1} &= c^{-1}\delta_{2n} - (c + c^{-1})\delta_{2n+1} + c\delta_{2n+2} + 4\alpha b(\delta_{2n} + \delta_{2n+2}), \quad a = U(\tau). \end{aligned} \tag{8}$$

После преобразования (6) вариационная система принимает следующий вид:

$$\begin{aligned} \ddot{\tilde{\delta}}_{2n} &= -2(c + c^{-1})\sin^2\left(\frac{k}{2}\right)\tilde{\delta}_{2n} + i(c + c^{-1} - 8\alpha b)\sin(k)\tilde{\delta}_{2n+1}, \\ \ddot{\tilde{\delta}}_{2n+1} &= -i(c + c^{-1} - 8\alpha b)\sin(k)\tilde{\delta}_{2n} - 2(c + c^{-1})\cos^2\left(\frac{k}{2}\right)\tilde{\delta}_{2n+1}, \end{aligned} \tag{9}$$

где $k = \dfrac{2\pi n}{N}$. Далее система (9) исследовалась на устойчивость с помощью стандартного метода Флоке.

Устойчивость системы. Исследование проводилось посредством численного построения матрицы монодромии [1] для системы (9) с точностью до 10 значащих цифр. Критерием устойчивости являлось наибольшее отклонение модуля какого-то из собственных чисел матрицы от 1. Если отклонение было выше, чем 10^{-8}, то система считалась неустойчивой. Полученные результаты представлены на рис. 1 и рис. 2.

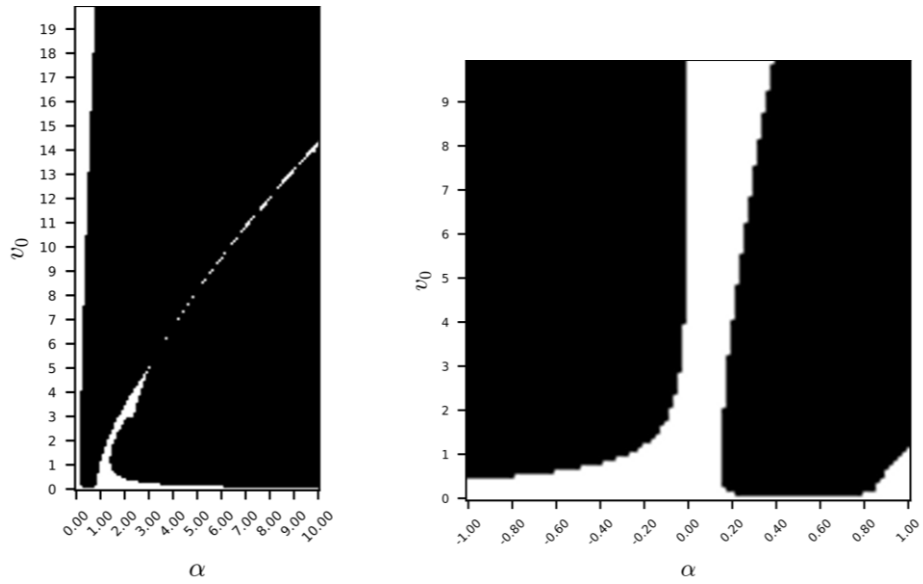


Рис. 1. Диаграмма устойчивости для разных значений коэффициента α и начального значения скорости v_0. Белому цвету соответствуют устойчивые регионы для любого значения k, черному — неустойчивые хотя бы для одного значения k.

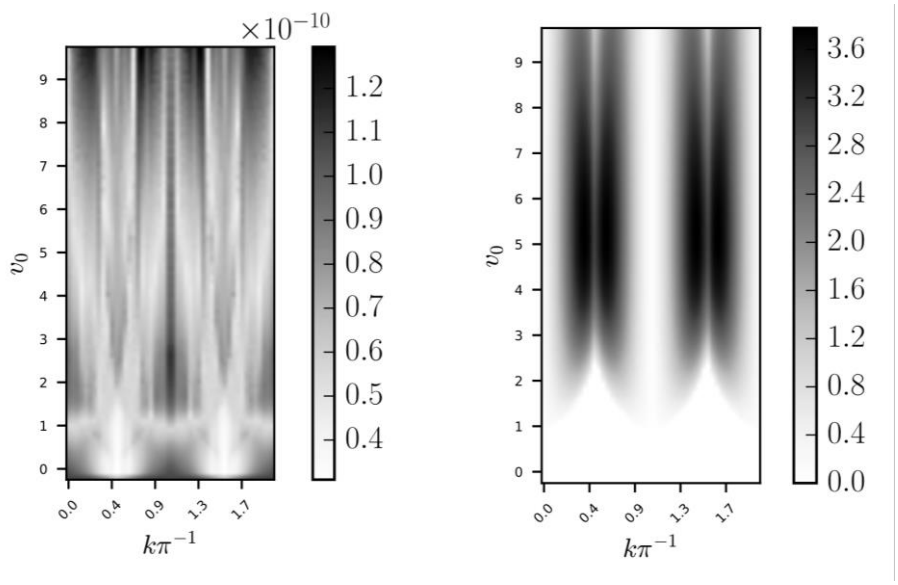


Рис. 2. Диаграмма наибольшего собственного значения матрицы монодромии для разных значений k и начального значения скорости v_0.
Слева диаграмма для коэффициента $\alpha = 0$, справа $\alpha = 1$.

Заключение. Таким образом, в настоящей работе была исследована устойчивость колебательной π-моды в возмущенной цепочке Тоды и построены соответствующие диаграммы, позволяющие наблюдать переход от полной устойчивости моды при $\alpha = 0$ к появлению зон неустойчивости.

ЛИТЕРАТУРА

1. Якубович В.А., Старжинский В.М. Линейные дифференциальные уравнения с периодическими коэффициентами. – М.: Наука, 1972. – 720 с.
2. Chechin G.M, Zhukov K.G. Stability analysis of dynamical regimes in nonlinear systems with discrete symmetries // Phys Rev E – 2006 – Vol. 73 – P. 36216.

УДК 530.344

А.А. Кривцова
Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого(*)

ДВИЖЕНИЕ ЭНЕРГЕТИЧЕСКОГО ЦЕНТРА ВОЗМУЩЕНИЯ В НЕОДНОРОДНОЙ СРЕДЕ

Введение. Необходимость описания процессов волнового переноса энергии возникает во многих прикладных задачах физики и механики, рассматривающих распространение сейсмических волн, оптических волн в атмосфере, волн на поверхности воды и т.д. Часто такие задачи связаны с некоторой степенью неоднородности среды, определяемой плотностью ρ или жесткостью C. В настоящей работе с помощью методов энергетической динамики исходная проблема сводится к описанию движения материальной точки в некотором силовом поле [1-2]. Точка представляет собой центр распределения энергии локализованного возмущения (энергетический центр). Это понятие при описании переноса энергии играет ту же роль, которую играет центр масс при переносе массы. В работе будут приведены решения уравнения движения энергетического центра для плоского и сферически симметричного случаев.

Уравнения динамики. Для построения математической модели в терминах энергетической динамики требуется составить: уравнение динамики среды и выражение для энергии. В качестве первого запишем неоднородное волновое уравнение (1), описывающее динамику среды.

$$\rho\ddot{u} = \nabla \cdot (C\nabla u), \tag{1}$$

здесь u – перемещение точек среды, ∇ – набла-оператор Гамильтона, точкой обозначаем производную по времени. Соответствующее распределение энергии имеет вид:

$$\varepsilon = \frac{\rho}{2}\dot{u}^2 + \frac{C}{2}(\nabla u)^2. \tag{2}$$

Дифференцируя по времени (2) с учетом (1), получим уравнения баланса:

$$\dot{\varepsilon} = -\nabla \cdot \mathbf{q}, \quad \dot{\mathbf{q}} = -\nabla \cdot \mathbf{g} + \boldsymbol{\varphi}, \tag{3}$$

где $\mathbf{q}$ и $\mathbf{g}$ – поток и суперпоток энергии, $\boldsymbol{\varphi}$ – подвод потока энергии. Жирным начертанием обозначаются тензорные и векторные величины. Слагаемое $\boldsymbol{\varphi}$ возникает ввиду неоднородности среды и определяется следующим образом [3]:

$$\boldsymbol{\varphi} = C\left(\nabla u \nabla u - \frac{1}{2}(\nabla u)^2 \mathbf{I}\right) \cdot \nabla\left(\frac{C}{\rho}\right), \tag{4}$$

где $\mathbf{I}$ – единичный тензор второго ранга.

С использованием уравнения (3) могут быть получены уравнения динамики энергетического центра возмущения [3]:

$$E\ddot{\mathbf{r}} = \boldsymbol{\Phi}, \quad E = \int \varepsilon\, dV, \quad \dot{\mathbf{r}} = \frac{1}{E}\int \boldsymbol{q}\, dV, \quad \boldsymbol{\Phi} = \int \boldsymbol{\varphi}\, dV. \tag{5}$$

Для энергетической силы $\boldsymbol{\Phi}$ имеем выражение, полученное в вириальном приближении:

$$\boldsymbol{\Phi} = \frac{m}{2}(\nabla_{\parallel} - \nabla_{\perp})(c^2), \tag{6}$$

где $c = \sqrt{C/\rho}$ – волновая скорость, $\nabla_{\parallel} = \mathbf{ee} \cdot \nabla$, $\nabla_{\perp} = \nabla - \nabla_{\parallel}$, $\mathbf{e} = \dot{r}/|\dot{\mathbf{r}}|$. Отсюда получаем замкнутое дифференциальное уравнение относительно энергетического центра возмущения [3]:

$$\ddot{\mathbf{r}} = (2\dot{\mathbf{r}}\dot{\mathbf{r}} - c^2\mathbf{I}) \cdot \nabla \ln c(r). \tag{7}$$

Среда с линейной жесткостью. Для начала рассмотрим двумерную пространственно-неоднородную среду с жесткостью, зависящей линейно от радиус-вектора:

$$\rho = \text{const}, \quad C = \mathbf{a} \cdot \mathbf{r} + C_0, \quad a < 0. \tag{8}$$

Уравнение динамики энергетического центра (7) приводится к виду:

(*) А.А. Кривцова, aaakrivtsova11@gmail.com

$$\ddot{\mathbf{r}} = \frac{1}{2\rho}\left(\frac{2}{\dot{r}^2}\dot{\mathbf{r}}\dot{\mathbf{r}}\cdot\mathbf{a} - \mathbf{a}\right). \tag{9}$$

Рассмотрим случай, когда вектор $\boldsymbol{a}$ направлен по оси Oy перпендикулярно начальной скорости возмущения: $\mathbf{v}_0 = v_{0x}\mathbf{i}$. Умножение уравнения (9) скалярно на $\dot{\mathbf{r}}$ позволяет выделить производные и получить первый интеграл:

$$\dot{r} = \sqrt{\frac{a_y}{\rho}y + v_0^2}. \tag{10}$$

Запись выражения (9) в проекциях и использование соотношения (10) приводит к нахождению параметрических зависимостей $x(t)$ и $y(t)$. Запишем конечный результат:

$$\begin{cases} x = \frac{|h|}{2}(\sin\Omega t + \Omega t), \\ y = \frac{h}{2}(\cos\Omega t - 1), \quad h = \frac{-C_0}{a_y}, \quad \Omega = \frac{|a_y|}{\rho v_0}. \end{cases} \tag{11}$$

Заметим, что полученная траектория имеет вид циклоиды (рис. 1).

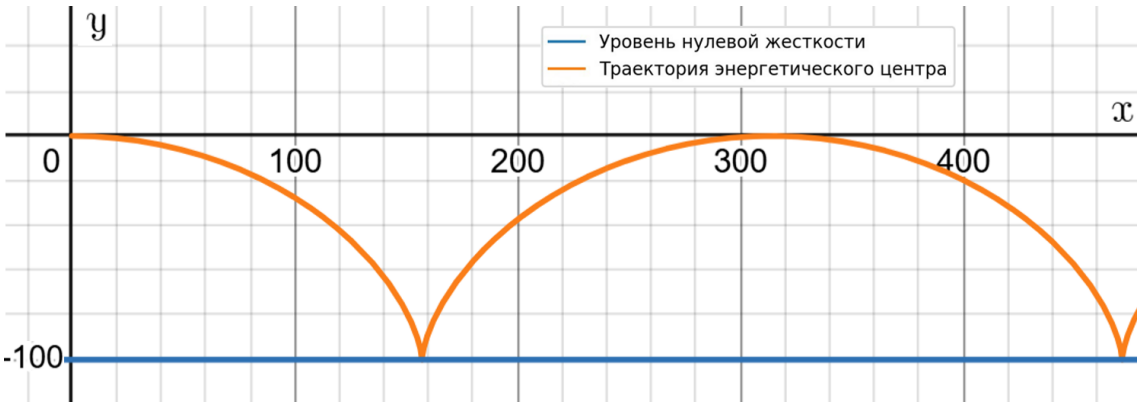


Рис. 1. Траектория движения энергетического центра возмущения, среда с линейной жесткостью

Для случая произвольного начального угла α_0 между скоростью и радиус-вектором получены уравнения:

$$\begin{cases} x = \frac{|h|}{2\cos^2\alpha_0}(\Omega t - \sin(\Omega t - 2\alpha_0) + \sin 2\alpha_0) \\ y = \frac{h}{2\cos^2\alpha_0}(\cos(\Omega t - 2\alpha_0) - \cos 2\alpha_0), \quad \Omega = \frac{|a_y|\cos\alpha_0}{\rho v_0}, \end{cases} \tag{12}$$

Из системы (12) видим, что форма траектории не зависит от выбора начального угла, последний определяет сдвиг и задает масштаб. Данная модель может быть использована для описания распространения сейсмической волны с поверхности Земли (уровень $C = 0$) на некоторую глубину с учетом неоднородности среды.

Центрально-симметричная среда. Развитие задачи предполагает учет искривления поверхности Земли. Круг, в котором задается изменяющейся параметр среды – упрощенная модель сечения земного шара. На основании результата, полученного при линейном задании жесткости, с учетом эмпирических данных (траектории сейсмических волн в сечении Земли [4]), можно предположить, что для некоторой зависимости жесткости от модуля радиус-вектора (13.2), решением уравнения динамики энергетического центра будет гипоциклоида.

$$\rho = \text{const}, \; C = C_0 - ar^2, \; a > 0. \tag{13}$$

В частном случае (рис. 2а) при $\alpha_0 = \frac{\pi}{2}$ имеем следующую параметрическую зависимость для проекций радиус-вектора энергетического центра:

$$\begin{cases} x = (R-h)\cos\Omega t + h\cos\left(\frac{R-h}{h}\Omega t\right), \\ y = (R-h)\sin\Omega t - h\sin\left(\frac{R-h}{h}\Omega t\right), \; \Omega = \sqrt{a}\sqrt{\frac{R-r_0}{R+r_0}}. \end{cases} \tag{14}$$

где $R = \sqrt{\frac{C_0}{a}}$ – радиус большой окружности или уровень, на котором жесткость среды равна нулю, $h = \frac{1}{2}(R - r_0)$ – радиус малой окружности «катящейся» по внутренней стороне большой окружности или высота арки гипоциклоиды.

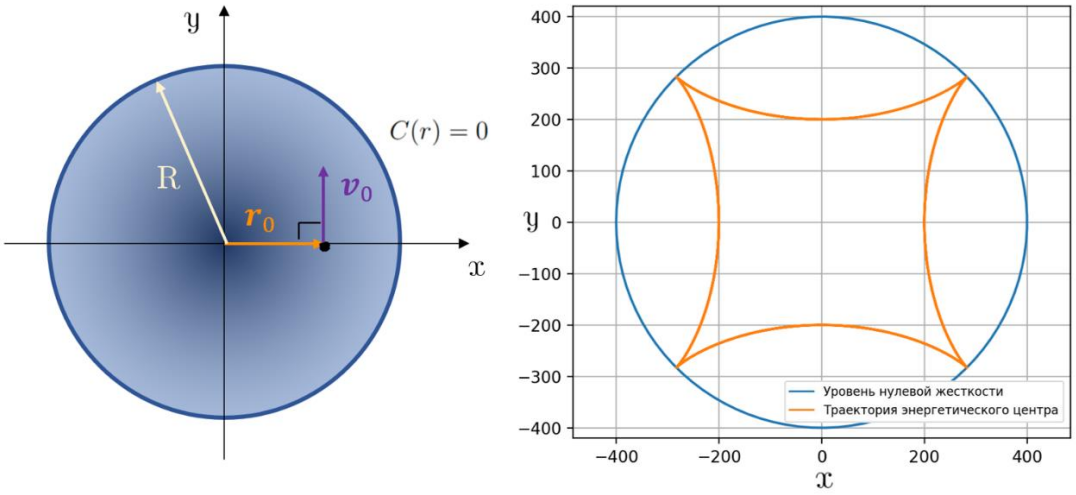


Рис. 2. а) Постановка задачи; б) траектория энергетического центра возмущения при $R/h = 4$.

Для произвольного начального угла параметры Ω и h, входящие в систему (14), будут иметь более сложный вид:

$$\Omega = \frac{\sqrt{a}\sqrt{C_0 - ar_0^2\cos^2\alpha_0} - r_0|a|\sin\alpha_0}{\sqrt{C_0 - ar_0^2}}, \quad h = \frac{1}{2}\left(R - r_0\sqrt{\frac{C_0}{C_0 - ar_0^2\cos^2\alpha_0}}\right). \tag{8}$$

Заключение. С помощью методов энергетической динамики были получены кривые, описывающие траекторию движения энергетического центра возмущения в среде с линейно изменяющейся жесткостью (рис. 1) и в изотропной среде с центрально-симметричной постановкой (рис. 2б). Показано, что движение энергетического центра в первом случае описывается циклоидой, а во втором — гипоциклоидой, когда жесткость имеет квадратичную зависимость от радиус-вектора. Найденные аналитические решения могут быть использованы для предсказания распространения волн в неоднородных средах и охватывают такие процессы, как рефракция и отражение от границы (моделирование распространения волн через границу раздела между двумя средами с помощью методов энергетической динамики [4]).

Автор благодарен А.М. Кривцову и В.А. Кузькину за постановку задачи и полезные обсуждения.

ЛИТЕРАТУРА

1. Krivtsov A.M. Dynamics of matter and energy // ZAMM - Journal of Applied Mathematics and Mechanics. – 2022. – Vol. 103. – P.32.
2. Baimova J.A., Bessonov N.M., Krivtsov A.M. Motion of localized disturbances in scalar harmonic lattices // Physical Review E. – 2023. – Vol. 107, No. 6. – 065002.
3. Кривцов А.М. Баланс потока энергии в консервативных средах. – Доклад на семинаре по механике сплошных сред, НИИ механики МГУ, 8 ноября 2023.
4. Robertson E.C. The interior of the Earth; an elementary description // U.S. Geological Survey Circular. – 1966. – Vol. 532. – P.10.
5. Kuzkin V.A. Acoustic transparency of the chain-chain interface // Physical Review E. – 2023. – Vol. 107. – P.14.

УДК 534.13

А.Д. Работинский[1], Е.Ф. Грекова[2,1]
[1]Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого(*)
[2]Институт проблем машиноведения РАН, Санкт-Петербург

СВОБОДНЫЕ ВОЛНЫ В СРЕДАХ БЕЗ СИММЕТРИИ ОТРАЖЕНИЯ

Введение. Существуют обширные исследования, посвященные микроструктурным моделям акустических метаматериалов [1-3]. Также предложены континуальные модели общего вида (модели редуцированных сред), проявляющие свойства акустических метаматериалов [4-7]. Весьма интересными волновыми свойствами обладают поперечные волны в гиротропной редуцированной среде [4], однако не было предложено ее конкретной реализации. Гиротропные среды обладают симметрией по отношению к поворотам, но не по отношению к отражениям. Не так много работ посвящено хиральным (не обладающим симметрией отражения) акустическим метаматериалам [3]. Отсюда возникает задача: предложить простейшие микроструктурные модели акустических гиротропных метаматериалов и исследовать влияние параметров на волновые свойства, что в дальнейшем позволит создавать среды с желаемым динамическим поведением: звукоизоляционные щиты, шумозащитные экраны.

Методы исследования. Используются фундаментальные законы механики, тензорное исчисление, асимптотические методы.

Полученные результаты. В ходе работы была предложена простейшая модель линейной гиротропной среды, представленная на рис.1.

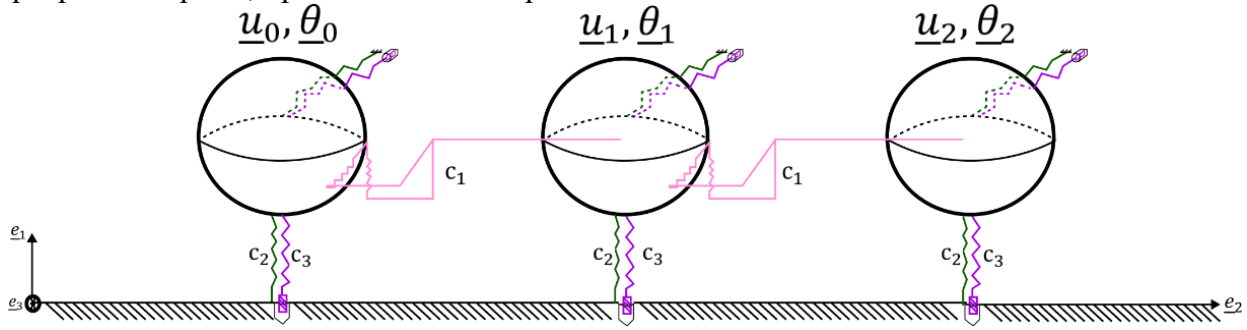


Рис. 1. Модель гиротропной одномерной среды

Шаровые тела-точки с тензором инерции $A_{00}\mathbf{E}$, массой A_{11} соединены между собой двумерными трансляционными пружинами жесткости c_1, реагирующими на сдвиг. Тела крепятся к жесткому основанию трансляционной пружиной с жесткостью c_2 и пружиной с жесткостью c_3, соединенной с основанием винтовой резьбой (без трения) с шагом b. Последний упругий элемент обеспечивает аксиальную взаимосвязь между трансляционными перемещениями u_i центров масс тел-точек и угловыми перемещениями θ_i. Она меняет знак при замене правой резьбы на левую, симметрия по отношению к отражениям отсутствует. Векторы и поворотов, и трансляционных перемещений трехмерны. Продольная волна не возбуждается.

Уравнения динамики для предложенной среды после континуализации записываются в виде:

$$\begin{cases} A_{00}\ddot{\boldsymbol{\theta}} + C_{00}\boldsymbol{\theta} - C_{10}\boldsymbol{u} - N\nabla\times\boldsymbol{u} = 0 \\ A_{11}\ddot{\boldsymbol{u}} + C_{11}\boldsymbol{u} - C_{10}\boldsymbol{\theta} - N\nabla\times\boldsymbol{\theta} + \gamma\nabla\times(\nabla\times\boldsymbol{u}) = 0 \end{cases}$$

(*) А.Д. Работинский, arabotinskij@mail.ru

Здесь $C_{00} = c_3\frac{b^2}{4\pi^2} + c_1R^2$ $C_{11} = c_2 + c_3$ – полярные жесткости, реагирующие на изменение $\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{u}$ соответственно, $\mathrm{C}_{10} = c_3\frac{b}{2\pi}$ – аксиальная взаимосвязь между $\boldsymbol{u}$ и $\boldsymbol{\theta}$, $N = c_1Rh,\ \gamma = c_1h^2$. Данные уравнения совпадают с уравнениями абстрактной редуцированной гиротропной среды, рассмотренной в [4], с точностью до обозначений. Соответственно, их уравнения Кристоффеля и дисперсионные соотношения также совпадают. Трансляционные перемещения играют роль «несущего континуума», в котором присутствуют все упругие связи, а угловые – «распределенного динамического гасителя», чьи тела-точки взаимодействуют лишь через несущий континуум. Это и обеспечивает свойства акустического метаматериала для данной модели. Энергия деформации и кинетическая энергия для такой сплошной среды записываются в виде

$$U = \nabla\mathbf{u}^T \cdot\cdot\, (\mu\, dev(\boldsymbol{e_m e_n})^S dev(\boldsymbol{e_m e_n})^S + \alpha(\boldsymbol{e_m e_n})^A(\boldsymbol{e_m e_n})^A) \cdot\cdot\, \nabla\mathbf{u} + \\ + \frac{1}{2}C_{11}\boldsymbol{u^2} + \frac{1}{2}C_{00}\boldsymbol{\theta^2} - N(\nabla\times\boldsymbol{u})\cdot\boldsymbol{\theta} + \mathrm{C}_{10}\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{\theta}$$

$$K = \frac{1}{2}A_{11}\dot{\boldsymbol{u}}^2 + \frac{1}{2}A_{00}\dot{\boldsymbol{\theta}}^2$$

$\gamma = \mu + \alpha$ – с точностью до деления на элементарный обьем.

Специфической чертой гиротропной среды является одновременное наличие взаимосвязи между деформацией несущего континуума и перемещением распределенного динамического гасителя, и между перемещениями обоих субконтинуумов ($\boldsymbol{u}, \boldsymbol{\theta}$), так как один из модулей должен быть полярным, а другой аксиальным. Разыскивая свободные волны в данной системе ($\boldsymbol{u} = \boldsymbol{U}e^{i(\omega t + \boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r})}, \boldsymbol{\theta} = \boldsymbol{\Theta}e^{i(\omega t + \boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r})}$), видим, что из-за наличия данной взаимосвязи дисперсионные графики не обладают симметрией относительно оси ординат. Это связано с существованием различных волн круговой поляризации, бегущих в противоположных направлениях. Такие волны наблюдаются в хиральных акустических метаматериалах [3].

Полученное в [4] дисперсионное соотношение не было достаточно проанализировано. Этот пробел устранен в данной работе. Были получены ключевые параметры**,** качественно влияющие на распространение волн в данной среде:

$$p_c = \frac{C_{10}}{\sqrt{A_{11}A_{00}}\omega_*^2}, p_n = \frac{N}{\sqrt{\gamma A_{00}}\omega_*}, p_{\omega_1} = \frac{\omega_1}{\omega_*} = \sqrt{\frac{C_{11}}{A_{11}}}\frac{1}{\omega_*}, \omega_*^2 = \omega_0^2 - \frac{N^2}{A_{00}\gamma}$$

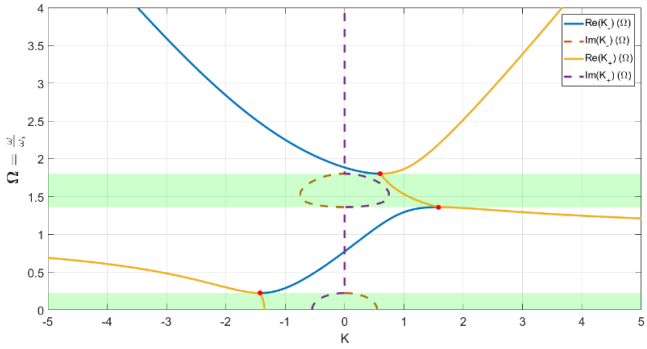
Здесь $\omega_1 = \frac{C_{11}}{A_{11}}, \omega_0 = \frac{C_{00}}{A_{00}}$ – соответствующие парциальные частоты колебаний по каждой из степеней свободы.

Также было проведено исследование зон существенного поглощения и зон аномального преломления, рассмотрены разные предельные случаи значений основных параметров. Показано аналитически, что существует как минимум три точки, где групповая скорость меняет знак при изменении частоты. Они показаны красным на рис. 2. Фазовая скорость меняет знак в двух точках (при пересечении ветвью оси ординат). Эти пять точек разграничивают зоны нормального и аномального преломления для соответствующих волн. В работе был проведен подробный параметрический анализ, рассмотрены предельные случаи (малая анизотропия, близкие собственные парциальные частоты каждой из фаз и т.д.). Также в работе представлены аналитическое исследование влияние параметра $\xi = p_c p_n$, который определяет, насколько сильно среда отличается от изотропной (в изотропной среде $\xi = 0$) и было показано, что знак этого параметра качественно определяет расположение точек смены зон преломления и вид дисперсионных кривых. Одна из ветвей имеет асимптоту $\Omega = 1$.

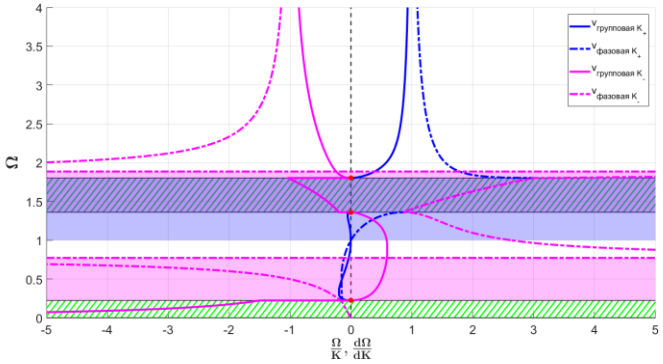
Типичные графики для безразмерных волновых чисел K:

$$\begin{cases} K = \dfrac{\sqrt{\dfrac{\gamma}{A_{11}}}}{\omega_*} k = \dfrac{p_c p_n \pm \sqrt{(\Omega^2 - \Omega_0^2)(\Omega^2 - \Omega_+^2)(\Omega^2 - \Omega_-^2)}}{\Omega^2 - 1}, \qquad \Omega \neq 1 \\ K = \dfrac{p_n^2\left(1 - p_{\omega_1}^2\right) + p_c^2}{2 p_c p_n}, \quad \Omega = 1 \\ \Omega_0^2 = \dfrac{\omega_0^2}{\omega_*^2} = 1 + p_n^2, \qquad \Omega_\pm^2 = \dfrac{\omega_\pm^2}{\omega_*^2} = \dfrac{1}{2}\left(p_{\omega_1}^2 + 1 \pm \sqrt{\left(p_{\omega_1}^2 - 1\right)^2 + 4 p_c^2}\right. \end{cases}$$

и скоростей в зависимости от безразмерной частот $\Omega = \dfrac{\omega}{\omega_*}$ приведены на рис. 2.



(а)



(б)

Рис. 2. Дисперсионные кривые гиротропной среды ξ = 1.35; $\Omega_- = \dfrac{\omega_-}{\omega_*} \approx$ 0.2233; $\Omega_+ = \dfrac{\omega_+}{\omega_*} \approx 1.3611$; $\Omega_0 = \dfrac{\omega_0}{\omega_*} = 1.8027$

ЛИТЕРАТУРА

1. Gao N., Zhang Zh. Acoustic metamaterials for noise reduction: a review // Advanced Materials Technologies. – 2022. – Т. 7, № 6. – С. 128–156.
2. Бобровницкий Ю.И. Модели и общие волновые свойства двумерных акустических метаматериалов и сред // Акустический журнал. – 2015. – Т. 61, № 3. – С. 283–283.
3. Tong Q., Li J., Wang Sh. Acoustic circular dichroism in a three-dimensional chiral metamaterial // Physical Review B. – 2023. – Т. 107, № 13. – С. 103–134.
4. Grekova E.F. Viscoelastic reduced enhanced isotropic continua as acoustic metamaterials // Philosophical Transactions of the Royal Society A. 2022. Т. 380, № 2237. С. 321–457
5. Grekova E.F. Nonlinear isotropic elastic reduced and full Cosserat media: waves and instabilities // Continuum Mechanics and Thermodynamics. – 2019. – Т. 31, № 6. – С. 1805–1824.
6. Грекова Е.Ф. Об одном классе единожды отрицательных акустических метаматериалов // Доклады Академии наук. – 2015. – Т. 462, № 3. – С. 295–298.
7. Grekova E.F. Reduced enhanced elastic continua as acoustic metamaterials // Dynamical processes in generalized continua and structures. – 2019. – С. 253–268.

УДК 534.13

Д.А. Семенин[1], К.П. Фролова[2,1]
[1]Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого(*)
[2]Институт проблем машиноведения РАН, Санкт-Петербург

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ЭФФЕКТИВНОЙ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ МАТЕРИАЛА С НЕИДЕАЛЬНЫМИ КОНТАКТАМИ НА ГРАНИЦЕ РАЗДЕЛА ФАЗ

Введение. Внутренняя структура материалов оказывает существенное влияние на их характеристики. В связи с этим, вычисление эффективных свойств с учетом их зависимости от микроструктурных параметров является важной задачей для промышленности. Зачастую, матрица композита может обладать отличными от включений свойствами. В частности, они могут характеризоваться тензором теплопроводности, не совпадающим с тензором теплопроводности включения. Чаще всего в моделях предполагается идеальность контактов на границе раздела фаз [1]. Тем не менее в ряде случаев может иметь место нарушение таких контактов. В работе исследован случай, когда температура на границе не непрерывна. Это может быть учтено посредством рассмотрения неоднородности с бесконечно тонким теплоизолирующим покрытием [2].

Цель работы заключается в определении эффективной теплопроводности материала с учетом неидеальных контактов на границе раздела фаз на основании решения задачи гомогенизации для репрезентативного объема V.

Эффективные свойства выражаются с помощью тензорных величин, связывающих между собой поля, осредненные по репрезентативному объему. Предполагается, что гомогенизированный материал удовлетворяет линейному определяющему соотношению:

$$\langle \mathbf{J} \rangle_V = -\mathbf{K}^{\mathbf{eff}} \cdot \langle \nabla T \rangle_V, \qquad (1)$$

где $\mathbf{K}^{\mathbf{eff}}$ – эффективный тензор теплопроводности, $\mathbf{J}$ – тепловой поток, ∇T – градиент температуры.

Определим сначала вклад единичной неоднородности, окруженной бесконечно тонким теплоизолирующим слоем. Свойства матрицы, неоднородности и слоя характеризуются соответственно изотропными тензорами $\mathbf{K}_m = K_m\mathbf{I}, \mathbf{K}_i = K_i\mathbf{I}, \mathbf{K}_s = K_s\mathbf{I}$ (здесь $\mathbf{I}$ – единичный тензор). На рис. 1 представлена геометрия неоднородности.

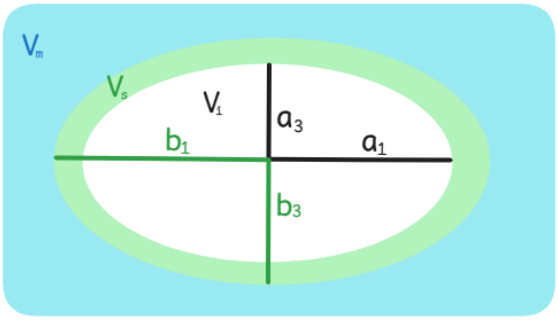


Рис. 1. Геометрия неоднородности с изолирующим слоем

Средний градиент температуры и тепловой поток выражаются следующим образом:

$$\langle \nabla T \rangle_V = \left(1 - \frac{V_i}{V} - \frac{V_s}{V}\right)\langle \nabla T \rangle_{V_m} + \frac{V_s}{V}\langle \nabla T \rangle_{V_s} + \frac{V_i}{V}\langle \nabla T \rangle_{V_i}, \qquad (2)$$

$$\langle \mathbf{J} \rangle_V = -\mathbf{K}_m \cdot \langle \nabla T \rangle_V - \frac{V_s}{V}(\mathbf{K}_s - \mathbf{K}_m) \cdot \langle \nabla T \rangle_{V_s} - \frac{V_i}{V}(\mathbf{K}_i - \mathbf{K}_m) \cdot \langle \nabla T \rangle_{V_i}, \qquad (3)$$

(*) Д.А. Семенин, dasemenin@gmail.com

где $\langle \dots \rangle_{V_a} = \frac{1}{V_a}\int_{V_a}(\dots)dV_a$.

Введем в рассмотрение тензоры концентрации $\mathbf{\Lambda}_s$ и $\mathbf{\Lambda}_i$:

$$\langle \nabla T\rangle_{V_s} = \mathbf{\Lambda}_s \cdot \langle \nabla T\rangle_V, \qquad \langle \nabla T\rangle_{V_i} = \mathbf{\Lambda}_i \cdot \langle \nabla T\rangle_V, \tag{4}$$

здесь учтено, что средний по объему градиент температуры совпадает с заданным на границе.

Формулу (3) для теплового потока с учетом (4) можно записать таким образом:

$$\langle \mathbf{J}\rangle_V = \left(\mathbf{K}_m + \frac{1}{V}(V_s(\mathbf{K}_\mathrm{s} - \mathbf{K}_m)\cdot\mathbf{\Lambda}_s + V_i(\mathbf{K}_i - \mathbf{K}_m)\cdot\mathbf{\Lambda}_i)\right)\cdot\langle\nabla T\rangle_V = (\mathbf{K}_\mathrm{m} + \frac{V_b}{V}\mathbf{H}^\mathrm{D})\cdot\langle\nabla T\rangle_V, \tag{5}$$

где $\mathbf{H}^\mathrm{D}$ – тензор вклада в теплопроводность, $V_b = V_s + V_i$.

Учтем, что слой бесконечно тонкий и теплоизолирующий, тогда $v_b \to v_i,\ K_s \to 0$ и

$$\mathbf{H}^D = (K_i - K_m)\mathbf{\Lambda}_i - \frac{V_s}{V_i}K_m\mathbf{\Lambda}_s, \tag{6}$$

тензоры концентрации вычисляются по формулам, полученным из решения задачи Эшелби.

Для определения эффективных свойств рассмотрим метод гомогенизации Максвелла [1], он предполагает введение фиктивной области Ω, которая генерирует в некоторой удаленной точке такое же поле, что и множество изолированных неоднородностей. Тогда:

$$\frac{V_\Omega}{V}\mathbf{H}^D_{eff} = \frac{1}{V}\sum_k V_k\mathbf{H}^D_k, \qquad \mathbf{H}^D_{eff} = [(\mathbf{K}^{eff} - \mathbf{K}_m)^{-1} + \mathbf{P}_\Omega]^{-1}, \tag{7}$$

где $\mathbf{P}_\Omega$ – тензор Хилла фиктивной области.

В результате, $\mathbf{K}^{eff}$ имеет вид:

$$\mathbf{K}^{eff} = \mathbf{K}_m + \left(\left(\frac{1}{V_\Omega}\sum_k V_k\mathbf{H}^D_k\right)^{-1} - \mathbf{P}_\Omega\right)^{-1} = \mathbf{K}_m + ((\phi\langle\mathbf{H}^D_k\rangle)^{-1} - \mathbf{P}_\Omega)^{-1}, \tag{8}$$

где ϕ – объемная доля неоднородностей в материале, треугольные скобки означают осреднение по ориентациям неоднородностей

Рассмотрим также схему гомогенизации Мори-Танака [3], она предполагает, что каждая неоднородность помещается в среднее по матрице поле. Согласно этой идее, поле внутри неоднородности и слоя выражается следующим образом:

$$\langle \nabla T\rangle_{V_s} = \mathbf{\Lambda}_s\cdot\langle\nabla T\rangle_{V_m} = \mathbf{\Lambda}_s\cdot\mathbf{G}^{eff}, \qquad \langle \nabla T\rangle_{V_i} = \mathbf{\Lambda}_i\cdot\langle\nabla T\rangle_{V_m} = \mathbf{\Lambda}_i\cdot\mathbf{G}^{eff}. \tag{9}$$

Тогда осредненный по объему градиент температуры можно переписать в виде:

$$\langle\nabla T\rangle_V = \left(1 - \frac{V_i}{V} - \frac{V_s}{V}\right)\mathbf{G}^{eff} + \frac{V_s}{V}\mathbf{\Lambda}_s\cdot\mathbf{G}^{eff} + \frac{V_i}{V}\mathbf{\Lambda}_i\cdot\mathbf{G}^{eff}. \tag{10}$$

Подставив формулу (10) в выражение для теплового потока, получим:

$$\langle\mathbf{J}\rangle_V = \left(\mathbf{K}_m + \sum_i\frac{V_i}{V}\mathbf{H}^D_i\cdot\left(\left(1 - \sum_i\frac{V_b}{V}\right)\boldsymbol{I} + \frac{1}{V}\sum_i\left(V_i + V_sA_j\frac{K_i}{K_s}\right)\mathbf{\Lambda}_i\right)^{-1}\right)\cdot\langle\nabla T\rangle_V \tag{11}$$

С учетом выражения связи тензора концентрации и тензора вклада, а также $v_b \to v_i,\ K_s \to 0,\ \sum_i V_i/V = \phi$ получим следующее представление для тензора эффективной теплопроводности:

$$\mathbf{K}^{eff} = \mathbf{K}_m + \phi\langle\mathbf{H^D}\rangle\cdot\left((1-\phi)\mathbf{I} + \frac{1}{V}\sum_i V_i\frac{1+\frac{Sa}{V_i}RA_j}{K_i - K_m - \frac{Sa}{V_i}RK_mA_j}\mathrm{H}^D_{i_{jj}}\boldsymbol{e}_j\boldsymbol{e}_j\right)^{-1} \tag{12}$$

здесь S – площадь поверхности сфероида, $R = V_sK_i/(K_SSa)$ – параметр эквивалентной поверхностной сопротивляемости.

Рассмотрим сфероидальные неоднородности, тогда $Sa/V_i = 3\tilde{S}/(4\pi\gamma)$, где $\tilde{S}$ – безразмерная площадь поверхности. С учетом того, что все неоднородности имеют одинаковую форму, формулу (12) можно переписать в виде:

$$\mathbf{K}^{eff} = \mathbf{K}_m + \phi\langle\mathbf{H^D}\rangle\cdot\left((1-\phi)\mathbf{I} + \phi\left\langle\frac{1+\frac{\tilde{S}}{\frac{4}{3}\pi\gamma}RA_j}{K_i - K_m - \frac{\tilde{S}}{\frac{4}{3}\pi\gamma}RK_mA_j}\mathrm{H}^D_{i_{jj}}\boldsymbol{e}_j\boldsymbol{e}_j\right\rangle\right)^{-1}. \tag{13}$$

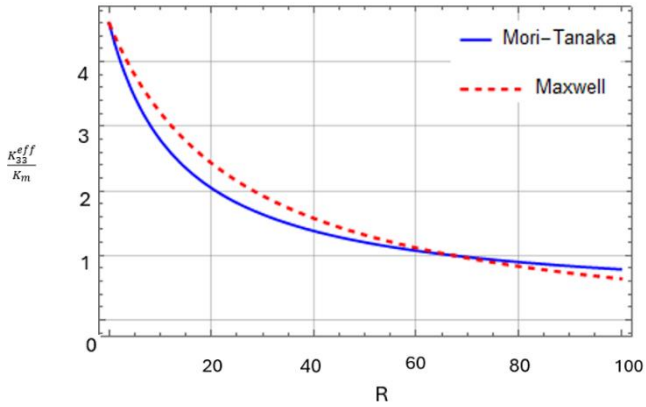


Рис. 2. Зависимость безразмерных эффективных коэффициентов теплопроводности вдоль оси симметрии материала $\mathbf{e}_3$ от его безразмерной эквивалентной поверхностной сопротивляемости для случая параллельного распределения неоднородностей, при $\gamma = 5$, $K_i/K_m = 10$, $\phi = 0.5$

На рис. 2 представлены зависимости эффективных коэффициентов теплопроводности вдоль оси симметрии материала $\mathbf{e}_3$ от его безразмерной эквивалентной поверхностной сопротивляемости для случая параллельного распределения сфероидальных неоднородностей. Видно, что наличие неидеального контакта оказывает существенное влияние на теплопроводность. Также видно, что методы Максвелла и Мори-Танака приводят к разным результатам.

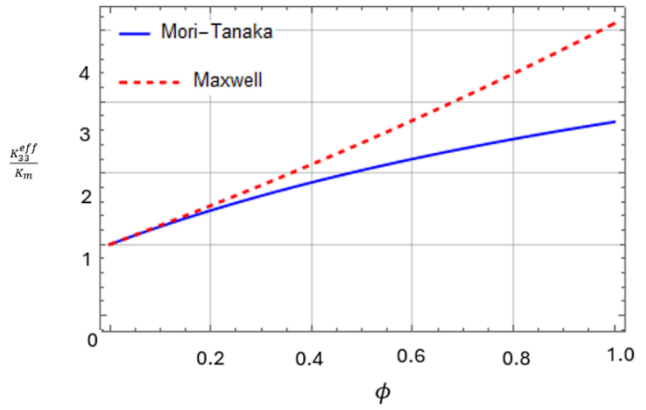


Рис. 3. Зависимость безразмерных эффективных коэффициентов теплопроводности вдоль оси симметрии материала $\mathbf{e}_3$ от объемной доли неоднородностей, при $\gamma = 5$, $K_i/K_m = 10$, R=20

На рис. 3 представлены зависимости эффективных коэффициентов теплопроводности вдоль оси симметрии материала $\mathbf{e}_3$ от объемной доли неоднородностей. Видно, что разница между методами увеличивается при увеличении концентрации неоднородностей.

Заключение. Неидеальный контакт может оказывать существенное влияние на эффективные свойства материалов, в связи с этим его важно учитывать при проведении процедуры гомогенизации. Из полученных выражений видно, что это влияние может изменяться в зависимости от конкретных значений микроструктурных параметров.

ЛИТЕРАТУРА

1. Kachanov M., Sevostianov I. Micromechanics of materials, with applications. – Springer, 2018. – Vol. 249.
2. Levin V., Markov M. Effective thermal conductivity of micro-inhomogeneous media containing imperfectly bonded ellipsoidal inclusions // International Journal of Engineering Science. – 2016. – Vol. 109. – P. 202-215.
3. Mori T. Tanaka K. Average stress in matrix and average elastic energy of materials with misfitting inclusions // Acta metallurgica. – 1973. – Vol. 21, no. 5. – P. 571-574.

УДК 531.391

Н.Э. Шелехов
Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого(*)

ЧИСЛЕННЫЙ АНАЛИЗ ЛОКАЛИЗОВАННЫХ КОЛЕБАНИЙ ТОНКОГО НЕРАСТЯЖИМОГО КОЛЬЦА

Основным объектом исследования в данной работе является распространение волн в тонком нерастяжимом упругом кольце. В работе [1] было показано, что волны в таком кольце обладают инерциальными свойствами. Это позволяет использовать кольцо как датчик инерциальной информации – волновой твердотельный гироскоп. Предлагается рассмотреть распространение локального возмущения в тонком нерастяжимом упругом кольце при помощи энергетической динамики [2]. Возмущение считается локальным, если длина волны возмущения много меньше радиуа кольца.

Уравнение динамики кольца [1]:

$$\begin{cases} \ddot{w}'' - \ddot{w} + 4\Omega\dot{w}' + 2\dot{\Omega}w' + \dfrac{EJ}{\rho SR^4}(w^{VI} + 2w^{IV} + w'') - \Omega^2(w^{IV} + 3w'') = 0 \\ v' = w, \end{cases} \quad (1)$$

где w – перемещение точки кольца в направлении центра, v – перемещение точки кольца в направлении касательной E – модуль упругости, J – момент инерции сечения, S – площадь сечения, ρ – плотность, R – радиус кольца, Ω – угловая скорость вращения кольца. Здесь и далее точкой обозначена производная по времени, штрихом – по пространственной переменной.

Обезразмерим первое уравнение системы (1), введя безразмерное время $\tau = \frac{EJ}{\rho SR^4}t$ и безразмерную скорость вращения кольца $\omega = \frac{\rho SR^4}{EJ}\Omega$. Тогда система (1) примет вид:

$$\begin{cases} \ddot{w}'' - \ddot{w} + 4\omega\dot{w}' + 2\dot{\omega}w' + w^{VI} + 2w^{IV} + w'' - \omega^2(w^{IV} + 3w'') = 0 \\ v' = w, \end{cases} \quad (2)$$

Плотность энергии (энергия на единицу длины) имеет вид [1]:

$$p = \frac{1}{2}\left((\dot{v} - w\Omega + R\Omega)^2 + (\dot{w} + v\Omega) + (w'' + v')^2\right). \quad (3)$$

Для начала сравним распространение локального возмущения в кольце и в балке Бернулли-Эйлера. Уравнение динамики балки Бернулли-Эйлера:

$$\ddot{u} + u'''' = 0. \quad (4)$$

Плотность энергии балки Бернулли-Эйлера:

$$p = \frac{1}{2}(\dot{u}^2 + u''^2). \quad (5)$$

Подставим в систему (2) и уравнение (4) следующие начальные условия:

$$\begin{cases} w(0,\phi) = Ae^{-a\phi^2}\cos(b\phi) \\ \dot{w}(0,\phi) = 0, \end{cases} \qquad \begin{cases} u(0,x) = Ae^{-ax^2}\cos(bx) \\ \dot{u}(0,x) = 0. \end{cases} \quad (6)$$

Решая систему (1) и уравнение (4) с начальными условиями (6) при помощи неявного численного метода конечных разностей [3], получим значения функций w, v и u. Подставив эти значения в выражения (3) и (5), получим распределение плотности энергии в кольце и в балке в каждый момент времени.

Для описания распространения локального возмущения при помощи энергетической динамики вычислим координату его энергетического центра [2]:

(*) Н.Э. Шелехов, shelekhov.97@mail.ru

$$\Phi_c = \frac{\int \phi p(t,\phi)dx}{\int p(t,\phi)dx}, \qquad X_c = \frac{\int x p(t,x)dx}{\int p(t,x)dx}, \tag{7}$$

и энергетический радиус [3]:

$$R_{\phi c} = \sqrt{\frac{\int (\Phi c - x)p(t,\phi)d\phi}{\int p(t,\phi)d\phi}}, \qquad R_c = \sqrt{\frac{\int (\mathrm{X}c - x)p(t,x)dx}{\int p(t,x)dx}}. \tag{8}$$

Энергетический радиус нужен для качественной оценки релокализации локального возмущения. Полученные зависимости представлены на рис.1.

а) *б)*

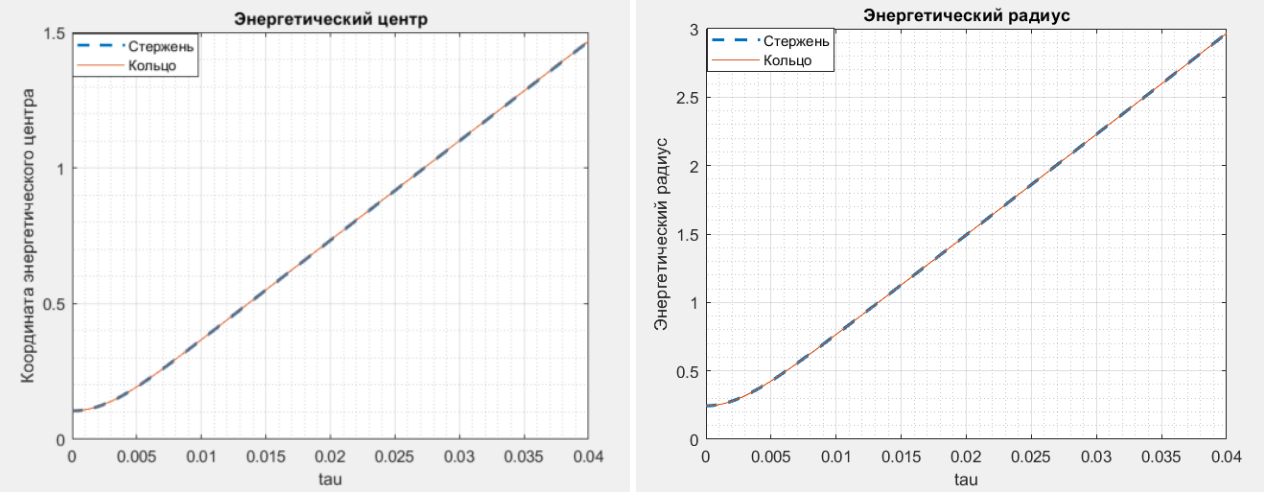


Рис. 1. а) Зависимость координаты энергетического центра от времени;
б) зависимость энергетического радиуса от времени

Из полученных зависимостей видно, что координата и скорость энергетического центра, а также энергетический радиус локального возмущения в кольце и в балке Бернулли-Эйлера совпадают в каждый момент времени. Таким образом, можно сделать вывод о том, что локальное возмущение одинаково распространяется в балке Бернулли-Эйлера и в покоящемся кольце.

а) *б)*

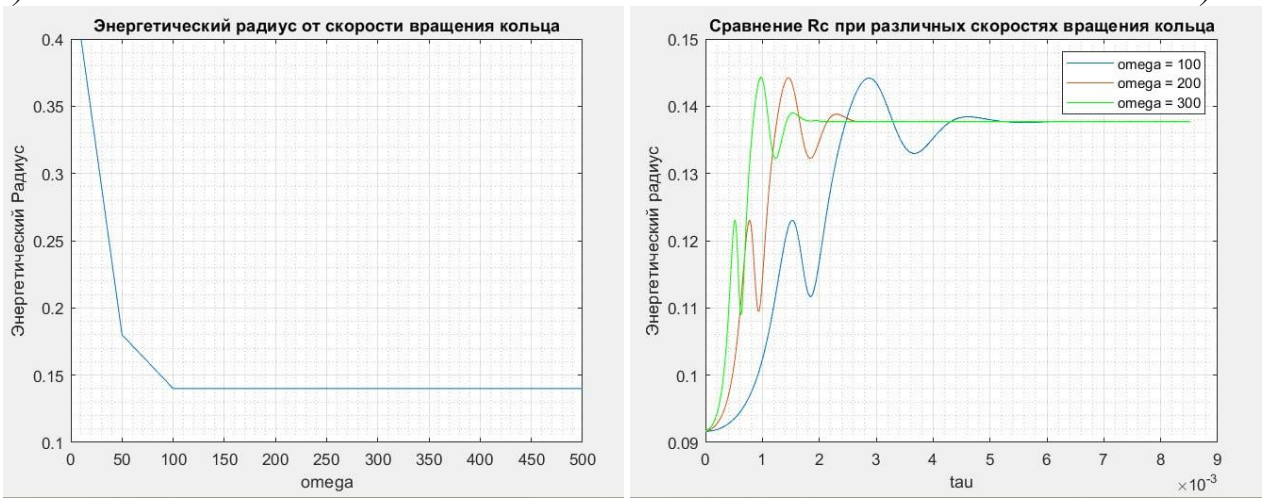


Рис. 2. а) Зависимость предельного значения энергетического радиуса от скорости вращения кольца;
б) сравнение временных зависимостей энергетического радиуса
при разных скоростях вращения кольца

Рассмотрим распространение локального возмущения, заданного начальными условиями (6) во вращающемся кольце. Вычислим временную зависимость энергетического радиуса при разных скоростях вращения кольца. Из рис. 2 следует, что, начиная с некоторой скорости вращения кольца, локальное возмущение в нем перестает расплываться.

В качестве развития данной работы будет уточнена величина скорости вращения кольца, при которой скорость расплывания локального возмущения будет равна нулю. Будет уточнена зависимость предельного значения энергетического радиуса локального возмущения от скорости вращения кольца на более точной численной схеме. Также планируется построить аналитическое описание этой зависимости.

Автор благодарен Кривцову А.М. за предложенную задачу и полезное обсуждение.

ЛИТЕРАТУРА

1. Журавлев В.Ф., Климов Д.М. Волновой твердотельный гироскоп. – М.: Наука, 1985. – 130 с.
2. Baimova J.A., Bessonov N.M., Krivtsov A.M, Trunova I.N. Energy dispersion of localized disturbance in continuum and descrete media // Phys. Rev. E. – 2024. – Vol.110 (6).
3. Витохин Е.Ю. Вычислительная механика. Учебное пособие. Изд-во Политехнического ун-та, 2022. – 53с.

СЕКЦИЯ "МЕХАНИКА И ПРОЦЕССЫ УПРАВЛЕНИЯ"

УДК 539.3

Д.В. Авдонюшкин, А.С. Семенов
Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого(*)

МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРОЦЕССА РОСТА ПЕРОВСКИТНОЙ ФАЗЫ В ТОНКОЙ СЕГНЕТОЭЛЕКТРИЧЕСКОЙ ПЛЕНКЕ

Введение. Формирование перовскитовой фазы в тонких пленках твердого раствора $Pb(Zr_xTi_{1-x})O_3$ (PZT пленке) играет ключевую роль в достижении высоких сегнето- и пьезоэлектрических характеристик, востребованных в устройствах энергонезависимой памяти, микроактуаторах, сенсорах давления, и других компонентах микроэлектроники. Одним из ключевых факторов, влияющих на процесс формирования, структуру и свойства перовскитной фазы, являются механические напряжения, возникающие в процессе изготовления пленки вследствие фазового перехода пирохлор→перовскит, а также несоответствия коэффициентов теплового расширения пленки и подложки. Эти напряжения приводят к образованию блочных сферолитовых структур, для которых характерна линейная зависимость поворота ростовой оси в радиальном направлении (рис. 1). В результате такого роста формируется мозаичная микроструктура, состоящая из соприкасающихся сферолитов с характерной кусочно-линейной границей между ними (рис. 2).

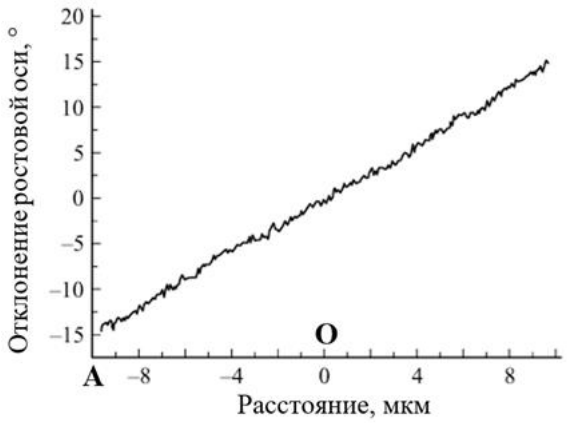


Рис. 1. Угол отклонения ростовой оси от нормали в зависимости от расстояния от центра сферолита [1]

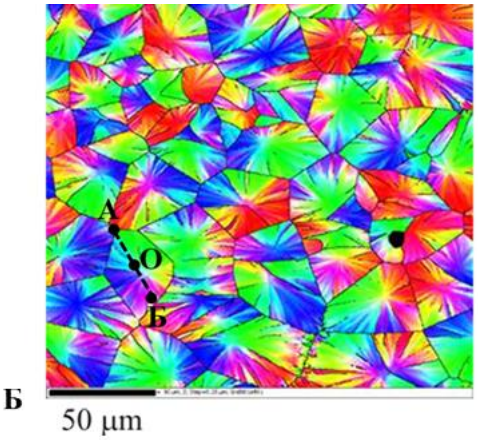


Рис. 2. Карта ориентации ростовых осей в блочной сферолитовой структуре [2]

Целью работы является исследование процессов роста перовскитной фазы на основе прямого численного моделирования с использованием методов резкой межфазной границы и диффузной межфазной границы (метод фазового поля).

Конфигурационная сила для модели с резкой межфазной границей. Скорость движения границы раздела фаз определяется конфигурационной силой [3]:

$$f_n = -\boldsymbol{n} \cdot [\![\rho\psi \boldsymbol{E} - \boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\varepsilon}]\!] \cdot \boldsymbol{n}, \qquad (1)$$

где $\psi = \frac{1}{2}\boldsymbol{\sigma} \cdot\cdot \boldsymbol{\varepsilon}^e + \psi_0$ – свободная энергия Гельмгольца, $\boldsymbol{\varepsilon}^e = \boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\varepsilon}^{tr}$ – тензор упругой деформации, $\boldsymbol{\varepsilon}^{tr} = \varepsilon^{tr}\,\boldsymbol{E}$ – тензор трансформационной деформации, $\boldsymbol{E}$ – единичный тензор, Следует отметить, что свободная энергия состоит из двух частей: упругой энергии

(*) Д.В. Авдонюшкин, avdonyushkin.dmitrij@mail.ru

деформации $\frac{1}{2}\boldsymbol{\sigma} \cdot\cdot\, \boldsymbol{\varepsilon}^e = \frac{1}{2}\boldsymbol{\varepsilon}^e \cdot\cdot\, {}^4\boldsymbol{C} \cdot\cdot\, \boldsymbol{\varepsilon}^e$ и энергии химических связей ψ_0, зависящей от температуры. При фазовом переходе предполагается, что скачки $[\![\varepsilon^*]\!] \neq 0$, $[\![{}^4\boldsymbol{C}]\!] \neq \mathbf{0}$ и $[\![\psi_0]\!] \neq 0$.

Результаты расчета конфигурационной силы для модели с резкой межфазной границей на основе КЭ решения. В качестве модельной рассматривается задача о росте цилиндрического зародыша перовскитной фазы в пирохлорном окружении (рис. 3). Начальная толщина пленки равнялась $h = 500$ нм. Скачек трансформационной деформации при фазовом переходе пирохлор → перовскит $[\![\varepsilon^*]\!] = -0.08$. Задача решалась в осесимметричной постановке, для учета соседних зародышей на краю рассматриваемой области задавался запрет перемещений в радиальном направлении. Расстояние между центрами зародышей принималось равным $2\rho = 10h = 5$ мкм. По результатам вычислений напряженно-деформированного состояния с помощью КЭ программы ANSYS были построены графики зависимости конфигурационной силы от вертикальной координаты (рис. 4). Полученные монотонно возрастающие зависимости указывают на возможность описания эффекта поворота ростовой оси в процессе роста перовскитной фазы на основе используемой модели.

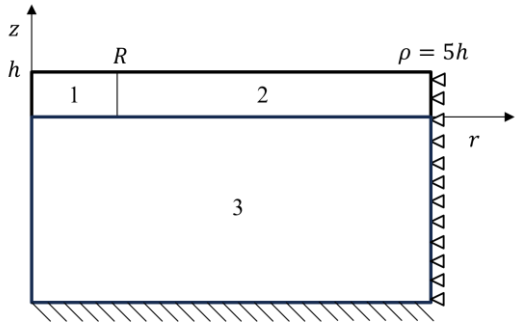


Рис. 3. Постановка краевой задачи:
1 – фаза перовскита, 2 – фаза пирохлора,
3 – кремневая подложка

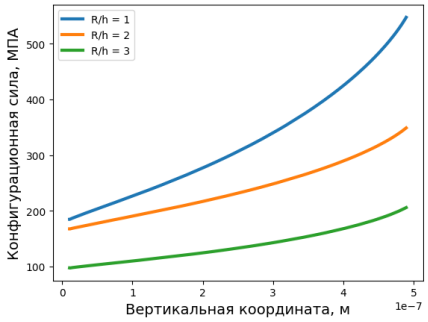


Рис. 4. Зависимость конфигурационной силы (1) от вертикальной координаты z при различных размерах зародыша

Результаты расчета конфигурационной силы для модели с резкой межфазной границей на основе аналитического решения. Краевая задача решалась в упрощенной постановке в предположении отсутствия деформирования подложки в вертикальном направлении (что эквивалентно граничному условию симметрии) (рис. 5). Решение задачи осуществлялось на основе использования разложения потенциалов Папковича-Нейбера в ряд по модифицированным функциям Бесселя [4]. Результаты расчета зависимости конфигурационной силы от вертикальной координаты на основе аналитического решения приведены на рис. 6.

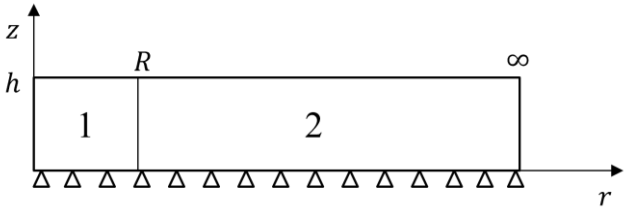


Рис. 5. Упрощенная постановка задачи

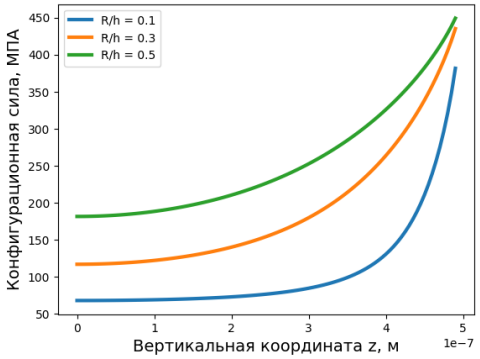


Рис. 6. Зависимость конфигурационной силы (1) от вертикальной координаты, полученная с помощью аналитического решения

Результаты моделирования роста зародыша с помощью метода фазового поля. В методе фазового поля предполагается, что в каждой точке тела, может одновременно находиться несколько фаз. Эволюция концентрации перовскита c в точке определяется уравнением [5]:

$$\dot{c} = -L\left(A\frac{\partial f_{loc}}{\partial c} - \kappa\nabla^2 c + \frac{\partial \psi}{\partial c}\right), \quad (2)$$

где $f_{loc} = c^2(1-c^2)$, производная свободной энергии по концентрации определяется равенством:

$$\frac{\partial \psi}{\partial c} = -tr(\boldsymbol{\sigma})\varepsilon^{tr} + \frac{1}{2}\boldsymbol{\varepsilon}^e \cdot\cdot \frac{\partial^4 \boldsymbol{C}}{\partial c} \cdot\cdot \boldsymbol{\varepsilon}^e + \frac{\partial \psi_0}{\partial c},$$

где $\frac{\partial \psi_0}{\partial c}$ равно разности химической свободной энергии пирохлора и перовскита.

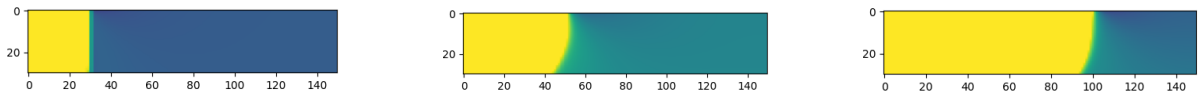
Уравнение (2) решается с помощью явной схемы интегрирования по времени:

$$c_{k+1} = -L\Delta t_k\left(2c_k(1-2c_k^2)A - \kappa\nabla^2 c_k + \frac{\partial \psi_k}{\partial c}\right), \quad (3)$$

где величина A определяет высоту энергетического барьера между фазами, κ характеризует ширину зоны фазового перехода, L – скорость перехода.

Константы подбирались таким образом, чтобы все три слагаемые в (2) были одного порядка. Для этого были взяты $A = 10^3$ МПа, $\kappa = 1.7 \cdot 10^{-12}$ м^2·МПа. $L\Delta t_k$ принималось равной единице. Слагаемое $\nabla^2 c$ находится с помощью метода конечных разностей, а производная свободной энергии на каждой итерации вычисляется через полученные в программном комплексе ANSYS напряжения. Рассматривалось 100 шагов по времени.

Полученный процесс роста для трех моментов времени (k = 1, 30, 70) показан на рис. 7.



а) б) в)

Рис. 7. Процесс роста перовскитовый фазы. а) k = 1, б) k = 30, в) k = 70

Выводы. Полученные в работе распределения конфигурационных сил на основе аналитических и КЭ расчетов демонстрируют монотонный рост при приближении к верхней границе PZT пленки, что позволяет объяснить поворот ростовых осей в процессе формирования перовскитной фазы. Отклонение ростовых осей так же наблюдается и при моделировании роста перовскита с помощью метода фазовых полей. В дальнейшем планируется провести валидацию полученных результатов на экспериментальных данных.

Работа выполнена при поддержке гранта РНФ № 25-11-00274.

ЛИТЕРАТУРА

1. Киселев Д.А., Старицын М.В., Сенкевич С.В., Каптелов Е.Ю., Пронин И.П., Пронин В.П. Радиально ориентированная латеральная самополяризация в сферолитовых островках тонких пленок цирконата титаната свинца // Письма в ЖТФ. – 2023. – Т 49(22) – С. 8-11.
2. Старицын М.В., Пронин В.П., Хинич И.И., Сенкевич С.В., Каптелов Е.Ю., Пронин И.П., Елшин А.С., Мишина Е.Д. Микроструктура сферолитовых тонких пленок цирконата-титаната свинца // Физика твердого тел. – 2023. – Т. 65(8) – С. 1368-1374.
3. Фрейдин А.Б. Задача Эшелби – Санкт-Петербург: Политех-Пресс, 2022. 146 с.
4. Filon L.N.G. On the elastic equilibrium of circular cylinders under certain practical systems of load. – Proceedings of the Royal Society of London, - 1901 – Vol 68(442-450). – P. 148-233
5. Tonks M.E., Gaston D., Millett P.C., Andrs D., Talbot P. An object-oriented finite element framework for multiphysics phase field simulations // Computational Materials Science – 2012. – Vol 51. – P. 20 - 29.

УДК 539.421

А.Э. Адамович[1], А.В. Савиковский[1,2], А.Н. Гордеев[1], А.Б. Фрейдин[3]
[1]Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого[(*)]
[2]АО «Силовые машины - ЗТЛ, ЛМЗ, Электросила, Энергомашэкспорт»
[3]Институт Проблем Машиноведения РАН

АНАЛИЗ ВЛИЯНИЯ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ КРАЕВЫХ ТРЕЩИН НА УСТОЙЧИВОСТЬ ИХ ПРЯМОЛИНЕЙНОГО РОСТА

Введение. В данной работе рассматривается влияние взаимодействия краевых трещин на устойчивость их прямолинейного роста. Проводится исследование влияния расстояния между трещинами и их относительных длин на величины коэффициентов интенсивности напряжений в вершинах всех трещин. Влияние анизотропии материала и границ области на эффекты экранирования трещин для данной задачи были исследованы в [1-2]. Также вычисляются углы возможного отклонения крайних трещин по критерию максимального окружного напряжения. Оценивается устойчивость центральной трещины относительно малого приращения длины под углом к исходному направлению распространения трещины в зависимости от длин трещин и расстояния между ними.

Постановка задачи. Рассматривается одноосно растягиваемая напряжением p изотропная полуплоскость с тремя краевыми трещинами, перпендикулярными поверхности полуплоскости: трещиной длины l и равноудаленными от нее на расстояние d трещинами одинаковой длины L. Варьируются отношение длин трещин L/l и относительное расстояние d/l. Вычисления коэффициентов интенсивности напряжений K_I, K_{II} производятся в конечно-элементном программном комплексе ANSYS с использованием встроенной функции, основанной на вычислении интеграла взаимодействия.

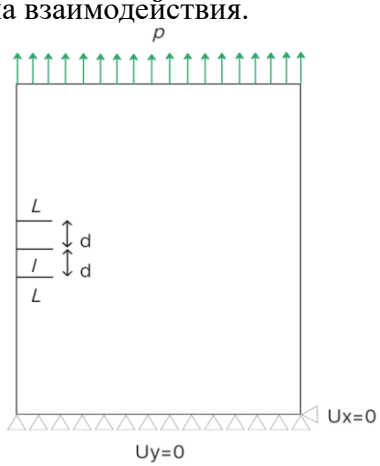


Рис. 1. Одноосно растягиваемая полуплоскость с тремя краевыми трещинами.
p – напряжение, L – длина крайних трещин, l – длина центральной трещины,
d – расстояние между трещинами

Результаты расчетов. Относительные коэффициенты интенсивности напряжений определены формулами:

$$k_I = \frac{K_I}{K_I^*}, \quad k_{II} = \frac{K_{II}}{K_I^*} \tag{1}$$

где K_I^* – коэффициент интенсивности напряжений для уединенной краевой трещины длины l. Верификация расчетов осуществлялась для случая трех краевых трещин одинаковой длины ($L = l = 10$ мм) путем сравнения результатов с результатами, приведенными в [3-4] (табл. 1).

(*) А.Э. Адамович, alinadamovich13@gmail.com

Табл. 1. Сравнение расчетных относительных коэффициентов интенсивности напряжений k_I для центральной трещины с результатами, приведенными в [3-4] ($L = l = 10$ мм)

d/l	k_I, ANSYS	k_I, [3]	δ, % (относительно [3])	k_I, [4]	δ, % (относительно [4])
1	0.61	0.6	1.7	0.59	3.4
2	0.73	0.71	2.8	0.72	1.4
3	0.83	0.82	1.2	0.82	1.2

Затем были проведены расчеты для трещин с различными относительными длинами L/l при $l = 10$ мм. Примеры зависимостей относительного коэффициента интенсивности напряжений k_I для центральной трещины и коэффициента интенсивности напряжений k_{II} для крайних трещин от относительного расстояния d/l представлены на рис. 2, 3.

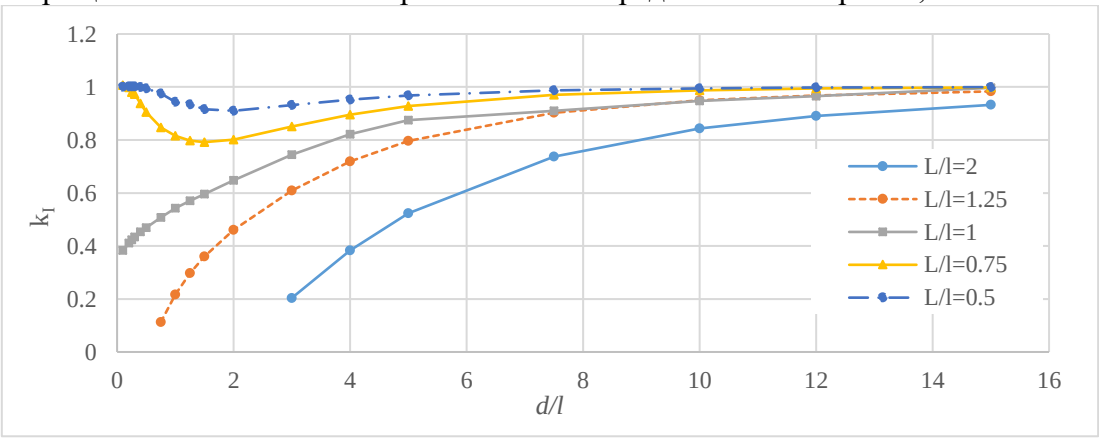


Рис. 2. Зависимости относительного коэффициента интенсивности напряжений k_I для центральной трещины от относительного расстояния $\frac{d}{l}$

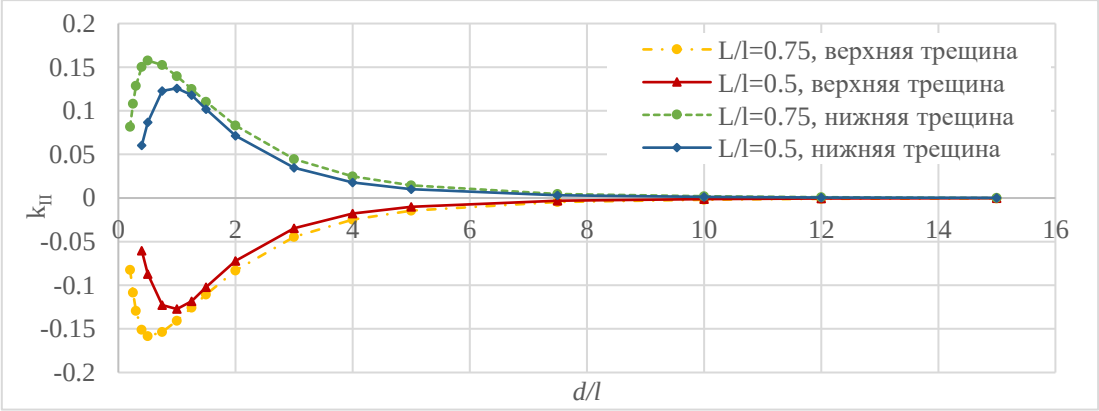


Рис. 3. Зависимости относительного коэффициента интенсивности напряжений k_{II} для верхней и нижней трещин от относительного расстояния d/l

Как видно из рис. 2, в случаях $L/l = 1.0, 1.25, 2.0$ наблюдаются монотонно возрастающие зависимости коэффициента интенсивности k_I от d/l. При $L/l = 0.5, 0.75$ монотонность теряется: k_I убывает при относительно небольших величинах d/l. При увеличении отношения d/l наблюдается стремление кривых к асимптоте, что соответствует ослаблению влияния соседних трещин на центральную.

Зависимости k_{II} от d/l немонотонны для приведенных соотношений L/l (рис. 3), но при увеличении L/l становятся монотонными.

Также было замечено, что при отношении длин $L/l = 1.25$ и 2 для случаев $d/l = 0.1, \ldots 0.5$ и $d/l = 0.1, \ldots 2$ происходит закрытие центральной трещины (вычисляемое значение

коэффициента интенсивности k_I становится отрицательным). В свою очередь, при отношении длин $L/l = 0.75$ и 0.5 наблюдается закрытие крайних трещин для случаев $d/l = 0.1$ и $d/l = 0.1, \ldots 0.3$ соответственно. Это свидетельствует об эффектах экранирования полей напряжений в результате взаимодействия трещин.

На рис. 4 представлены зависимости углов дальнейшего распространения крайних трещин от соотношения d/l по критерию максимального окружного напряжения, которому соответствует угол, определяемый уравнением (2) из [5].

$$K_I \sin\theta + K_{II}(3cos\ \theta\ - 1) = 0 \qquad (2)$$

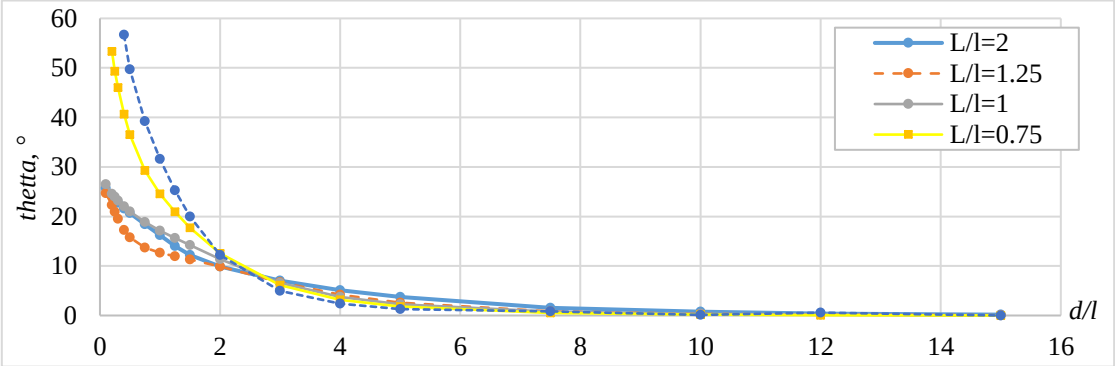


Рис. 4. График зависимости углов отклонения для верхней трещины

Затем, в контексте анализа устойчивости прямолинейного распространения центральной трещины было исследовано, как отклонение от прямолинейности влияет на тенденцию дальнейшего отклонения или возврата к исходному направлению. Результаты представлены в табл. 4.

Табл. 4. Относительный угол α дальнейшего распространения центральной трещины после ее удлинения на $\Delta l = l/8$ под углом φ при разных относительных длинах трещин L/l и расстояниях d/l

d/l	φ = 11.25°			φ = 22.5°			φ = 33.75°		
	$\frac{L}{l} = 0.5$	$\frac{L}{l} = 1$	$\frac{L}{l} = 1.25$	$\frac{L}{l} = 0.5$	$\frac{L}{l} = 1$	$\frac{L}{l} = 1.25$	$\frac{L}{l} = 0.5$	$\frac{L}{l} = 1$	$\frac{L}{l} = 1.25$
0.5	-1.53°	-3.93°		-1.16°	-5.98°		1.49°	-4.47°	
1	-1.99°	-4.52°	-7.83°	-2.08°	-6.31°	37.57°	0.23°	-4.98°	88.93°
2	-2.33°	-3.82°	-4.96°	-2.54°	-5.29°	-7.36°	-0.35°	-3.44°	94.43°

Отрицательное значения угла α свидетельствует о тенденции к возвращению прямолинейного роста центральной трещины в исходном направлении, а положительное – к дальнейшему отклонению от прямолинейности роста.

Работа выполнена в рамках государственного задания Министерства науки и высшего образования Российской Федерации для ИПМаш РАН (тема № 124041500009–8).

ЛИТЕРАТУРА

1. Savikovskii A.V., Semenov A.S. Influence of material anisotropy on the interaction between cracks under tension and shear // Materials Physics and Mechanics. – 2022. –Vol. 51. –№ 5. – P. 24-37.
2. Savikovskii A.V., Semenov A.S., Kachanov M.L. Influence of material anisotropy on the mechanics of surface damage // International Journal of Engineering Science. – 2024. – Vol. 198.
3. Petrova V., Schmauder S., Shaskkin A. Modeling of edge cracks interaction // Frattura ed Integrità Strutturale. – 2016. –Vol. 36. – P. 8-26.
4. Мураками Ю. Справочник по коэффициентам интенсивности напряжений — М.: Мир, 1990. – 448с.
5. Пестриков В.М., Морозов Е.М. Механика разрушения твердых тел: курс лекций. – СПб: Профессия, 2002. – С.82-83.

УДК 534.143

Д.В. Антуфьев, А.В. Лукин, И.А. Попов
Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого(*)

СИНТЕЗ НЕЛИНЕЙНЫХ ЭЛЕКТРОУПРУГИХ МОДЕЛЕЙ ПОНИЖЕННОГО ПОРЯДКА ДЛЯ НАНО- И МИКРОСИСТЕМ НА БАЗЕ МЕТОДА КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ

Введение. Моделирование микроэлектромеханических систем (МЭМС) требует учета различных физических эффектов. Метод конечных элементов позволяет решать нелинейные связанные задачи на моделях с более сложной геометрией, чем аналитические методы. Однако, решение динамических нелинейных задач на моделях с большим количеством степеней свободы методом конечных элементов гораздо медленнее, чем численное интегрирование обыкновенных дифференциальных уравнений. Создание моделей пониженного порядка (ROM, Reduced order models) [1] позволяет решить эту проблему. В настоящем докладе рассматривается процедура синтеза нелинейных электроупругих моделей пониженного порядка МЭМС.

Идентификация параметров нелинейной упругой силы. Характеристика нелинейной упругой силы определяется методом STEP (step evaluation procedure) [2], которая заключается в переводе системы из координат конечно-элементной модели в модальные координаты. Нелинейная упругая характеристика имеет вид квадратно-кубического полинома модальных координат. Методом конечных элементов вычисляются нелинейные силы реакции на перемещения, которые имеют вид линейных комбинаций собственных форм. Коэффициенты полинома определяются из уравнений, полученных путем приравнивания полинома в модальных координатах и проекций векторов нелинейных сил, полученных методом конечных элементов, на модальные координаты. Для плоских тел используется модифицированная процедура, в которой к конечно-элементной модели прикладываются элементы собственных векторов, соответствующие нормальным перемещениям средней плоскости тела [3].

Идентификация параметров нелинейной электрической емкости. Система состоит из подвижного упругого тела и N_C неподвижных электродов. Упругое тело считается заземленным и имеет нулевой потенциал. Пусть C_{pp} – емкость p-го электрода относительно подвижного тела, $C_{ps} = C_{sp}$ – емкость «на землю» p-го электрода относительно s-го электрода. Следует отметить, что данные емкости характеризуют зависимость зарядов на проводниках от перепадов напряжения относительно земли, они не характеризуют емкости между электродами. Емкости системы изменяются при деформации упругого тела, поэтому необходимо определить их зависимость от модальных координат упругого тела $C_{ps}(\boldsymbol{q})$.

Электростатическая энергия системы имеет вид

$$W(\boldsymbol{q}) = \frac{1}{2}\sum_{p=1}^{N_C}\sum_{s=1}^{N_C} C_{ps}\,(\boldsymbol{q})V_pV_s, \qquad (1)$$

где V_p – напряжение на p-м электроде. Напряжение на проводниках считается однородным. Проекция электростатической силы, действующей на упругое тело, на модальные координаты имеет вид [4]

$$\mathbf{F}_e = \nabla W(\boldsymbol{q}) = \frac{1}{2}\sum_{p=1}^{N_C}\sum_{s=1}^{N_C}\nabla C_{ps}(\boldsymbol{q})V_pV_s = \frac{1}{2}\sum_{p=1}^{N_C}\sum_{s=1}^{N_C}\frac{\partial C_{ps}(\boldsymbol{q})}{\partial \boldsymbol{q}}V_pV_s. \qquad (2)$$

(*) Д.В. Антуфьев, antufiev_dv@spbstu.ru

Будем искать приближенное выражение для емкости в виде полинома модальных координат четвертой степени:

$$C_{ps}(\boldsymbol{q}) = a_0^{ps} + \sum_{j=1}^{L} a_j^{ps} q_j + \sum_{j=1}^{L}\sum_{k=j}^{L} b_{jk}^{ps} q_j q_k + \sum_{j=1}^{L}\sum_{k=j}^{L}\sum_{l=k}^{L} c_{jkl}^{ps} q_j q_k q_l + \\ + \sum_{j=1}^{L}\sum_{k=j}^{L}\sum_{l=k}^{L}\sum_{m=l}^{L} d_{jklm}^{ps} q_j q_k q_l q_m + O(q^5). \tag{3}$$

Выражение для энергии позволяет найти емкости, решая электростатическую задачу методом конечных элементов. Для этого необходимо построить конечно-элементную модель межэлектродного пространства, соответствующего деформации упругого тела. Чтобы определить зависимость емкостей от модальных координат, рассматриваются формы межэлектродного пространства, соответствующие перемещениям упругого тела по линейным комбинациям собственных форм. Эти перемещения имеют вид

$$\mathbf{X}^{(r)} = \sum_{i=1}^{L} \boldsymbol{\phi}_i q_i^{(r)}, \tag{4}$$

где $\boldsymbol{\phi}_i - i$-й собственный вектор упругого тела; $q_i^{(r)}$ – множитель i-й собственной формы для r-го расчета. Для достаточной точности аппроксимации рассматриваемые множители должны быть равномерно распределены в пространстве модальных координат.

Возникает вопрос выбора множителей для прикладываемых линейных комбинаций. В нелинейных электроупругих системах возникает эффект потери устойчивости (pull-in) [5]. Pull-in эффект предоставляет естественное ограничение на возможные перемещения упругого тела. Решая связанную электроупругую задачу методом конечных элементов, можно определить максимальное перемещение упругого тела, при котором происходит потеря устойчивости, и ограничить рассматриваемые перемещения этой величиной.

Таким образом, получаем систему линейных алгебраических уравнений, где коэффициенты разложения (3) являются неизвестными:

$$a_0^{ps} + \sum_{j=1}^{L} a_j^{ps} q_j^{(r)} + \sum_{j=1}^{L}\sum_{k=j}^{L} b_{jk}^{ps} q_j^{(r)} q_k^{(r)} + \sum_{j=1}^{L}\sum_{k=j}^{L}\sum_{l=k}^{L} c_{jkl}^{ps} q_j^{(r)} q_k^{(r)} q_l^{(r)} + \\ + \sum_{j=1}^{L}\sum_{k=j}^{L}\sum_{l=k}^{L}\sum_{m=l}^{L} d_{jklm}^{ps} q_j^{(r)} q_k^{(r)} q_l^{(r)} q_m^{(r)} = C_{ps}^{(r)}, \qquad r = 1,2,\dots,N_{eq}, \tag{5}$$

где N_{eq} – количество уравнений; $C_{ps}^{(r)}$ – емкость, полученная путем решения электростатической задачи. Систему уравнений можно переписать в матричном виде:

$$\mathbf{Qa} = \mathbf{c}^{ps}, \tag{6}$$

где $\mathbf{Q}$ – матрица членов полинома $N_{eq} \times N_{coef}$; N_{coef} – количество коэффициентов полинома; $\mathbf{a} = \left(a_0^{ps}, a_1^{ps}, \dots, d_{LLLL}^{ps}\right)$ – вектор коэффициентов полинома размерности N_{coef}; $\mathbf{c}^{\mathrm{ps}}$ – вектор вычисленных емкостей.

Это уравнение можно решить методом наименьших квадратов [6]:

$$\min_{\mathrm{a}} \tfrac{1}{2}(\mathbf{Qa} - \mathbf{c}^{ps})^T(\mathbf{Qa} - \mathbf{c}^{ps}) \Longrightarrow \mathbf{a} = (\mathbf{Q}^T\mathbf{Q})^{-1}\mathbf{Q}^T\mathbf{c}^{ps}. \tag{7}$$

Таким образом, получаем значения коэффициентов полиномиального разложения емкостей по модальным координатам.

Верификация. Описанная процедура позволяет найти уравнения движения электроупругой системы в виде

$$\ddot{q}_i + 2\xi_i\omega_i\dot{q}_i + \omega_i^2 q_i + \gamma_r(\boldsymbol{q}) = \frac{1}{2}\sum_{p=1}^{N_C}\sum_{s=1}^{N_C}\frac{\partial C_{ps}(\boldsymbol{q})}{\partial q_i}V_pV_s\,, \quad r = 1,2,\dots,L. \tag{8}$$

Процедура была испытана на моделях микробалки в электростатическом поле одного электрода с консольным закреплением и жестким закреплением с обеих сторон, и на модели плоской кольцевой микропластинки в электростатическом поле двух электродов. На рисунке 1 показан график сравнения реакции жестко закрепленной микробалки на гармонически изменяющееся напряжение, полученной методом конечных элементов и с помощью модели пониженного порядка.

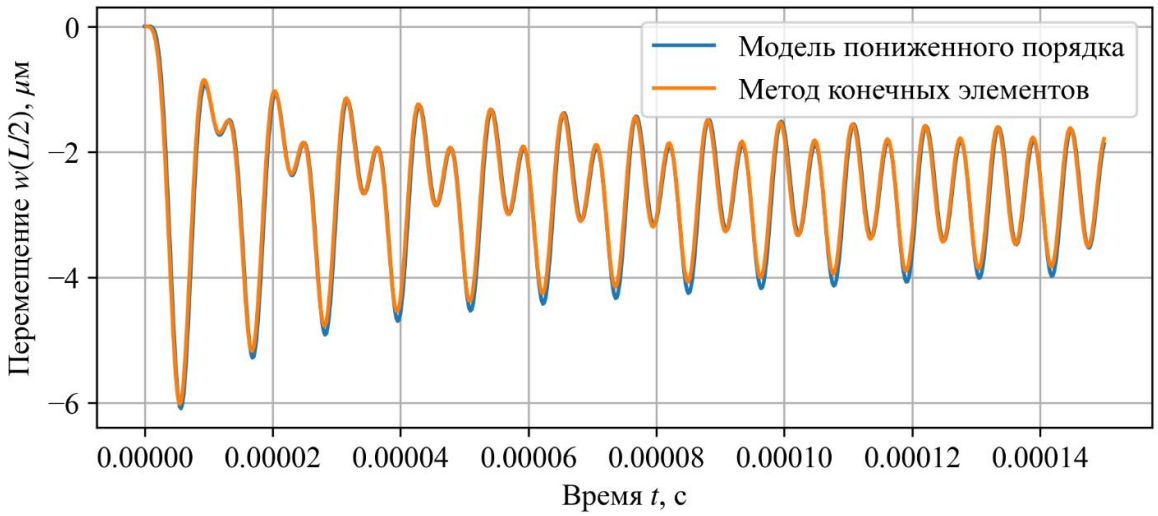


Рис. 1. Реакция жестко закрепленной микробалки на гармоническое возбуждение

Сравнение решения электроупругих задач методом конечных элементов, аналитически и с помощью полученных моделей пониженного порядка показывает применимость процедуры.

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда № 24-71-10097, https://rscf.ru/project/24-71-10097/.

ЛИТЕРАТУРА

1. System- and Data-Driven Methods and Algorithms. – De Gruyter, 2021. – 387 p.
2. Muravyov A.A., Rizzi S.A. Determination of Nonlinear Stiffness with Application to Random Vibration of Geometrically Nonlinear Structures // Computers & Structures. – 2003. – Vol. 81 (15) – P. 1513–1523.
3. Vizzaccaro A. et al. Non-Intrusive Reduced Order Modelling for the Dynamics of Geometrically Nonlinear Flat Structures Using Three-Dimensional Finite Elements // Computational Mechanics. Springer Science and Business Media LLC. – 2020. – Vol. 66 (6) – P. 1293–1319.
4. Gabbay L.D., Mehner J.E., Senturia S.D. Computer-Aided Generation of Nonlinear Reduced-Order Dynamic Macromodels. I. Non-stress-stiffened Case // Journal of Microelectromechanical Systems. – 2000. – Vol. 9 (2) – P. 262–269.
5. Zhang W.-M. et al. Electrostatic pull-in instability in MEMS/NEMS: A review // Sensors and Actuators A: Physical. – 2014. – Vol. 214. – P. 187–218.
6. Geradin M., Rixen D.J. Mechanical Vibrations: Theory and Application to Structural Dynamics. – Third edition. – John Wiley & Sons, 2015. – 598 p.

УДК 534.113

А.Р. Асылгужин, А.В. Лукин
Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого(*)

ПРОДОЛЬНЫЙ УДАР ГРУЗА ПО СТЕРЖНЮ НА УПРУГОМ ОСНОВАНИИ

Введение. Рассматривается задача о продольном ударе инерционной массы (груза) по свободному концевому сечению упругого прямолинейного стержня с линейно-упругой нижней точкой опирания на противоположном конце. Данная задача является обобщением задачи о продольном ударе по жестко закрепленному стержню, решенной А.И. Лурье [1] с помощью теории операционного исчисления. Идея рассмотрения упругого основания вместо жесткого появилась в связи с тем, что существует множество статей [2-3], которые направлены на исследование динамики погружных пневмоинструментов. В них представлены модели взаимодействия системы «ударник-коронка-грунт», в которых грунт моделируется с помощью упругого элемента с нелинейной жесткостью (разная жесткость на сжатие и растяжение). Аналитическое решение данной задачи с линейной жесткостью позволит верифицировать численную схему для модели с нелинейной жесткостью.

Постановка задачи. Рассматривается покоящийся стержень, который снизу закреплен на упругом элементе с жесткостью k, сверху на него падает груз массой M со скоростью v_0. Будем считать, что после соударения груз и стержень будут двигаться совместно до тех пор, пока продольное усилие в точке $x = 0$, не станет положительным. На рис. 1 представлена иллюстрация к задаче, где ρ – плотность стержня, E – модуль упругости, l – длина, A – площадь сечения.

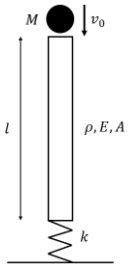


Рис. 1. Иллюстрация к задаче

Для удобства введем безразмерные параметры. Коэффициент α – отношение массы стержня к массе груза; κ – отношение жесткости стержня к жесткости пружины; $\xi = x\,/\,l$ – безразмерная координата; $\tau = ct\,/\,l$ – безразмерное время, где $c = \sqrt{E/p}$ – скорость продольных волн в стержне; $V_0 = v_0/c$ отношение скорости удара к скорости продольных волн. После преобразований задача примет следующий вид:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial \tau^2} \tag{1}$$

$$\xi = 0:\ \frac{\partial u}{\partial \xi} = \frac{1}{\alpha}\frac{\partial^2 u}{\partial \tau^2};\qquad \xi = 1:\ u + \kappa\frac{\partial u}{\partial \xi} = 0 \tag{2}$$

$$\tau = 0:\ u = 0\ (0 \le \xi \le 1);\qquad \tau = 0:\ \frac{\partial u}{\partial \tau} = V_0\delta(\xi);\ (\xi = 0) \tag{3}$$

Метод преобразований Лапласа. Для поиска решения было получено представление изображений искомых функций перемещения и продольного усилия на верхнем конце стержня в виде ряда, слагаемые которого будут содержать экспоненты с отрицательной

(*) А.Р. Асылгужин, artrawa@gmail.com

степенью. Такое представление позволит представить оригиналы с помощью теоремы запаздывания. Для отыскания оригиналов функций, был использован пакет Matlab, а именно метод ilaplace. Изображения функций перемещения и продольного усилия на конце стержня:

$$U = \frac{V_0}{p}\left(\frac{1}{(\alpha - p)}\sum_{n=1}^{\infty}\left[(-1)^n \frac{e^{-p(2n-\xi)}}{K^n(p)}\right] + \frac{1}{(\alpha + p)}\sum_{n=1}^{\infty}\left[(-1)^n \frac{e^{-p(2n+\xi)}}{K^n(p)}\right] + \frac{1}{\alpha + p}e^{-p\xi}\right) \quad (4)$$

$$U'(0) = V_0\left(-\frac{1}{(\alpha + p)} + \frac{2p}{(\alpha - p)(\alpha + p)}\sum_{n=1}^{\infty}\left[(-1)^n \frac{e^{-2pn}}{K^n(p)}\right]\right) \quad (5)$$

$$K(p) = \left(\frac{1 + \kappa p}{1 - \kappa p}\right)\left(\frac{\alpha + p}{\alpha - p}\right) \quad (6)$$

Попытаемся проанализировать как изменится время контакта, если заменить жесткое основание на упругое. Ниже представлены функции продольного усилия для жесткой заделки [4] и упругого основания соответственно:

$$u'(0,\tau) = V_0\left(-e^{-\alpha t} + 2H(\tau - 2)\left(e^{-\alpha(\tau-2)} - \alpha(\tau - 2)e^{-\alpha(\tau-2)}\right)\right) \quad (7)$$

$$u'(0,\tau) = V_0\left(-e^{-\alpha t} + 2H(\tau - 2)\left(e^{-\alpha(\tau-2)}\frac{-\alpha^2\kappa^2 + 2\alpha\kappa + 1}{(1 - \alpha\kappa)^2} - \alpha(\tau - 2)e^{-\alpha(\tau-2)}\frac{1 + \alpha\kappa}{1 - \alpha\kappa} + \underline{2e^{-\frac{\tau-2}{\kappa}}\frac{1}{(1 - \alpha\kappa)^2}}\right)\right) \quad (8)$$

При стремлении параметра κ к нулю стоило бы ожидать асимптотическое стремление выражения (8) к (7), однако этого не наблюдается. Замена жесткой заделки на упругий элемент вносит изменения в выражение продольного усилия в виде добавления подчеркнутого слагаемого. Анализ (8) показывает, что вне зависимости от параметров κ и α после первого переотражения волны продольная деформация на верхнем конце стержня станет положительной.

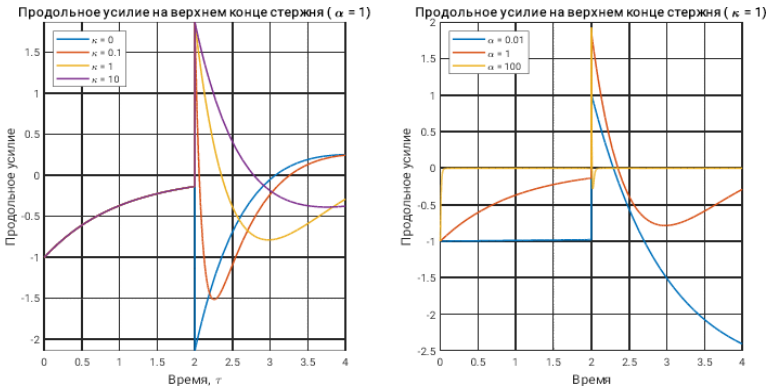


Рис. 2. Зависимости продольного усилия от времени при различных значения κ и α

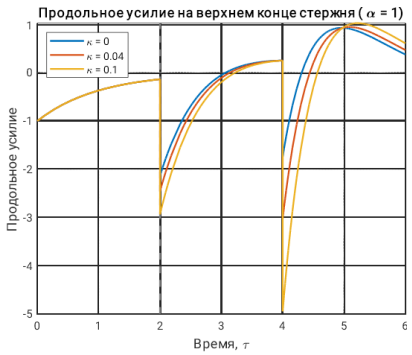


Рис. 3. Зависимости продольного усилия от времени при различных значения κ

Данный результат не может соответствовать реальности. Для того, чтобы преодолеть эту асимптотическую некорректность математической модели, предлагается дополнительно

исследовать подход, в котором до этапа поиска обратного отображения функции будут разложены в ряд Тейлора в точке $\kappa = 0$. Ниже на рис. 3 представлено сравнение зависимости продольного усилия от времени при жесткой заделке и продольного усилия при упругом основании, полученного с использованием разложения.

Видно, что данный метод позволяет избавиться от нефизического скачка напряжений. Однако, вопрос границы использования данного метода остается открытым.

Метод модальной суперпозиции. Метод преобразований Лапласа позволяет найти точное аналитическое решение, однако, если необходимо учесть большее количество переотражений, поиск решения приводит к отысканию оригинала множества функций. Метод модальной суперпозиции предлагает поиск решения в виде бесконечного ряда по формам колебаний.

Ниже представлены полученные выражения для функции перемещения и продольного усилия верхнего конца стержня:

$$u(\xi,\tau) = \sum_{s=1}^{\infty} \left(cos\ cos\ k_s\xi\ - \frac{k_s}{\alpha} sin\ sin\ k_s\xi \right) B_S\ sin\ sin\ k_s\tau \tag{9}$$

$$u'(\xi,\tau) = \sum_{s=1}^{\infty} \left(-\ sin\ sin\ k_s\xi\ - \frac{k_s}{\alpha} cos\ cos\ k_s\xi \right) k_s B_S\ sin\ sin\ k_s\tau \tag{10}$$

$$B_1 = \frac{V_0}{k_1\left(1 + N_1 \sum_{s=2}^{\infty} \frac{1}{N_s}\right)}; \quad B_i = \frac{k_1 N_1}{k_i B_i} B_1 \tag{11}$$

где k_i находятся из частотного уравнения:

$$tan\ tan\ k\ = -\frac{\frac{k^2\kappa}{\alpha} - 1}{k\left(\frac{1}{\alpha} + \kappa\right)} \tag{12}$$

Ниже представлены графики сравнения результатов, полученных с помощью метода преобразований Лапласа и метода суперпозиции.

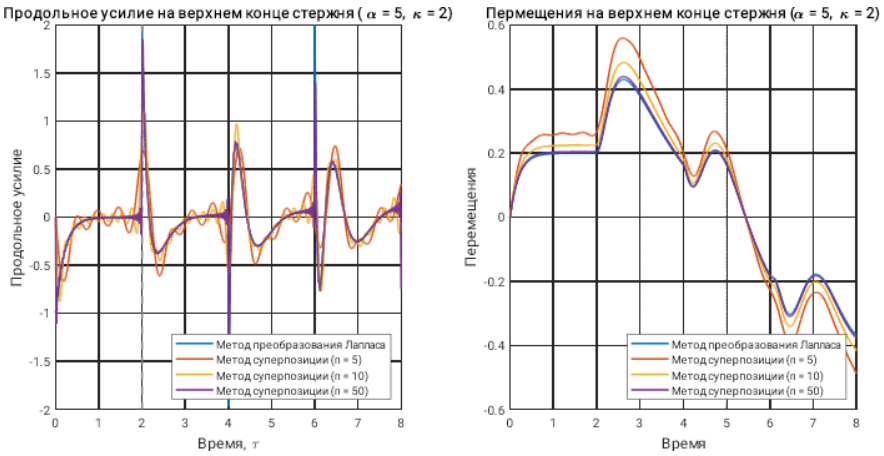


Рис. 4. Зависимости продольного усилия и перемещения от времени, полученные с помощью метода преобразования Лапласа и метода суперпозиции

ЛИТЕРАТУРА

1. Лурье А.И. Операционное исчисление и его приложения к задачам механики. Изд. 2-е – Л.: Государственное издательство технико-теоретической литературы, 1951. – 432 с.

2. Changheon Song, Jintai Chung, Jae-Sang Cho, Yun-Joo Nam Optimal Design Parameters of a Percussive Drilling System for Efficiency Improvement // Advances in Materials Science and Engineering. – 2018

3. Dae-Ji Kim, Joo-Young Oh, Jung-Woo Cho, Jaewon Kim, Jintai Chung, Changheon Song, Design study of impact performance of a DTH hammer using PQRSM and numerical simulation // Journal of Mechanical Science and Technology. – 2019. – Vol. 33 (11). – P. 5589-5602
4. Вольмир А.С. Устойчивость деформируемых систем. – Изд. 2-е. - М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1967. - 984 с.

УДК 539.43, 534.13

М.М. Баккар, А.А. Мхемид-Дбес, А.С. Семенов
Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого(*)

ВЛИЯНИЕ РЕЖИМОВ ТЕРМОМЕХАНИЧЕСКОГО ВОЗДЕЙСТВИЯ НА СТАТИЧЕСКУЮ И ЦИКЛИЧЕСКУЮ ПРОЧНОСТЬ ЛОПАТКИ ГАЗОВОЙ ТУРБИНЫ

Введение. Газовые турбины широко используются в авиации, электрогенераторах, химической и нефтяной промышленности благодаря их высокой эффективности производства/преобразования энергии и экологически относительно чистым процессам сгорания. Рабочие лопатки газовых турбин подвергаются воздействию центробежных сил, переменного по пространству и времени теплового поля, создаваемого газовым потоком, а также давления вследствие аэродинамических нагрузок [1]. Для обеспечения безаварийной эксплуатации газовых турбин являются актуальными уточненные расчеты лопаток на кратковременную и длительную прочность [2-4], оценка усталостной долговечности [2-6].

Целью данной работы является определение чуствительности эквивалентных мер напряженно-деформированного состояния (НДС) к параметрам термомеханического воздействия (характеристикам нестационарного неоднородного теплового поля и скорости вращения рабочих лопаток газовой турбины). Для оценки прочности лопаток определялось возникающее в них НДС в результате действия неоднородного теплового поля в диапазоне температур 300÷960 °C и скорости вращения в диапазоне 1000÷3500 об/мин. Расчеты выполнялись в конечно-элементном программном комплексе ANSYS.

Объектом исследования являлось перо неохлаждаемой лопатки газовой турбины (рис. 1а). В целях детализации геометрии лопатки и улучшения качества построения конечно-элементной сетки (рис. 1б) рассматривались мультисекционные сплайновые аппроксимации.

а) б)

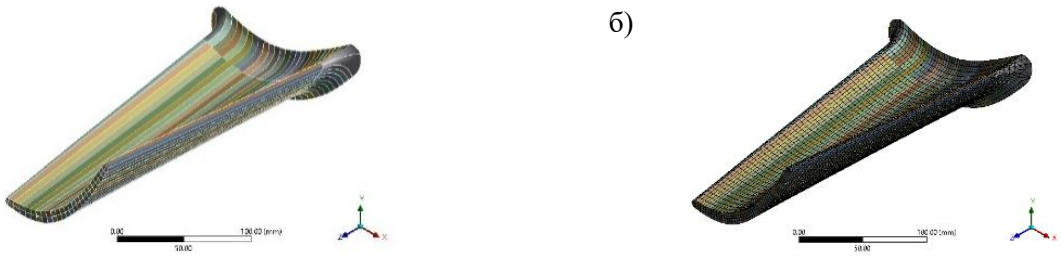


Рис. 1. а) Твердотельная модель лопатки с разбиением на секции, б) конечно-элементная модель

Основные уравнения. Роторные лопатки, работающие в условиях экстремальных скоростей вращения и температурных полей, подвергаются комбинированному влиянию механических нагрузок и термических напряжений. Это приводит к прогрессирующему накоплению повреждений. Величина и распределение напряжений (включая касательные и нормальные компоненты) зависят от геометрии лопатки, характеристик материала, режимов вращения и распределения температурного поля, а также инерционных сил, связанных с

(*) М.М. Баккар, mamadyan1997@gmail.com

неравномерным распределением массы. Математическая модель этих процессов в теории малых градиентов перемещений описывается системой уравнений:

уравнения движения $$\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} + \rho \mathbf{f} = \rho \ddot{\mathbf{u}} \quad (1)$$

кинематические уравнения $$\boldsymbol{\varepsilon} = \frac{1}{2}\left[\nabla \mathbf{u} + (\nabla \mathbf{u})^T\right] \quad (2)$$

определяющие уравнения $$\boldsymbol{\sigma} = {}^4\mathbf{C} \cdot\cdot (\boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\varepsilon}^T - \boldsymbol{\varepsilon}^{in}) \quad (3)$$

где $\boldsymbol{\sigma}$ – тензор напряжений, $\boldsymbol{\varepsilon}$ – тензор деформаций, $\mathbf{u}$ – вектор перемещений, $\mathbf{f}$ – массовая плотность объемных сил, ρ – плотность материала, ∇ – набла оператор, $\boldsymbol{\varepsilon}^T$ – температурная деформация, определяемая тензором коэффициентов линейного температурного расширения $\boldsymbol{\alpha}$ и разностью температур $\Delta T = T - T_0$, $\boldsymbol{\varepsilon}^{in}$ – неупругая деформация.

Материалы. Рассматривались три способа изготовления лопатки газовой турбины из материала IN738LC: литьем, с направленной кристаллизацией и аддитивными технологиями [7].

Результаты. Распределения полей напряжений в пере лопатки, изготовленной литьем, при действии только *теплового поля* показаны на рис. 2. Нибольшее значение интенсивности напряжения по Мизесу наблюдается на выходной кромке у основания лопатки (рис. 2а). Зависимость интенсивности напряжений по Мизесу от температуры при различных скоростях вращения показана на рис. 3.

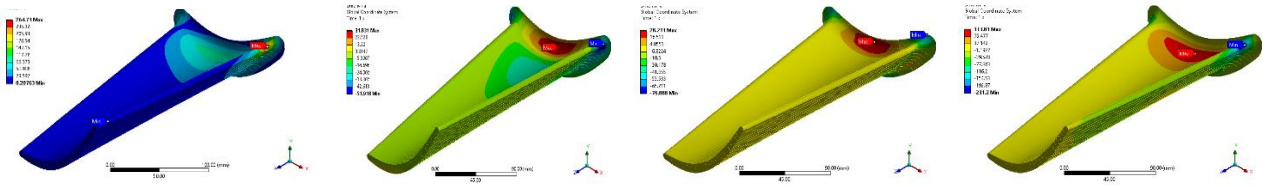


Рис. 2. Распределения полей напряжений в пере лопатке a) интенсивность напряжений по Мизесу, b) σ_{xx}, c) σ_{yy} и d) σ_{zz} для случая действия только *теплового поля*

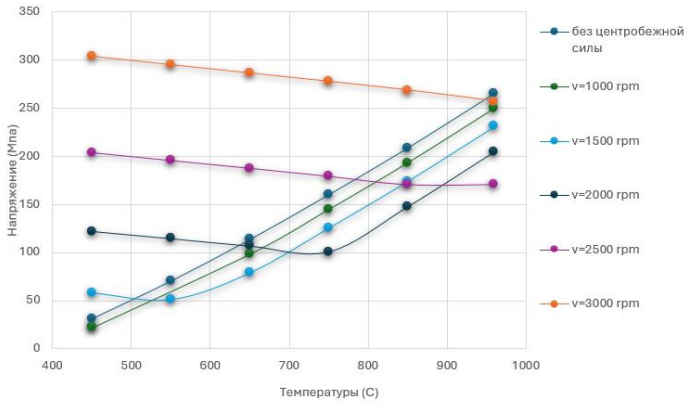


Рис. 3. Зависимость интенсивности напряжений по Мизесу от температуры при различных скоростях вращения

Распределения полей напряжений в пере лопатки при действии только центробежных сил показаны на рис. 4. Наибольшее значение интенсивности напряжения по Мизесу наблюдается на спинке (задней поверхности) лопатки у ее корня (рис. 4а). Зависимость интенсивности напряжений по Мизесу от скорости вращения при различных температурах в диапазоне скоростей от 1000 об/мин до 3500 об/мин показана на рис. 5.

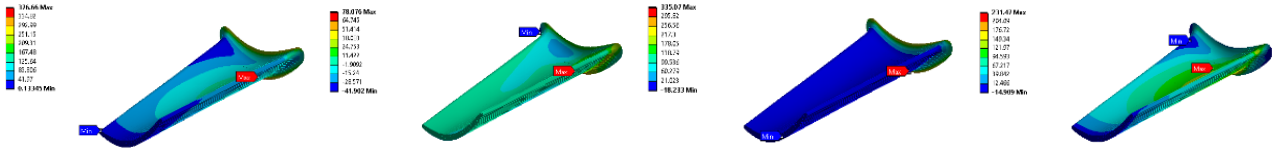


Рис. 4. Распределение полей напряжений в пере лопатке a) интенсивность напряжений по Мизесу, b) σ_{xx}, c) σ_{yy} и d) σ_{zz} для случая действия только *вращения*

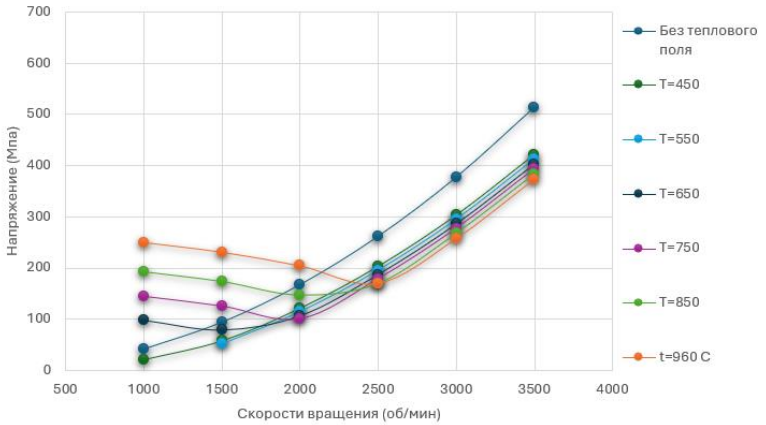


Рис. 5. Зависимость эквивалентного напряжения по Мизесу от скорости вращения при различных температурах в диапазоне скоростей от 1000 об/мин до 3500 об/мин

Выводы. При низких скоростях вращения (менее 2000 об/мин) наибольшее влияние на эквивалентное напряжение (интенсивность напряжений по Мизесу), отвечающее за кратковременную прочность для рассматриваемого класса материалов, оказывант тепловое поле. В этом случае интенсивность напряжений, возникающая под действием теплового поля в рассматриваемом диапазоне изменения температур, больше, чем интенсивность напряжений, возникающая под действием скорости вращения. Местом локализации наибольшего значения интенсивности напряжений является основание пера лопатки на выходной кромке. При увеличении скорости вращения выше 2000 об/мин влияние скорости вращения возрастает, и эквивалентное напряжение начинает увеличиваться как квадратичная функция частоты скорости вращения. Зависимость интенсивности напряжений от максимальной температуры близка к линейной при скоростях вращения менее 2000 об/мин. При скоростях вращения более 2000 об/мин повышение температуры приводит к уменьшению эквивалентного напряжения. Также в этом случае снижается влияние температуры на эквивалентное напряжение.

ЛИТЕРАТУРА

1. Pahilwan A., Patel A., Patel R. Design and Analysis of Gas Turbine Rotor Blade // International Journal of Emerging Technologies and Innovative Research. – 2019. –Vol. 6. – № 4. – P. 900-904.
2. Гецов Л.Б., Семенов А.С. О запасах прочности деталей газотурбинных двигателей при термо-циклическом нагружении // Авиационные двигатели. – 2023. – № 1 (18). – С. 79-98.
3. Семенов А.С., Грищенко А.И., Колотников М.Е., Гецов Л.Б. Конечно-элементный анализ термоциклической прочности лопаток газовых турбин. Часть 1. Модели материала, критерии разрушения, идентификация параметров // Вестник УГАТУ. – 2019. – Т. 23. – №1 (83). – С. 70-
4. Семенов А.С., Грищенко А.И., Колотников М.Е., Гецов Л.Б. Конечно-элементный анализ термоциклической прочности лопаток газовых турбин. Часть 2. Результаты расчетов // Вестник УГАТУ. – 2019. –Т. 23. – №2 (84). – С. 61-74.
5. Гецов Л.Б., Михайлов В.Е., Семенов А.С., Кривоносова В.В., Ножницкий Ю.А., Блинник Б.С., Магераммова Л.А. Расчетное определение ресурса рабочих и направляющих лопаток ГТУ. Часть 2. Монокристаллические материалы // Газотурбинные технологии. – 2011. – №8. – С. 18-25.

6. Семенов А.С., Семенов С.Г., Гецов Л.Б. Методы расчетного определения скорости роста трещин усталости, ползучести и термоусталости в поли- и монокристаллических лопатках ГТУ // Проблемы прочности. – 2015. – № 2. – С. 61-87.
7. Герасимов В.В. От монокристаллических неохлаждаемых лопаток к лопаткам турбин с проникающим охлаждением, изготовленным по аддитивным технологиям // Труды ВИАМ. – 2016. – №10 (46).

УДК 539.214:004.942

А.Н. Булгаков, В.И. Гультяев, А.А. Алексеев, А.Н. Широков
Тверской государственный технический университет(*)

МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРОЦЕССОВ СЛОЖНОГО ДЕФОРМИРОВАНИЯ СТАЛИ 45 В ДВУХМЕРНЫХ ОПЫТАХ В ПРОСТРАНСТВЕ ДЕФОРМАЦИЙ ПО ЛОМАНЫМ ТРАЕКТОРИЯМ

Введение. Рассматривается математическое моделирование сложных упругопластических процессов деформирования оболочек из материала сталь 45 по плоским двухзвенным ломаным траекториям и производится сравнение полученных результатов численного решения дифференциальных уравнений теории процессов методом Рунге-Кутты 4-го порядка точности с данными эксперимента.

Для численного моделирования процессов сложного упругопластического деформирования материалов по плоским двухзвенным траекториям могут быть использованы определяющие соотношения теории процессов, которые в скалярной форме имеют вид [1]:

$$\frac{dS_i}{ds} = M_1 \frac{d\Theta_i}{ds} + \left(\frac{d\sigma}{ds} - M_1 cos\vartheta_1\right)\frac{S_i}{\sigma} \qquad (1)$$

$$\frac{d\vartheta_1}{ds} + k_1 = -\frac{M_1}{\sigma} sin\vartheta_1$$

где S_i, Θ_i $(i = 1,2,3)$ - координаты векторов напряжений $\bar{\sigma}$ и деформаций $\bar{\Theta}$; s - длина дуги траектории деформирования; M_1, $d\sigma/ds$ - функционалы процесса, зависящие от параметров внутренней геометрии траектории деформаций; ϑ_1 - угол сближения, функционал векторных свойств материала; σ - функционал процесса скалярных свойств материала; k_1 – кривизна.

Для аппроксимации функций процесса M_1, $\sigma(s)$ использованы предложенные В.Г. Зубчаниновым [1] соотношения:

$$\sigma(s) = \Phi(s) + Af_0^p \Omega(\Delta s) - \Delta\sigma_k \qquad (2)$$

$$M_1 = 2G_p + \left(2G - 2G_p^0\right)f^q$$

где $\Delta s = s - s_к^т$ – приращение длины дуги траектории после ее первого излома в точке К; $\Delta\sigma_k = \Phi(s_к^т) - \sigma_к^т$ – разница в точках излома между значениями универсальной функции Одквидста-Ильюшина и расчетным значением модуля вектора напряжений $\sigma_к^т$; G – модуль сдвига; $2G_p = \Phi(s)/s$ – удвоенный пластический модуль при простом нагружении; индекс «ноль» у пластического модуля сдвига соответствует его значению в точке излома траектории;

$$\Omega(\Delta s) = -[\gamma \cdot \Delta s \cdot e^{-\gamma\cdot\Delta s} + b \cdot (1 - e^{-\gamma\cdot\Delta s})] \qquad (3)$$

- функция, описывающая после излома траектории скалярный нырок напряжений при сложной разгрузке и последующем вторичном пластическом деформировании;

$$f = \frac{1 - cos\vartheta_1}{2},\ f_0 = \frac{1 - cos\vartheta_1^0}{2}$$

(*) А.Н. Булгаков, elstatik@bk.ru

- функция, учитывающая ориентацию вектора напряжений в процессе деформирования и ее значение в точке излома для каждого из участков неаналитической траектории, A, b, γ, p, q – параметры аппроксимаций.

Материалы и методы. Процесс моделирования процессов рассмотрим на примере экспериментальных результатов, полученных в лаборатории кафедры СМТУиП ТвГТУ. Эксперименты на сложное нагружение образцов из стали 45 (ГОСТ 1050-2013) проводились на комплексе СН-ЭВМ, описанном в работе [2]. В качестве образцов использовались тонкостенные цилиндрические оболочки с толщиной стенки h в пределах $0{,}98 - 1{,}00$ мм, радиусом срединной поверхности R в диапазоне $15{,}49 - 15{,}52$ мм. Материал в достаточной степени начально изотропный, в рабочей части образца напряженное состояние считалось близким к однородному.

Опыты проводились в нормальных условиях с малой скоростью деформирования порядка $1 \cdot 10^{-6}$ с$^{-1}$. В некоторых экспериментах проявлялся $Э_2$-эффект, когда исследуемые траектории незначительно выходили из рассматриваемой плоскости. В расчетах принималось $Э_2 = 0$. Среднее значение предела текучести $\sigma_т = \sigma^т/\sqrt{2/3} = 321{,}3 \pm 4{,}1$ МПа. Усредненные значение констант модуль упругости $E = 2 \cdot 10^5$ МПа, модуль сдвига $G = 0{,}77 \cdot 10^5$ МПа, коэффициент Пуассона $\mu = 0{,}3$.

Результаты. Экспериментальные программы (рис. 1, а) были осуществлены в плоскости $Э_1 - Э_3$ векторного пространства деформаций. Первый участок деформирования, до точки излома траектории, общий для всех программ соответствует пропорциональному растяжению с кручением. Излом траекторий производился при достижении значения деформации $Э_1 = Э_3 = 2\%$. После излома вид нагружения отличался для всех траекторий. На рисунке 1 (б) показан отклик на реализуемые траектории в плоскости векторного пространства девиатора напряжений $S_1 - S_3$.

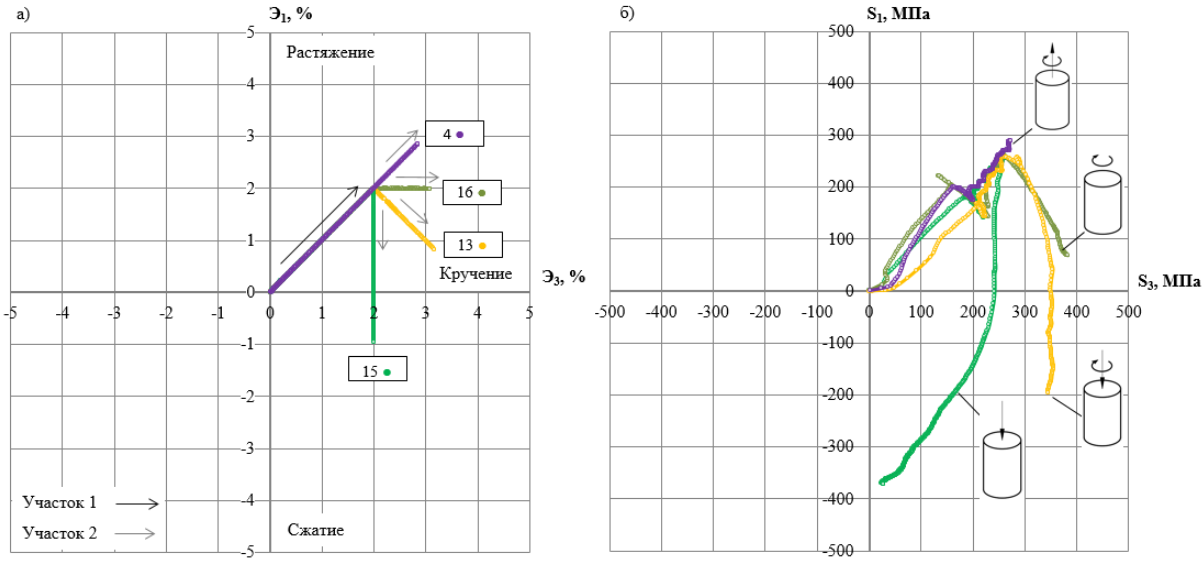


Рис. 1. а) Программы деформирования образцов по типу смещенного веера; б) Отклик на программу (4 – без излома; 16 – излом -45°; 13 – излом -90°; 15 – излом -135°)

Численное решение дифференциальных уравнений (1) осуществлялось методом Рунге-Кутты 4-го порядка точности для траектории с углом излома -90°. Подобранные параметры аппроксимаций A, b, γ, p, q приведены в табл. 1.

Табл. 1. Параметры аппроксимации

A	b	γ	p	q
17000	0,44	3	1	0,55

На рис. 2 приведены совмещенные диаграммы зависимости модуля вектора напряжений σ и угла сближения ϑ_1 от длины дуги деформаций s.

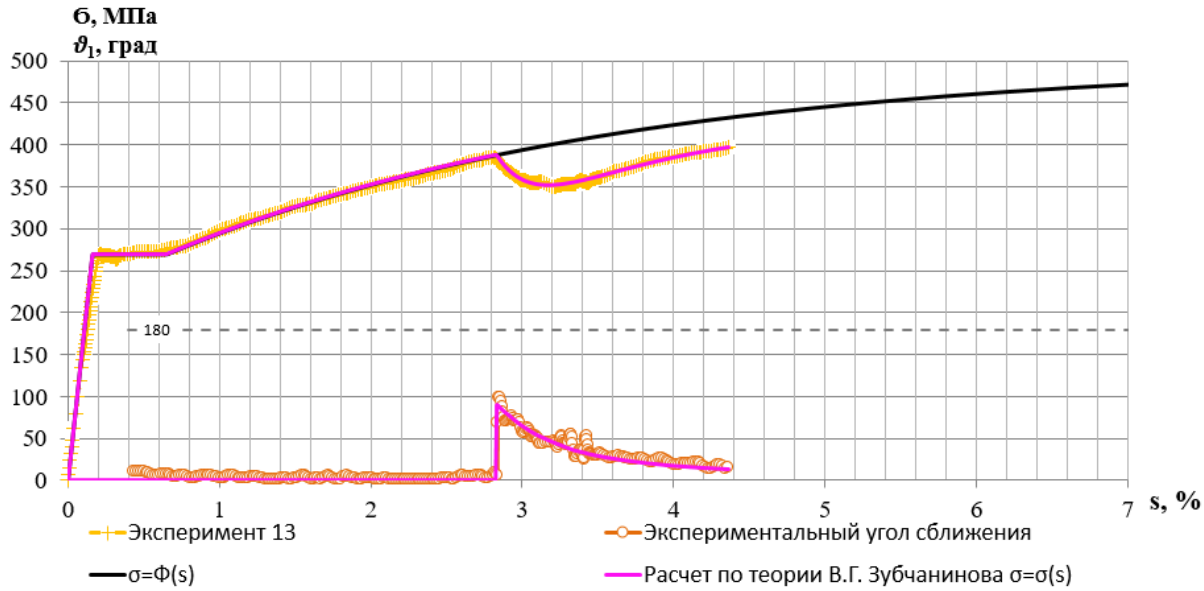


Рис. 2. Совмещенные диаграмма деформирования и угла сближения

Заключение. Функция, предложенная В.Г. Зубчаниновым, достаточно точно описывает скалярный нырок напряжений после излома траектории на -90° при сложной разгрузке и последующем вторичном пластическом деформировании.

ЛИТЕРАТУРА

1. Зубчанинов В.Г. Механика процессов пластических сред. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2010. – 352 с. – ISBN 978-5-9221-1235-2.

2.Гультяев В.И. Экспериментальное изучение упругопластического деформиро-вания конструкционных материалов на автоматизированном испытательном комплексе СН-ЭВМ / В.И. Гультяев, А.Н. Булгаков // Вестник Чувашского государственного педагогического, университета им. И.Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. – 2023. – № 2(56). – С. 53-64. – DOI 10.37972/chgpu.2023.56.2.006.

3. Зубчанинов В.Г., Охлопков Н.Л., Гаранников В.В. Экспериментальная пластичность: Монография. Книга 1. Процессы сложного деформирования, 2003, Тверь:ТГТУ.

4. Ильюшин А.А. Пластичность. Основы общей математической теории. М.: Изд-во АН СССР, 1963. 271 с.

УДК 539.3

А.Р. Галяутдинова[1], Т.В. Зиновьева[2]
[1]Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого(*)
[2]Институт Проблем Машиноведения РАН

КОНТАКТНЫЕ НАПРЯЖЕНИЯ В КОЛЬЦЕ РОЛИКОПОДШИПНИКА, ОСЛАБЛЕННОГО ВОДОРОДОМ

Введение. Задачи контактного взаимодействия остаются актуальными в современном инженерном и научном контексте благодаря важности предотвращения износа, усталостных разрушений и других негативных эффектов, связанных с трением и взаимодействием материалов. Одним из факторов, влияющих на контактные напряжения, является диффузия водорода. Он может проникать в металлические и полимерные структуры, вызывая значительные изменения в их механических свойствах и приводя к образованию обширных сеток трещин. Это, в свою очередь, способствует снижению прочности и жесткости материала. Такое явление известно как водородное охрупчивание, оно может существенно ухудшить эксплуатационные характеристики конструкций.

С проблемой водородного охрупчивания сталкиваются в различных отраслях промышленности, где периодически происходит неожиданный отказ высокопрочных металлов в критически важных компонентах. Негативному воздействию водорода подвержена также инфраструктура газопроводов [1, 2]. Описанные выше проблемы объясняют существование большого количества работ [3, 4], посвященных изучению механизмов водородного разрушения.

В процессе работы подшипники также подвергаются негативному воздействию водорода, который выделяется из смазки в результате трибохимической реакции [5]. Это приводит к ускоренному истиранию поверхностей дорожек качения и усталостному износу материала колец подшипника.

В работах [6, 7] было рассчитано напряженное состояние подшипника, посаженного на вал с натягом, и найдено распределение диффузионно-подвижного водорода в материале внутреннего кольца подшипника во время его эксплуатации. Предварительная оценка влияния водорода показала образование в кольце слоя с ослабленными механическими характеристиками.

Влияние водорода на НДС кольца подшипника. В этой работе исследуется влияние ослабленного водородом слоя на напряженно-деформированное состояние внутреннего кольца подшипника на валу. Показано, что водород способствует увеличению окружных и осевых напряжений на внешнем радиусе кольца в зоне контакта с роликами. Появление ослабленного слоя вызывает дополнительное расширение кольца. Поскольку внутреннее кольцо подшипника находится в сборке с внешним кольцом, то его дополнительное расширение под воздействием водорода приведет к уменьшению рабочего радиального зазора и перераспределению осевой нагрузки между телами качения.

Контактные напряжения от роликов. Внешняя нагрузка на подшипник от вала распределяется между телами качения неравномерно. Обычно считают, что прижимающая сила, действующая на наиболее нагруженное тело качения, равна $F_1 = SF_r/N$, где S – коэффициент Штрибека, зависящий от радиального зазора, F_r – радиальное усилие, N – количество тел качения в подшипнике.

(*) А.Р. Галяутдинова, aliyagalyautdinova@gmail.com

Рассчитав приложенную к ролику силу, далее можно определить глубинные напряжения, возникающие под его давлением во внутреннем кольце подшипника. Используем традиционный подход, моделируя кольцо упругим полупространством.

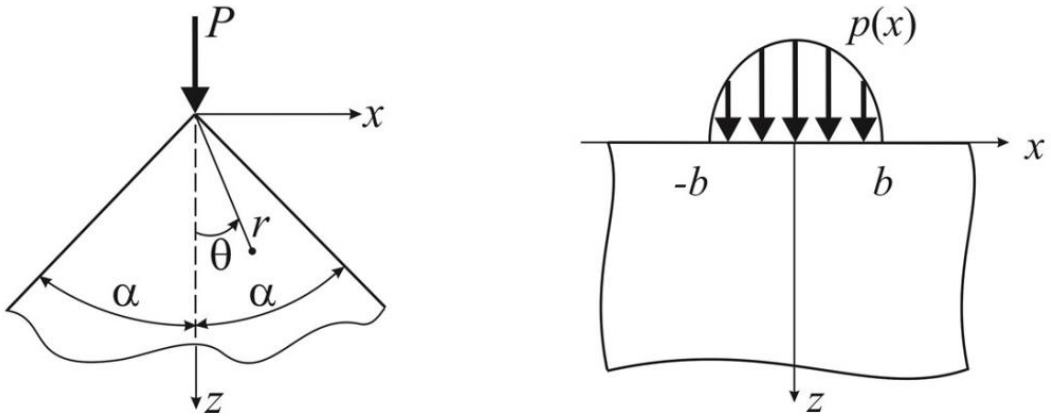
Пусть цилиндр радиуса R прижимается к упругому полупространству силой Q (на единицу длины цилиндра), контактное давление между ними определено формулами Герца [8]:

$$p(x) = p_{\max}\sqrt{1-\left(\frac{x}{b}\right)^2},\quad p_{\max} = \frac{2Q}{\pi b},\quad b = 2\sqrt{\frac{Q\beta R}{\pi}},\quad \beta \equiv \frac{1-\nu_0^2}{E_0} + \frac{1-\nu^2}{E}, \tag{1}$$

здесь b – полуширина площадки контакта, $p_{\max}$ – значение давления в центре площадки, E, E_0 и ν, ν_0 – модули Юнга и коэффициенты Пуассона материалов (индекс ноль относится к цилиндру). Определим напряженное состояние упругого полупространства под этой нагрузкой, предполагая, что в полупространстве реализуется плоское деформированное состояние.

Для этого сначала построим решение классической задачи об упругом полупространстве под действием сосредоточенной силы в начале координат. Решение этой задачи было впервые построено Фламаном с помощью функции напряжений, мы используем более изящный подход, предложенный А.И. Лурье [9]. Для этого рассмотрим задачу об упругом клине, нагруженном силой P в своей вершине. Введем полярную систему координат r, θ с центром в вершине клина (рис. 1 *а*). Бесконечный клин ограничен прямыми $\theta = \pm\alpha$, его границы свободны от нагрузки:

$$\theta = \pm\alpha: \qquad \sigma_\theta = 0, \qquad \tau_{r\theta} = 0. \tag{2}$$



а) *б*)

Рис. 1. *а*) Упругий клин; *б*) давление на полупространстве

Предположим, что эти компоненты тензора напряжений равны нулю и внутри клиновидной области $|\theta| \le \alpha$. Тогда радиальное поле напряжений выражается через функцию напряжений как $\sigma_r = \Delta U$ и должно удовлетворять условию совместности деформаций:

$$\Delta\sigma_r = \Delta\Delta U = 0. \tag{3}$$

Из (3) следует, что компонента σ_r должна быть гармонической функцией. Помимо этого, для любого r должны быть также выполнены условия равновесия отсеченной части клина:

$$\int_{-\alpha}^{\alpha} \sigma_r \cos\theta r d\theta + P = 0, \qquad \int_{-\alpha}^{\alpha} \sigma_r \sin\theta r d\theta = 0. \tag{4}$$

Условиям (3) и (4) можно удовлетворить, приняв σ_r в виде:

$$\sigma_r = -\frac{2P}{r}\frac{\cos\theta}{(2\alpha+\sin 2\alpha)}. \tag{5}$$

Интересующий нас случай полупространства мы получим, положив в (5) $\alpha = \pi/2$:

$$\sigma_r = -\frac{2P}{\pi r}\cos\theta. \tag{6}$$

Переходя далее к декартовым координатам *x, z*, получим компоненты напряжений в полупространстве, нагруженном в начале координат силой *P*. В случае действия распределенной нормальной нагрузки $p(x)$ из (1) на границе полупространства $z = 0$ (рис. 1 *б*) результирующие поля напряжений можно определить посредством суперпозиции:

$$\sigma_z(x,z) = -\frac{2}{\pi}\int_{-b}^{b}\frac{p(\chi)z^3}{\left[z^2+(x-\chi)^2\right]^2}d\chi, \quad \sigma_x(x,z) = -\frac{2}{\pi}\int_{-b}^{b}\frac{p(\chi)z(x-\chi)^2}{\left[z^2+(x-\chi)^2\right]^2}d\chi,$$

$$\tau_{xz}(x,z) = -\frac{2}{\pi}\int_{-b}^{b}\frac{p(\chi)z^2(x-\chi)}{\left[z^2+(x-\chi)^2\right]^2}d\chi, \qquad \sigma_y = \nu(\sigma_x+\sigma_z). \tag{7}$$

Начнутся ли в материале пластические деформации, определим по критерию Мизеса. Это произойдет, когда эквивалентное напряжение

$$S_{\text{eq}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{(\sigma_x-\sigma_z)^2+(\sigma_y-\sigma_z)^2+(\sigma_x-\sigma_y)^2+6\tau_{xz}^2} \tag{8}$$

достигнет предела текучести стали при растяжении.

Эквивалентные напряжения, расчитанные по (8) на основе выражений для компонент тензора напряжений (7) достигают максимума на некоторой глубине под контактной поверхностью. При дополнительном расширении кольца подшипника от воздействия водорода наблюдается увеличение их значений.

Работа выполнена в рамках госзадания ИПМаш РАН FFNF-2024-0003 №124041100005-4.

ЛИТЕРАТУРА

1. Cavaliere P. Hydrogen Embrittlement: The Hydrogen Disasters // Hydrogen Embrittlement in Metals and Alloys. – Springer, Cham, 2025. – P. 729–789.
2. Laureys A., Depraetere R., Cauwels M., Depover T., Hertele S., Verbeken K. Use of existing steel pipeline infrastructure for gaseous hydrogen storage and transport: A review of factors affecting hydrogen induced degradation // Journal of Natural Gas Science and Engineering. – 2022. – V. 101. – 104534.
3. Anastasovska E., Doncheva E., Zdraveski F. A Review Study on Hydrogen Embrittlement of Steel // Journal of Structural Integrity and Life. – 2024. – V. 24 (3). – P. 277-281.
4. Li X., Ma X., Zhang J., Akiyama E., Wang Y., Song X. Review of Hydrogen Embrittlement in Metals: Hydrogen Diffusion, Hydrogen Characterization, Hydrogen Embrittlement Mechanism and Prevention // Acta Metallurgica. – 2020. – V. 33 (6). – P. 759-773.
5. Tamada K., Tanaka H. Occurrence of Brittle Flaking on Bearings Used for Automotive Electrical Instruments and Auxiliary Devices // Wear. – 1996. – 199. – P. 245-252.
6. Зиновьева Т.В., Галяутдинова А.Р. Распределение водорода внутри кольца подшипника под воздействием натяга и вращения вала // Современное машиностроение: материалы 12-й Международной научной конференции. – СПб.: ПОЛИТЕХ-ПРЕСС, 2023. С. 191-203.
7. Zinovieva T.V., Galyautdinova A.R. Hydrogen Degradation of Material of a Bearing Ring Fitted on a Rotating Shaft // LNME. – 2024. – P. 66-76. DOI: 10.1007/978-3-031-48851-1_7.
8. Johnson K.L. Contact Mechanics. – Cambridge University Press, 1985. – 452 p.
9. Lurie A.I. Theory of Elasticity. – Springer Berlin, Heidelberg, 2005. – 1050 p.

УДК 534.11

Е.А. Дегилевич[1], А.С. Смирнов[1,2]
[1]Институт проблем машиноведения Российской академии наук(*)
[2]Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого

МОДЕЛИРОВАНИЕ ТРОСА КРАНА МЕТОДАМИ МНОГОТЕЛЬНОЙ ДИНАМИКИ

Введение. Для определения собственных частот колебаний и моделирования динамики систем с распределенными параметрами, таких как стержни, балки, цепи и тросы, которые обладают бесконечным числом степеней свободы, часто используют упрощенные модели с сосредоточенными параметрами [1, 2]. При этом переход к таким конечномерным моделям позволяет не только упростить построение аналитического решения, но и дает возможность применить прикладные расчетные пакеты. Например, при моделировании троса крана использование многотельной динамики и конечномерных моделей может оказаться более эффективным по сравнению с методом конечных элементов, поскольку оно требует меньших вычислительных ресурсов при сохранении приемлемой точности.

В настоящей работе трос представляет собой балочный маятник (БМ), который, в отличие от классической модели цепного маятника (ЦМ), обладает изгибной жесткостью. Целью данной работы является проверка применимости методов многотельной динамики для моделирования тросовых систем.

Частотный анализ. Для описания динамики БМ обратимся к исследованию двух математических моделей, в первой из которых он характеризуется распределенными параметрами (рис. 1, а), а во второй – сосредоточенными параметрами (рис. 1, б).

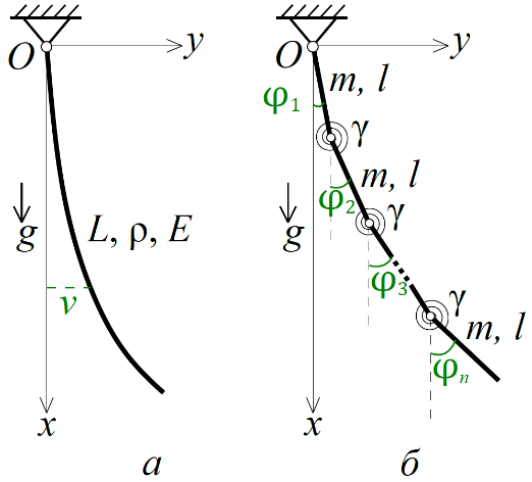


Рис. 1. Модели балочного маятника: (*а*) распределенная, (*б*) конечномерная

Для математической модели БМ с распределенными параметрами (рис. 1, а) уравнение динамики примет вид [3]:

$$\rho F \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = -EJ \frac{\partial^4 v}{\partial x^4} + \rho F g \frac{\partial}{\partial x}\left[(L-x)\frac{\partial v}{dx}\right], \qquad (1)$$

где x – продольная координата, t – время, v – поперечное перемещение сечения балки, L – ее длина, F – площадь сечения балки, J – момент инерции сечения балки, g – ускорение свободного падения, ρ – плотность материала балки, E – модуль Юнга материала балки.

Решение уравнения (1) разыскивается в виде $v(x,t) = V(x)\sin(kt+\alpha)$. Вводя безразмерные параметры: продольную координату ξ; параметр δ, определяющий соотношение упругих и гравитационных свойств БМБ а также частоту p по формулам

(*) Е.А. Дегилевич, degilevichegor@gmail.com

$$\xi = \frac{x}{L}, \qquad \delta = \frac{EJ}{\rho F g L^3}, \qquad k = p\sqrt{\frac{g}{L}} = p\sqrt{\frac{EJ}{\rho F g L^4 \delta}}, \tag{2}$$

можно записать уравнение для амплитудной функции $V(\xi)$ в следующем виде:

$$\delta V^{IV} - [(1-\xi)V']' - p^2 V = 0, \tag{3}$$

где штрихом обозначается производная по безразмерной координате ξ. Рассматривая оба предельных случая параметра δ, можно видеть, что при $\delta \to 0$ уравнение (3) переходит в уравнение, отвечающее классическому ЦМ [2], а при $\delta \to \infty$ – в уравнение классической балки Бернулли – Эйлера [4] без учета силы тяжести. Уравнение (3) следует дополнить граничными условиями: $V = 0, V'' = 0$ при $\xi = 0$ и $V'' = 0, V''' = 0$ при $\xi = 1$.

Физическая конечномерная модель БМ (рис. 1, б) основана на применении стержневой схемы из n одинаковых стержней длиной $l = L/n$ и массой $m = \rho F L/n = \rho F l$ каждый, соединенных шарнирно друг с другом. Учет изгибной жесткости производится путем введения в конструкцию торсионов жесткостью 2γ в местах шарнирного соединения. Отметим, что при последовательном соединении торсионов в месте стыковки соседних стержней будет располагаться торсион с результирующей жесткостью $\gamma = EJ/l$ [1].

Для сравнения частот колебаний конечномерной и исходной распределенной моделей следует связать жесткость γ с введенным ранее параметром δ с учетом (2):

$$\gamma = n^3 \delta m g l = n \delta \rho F g L^2. \tag{4}$$

В случае малых колебаний кинетическую и потенциальную энергии системы можно записать в виде следующих квадратичных аппроксимаций:

$$T = \frac{1}{2}\dot{\boldsymbol{\varphi}}^{\mathrm{T}}\mathbf{A}\dot{\boldsymbol{\varphi}}, \qquad \Pi = \frac{1}{2}\boldsymbol{\varphi}^{\mathrm{T}}\mathbf{C}\boldsymbol{\varphi}, \tag{5}$$

где $\boldsymbol{\varphi} = [\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n]^{\mathrm{T}}$ – столбец обобщенных координат, в качестве которых принимаются углы отклонения стержней от вертикали, а $\mathbf{A}$ и $\mathbf{C}$ – симметричные матрицы инерционных и квазиупругих коэффициентов соответственно. Введем безразмерную частоту колебаний $p = k/k_0$, где $k_0 = \sqrt{g/L}$, и безразмерные матрицы $\mathbf{A}_0 = \mathbf{A}/ml^2$, $\mathbf{C}_0 = \mathbf{C}/mgl$. Элементы этих безразмерных матриц для системы с n степенями свободы имеют вид ($n \geq 2$):

$$\begin{aligned} &j = i\colon\ a_{0ii} = n - i + \frac{1}{3}, \qquad c_{0ii} = n - i + \frac{1}{2} + n^3\delta \cdot \begin{cases} 2, & 1 < i < n \\ 1, & i = 1 \cup i = n \end{cases} \\ &j \neq i\colon\ a_{0ij} = n - r + \frac{1}{2}, \qquad r = \max(i,j), \quad c_{0ij} = \begin{cases} -n^3\delta, & |i-j| = 1 \\ 0, & |i-j| \neq 1 \end{cases} \end{aligned} \tag{6}$$

Частотное уравнение системы с учетом соотношения $L = nl$ будет следующим:

$$\det(n\mathbf{C}_0 - p^2\mathbf{A}_0) = 0. \tag{7}$$

Исследуя численными методами уравнение (3) для модели с распределенными параметрами и уравнение (7) с учетом (6) для конечномерной модели БМ, можно получить графики безразмерных частот колебаний системы p в зависимости от параметра δ (рис. 2).

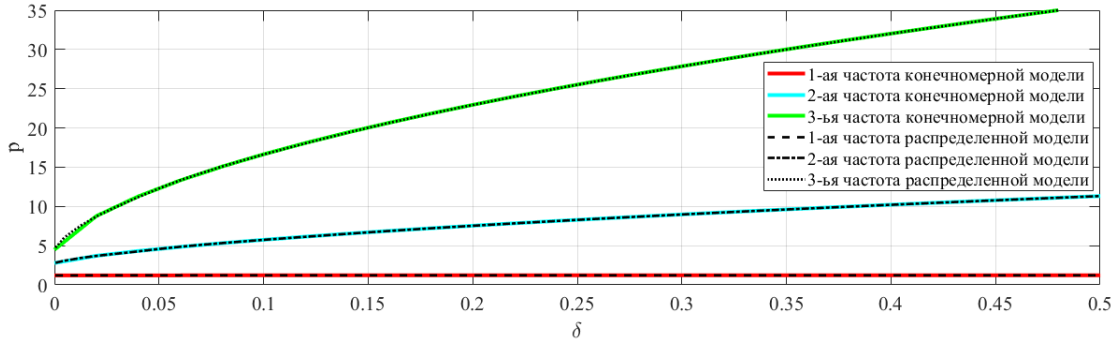


Рис. 2. Безразмерные частоты колебаний p в зависимости от δ при $n = 10$

Из рис. 2 следует, что уже при малом количестве звеньев низшие частоты колебаний конечномерной модели БМ весьма близки к частотам колебаний исходной модели с распределенными параметрами, а также видно, что с увеличением параметра δ, т. е. с ростом жесткости троса на изгиб, все частоты колебаний, за исключением первой, возрастают.

Моделирование. С применением стержневой схемы с торсионами в программном комплексе MSC.ADAMS была построена модель крана (рис. 3), для которой был задан произвольный режим работы с поворотом и вибрацией платформы, имитирующей качку крана на судне. При увеличении числа звеньев в составе троса проверена сходимость проекций траектории движения концевого груза. На рис. 4 приведены графики расхождения траекторий в моделях с 4, 6, 8, 10 и 14 звеньями относительно траектории в модели с 20 звеньями. Следует отметить, что величины, приведенные на графиках зависимости разностей координат от времени, отнесены к длине БМ и умножены на 100%.

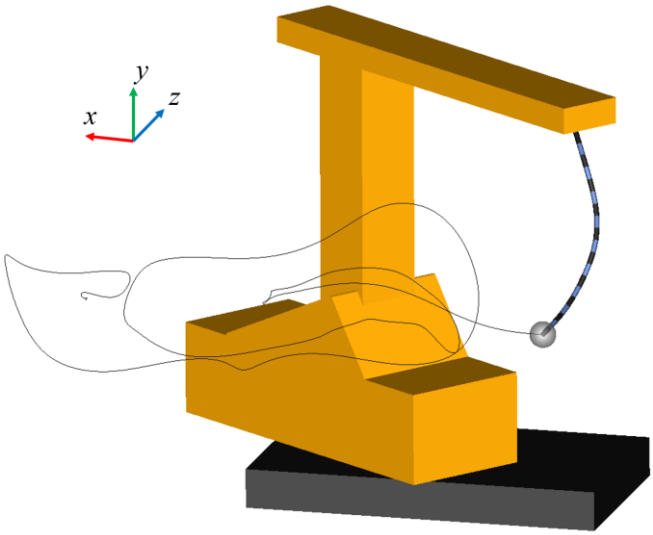


Рис. 3. Модель крана с траекторией груза на тросе

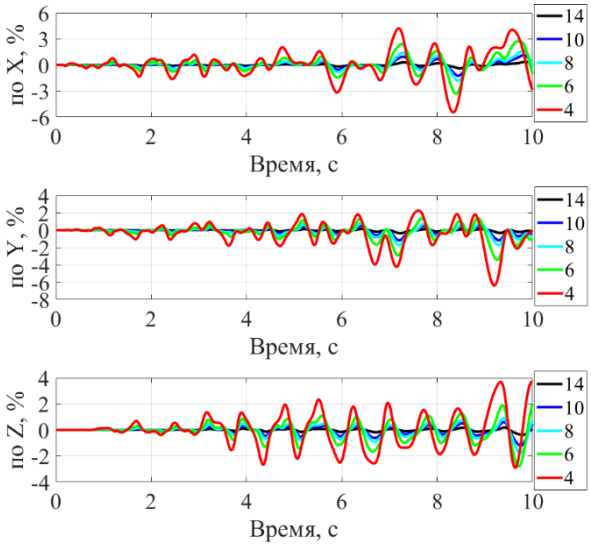


Рис. 4. Расхождения проекций траектории

На основе рис. 4 можно наблюдать сходимость траекторий при росте количества звеньев, причем расхождение модели с 10 стержнями от модели с 20 стержнями не превышает 1.4%, а в случае 14 стержней максимальный процент расхождения меньше 0.5%.

Заключение. Таким образом, можно заключить, что с применением многотельной динамики и конечномерных моделей с относительно небольшим количеством звеньев возможен анализ тросов в составе сложных систем. Полученные результаты могут быть полезными для прикладных задач, где требуется определить динамические нагрузки на трос и узлы крепления с целью проверки прочности конструкции.

ЛИТЕРАТУРА

1. Исполов Ю.Г. Вычислительные методы в теории колебаний. СПб.: изд-во Политехнического университета, 2008. – 124 с.
2. Смирнов А.С., Дегилевич Е.А. Колебания цепных систем. СПб.: Политех-пресс, 2021. – 246 с.
3. Динник А.Н. Устойчивость упругих систем. М.: ОНТИ НКТП СССР, 1935. – 186 с.
4. Бидерман В.Л. Теория механических колебаний. М., Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2009. – 414 с.

УДК 539.3, 539.4, 539.87

К.О. Исаев, Д.С. Науман, М.И. Лобачев
Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого(*)

РАЗРАБОТКА МЕТОДИКИ ПЕРЕХОДА В ЗОНУ СНИЖЕННОЙ МАГНИТНОЙ ИНДУКЦИИ ДЛЯ УРАВНОВЕШЕННЫХ СЛОЕВ КВАЗИБЕССИЛОВОЙ СИСТЕМЫ

Работа посвящена разработке методики проектирования квазибессиловых магнитных систем, способных генерировать экстремальные магнитные поля без экспоненциального роста размеров и энергопотребления. Особенностью таких систем является квазибессиловая конфигурация, где радиальные силы Лоренца компенсируются в каждом проводящем слое. Применение сильных и сверхсильных магнитных полей можно увидеть в таких областях как: ядерный магнитный резонанс и МРТ в медицине и биологии; физика высоких энергий - ускорение частиц в ускорителях; изоэнтропическое сжатие вещества; определение эффективных масс носителей заряда в полупроводниках; халдейновские цепочки; магнитные ловушки для плазмы (токамаки, стеллараторы).

В поставленной задаче этой работы исследуется осесимметричная система с учетом идеальной проводимости материала из двух цилиндров (слоев), соединенных кривыми Безье - для обеспечения плавного перехода магнитного поля из центральной (в нашем случае, нижней) части системы в зону сниженной магнитной индукции (верхний слой). Цель ослабления магнитной индукции поля в квазибессиловой системе — обеспечение снижения механических напряжений в области геометрического перехода материала проводников в торцевую часть установки [1, 2].

В рамках однослойной модели рассмотрено распределение магнитной индукции в зависимости от радиуса перехода r_p – величина смещения с первого на второй уровень. Общий вид модели, направление векторов плотности тока и компонентов магнитной индукции и указание геометрических характеристик представлены на рис. 1.

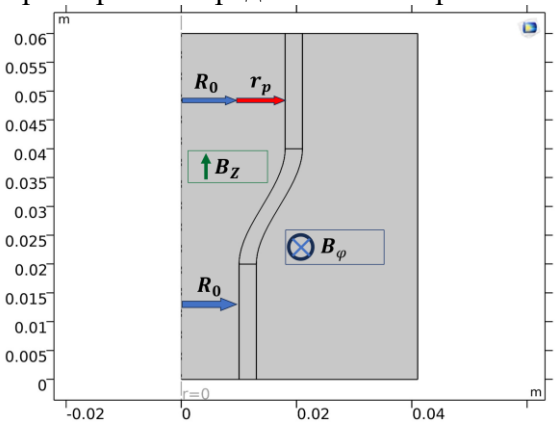


Рис. 1. Общий вид однослойной модели

Для аналитического расчета принимается следующее соотношение, связывающее нижний и верхний слой: магнитный поток аксиального поля на внутренней стенке проводника в первом нижнем слое должен быть равен потоку в верхнем:

$$\Phi = B_z \pi R_0^2 = B_z' \pi \left(R_0 + r_p\right)^2 \quad (1)$$

Было исследовано распределение магнитной индукции в зависимости от радиуса перехода. Из анализа следует, что тороидальная компонента магнитной индукции B_φ

(*) К.О. Исаев, isaev_ko@spbstu.ru

уменьшается с увеличением радиуса как r^{-1}, а полоидальная компонента B_z уменьшается как r^{-2}. С увеличением радиуса перехода отношение компонент поля B_φ к B_z возрастает и отдаляется от значений, необходимых для уравновешивания сил в цилиндре. Анализ механических напряжений, нормированных по магнитному давлению, функции η,

$$\eta = \frac{\sigma_{\max}}{B_0^2/2\mu_0} \tag{2}$$

где B_0 – результирующее поле величиной 100 Т, показал, что нормированные значения превышают $\eta = 0.6$ (соответствует 2.5 ГПа), что значительно выше предела прочности сплава бериллиевой бронзы с критическим значением $\eta = 0.27$ (1.1 ГПа). Это связано с тем, что при увеличении радиуса перехода механические напряжения растут из-за постоянной толщины слоя и быстрого возрастания отношения компонент поля магнитной индукции B_φ к B_z.

Таким образом, для однослойной модели не существует такого радиуса перехода, при котором вся система остается уравновешенной. Чтобы решить эту проблему, была предложена модифицированная модель [3, 4, 5], в которой при переходе изменяется толщина сечения ($R_0 + r_p = R_0'$; g_0' - измененная относительная толщина сечения – т.е. отношение внешнего радиуса цилиндра к внутреннему; w_{z0} – число витков в слое обмотки). Редуцированные для однослойного варианта соотношения включают уравнение сохранение магнитного потока (3) и баланса сил (4) и позволяют добиться такого соотношения радиусов, при котором оба цилиндра остаются уравновешенными.

$$R_0^2 \cdot \frac{B_z(R_0)}{\mu_0 I} = R_0'^2 \cdot \sqrt{2 \cdot \left(\frac{w_{z0}}{\pi R_0'^2 (g_0'^2 - 1)} \cdot \left[\frac{w_{z0}}{2\pi (g_0'^2 - 1)} \cdot \left(\frac{g_0'^2 - 1}{2} - \ln(g_0') \right) \right] \right)} \tag{3}$$

$$\frac{R_0^2 (g_0'^2 - 1) B_z(R_0)}{2\mu_0 I} + \frac{R_0^2 (g_0'^2 (2 \ln g_0' - 1) + 1)}{4 \ln g_0'} \cdot \frac{B_z(R_0)}{\mu_0 I} =$$

$$= \frac{R_0'^2 (g_0'^2 - 1)}{2} \cdot \frac{R_0^2}{R_0'^2} \cdot \frac{B_z(R_0)}{\mu_0 I} + \frac{R_0'^2 (g_0'^2 (2 \ln g_0' - 1) + 1)}{4 \ln g_0'} \cdot \frac{R_0^2}{R_0'^2} \cdot \frac{B_z(R_0)}{\mu_0 I} \tag{4}$$

Значения параметров составили $R_0' = 0.0136$; $g_0' = 1.95$ (рис. 3) против начальных параметров $R_0 = 0.01$; $g_0 = 1.3$. Распределение магнитной индукции показано на рис. 2.

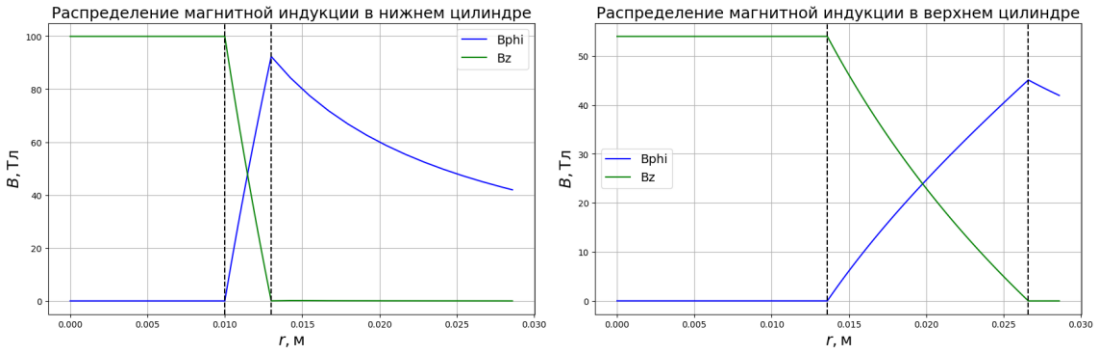


Рис. 2. Распределение магнитной индукции в нижнем слое (слева) и в верхнем слое (справа)

Нормированные значения напряжений по Мизесу в модифицированной модели не превышают $\eta = 0.18$, что является значительным улучшением по сравнению с предыдущей моделью. График распределения (рис. 4) радиальных сил демонстрирует, что оба цилиндра уравновешены, а интегральная объемная сила стремится к нулю. Это подтверждает, что использование модели с изменяющимся сечением позволяет подобрать параметры, при которых система остается уравновешенной.

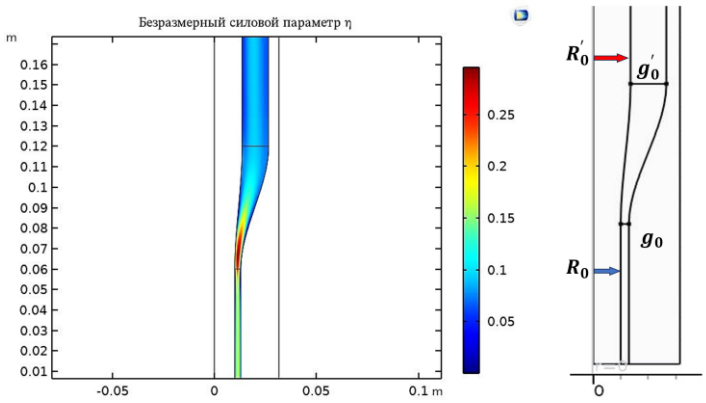


Рис. 3. Поле безразмерного силового параметра η (слева)
и модифицированная геометрия модели (справа)

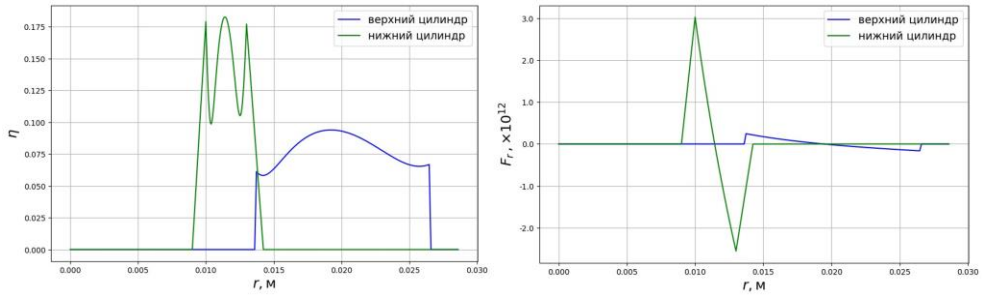


Рис. 4. Распределение нормированных напряжений (слева) и радиальных сил (справа)

Переход к многослойной модели позволяет учесть взаимодействие между несколькими слоями и обеспечить более точный контроль над ростом магнитной индукции. Для многослойной системы условия равновесия формулируются аналогично однослойной, но учитывается дополнительные ограничивающие параметры – число витков в слоях обмотки, зависимость отношений компонент поля от изменяющихся толщин слоев.

Таким образом, предложенная методика перехода в зону сниженной магнитной индукции позволяет сохранить равновесие с точки зрения механической силы системы при снижении механических напряжений до допустимых значений. Однако, повышение толщины слоя будет также повышать тепловыделение системы. Использование кривых Безье для соединения слоев обеспечивает плавность распределения магнитного поля, а изменение толщины слоев позволяет адаптировать систему под конкретные поставленные условия и добиться снижения максимальных напряжений в компонентах системы.

ЛИТЕРАТУРА

1. Shneerson G., Wen J., Nemov A., Nenashev A., Vecherov I., Marchenko P., Lagutkina A. Basic Configuration of an Indestructible Quasi-Force-Free Magnet with Magnetic Flux Density above 100 T. IEEE Xplore, 2018 16th International Conference on Megagauss Magnetic Field Generation and Related Topics,
2. Shneerson G., Koltunov O., Schneider-Muntau H.J., Titkov V., Parfentjev A. The concept of quasi-force-free magnets: theoretical substantiation, estimation of parameters, and feasibility // Physica B: Condensed Matter, Volumes 346–347, 30 April 2004, Pages 566-570.
3. Шнеерсон Г.А., Волошин К.В., Лобачев М.И. Бессиловое магнитное поле в области между двумя коаксиальными цилиндрами как модель поля реального магнита с многослойной уравновешенной обмоткой // Научно-технический журнал «Физмат». – 2025. 4. Волошин К.В. Многослойная уравновешенная обмотка реальной толщины // Известия СПбГЭТУ «ЛЭТИ». – 2025. (принята к публикации)
5. Лобачев М.И., Новокшенов А.Д. Решение квазистатической осесимметричной задачи для однослойного квазибессилового магнита // Вестник Московского университета. Серия 1. Математика. Механика. – 2025. – № 5. – С. 31-37.

УДК 534.014

О.А. Князев, Н.А. Смирнова
Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого(*)

ПАРАМЕТРИЧЕСКИЙ РЕГУЛЯТОР В СИСТЕМЕ СТАБИЛИЗАЦИИ СЛАБОДЕМПФИРОВАННОГО ОСЦИЛЛЯТОРА

Введение. В работе исследуется работоспособность замкнутой системы стабилизации равновесия слабодемпфированного осциллятора Дуффинга с параметрическим регулятором. Идея параметрического управления основана на свойствах решения уравнения Матье [1]. Такой тип управления может применяться не только для стабилизации, но и для генерации периодических колебаний. Настройка варьируемых коэффициентов регулятора должна обеспечивать существование заданного режима (стабилизации или генерации) и его эффективность в условиях неточного знания модели объекта управления.

Структурная схема системы стабилизации. Уравнение типа Матье, описывающее колебания линейного осциллятора, вызванные периодическим изменением параметра, имеет вид

$$\ddot{\alpha} + 2\nu\dot{\alpha} + [1 + \mu\, sin(\, kt - \varphi)]\alpha = 0, \qquad (1)$$

где $\alpha(t)$ – отклонение осциллятора от положения равновесия $\alpha^d = 0$, зависящее от безразмерного времени $t = \omega_0\tilde{t}$, ω_0 – собственная частота колебаний осциллятора, k – отношение частоты колебаний параметра к величине ω_0, μ – безразмерная амплитуда колебаний параметра, φ – сдвиг фазы между колебаниями параметра и осциллятора, ν – относительное затухание.

Если записать уравнение (1) в виде

$$\ddot{\alpha} + 2\nu\dot{\alpha} + \alpha = -[\mu\, sin(\, kt - \varphi)]\alpha = u, \qquad (2)$$

то правую часть уравнения (2) можно считать управляющим входом u, формируемым по измерениям выхода α, а выражение в квадратных скобках назвать параметрическим регулятором. Следовательно, в замкнутой системе с параметрическим регулятором может возникать неустойчивый колебательный процесс с безразмерной частотой $k/2$, называемый первым параметрическим резонансом (ППР). Для возбуждения ППР необходимо определенным образом подобрать величины k, μ и φ. Нашей целью являлось решение обратной задачи: определить такие настройки параметрического регулятора, которые обеспечивали бы стабилизацию колебаний выхода $\alpha(t)$ с повышением быстродействия по сравнению с неуправляемым установлением осциллятора.

Определение настроек регулятора. Для настройки регулятора необходимо определить границы возбуждения ППР в замкнутой системе (2). Согласно методу стационаризации [2], параметрический регулятор $\mu\, sin(\, kt - \varphi)$ следует заменить на комплексный коэффициент передачи $W = \frac{\mu}{2} e^{i(\frac{\pi}{2} - \varphi)}$, если в уравнении (2) имеют место незатухающие колебания переменной $\alpha(t)$ с безразмерной частотой $k/2$. Заметим, что в зависимости от сдвига фаз φ параметрический регулятор работает как звено опережения или запаздывания. Структурная схема замкнутой системы для определения границ ППР, включающая осциллятор с передаточной функцией $H(p) = \frac{1}{p^2 + 2\nu p + 1}$, показана на рис.1.

Применение критерия Найквиста позволяет записать условия нахождения замкнутой системы на границе устойчивости. Баланс модулей имеет вид:

$$|W(i\varphi)| = \left| H^{-1}(i\frac{\omega}{\omega_0}) \right|\Big|_{\frac{\omega}{\omega_0} = \frac{k}{2}}, \text{ следовательно } \frac{\mu}{2} = \sqrt{\left(1 - \frac{k^2}{4}\right)^2 + \nu^2 k^2}. \qquad (3)$$

(*) Н.А. Смирнова, smirnova_na@spbstu.ru

Баланс фаз имеет вид

$$\frac{\pi}{2} - \varphi - arctg\,\frac{\nu k}{1-k^2/4} = -\pi. \qquad (4)$$

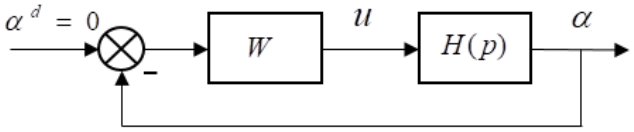


Рис. 1. Структурная схема замкнутой системы для определения границ ППР

Формулы (3) и (4) позволяют при заданном значении $k = 2$ определить значение $\mu = 4\nu$, $\varphi = \pi$, при которых замкнутая система оказывается на границе устойчивости. При $\mu = 4\nu$ замкнутая система имеет достаточный запас устойчивости по фазе, если $\varphi < \frac{2}{3}\pi$, и процесс стабилизации будет эффективным. Если же принять $\varphi \geq \pi$, то условия возбуждения ППР выполнятся, и реализуется процесс с неограниченным ростом размаха колебаний. Следовательно, положив $k = 2$, $\mu \geq 4\nu$ и варьируя фазу φ, можно добиваться в замкнутой системе режима стабилизации, или режима ППР.

Результаты моделирования. Численная модель замкнутой системы построена в Simulink (рис. 2). Объектом управления является слабодемпфированный осциллятор с нелинейностью в упругой (восстанавливающей) силе. Поскольку $sin\,\alpha \approx \alpha - \alpha^3/6$, то можно отнести его модель к классу осцилляторов Дуффинга [3].

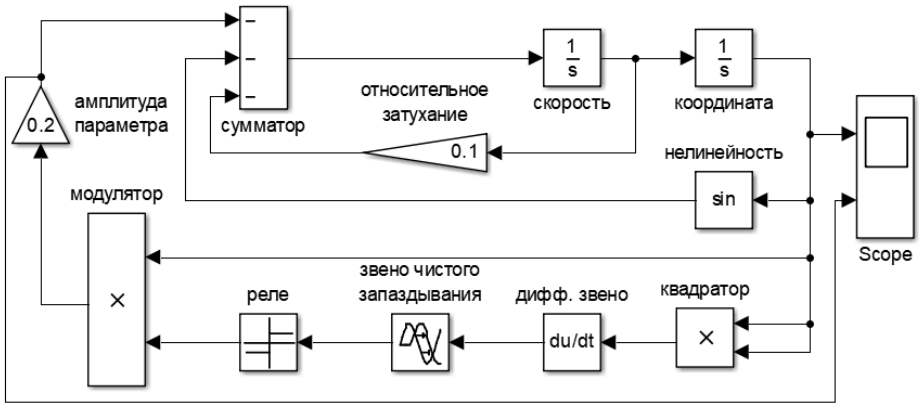


Рис. 2. Численная модель замкнутой системы

Параметрический регулятор реализован в виде последовательного соединения квадратора, дифференцирующего звена, звена чистого запаздывания с передаточной функцией $H_{чз}(p) = e^{-\tau p}$ и двухпозиционного реле [2, 4]. Дифференцирующее звено не формирует сигнал обратной связи, а является управляющим сигналом реле. На выходе реле получается прямоугольный сигнал с меньшим в два раза периодом по сравнению с периодом колебаний выхода $\alpha(t)$ и сдвинутый на $\varphi = k\tau$ по фазе. На рис. 3 показана осциллограмма выхода замкнутой системы в режиме стабилизации. Там же приведена осциллограмма свободных колебаний объекта. Время установления $t_\infty = 17$ в замкнутой системе уменьшилось почти в четыре раза по сравнению со временем установления свободных колебаний. На рис. 4 показан процесс установления параметрических колебаний осциллятора Дуффинга. Существование установившегося режима обеспечивается подбором времени запаздывания τ. Например, для $\nu = 0{,}05$, $\mu = 0{,}2$ диапазон $0{,}41\pi < \tau < 0{,}56\pi$ обеспечивает генерацию колебаний с амплитудами $1\ рад < \alpha_0 < 2{,}8\ рад$.

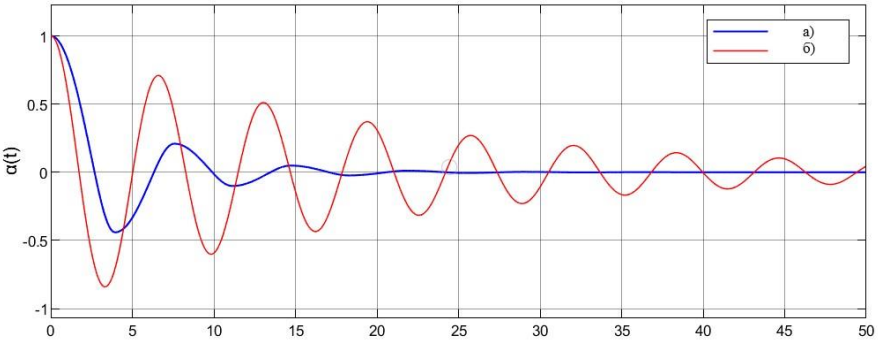


Рис. 3. а) Осциллограмма выхода системы стабилизации при $\nu = 0{,}05$, $\mu = 0{,}5$, $\tau = 0$;
б) осциллограмма свободных колебаний осциллятора

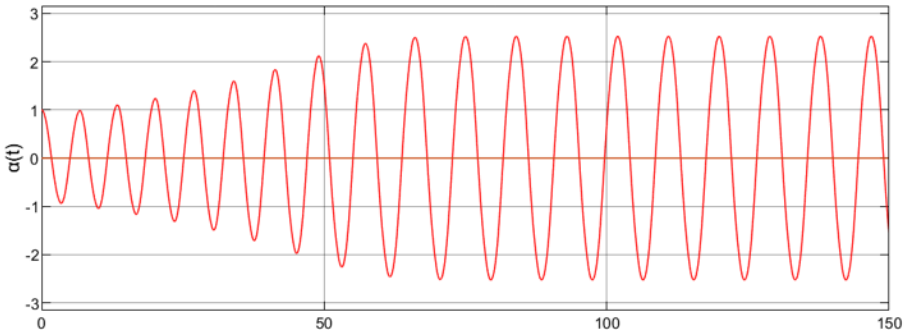


Рис. 4. ППР в замкнутой системе с осциллятором Дуффинга при $\nu = 0{,}05$, $\mu = 0{,}2$, $\tau = 0{,}5\pi$

Характерным свойством осциллятора Дуффинга является увеличение периода его колебаний с увеличением их размаха. Период управляющего сигнала на выходе параметрического регулятора подстраивается под изменение периода колебаний осциллятора. Соотношение периода колебаний осциллятора и периода колебаний параметра остается постоянным и равным двум. При неизменном времени запаздывания τ сдвиг по фазе $\varphi = k\tau$ изменяется за счет изменения периода колебаний осциллятора Дуффинга с развитием ППР. В то время как период колебаний осциллятора увеличивается с ростом их размаха, значение φ приближается к границе возбуждения ППР и рост размаха колебаний прекращается. Период установившихся колебаний осциллятора на рис. 4 составляет немногим больше $T = 9$, что соответствует $k = 1{,}4$ и $\varphi = 0{,}7\pi$.

Заключение. Параметрический регулятор, включенный в систему с обратной связью по измерениям обобщенной координаты осциллятора $\alpha(t)$, позволяет автоматически добиваться удвоенной частоты колебаний параметра. Амплитуда колебаний параметра должна удовлетворять условию $4\nu \leq \mu < 1$. Настройка времени запаздывания τ обеспечивает в замкнутой системе режим стабилизации или генерации. Уменьшение времени стабилизации достигается при $\tau = 0$ и больших значениях μ из указанного диапазона. Установившаяся амплитуда колебании при генерации зависит от конкретных значений μ и τ. Получение этой зависимости составляет цель дальнейшего исследования.

ЛИТЕРАТУРА

1. Трубецков Д.И., Рожнев А.Г. Линейные колебания и волны. – М.: Физматлит, 2001.
2. С.Л. Чечурин, Л.С. Чечурин. Физические основы теории колебаний. – Изд. СПбПУ, 2005.
3. Кузнецов А.П., Кузнецов С.П., Рыскин Н.М. Нелинейные колебания. – М.: Физматлит, 2002.
4. Chechurin L., Chechurin S. Physical Fundamentals of Oscillations. – Springer Nature Switzerland, 2017. – 264 p.

УДК 539.3, 577.353.9

П.А. Кожанова[1], А.Б. Фрейдин[2]
[1]Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого(*)
[2]Институт проблем машиноведения Российской Академии наук

МОДЕЛИРОВАНИЕ ПОВЕРХНОСТНОГО РОСТА В СФЕРИЧЕСКИ-СИММЕТРИЧНОЙ ЗАДАЧЕ

Введение. Поверхностный рост и резорбция играют ключевую роль в адаптации биологических тканей к внешним нагрузкам. В данной работе рассматривается модель зарастания поры в толстостенной сфере, где рост обусловлен увеличением нагрузки поддерживается объемным подводом питательного вещества его последующей диффузией и потреблением на внутренней поверхности. Особое внимание уделено влиянию внешнего давления на перераспределение напряжений и, как следствие, на кинетику зарастания поры. Актуальность исследования связана с необходимостью понимания механизмов адаптации костных тканей к изменяющимся нагрузкам.

Поверхностный рост на внутренней поверхности толстостенной сферы. Эксперименты показывают, что процессы роста и ремоделирования живых тканей могут вызываться и контролироваться внешними воздействиями, в том числе механическими [1]. В данной работе, с использованием разработанной ранее модели [2], исследована задача о зарастании сферической полости в полом шаре. Рассматривается толстостенная сфера с начальным внутренним радиусом R_{in}^0 и внешним радиусом R_{out}, находящимся под действием внешнего сжимающего давления p (рис. 1).

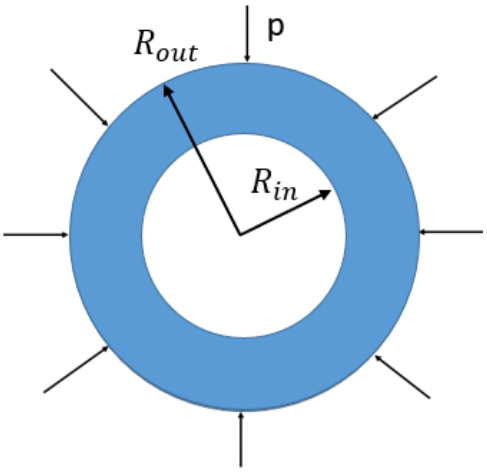


Рис. 1. Постановка задачи

Вещество доставляется к поверхности полости в результате распределенного по телу объемного подвода и диффузии, которая описывается уравнением диффузии с источниковым членом S, задаваемым функцией объемного подвода:

$$\frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{dc}{dr}\right) = -\frac{S}{DM} \qquad (1)$$

где c — молярная концентрация вещества, D — коэффициент диффузии, M — молярная масса подводимого вещества.

На внешней поверхности шара поток равен нулю:

$$-D\frac{\partial c(r)}{\partial r}\Big|_{r=R_{out}} = 0 \qquad (2)$$

(*) П.А. Кожанова, polinakozhanova@yandex.ru

На внутренней поверхности ставится граничное условие:

$$-D\left.\frac{\partial c(r)}{\partial r}\right|_{r=R_{in}} = K_*\left(c(R_{in}) - \mathrm{c}_{eq}\right) \quad (3)$$

где $K_* -$ константа скорости превращения, $c(R_{in})$ – концентрация на внутреннем радиусе, c_{eq} — равновесная концентрация подводимого вещества, определяемая напряжениями на поверхности роста условием равенства нулю нормальной компоненты A_{NN} тензора роста [2]:

$$A_{NN} = \frac{M}{\rho}(y(T) + H) + RTln\left(\frac{c}{c_0}\right) = 0, \;\; H = -\frac{1}{2}\varepsilon : C : \varepsilon + \varepsilon[\sigma], \quad (4)$$

где $y(T)$ – комбинация химических энергий веществ, участвующих в превращении, ε и σ – тензоры деформаций и напряжений, C – тензор модулей упругости, квадратными скобками обозначен скачок величины, H характеризует влияние напряжений на кинетику роста. Из (4) следует, что

$$\mathrm{c}_{eq} = c_0 \exp\left(-\frac{M}{\rho RT}(y(T) + H)\right) \quad (5)$$

Общее решение уравнения диффузии (1) имеет вид:

$$\mathrm{c}(r) = \frac{A}{r} + B - \frac{s}{6DM}r^2 \;\;, \quad (6)$$

где константы A и B находятся из граничных условий (2), (3):

$$A = -\frac{s}{3DM}{R_{out}}^3; \;\; B = \frac{s}{3M}\left(\frac{1}{D}\frac{{R_{out}}^3}{R_{in}} + \frac{1}{2D}{R_{in}}^2 - \frac{1}{K_*}\frac{{R_{out}}^3}{{R_{in}}^2} + \frac{1}{K_*}R_{in}\right) + \mathrm{c}_{eq} \quad (7)$$

Так как вещество, подводимое к поверхности полости, идет на поверхностный рост, из баланса массы следует, что скорость поверхности роста (скорость зарастания) определяется формулой:

$$W = \frac{M}{\rho}K_*\left(c(R_{in}) - \mathrm{c}_{eq}\right). \quad (8)$$

Большое внимание уделено выбору и анализу зависимости функции подвода питательного вещества от напряжений. Предполагается, что напряжения влияют через гидростатическую часть тензора напряжений, которая в случае сферической симметрии не зависит от радиуса точек тела, но зависит от внешнего давления и изменяющегося радиуса полости. В силу того, что гидростатическая часть тензора напряжений не зависит от радиуса, то и функция подвода от радиуса не зависит. Вид зависимости функции подвода от гидростатической составляющей тензора напряжений питательного вещества выбирается из следующих соображений.

Гидростатическая составляющая тензора напряжений определяется величинами внешнего давления и внутреннего радиуса. В начальный момент времени при давлении p_0 и соответствующим равновесном радиусе R_{in}^0 подвод равен нулю $s(p_0, R_{in}^0) = 0$. После увеличения давления до $p = (1 + \alpha)p_0$ начинается зарастание полости. При достижении нового равновесного радиуса R_{in}^f подвод снова становится равным нулю: $s(p, R_{in}^f) = 0$. Ниже в качестве примера такой функции взят подвод

$$s = k(tr\sigma - tr\sigma_0).$$

Кинетика роста. Параметры костной ткани были взяты из [3]. На Рис. 2 показаны зависимости концентрации на поверхности роста от времени при различных давлениях. Из графиков видно, что при скачке давления начинается объемный подвод. В результате концентрация резко возрастает и плавно убывает до нового равновесного значения, при достижении которого подвод и рост прекращаются, что показано на Рис 3.

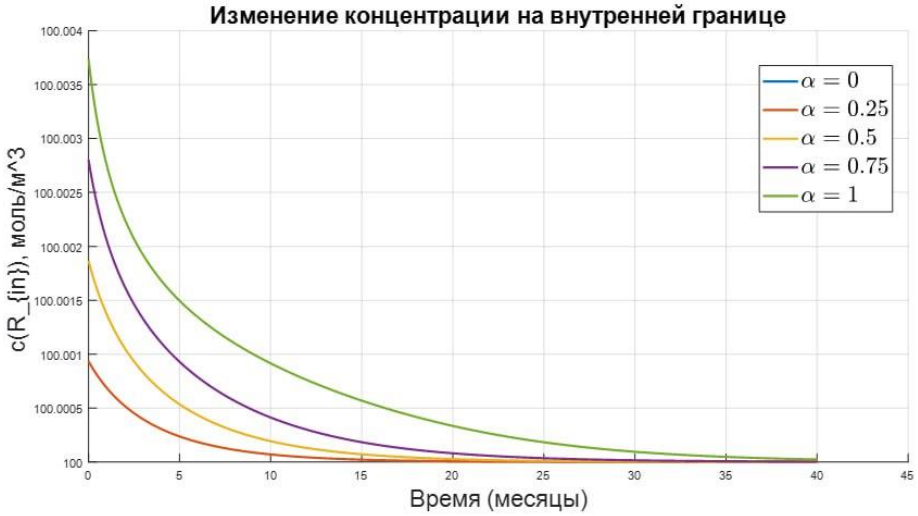


Рис. 2. Изменение концентрации на поверхности роста от времени при различных давлениях

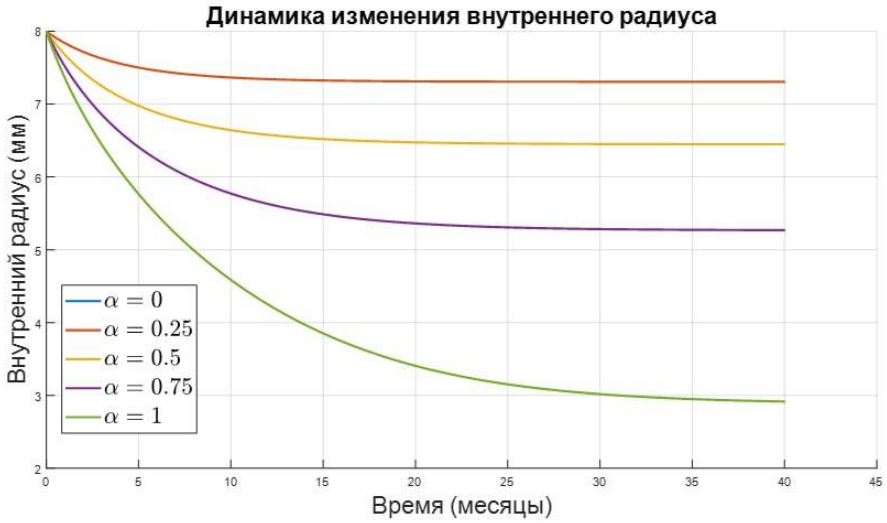


Рис. 3. Изменение внутреннего радиуса от времени при различных давлениях

Зарастание полости прекращается при достижении равновесного состояния, когда подвод вещества компенсируется его потреблением.

Заключение. В данной работе была исследована модель поверхностного зарастания полости в толстостенной сфере, учитывающая влияние внешнего давления на кинетику роста и распределение напряжений. Разработанная модель может быть полезна для понимания механизмов адаптации биологических тканей, таких как кости, к изменяющимся нагрузкам.

Работа выполнена в рамках государственного задания Министерства науки и высшего образования Российской Федерации для ИПМаш РАН (тема № 124041500009-8).

ЛИТЕРАТУРА

1. Taber L.A. Biomechanics of growth, remodeling and morphogenesis // Applied Mechanics Reviews. – 1995. – Vol .48. – P. 487–545.
2. Freidin A.B., Izmaylova Y.O. On a configurational force driving surface growth of solids // Materials Physics and Mechanics. - 2019. - Vol. 42. - P. 582–595.
3. Pal S. Design of Artificial Human Joints & Organs // New York: Springer. - 2014.

УДК 539.38, 539.52

Т.С. Комарова, А.И. Грищенко
Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого(*)

ИДЕНТИФИКАЦИЯ ПАРАМЕТРОВ МАТЕРИАЛА ДЛЯ РЕОНОМНЫХ МИКРОМЕХАНИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ НЕУПРУГОГО ДЕФОРМИРОВАНИЯ МОНОКРИСТАЛЛИЧЕСКИХ СПЛАВОВ НА НИКЕЛЕВОЙ ОСНОВЕ

Введение. Никелевые жаропрочные монокристаллические сплавы широко используются в области газотурбинных установок. Такие сплавы характеризуются анизотропией механических свойств, т. е. зависимостью свойств от кристаллографического направления [1]. Также их свойство сохранять устойчивое структурное состояние позволяет эксплуатировать изделия при температурах, близких к температуре плавления.

Целью настоящего исследования является разработка методов идентификации параметров материала для реономных микромеханических моделей неупругого деформирования монокристаллических сплавов на никелевой основе. Монокристаллические сплавы имеют гранецентрированную кубическую (ГЦК) кристаллическую структуру. Наличие кубической сингонии свидетельствует о том, что механические свойства одинаковы для трех взаимно перпендикулярных направлений. Неупругое деформирование происходит в результате скольжения по независимым системам скольжения, которые описываются нормалью к рассматриваемой плоскости скольжения и направлением скольжения с наиболее плотной упаковкой атомов. Монокристаллические сплавы с ГЦК решеткой имеют 12 октаэдрических систем скольжения вида {111}<011>, 6 кубических вида {001}<011> [2], а также 12 альтернативных октаэдрических систем вида {111}<112>. Предположим, что активными являются октаэдрические и кубические системы скольжения, влияние альтернативных октаэдрическим систем на данном этапе не учитывается.

Для описания неупругого деформирования по различным системам скольжения вводится тензор Шмида $\boldsymbol{n}^{\alpha}\boldsymbol{l}^{\alpha}$ (n^{α} – нормаль к α-ой плоскости скольжения, l^{α} – направления скольжения) его симметричная часть отвечает за деформацию монокристалла:

$$\mathbf{P}^{\alpha} = 0.5\left(\mathbf{n}^{\alpha}\mathbf{l}^{\alpha} + \mathbf{l}^{\alpha}\mathbf{n}^{\alpha}\right), \tag{1}$$

В случае малых деформаций, тензор скоростей неупругих деформаций определяется следующим образом:

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{p} = \sum_{\alpha=1}^{N} \dot{\gamma}^{\alpha}\mathbf{P}^{\alpha}, \tag{2}$$

где $\dot{\gamma}^{\alpha}$ – множитель, характеризующий интенсивность неупругого деформирования.

Выражение для сдвиговых напряжений в α-ой системе скольжения имеет вид:

$$\tau^{\alpha} = \boldsymbol{\sigma} \cdot \cdot \ \mathbf{P}^{\alpha}. \tag{3}$$

Испытания проводятся при одноосном нагружении образцов, поэтому тензор напряжений в лабораторной системе координат имеет вид: $\boldsymbol{\sigma} = \sigma_{zz}\mathbf{kk}$

Для описания произвольной ориентации монокристалла используется тензор поворота **R**, связывающий лабораторную (глобальную) и кристаллографическую системы координат, который с использованием углов Эйлера имеет следующий вид:

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} \cos\psi\cos\varphi - \sin\psi\cos\theta\sin\varphi & \cos\psi\sin\varphi + \sin\psi\cos\theta\cos\varphi & \sin\psi\sin\theta \\ -\sin\psi\cos\varphi - \cos\psi\cos\theta\sin\varphi & -\sin\psi\sin\varphi + \cos\psi\cos\theta\cos\varphi & \cos\psi\sin\theta \\ \sin\theta\sin\varphi & -\sin\theta\cos\varphi & \cos\theta \end{bmatrix}. \tag{4}$$

(*) Т.С. Комарова, tanyakmrv@yandex.ru

В случае одноосного напряженного состояния сдвиговые напряжения α-ой системе скольжения имеют следующий вид:

$$\tau^{\alpha} = \sigma_{zz}(P_{11}^{\alpha}\sin^2\varphi\sin^2\theta + P_{22}^{\alpha}\cos^2\varphi\sin^2\theta + P_{33}^{\alpha}\cos^2\theta + P_{13}^{\alpha}\sin\varphi\sin 2\theta + P_{23}^{\alpha}\cos\varphi\sin 2\theta + P_{12}^{\alpha}\sin 2\varphi\sin^2\theta) \quad (5)$$

Исследуемый процесс неупругой деформации, зависящий от времени, называется процессом ползучести, характеризующимся наличием деформации при постоянном напряжении. В данном процессе выделяют три стадии: первая стадия (I) – убывающая скорость ползучести; вторая стадия (II) – постоянная скоростью ползучести; третья стадия (III) – возрастающая скорость ползучести, что далее ведет к разрушению.

В данной работе исследуется вторая стадия ползучести. В случае одноосновного напряженного состояния установившаяся стадия ползучести может быть описана феноменологической моделью Нортона:

$$\dot{\varepsilon}_{zz} = \mathrm{A}\sigma_{zz}^{n}, \quad (6)$$

где $\dot{\varepsilon}_{zz}$ – скорость деформации, σ_{zz}^{n} – напряжение при одноосном нагружении, A, n –константы материала, зависящие от его ориентации.

Микромеханическая модель Нортона для стадии II [2] для множителя $\dot{\gamma}^{\alpha}$, описывающего скорость неупругого деформирования α-ой системы скольжения:

$$\dot{\gamma}^{\alpha} = A^{\alpha}\left|\tau^{\alpha}\right|^{n^{\alpha}} sign\left(\tau^{\alpha}\right). \quad (7)$$

Предполагается, что параметры модели (7) A^{α} и n^{α} одинаковы для всех систем скольжения в рамках каждого типа семейств скольжения. В этом случае для рассматриваемых семейств вида {111}<011> и {001}<011> имеется два набора констант: A_{oct}, n_{oct} и A_{cube}, n_{cube}. Связь параметров микромеханической и феноменологической моделей может быть установлена из сравнения скоростей неупругой деформации для случая одноосного нагружения. Так при растяжении вдоль направления [001]:

$$\dot{\varepsilon}_{[001][001]} = \frac{8A_{oct}}{6^{\frac{n_{oct}+1}{2}}}\sigma_{[001][001]}^{n_{oct}} = A_{[001]}\sigma_{[001][001]}^{n_{[001]}} \Rightarrow A_{oct} = \frac{1}{8}6^{\frac{n_{oct}+1}{2}}A_{[001]}; n_{oct} = n_{[001]}. \quad (8)$$

Одноосное растяжение вдоль направления [111] описывается выражением:

$$\dot{\varepsilon}_{[111][111]} = \frac{4}{\sqrt{6}}A_{oct}\left(\frac{2}{3\sqrt{6}}\sigma_{[111][111]}\right)^{n_{oct}} + \sqrt{2}A_{cube}\left(\frac{\sqrt{2}}{3}\sigma_{[111][111]}\right)^{n_{cube}} = A_{[111]}\sigma_{[111][111]}^{n_{[111]}}. \quad (9)$$

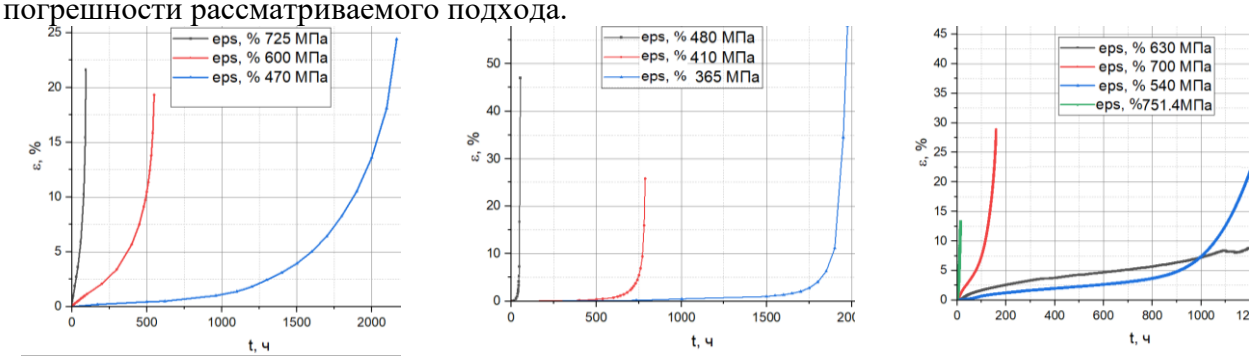
Для верификации предложенного подхода рассматривался современный жаропрочный монокристаллических сплав на никелевой основе. Кривые ползучести для трех различных ориентаций представлены на рис. 1. На основе уравнений (6)-(9), определены параметры рассматриваемой микромеханической модели ползучести:

$A_{oct} = 2.38\cdot 10^{-29}\ МПа^{-n_{oct}}c^{-1}$, $n_{oct} = 10.94$, $A_{cube} = 1.69\cdot 10^{-59}\ МПа^{-n_{cube}}c^{-1}$, $n_{cube} = 22.83$

На рис. 2 представлены результаты сравнения зависимости скоростей деформаций установившейся ползучести, полученных на основе обработки экспериментальных данных (рис. 1) и определенных на основе уравнений (1) – (7). Видно, что для направлений [001] и [111] имеется практически идеальное совпадение результатов, тогда как для направления [011] имеется существенное расхождение, что свидетельствует о неприменимости представленного подхода для описания установившейся ползучести при нагружении в произвольном направлении. Одной из возможных причин является неучет октаэдрических систем скольжения вида {111}<112>.

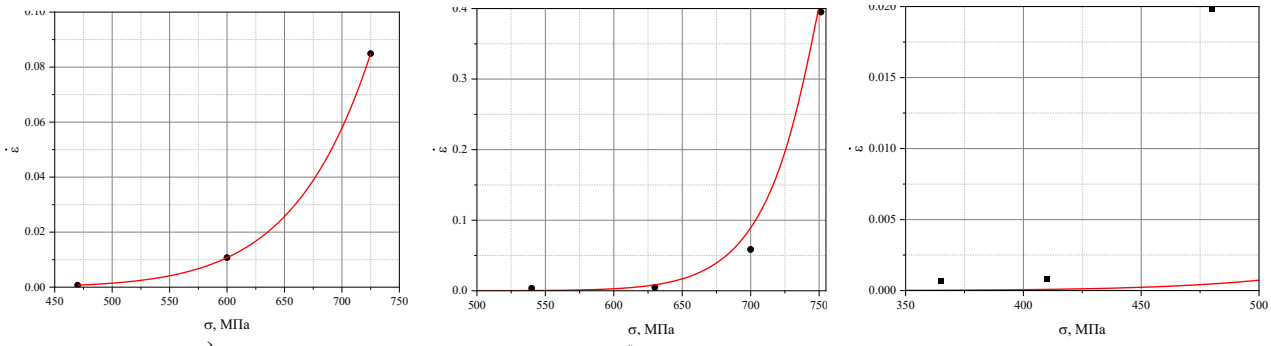
На рис. 3 представлено распределение максимального среди всех систем каждого семейства систем скольжения фактора Шмида для стандартного стереографического треугольника. Видно, что октаэдрические семейства скольжения вида {111}<112> имеют

максимум вблизи направления [011]; соответственно, их неучет может приводить к погрешности рассматриваемого подхода.



а) б) в)

Рис. 1. Кривые ползучести монокристаллического сплава на никелевой основе для различных ориентаций: а) – [001], б) – [111], в – [011]



а) б) в)

Рис. 2. Сравнение экспериментальной и аппроксимированной зависимостей $\dot{\varepsilon}(\sigma)$ для различных ориентаций: а) – [001], б) – [111], в – [011]

а) б) в)

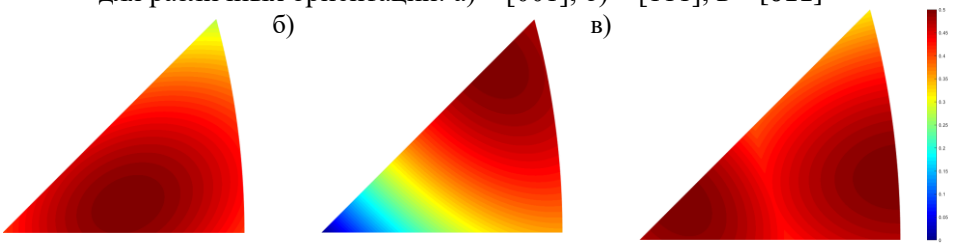


Рис. 3. Распределение максимального среди всех систем каждого семейства систем скольжения фактора Шмида для стандартного стереографического треугольника для различных типов семейств скольжения: а) {111}<011>, б) {001}<011>, в) {111}<112>

Выводы. Предложен подход по определению параметров микромеханической модели установившейся стадии ползучести для монокристаллических сплавов на никелевой основе. Верификация разработанного подхода без учета октаэдрических систем скольжения семейства вида {111}<112> показала неудовлетворительный результат для направления [011]. В дальнейшем планируется произвести учет данного вида семейств скольжения.

Работа выполнена при поддержке гранта РНФ № 25-19-00921.

ЛИТЕРАТУРА

1. Шалин Р.Е., Светлов И.Л., Качанов Е.Б., Толораия В.Н., Гаврилин О.С. Монокристаллы никелевых жаропрочных сплавов. – М.: Машиностроение, 1997. – 336 с.
2. Грищенко А.И., Семенов А.С. Моделирование процессов ползучести монокристаллических сплавов с учетом рафтинга // Вестник Пермского национального исследовательского политехнического университета. Механика. – 2022. – № 4. – С. 116-134.

УДК 531.36:62–50

А.П. Муслимов, А.В. Лапотышкин
Кыргызско-Российский Славянский Университет им. Б.Н. Ельцина(*)

АВТОМАТИЧЕСКАЯ СИСТЕМА РЕГУЛИРОВАНИЯ ЗАЗОРА ГИДРОСТАТИЧЕСКИХ НАПРАВЛЯЮЩИХ ТОКАРНОГО СТАНКА

Известно, что применение автоматических устройств в станках, предназначенных для чистовой обработки изделий, дает следующие результаты: повышение производительности за счет уменьшения настроечных операций; повышение качества продукции (точность геометрических размеров, чистота поверхности) и стойкости инструмента. В высокоточных токарных станках широко применяются гидростатические направляющие, и одним из их главных регулируемых параметров является величина зазора, от постоянства которой зависит качество детали. Для решения данной проблемы нами была разработана автоматическая система с электрогидравлической обратной связью стабилизации зазора в гидростатических направляющих токарного станка, представленная на рис. 1.

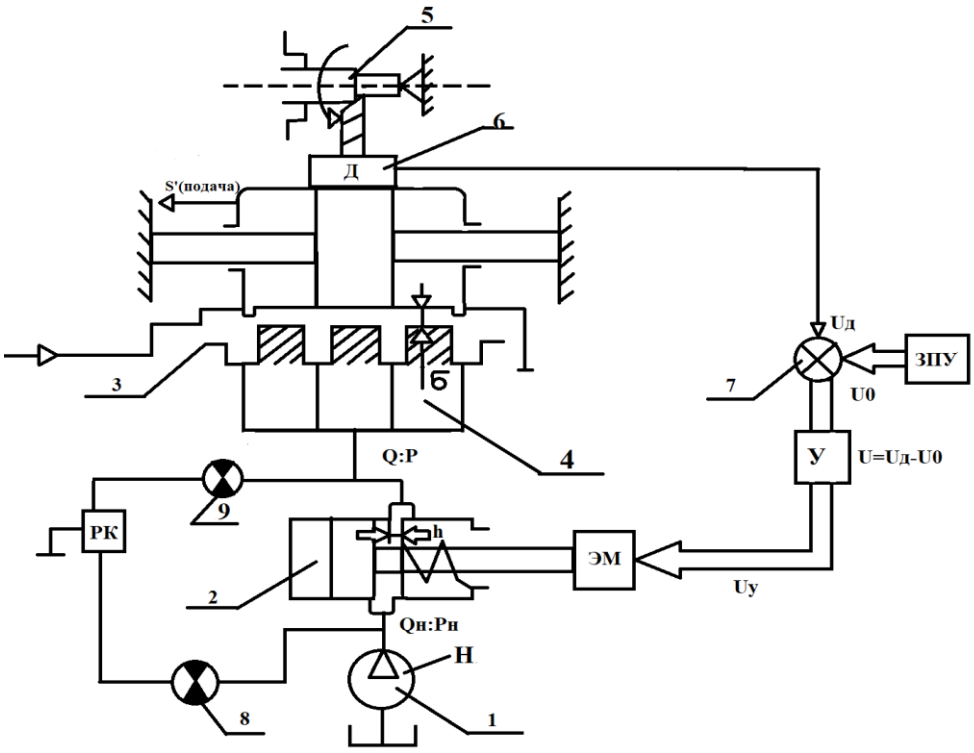


Рис. 1. Схема автоматической системы регулирования зазора
в гидростатических напрявляющих токарного станка

1 – Насос с постоянной производительностью; 2 –- Регулятор расхода с электромагнитным управлением; 3 – Неподвижный элемент гидростатических направляющих; 4 – Гидросуппорт станка; 5 – Заготовка; 6 – динамометрических резцедержатель с деференциальным-индуктивным датчиком и резцом; 7 – Сумматор; 8,9 – Демпферы; Q_н:P_н – расход давления насоса; Q:P – расход давления; РК – редукционный клапан; P=P_н-P; U_д – сигнал датчика; U_0 – задающий сигнал; U – разность сигналов; δ – зазор между неподвижной и подвижной опорами.

(*) А.В. Лапотышкин, lapotyshkin77@gmail.com

Принцип работы системы. Увеличение радиальной силы резания при токарной обработке уменьшает зазор в гидростатических направляющих. Сигнал $U_д$ поступает в сумматор 7, туда же поступает сигнал U_0. U_0 – задающий параметр, который определяет величину зазора в гидростатических направляющих. В сумматоре происходит сравнение двух сигналов $U_д$ и U_0. Сигнал рассогласования $U = U_д - U_0$ – является слабым по мощности, поэтому применяется усилитель Y, сигнал Y_y усиливается и поступает к электромагниту. В результате этого тяговое усилие ЭМ возрастает, что приводит к увеличению рабочей щели регулятора расхода. Расход, поступающий в гидростатические направляющие, способствует к увеличению давления в карманчиках ровно настолько, чтобы зазор имел постоянное значение. При уменьшении силы резания, при токарной обработке $U_д$ - уменьшается и все процессы протекают в обратном направлении, тяговое усилие ЭМ уменьшается и под действием пружины щель регулятора расхода уменьшается, что уменьшает давление в гидростатических карманчиках гидростатических направляющих. Величина зазора возвращается до установленного значения. Поскольку основными элементами системы являются гидростатические направляющие и регулятор расхода, были разработаны их математические модели для расчета их основных параметров, необходимых для проектирования и изготовления.

Математическая модель регулятора расхода с ЭМ управлением определяется уравнением:

$$T_{k1}^2 \frac{d^2h}{dt^2} + T_{д1} \frac{dh}{dt} + h = K_p I \,, \qquad (1)$$

где $T_{k1} = \sqrt{\frac{m}{c}}$; $T_{д1} = \frac{\alpha}{c}$; $K_p = \frac{K_{эм}}{c}$, h – величина зазора регулятора расхода; T_{k1} и $T_{д1}$ – постоянные времени; m -масса золотника; с – коэффициент жесткости пружины; α – коэффициент вязкого трения; K_p – коэффициент усиления регулятора; $K_{эм}$– коэффициент, зависящий от конструктивных особенностей электромагнита.

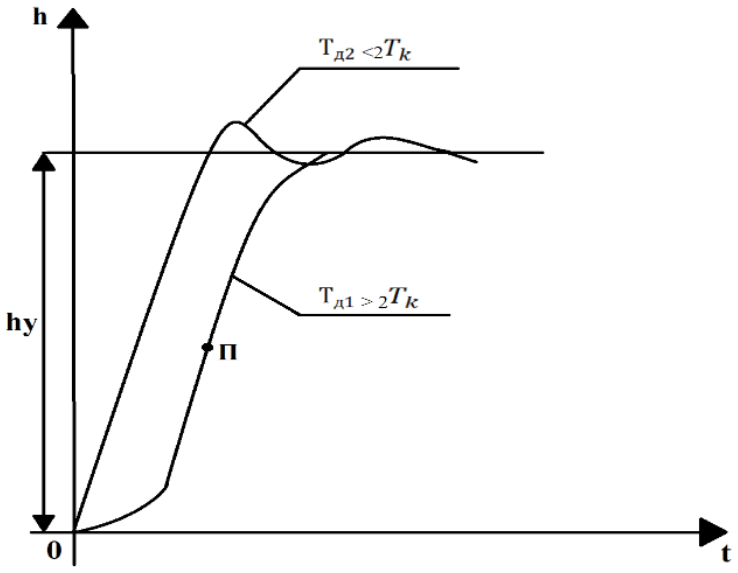


Рис. 2. Переходные процессы в регуляторе расхода

h_y – установившееся значение рабочей щели регулятора расхода; П– точка перегиба экспоненты.

Математическая модель гидростатических направляющих определяется уравнением:

$$T_{k2}^2 \frac{d^2\delta}{dt^2} + T_{д2} \frac{d\delta}{dt} + \delta = k_г(pf_k - p_y), \quad (2)$$

где $T_{k2} = \sqrt{\frac{M}{k_m}}$; $T_{д2} = \frac{\alpha}{k_ж}$; $k_г = \frac{1}{k_ж}$, $T_{к2}$ и $T_{д2}$ – соответсвующие постоянные времени гидростатических направляющих; $k_ж$ -коэффициент жесткости рабочей жидкости; $k_г = \frac{1}{k_ж}$ – коэффициент усиления гидростатических направляющих; р – давления в карманчиках; f_k – суммарная площадь карманчиков; P_y – радиальная составляющая силы резания M – масса подвижной опоры; δ – зазор в гидростатической опоре; $\alpha -$ коэффициент вязкого трения, зависящий от сорта масла.

Решения уравнений (1) и (2) в зависимости от значений постоянных времени представлены в виде графиков на рис. 2 [1].

Следует отметить, что переходные процессы в гидростатических направляющих имеет аналогичный представленномиу на рис. 2 вид, но при этом постоянными времени будут T_{k2} и $T_{д2}$.

Выводы: разработанная оригинальная автоматическая система регулирования зазора гидростатических направляющих токарного станка, а также предложенные математические модели главных ее элементов, позволяют решать вопросы корректного проектирования и изготовления. Данная автоматическая система применима также и для других типов металлорежущих станков.

ЛИТЕРАТУРА

1. Балакшин Б.С. Адаптивное управление станками [Текст] / Б.С. Балакшин. М.: Машиностроение, – 1976. – 680 с.
2. Бесекерский В.А. Теория систем автоматического управления [Текст]: 4-е изд., перераб. И доп. / В.А. Бесекерский, Е.П. Попов. СПб.: Издательство “Профессия”. – 2003. – 752 с.
3. Муслимов А.П., Васильев В.Б. Автоматическое управление технологическими процессами в машиностроении: учебник – Б.: издательство КРСУ, – 2018. – 258 с.

УДК 539.3, 539.4, 539.87

М.И. Лобачев
Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого(*)

ИССЛЕДОВАНИЕ НЕСТАЦИОНАРНЫХ ПРОЦЕССОВ В ОДНОМЕРНЫХ КВАЗИБЕССИЛОВЫХ МАГНИТАХ

Ведущие мировые лаборатории [1–3] достигли генерации импульсных полей 80–100 Тл с использованием неразрушающихся магнитов. Современные конструкции, основанные на принципе токоведущего соленоида, имеют сложную оптимизированную структуру для снижения механических напряжений от сил Лоренца. Однако традиционный метод равнонагруженных слоев приводит к экспоненциальному росту размеров системы и энергозатрат при увеличении индукции. В этой связи разработка новых магнитных конфигураций или теоретические исследования в альтернативных направлениях, способствующие прогрессу в данной области, обладают значительной научной новизной.

Одним из таких альтернативных направлений является построение квазибессиловой магнитной конфигурации [4-6], основанное на стремлении уравновесить растягивающую и

(*) М.И. Лобачев, lobachev_mi@spbstu.ru

сжимающую компоненты силы Лоренца в проводящих слоях, возникающие вследствие действия тороидального и полоидального магнитных полей и генерирующих их токов. Наибольшие нагрузки в системе испытывают элементы центральной части, для исследования которых могут быть использованы математические модели как плоского слоя [5], так и осесимметричные бесконечно-длинные цилиндры [6]. При рассмотрении статического нагружения в момент времени максимума тока эти модели эквивалентны, но в импульсном режиме начинаются различия.

Целью данной работы является исследование нестационарных процессов в одномерных моделях квазибессилового магнита, в частности, однослойного.

При униполярном импульсе в центре соленоида создается требуемое аксиальное поле B_0, подаваемое полуволной синуса обычно за время порядка нескольких миллисекунд [7]. В проводящую среду толщиной Δ диффундирует магнитное поле. Важным параметром при описании данного процесса является $k = \frac{\Delta}{\Delta_0}$, в знаменателе которого толщина скин-слоя $\Delta_0 = \sqrt{\frac{2}{\sigma\mu_0\omega}}$, где σ – проводимость среды, μ_0 – магнитная постоянная, $\omega = \frac{\pi}{t}$ – частота поля, через которую также определяется время полупериода синуса или время подачи импульса. Для создания равновесия с точки зрения механики деформируемого твердого тела в проводник также подается полоидальное поле, которое нарастает на Δ до значения $B_0\theta$. Параметр θ определяется из геометрических характеристик слоя и равенства превалирующей [1] интегральной радиальной силы Лоренца нулю в статическом случае.

Таким образом, для сравнения математических моделей, могут быть сформулированы одномерные задачи нестационарной диффузии магнитных полей в проводящую среду со скоростью D_m:

$$D_m \frac{\partial \underline{B}(x,t)}{\partial t} = \Delta \underline{B}(x,t) \qquad (1)$$

С граничными условиями для компонент вектора магнитной индукции: $B_z(0,t) = B_0 \sin(\omega t)$, $B_z(\Delta,t) = 0, B_\varphi(0,t) = 0, B_\varphi(\Delta,t) = B_0\theta \sin(\omega t)$ и нулевыми начальными.

Здесь и далее азимутальная компонента в осесимметричной постановке эквивалентна компоненте *y* в плоском слое. Решением для этих четырех отдельных подзадач (две для каждой математической модели) будут следующие изображения функций в пространстве Лапласа:

$$\begin{cases} \bar{B}_z(x,p) = \dfrac{\bar{B}_1(p)\,\mathrm{sh}\big(q(\Delta - x)\big)}{\mathrm{sh}(\Delta q)}, \qquad \bar{J}_\varphi(x,p) = \dfrac{\bar{B}_1(p) q\,\mathrm{ch}\big(q(\Delta - x)\big)}{\mu_0\,\mathrm{sh}(\Delta q)}\ ; & (2) \\ \bar{B}_\varphi(x,p) = \dfrac{\bar{B}_2(p)\,sh(qx)}{sh(\Delta q)}, \qquad \bar{J}_z(x,p) = \dfrac{\bar{B}_2(p) q\,ch(qx)}{\mu_0\,sh(\Delta q)} & (3) \end{cases}$$

Для полого цилиндра граничные условия могут быть сдвинуты на радиусы R_1 и R_2, разницей между которыми будет по-прежнему толщина Δ.

$$\begin{cases} \bar{B}_z(x,p) = \hat{A} I_0(qr) + \hat{B} K_0(qr), \qquad \bar{J}_\varphi(x,p) = \dfrac{q}{\mu_0}\big(\hat{B} K_1(qr) - \hat{A} I_1(qr)\big) & (4) \\ \bar{B}_\varphi(x,p) = \tilde{A} I_1(qr) + \tilde{B} K_1(qr), \qquad \bar{J}_z(x,p) = \dfrac{q}{\mu_0}\big(\tilde{A} I_0(qr) - \tilde{B} K_0(qr)\big) & (5) \end{cases}$$

где $q = \sqrt{p\ /\ D_m}$, $\bar{B}_1(p)$ и $\bar{B}_2(p)$ – образы граничных условий слева и справа проводника, а константы в (3) и (4) выражаются через модифицированные функции Бесселя, геометрические параметры и также граничные условия. Взяв ротор от вектора магнитной индукции в соответствующих системах координат и поделив на μ_0, мы можем также получить две приведенные компоненты вектора плотности тока, входящие в состав радиальной силы Лоренца.

Воспользовавшись численной реализацией алгоритма Гавера-Штефеста в программном комплексе Matlab, получаем обратные преобразования Лапласа для изображений функций (2)-(5).

Характерным параметром оценки адиабатического нагрева для Джоулева тепла служит нормированная на энергию магнитного поля величина удельного объемного тепловыделения, которая в каждой точке может быть рассчитана к концу импульса по следующей формуле:

$$\Delta q'(x) = \frac{2\mu_0 \Delta q(x)}{B_0^2} = \frac{2\mu_0}{\sigma B_0^2} \int_0^{\pi/\omega} J^2(x,t)\, dt \qquad (6)$$

Как видно из (10), зависимости проводимости среды от температуры и магнитного поля (явление магнитной резистивности, проявляющееся при высоких значениях индукции [7]), в рассмотрении данных моделей не учитываются.

Табл. 1. Параметры моделей слоя

Δ, м	B_0, Т	θ	σ, См	D_m
0.003	100	0.9232	60e6	0.0133

С учетом параметров, приведенных в табл. 1, выполним оценку нормированной удельной тепловой энергии в проводнике при протекании обеих компонент тока.

Слева на рис. 1 представлена зависимость (6) по толщине проводника для $k = \frac{1}{2}$; на левой границе с превалирующей компонентой поля тепловыделение выше, поэтому для этой точки на графике справа приведена зависимость энергии от параметра k. При ярковыраженном скин-эффекте ($k > 1$), нагрев снижается и выходит впоследствии на постоянное значение. Однако чем выше k, тем меньше время подачи импульса и тем более существенную роль играют динамические эффекты при рассмотрении задачи механики деформируемого твердого тела.

Для демонстрации данного явления на рис. 2 представлены расхождения нормированной на магнитное давление радиальной объемной силы Лоренца от рассчитанного уравновешивающего распределения сил по толщине в статическом случае, помноженного на $\sin(\omega t)$. Как видно, характерные пики этих значений лежат в области начала и конца времени подачи импульса, вследствие диффузии аксиальной и азимутальной компонент поля в проводящую среду, и вносят значительный вклад в вопрос прочности магнитной системы.

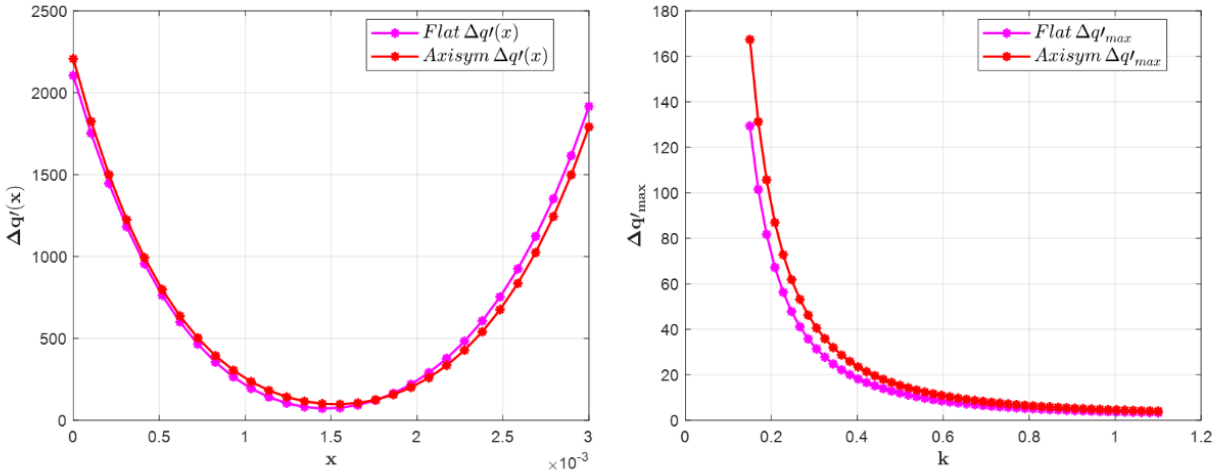


Рис. 1. Зависимости $\Delta q'$ для плоской и осесимметричной моделей

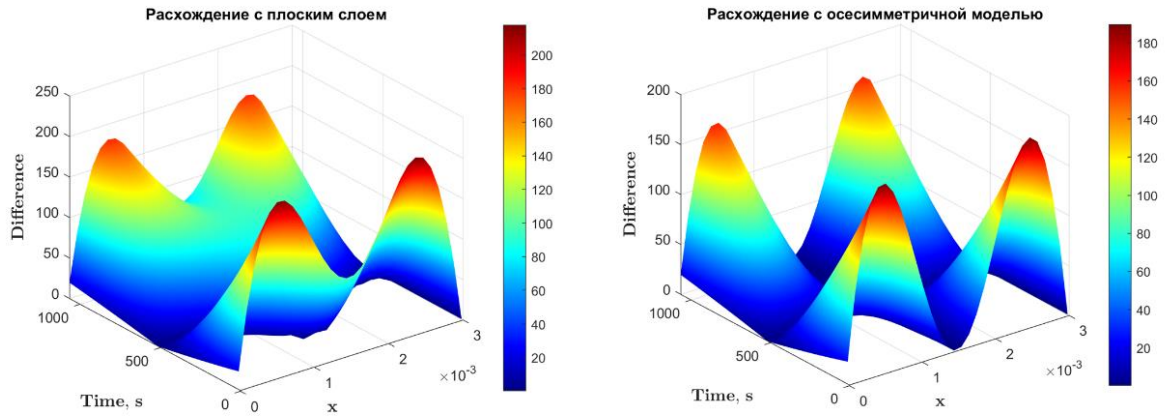


Рис. 2. Сравнение нормированных объемных радиальных сил для моделей для $k = 1/2$

Как итог, стоит подчеркнуть близость выбранных математических моделей для описания магнитной конфигурации и демонстрации представленных эффектов. При исследовании нестационарных процессов диффузия поля в проводящую среду играет ключевую роль при выборе временных параметров времени подачи импульса и должна быть учтена при рассмотрении задач механики деформируемого твердого тела.

ЛИТЕРАТУРА

1. Xiao H., Sun X., Chen X., Li X., Wang S., Jiang S., Liao J., Chen S., Peng T., Li L. Failure analysis of a 100 tesla pulsed magnet. 2020 IEEE 1st China International Youth Conference on Electrical Engineering, CIYCEE 2020.
2. Beard J., Billette J., Ferreira N., Frings P., Lagarrigue J.-M., Lecouturier F., Nicolin J.-P. Design and Tests of the 100-T Triple Coil at LNCMI. IEEE Transactions on Applied Superconductivity, 2018. 28(3), 1–5.
3. Nguyen D.N., Michel J., Mielke C. H. Status and Development of Pulsed Magnets at the NHMFL Pulsed Field Facility. IEEE Transactions on Applied Superconductivity, 2016. 26(4).
4. Shneerson G.A., Koltunov O.S., Krivosheev S.I., Adamian Y.E., Berezkin A.N., Nenashev A.P., Parfentiev A.A. Models of magnets with the quasi-force-free winding manufactured from the thin solid sheets or transposed conductors. IEEE Transactions on Plasma Science, 2010. 38(8 PART 1), 1731–1738.
5. Shneerson G.A., Koltunov O.S., Schneider-Muntau H.J., Titkov V.V., Parfentjev A. A. The concept of quasi-force-free magnets: Theoretical substantiation, estimation of parameters, and feasibility. Physica B: Condensed Matter, 2004. 346–347(1–4), 566–570.
6. Nemov A.S., Lagutkina A.D., Shneerson G.A. (2022). A Conceptual 3-D Design of a Non-Destructive Two-Layer Quasi-Force-Free Magnet for Megagauss Field Generation. IEEE Transactions on Magnetics, 58(3).
7. Li L., Herlach F. (1998). Magnetic and thermal diffusion in pulsed high-field magnets. Journal of Physics D: Applied Physics, 31(11), 1320–1328.

УДК 621.43.065

Д.А. Макаров, И.И. Далматов, Е.Д. Назарова, П.А. Упоров
БГТУ «Военмех» им. Д.Ф. Устинова(*)

ИССЛЕДОВАНИЕ ВЛИЯНИЕ ВЛИЯНИЯ ПАРАМЕТРОВ ГЕОМЕТРИИ НА ЭФФЕКТИВНОСТЬ ГЛУШИТЕЛЯ ШУМА ДВИГАТЕЛЯ ВНУТРЕННЕГО СГОРАНИЯ

Введение. В целях снижения шума двигателя необходимым условием является установка глушителя. В данной работе представляется созданный цифровой двойник глушителя

(*) П.А. Упоров, p_uporov@bk.ru

двигателей внутреннего сгорания (далее ДВС). Для оценки корректности цифровой модели получаемые значения акустической эффективности, которая в свою очередь является основной характеристикой эффективности любого глушителя, сравнивались с акустической эффективностью, вычисленной посредством аналитических формул. Цифровая модель глушителя была создана для трех различных геометрический моделей глушителей (табл. 1) и далее может быть расширена для более сложных моделей.

Расчет акустической эффективности однокамерных реактивных глушителей для ДВС проводился в модуле Harmonic Acoustic в конечно-элементном (КЭ) комплексе ANSYS 2024R2. В задаче моделируется внутренний воздушный объем, который ограничен геометрией глушителя. В КЭ модели (рис. 1) использовались следующие допущения: воздушный объем находится при нормальных условиях; все основные свойства воздушного объема, влияющие на численный расчет, учитываются при моделировании; влиянием вязкости среды пренебрегается; рассматриваются плоские волны давления; стенки глушителя не проводят и не передают звуковую энергию; в трубопроводе отсутствуют отраженные волны; давление в звуковой волне пренебрежимо мало по сравнению со средним давлением в системе; на входной патрубок глушителя задается акустическое давление 1 Па.

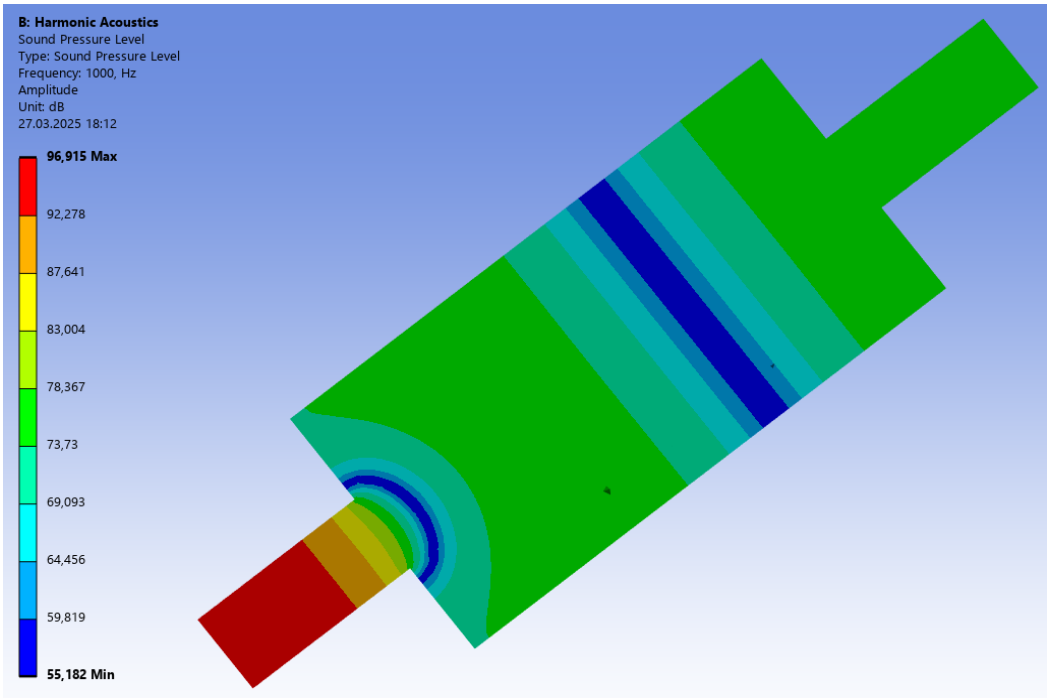


Рис. 1. Распределение уровня звукового давления по объему для модели 1 однокамерного реактивного глушителя на частоте 1000 Гц

Для аналитического расчета акустической эффективности (Transmission Loss, TL) однокамерных реактивных глушителей для ДВС используется следующая формула [1-4]:

$$TL = 10 \cdot lg\left[1 + \frac{1}{4}\left(\frac{S_к}{S_{тр}} - \frac{S_{тр}}{S_к}\right)^2 \sin^2(kL)\right],$$

где $S_к$ – площадь сечения расширительной камеры глушителя ДВС, м^2;

$S_{тр}$ – площадь сечения трубопровода выхлопного коллектора ДВС, м^2;

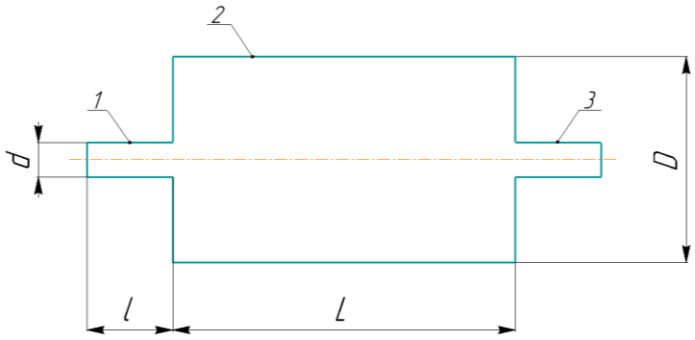
$k = \frac{2\pi f}{c}$ – волновое число, м$^{-1}$;

f – среднегеометрические частоты октавных полос, Гц;

c – скорость звука в воздушном объеме глушителя, м/с;

L – длина расширительной камеры глушителя ДВС, м.

Табл. 1. Геометрические параметры реактивных однокамерных глушителей для ДВС

№	Наименование	Схема	Обозначения на схеме	Размеры, мм
1	Однокамерный полый		1 – входной патрубок; 2 – полая камера; 3 – выходной патрубок	d = 36 l = 80 D = 120 L = 240
2	Однокамерный полый			d = 36 l = 80 D = 150 L = 300
3	Однокамерный полый			d = 36 l = 80 D = 180 L = 360

Акустическая эффективность однокамерных реактивных глушителей, представленных в табл. 1, была рассчитана для среднегеометрических частот октавных полос (рис. 2-4).

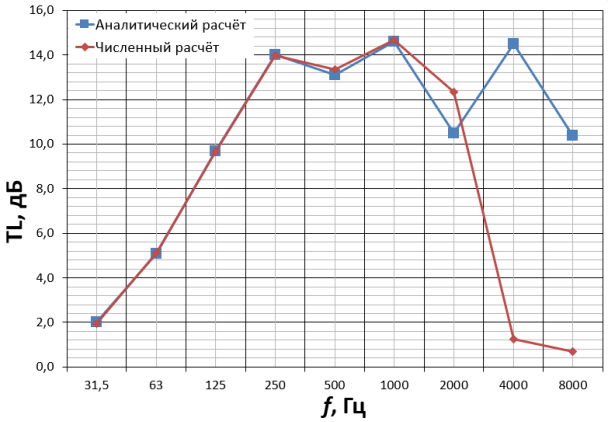


Рис. 2. Значение акустической эффективности модели 1 однокамерного реактивного глушителя для ДВС

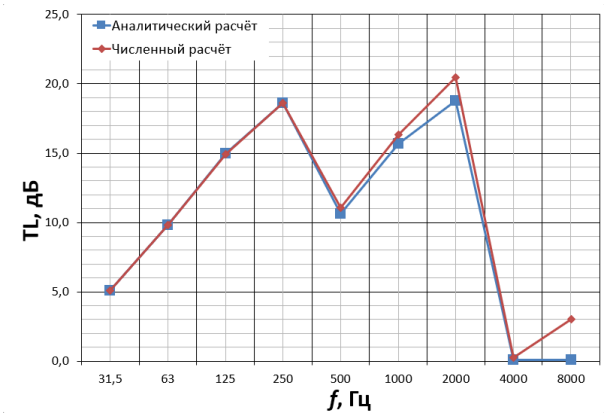


Рис. 3. Значение акустической эффективности модели 2 однокамерного реактивного глушителя для ДВС

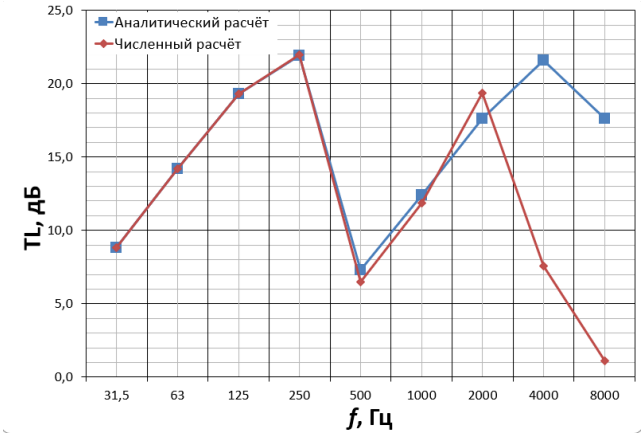


Рис. 4. Значение акустической эффективности модели 3 однокамерного реактивного глушителя для ДВС

Из рис. 2-4 можно заключить, что численный и аналитический расчеты для данных моделей глушителей сходятся до частоты в 1000 Гц.

Вывод. В данной работе была описана методика моделирования реактивных однокамерных глушителей с помощью конечно-элементного комплекса ANSYS. Были получены зависимости акустической эффективности от частоты для исследуемых моделей глушителя в цифровом двойнике и с помощью аналитических методов расчета. Установлено, что полученная цифровая модель глушителя может быть использована для проведения численных экспериментов в диапазоне частот 31,5-1000 Гц. В дальнейшем планируется провести стендовые испытания.

ЛИТЕРАТУРА

1. Разработка современных методов расчета и проектирования автомобильных глушителей шума с требуемыми характеристиками / Комкин А.И., Аграфонова А.А. – СПб, 2012. – 47 с.
2. Инженерная акустика. Теория и практика борьбы с шумом: учебник / Иванов Н. И. – СПб, 2008. – 233-260 с.
3. Системы ДВС. Акустический расчет глушителя системы выпуска отработавших газов ДВС: Учеб. Пособие / Сидоров А.А., Зайцев А.Б. – Санкт-Петербург: Политехн. ун-т, 2012. – 57 с.
4. Кулькина В.А., Тупов В.В. Оценка акустической эффективности реактивных глушителей шума автомобилей. Обзор / Сборник трудов Третьей Всероссийской конференции молодых ученых и специалистов «Акустика среды обитания». – Москва: МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2018. – С. 144-147.

УДК 532.31

А.В. Мамин, О.В. Антонова
Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого(*)

ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ПАДЕНИЯ ДЕФОРМИРУЕМЫХ ОБОЛОЧЕК В ВОДУ НА ОСНОВЕ МЕТОДА ЛАГРАНЖА-ЭЙЛЕРА

На сегодняшний день актуальность проблемы взаимодействия деформируемых твердых тел с жидкой средой является значительной. Результаты исследований в области решения модельных задач о сбросе в воду упругих тел простой формы имеют высокую практическую значимость и могут быть использованы при решении широкого класса задач в области моделирования столкновения с водной поверхностью и погружения объектов более сложных форм.

В данной работе проведено численное моделирование свободного падения упругой цилиндрической оболочки с последующим соударением и вхождением в водную среду. Моделирование выполнено с применением метода конечных элементов, реализованного в программном комплексе LS-DYNA.

Цели работы. Провести численное моделирование падения упругой деформируемой цилиндрической оболочки с последующим входом в водную среду и исследовать возникающие в результате соударения о водную поверхность деформации в различных точках упругого тела, а также определить глубину погружения. Сравнить полученные результаты с экспериментальными данными, представленными в литературе [1-3].

Постановка задачи. Цилиндрическая оболочка внешним радиусом R = 156 мм, толщиной s = 5,1 мм и длиной 2L = 600 мм падает с некоторой высоты и входит в воду со скоростью V0 = 4.43 м/с. Материал, из которого изготовлено сбрасываемое тело – сталь, масса тела – 23,8 кг. Тип анализа – динамический. Описание движения объектов модели основывается на комбинированном подходе Лагранжа-Эйлера [4-5]. В качестве уравнений состояния жидкости используются уравнения Грюнайзена [6]. Параметры резервуара с жидкостью представлены на рис. 1.

(*) А.В. Мамин, mamin.av@edu.spbstu.ru

Конечно-элементная модель. В численной постановке проводится динамический анализ в программном комплексе LS-DYNA. В целях экономии вычислительных ресурсов решение получено для четверти расчетной модели, исходя из наличия двух плоскостей симметрии.

В табл. 1 представлены сведения об используемой расчетной модели. Расчетная конечно-элементная модель представлена на рис. 1.

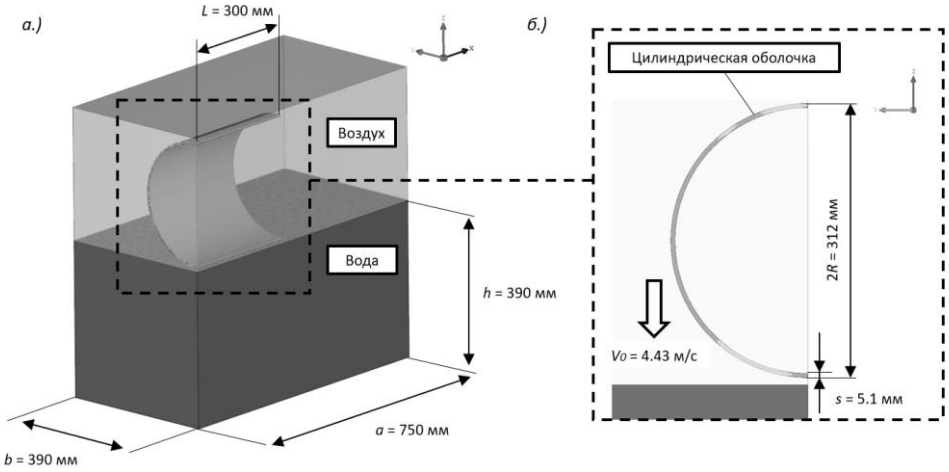


Рис. 1. Геометрия расчетной области: а) общий вид; б) вид вблизи сбрасываемого тела

Табл. 1. Сведения о КЭ-модели

	Воздух	**Вода**	**Упругое тело**
Размер КЭ, мм	2,5	2,5	2,5
Кол-во элементов, шт	2 768 650	3 308 900	46 950
Кол-во узлов, шт	2 810 500	3 355 350	51 700

Результаты, полученные в ходе численного анализа, сравниваются с экспериментальными данными, представленными в литературе [1-3].

В качестве основного исследуемого результата выступают значения деформаций упругого тела, полученные в тензометрических датчиках, расположенных в отдельных зонах в соответствии с проведенным экспериментом [2]. На рис. 2 показано расположение тензодатчиков в модели сбрасываемого тела с учетом двух плоскостей симметрии.

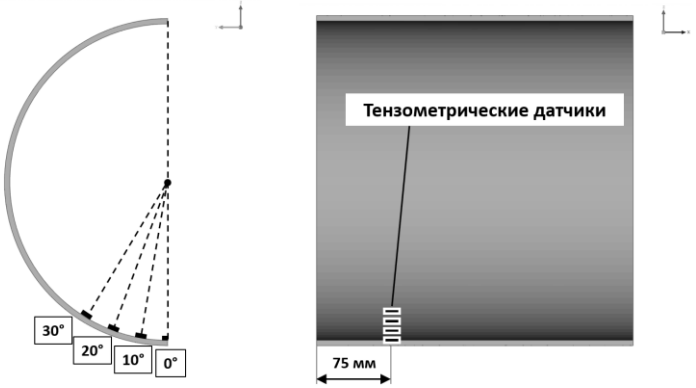


Рис. 2. Расположение тензодатчиков на исследуемом сбрасываемом теле

На рис. 3 представлено сравнение численных результатов деформации стальной цилиндрической оболочки с экспериментальными данными [3] для четырех тензометрических датчиков.

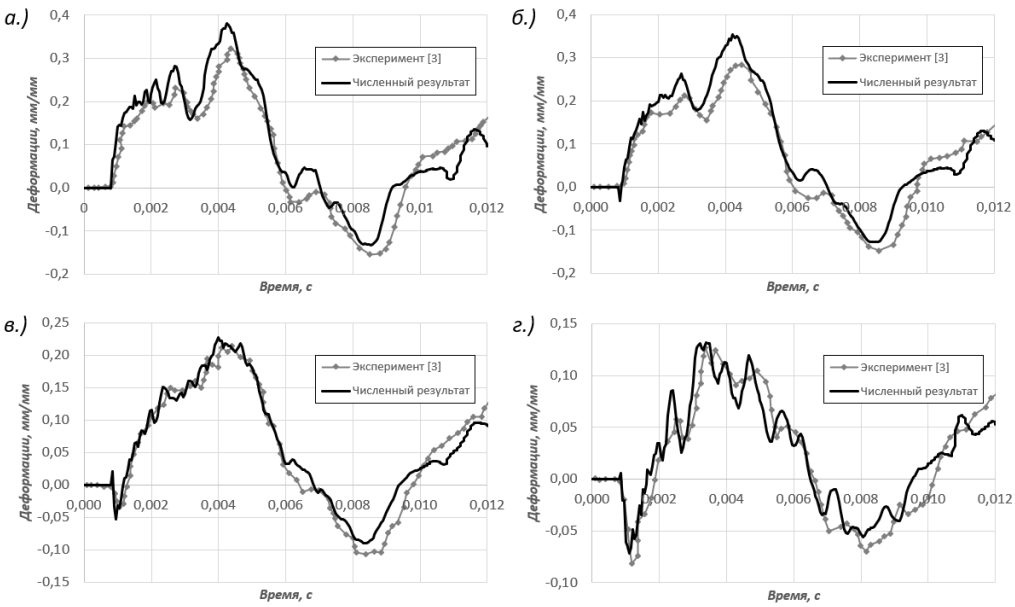


Рис. 3. Сравнение результатов деформации для тензометрических датчиков:
а.) 0 °; б.) 10 °; в.) 20 °; г.) 30 °

В табл. 2 приведены сведения об отклонении численного решения относительно экспериментальных данных [3] для величин максимальной деформации.

Табл. 2. Сравнение численных результатов с экспериментом [3]

Датчик	*Численный результат, мм/мм*	*Эксперимент, мм/мм*	*Отклонение, %*
0 °	0,38	0,32	*18,8*
10 °	0,35	0,29	*20,7*
20 °	0,23	0,22	*4,6*
30 °	0,14	0,13	*2,3*

На рис. 4 приведено сравнение численных результатов с экспериментальными данными [1] для глубины погружения деформируемой оболочки.

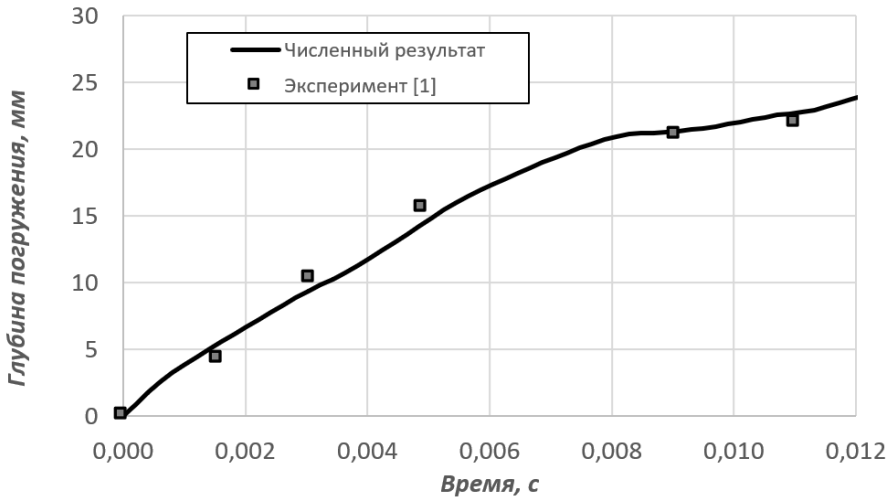


Рис. 4. Сравнение результатов для глубины погружения деформируемой оболочки

ЛИТЕРАТУРА
1. Qu, Qiulin, Wang, Rui, Guo, Hao & Liu, Peiqing & Agarwal, Ramesh. Numerical Study of Water Impact of an Elastic Cylindrical Shell // AIAA Journal. – 2016.
2. Arai Makoto, T. Miyauchi. Numerical Simulation of the Water Impact on Cylindrical Shells Considering Fluid-structure Interaction // Journal of the Society of Naval Architects of Japan -1997. – P. 827-835.
3. Shibue, Tadashi, Akio Ito, Eiji Nakayama. Structural response analysis of a cylinder under water impact. // Journal of the Society of Naval Architects of Japan - 1993. - P.479-484.
4. Taghizadeh Valdi M. H., Atrechian M. R., Shalkoohy J., Chavoshi E. Numerical Investigation of Water Entry Problem of Pounders with Different Geometric Shapes and Drop Heights for Dynamic Compaction of the Seabed // Geofluids. – 2018. – Vol. 18. – P. 1-18.
5. Hao Chen. Structured ALE Workshop // Livermore Software Tech Corp. Detroit LS-DYNA Conference. – 2016.
6. Кузькин В.А., Михалюк Д.С. Применение численного моделирования для идентификации параметров модели Джонсона-Кука при высокоскоростном деформировании алюминия // Вычислительная механика сплошных сред. – 2010. – Т.3, № 1. – С. 32-43.

УДК 532.517

Н.А. Мирошников, О.Б. Шагниев
Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого(*)

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРОЦЕССОВ УПРАВЛЕНИЯ ОРИЕНТАЦИЕЙ ПЛАТФОРМЫ СТЮАРТА С ШЕСТЬЮ ГИДРОЦИЛИНДРАМИ

Введение. Платформа Стюарта представляет собой механическую систему, состоящую из двух платформ — верхней и нижней, соединенных шестью ногами переменной длины. Эти ноги являются гидроцилиндрами, длина которых изменяется за счет регулирования давления внутри цилиндров. Данная работа посвящена разработке математической модели платформы Стюарта, которая позволит на ее основе разработать систему управления ее ориентацией. Управление ориентацией платформы осуществляется путем расчета требуемых длин ног в каждый момент времени, учитывая заданное движение платформы и воздействие внешних сил.

Математическая модель платформы Стюарта включает три основных компонента:

1. *Кинематические уравнения*, которые связывают длины ног с положением и ориентацией платформы.
2. *Динамические уравнения*, учитывающие силы и моменты, действующие на платформу.
3. *Алгоритмы управления ориентацией платформы*, которые позволяют регулировать длины ног для достижения заданного положения и ориентации.

Целью данного исследования является создание математической модели платформы Стюарта, управляемой за счет изменения длин ее ног. В работе представлены основные уравнения системы, включая кинематические и динамические уравнения, а также алгоритмы управления, которые позволяют регулировать длину гидроцилиндров для достижения заданного движения платформы.

Постановка задачи. Приведем основные уравнения системы, выведенные в [1].

Кинематические уравнения могут быть записаны в виде

$$\left(\boldsymbol{r^0} + \boldsymbol{Pa_k} - \boldsymbol{b_k^0}\right)^2 = l_k^2, k = \overline{1,6}, \quad (1)$$

$$\dot{\boldsymbol{r^0}}\boldsymbol{e_{kt}^0} + (\boldsymbol{w^0} \times \boldsymbol{Pa_k})\boldsymbol{e_{kt}^0} = \dot{\boldsymbol{l_k}}, k = \overline{1,6}, \quad (2)$$

(*) Н.А. Мирошников, miroshnikov.nikolai.a@gmail.com

где l_k – длина k-ой ноги, r^0 – радиус вектор из начала координат нижней платформы (неподвижной системы координат) к верхней платформе, $\boldsymbol{P}$ – тензор поворота, $\boldsymbol{a_k}$ и $\boldsymbol{b_k^0}$ – координаты точек крепления ног на верхней и нижней платформе в подвижной и неподвижной системе координат, $\boldsymbol{e_{kt}^0}$ – единичные векторы (рис. 1а.).

Начальный объем жидкости в цилиндре обозначим как w_1 [м^3], установившийся объем как w_2 [м^3], а Δw обозначим изменение объема. Таким образом, $w_2 = w_1 + \Delta w$, продифференцировав, получим $q_\text{н} = q_2 + \frac{d\Delta w}{dt}$ где $q_\text{н}$ – расход насоса. Заменим q_2 на $S\dot{l}$, где S – площадь поршня, $\frac{d\Delta w}{dt}$ на $\frac{w}{k}\frac{dp}{dt}$, где w – объем, занимаемый жидкость (принимаем за const), p – давление в цилиндре, k – коэффициент жесткости.

Тогда можно найти производную по времени $\dot{p}$ как

$$\dot{p} = \frac{k}{w}(q_\text{н} - S\dot{l}) \tag{3}$$

Подберем коэффициенты для регулятора и максимальную скорость расхода.

Запишем передаточную функцию для цепи в виде

$$H = \frac{\text{Н}_\nu \frac{ks1}{wp}}{1+\text{Н}_\nu \frac{ks1}{wp}s} = \frac{\frac{ks}{w\nu}}{\frac{m}{\nu}p^2+p+\frac{ks^2}{w\nu}} = \frac{\frac{1}{s}}{\frac{w\nu}{ks^2}p^2+\frac{w\nu}{ks^2}p+1}, \tag{4}$$

где $T_0^2 = \frac{w\nu}{ks^2}$, коэффициент при p = $2\xi T_0$.

Получаем в знаменателе выражение $T_0^2 + 2\xi T_0 + 1$. Тогда $T_0 = \sqrt{\frac{w\nu}{ks^2}}$, из чего следует, что коэффициент $\xi = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{w\nu}{ks^2}} = \nu\frac{1}{2}\sqrt{\frac{w}{m\frac{w\nu}{ks^2}}}$.

Найдем максимальную скорость расхода, при условии, что ограничение по расходу известно.

$$v_{max} = \frac{1}{S}q_\text{р} \tag{5}$$

где $q_\text{р}$ – максимальный расход.

Расчетная схема представлена на рис. 1.

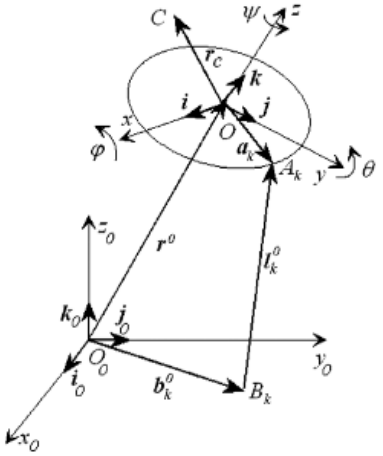


Рис. 1. Расчетная схема [1]

Для формирования управляющего сигнала будем использовать ПД – регулятор, получающего на вход разность между получаемыхми в соответствии с законом движения длинами и скоростями и реальными длинами и скоростями цилиндров.

Реальные скорости и длины цилиндров находятся через обратную задачу платформы Стюарта, под которой понимаем нахождение положения платформы в пространстве по известным силам, приложенным к платформам, путем интегрирования системы уравнений (2), (5), (6):

$$m\left(\ddot{r^0} + \omega^0 \dot{\times} r_c^0 + \omega^0 \times (\omega^0 \times r_c^0)\right) + mgk_0 = F^0 \quad (6)$$

$$J_c\dot{\omega} + \omega \times (J_c\omega) = \mathrm{M} \quad (7)$$

Здесь m – масса платформы с грузом, ω^0 и ω – угловая скорость в неподвижной и подвижной системах координат, r_c^0 – радиус-вектор центра тяжести платформы, F^0 – сумма сил, действующих на платформу, $\boldsymbol{J_c}$ – тензор инерции относительно центра тяжести, M – главный момент сил со стороны гидроцилиндра. Данная система не имеет аналитического решения.

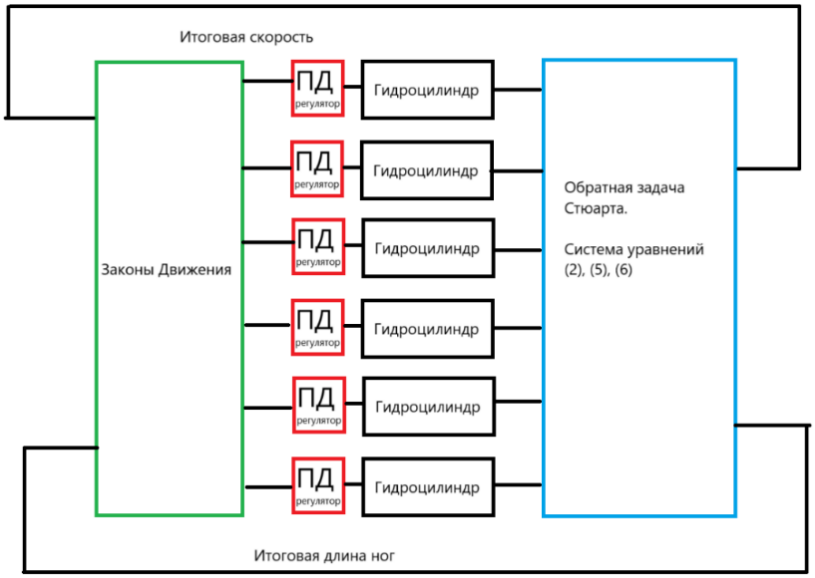


Рис. 2. Блок-схема модели

Общий вид математической платформы Стюарта представлен на рис. 2, который включает в себя шесть гидроцилиндров, решатель обратной задачи, а также внешнее воздействие на платформу. На рис. 3 представлены результаты работы модели.

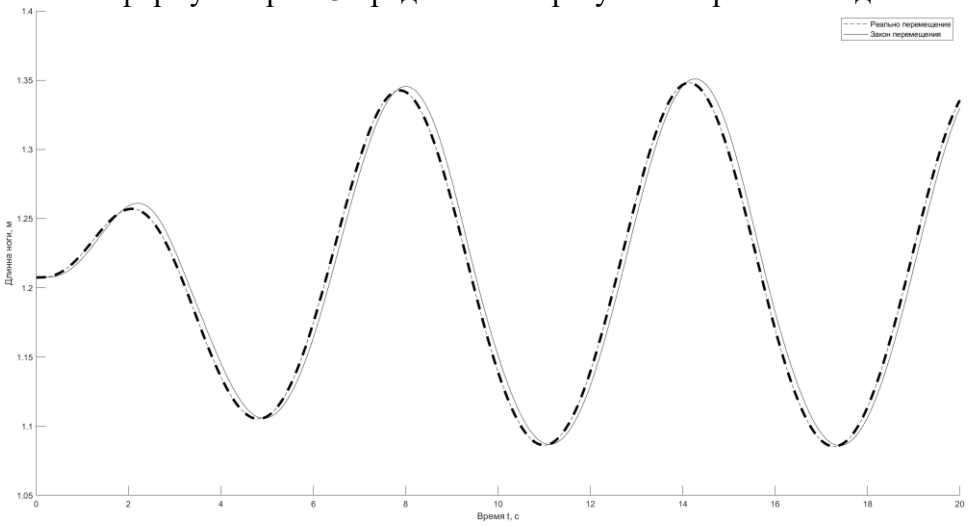


Рис. 3. График длины ног платформы при их симметричном вертикальном движении и симметричном нагружении

Заключение. В данной работе была разработана математическая модель платформы Стюарта, управляемой за счет изменения длин ее ног. Модель включает кинематические и динамические уравнения, а также алгоритмы управления, которые позволяют регулировать ориентацию платформы в пространстве. Представленные уравнения и алгоритмы позволяют эффективно управлять движением платформы, учитывая внешние воздействия и заданные параметры движения. В дальнейшем данная модель будет использоваться в разработке платформы Стюарта на судне, у которой будет стабилизироваться верхняя платформа.

ЛИТЕРАТУРА

1. Андриевский Б.Р., Арсеньев Д.Г., Зегжда С.А., Казунин Д.В., Кузнецов Н.В., Леонов Г.А., Товстик П.Е., Товстик Т.П., Юшков М.П. Динамика платформы стюарта // Вестник Санкт-Петербургского университета, 2017. С. 489–495.
2. Зуев С.М., Санкт-Петербургский государственный университет, Санкт-Петербург, 2014.

УДК 539.37, 678.5

Д.С. Мухин, А.С. Семенов
Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого(*)

ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ ПРОЧНОСТИ ОБРАЗЦОВ ИЗ ПОЛИЛАКТИДА, ИЗГОТОВЛЕННЫХ НА ОСНОВЕ АДДИТИВНЫХ ТЕХНОЛОГИЙ

Введение. Применение аддитивных технологий для получения изделий из полимерных материалов путем послойной заливки (3D-печать) экструдируемым расплавом полимера получает все более широкое распространение на практике. Аддитивное производство позволяет ускорить цикл создания изделия, усложнить его внутреннюю геометрию, повысить материалоемкость и экологичность, сократить трудоемкость и энергоемкость [1]. Технологические режимы 3D-печати, такие как температура, направление печати по отношению к оси образца, скорость подачи оказывают существенное влияние на результирующую прочность изделия [1-4]. При создании объектов на основе аддитивных технологий, путем послойного наплавления материала, может наблюдаться анизотропия физико-механических свойств. Для полилактида (PLA) систематический анализ рассматриваемых факторов технологии изготовления с учетом анизотропии и реономности не проводился. Целью данной работы является исследование влияния режимов изготовления и наличия дефектов на характеристики кратковременной и длительной прочности образцов полилактида при одноосном растяжении.

Методы испытаний и материалы. При выполнении экспериментальных исследований был использован образец типа А1 (рис. 1а) для испытания на растяжение, изготовленный в соответствии с ГОСТ-33693-2015 «Пластмассы. Образцы для испытания» [5].

В качестве материала для изготовления образца был выбран полилактид, применяемый как в коммерческой, так и в некоммерческой печати. Образцы изготавливались в двух вариантах: продольное и поперечное направление слоев. Это требуется для исследования влияния расположения слоев на физико-механические параметры объектов. Заполнение объектов было полным, то есть структура образца сплошная. Испытания проводились на установке INSTRON 5965 (рис. 1б) в лаборатории Сопротивление материалов СПбПУ.

Сравнение образцов с дефектами и без. В целях определения влияния дефектов печати на прочностные характеристики были выполнены исследования с образцами, имеющими дефекты (пустоты менее 1% объема в районе перехода от площадок для захвата к рабочей

(*) Д.С. Мухин, mukhinds.work@gmail.com

области образца) и образцами, не имеющими подобных дефектов. В остальном образцы были идентичны. Результаты испытаний представлены на рис. 2.

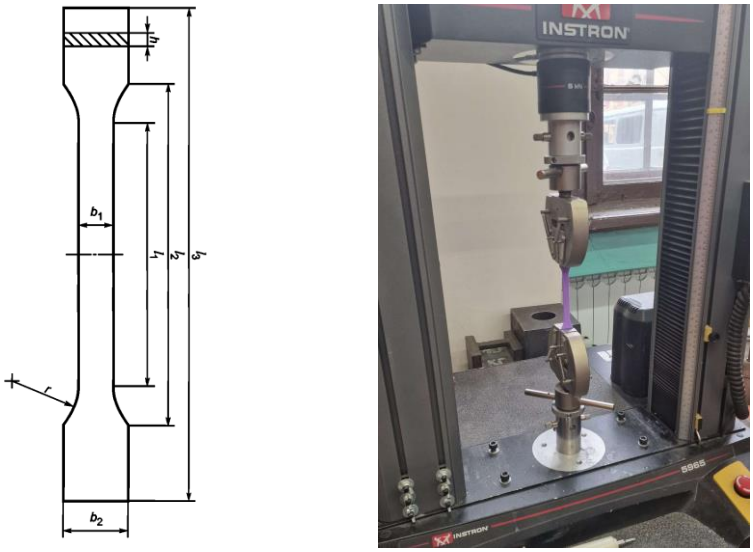


Рис. 1. а) Образец для испытания на растяжение, б) испытательная установка с закрепленным образцом

Сравнение графиков показывает, что наличие дефектов печати на 20% понижает прочностные характеристики. Полученные результаты указывают также, что дефекты влияют не только на значение критической нагрузки, но и на жесткость образца. Это связано с уменьшением площади поперечного сечения образцов вследствие возникновения дефектов.

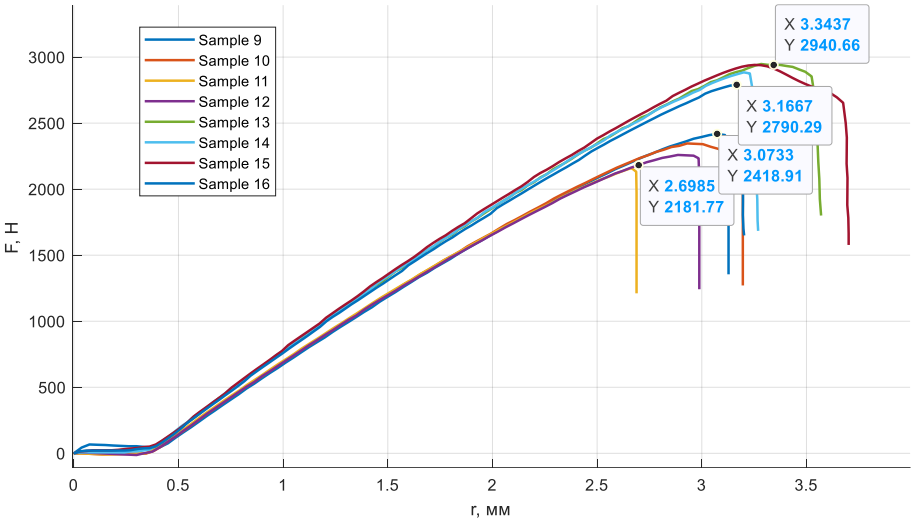


Рис. 2. Зависимость нагрузки от удлинения образца
а) при наличии дефектов (образцы 9-12), б) при отсутствии дефектов (образцы 13-16)

Сравнение образцов, напечатанных в различных направлениях. Для сравнения прочностных характеристик моделей были выбраны образцы, напечатанные в продольном и поперечном направлении. Под продольным направлением подразумевается печать вдоль оси образца, под поперечным – в ортогональном направлении. Результаты испытаний представлены на рис. 3. При поперечной печати критическая нагрузка для образца оказалась на 35% меньше, чем при продольной.

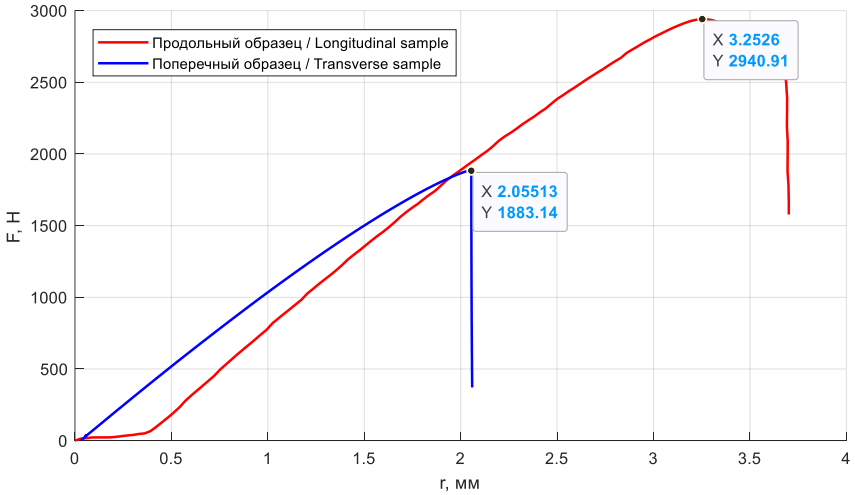


Рис. 3. Зависимость нагрузки от удлинения образца при различных конфигурациях печати (красным - продольная, синим - поперечная)

Испытания на ползучесть. Результаты испытаний образцов на ползучесть при двух уровнях нагрузки 2200 Н и 1800 Н показаны на рис. 4. При нагрузке 2200 Н наблюдается III стадия ползучести. Модули ползучести для II (установившейся) стадии вычислялись согласно методике из ГОСТ 18197-2014.

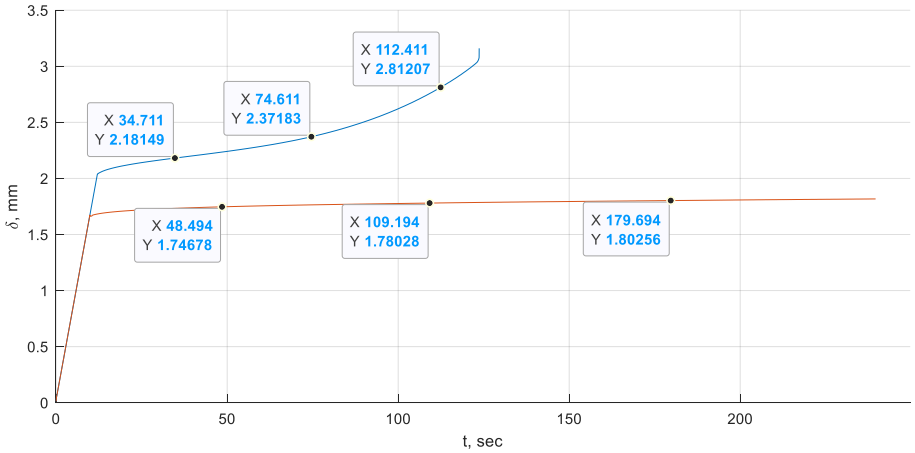


Рис. 4. Кривые ползучести полилактида при 2200 Н и 1800 Н

Заключение. Доминирующим механизмом разрушения образцов из полилактида в широком диапазоне скоростей нагружения являлось хрупкое разрушение. Однако при уровнях напряжений близких к предельным при комнатной температуре наблюдается проявление вязких свойств и разрушение при ползучести (эффекты длительной прочности). Результаты проведенных испытаний показали существенное влияние направления печати и наличия дефектов печати образцов на их прочностные характеристики. Сводные данные для двух перечисленных особенностей технологии 3D-печати представлены в табл. 1.

Табл. 1. Влияние наличия дефектов и направления печати на предельные значения нагрузок

Дефекты при печати	Присутствуют	Отсутствуют
Предельная нагрузка (среднее по образцам), Н	2296	2889
Предельное напряжение, МПа	57,4	72,2
Направление печати	Продольное	Поперечное
Предельная нагрузка, Н	2889	1886
Предельное напряжение, МПа	72,2	47,1

ЛИТЕРАТУРА
1. Одинокова О.А., Драчев К.А. Исследование механических свойств полилактида применительно к методам FDM-печати // Теоретическая и прикладная механика: Международный научно-технический сборник. Том Выпуск 37. – Минск: Белорусский нац. технический университет. 2022. – С. 168-173.
2. Galeta T., Raos P., Stojšić J., Pakši I. Influence of Structure on Mechanical Properties of 3D Printed Objects // Procedia Engineering, 2016, Vol. 149, P. 100-104.
3. Петров В.М., Безпальчук С.Н., Яковлев С.П. О влиянии структуры на прочность изделий из пластиков, получаемых методом 3D-печати // Вестник государственного университета морского и речного флота им. адмирала С.О. Макарова. – 2017. – Т. 9, № 4. – С. 765-776.
4. Исследование физико-механических характеристик образцов из полилактида в аддитивной технологии / В.Т. Ерофеев, Т.Ф. Ельчищева, Е.М. Преображенская, М.В. Макарчук // Региональная архитектура и строительство. – 2019. – № 3(40). – С. 92-101.
5. ГОСТ 33693-2015 «Пластмассы. Образцы для испытания».
6. ГОСТ 18197-2014 «Пластмассы. Метод определения ползучести при растяжении».
7. ГОСТ 11262-80 «Пластмассы. Метод испытания на растяжение».

УДК 539.38

Д.М. Пашковский
Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого(*)

ТЕРМОУПРУГОСТЬ ГРИНА-НАГДИ ДЛЯ МАТЕРИАЛА С МИКРОСТРУКТУРОЙ

Моделирование волновых процессов в анизотропных средах является актуальным для различных задач сейсмологии, биомеханики и микроэлектроники. При этом в ряде приложений наблюдается эффект второго звука, характеризующий волновой характер распространения тепла. Для описания такого явления существуют модели, приводящие к уравнению теплопроводности гиперболического типа. В данной рассматривается модель термоупругой среды Грина – Нагди [1], позволяющая описать эффект второго звука. Для вывода системы уравнений термоупругой среды используется вариационный принцип Остроградского – Гамильтона [2]:

$$A(\boldsymbol{u},\theta)=\int_{t_0}^{t_1}\int_V L(\boldsymbol{u},\theta)\ dV\ dt \to stat \tag{1}$$

где $\boldsymbol{u}$ – поле перемещений, θ – абсолютная температура, L – массовая плотность лагранжиана. Для теории Грина – Нагди функционал действия (1) примет следующий вид:

$$A(\boldsymbol{u},\theta)=\int_{t_0}^{t_1}\int_V\Big[\frac{1}{2}\rho\,\dot{\boldsymbol{u}}\cdot\dot{\boldsymbol{u}}+\rho C_V\dot{\theta}-\frac{1}{2}(\nabla\boldsymbol{u})^S\cdot\cdot\,\boldsymbol{C}\cdot\cdot\,(\nabla\boldsymbol{u})^S-\frac{1}{2}\nabla\theta\cdot\boldsymbol{\Lambda}\cdot\nabla\theta-$$
$$-\frac{1}{2}\Lambda_*\nabla\dot{\theta}\cdot\nabla\dot{\theta}-\rho(\nabla\boldsymbol{u})^S\cdot\cdot\,\boldsymbol{S}-\theta\boldsymbol{S}\cdot\cdot\,(\nabla\boldsymbol{u})^S-\rho\boldsymbol{f}\cdot\boldsymbol{u}-\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{u}+\boldsymbol{h}\cdot\nabla\theta\Big]dVdt\to stat \tag{2}$$

где $\boldsymbol{C}$ – тензор упругих модулей, $\boldsymbol{\Lambda}$ – тензор коэффициентов теплопроводности, Λ_* – скорость теплопроводности, ρ – плотность, $\boldsymbol{S}$ – тензор, соответствующий перевязке между тепловыми и механическими процессами, $\boldsymbol{h}$ – тепловой поток, $\boldsymbol{f}$ – массовые силы и $\boldsymbol{p}$ – поверхностные силы. Вариационный принцип (2) формулируется на основе условия стационарности функционала действия $\delta A(\boldsymbol{u},\theta)=0$, где вариация функционала имеет следующий вид:

$$\delta A(\boldsymbol{u},\theta)=\int_{t_0}^{t_1}\int_V[\nabla\cdot\boldsymbol{\sigma}+\rho\,\boldsymbol{f}-\rho\,\ddot{\boldsymbol{u}}]\cdot\delta\boldsymbol{u}\,dV\,dt-\int_{t_0}^{t_1}\int_\Gamma[\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{\sigma}-\boldsymbol{p}]\cdot\delta\boldsymbol{u}\,d\Gamma\,dt+$$

(*) Д.М. Пашковский, mr.vivivilka@icloud.com

$$+\int_{t_0}^{t_1}\int_V \left[\rho C_v\ddot{\theta} - \rho\,\dot{\boldsymbol{\varepsilon}} \cdot\cdot\, \boldsymbol{S} + \nabla\cdot(\boldsymbol{\Lambda}\cdot\nabla\theta) + \nabla\cdot\left(\Lambda_*\cdot\nabla\dot{\theta}\right)\right]\cdot\delta\theta\; dV\; dt + \tag{3}$$

$$+\int_{t_0}^{t_1}\int_\Gamma \left[-\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{h} + \boldsymbol{n}\cdot(\boldsymbol{\Lambda}\cdot\nabla\theta) + \boldsymbol{n}\cdot\left(\Lambda_*\cdot\nabla\dot{\theta}\right)\right]\cdot\delta\theta\; d\Gamma\; dt = 0$$

Из (3) получена система уравнений Эйлера – Лагранжа для анизотропной термоупругой среды Грина – Нагди. Слагаемые при вариации $\delta\boldsymbol{u}$ дают уравнения локальной формы баланса количества движения и силовое граничное условие:

$$\nabla\cdot\boldsymbol{\sigma} + \rho\,\boldsymbol{f} = \rho\,\ddot{\boldsymbol{u}}, \qquad \boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{C}\cdot\cdot(\nabla\boldsymbol{u})^S + \theta\boldsymbol{S}, \qquad \boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{\sigma}|_\Gamma = \boldsymbol{p} \tag{4}$$

Слагаемые при вариации $\delta\theta$ дают уравнение теплопроводности и определяющее уравнение для теплового потока:

$$\rho C_v\ddot{\theta} = \rho\,\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}\cdot\cdot\,\boldsymbol{S} - \nabla\cdot(\boldsymbol{\Lambda}\cdot\nabla\theta) - \nabla\cdot\left(\Lambda_*\cdot\nabla\dot{\theta}\right), \qquad \boldsymbol{h} = -\boldsymbol{\Lambda}\cdot\nabla\theta - \Lambda_*\cdot\nabla\dot{\theta} \tag{5}$$

В структуре уравнений (4) - (5) имеется четыре материальных тензора: $\boldsymbol{C}, \boldsymbol{S}, \boldsymbol{\Lambda}$ и Λ_*, которые для анизотропного материала имеют большое число независимых параметров. Для определения тензора упругих модулей $\boldsymbol{C}$ и тензора проводимости $\boldsymbol{\Lambda}$ далее используется подход микромеханики [3]. Структура данных тензоров определяется для двухфазного материала, состоящего из матрицы и изолированных сфероидальных неоднородностей на основе решения задачи гомогенизации. По структуре на макроуровне данные тензоры соответствуют трансверсально – изотропному материалу [3].

$$\boldsymbol{C_{eff}} = \boldsymbol{C_0} + \varphi[\varphi(\boldsymbol{C_1} - \boldsymbol{C_0}) + (1-\varphi)\langle[(\boldsymbol{C_1} - \boldsymbol{C_0})^{-1} + \boldsymbol{P_e}]^{-1}\rangle]^{-1} \tag{6}$$

$$\boldsymbol{\Lambda_{eff}} = \boldsymbol{\Lambda_0} + (\boldsymbol{\Lambda_1} - \boldsymbol{\Lambda_0})\cdot\varphi\langle\boldsymbol{L}\rangle\cdot[\varphi\langle\boldsymbol{L}\rangle + (1-\varphi)\boldsymbol{E})]^{-1}, \quad \boldsymbol{L} = [\boldsymbol{E} + \boldsymbol{P_t}\cdot(\boldsymbol{\Lambda_1} - \boldsymbol{\Lambda_0})]^{-1} \tag{7}$$

где $\boldsymbol{C_0}$ и $\boldsymbol{C_1}$ – тензоры упругих модулей матрицы и неоднородностей соответственно, $\boldsymbol{\Lambda_0}$ и $\boldsymbol{\Lambda_1}$ – тензоры коэффициентов теплопроводности матрицы и неоднородностей соответственно, $\boldsymbol{P_e}$ – тензор Хилла для задачи упругости, $\boldsymbol{P_t}$ – тензор Хилла для задачи теплопроводности. В случае случайного распределения неоднородностей материала тензоры (6) и (7) соответствуют изотропному материалу на макроуровне следующего вида:

$$\boldsymbol{C_{eff}} = K_{eff}\boldsymbol{EE} + 2\mu_{eff}\boldsymbol{I}, \quad \boldsymbol{\Lambda_{eff}} = \Lambda_{eff}\boldsymbol{E} \tag{8}$$

Выражения (8) для эффективных модулей зависят от набора микроструктурных параметров материала: объемной доли неоднородностей φ, параметра формы сфероидов γ, свойств матрицы и неоднородностей. Итоговый вид системы уравнений термоупругости Грина – Нагди для макроизотропного материала следующий:

$$\rho\,\ddot{\boldsymbol{u}} = \rho\boldsymbol{f} + \left(K_{eff} + \frac{\mu_{eff}}{3}\right)\nabla(\nabla\cdot\boldsymbol{u}) + \mu_{eff}\,\Delta\,\boldsymbol{u} - A\,K_{eff}\,\nabla\theta \tag{9}$$

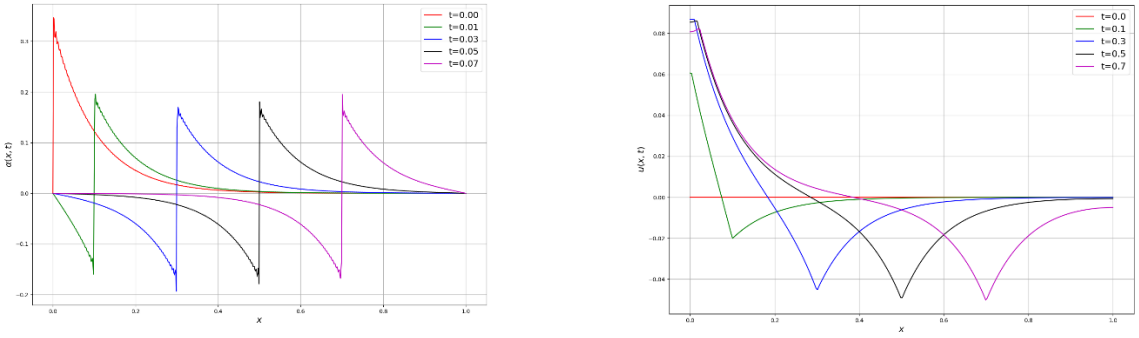
$$\rho\,C_v\,\ddot{\theta} = \rho\,q + \Lambda_{eff}\Delta\,\theta + k_*\Delta\,\dot{\theta} - A\,K_{eff}T_0\frac{\partial}{\partial\,t}(\nabla\cdot\boldsymbol{u}) \tag{10}$$

Далее рассмотрена задача (9) - (10) для случая упругого слоя толщины l под действием импульсного подвода тепла $q(x,t) = q_0\exp(-\beta x)\,\delta(t-0)$. Задача рассматривается при следующий граничных условиях и при нулевых начальных условиях [4]:

$$e_x\cdot\boldsymbol{\sigma}|_{x=0} = 0, \qquad e_x\cdot\boldsymbol{\sigma}|_{x=l} = 0, \qquad \theta|_{x=0} = 0, \qquad \theta|_{x=l} = 0 \tag{11}$$

$$\boldsymbol{u}|_{t=0} = 0, \qquad \dot{\boldsymbol{u}}|_{t=0} = 0, \qquad \theta|_{x=0} = 0, \qquad \theta|_{x=l} = 0 \tag{12}$$

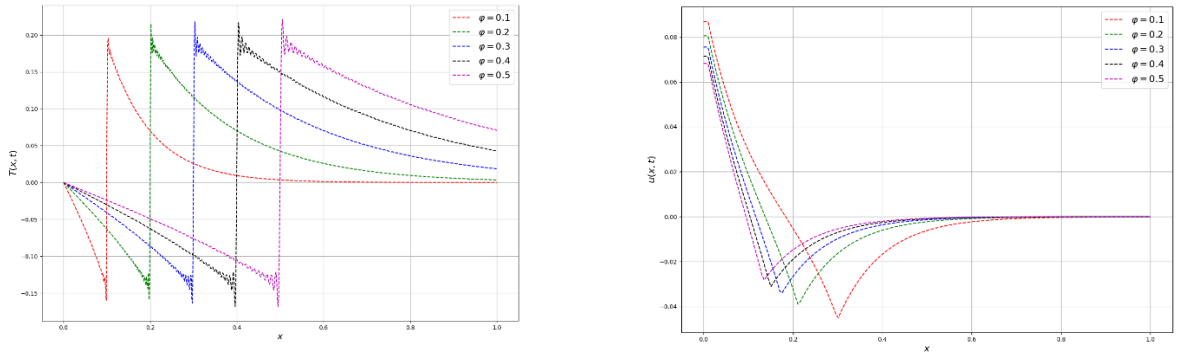
На основе аналитического решения из [4] проанализировано решение для данной модели термоупругости. На рис. 1 показаны графики распространения термической (а) и продольной волны в слое.



(а) (б)

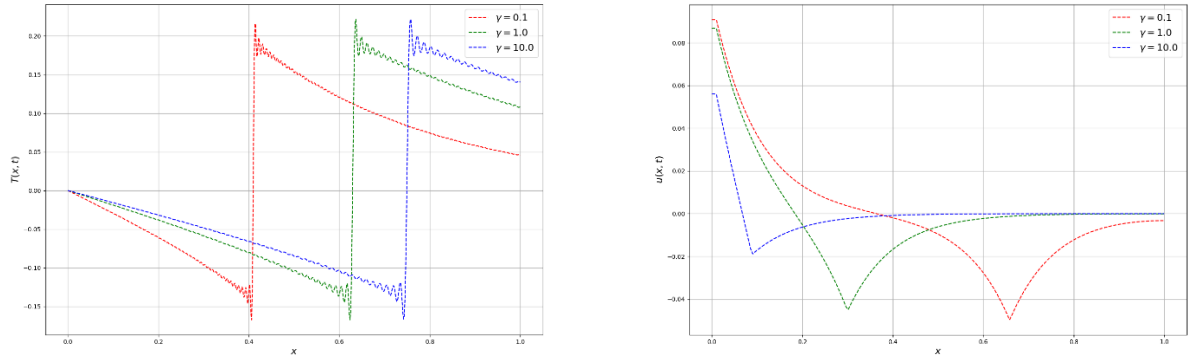
Рис. 1. (а) распространение фронта термической волны $\theta(x,t)$ и (б) распространение фронта продольной волны $u(x,t)$

Из рис. 1 видно, что фазовая скорость распространения термической волны больше фазовой скорости продольной механической волны. Далее исследуется влияние параметра формы неоднородностей и объемной доли неоднородностей на фазовую скорость распространения термической и продольной механической волны. На рис. 2 показано влияние объемной доли неоднородностей φ на скорость распространения термической и механической волны.



(а) (б)

Рис. 2. Влияние объемной доли неоднородностей на фазовую скорость (а) термической и (б) продольной механической волны



(а) (б)

Рис. 3. Влияние формы неоднородностей γ на фазовую скорость (а) термической и (б) продольной механической волны

Рис. 2 показывает, что с увеличением объемной доли неоднородностей фазовая скорость термической волны увеличивается, а продольной – уменьшается. На рис. 3 показано влияние отношения полуосей сфероида γ на скорость распространения термической и механической волны.

Рис. 3 показывает, что при сплюснутых сфероидах ($\gamma<1$) фазовая скорость термической волны меньше, чем при вытянутых ($\gamma>1$). Для продольной волы наоборот: при сплюснутой форме сфероидов фазовая скорость выше, чем при вытянутой.

В данной работе построена система уравнений термоупругости Грина – Нагди для трансверсально – изотропного материала. Исследовано влияние микроструктурных параметров на характер распространения термоупругой волны в слое.

ЛИТЕРАТУРА

1. Green A. E., Naghdi P. M. Thermoelasticity without energy dissipation //Journal of elasticity. – 1993. – Т. 31. – №. 3. – P. 189-208.
2. Лычев С. А., Семенов Д. А. Законы сохранения в недиссипативной термомеханике //Вестник Самарского государственного университета. – 2008. – №. 61. – С. 183-217.
3. Kachanov M., Sevostianov I. Micromechanics of materials, with applications. – Cham: Springer, 2018. – Т. 249.
4. Babenkov M. B., Ivanova E. A. Analysis of the wave propagation processes in heat transfer problems of the hyperbolic type //Continuum Mechanics and Thermodynamics. – 2014. – Т. 26. – №. 4. – P. 483-502.

УДК 537.853

И.А. Попов, А.В. Лукин, П.П. Удалов
Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого(*)

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ ДРЕЙФА ПОЛОЖЕНИЯ РАВНОВЕСИЯ ПРОВОДЯЩЕГО КОЛЬЦА В ПЕРЕМЕННОМ МАГНИТНОМ ПОЛЕ

Введение. Электромагнитный подвес – устройство, работающее на основе принципа электромагнитной левитации [1] и стабилизирующее положение проводящего твердого тела в пространстве при отсутствии механического контакта с остальной частью устройства. Ранее в аналитическом моделировании [2] динамики устройств данного типа использовалось предположение о наличии в системе квазистатического положения равновесия. Это приводило к выводам об устойчивости чувствительной массы без учета ее высокочастотных колебаний и дрейфа положения равновесия. В [3] показано, что в отсутствие диссипации энергии в окружающую среду, движения всегда неустойчивы.

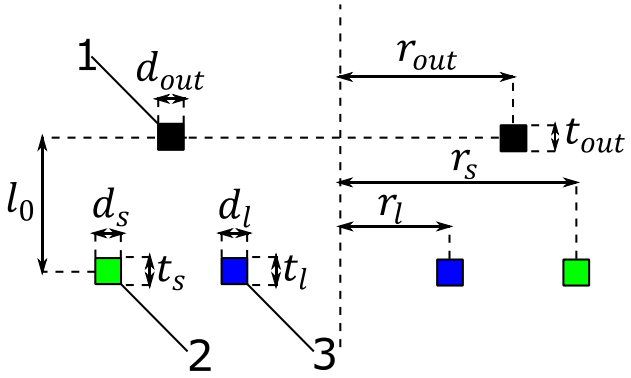


Рис. 1. Схематическое изображение электромагнитного подвеса

(*) П.П. Удалов, pp_udalov@mail.ru

Цель данной работы — аналитически исследовать динамику одномерной модели движения чувствительного элемента электромагнитного подвеса. Для этого используются методы нелинейной динамики, что позволяет записать уточненные условия устойчивости движений, включающие в себя информацию о диссипации энергии в окружающее пространство.

Модель одномерных колебаний чувствительного элемента электромагнитного подвеса. Рассмотрим одномерную модель колебаний инерционной массы (ИМ), выполненной в форме твердого проводящего кольца и находящейся в переменном электромагнитном поле. Схематическое изображение рассматриваемой задачи представлено на рис. 1.

При подаче переменного тока i_l на левитационную катушку (синие прямоугольники/ обозначение под номером 3 на рис. 1) среднего радиуса r_l прямоугольного сечения размера $t_l \times d_l$ вследствие закона электромагнитной индукции в ИМ (черные прямоугольники/ обозначение под номером на 1 рис. 1), выполненной в виде тонкого кольца среднего радиуса r_{out} толщины t_{out}, возникает проводящий круговой контур среднего радиуса r_{out} с прямоугольным сечением размера $t_{out} \times d_{out}$ и током i_{out}. При взаимодействии токов i_l, i_{out} возникает сила Ампера, которая приводит к левитации ИМ на некоторую высоту l_0. Для возможности стабилизации ИМ необходимо добавлять в систему дополнительную (вторую) катушку индуктивности. В рассматриваемой задаче в качестве добавочной катушки выступает катушка среднего радиуса r_s прямоугольного сечения размера $t_s \times d_s$, на которую подается переменный ток i_s. В дальнейшем она обозначается как стабилизирующая (зеленые прямоугольники/ обозначение под номером 1 на рис. 1).

Согласно формализму Лагранжа-Максвелла, динамическая система в безразмерном виде, записанная относительно следующих переменных: ξ_l– безразмерное вертикальное смещение ИМ, j_{out} – безразмерная величина наведенного тока в ИМ имеет вид [4]:

$$\xi_l'' + \lambda_l \xi_l' = \varepsilon\left(\alpha m_{out}^{\xi_l} j_{out}\sin\tau - 1\right), \qquad j_{out} + \hat{r}_{out} j_{out} = -m_{out}\cos\tau - m_{out}^{\xi_l}\xi_l'\sin\tau, \tag{1}$$

где $\xi_l = \frac{l}{r_l}$, $\xi_{l0} = \frac{l_0}{r_l}$, $j_{out} = \frac{i_{out}}{I_l}$, $j_s = \frac{I_s}{I_l}$, $\tau = \omega t$, $\varepsilon = \frac{g}{\omega^2 r_l}$, $\alpha = \frac{L_{out} I_l^2}{\widehat{m} g r_l}$, $\hat{r}_{out} = \frac{R_{out}}{L_{out}\omega}$, $\lambda_l = \frac{\mu_l}{\widehat{m}\omega}$, $b_l = \frac{r_{out}}{r_l}$, $b_s = \frac{r_{out}}{r_s}$, $\hat{\kappa}_{l|out} = \frac{4b_l}{(1+b_l)^2+\xi_l^2}$,

$\hat{\kappa}_{s|out} = \frac{4b_s}{(1+b_s)^2+\left(\frac{b_s}{b_l}\right)^2\xi_l^2}$, $m_{l,s|out} = \frac{w_{l,s}}{\hat{L}}\frac{\Phi\left(\hat{\kappa}_{l,s|out}\right)}{\sqrt{b_{l,s}}}$, $m_{out} = m_{l|out} + j_s m_{s|out}$, $\hat{L} = \ln\frac{8r_{out}}{s_{out}} - 2$; r_l, r_s – средние радиусы левитационной, стабилизирующей катушки; r_{out}, t_{out} – средний радиус и толщина сечения ИМ; l_0 – величина левитации; I_l, I_s, ω – амплитуды и частота токов левитационной и стабилизирующей катушек соответственно; t – время, g – ускорение свободного падения, w_l, w_s – количество витков левитационной и стабилизирующей катушек соответственно, $\widehat{m}$ – масса ИМ; R_{out}, L_{out} – сопротивление и самоиндукция ИМ; μ_l, – коэффициенты вязкого трения между ИМ и окружающей средой в направлениях l, $(\ )' = \frac{\partial}{\partial\tau}$, $(\ )^{\xi_l} = \frac{\partial}{\partial\xi_l}$.

*Исследование областей устойчивости движения ИМ***.** Для нахождения равномерно пригодного решения системы (1) применим метод многих масштабов [5]. Для этого представим искомые функции в виде следующих разложений по малому параметру ε:

$$\xi_l(\varepsilon, T_0, T_1, T_2) = \xi_{l0}(T_1, T_2) + \varepsilon\xi_{l1}(T_0, T_1, T_2) + \varepsilon^2\xi_{l2}(T_0, T_1, T_2),$$
$$j_{out}(\varepsilon, T_0, T_1, T_2) = j_0^{out}(T_0, T_1, T_2) + \varepsilon j_1^{out}(T_0, T_1, T_2) + \varepsilon^2 j_2^{out}(T_0, T_1, T_2),$$
$$m_{out}(\xi_l, \xi_{l0}) = c_0^{out} + c_{\xi_l}^{out}(\xi_l - \xi_{l0}) + \frac{1}{2}c_{\xi_l\xi_l}^{out}(\xi_l - \xi_{l0})^2, \qquad \tau = T_0 + \varepsilon T_1 + \varepsilon^2 T_2, \tag{2}$$

где $c_0^{out} = m_{out}(\xi_{l0})$, $c_{\xi_l}^{out} = \frac{\partial m_{out}(\xi_{l0})}{\partial\xi_l}$, $c_{\xi_l\xi_l}^{out} = \frac{\partial^2 m_{out}(\xi_{l0})}{\partial\xi_l^2}$.

Подставляя (2) в (1) и постепенно решая системы уравнений, соотнесенные для каждой степени ε, получим выражения для нахождения величины ξ_{l0}

$$\alpha\cos^2\gamma\, c_0^{out} c_{\xi_l}^{out} + 2 = 0 \tag{3}$$

и условий на устойчивость колебаний ИМ

$$\left(c_{\xi_l}^{out}\right)^2 + c_0^{out} c_{\xi_l \xi_l}^{out} > 0, \tag{4}$$

$$\nu_l + \cos 2\gamma \tan\gamma \frac{c_{\xi_l}^{out}(\xi_{l0}^{st})}{c_0^{out}(\xi_{l0}^{st})} > 0. \tag{5}$$

Уравнение (4) обозначает собой условие в предположении о квазистатическом положении равновесия, (5) – условие на ограниченные колебания дрейфа ИМ.

Асимптотическое разложение колебаний ИМ для величин ξ_l, j_{out} запишется как

$$\xi_l = \xi_{l0} + \frac{\varepsilon}{8\cos^2\gamma} \frac{\left(c_{\xi_l}^{out}\right)^2 \cos 2\gamma + c_0^{out} c_{\xi_l \xi_l}^{out}}{\left(c_{\xi_l}^{out}\right)^2 + c_0^{out}} + \frac{\varepsilon}{4\cos\gamma} \cos(2T_0 + \gamma) \dots ,$$
$$j_{out} = -c_0^{out} \cos\gamma \sin(T_0 + \gamma) + \cdots. \tag{6}$$

Далее приведено сравнение аналитических результатов (6) с данными численного расчета, проведенного в программном комплексе Matlab (искомая система (1) интегрировалась с использованием встроенной функции ode45 при заданных начальных условиях $[\xi_l, \xi_l', j_{out}]|_{\tau=0} = [0.4, 0, 0]$.

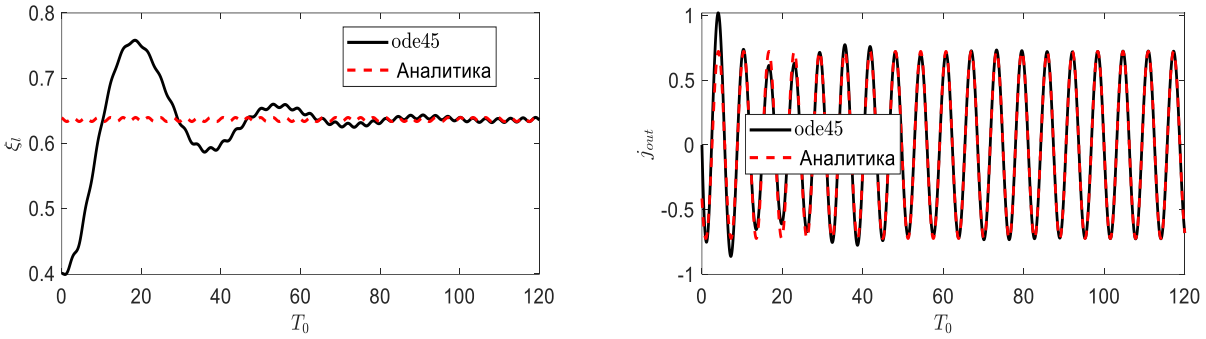


Рис. 2. График сравнения безразмерной величины (а) перемещения ИМ, (б) наведенного тока от безразмерного времени T_0 в случае прямого численного счета (черные сплошные линии) и аналитических формул (6) (пунктирная красная линия);
$b_s = 0.6316,\ b_l = 1.2,\ j_s = 0, \alpha = 2.5, r_{out} = 0.7, \nu_l = 10.$

Из рис. 2 видно, что аналитические формулы (6) в случае установившихся колебаний ИМ с достаточной степенью точности совпадают с численными результатами.

На рис. 3 представлено сравнение аналитических формул (4), (5) с данными численного расчета, проведенного в программном комплексе Matlab [6]. Система (1) интегрировалась с использованием встроенной функции ode45 при заданных начальных условиях $[\xi_l, \xi_l', j_{out}]|_{\tau=0} = [\xi_{l0}, 0, 0]$.

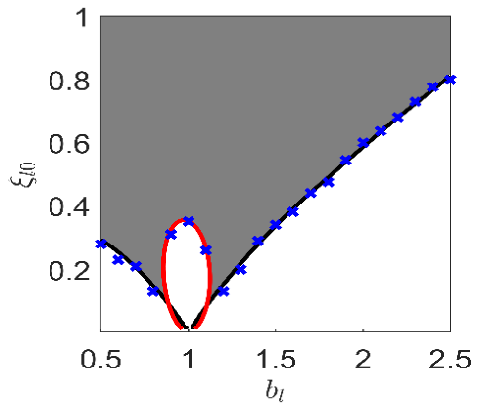


Рис. 3. Эволюция области устойчивости (серые области) положения равновесия ξ_{l0} при $j_s = 0,$, $r_l = 1$ мм, $r_s = 1.9$ мм, $d_{out} = t_{out} = 0.1$ мм, $w_l = 14, w_s = 12, \nu_l = 0.4, \gamma = 0.2$ рад, $\varepsilon = 0.0001$ согласно формулам (4) (черные линии), (5) (красные линии). Синие крестики – численно определенные зоны устойчивости

Из рис. 3 видно, что аналитические формулы (4), (5) при малых величинах параметра ε с достаточной точностью описывают зоны устойчивости колебаний ИМ (в сравнении с численными результатами решения задачи Коши системы (1).

Заключение. В работе рассмотрена модель плоских колебаний тонкого кольца квадратного сечения в переменном электромагнитном поле. Применив метод нелинейной механики, были получены аналитические выражения для определения границы областей устойчивости движений подвеса. Показано, что учет дрейфа положения равновесия позволил получить дополнительные условия устойчивости к полученным в предположении о квазистатичности положения равновесия.

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда № 25-21-00402, https://rscf.ru/project/25-21-00402.

ЛИТЕРАТУРА

1. Skubov D. Khodzhaev K.S. Non-linear electromechanics. – Luxemburg: Springer Science & Business Media, 2008. – 471 p.
2. Poletkin, K. Stability and spring constant investigation for micromachined inductive suspensions: theoretical analysis vs. experimental results / K. Poletkin, Z. Lu, B. den Hartogh et al. // Journal of Physics: Conference Series. – 2014. – Vol. 557. – № 1. – P. 012133.
3. Poletkin K. Stable dynamics of micro-machined inductive contactless suspensions / K. Poletkin, Z. Lu, U. Wallrabe et al. // International journal of Mechanical Sciences. – 2017. – Vol. 131. – P. 753-766.
4. Skubov D.Y. Nonlinear Dynamics of a Micromechanical Non-Contact Induction Suspension / D.Y. Skubov, D.A. Indeitsev, P.P. Udalov et al. // Nonlinear Dynamics of a Micromechanical Non-Contact Induction Suspension. – 2023. – Vol. 58. – № 6. – P. 2011-2023.
5. Nayfeh A.H. Introduction to perturbation techniques – New-York: John Wiley & Sons, 2011 – 535 p.
6. Akan A., Chaparro L.F. Signals and systems using MATLAB – Cambridge: Academic Press, 2024 – 826 p.

УДК 534.1

И.В. Привалов, Л.В. Штукин
Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого(*)

ИССЛЕДОВАНИЕ ДИНАМИКИ МНОГОБАЛОЧНОГО МИКРОРЕЗОНАТОРА

Введение. Одним из направлений развития нано- и микроэлектромеханических систем является разработка устройств, основанных на принципе модальной локализации колебаний в слабосвязанных системах [1, 2]. В таких устройствах возможны режимы, где малые изменения внешнего воздействия влекут за собой большие изменения амплитуд возникающих колебаний [3], а также режимы типа биений, где период огибающий сильно зависит от малых изменений внешнего воздействия [4]. В представленной работе рассматривается микрорезонатор, состоящий из нескольких почти одинаковых упругих элементов, механически связанных между собой. Предложена механическая модель в виде струны на упругом основании. Показано, что собственные частоты сосредоточены в узком диапазоне. Приведен пример использования многобалочного резонатора как полосового фильтра с почти прямоугольной частотной характеристикой.

Механическая модель многобалочного микрорезонатора. Рассматривается резонатор, состоящий из нескольких параллельно расположенных упругих элементов в виде балок, связанных между собой очень податливыми (по сравнению с балками) перемычками (рис.1.1). Оси балок могут быть расположены параллельно друг другу (рис.1, слева), либо вдоль прямых,

(*) И.В. Привалов, phorex2001@gmail.com

исходящих из одной точки (рис. 1, справа). Отдельные балки в составе резонатора могут быть как одинаковых размеров, так и отличаться друг от друга, например, длиной.

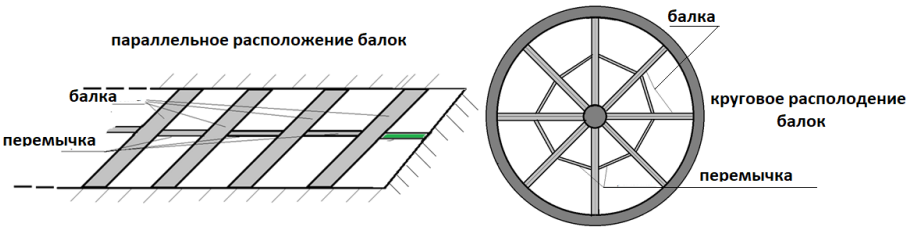


Рис. 1. Резонатор с параллельным и круговым расположением балок

Возбуждение колебаний в резонаторе может осуществляться двумя способами. Первый из них – воздействие с помощью электрического поля в зазоре между балками и неподвижными электродами над балками и под ними. Второй способ возбуждения колебаний – быстрый нагрев поверхности резонатора импульсным лазерным излучением.

Уравнения движения в модельных координатах. Примем для каждой балки модель Бернулли-Эйлера с учетом дополнительной растягивающей силы, возникающей за счет удлинения балки при наличии прогиба. К уравнениям изгиба применяется процедура Галеркина. Для каждой балки в разложениях оставляется только одно слагаемое, соответствующее низшей собственной форме. В результате уравнения многобалочного резонатора в модальных координатах имеют вид:

$$\ddot{z}_k(1-\alpha_k) + z_k + \gamma z_k^3 + c_*(z_k - z_{k-1}) + \lambda^2 c_*(z_k - z_{k+1}) - \beta\frac{u_k^2}{(1-z_k)^2} + \beta\frac{v_k^2}{(1+z_k)^2} = 0 \quad (1)$$

где z_k – модальный коэффициент для k-той балки, коэффициент α_k введен для учета неодинаковости длин балок, γ зависит от соотношения площади и момента инерции поперечного сечения балки, c_* – безразмерная жесткость перемычки, коэффициент β зависит от величины постоянной составляющей напряжений источников э.д.с., u_k, v_k – напряжения на конденсаторах, образованных упругими элементами и неподвижными электродами. Точками обозначены производные по безразмерному времени, $k = 1,2, \ldots, K$, K – число балок в системе.

К уравнениям (1) следует добавить уравнения соответствующих электрических цепей относительно неизвестных напряжений на конденсаторах. Эти уравнения имеют вид [5]:

$$\delta\frac{1}{1-z_k}\dot{u}_k + \delta\frac{\dot{z}_k}{(1-z_k)^2}u_k + u = U_k(t) \qquad \delta\frac{1}{1+z_k}\dot{u}_k - \delta\frac{\dot{z}_k}{(1+z_k)^2}v_k + v = V_k(t) \qquad (2)$$

где $\delta = \lambda_1 R C_0$ – безразмерная постоянная времени цепи заряда конденсатора, C_0 – емкость конденсатора при отсутствии прогиба, $k = 1,2, \ldots, K$.

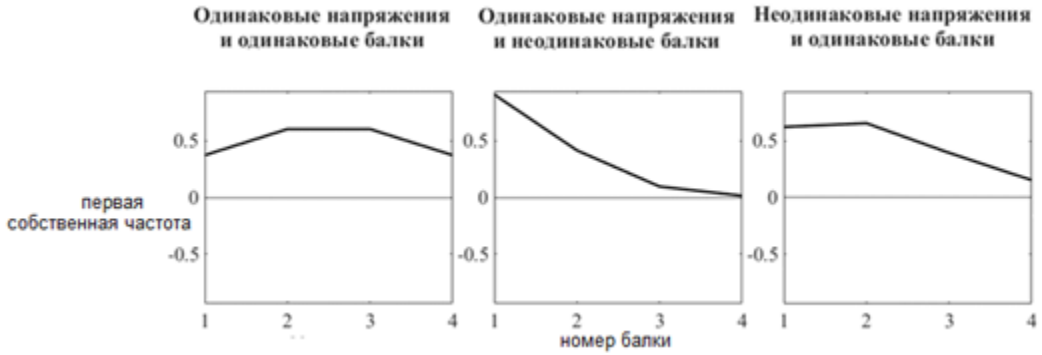


Рис. 2. Собственная форма

Собственные частоты и собственные формы. Сильная модальная локализация собственных форм наблюдается резонаторе, в котором создана регулярная неправильность.

Например, каждая следующая балка короче предыдущей заданным образом, либо источник э.д.с. для каждой следующий балки имеет меньшее напряжение. На рис. 2 показана форма колебаний, соответствующая низшей частоте, для резонатора из четырех балок.

Как видно из рис. 2, амплитуда колебаний оказывается больше на более длинной и тяжелой балке.

Переход к модели эквивалентной струны. Дискретные уравнения (1) при большом числе K можно превратить в дифференциальные уравнения:

$$\ddot{z} + z - \frac{4\beta z}{(1-z^2)^2} - cz'' = 0 \qquad (3)$$

Эти уравнения можно понимать как уравнения некоторой струны на нелинейном упругом основании. Можно показать, что для этой струны собственные частоты лежат в диапазоне $1 \le \lambda_k \le \sqrt{1 + c(\pi)^2}$, k = 1,2, …, K. При этом для резонатора с круговым расположением и четным числом балок низшая и высшая частоты совпадают с границами диапазона, а остальные попарно кратные.

Исследование устойчивости положений равновесия с учетом электрического поля. Показано, что при величине параметра β, характеризующего уровень постоянного напряжения на электродах, $\beta < \frac{1}{4}(1 + c(\frac{\pi}{K+1})^2)$ возможны три положения равновесия $z = 0$ (устойчивое) и два ненулевых положения равновесия (неустойчивые). При превышении этого уровня остается только одно положение равновесия $z = 0$, которое становится неустойчивым.

Полосовой фильтр на основе многобалочного резонатора. Приведен пример использования много балочного резонатора в качестве электромеханического полосового фильтра. Внешнее переменное напряжение подается на один из электродов. Выходной сигнал снимается с электродов другой балки. На рис. 3 показаны частотные характеристики многобалочного резонатора с круговым расположением 6 балок.

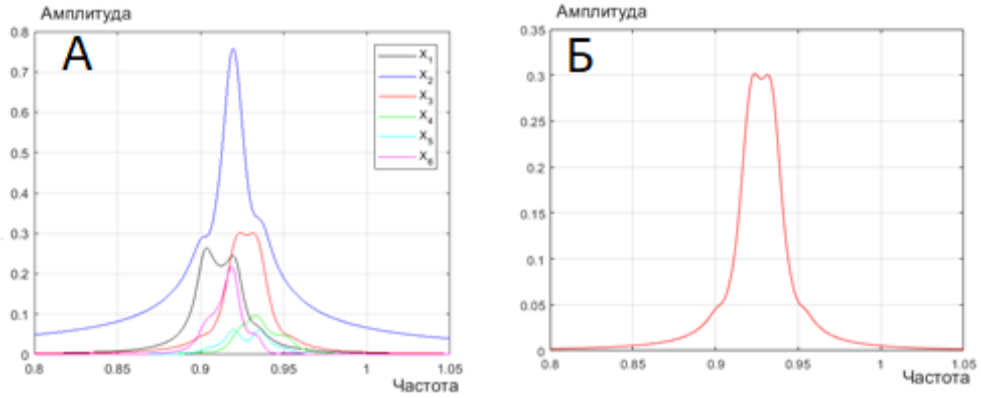


Рис. 3. Частотные характеристики многобалочного резонатора

На графике рис. 3 (А) показана зависимость амплитуды вынужденных колебаний всех балок от частоты внешнего напряжения, поданного на балку с номером 2. Частотная характеристика балки 3 (рис. 3, Б) ближе всего к желаемой прямоугольной характеристике полосового фильтра.

Заключение. Предложена модель многобалочного резонатора с линейным и круговым расположением балок с учетом электрического поля и возможного нагрева лазерными импульсами. Для оценки спектра собственных частот предложен переход к модели эквивалентной струны. Неодинаковости в отдельных балках или источниках питания приводят к модальной локализации. Наличие модальной локализации позволяет построить на основе многобалочного резонатора полосовой электромеханический фильтр.

Работа выполнена при поддержке гранта РНФ № 25-21-00278.

ЛИТЕРАТУРА
1. Chun Zhao and et al. A Review on MEMS Coupled Resonators for Sensing Applications Utilizing Mode Localization// Sensors and Actuators A: Physical 249, (2016), DOI: 10.1016/j.sna.2016.07.015.
2. Amal Hajjaj and et al. Linear and nonlinear dynamics of micro and nano-resonators: Utilizing Mode Localization// International Journal of Non- Linear Mechanics 119 (Oct. 2019). doi: 10.1016/j.ijnonlinmec.2019. 103328
3. Н.Ф. Морозов, Д.А.Индейцев, В.С.Игумнова, Я.В.Беляев, А.В.Лукин, И.А.Попов, Л.В.Штукин. Модель микромеханического акселерометра, основанного явлении на модальной локализации // Доклады Академии наук. Физика, технические науки, 2020, том 494, с.51-56.
4. Н.Ф. Морозов, Д.А.Индейцев, В.С.Игумнова, А.В.Лукин, И.А.Попов, Л.В.Штукин Синхронизация слабосвязанных упругих элементов дифференциального МЭМС-акселерометра в режиме двухконтурного автогенератора //Вестник СПбГУ.Математика. Механика. Астрономия. Т.10 (68). Вып.2. MSC 74H10.
5. Л.В.Штукин, И.Е.Беринский, Д.А.Индейцев, Н.Ф.Морозов, Д.Ю.Скубов. Электромеханические модели нанорезонаторов. Физическая мезомеханика. 2016, Т.19, №1, с.24-30.

УДК 539.38, 539.43

Н.А. Ряпосов, А.И. Грищенко
Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого(*)

МОДЕЛИРОВАНИЕ НЕМОНОТОННОГО ТЕРМОМЕХАНИЧЕСКОГО НАГРУЖЕНИЯ КОРСЕТНЫХ ПОЛИКРИСТАЛЛИЧЕСКИХ ОБРАЗЦОВ ДЛЯ ТЕРМОУСТАЛОСТНЫХ ИСПЫТАНИЙ

Введение. С возрастанием параметров рабочих процессов газотурбинных двигателей и установок (давление, температура) все более остро становится проблема термоусталостного разрушения наиболее ответственных элементов, таких как рабочие лопатки и диски [1-3]. Для верификации моделей неупругого деформирования и накопления термоусталостных повреждений актуальным является моделирование термоусталостных испытаний с использованием стандартных образцов, например, плоских корсетных.

Целью данной работы является моделирование термоусталостных испытаний плоского корсетного образца и оценка влияния жесткости закрепления образца на размах пластических деформаций.

Для моделирования термоусталостного процесса используется конечно элементный (КЭ) пакет ANSYS. Для валидации применяемого КЭ пакета рассмотрена тестовая задача – нестационарный термоэлектрический нагрев прямоугольного стального стержня длинной 100 мм. В качестве граничных условий на одном конце стрежня задавалась температура равная 100 ^{o}C, на другом конце задавалось условие равенства нулю теплового потока. Начальная температура равнялась 22 ^{o}C, плотность тока $j = 2 \cdot 10^{7}\ A/м^{2}$. Свойства материала: $k = 60{,}5 Вт/м \cdot K$, $C = 434\ Дж/кг \cdot K$, $\rho = 7850\ кг/м^{3}$, $\rho_e = 6{,}8 \cdot 10^{-6} Ом \cdot м$, где ρ_e – сопротивление, C – теплоемкость, ρ – плотность, $a = k/C\rho$ – коэффициент температуропроводности, k – теплопроводность.

Аналитическое уравнения теплопроводности решение получено методом Гринберга и представлено ниже. Сравнение распределения температур по длине образца в момент времени 1 секунда полученное численно и аналитически показало отличное совпадение (рис. 1).

(*) Н.А. Ряпосов, nikita.ryaposov@mail.ru

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}-\frac{1}{a}\frac{\partial U}{\partial t}=-\frac{j^2\rho_e}{aC\rho};\quad U(x,0)=22;U(l,t)=100;\ \frac{\partial U}{\partial x}(l,t)=100$$

$$U=U_l+\frac{j^2\rho_e l^2}{2aC\rho}\left(1-\frac{x^2}{l^2}\right)+\frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}\left(U_0-U_l-\frac{4j^2\rho_e l^2}{C\rho a\pi^2(2n+1)^2}\right)\exp\left(-\frac{a\pi^2(2n+1)^2 t}{4l^2}\right)\cos\left(\frac{\pi(2n+1)x}{2l}\right)$$

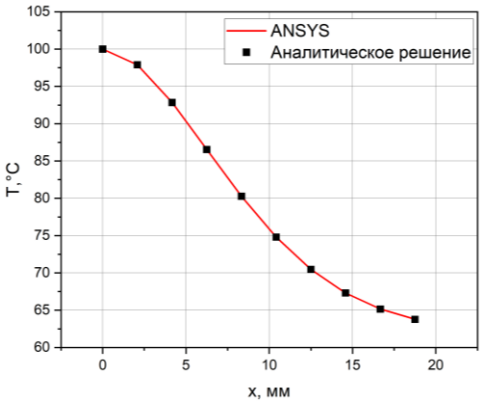


Рис. 1. Сравнение численного и аналитического решения тестовой задачи

Модель закрепленного корсетного образца, состоящая из корсетного образца, болта и основания с оснасткой, а также граничные условия (ГУ) для задачи теплопроводности и термоупругопластичности, представлена на рис. 1. В силу симметрии рассматривалась ¼ часть модели.

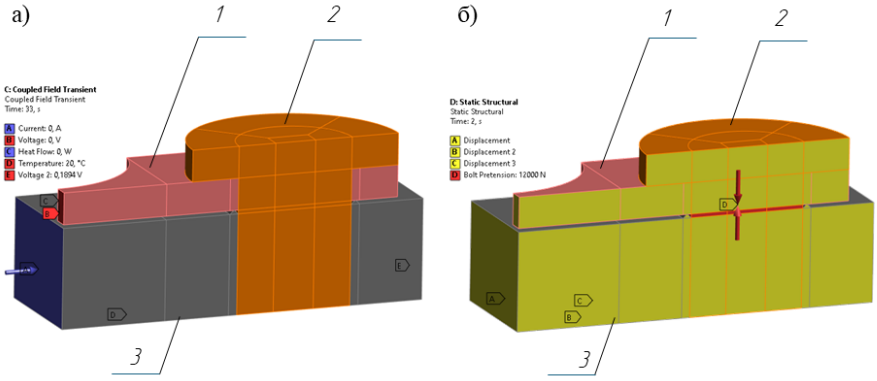


Рис. 2. Модель закрепленного образца и граничные условия:
а) ГУ задачи теплопроводности, б) ГУ задачи термоупругопластичности.
Цифрами обозначены: 1 – плоский корсетный образец, 2 – фиксирующий болт, 3 – основание

Рассматривался циклический нагрев образца в режиме 150 ↔ 900 °C. В качестве материала образца рассматривался жаропрочный поликристаллический сплав на никелевой основе ЖС6У. Болт и основание изготовлены из стали. Нагрев образца осуществляется за счет протекания электрического тока через образец, вызванное разностью потенциалов между двумя изолированными друг от друга частями основания. Между контактирующими деталями задавался идеальный температурный и электрический контакт. Между относительно подвижными элементами (образец – основание, образец – болт) задавался контакт с трением (модель трения Кулона), между болтом и снованием задавался идеальный контакт (bounded). Усилие затяжки болта составляло 8 кН.

Ниже, на рис. 3 представлены результаты моделирования для 10 циклов термоциклирования. Распределение интенсивности пластических деформаций в образце представлено на рис. 3а. Максимальные пластические деформации локализуются в рабочей части корсетного образца. Кривая циклического деформирования, полученная для наиболее

нагруженного узла образца, расположенного в центре его рабочей части, представлена на рис. 3б. Видно, что ширина петли гистерезиса к 10 циклу стабилизировалась.

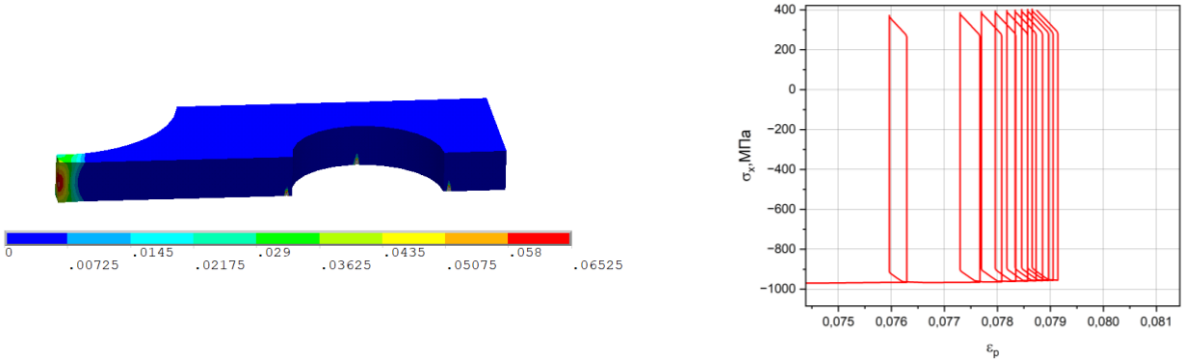


Рис. 3. а) Зависимость пластических деформаций от времени и б) петли гистерезиса для десяти циклов

Отдельно произведено исследование влияния усилия затяжки болта на размах пластических деформаций в цикле. Рассматривались пять значений усилий затяжки: 2, 4, 6, 8 и 12 кН. Для всех значений усилий затяжки произведено моделирование первых двух циклов, установлено сильное влияние величины затяга на размах пластических деформаций в цикле (см. рис. 4а).

На основе полученных результатов может быт произведена оценка числа циклов до зарождения магистральной трещины в образце на основе четырехчленного деформационного критерия, основанного на разделении размахов деформаций пластичности и ползучести [1,3]:

$$D=\sum_{i=1}^{n}\frac{(\Delta\varepsilon_{eq_i}^{p})^{k}}{C_1(T_i)}+\sum_{i=1}^{n}\frac{(\Delta\varepsilon_{eq_i}^{c})^{m}}{C_2(T_i)}+\max_{0\le t\le t_{\max}}\frac{\varepsilon_{eq}^{p}}{\varepsilon_r^{p}(T)}+\max_{0\le t\le t_{\max}}\frac{\varepsilon_{eq}^{c}}{\varepsilon_r^{c}(T)}=1,$$

где C_1, C_2, k, m, ε_r^p, ε_r^c параметры материала, зависящие от температуры и КГО. Обычно принимают соотношения k=2, $m=\frac{5}{4}$, $C_1=\left(\varepsilon_r^p\right)^k$, $C_2=\left(\frac{3}{4}\varepsilon_r^c\right)^m$, где ε_r^p и ε_r^c – предельные деформации пластичности и ползучести при одноосном растяжении.

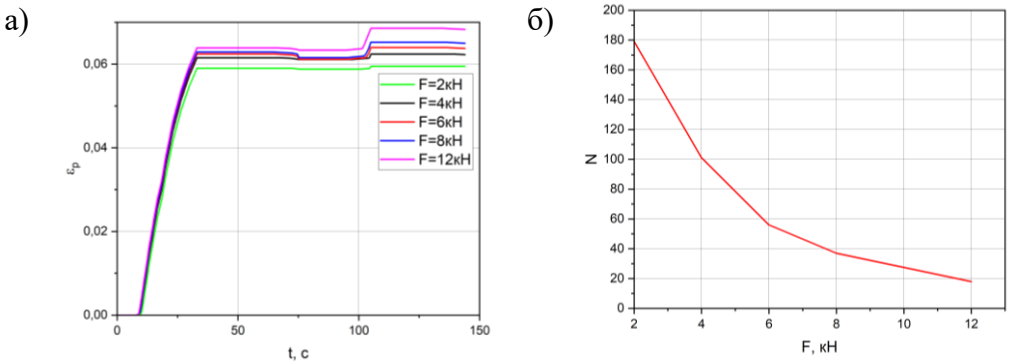


Рис. 4. а) Зависимость пластических деформаций от времени для разных усилий затяга, б) влияние осевого усилия затяга на число до зарождения макротрещины

Первое и второе слагаемое данного критерия описывают накопление повреждений в цикле, вызванных пластичностью и ползучестью соответственно, остальные два – односторонне накопленные повреждения. В силу отсутствия выдержки при максимальной температуре второе и четвертое слагаемые, отвечающие за ползучесть, не рассматривались. Окончательно, приняв допущение об установившемся размахе пластических деформаций в

цикле, а также установившемся накоплении односторонне накопленных деформаций, вызванных ретчеттингом, в итоге получим:

$$\frac{\varepsilon_{eq}^{p}}{\varepsilon_{r}^{p}} + N\left(\frac{\Delta\varepsilon^{p}}{\varepsilon_{r}^{p}}\right)^{k} + N\frac{max\varepsilon_{i}^{p} - max\varepsilon_{i-1}^{p}}{\varepsilon_{r}^{p}} = 1,$$

где N – число циклов до зарождения макротрещины. Зависимость N от осевого усилия затяжки болта представлена на рис. 4б. Установлено сильное его сильное влияние на термоусталостную прочность образца.

Выводы. Проведено моделирование термоусталостных испытаний плоских корсетных поликристаллических образцов. Исследовано влияние усилия затяжки болта на размах пластических деформаций и на число циклов до зарождения макротрещины. Полученные результаты могут быть использованы при проведении натурных термоусталостных испытаний для определения необходимого затяга, обеспечивающего требуемую жесткость закрепления.

Работа выполнена при поддержке гранта РНФ № 25-19-00921.

ЛИТЕРАТУРА

1. Гецов Л.Б. Материалы и прочность деталей газовых турбин. – М.: Недра, 1996. – 591 с.
2. Дульнев Р.А., Котов П.И. Термическая усталость металлов. – М.: Машиностроение, 1980. – 200 с.
3. Семенов А.С., Грищенко А.И., Колотников М.Е., Гецов Л.Б. Конечно-элементный анализ термоциклической прочности лопаток газовых турбин. Ч 1. Модели материала, критерии разрушения, идентификация параметров // Вестник УГАТУ. – 2019. – №1(83). – С. 70-81.

УДК 004.942

Е.А. Садовченко[1], М.А. Жмайло[1], Е.М. Черновол[2]
[1]Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого(*)
[2]Северо-Западный государственный медицинский университет имени И.И. Мечникова

РАЗРАБОТКА УПРУГОПЛАСТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ МАТЕРИАЛА КОСТНОГО БЛОКА С РАЗРУШЕНИЕМ

Введение. Костные блоки являются искусственными полимерными изделиями, которые изготавливаются из вспененного полиуретана. Такие объекты используется в стоматологии хирургами-имплантологами для обучения, отработки процесса установки дентальных имплантатов, тестирования различных фрез и инструментов для подготовки ложа. Одним из основных производителей данного материала является американская компания Sawbones, специализирующаяся на создании медицинского оборудования и различных анатомических тренировочных моделей. Блоки этого производителя фактически являются отраслевым стандартом, поэтому именно они рассматривались в представленной работе. Разработка новых имплантатов и подбор оптимальных протоколов установки, как и многие другие процессы разработки и исследования, могут быть значительно ускорены и удешевлены с применением компьютерного инжиниринга и цифрового моделирования. Для проведения подобных работ необходимым является наличие высокоадекватных моделей материалов – в частности, костных блоков.

Цель работы. Целью настоящей работы является определение физико-механических характеристик материала костного блока и построение модели разрушения ductile damage с помощью проведения натурных испытаний.

(*) Е.А. Садовченко, sadovchenko.e@compmechlab.ru

Ход работы. Все механические испытания проводились на разрывной машине ZwickRoell. Данный аппарат является автоматизированной электромеханической испытательной системой, которая способна прикладывать растягивающее или сжимающее усилие к материалу. В рамках натурных испытаний проводилось растяжение различных испытательных лопаток, сжатие цилиндрических образцов и образцов сложной формы [1]. Каждый тип образцов был изготовлен и испытан в количестве 4 штук, для исключения погрешностей машины и получения надежных, воспроизводимых и сопоставимых результатов для дальнейшего анализа и принятия решений. Геометрия всех образов представлена на рис. 1.



Рис. 1. Образцы

Для описания механического поведения материала необходимо определить линейную и пластическую части кривой деформирования. Для определения модуля Юнга и зависимости напряжений от пластической деформаций обрабатывались натурные испытания по растяжению испытательных лопаток. Изначально данные были получены в осях «сила – перемещение». Далее данная диаграмма преобразовывалась к осям истинных напряжений и деформаций с помощью следующих формул [2]:

$$\sigma_t = \sigma_e(1 + \varepsilon_e),$$
$$\varepsilon_t = ln(1 + \varepsilon_e),$$

где σ_t – истинные напряжения, ε_t – истинные деформации, σ_e – инженерные напряжения, ε_e – инженерные деформации.

Далее на линейном участке определялся модуль Юнга, как тангенс угла наклона кривой. Полученные модули Юнга для костных блоков различной плотности представлены в табл. 1.

Табл. 1. Упругие модули материалов костных блоков

	Блок 015	Блок 025	Блок 035
Плотность, г/см3	0,24	0,4	0,56
Модуль Юнга, МПа	180	414	648
Коэффициент Пуассона	0,3	0,3	0,3

Для описания пластической части кривой деформирования использовалась зависимость истинных напряжений от пластической деформации, которая определялась следующим образом:

$$\varepsilon_{pl} = \varepsilon_t - \frac{\sigma_t}{E},$$

где ε_{pl} – пластические деформации, σ_t – истинные напряжения, ε_t – истинные деформации, $E -$ модуль Юнга.

На рис. 2 представлены пластические кривые для костных блоков различной плотности.

Также стоит отметить, что для подтверждения правильности обработки данных натурных испытаний проводилось их цифровое моделирование.

Далее рассмотрено построение модели разрушения Ductile damage, которая предполагает, что эквивалентная пластическая деформация в начале повреждения является

функцией трехосности напряжений и скорости деформации $\bar{\varepsilon}_D^{pl}(\eta, \dot{\bar{\varepsilon}}^{pl})$. Трехосность напряжений определяется по следующей формуле [3]:

$$\eta = -\frac{p}{q},$$

где p – первый главный инвариант тензора напряжений Коши, q – напряжения по Мизесу.

Критерий возникновения повреждений выполняется при достижении следующего условия:

$$\omega_D = \int \frac{d\bar{\varepsilon}^{pl}}{\bar{\varepsilon}_D^{pl}(\eta, \dot{\bar{\varepsilon}}^{pl})} = 1,$$

где ω_D – переменная состояния, монотонно возрастающая с пластической деформацией.

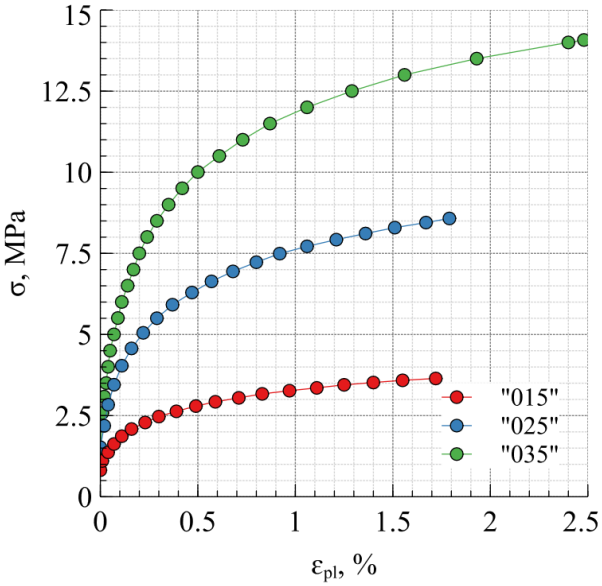


Рис. 2. Пластические кривые для костных блоков различной плотности

Табл. 2. Константы модели разрушения

	$\bar{\varepsilon}_D^{pl}$	η	$\dot{\bar{\varepsilon}}^{pl}$, 1/с
Блок 015	0,16	0,33	0,000332
	0,045	0,5	0,000332
	0,81	-0,33	0,0023
Блок 025	0,018	0,33	0,000332
	0,043	0,5	0,000332
	0,89	-0,33	0,0023
Блок 035	0,0238	0,33	0,000332
	0,03928	0,5	0,000332
	0,85	-0,33	0,0023

Для построения модели разрушения были рассмотрены образцы со значениями трехосности: -0,33; 0; 0,33; 0,5. Значение трехосности напряжений показывает характер нагружения тела. В случае отрицательной трехосности тело подвержено сжатию, в случае положительной трехостности – растяжению, при трехосности близкой к нулю наблюдается чистый сдвиг. Стоит отметить, что при проведении тестов на сжатие с образцами сложной формы разрушение происходило не в предполагаемой зоне, поэтому в итоговой модели

разрушения отсутствует нулевое значение трехосности. Эквивалентная пластическая деформация при разрушении определялась с помощью цифрового моделирования натурных испытаний. В табл. 2 представлены итоговые значения модели разрушения для блоков различной плотности.

Заключение. В рамках проделанной работы определены физико-механические свойства костных блоков в случае различных плотностей, построена модель разрушения Ductile damage. В дальнейшем полученные данные будут использоваться для цифрового моделирования процесса установки дентальных имплантатов.

ЛИТЕРАТУРА

1. Xu, Y.; Zhao, C.; Wang, C.; Qiu, Y.; Zhao, X.; Li, S.; Zhao, N. Compression–Shear Specimen Stress-State Response and Distribution Characteristics with Wide Stress Triaxiality // Materials. – 2024. – Vol. 17(6). – 1424.
2. Писаренко Г.С. Справочник по сопротивлению материалов. Изд. 2-е. – Наукова думка, 1988. – 736 с.
3. Rickhey, F., Hong, S. Stress Triaxiality in Anisotropic Metal Sheets — Definition and Experimental Acquisition for Numerical Damage Prediction// Materials. – 2022. – Vol. 15(11). – 3738.

УДК 534.1

О.Б. Садыхов, А.В. Лукин, И.А. Попов
Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого(*)

СВОБОДНЫЕ КОЛЕБАНИЯ КОЛЬЦЕВОГО РЕЗОНАТОРА ТВЕРДОТЕЛЬНОГО ВОЛНОВОГО ГИРОСКОПА ПРИ НАЛИЧИИ ВОЗМУЩЕНИЙ

Введение. Актуальность исследования обусловлена необходимостью повышения точности и стабильности работы твердотельных волновых гироскопов (ТВГ) [1, 2]. Исследования в данной сфере [3-7] показывают, что геометрические и материальные несовершенства, такие как неоднородность толщины оболочки, дефекты срединной поверхности и неравномерное распределение плотности материала, оказывают значительное влияние на характеристики резонаторов, а также позволяют лучше понять процессы, происходящие внутри конструкции. Наличие дефектов в форме и толщине оболочки приводит к расщеплению частотного спектра несовершенного кольца [3,5]. Неоднородность толщины оболочки вызывает изменения в распределении жесткости и масс материала, которые приводят к нарушению симметрии колебаний резонатора [7]. Данный эффект может оказывать влияние на параметры дебаланса гироскопа, ухудшая его стабильность и точность работы. В частности, явление неоднородности поверхностной плотности материала [4] приводит к искажению форм колебаний резонатора за счет нарушения его вращательной симметрии, а также вызывает модальные взаимодействия, влияющие на динамическую устойчивость ТВГ.

Целью данной работы является исследование динамики колебаний резонаторов при наличии возмущений, таких как неоднородность плотности материала, разножесткость материала, неравномерное распределение поперечного сечения кольца.

Теоретическая модель колебаний кольца. Для достижения поставленной цели рассматривается упругая модель [8] кольцевого резонатора с учетом растяжимости срединной линии кольца, инерции сечений на поворот и поперечного сдвига. Для вывода уравнений движения используем принцип Гамильтона.

(*) О.Б. Садыхов, ovelsad23@gmail.com

Кинетическая энергия: $T = \int_0^{2\pi} \frac{\rho A}{2}(\dot{u}^2 + \dot{w}^2)R\,d\theta + \int_0^{2\pi} \frac{\rho I}{2}(\dot{\beta}^2)R\,d\theta$, где ρ – плотность материала кольца; A – площадь поперечного сечения кольца; u – радиальное смещение; w – тангенциальное смещение; R – радиус недеформированной средней линии кольца; β – угол полного поворота поперечного сечения кольца; θ – угловая координата.

Энергия деформаций: $U = \int_0^{2\pi} \frac{EI}{2}\left(\frac{1}{R^2}w'' + \frac{1}{R^2}u' - \frac{1}{R}\gamma'\right)^2 R\,d\theta + \int_0^{2\pi} \frac{kGA}{2}(\gamma)^2 R\,d\theta + \int_0^{2\pi} \frac{EA}{2}\left(\frac{1}{R}u' - \frac{w}{R}\right)^2 R\,d\theta$, где E – модуль юнга; I – второй момент инерции поперечного сечения относительно центральной оси; k – коэффициент сдвига; G – модуль сдвига; γ – угол сдвига поперечного сечения кольца. В результате получим систему дифференциальных уравнений, описывающую динамику кольцевого резонатора.

$$\begin{cases} -\rho AR\ddot{w} - EIR\left(\frac{1}{R^4}w^{IV} + \frac{1}{R^4}u''' - \frac{1}{R^3}\gamma'''\right) + EAR\left(\frac{1}{R^2}u' - \frac{w}{R^2}\right) - \rho IR\left(\frac{1}{R}(\ddot{w}' + \ddot{u}) - \ddot{\gamma}\right) = 0 \\ -\rho AR\ddot{u} + EIR\left(\frac{1}{R^4}w''' + \frac{1}{R^4}u'' - \frac{1}{R^3}\gamma''\right) + EAR\left(\frac{1}{R^2}u'' - \frac{w'}{R^2}\right) - \rho IR\left(\frac{1}{R}(\ddot{w}' + \ddot{u}) - \ddot{\gamma}\right) = 0 \\ -\rho AR\ddot{u} + EIR\left(\frac{1}{R^4}w''' + \frac{1}{R^4}u'' - \frac{1}{R^3}\gamma''\right) + EAR\left(\frac{1}{R^2}u'' - \frac{w'}{R^2}\right) - \rho IR\left(\frac{1}{R}(\ddot{w}' + \ddot{u}) - \ddot{\gamma}\right) = 0 \end{cases}$$

Далее воспользуемся гармоническим разложением, возмущения вводятся как функции, зависящие от окружной координаты: $u = RU(\theta)\cos\omega t\,; w = RW(\theta)\cos\omega t\,; \beta = B(\theta)\cos\omega t$. Для обезразмеривания уравнений примем параметры $\Omega^2 = \frac{\omega^2\rho R^2}{kG}; S_2 = \frac{I}{AR^2}; S_1 = \frac{E}{kG}$. Таким образом, систему можно привести к виду:

$$\begin{cases} S_1\frac{d^2U}{d\theta^2} - U - (S_1+1)\frac{dW}{d\theta} + \beta = -\Omega^2 U \\ (S_1+1)\frac{dU}{d\theta} + \frac{d^2W}{d\theta^2} - S_1 W - \frac{d\beta}{d\theta} = -\Omega^2 W \\ U + \frac{dW}{d\theta} + S_1 S_2\frac{d^2\beta}{d\theta^2} - \beta = -\Omega^2 S_2\beta \end{cases}$$

При подстановке искомого решения $U = A_u\sin(n\theta)\,;\ W = A_w\cos(n\theta)\,;\ \beta = A_\beta\sin(n\theta)$ в систему дифференциальных уравнений и приведении ее к матричному виду условие существования нетривиальных решений требует равенства нулю определителя матрицы коэффициентов, откуда следует частотное уравнение:

$$S_1{}^2S_2[n^6 - 2n^4 + n^2] + \Omega^2 S_1S_2[n^2 - 2n^4 - 1] + \Omega^4 S_1S_2[2n^2 + 1] - \Omega^2 S_1{}^2S_2[n^4 + n^2] - \Omega^2 S_1[n^2 + 1] + \Omega^4 S_2[n^2 + 1] - \Omega^6 S_2 + \Omega^4 = 0$$

Табл. 1. Параметры кольцевого резонатора из монокристаллического кремния

Параметр	**Значение**
модуль Юнга E, МПа	131
коэффициент Пуассона ν	0.266
модуль сдвига G, МПа	51.7
толщина кольца h, мкм	{10; 100; 10}
радиус кольца R, мкм	500
плотность материала ρ, кг/м^3	2330
форма колебаний n	2
коэффициент сдвига	0.85

Численное моделирование и решение краевой задачи. Частотные характеристики исследованы как аналитически, так и численно с помощью коллокационного метода решения краевых задач на собственные значения – функция bvp4c [9]. На рис. 1 при параметрах модели, указанных в табл. 1, приведено сравнение найденных частот свободных колебаний с решением

в упрощенной постановке [8], не учитывающей факторов растяжимости срединной линии, сдвиговых деформаций и вращательной энергии: $W_c^2 = \frac{EI}{\rho AR^4}\frac{n^2(n^2+1)^2}{n^2+1}$. Также рассмотрена промежуточная постановка, отличающаяся от рассматриваемой полной лишь неучетом растяжимости кольца: $W_n^2 = \frac{W_c^2}{(1+n^2 S_1S_2)+S_2\left[\frac{(n^2-1)^2}{n^2+1}\right]\left[\frac{1}{1+n^2S_1S_2}\right]}$. Решение, найденное строго аналитически, полностью совпало с численным решением методом коллокаций (рис. 2).

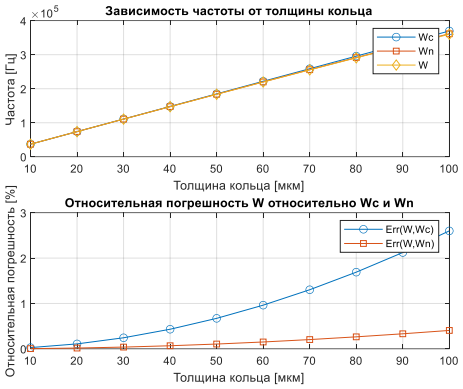


Рис. 1. Сравнение частот, полученных аналитически, с моделями из статьи [8]

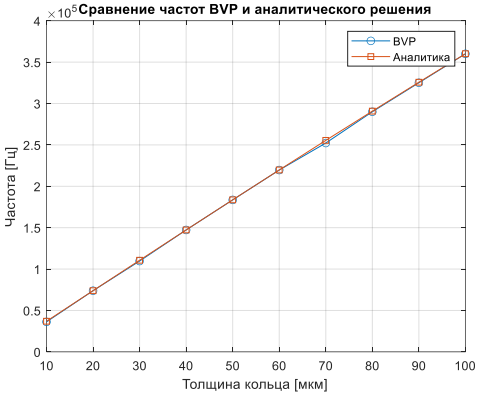


Рис. 2. Сравнение аналитического и численного решений

Свободные колебания кольцевого резонатора при различных возмущениях. Рассмотрим случаи неоднородной плотности материала кольца и неравномерного распределения его поперечного сечения. Для каждого из этих изменяющихся параметров выделим постоянную и переменную части: $\rho(\theta) = \rho_0 + \delta\rho(\theta)$; $A(\theta) = A_0 + \delta A(\theta)$. Система дифференциальных уравнений движения при зависимости плотности материала кольца от угловой координаты, где $\rho_{nd} = \frac{\delta\rho}{\rho_0}$, принимает вид:

$$\begin{cases} S_1\frac{d^2U}{d\theta^2} - U - (S_1+1)\frac{dW}{d\theta} + \beta = -\Omega^2(1+\rho_{nd})U \\ (S_1+1)\frac{dU}{d\theta} + \frac{d^2W}{d\theta^2} - S_1W - \frac{d\beta}{d\theta} = -\Omega^2(1+\rho_{nd})W \\ U + \frac{dW}{d\theta} + S_1S_2\frac{d^2\beta}{d\theta^2} - \beta = -\Omega^2S_2(1+\rho_{nd})\beta \end{cases}$$

Система дифференциальных уравнений движения при зависимости поперечного сечения кольца от угловой координаты, где $A_{nd} = \frac{\delta A}{A_0}$:

$$\begin{cases} (A_{nd}+1)S_1\frac{d^2U}{d\theta^2} + S_1\frac{dA_{nd}}{d\theta}\frac{dU}{d\theta} - (A_{nd}+1)U - (S_1+S_1A_{nd}+A_{nd}+1)\frac{dW}{d\theta} - S_1\frac{dA_{nd}}{d\theta}W + (A_{nd}+1)\beta = -\Omega^2(A_{nd}+1)U \\ (S_1+S_1A_{nd}+A_{nd}+1)\frac{dU}{d\theta} + \frac{dA_{nd}}{d\theta}U + (A_{nd}+1)\frac{d^2W}{d\theta^2} + \frac{dA_{nd}}{d\theta}\frac{dW}{d\theta} - (A_{nd}+1)S_1AW - (A_{nd}+1)\frac{d\beta}{d\theta} - \frac{dA_{nd}}{d\theta}\beta = -\Omega^2(A_{nd}+1)W \\ (A_{nd}+1)U + A_{nd}\frac{dW}{d\theta} + S_1S_2\frac{d^2\beta}{d\theta^2} - (A_{nd}+1)\beta = -\Omega^2S_2\beta \end{cases}$$

Влияние возмущений на колебания. Из-за периодической структуры кольцевого резонатора возмущения представлены в виде ряда Фурье, рабочая форма колебаний соответствует эллиптическому случаю n=2. Рассмотрены индексы изменяемости n=2,3,4, при этом расщепление частот увеличивается с амплитудой возмущения. Для анализа использован сеточный метод коллокаций с начальными приближениями в виде синус- и косинус-гармоник.

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда № 25–21–00278, https://rscf.ru/project/25-21-00278/

ЛИТЕРАТУРА
1. Матвеев В.А., Лунин Б.С., Басараб М.А. Навигационные системы на волновых твердотельных гироскопах. — Москва: Физматлит, 2008. — 240 с.
2. Джанджгава Г.И., Бахонин К.А., Виноградов Г.М., Требухов А.В. Бесплатформенная инерциальная навигационная система на базе твердотельного волнового гироскопа // Гироскопия и навигация. — 2008. — №1. — С. 22–33.
3. Vakhlyarskiy D., Gouskov A., Basarab M., Matveev V. A. Numerical investigation of WFG resonators of various shapes with different defect types // Science and Education of the Bauman MSTU, Electronic Journal. — 2016. — Vol. 16. — P. 1-22. — DOI: 10.7463/1016.0848188.
4. Vakhlyarskiy D., Guskov A., Basarab M., Matveev V. Using a combination of FEM and perturbation method in frequency split calculation of a nearly axisymmetric shell with middle surface shape defect // Science and Education of the Bauman MSTU. — 2016. — Vol. 16.
5. Серегин С.В. Влияние несовершенств формы на колебания кольцевого резонатора волнового твердотельного гироскопа // Нелинейная динамика. — 2017. — Т. 13, №3. — С. 423–431.
6. Gireesh N.S., Sundararajan T., Gautam S.S. Effect of geometric imperfections on anchor loss and characterization of a gyroscope resonator with high quality factor // Gyroscopy and Navigation. – 2020. – Vol. 11.
7. Basarab M.A., Matveev V.A., Lunin B.S., Fetisov S.V. Influence of nonuniform thickness of hemispherical resonator gyro shell on its unbalance parameters // Gyroscopy and Navig. – 2017. – Vol. 8.
8. Kirkhope J. Simple frequency expression for the in-plane vibration of thick circular rings // The Journal of the Acoustical Society of America. — 1976. — Vol. 59.
9. Shampine L., Gladwell I., Thompson S. Solving ODE's with Matlab. — 2003.

УДК 534.833.532

В.Е. Свистов, П.А. Упоров, Е.Д. Назарова
БГТУ «Военмех» им. Д.Ф. Устинова(*)

КОНЕЧНО-ЭЛЕМЕНТНОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ И ИССЛЕДОВАНИЕ СВОЙСТВ АКУСТИЧЕСКИХ МЕТАСТРУКТУР

Введение. Тема акустических метаматериалов рассматривается довольно давно. Однако сейчас, благодаря развитию технологий 3D-печати, значительно упростивших их создание, акустические метаматериалы становятся все ближе к внедрению в повседневную жизнь. В данной работе представлены некоторые примеры акустических метаматериалов, приведены их плюсы и минусы, а также кратко объяснены проведенные расчеты.

Метаматериалы – это искусственные материалы с необычными физическими свойствами, не встречающимися в природных материалах. Метаматериалы проявляют физические свойства, которые являются сверхнормальными и присущи не всем природным материалам. Впервые термин был введен профессором Роджером М. Уолсером для описания несуществующих в природе, искусственно изготовленных трехмерных композитов с периодической структурой (Приставка «мета-» переводится с греческого как «многочисленный», так как эти материалы состоят из очень большого числа одинаковых или изменяющихся определенным, заданным заранее образом структурных единиц) [1].

Необычные свойства метаматериалов могут быть обусловлены как резонансными явлениями внутри их элементов, когда, несмотря на малый размер, каждый из них создает сильное рассеянное поле, так и эффектами многократного рассеяния волн между отдельными элементами.

(*) П.А. Упоров, p_uporov@bk.ru

Акустические метаматериалы (АММ) способны контролировать распространение звуковых волн, что открывает новые горизонты для разработки эффективных решений в области звукоизоляции и акустического управления [2].

Рассматриваемый в данной работе АММ рассчитывается исходя из заданного отношения акустического импеданса внутренней части структуры АММ к акустическому импедансу вне этой структуры.

На рис. 1 представлен ультра-открытый глушитель, а также его геометрические параметры используемы для расчета.

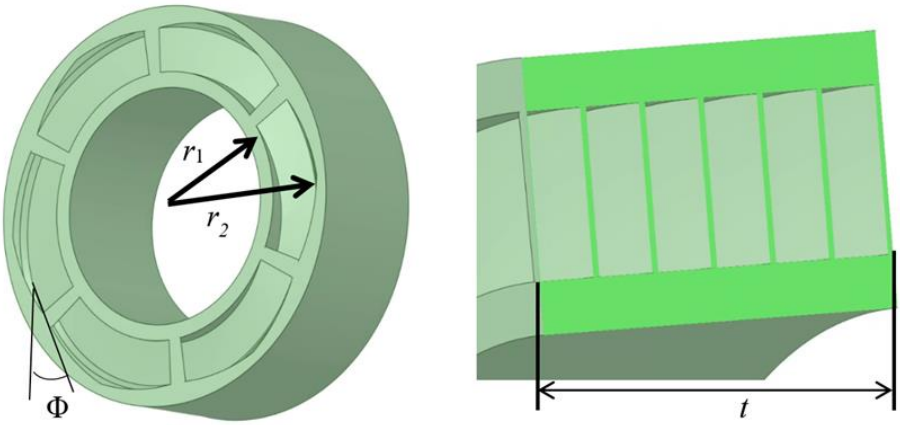


Рис. 1. Геометрия ультра-открытого глушителя

Плюсом такого глушителя является компактность, так, например, при радиусах r_1 = 5,1 см и r_2 = 7 см, и угле спирали Ф = 8,7° его толщина t составляет 5,2 см. Также, как следует из названия, одним из преимуществ является его открытость (разница между внешним и внутренним диаметром 1,9 см), то есть большая площадь сечения является отрытым пространством. [3]

Особенностью рассматриваемого акустического метаматериала является, то что его эффективность проявляется только на одной частоте, под которую он был рассчитан. В данном случае это 460 Гц. На рис. 2, график *а,* представлена аналитическая зависимость акустической проницаемости для данного АММ в зависимости от частоты.

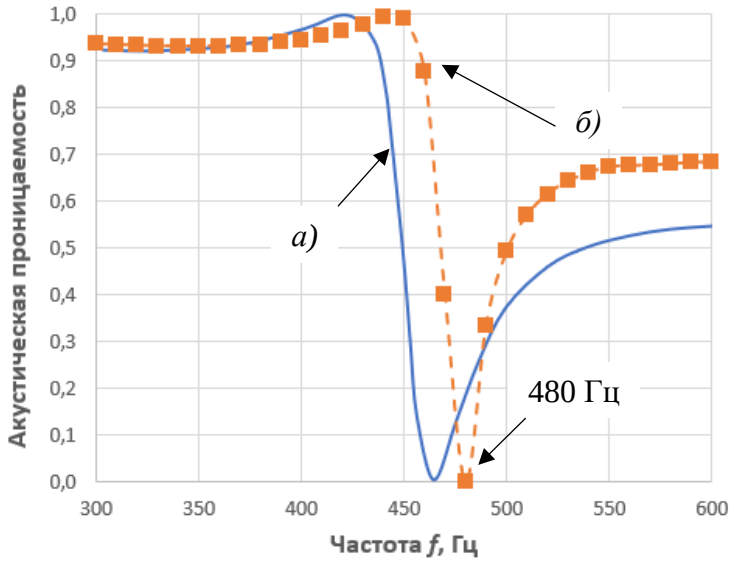


Рис. 2. Зависимость акустической проницаемости:
а) полученная аналитически и б) в конечно-элементном решателе ANSYS

В данной работе была произведена проверка эффективности данного АММ. Численная модель была построена в конечно-элементном решателе ANSYS 2024R1 (рис. 3). Полученные данные незначительно отличаются от аналитических данных – частота полного поглощения звука оказалась смещена на 20 Гц (рис. 2, график б).

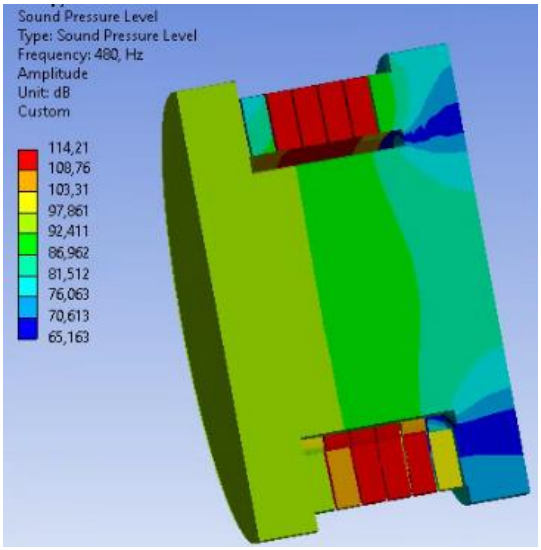


Рис. 3. Уровни звукового давления (дБ) в АММ на частоте 480 Гц

Для проведения стендовых испытаний геометрия канала была доработана – одна из стенок прямоугольного канала была заменена на выемку треугольной формы. При этом площадь канала не изменилась (рис. 4). Изменение данной формы необходимо для создания данного АММ с помощью 3D печати на принтерах с одной печатающей головкой.

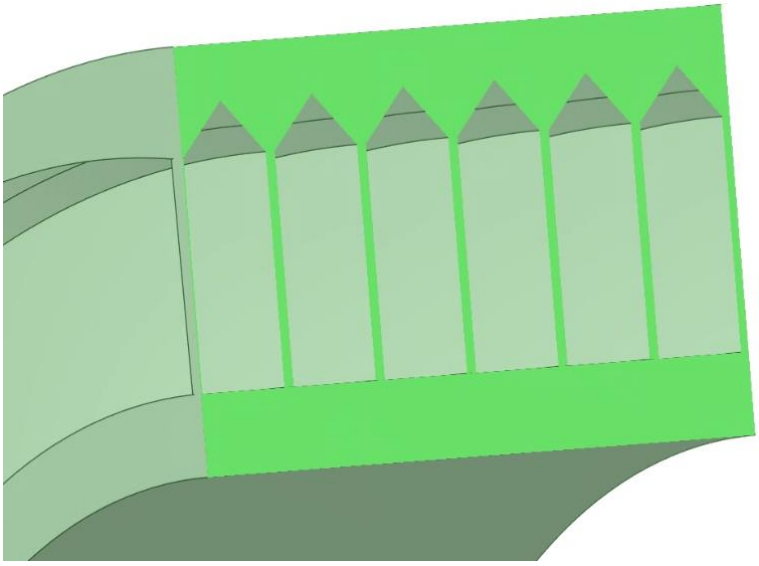


Рис. 4. Измененная форма канала

В дальнейшем планируется изучение влияния геометрических параметров АММ на его акустическую проницаемость.

Заключение. Акустические метаматериалы имеют большой потенциал для широко использования, благодаря возможности их построить под конкретные задачи, а затем, с

помощью 3D-печати создать их. Иллюстрацией этого являются полученные в данной работе результаты расчетов и стендовых испытаний для ультра-открытого глушителя.

ЛИТЕРАТУРА

1. Cui T.J., Smith D.R., Liu R. Metamaterials. Theory, Design, and Applications. – Springer New York Dordrecht Heidelberg London, 2010. – 367 p.
2. Aydın G., San S.E. Breaking the limits of acoustic science: A review of acoustic metamaterials // Materials Science & Engineering B. – 2024. – Vol. 305. – P. 1-34.
3. Ghaffarivardavagh R., Nikolajczyk J., Anderson S., Zhang X. Ultra-open acoustic metamaterial silencer based on Fano-like interference // Physical Review B. – 2019. – Vol. 99. – P. 1-10.

УДК 534.1

В.А. Селин, А.В. Лукин, И.А. Попов
Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого(*)

РАЗРАБОТКА МЕТОДИКИ СИНТЕЗА КОМПАКТНЫХ СИСТЕМНЫХ МОДЕЛЕЙ РЕЗОНАНСНЫХ МЭМС ДАТЧИКОВ

Введение. Рассматриваются принципиальные архитектуры резонансных микроэлектромеханических акселерометров. Применяется метод синтеза модели пониженного порядка, представленный в статье [1]. Этот метод в результате применяется для построения компактной, вычислительно эффективной модели датчика с несколькими степенями свободы. Преимуществом предлагаемого подхода является отсутствие необходимости работы с полноразмерными матрицами масс и жесткостей, а также полными собственными векторами системы.

Базовая модель акселерометра. Рассматриваем простую модель акселерометра, состоящую из двух ш-о балок, связанных с инерционной массой (ИМ) линейно-упругими пружинами. Внешнее нагружение задается как ускорение на всю систему.

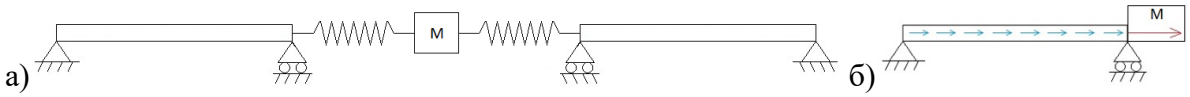


Рис. 1. а) Модель акселерометра, б) Балка под действием двух нагрузок

Эта модель акселерометра представляется как балка под действием распределенной нагрузки (ускорение a) и сосредоточенной силы $P = \alpha\rho Sla$, где $\alpha = \frac{M}{m}$, $m = \rho Sl$ – масса балки. Уравнение движения для этой балки $EIw^{IV} + \rho S\ddot{w} - (P + \rho Sxa)w'' = 0$. После обезразмеривания, представления решения в виде $w = \sum_{n=1}^{N} C_n(t)\varphi(x)$, где $\varphi(x) = sin(\frac{\pi n}{l}x)$ и учета свойств ортогональности собственных функций, уравнение приобретает вид $\int_0^1 \varphi_j \left(\sum C_i\varphi_i^{IV}\right)dx + \int_0^1 \varphi_j \left(\sum \ddot{C}_i\varphi_i\right)dx - a_{non}\int_0^1 \varphi_j \left((\alpha + x)\sum \ddot{C}_i\varphi_i\right)dx = 0$. Полученная задача о свободных колебаниях дискретной системы решается численно в программной системе Matlab. Сравниваются два случая: 1) обе нагрузки и 2) только сосредоточенная нагрузка.

На графиках показана зависимость безразмерной частоты от безразмерного ускорения при изменении параметра α в диапазоне от 5 до 5000. При малых безразмерных массовых коэффициентах видна значительная разница в частотах двух случаев.

(*) В.А. Селин, selin.va@edu.spbstu.ru

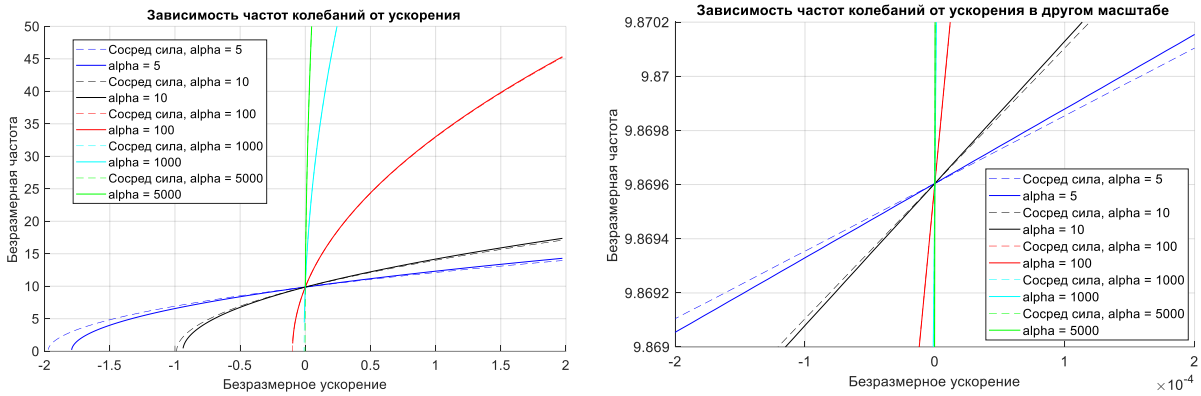


Рис. 2. Сравнение безразмерной частоты в двух случаях

Базовая архитектура дифференциального резонансного микроэлектромеханического акселерометра (ДРМА). Рассматривается более сложная модель - образец базовой архитектуры ДРМА. Классические аналитические модели не учитывают слабых перекрестных линейно-упругих связей между отдельными резонаторами, что заметно влияет на динамические характеристики таких высокоточных резонансных сенсоров. Мы же будем их учитывать.

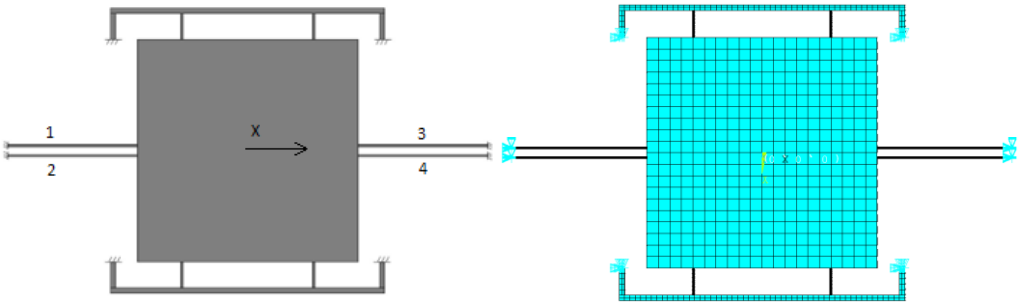


Рис. 3. Базовая архитектура ДРМА

Для этой архитектуры реализуется метод понижения порядка. Блок-схема двухэтапного алгоритма изображена на рис. 4:

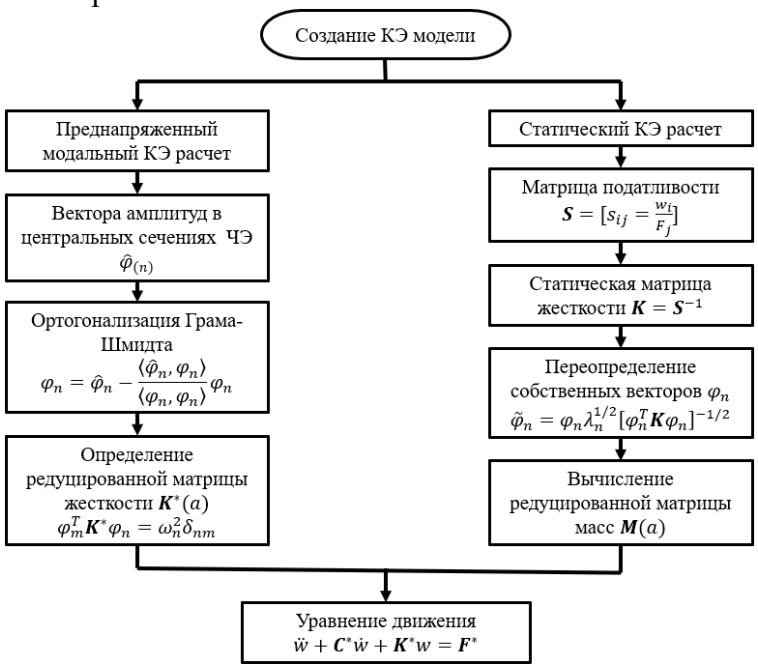
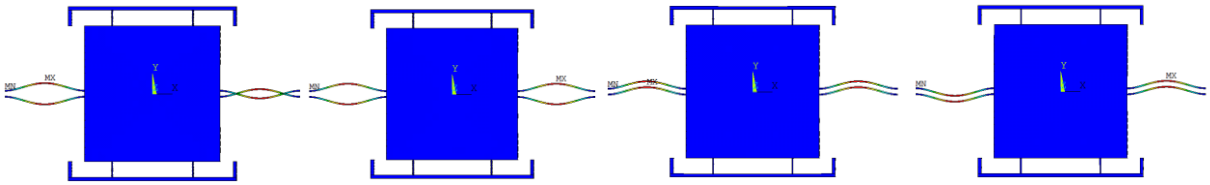


Рис. 4. Схема метода понижения порядка

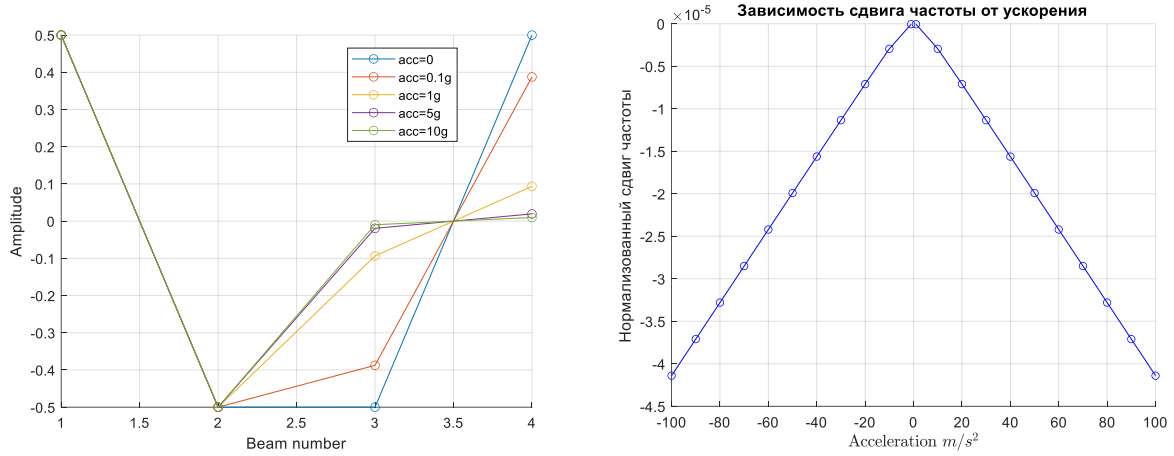
Исследуемые формы колебаний вибрационной структуры показаны на рис. 5.



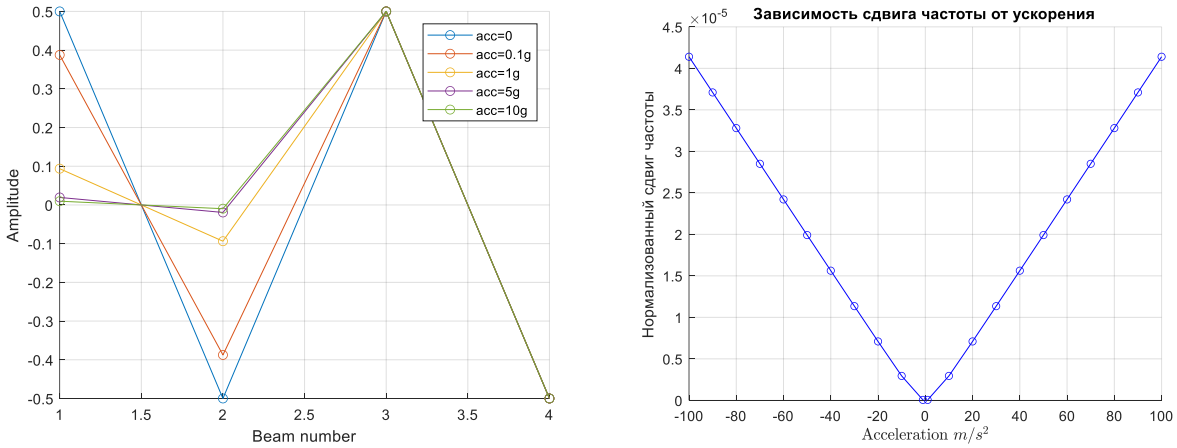
1 мода 2 мода 3 мода 4 мода

Рис. 5. Формы колебаний, связанные с ЧЭ

Рассматриваются амплитуды колебаний в центральных сечениях резонаторов при различных ускорениях (на графиках слева) и нормализованный сдвиг частот, который рассчитывается по формуле: $\frac{f_{(n)}-f_{0(n)}}{f_{0(n)}}$ (на графиках справа).



1 мода



2 мода

Рис. 6. Зависимость амплитуд колебаний и сдвига частот от ускорения

Частоты первой моды уменьшаются, а второй – увеличиваются. Определяется нормализованный сдвиг частоты по формуле $\frac{f_{(n)}-f_{0(1)}}{f_{0(1)}}$, где $f_{0(1)}$ – первая частота колебаний при нулевом ускорении.

Прямое решение задачи методом конечных элементов совпадает с решением на основе модели пониженного порядка. Выходным сигналом ДРМА является разность между двумя сдвигами частот, которые представлены на графике.

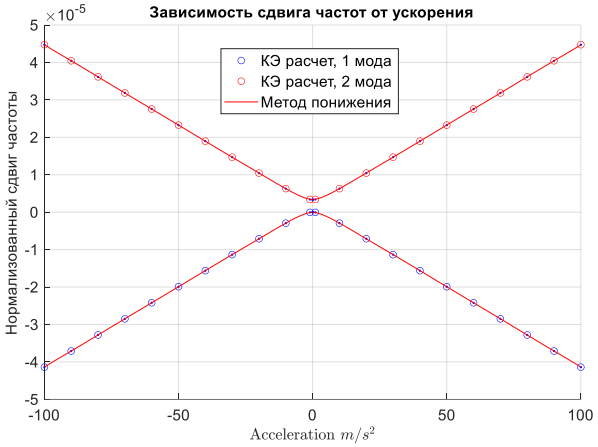


Рис. 7. Зависимость нормализованного сдвига собственных частот от ускорения

Пример реальной модели акселерометра. Рассматривается модель резонансного акселерометра, изначально предложенного в статье [2]. Проводится сравнение результатов прямого КЭ анализа с результатами, полученными на модели пониженного порядка.

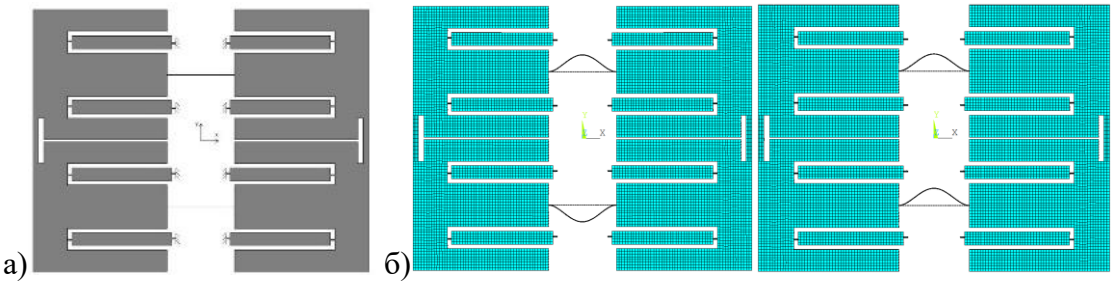


Рис. 8. а) Структура модели, б) Нижние формы колебаний системы

Нормализованный сдвиг частоты приведен на рис. 9.

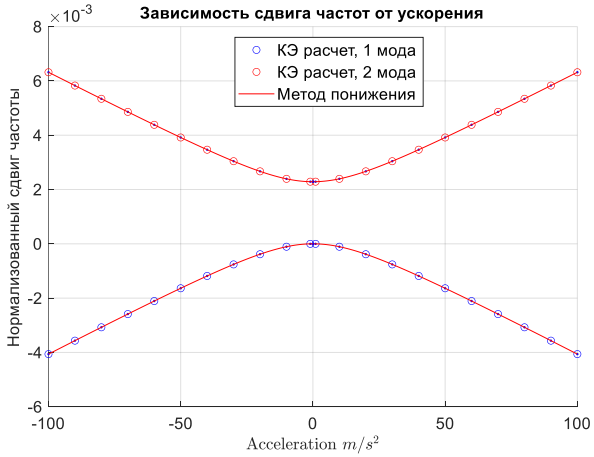


Рис. 9. Зависимость нормализованного сдвига собственных частот от ускорения

Из графика видно, что нормализованный сдвиг частоты для обеих форм колебаний, полученный с помощью метода пониженного порядка, совпадает с результатами КЭ анализа.

Заключение. Предложенный метод синтеза моделей пониженного порядка, с помощью которого строится модель датчика с несколькими степенями свободы, подходит для анализа резонансных акселерометров. Метод является эффективным с вычислительной точки зрения. Полученная с помощью данного метода модель хорошо верифицируется с КЭ расчетом.

Предложенный метод может применяться для создания моделей различных архитектур датчиков.

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда № 25-21-00278

ЛИТЕРАТУРА

1. HaLevy O., Krylov S. Design Methodology and Model Order Reduction for Resonant Accelerometers //2022 IEEE International Symposium on Inertial Sensors and Systems (INERTIAL). – IEEE, 2022. – С. 1-4.

2. HaLevy O., Lulinsky S., Krylov S. Resonant accelerometer with compliant parallel motion linkage force amplification mechanism //2021 IEEE International Symposium on Inertial Sensors and Systems (INERTIAL). – IEEE, 2021. – С. 1-4.

УДК 534-16

С.А. Смирнов[1], А.К. Беляев[1,2]
[1]Институт проблем машиноведения Российской академии наук(*)
[2]Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого

СРЕДНЕЕ ПОЛЕ СЛУЧАЙНОЙ ВОЛНЫ, РАСПРОСТРАНЯЮЩЕЙСЯ В СРЕДЕ СО СКРЫТОЙ ПЕРИОДИЧНОСТЬЮ

Введение. В настоящее время задачи о распространении волн в средах со случайными параметрами встречаются во многих областях науки, таких как акустика, радиофизика и теория колебаний. Широко распространены такие задачи и в механике сплошных сред. В данной работе рассматривается задача о распространении упругих волн в случайных средах со скрытой периодичностью. Актуальность такой постановки задачи заключается в том, что она может использоваться при моделировании распространения волн в упругих средах различной природы, имеющих стохастические свойства. Например, данная постановка может служить для описания распространения волн в земной поверхности. Указанная среда может рассматриваться как случайная, поскольку ее геофизические параметры неоднородны и могут меняться от точки к точке совершенно случайным образом [1]. Также приведенная постановка задачи может применяться для исследования распространения волн в различных конструкциях из поликристаллических материалов, так как в таких материалах ориентация и размер кристаллических зерен распределены случайным образом.

На данный момент существует множество различных подходов к описанию волн в случайных средах [2], основанных как на предположении о малости случайных параметров, так и более на общих методах, использующих корреляционный анализ и теорию случайных процессов [3]. В данной работе для поиска математического ожидания случайной волны используется метод интегральных спектральных представлений.

Постановка задачи. В качестве модели, на основе которой производится исследование распространения волн в случайных средах, выбрано следующее одномерное волновое уравнение в полубесконечной области:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(E(x)\frac{\partial \tilde{u}(x,t)}{\partial x}\right) = \rho(x)\frac{\partial^2 \tilde{u}(x,t)}{\partial t^2}, \qquad (1)$$

где $\tilde{u}(x,t)$ – перемещение, x – пространственная координата, t – время, $E(x)$ – модуль Юнга, $\rho(x)$ – массовая плотность. Принимается, что $x \geq 0$, модуль Юнга является постоянным $E(x) = \langle E \rangle = const$, а массовая плотность является случайной функцией координаты и может

(*) С.А. Смирнов, serg.a.smir@gmail.com

быть представлена в виде $\rho(x) = \langle\rho\rangle[1 + r(x)]$, где $\langle\rho\rangle$ – детерминированное среднее значение, а $r(x)$ – случайная функция, описывающая отклонение массовой плотности от своего среднего значения. Символом $\langle\ \rangle$ обозначена операция математического ожидания. Принимается, что в начале координат происходит гармоническое возбуждение колебаний в форме $\tilde{u}(x,t)|_{x=0} = H\, e^{i\omega t}$, где $H = const$, на бесконечности задается условие излучения Зоммерфельда. Решение уравнения (1) разыскивается в виде одночастотной волны $\tilde{u}(x,t) = u(x)e^{i\omega t}$, что позволяет перейти к волновому уравнению для $u(x)$ в форме уравнения Гельмгольца:

$$\frac{d^2u(x)}{dx^2} + \lambda_0^2[1 + r(x)]u(x) = 0, \tag{2}$$

где введено «усредненное» волновое число $\lambda_0 = \omega\sqrt{\langle\rho\rangle/\langle E\rangle}$.

Среднее поле случайной волны. Согласно методу интегральных спектральных представлений, случайная составляющая в массовой плотности раскладывается в интеграл Фурье-Стилтьеса по волновым числам:

$$r(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} R(k_1)e^{ik_1x}dk_1. \tag{3}$$

Амплитуда перемещения также представляется в виде суммы детерминированной и стохастической составляющей $u(x) = \langle u(x)\rangle + u_w(x)$, стохастическая составляющая $u_w(x)$ раскладывается в интеграл Фурье-Стилтьеса аналогично (3):

$$u_w(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} W(k)\mu(k,x)e^{ikx}dk. \tag{4}$$

Здесь $R(k_1)$ и $W(k)$ – случайные Фурье-спектры, $\mu(k,x)$ – детерминированная функция, осуществляющая амплитудно-частотную модуляцию, при этом принимается, что $\langle R(k_1)\rangle = 0$ и $\langle W(k)\rangle = 0$. В результате ряда математических преобразований может быть получена система линейных уравнений, связывающих между собой неизвестные функции $\langle u(x)\rangle$ и $\mu(k,x)$, которой соответствует следующее характеристическое уравнение:

$$\lambda^2 + \lambda_0^2 - \lambda_0^4 \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{S_r(k)}{(\lambda + ik)^2 + \lambda_0^2}dk = 0, \tag{5}$$

которое позволяет получить корни характеристического уравнения, если известен конкретный вид спектральной плотности $S_r(k)$.

В данной работе рассматривается случай стохастической среды, которая имеет скрытую периодичность. Такой среде соответствует спектральная плотность вида [4]:

$$S_r(k) = \frac{2\alpha_r\sigma_r^2}{\pi}\frac{a_r^2 + \beta_r^2}{(k^2 - \alpha_r^2 - \beta_r^2)^2 + 4\alpha_r^2k^2}, \tag{6}$$

примерный вид данной функции представлен на рис. 1.

Выбранное представление для спектральной плотности (6) подставляется в характеристическое уравнение (5). Интеграл в характеристическом уравнении вычисляется при помощи вычетов. В результате всех математических преобразований было получено уравнение в виде:

$$\lambda^2 + \lambda_0^2 - \sigma_r^2 \lambda_0^4 \frac{(\lambda + \alpha_r)^2 + 2\alpha_r(\lambda + \alpha_r) - \beta_r^2 + \lambda_0^2}{[(\lambda + \alpha_r - i\beta_r)^2 + \lambda_0^2][(\lambda + \alpha_r + i\beta_r)^2 + \lambda_0^2]} = 0. \quad (7)$$

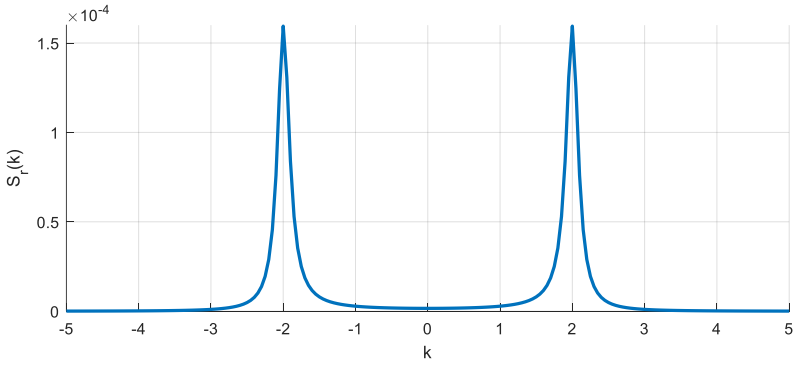


Рис. 1. Спектральная плотность случайной среды со скрытой периодичностью

Было установлено, что в определенной области в пространстве параметров условию излучения Зоммерфельда удовлетворяют только два корня λ_2 и λ_4. Граничное условие в начале координат имеет вид:

$$\langle u(x) \rangle|_{x=0} = H. \quad (8)$$

В этом случае удовлетворяющее всем граничным условиям среднее поле случайной волны, распространяющейся в случайной среде со скрытой периодичностью, может быть найдено при помощи аналитического выражения:

$$\langle u(x) \rangle = \left[\frac{\lambda_4^2 + \lambda_0^2}{\lambda_4^2 - \lambda_2^2} e^{\lambda_2 x} - \frac{\lambda_2^2 + \lambda_0^2}{\lambda_4^2 - \lambda_2^2} e^{\lambda_4 x} \right] H. \quad (9)$$

Для построения графика среднего поля стохастической волны были выбраны следующие значения параметров: $H = 1, \lambda_0 = 1, \alpha_r = 0.1, \beta_r = 2, \sigma_r = 0.01$. Полученный результат представлен на рис. 2.

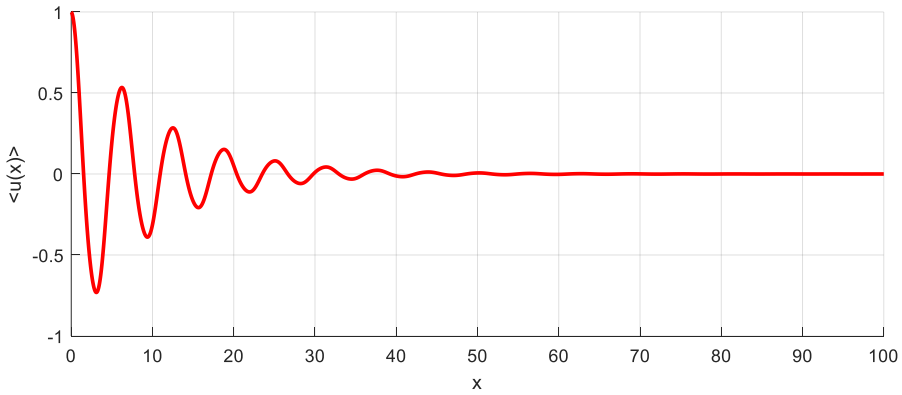


Рис. 2. Среднее поле случайной волны

Заключение. В данной работе проведено исследование задачи о распространении одномерной упругой волны в среде со скрытой периодичностью. Принято, что среда имеет детерминированный модуль Юнга и случайную массовую плотность. При помощи метода разложения случайных функций в интеграл Фурье–Стилтьеса было получено аналитическое выражение для нахождения математического ожидания случайной волны. Было установлено,

что при удалении от места возбуждения математическое ожидание уменьшается и стремится к нулю. Полученный результат позволяет сделать вывод о том, что по мере распространения волны в случайной среде со скрытой периодичностью информация о параметрах волны становится стохастической, достоверная информация о данных параметрах снижается.

ЛИТЕРАТУРА

1. Askar A., Cakmak A.S. Seismic waves in random media //Probabilistic engineering mechanics. – 1988. – Т. 3. – №. 3. – С. 124-129.
2. Кляцкин В.И. Стохастические уравнения и волны в случайно-неоднородных средах. – Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1980.
3. Belyaev A.K., Polyanskiy V.A. Some approaches to harmonic wave propagation in elastic solids with random microstructure // 2018 Days on Diffraction (DD). – IEEE, 2018. – С. 38-43.
4. Belyaev A.K., Ziegler F. Uniaxial waves in randomly heterogeneous elastic media // Probabilistic engineering mechanics. – 1998. – Т. 13. – №. 1. – С. 27-38.

УДК 539.37

Е.К. Смирнова[1], К.П. Фролова[2,1], Н.М. Бессонов[2]
[1]Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого(*)
[2]Институт проблем машиноведения РАН

МОДЕЛИРОВАНИЕ УПРУГО-ПЛАСТИЧЕСКИХ ТЕЧЕНИЙ С УЧЕТОМ ИЗМЕНЕНИЯ РАЗГРУЖЕННОЙ КОНФИГУРАЦИИ ТЕЛА

Пластическое поведение материала сопровождается появлением остаточных деформаций, не исчезающих после снятия внешней нагрузки [1]. Такое поведение приводит к изменению разгруженной конфигурации, под которой будем понимать такую конфигурацию, которую тело приобретает при нормальных условиях при разгрузке.

Целью работы является включение разгруженной конфигурации в модель пластического течения в явном виде. В процессе расчета определяются скорость и тензор напряжений, а условие текучести формулируется относительно изменения разгруженной конфигурации. Предполагается, что пластическое течение возникает, когда различие между текущей и разгруженной конфигурациями превышает определенный предел. В этом случае разгруженная конфигурация будет меняться, а ее изменение соответствует приращению пластической деформации.

Классическая постановка задачи, не предполагающая рассмотрения разгруженной конфигурации в явном виде, имеет следующий вид:

$$\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} = \mathbf{0}, \qquad \boldsymbol{\sigma} = -p\mathbf{I} + \mathbf{S}, \tag{1}$$

где $\boldsymbol{\sigma}$ – тензор напряжений, p – давление, $\mathbf{I}$ – единичный тензор, $\mathbf{S}$ – девиатор тензора напряжений.

Закон Гука для изотропного материала имеет вид

$$p = -K\nabla \cdot \mathbf{u}, \tag{2}$$

$$\mathbf{S} = G\left(\nabla\mathbf{u} + \mathbf{u}\nabla - \frac{2}{3}\mathbf{I}(\nabla \cdot \mathbf{u})\right), \tag{3}$$

где $\mathbf{u}$ – перемещение, K, G – модули объемного сжатия и сдвига соответственно.

Как правило, предполагается, что на возникновение пластического течения влияет величина **S,** и условие пластичности формулируется в виде следующего неравенства:

(*) Е.К. Смирнова, catherinasmirn@gmail.com

$$-\mathrm{J}_2(\mathbf{S}) \le \frac{\sigma_s^2}{3}, \tag{4}$$

где σ_s – предел пластичности.

При нарушении неравенства (4) величина $\mathbf{S}$ корректируется до выполнения равенства $-\mathrm{J}_2(\mathbf{S}) = \sigma_s^2/3$ (приведение напряжений на поверхность текучести Уилкинса [2, 3]).

Чтобы включить в постановку задачи разгруженную конфигурацию в явном виде, вернемся от соотношений (2), (3) к их более общему виду:

$$p = -K\left(\frac{v}{V} - 1\right), \tag{5}$$

$$\mathbf{S} = G\mathbf{B}_D, \tag{6}$$

где v – актуальный объем, V – разгруженный объем, $\mathbf{B} = \mathbf{F}\cdot\mathbf{F}^{\mathbf{T}}$ – левый тензор Коши-Грина, $\mathbf{B}_D = \mathbf{B} - \frac{1}{3}\mathrm{tr}(\mathbf{B})\mathbf{I}$, $\mathbf{F} = \mathrm{d}\mathbf{r}/\mathrm{d}\mathbf{R}$ – градиент деформации.

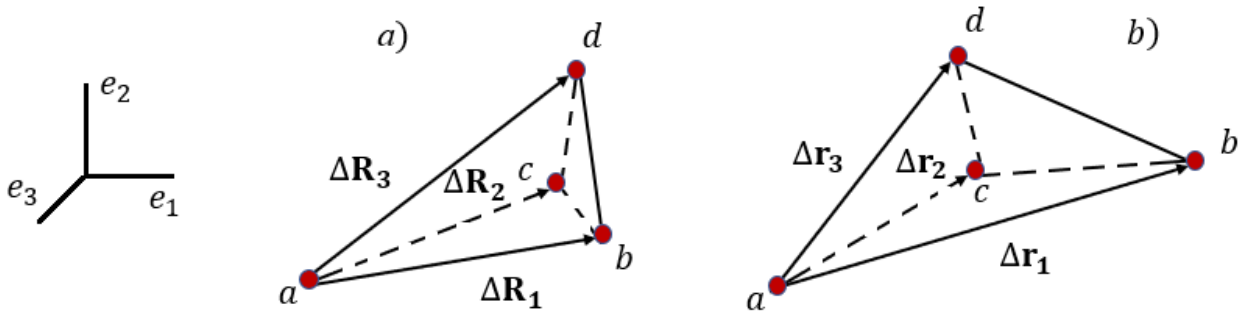


Рис. 1. Элементарный материальный объем и его а) – разгруженная и б) – актуальная конфигурации

Рассмотрим элементарный материальный объем (конечный элемент) в виде тетраэдра (рис.1). Тетраэдр образован тройками векторов $\Delta\mathbf{R}_k$ и $\Delta\mathbf{r}_k$ $(k = 1,2,3)$ в разгруженном и актуальном состояниях соответственно. При снятии внешней нагрузки актуальный тетраэдр стремиться к разгруженному состоянию, с точностью до поворота. Для тетраэдра выражения v/V и $\mathbf{B}$, входящие в формулы (5) и (6), можно записать в следующем виде [4]:

$$\frac{v}{V} = \frac{\Delta\mathbf{r}_1\cdot(\Delta\mathbf{r}_2\times\Delta\mathbf{r}_3)}{\Delta\mathbf{R}_1\cdot(\Delta\mathbf{R}_2\times\Delta\mathbf{R}_3)}, \tag{7}$$

$$\mathbf{B} = \Delta\mathbf{r}_i\mathbf{e}_i\cdot\mathbf{G}^{-1}\cdot\mathbf{e}_k\Delta\mathbf{r}_k \equiv \Delta\mathbf{r}_i\mathbf{e}_i\cdot\begin{vmatrix}\Delta\mathbf{R}_1\cdot\Delta\mathbf{R}_1 & \Delta\mathbf{R}_1\cdot\Delta\mathbf{R}_2 & \Delta\mathbf{R}_1\cdot\Delta\mathbf{R}_3\\ \Delta\mathbf{R}_2\cdot\Delta\mathbf{R}_1 & \Delta\mathbf{R}_2\cdot\Delta\mathbf{R}_2 & \Delta\mathbf{R}_2\cdot\Delta\mathbf{R}_3\\ \Delta\mathbf{R}_3\cdot\Delta\mathbf{R}_1 & \Delta\mathbf{R}_3\cdot\Delta\mathbf{R}_2 & \Delta\mathbf{R}_3\cdot\Delta\mathbf{R}_3\end{vmatrix}^{-1}\cdot\mathbf{e}_k\Delta\mathbf{r}_k. \tag{8}$$

В отличие от формул (2) и (3), соотношения (7) и (8) в явном виде содержат информацию о разгруженной конфигурации, сосредоточенную в величинах V и $\mathbf{G}$. Используя это, сформулируем условие пластичности (4) как

$$-\mathrm{J}_2(\mathbf{B}_D) \le \frac{\sigma_s^2}{3G^2} \equiv \varepsilon_s^2, \tag{9}$$

где ε_s – предельная деформация.

Нарушение неравенства (9) означает возникновение пластического течения, т.е. необратимого изменения разгруженной конфигурации вплоть до выполнения равенства $-\mathrm{J}_2(\mathbf{B}_D) = \sigma_s^2/(3G^2)$. Информация о разгруженной конфигурации содержится в тензоре $\mathbf{G}$, введенном в соответствии с формулой (8), который корректируется способом, во многом похожим на процедуру Уилкинса [2, 3].

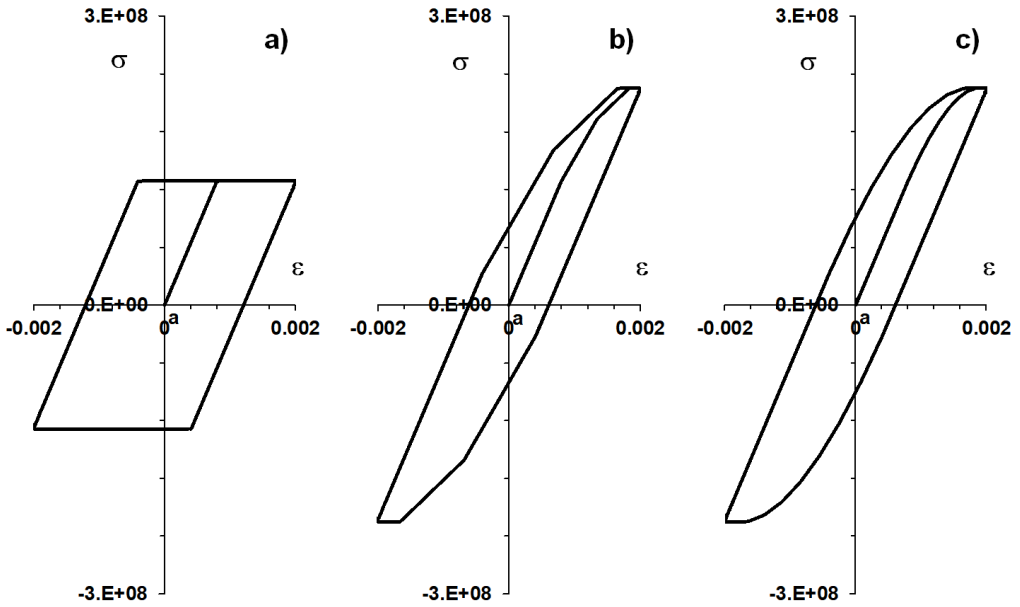


Рис. 2. Кривые упругопластического гистерезиса: a) – идеально-пластический цикл, b) – цикл с тремя поверхностями текучести, c) – цикл с десятью поверхностями текучести

На рис. 2a показан цикл для плоского стержня с использованием идеальной упруго-пластической модели (расчет сделан на 2D сетке 50x200). Для учета упрочнения, как правило, задается зависимость величины ε_s от накопленной пластической деформации. Мы использовали модель, в которой рассматривается совокупность нескольких материалов, каждый из которых ведет себя идеально упруго-пластически [5]. В отличие от работы [5], где для этих материалов задавались различные значения напряжений σ_{si}, в рамках используемого нами подхода для каждого i-го материала задается своя разгруженная конфигурация со своим предельным значением деформации ε_{si}. В процессе нагружения/разгрузки материалы последовательно один за другим переходят в пластическое состояние (или выходят из него). На рис. 2b показан цикл для трех материалов, а на рис.2c – для десяти материалов. Комбинируя удельные доли материалов и значения ε_{si}, можно получать различные кривые упрочнения. На рис. 2b и 2c получен эффект Баушингера. Рассмотренная в работе модель позволяет рассчитывать также остаточные напряжения и распружинивание.

Работа выполнена в рамках государственного задания ИПМаш РАН при поддержке Минобрнауки России.

ЛИТЕРАТУРА

1. Орлов А.В., Пинегин С.В. Остаточные деформации при контактном нагружении. Москва: Наука, 1971. – 62 с.
2. Wilkins M.L. Computer simulation of dynamic phenomena // Scientific Computation. Springer. – 1998.
3. Wilkins M.L. Calculation of Elastic–Plastic Flow // B. Alder (Ed.). Methods in Computational Physics. New-York: Academic Press. – 1964. – Vol. 3. – P. 211-263.
4. Bessonov N.M., Golovashchenko S.F., Volpert V.A. Numerical Modelling of Contact Elastic-Plastic Flows // Mathematical Modelling of Natural Phenomena. – 2009. – Vol. 4. – №. 1. – P. 44-87.
5. Лейбов В.Г., Чубунов М.В. Методика расчета переменного упруго-пластического напряженно-деформированного состояния элементов конструкций // Ученые записки ЦАГИ. – 1983. – том XIV. – №. 6. – С.84-93.

УДК 531.36:62–50

Э.Б. Тынышов, А.П. Муслимов
Кыргызско-Российский Славянский Университет им. Б.Н. Ельцина(*)

РАЗРАБОТКА АВТОМАТИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ КОНТРОЛЯ ИЗНОСА СВЕРЛА ПУТЕМ РЕГУЛИРОВАНИЯ ЕГО ПОДАЧИ НА АВТОМАТИЧЕСКИХ ЛИНИЯХ

Одной из ключевых проблем в машиностроении является контроль состояния режущих инструментов, в частности, сверл, которые подвержены износу в процессе эксплуатации [1,2]. Особенно остро стоит проблема износа сверл в автоматических линиях, поскольку они характеризуются высокой степенью интеграции различных технологических процессов, что требует точного контроля за состоянием режущего инструмента. Контроль износа сверла осуществляется посредством сочетания традиционных методов мониторинга и применения обратных связей контроля износа сверла в автоматических линиях, что позволяет существенно повысить их стойкость и производительность изготовления деталей.

Целью исследования является разработка автоматической системы контроля износа сверла путем регулирования его подачи при обработке изделия. Принципиальная схема автоматической системы контроля износа сверла путем регулирования подачи инструмента представлена на рис. 1.

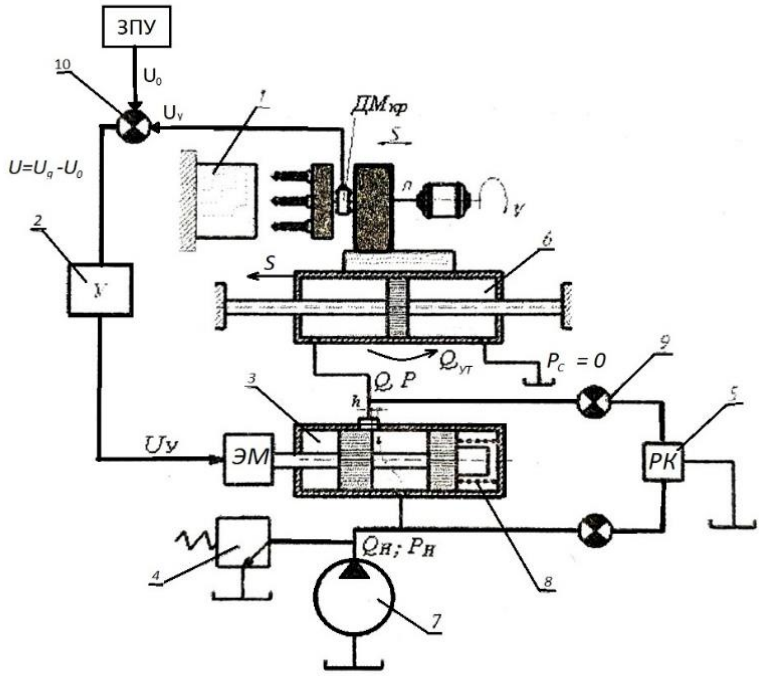


Рис. 1. Принципиальная схема автоматической системы контроля износа сверла путем регулирования подачи инструмента

ЭМ - электромагнит регулятора расхода, Q – расход, Р – давление. $ДМ_{кр}$ – магнитоупругий датчик. 1 – Заготовка. 2 – (У) усилитель электрических сигналов. 3 – регулятор расхода жидкости с электромагнитным управлением. 4 – предохранительный клапан с переливным золотником. 5 – редукционный клапан. 6 – суппорт с силовым цилиндром.7 – насос. 8 –пружина. 9 – демпферы. 10 - сумматор. $Р_н$ - Р = const. S – подача инструмента. ЗПУ – задающее программное устройство. Q – расход жидкости. Р – давление.

(*) Тынышов Э.Б., eldostynyshov@gmail.com

Принцип работы автоматической системы. С повышением износа сверла при обработке растет крутящий момент. Измерение его постоянно производится магнитоупругим датчиком ($ДМ_{кр}$) с последующим преобразованием его сигнала в электрический сигнал $U_д$, которой поступает в сумматор (10), туда же поступает задающий сигнал U_0 от задающего программного устройства (ЗПУ). В сумматоре происходит сравнение двух сигналов, и на выходе мы имеем сигнал рассогласования $U=U_д-U_0$. Поскольку он слаб по мощности, он усиливается усилителем (У); усиленный сигнал $U_у$ усиливает тяговое усилие электромагнита. Электромагнит жестко связан с подвижным элементом золотника. Поэтому проходная щель регулятора расхода h уменьшается (используется электромагнит толкающего типа). Расход, поступающий в силовой цилиндр, уменьшается, что приводит к снижению подачи сверла, что позволяет уменьшить крутящий момент и тем самым интенсивность износа снижается; процессы, происходящие при уменьшении крутящего момента, протекают в обратном порядке: $U_д$, $U_у$ и тяговое усилие электромагнита уменьшаются, и золотник регулятора расхода под действием пружины увеличивает щель h настолько, чтобы величина подачи имела установленное значение. ЗПУ предназначен для настройки гидросуппорта на различных этапах подачи инструмента при обработке различных материалов.

Принцип работы магнитоупругого датчика. Магнотоупругий датчик является бесконтактным. При увеличении крутящего момента происходит деформация вала, на котором бесконтактно установлен датчик, что приводит к изменению его магнитной проницаемости и выходного параметра. Основным элементом системы, от которого зависит качественная работа всей системы, является регулятор расхода с электромагнитным управлением. Поэтому возникает необходимость разработки его математической модели.

Математическая модель регулятора расхода электромагнитным управлением. Уравнение динамического равновесия золотника регулятора расхода имеет следующий вид [2]:

$$m\ \frac{d^2h_p}{dt^2} + F_v + F_{УП} = Fe \qquad (1)$$

где m – масса якоря и золотника; F_v – сила вязкого трения, возникающая при движении между золотником и корпусом регулятора; Fe – тяговое усилие электромагнита.

$$F_V = \alpha \frac{dh}{dt}\ ;\quad F_V = \alpha \frac{dh_p}{dt}\ ;\ F_{уп} = c \cdot h_p\ ,$$

С учетом этих соотношений уравнение (1), примет вид:

$$m\ \frac{d^2h_p}{dt^2} + \alpha \frac{dh_p}{dt} + c \cdot h_p = F_э \qquad (2)$$

где c – коэффициент жесткости пружины; h_p – величина регулятора расхода. $F_{уп}$ – сила пружины. α – коэффициент вязкого трения, зависящий от сорта масла.

Разделим каждый член уравнения (2) на C и введем следующие обозначения:

$$Т_к = \sqrt{\frac{m}{c}}\ ;\ Т_д = \frac{d}{c}\ ;\ К_Э = \frac{1}{С}\ ,$$

В результате математических преобразований получим математическую модель регулятора расхода с электромагнитным управлением:

$$Т_к^2\ \frac{d^2hp}{dt^2} + Т_д\ \frac{dhp}{dt} + hp = K_Э F_{эт} \qquad (3)$$

где $Т_к$ – постоянная времени, соответствующая колебаниям в переходном режиме; $Т_д$ – постоянная времени, соответствующая демпфмированию колебаний в переходном режиме; $K_Э$ – коэффициент усиления электромагнита.

Решение математической модели регулятора расхода с электромагнитным управлением позволяет произвести расчет его массо-геометрических параметров, необходимых для их

проектирования и изготовления, а также провести статические и динамические исследование характеристик регулятора расхода [3].

Заключение.

1. Разработана оригинальная автоматическая система контроля износа сверла путем регулирования его подачи на автоматических линиях, позволяющая достичь повышения производительности и стойкости инструмента.

2. Разработана математическая модель основного элемента регулятора расхода с электромагнитным управлением, позволяющая произвести расчет массо-геометрических и режимных параметров, необходимых для качественного его проектирования и изготовления.

3. Разработанная автоматическая система управления после внесения соответствующих изменений может применятся также для контроля износа инструмента в других металлорежущих станках.

ЛИТЕРАТУРА

1. Корсаков В.С. Точность механической обработки / В. С. Корсаков. М.: Машгиз, 1961. 420 с.
2. Балакшин Б.С. Самопостраивающиеся станки / Б.С. Балакшин.М.: Машиностроение, 1970. 407 с.
3. Муслимов А.П. Автоматическое управление технологическими процессами в машиностроении / А.П. Муслимов, В.Б. Васильев М.: КРСУ, 2018. 258 с.

УДК 004.942, 539.3, 621.039

Р.В. Федоренко, А.В. Лукин
Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого(*)

АНАЛИЗ ВЛИЯНИЯ УПРОЧНЕНИЯ НА ДИАГРАММУ ПРИСПОСОБЛЯЕМОСТИ ТЕРМОЦИКЛИЧЕСКИ НАГРУЖАЕМОГО СОСУДА ПОД ДАВЛЕНИЕМ

Введение. В работе 1979 года Д.А. Гохфельда и О.Ф. Чернявского [0] первая фраза предисловия звучит следующим образом: «Проблема оценки прочности конструкций, испытывающих повторные воздействия механических нагрузок и тепловых потоков, приобрела в последнее время большую актуальность». В настоящий момент данные вопросы остаются не менее актуальными, при этом применение современных методов вычислительной механики значительно расширяет круг возможных решаемых задач, позволяющих обосновывать прочность ответственных элементов конструкций. Особенно ярко проблема обеспечения прочности конструкции под действием термосиловых циклических нагрузок проявляет себя при проектировании реакторных установок (на быстрых нейтронах, высокотемпературные газоохлаждаемые реакторы и др.), рабочая температура которых превышает 450-500°C [0,0]. В работах [0,2] и [0,0] изложены основы теории приспособляемости, одним из результатов которой является определение границ зон характерного поведения конструкции при повторных нагружениях.

В силу сложности решения задач теории пластичности с учетом упрочнения материала теория приспособляемости сформулирована для идеально пластического материала. Современные программные комплексы численного моделирования, например, использующие метод конечных элементов (МКЭ), позволяют решать задачи приспособляемости сложных конструкций с учетом упрочнения материала. Кроме того, современные нормы проектирования атомных станций [0,0] допускают использование МКЭ подхода в случае необходимости снижения консерватизма оценки прочности конструкций с целью обеспечения

(*) Р.В. Федоренко, fedorenko_rv@spbstu.ru

общей прочности. Данная работа посвящена оценке влияния механизма упрочнения на общую приспособляемость конструкции.

Целью работы является оценка приспособляемости сосуда в условиях термосилового нагружения с учетом различных механизмов упрочнения.

Механизмы упрочнения материала. Классические работы в области теории пластичности [0,0] выделяют два характерных механизма упрочнения тела: изотропный и кинематический (трансляционный).

Для изотропного механизма характерна изменяемость формы поверхности текучести в процессе нагружения с сохранением подобия. В девятимерном пространстве девиатора напряжений при использовании условия текучести Мизеса и теории течения данная поверхность представляет собой сферу некоторого радиуса, который соответствует текущему пределу текучести тела. В процессе циклического нагружения тела происходит изменение данного радиуса в силу упрочнения тела.

Становится очевидным, что данный механизм упрочнения не способен описать эффект Баушингера, который заключается в снижении предела текучести на сжатии на величину увеличившегося предела текучести на растяжение при первичном растяжении и последующем сжатии. Данный эффект хорошо наблюдается в различных экспериментах. Идеальный эффект Баушингера описывается механизмом кинематического упрочнения, для которого характерна неизменность формы и размера поверхности текучести в пространстве напряжений, но сама поверхность может изменять свое положение в пространстве, следуя за точкой нагружения.

В реальном материале наблюдается смешанный механизм упрочнения, сочетающий в себе эффекты изотропного и кинематического упрочнений. Моделей описания смешанного упрочнения множество, например [0-0], которую можно назвать моделью Новожилова-Кадашевича-Шабоша. Согласно данным источникам, возникновение неидеального эффекта Баушингера в материале связано с возникновением микронапряжений в материале, которые описываются составляющей кинематического упрочнения.

Основные соотношения. Решение поставленной задачи проводится с применением программного средства конечно-элементного анализа *Abaqus*, в котором заложены соотношения теории течения и условие текучести Мизеса, и существует возможность введения в модель материала всех механизмов упрочнения. Механизм смешанного упрочнения описывается с использованием модели нелинейного кинематического упрочнения [0-0].

Условие текучести Мизеса описывается соотношением

$$\sqrt{\frac{3}{2}(\boldsymbol{\sigma}' - \boldsymbol{X}) : (\boldsymbol{\sigma}' - \boldsymbol{X})} - R - \sigma_{y,0} = 0, \qquad (1)$$

где $\boldsymbol{\sigma}'$ - девиатор тензора напряжений, $\sigma_{y,0}$ – начальный предел текучести материала, $\boldsymbol{X}$ и R – переменные, описывающие эффекты кинематического и изотропного упрочнения, соответственно.

Доля изотропной составляющей упрочнения закон изменения формы поверхности текучести может быть описан с помощью соотношения в форме закона нелинейного изотропного упрочнения Войса [0]:

$$\dot{R} = \sum_{i=1}^{Z} \dot{R}_i, \qquad \dot{R}_i = b_i\left(R_{\infty,i} - R_i\right)\dot{p}, \qquad (2)$$

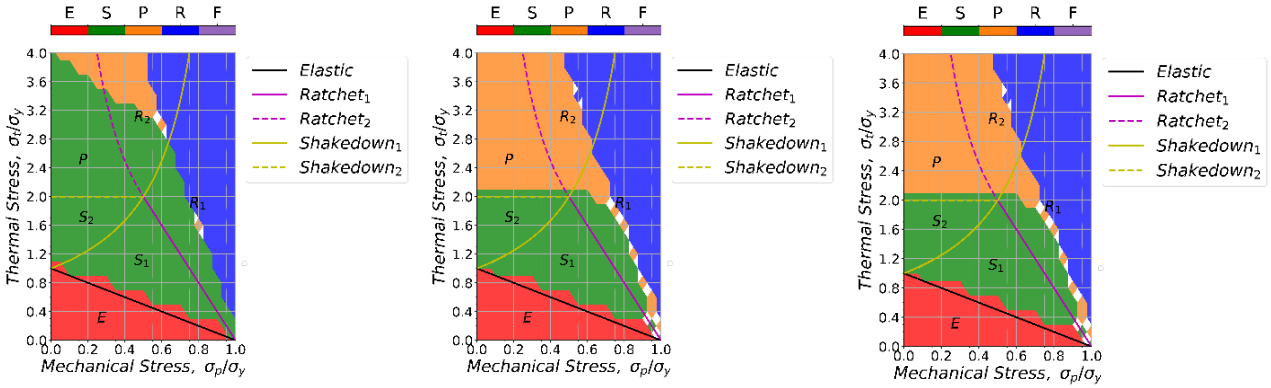
где $R_{\infty,i}$ – напряжение насыщения, b_i – скорость выхода на напряжение, p –накопленная пластическая деформация.

Составляющая кинематического упрочнения описывается с использованием модели Шабоша [0]:

$$\dot{\boldsymbol{X}} = \sum_{i=1}^{M} \dot{\boldsymbol{X}}_i, \qquad \dot{\boldsymbol{X}}_i = \frac{2}{3} C_i \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_{pl} - \gamma_i \boldsymbol{X}_i \dot{p}, \tag{3}$$

где C_i – модуль упрочнения, γ_i – параметр восстановления, который определяет скорость, с которой модуль упрочнения начинает уменьшаться по мере увеличения накопленной пластической деформации.

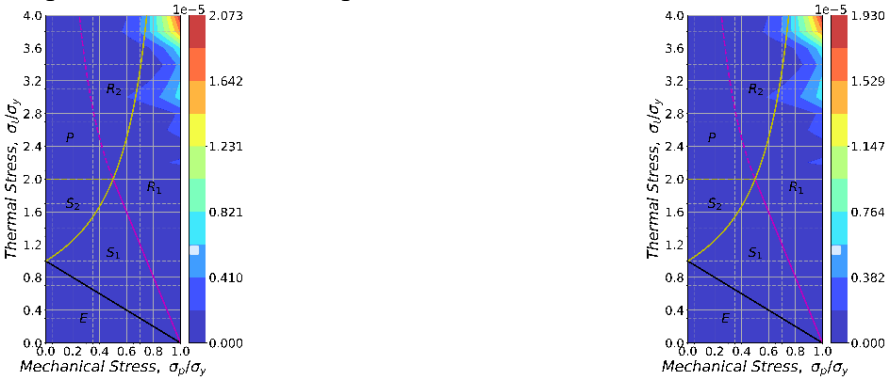
Решение задачи. Базовые аспекты задачи оценки приспособляемости представлены в работах [0] и [0]. Классическая задача решается в условиях идеально пластического тела. На рис 1 представлены результаты решения классической задачи приспособляемости с учетом различных механизмов упрочнения в виде диаграммы характерных зон поведения конструкции под действием термосилового нагружения.



а) изотропное упрочнение б) кинематическое упрочнение в) смешанное упрочнение

Рис. 1. Диаграммы приспособляемости с учетом упрочнения материала

На рис. 2 представлено распределение приращения пластической деформации между соседними циклами. Данная величина показывает величину накопленной деформации и используется в нормативных оценках прочности.



а) кинематическое упрочнение б) смешанное упрочнение

Рис. 2. Приращение пластической деформации между циклами

Заключение. Наличие предельного напряжения насыщения в случае кинематического и смешанного упрочнения ограничивает зону распространения упругой приспособляемости сосуда (S_1, S_2), что важно при оценке несущей способности конструкции. Использование изотропного упрочнения при такой оценке недопустимо в силу получения завышенных показателей прочности. В свою очередь механизмы кинематического и смешанного упрочнения показывают идентичные результаты на диаграмме приспособляемости. Отличие между ними наблюдается в абсолютных величинах получаемых деформаций в течение цикла, которые выше в случае использования смешанного упрочнения, что позволяет снизить

консерватизм оценки прочности по сравнению с использованием механизма кинематического упрочнения.

ЛИТЕРАТУРА

1. Гохфельд Д.А., Чернявский О.Ф. Несущая способность конструкции при повторных нагружениях. – М.: Машиностроение, 1979. – 263 с.
2. E.O. Adamov et al. Bystryj reaktor so svincovym teplonositelem BREST: ot koncepcii k realizacii tekhnologii [BREST fast reactor with lead coolant: from concept to technology implementation] // Atomnaya energiya. – 2020. – Vol. 129, №4. – pp. 185-194.
3. Shamanin I.V., Gavrilov P.M. Vysokotemperaturnye jadernye jenergeticheskie tehnologii [High-temperature nuclear energy technologies]// Izvestija Tomskogo politehnicheskogo universiteta. – 2010. – Vol.316, №4. - pp. 5-9.
4. Гохфельд Д.А. Несущая способность конструкций в условиях теплосмен. – М.: Машиностроение, 1970. – 260 с.
5. Bree J. Elastic-plastic behaviour of thin tubes subject to internal pressure and intermittent high-heat fluxes with application to fast nuclear reactor fuel elements // Journal of Strain Analysis. – 1967. – Vol. 2. – pp. 226-238.
6. ГОСТ Р 59115.10-2021. Обоснование прочности оборудования и трубопроводов атомных энергетических установок. Уточненный поверочный расчет на стадии проектирования. Национальный стандарт РФ, 2021.
7. ASME BPVC.III.5-2015. Division 5 – High Temperature Reactors.
8. Работнов Ю. Н. Механика деформируемого твердого тела. — М.: Наука, 1988. — 711 с.
9. Седов Л. И. Механика сплошной среды. — М.: Наука, 1994. — Т. 1. — 528 с., Т. 2. — 560 с.
10. Бондарь В.С. Неупругость. Варианты теории. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2004. – 144 с.
11. Кадашевич Ю.И., Новожилов В.В. Теория пластичности и ползучести металлов, учитывающая микронапряжения. – МТТ, 1981. - №5. – 99–110 с.
12. Ишлинский А.Ю. Общая теория пластичности с линейным упрочнением. – Укр. Матем. Ж. – 1954. – Т. 6. - №3. – 314–325 с.
13. Chaboche J.L. Time-independent constitutive theories for cyclic plasticity // Int. J. Plast. – 1986. – №2. – pp. 149–188.
14. Voce, E. The relationship between stress and strain for homogeneous deformations // J. Inst. Met. – 1948. – №74. – pp. 537–562.
15. Морозов Н.Ф., Федоренко Р.В., Лукин А.В. Численный метод анализа приспособляемости упруго-пластических тел при переменных нагрузках // Композиты и наноструктуры. – 2024. – Т.16, №1. – С. 69-84.

УДК 539.3, 539.42

М.М. Фролов[1], А.В. Савиковский[1,2], А.С. Семенов[1]
[1]Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого(*)
[2]Акционерное общество «Силовые машины - ЗТЛ, ЛМЗ, Электросила, Энергомашэкспорт»

МЕТОДЫ РАСЧЕТА ТРАЕКТОРИИ ТРЕЩИНЫ ПРИ ХРУПКОМ РАЗРУШЕНИИ: ПРЯМОЙ ПОДХОД И ТЕОРИЯ ФАЗОВОГО ПОЛЯ

Введение. В данной работе проводится сравнительный анализ двух методик расчета траектории распространения трещины. Первый подход – «прямой», основан на представлении трещины как линии разрыва поля перемещений. Траектория трещины в прямом подходе определяется с помощью дополнительного критерия [1], допускающего, как правило, формулировку относительно коэффициентов интенсивности напряжений (КИН). Второй

(*) М.М. Фролов, frolov.mm@bk.ru

подход основан на применении теории фазового поля [2], т.е. введении дополнительного непрерывного скалярного поля поврежденности и уравнения эволюции данного поля.

Целью работы является сравнение результатов расчетов процесса распространения трещины в изотропных линейно-упругих образцах различной геометрии, полученных с помощью указанных методов и с результатами аналогичных расчетов других авторов.

Прямой метод расчета траектории реализован авторами на языке ANSYS APDL, расчет на основе теории фазового поля – с помощью ПО Comsol Multiphysics.

Постановка задачи. Рассматривается распространение трещины в условиях смешанной моды разрушения в квазистатической постановке. Для расчета траектории прямым методом применяется расчетная методика, разработанная авторами в работе [1] – автоматизированная инкрементальная схема. Расчет траектории осуществляется с помощью следующих однопараметрических критериев:

1. Критерий максимальных окружных напряжений.

Отклонение трещины происходит в направлении максимальных окружных напряжений σ_θ в окрестности вершины трещины [3]:

$$\frac{\partial \sigma_\theta}{\partial \theta} = 0 \quad \rightarrow \quad K_I \sin\theta + K_{II}(3\cos\theta - 1) = 0\,. \tag{1}$$

2. Критерий максимума высвобождения энергии.

Трещина распространяется в направлении максимального высвобождения энергии деформации. В случае хрупкого разрушения в квазистатической постановке данное направление совпадает с направлением вектора потока энергии, поэтому в данных условиях критерий эквивалентен также критерию потока энергии и критерию J-интеграла [4]:

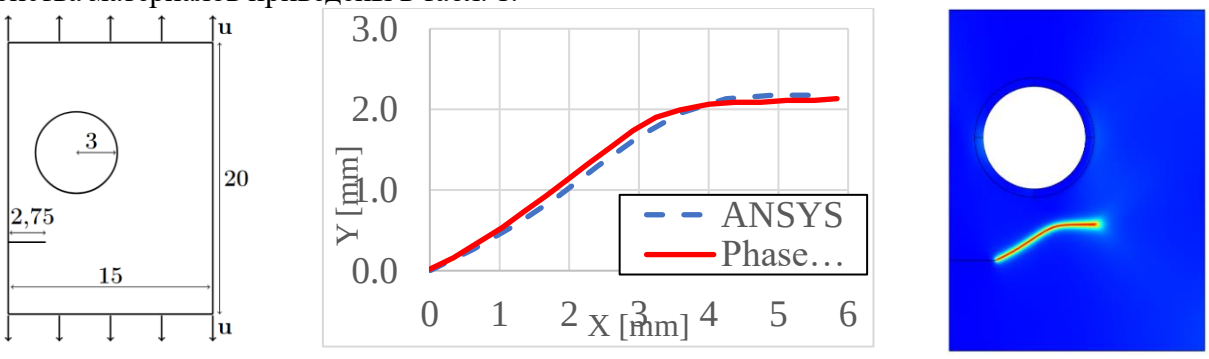
$$\operatorname{tg}\theta = \frac{J_2}{J_1} = -\frac{K_I K_{II}}{K_I^2 + K_{II}^2}, \qquad J_k = \int_\Gamma \left(w n_k - \boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{\sigma}\cdot\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathrm{x_k}} \right) d\Gamma\,. \tag{2}$$

Расчет траектории трещины методом фазового поля представляет собой решение смешанной задачи равновесия сплошной среды и эволюции повреждений [2]:

$$\nabla\cdot\boldsymbol{\sigma} + \boldsymbol{f} = \mathbf{0}, \qquad 2(1-d)\psi_0(\boldsymbol{\varepsilon}) - \frac{G_c}{l}(d - l^2\Delta d) = 0\,, \tag{3}$$

d – параметр поврежденности ($d = 0$ соответствует неповрежденному материалу), G_c – критическое выделение энергии, l – внутренний параметр масштаб, $\psi_0(\boldsymbol{\varepsilon})$ – свободная энергия неповрежденного материала, $\boldsymbol{f}$ – удельная массовая сила.

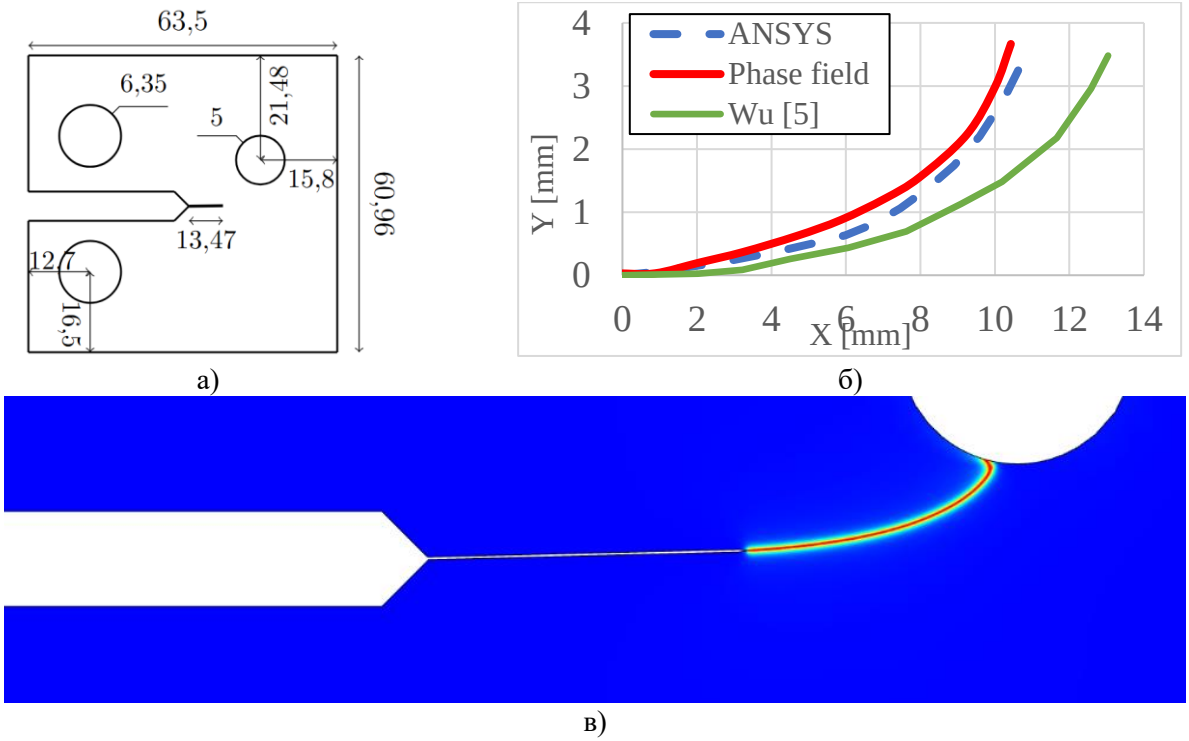
Результаты расчета. Сопоставление расчетных траекторий, полученных прямым методом на основе критериев (1), (2) и теории фазового поля (3) производится на двух модельных задачах: растяжение прямоугольной пластины с отверстием (рис. 1) и растяжение компактного образца с отверстием (рис. 2). Тип плоской задачи – плоское напряженное состояние. Механические свойства материалов приведены в табл. 1.



а) б) в)

Рис. 1. Задача о растяжении пластины с отверстием: а) расчетная схема, б) сравнение расчетных траекторий, в) траектория, полученная методом фазового поля

Для рассмотренных задач получены хорошо согласованные траектории трещины. Результаты расчета трещины для компактного образца также проведено сравнение с аналогичной задачей из работы [5]. Демонстрируемая автором этой работы траектория качественно согласуется с полученными в рамках настоящего исследования результатами, количественное различие может быть вызвано незначительной разницей в геометрии образцов и способе приложения нагрузок.



а) б)

в)

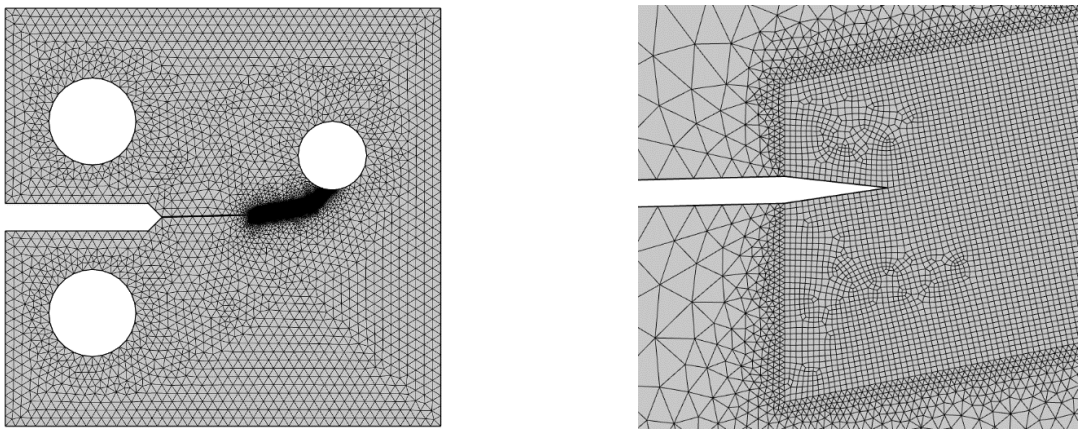
Рис. 2. Задача о растяжении компактного образца: а) расчетная схема, б) сравнение расчетных траекторий трещины с результатами из работы [5] в) траектория, полученная методом фазового поля

Метод прямого расчета имеет весьма ограниченную применимость из-за невозможности моделирования зарождения трещины, однако при расчете распространения одиночной трещины в условиях чисто механического нагружения он имеет значительные преимущества: существенно меньшее время расчета (в рассмотренных задачах прямой метод дает результат быстрее в 50-100 раз) и меньшую требовательность к мелкости и качеству конечно-элементной сетки. Последнее обстоятельство особенно существенно, т.к. для расчета трещины методом фазового поля необходима мелкая сетка в области распространения трещины (пример представлен на рис. 3), характерный размер которого не превышает $l/2$. При этом, метод расчета на основе теории фазового поля универсален и может быть применен в задачах любой физической природы.

Табл. 1. Свойства материалов для тестовых задач

Задача	Материал	E, МПа	ν	G_c, Н/мм	l, мм
Рис. 1а	-	6000	0,22	2,28	0,1
Рис. 2а	PMMA	2980	0,35	0,285	0,09

Удачный выбор области предполагаемого распространения трещины может уменьшить размерность конечно-элементной модели в разы, вследствие чего прямой метод может быть рекомендован в качестве предварительного этапа расчетов для определения зоны предполагаемого разрушения.



а) б)

Рис. 3. Конечно-элементная сетка для компактного образца: а) общий вид, б) локальное сгущение в области предполагаемого распространения трещины

Заключение. В работе рассмотрен процесс расчета траектории распространения трещины на основе прямого метода расчета траектории и теории фазового поля. Результаты расчетов согласуются между собой и с результатами других авторов. Метод прямого расчета, в силу своей простоты и экономичности, может быть рекомендован в качестве предварительного шага для определения области предполагаемого распространения трещины и уменьшения размерности конечно-элементной модели для последующего расчета на основе теории фазового поля.

ЛИТЕРАТУРА

1. Фролов М.М., Савиковский А.В., Семенов А.С. Анализ влияния критериев роста трещины на ее расчетную траекторию при хрупком разрушении // Неделя науки ФизМех. СПбПУ. Сборник материалов Всерос. научной конфю, 1–5 апреля 2024. СПб.: Политех-Пресс, СПбПУ, 2024. С. 93–96.
2. Miehe C., Welschinger F., Hofacker M. Thermodynamically Consistent Phase-field Models of Fracture: Variational Principles and Multi-field FE Implementations // International Journal for Numerical Methods in Engineering. – 2010. – Vol. 83(10). – P.1273-1311.
3. Erdogan F., Sih G.C. On the crack extension in plates under plane loading and transverse shear // Journal of Basic Engineering. – 1963. – P. 519-525.
4. Партон В.З., Морозов Е.М. Механика упругопластического разрушения – М.: Наука, 1985. – 504 с.
5. Chen W.-X., Wu J.-Y. Phase-field cohesive zone modeling of multi-physical fracture in solids and the open-source implementation in Comsol Multiphysics // Theoretical and Applied Fracture Mechanics. – 2022. –Vol. 117. – 103153.

УДК 539.37

Е.В. Ходырева[1], К.П. Фролова[1,2], Н.М. Бессонов[2]
[1]Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого(*)
[2]Институт проблем машиностроения РАН

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ ТЕРМО- И МАССОУПРУГОСТИ НА ОСНОВЕ ИЗМЕНЕНИЯ РАЗГРУЖЕННОЙ КОНФИГУРАЦИИ

Такие физические процессы как термическое воздействие, поглощение/испарение влаги или растворителя, изменение концентрации дополнительной примеси в теле и т.п. могут приводить к изменению напряженно-деформированного состояния материала. Как правило, учет такого влияния в задачах термо- и массоупругости (для краткости ограничимся далее термином «термоупругость») осуществляется посредством рассмотрения собственных (неупругих) деформаций, которые были бы в среде при отсутствии ее стеснения со стороны окружающей материи [1-3]. В работе предлагается иной подход, при котором в рассмотрение вводится разгруженная конфигурация, которую тело приобретает при нормальных условиях при снятии внешней нагрузки [4]. Такой подход представляется более общим и основывается на меньшем количестве исходных предположений.

В классическом случае определяющие уравнения для задачи термоупругости имеют вид [1-3]:

$$\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{\sigma}=\mathbf{0}, \tag{1}$$

$$\boldsymbol{\sigma}=-\mathrm{p}\mathbf{I}+\mathbf{S}, \tag{2}$$

$$\mathrm{p}=-K(\boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{u}+\alpha\mathrm{T}), \tag{3}$$

$$\mathbf{S}=G\left(\boldsymbol{\nabla}\mathbf{u}+\mathbf{u}\boldsymbol{\nabla}-\frac{2}{3}\mathbf{I}(\boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{u})\right), \tag{4}$$

где $\boldsymbol{\sigma}$ – тензор напряжений, p – давление, $\mathbf{I}$ – единичный тензор, $\mathbf{S}$ – девиатор тензора напряжений, α – коэффициент теплового расширения, T – приращение температуры относительно отсчетного значения, K – модуль объемного расширения, G – модуль сдвига.

Представим элементарный материальный объем как объем тетраэдра, образованного тройками векторов $\Delta\mathbf{R_k}$ и $\Delta\mathbf{r_k}$ $(\mathrm{k}=1,2,3)$ для разгруженной и актуальной конфигураций соответственно (рис. 1).

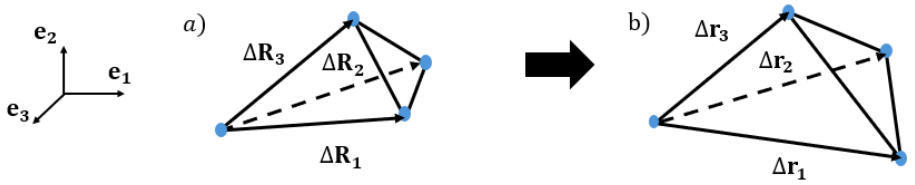


Рис. 1. Элементарный материальный объем: a) – разгруженная, b) – актуальная конфигурации

Для тетраэдра можно записать:

$$\mathrm{v}=\frac{1}{6}\Delta\mathbf{r_1}\cdot(\Delta\mathbf{r_2}\times\Delta\mathbf{r_3}), \tag{5}$$

$$\mathrm{V}=\frac{1}{6}\Delta\mathbf{R_1}\cdot(\Delta\mathbf{R_2}\times\Delta\mathbf{R_3}), \tag{6}$$

где V – объем разгруженного тетраэдра (рис.1a), v – объем актуального тетраэдра (рис.1b).

Как следует из практики, изменение температуры тела непосредственно ведет к изменению его объема, и, в данном случае, к изменению объема разгруженного тетраэдра V.

(*) Е.В.Ходырева, liza.khodyreva@gmail.com

Однако в классической постановке (выражение (3)) величина V не присутствует в явном виде, а влияние температуры на давление описывается отдельным слагаемым αT в правой части в (3). Чтобы явно внести объем разгруженного тетраэдра V в математическую постановку задачи, заменим формулу (3) на более общую [3]:

$$\mathrm{p} = -K\left(\frac{\mathrm{v}}{\mathrm{V}} - 1\right). \tag{7}$$

В предположении малых деформаций, малых значений α и в случае, когда температура изменяется в ограниченном диапазоне, можно принять линейную зависимость V от T:

$$\mathrm{V} = \mathrm{V}_0(1 + \alpha\mathrm{T}), \tag{8}$$

где V_0 – отсчетное значение V.

При использовании представления (8) справедлив переход:

$$\frac{\mathrm{v}}{\mathrm{V}} - 1 \approx \boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{u} + \alpha\mathrm{T}. \tag{9}$$

В таком случае формула (3) представляет собой частный случай формулы (7). Для металлов такие допущения, как правило, справедливы. Однако при больших перепадах температур даже для металлов необходимы поправки, и, в частности, для компенсации вводится зависимость величины α от температуры [5].

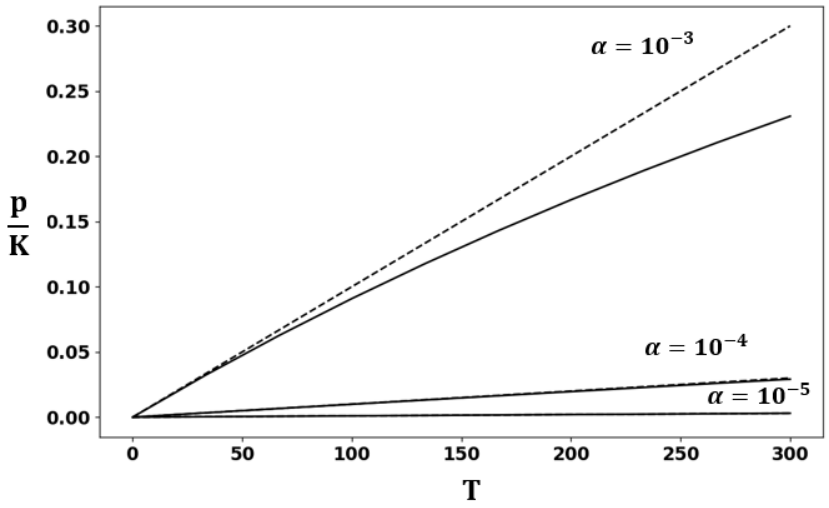


Рис. 2. Зависимость давления от температуры: пунктир – формула (3), сплошная линия – формула (7)

На рис. 2 показана зависимость безразмерного давления от температуры при разных значениях α, вычисленные по формуле (3) (при условии $\boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{u} = 0$) и по формуле (7). Видно, что при малых значениях температуры и коэффициента α приближение (9) действительно справедливо. В то же время при увеличении значения α и (или) температуры точность вычислений по формуле (3) начинает все сильнее уступать точности вычислений по формуле (7). Отметим, что формула (3) получена в рамках линейной теории термоупругости, когда предполагается малость изменений температуры. При этом значение коэффициента теплопроводности само по себе не ограничивается.

На рис. 3 показаны результаты расчета напряжений в прямоугольной пластине (2D сетка 250x50) под действием переменного градиента температуры. Давление рассчитывалось по формуле (7). Температуры поверхностей пластины изменялись в противофазе по синусоидальному закону (рис. 3d). Деформация пластины и ее прогрев осуществлялся в квазистационарной постановке. На рис. 3a и 3c показано распределение давления в пластине в моменты времени максимального изгиба. Последовательность рисунков 3a, 3b, 3c

показывает, как понижение (возрастание) температуры ведет к возникновению отрицательного (положительного) давления, приводящего к изгибу платины в соответствующую сторону.

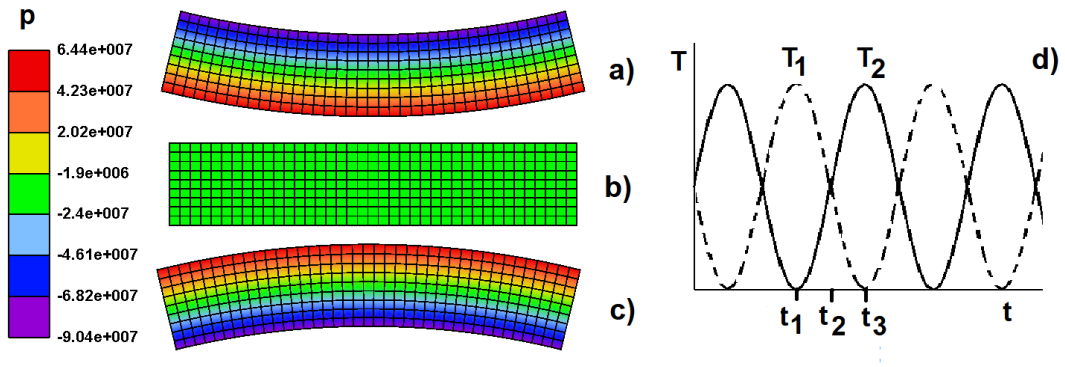


Рис. 3. Распределение давления в пластине (T_1 – температура верхней поверхности, T_2 – температура нижней поверхности): a) – $T_1 = min, T_2 = max$, b) – $T_1 = T_2$, c) $T_1 = max, T_2 = min$

Предложенный в работе подход позволяет осуществлять решение задачи термоупругости в более широком диапазоне температурных нагрузок по сравнению с классическим подходом. С вычислительной точки зрения использование предлагаемого подхода не вызывает дополнительных трудностей и позволяет рекомендовать его к практическому использованию.

Работа выполнена в рамках государственного задания ИПМаш РАН при поддержке Минобрнауки России.

ЛИТЕРАТУРА

1. Коваленко А.Д. Основы термоупругости: учеб. пособие. – Киев: Изд-во «Наукова Думка», 1970, - 309 с.
2. Князева А.Г. Теплофизические основы современных высокотемпературных технологий: учеб. пособие. – Томск: Изд-во Томского политехнического ун-та, 2009. - 356 с.
3. Пальмов В.А. Нелинейная механика деформируемых тел: учеб. пособие. – СПб.: Изд-во Политехн. ун-та, 2014. – 793 с.
4. Bessonov N.M., Golovashchenko S.F., Volpert V.A. Numerical Modelling of Contact Elastic-Plastic Flows // Mathematical Modelling of Natural Phenomena. – 2009. – Vol. 4. – №. 1. – P. 44–87.
5. Физические величины: справочник. М.: Энергоатомиздат, 1991. – 1231 с.

УДК 51-74

И.Д. Кочетков, Н.И. Зайцева
Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого(*)

МОДЕЛИРОВАНИЕ И ОПТИМИЗАЦИЯ СИСТЕМЫ РЕКУПЕРАЦИИ ЭНЕРГИИ В ЭЛЕКТРИЧЕСКОМ ТРАНСПОРТЕ

Введение. Эффективным методом снижения энергозатрат транспортного средства с электродвигателем является использование систем рекуперации энергии, например, системы рекуперативного торможения [1]. Для снижения расхода и оценки качества работы системы рекуперации можно перейти к рассмотрению следующей задачи: необходимо рассчитать оптимальный профиль скорости движения транспортного средства, при котором будут достигаться минимальные энергозатраты на ограниченном участке пути [2-4].

Предлагаемый подход к решению задачи. Для решения задачи оптимизации предлагается использовать модель транспортного средства, разработанную в среде Simulink с использованием пакета Simscape, модель настраивается и верифицируется по экспериментальным данным. Задаем входной профиль скорости (зависимость скорости транспортного средства от времени) и передаем его модель. Использование модели позволяет определить энергозатраты и оценить влияние эффекта рекуперации.

Описание электромеханической модели. Для движения автобуса с требуемой скоростью в модель был добавлен частотный преобразователь, который по входному профилю скорости подает ток с требуемой частотой на электродвигатель (рис. 1).



Рис. 1. Упрощенная схема модели

Задаем параметры электродвигателя и массу моделируемого транспортного средства. Настройка параметров частотного преобразователя и коэффициентов трения осуществляется по экспериментальным данным.

Постановка задачи. Для решения задачи оптимизации определяются параметры трапециевидного профиля, состоящего из трех участков: участка разгона, участка движения с постоянной скоростью (стационарного участка) и участка торможения (рис. 2).

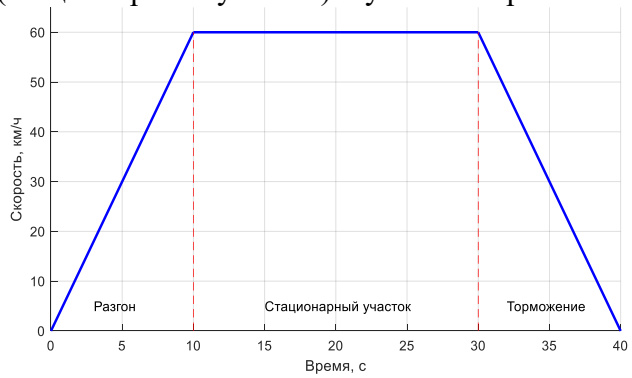


Рис. 2. Пример трапециевидного профиля скорости

(*) И.Д. Кочетков, K.Igor.D@yandex.ru

Чтобы профиль скорости соответствовал условиям эксплуатации, вводятся некоторые ограничения. Участки разгона и торможения являются участками равноускоренного и равнозамедленного движения соответственно, поэтому добавляются ограничения на ускорение:

$$0 \le a_{\text{разг}} \le a_{max}, \quad (1)$$

$$-a_{max} \le a_{\text{торм}} \le 0, \quad (2)$$

где $a_{max} \ge 0$ – предельное значение для ускорений на разгоне и на торможении.

Участки разгона и торможения связаны стационарным участком, на котором движение происходит со скоростью $v_{\text{стац}} = const$, добавляется ограничение на скорость:

$$v_{\text{стац}} \le v_{max}, \quad (3)$$

где $v_{max} \ge 0$ – максимально разрешенная скорость на участке движения.

Обозначим за $t_{\text{разг}}$ – длину участка разгона в секундах, за $t_{\text{стац}}$ – длину стационарного участка, за $t_{\text{торм}}$ – длину участка торможения. Пусть общее время t:

$$t = t_{\text{разг}} + t_{\text{стац}} + t_{\text{торм}}. \quad (4)$$

За время t необходимо проехать расстояние между двумя остановками $S = const$. Следовательно, появляется еще одно ограничение:

$$S = \int_0^t \upsilon(\tau)\, d\tau = const, \quad (5)$$

где $\upsilon(\tau)$ – скорость в момент времени τ.

Задаем начальное условие: $\upsilon(0) = 0$. В конечный момент времени t скорость $\upsilon(t) = 0$.

Исходя из всего вышеперечисленного, можно конкретизировать постановку задачи. Необходимо вычислить оптимальные параметры профиля скорости движения автобуса с электродвигателем с учетом ограничений (1), (2), (3) и (5), при котором функция цели имеет вид:

$$E(t) = \int_0^t P(\tau) d\tau \to min, \quad (6)$$

где $E(t)$ – затраченная энергия за время пути t, $P(\tau)$ – потребляемая мощность в момент времени τ. Считаем, что значения S и $\upsilon_{\text{стац}}$ для конкретной задачи зафиксированы.

Предложенный алгоритм решения задачи. Поставленная задача имеет ряд особенностей. Первой особенностью является невозможность полностью остановить транспортное средство рекуперативным торможением, так как при малых скоростях рекуперация не происходит. Соответственно, участок торможения разделяется на два участка: участок рекуперативного торможения и участок механического торможения. Для учета последнего предполагаем, что транспортное средство тормозит равнозамедленно, поэтому необходимо задать ускорение $a_{\text{мех. торм}}$, которое аналогично $a_{\text{торм}}$ должно удовлетворять условию (2). Вторая особенность связана с ограничением на расстояние (5): входной профиль скорости и профиль скорости модели будут отличаться, поэтому до запуска модели невозможно определить, какое расстояние будет преодолено транспортным средством.

Из трех неизвестных $t_{\text{разг}}$, $t_{\text{стац}}$, $t_{\text{торм}}$ две – независимые, что следует из (5). Решаем задачу методом полного перебора с переменным шагом. На каждом шаге запускаем модель с фиксированным $t_{\text{стац}}$, пересчитываем $t_{\text{стац}}$ с учетом (5): $t_{\text{стац}} = \frac{S - S_{\text{разг}} - S_{\text{рек}} - S_{\text{м.т.}}}{\upsilon_{\text{стац}}}$, запускаем модель с новыми параметрами профиля, вычисляем энергозатраты (6).

Анализ результатов. Поставленная задача решалась при разных начальных данных. В качестве примера рассмотрим решение, полученное для начальных данных, приближенных к реальным условиям: $S = 600$ м, $a_{max} = 2$ м/с^2, $\upsilon_{\text{стац}} = \upsilon_{max} = 60$ км/ч, $a_{\text{мех. торм}} = -0{,}5$ м/с^2. В результате был получен оптимальный профиль скорости, представленный на рисунке 3.

Применение предложенного алгоритма позволяет определить оптимальные параметры профиля скорости, при которых движение транспортного средства соответствует нормам безопасности; расчетное время движения соответствует экспериментальным данным.

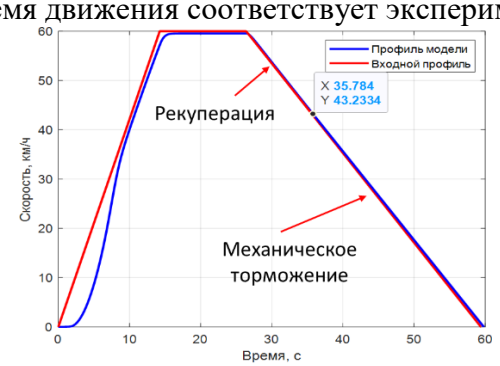


Рис. 3. Оптимальный профиль скорости

Использование представленного алгоритма позволяет дополнительно оценить зависимость энергозатрат и времени пути, и использование метода Монте-Карло позволяет провести исследование этой зависимости (рис. 4).

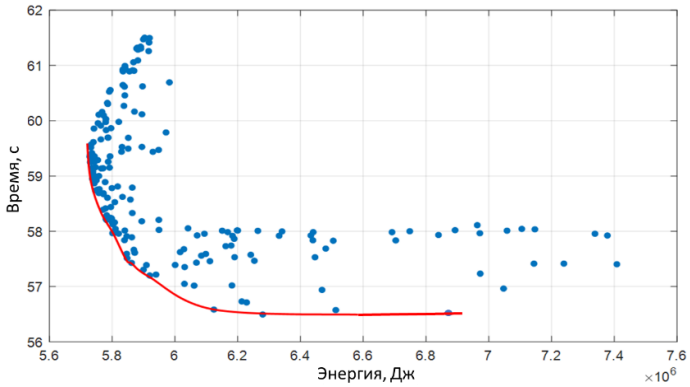


Рис. 4. Парето-фронт решений по энергии и по времени, $\upsilon_{\text{стац}} = 60$ км/ч

Таким образом, предложенный метод позволяет вычислить значения профиля так, чтобы и затраты энергии, и время движения были не очень большими. Но для выбора оптимальной точки необходимо вводить весовые коэффициенты, чтобы понять, какую точку из множества эффективных решений выбрать.

Заключение. В результате проведенного исследования была поставлена задача оптимизации профиля с ограничением на расстояние, был разработан алгоритм нахождения оптимальных параметров профиля скорости для минимизации энергозатрат. Особенностями разработанного подхода являются подбор параметров профиля на основе имеющихся ограничений, а не на основе стиля вождения и цикла езды, возможность проведения оптимизации профиля при движении между любыми остановками с любыми скоростными ограничениями, возможность оценивать временные затраты на заданном расстоянии.

ЛИТЕРАТУРА

1. Гусаков С.В., Марков В.А., Бехджуйан Х. Расчетные исследования автомобильной силовой установки с системой рекуперации энергии // Известия высших учебный заведений. Машиностроение. – 2016. – № 2. – С. 20-27.
2. Леонов, И.В. Снижение расхода энергии подъемно-транспортными машинами в цикле «разгон–торможение» // Известия высших учебный заведений. Машиностроение. – 2014. – № 1. – С. 17-23.
3. Von Srbik, M.T., Martinez-Botas, R.F. Vehicle optimisation for regenerative brake energy maximization // Sustainable Vehicle Technologies. – 2012. – P. 165-174.

4. Lv, C., Zhang, J., Li, Y., Yuan, Y. Novel control algorithm of braking energy regeneration system for an electric vehicle during safety–critical driving maneuvers // Energy Conversion and Management. – 2015. – Vol. 106. – P. 520-529.

УДК 51-72

А.А. Гольдберг, А.А. Елисеев
Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого(*)

ПОИСК ОПТИМАЛЬНЫХ ПАРАМЕТРОВ ГЕОДЕЗИЧЕСКОГО АЛГОРИТМА РАССТАНОВКИ КРЕПЕЖНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ

Оптимизация процесса сборки крыла самолета является одной из основных задач в аэрокосмической промышленности. На данный момент только часть производственных процессов механизирована и автоматизирована, многие этапы выполняются вручную (рис. 1). Для интенсификации производства на большинстве этапов сборки необходимо свести к минимуму количество временных крепежных элементов (далее ВКЭ) при сохранении качества конечного изделия.



Рис. 1. Процесс установки крепежных элементов, airbus.com.

Ранее для решения задачи о расстановке заданного числа ВКЭ по заданному набору отверстий был разработан геодезический алгоритм [1-3]. Этот новый подход к оптимизации расстановки ВКЭ позволяет избежать многократных вычислений целевой функции (критерия качества расстановки ВКЭ) за счет использования специфики процесса сборки крыла самолета [3].

Работу геодезического алгоритма можно разделить на три этапа.

Этап 1. Построение карт геодезических расстояний между отверстиями (рис. 2). Геодезическое расстояние представляет собой кратчайший путь по поверхности между двумя точками, оно вычисляется алгоритмом Дейкстры (с использованием очереди с приоритетами) [1].

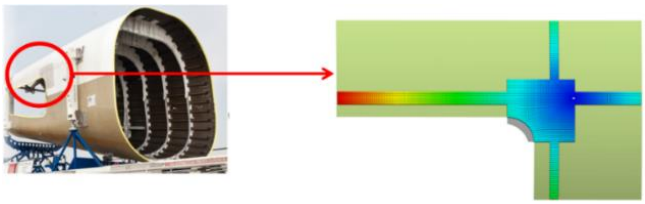


Рис. 2. Пример карты расстояний

Этап 2. Вычисление поля давлений λ, необходимого для сведения зазора до заданного значения.

(*)А.А. Гольдберг, artemiy.goldberg@mail.ru

На данном этапе выполняется решение контактной задачи, которая после формулировки в виде задачи квадратичного программирования [2] имеет следующий вид:

$$\left(\frac{1}{2}u^T K\, u\right), U = \{u: 0 \le g^{res} \le \delta\}, \quad (1)$$

где K – редуцированная матрица жесткости, g^{res} – зазор между деталями, u – вектор перемещений деталей, δ – параметр алгоритма, характеризующий максимально допустимый зазор между деталями. Поле давлений λ представляет собой поле контактных сил, возникающих при соприкосновении деталей, и оно может быть восстановлено по известным соотношениям на основе решения задачи (1).

Этап 3. Расстановка ВКЭ. На данном этапе предварительно для каждого отверстия вычисляется его "механический" вес *w*. Этот вес определяется при помощи специальной процедуры на основе поля давлений λ, вычисленного на Этапе 2 [1]. Далее расстановка ВКЭ строится итеративно по следующей процедуре.

Шаг 1. Первый ВКЭ устанавливается в отверстие с максимальным весом *w*.

Шаг 2. Перед выбором очередного ВКЭ для каждого незанятого отверстия вычисляется величина r_i, которая характеризует расстояние от данного отверстия до уже занятых крепежами:

$$r_i \equiv r(h_i) = \rho_g\left(h_i, \tilde{h}\right). \quad (2)$$

Здесь h_i – выбранное отверстие, H^0 – текущий набор занятых отверстий, ρ_g – геодезическое расстояние.

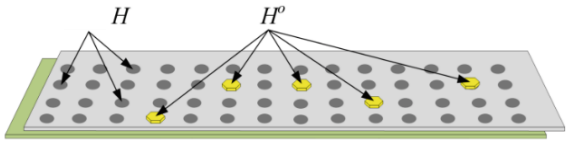


Рис. 3. Расстановка ВКЭ

Шаг 3. Очередное отверстие $\tilde{h}$, в которое будет установлен ВКЭ, определяется следующим образом:

$$\tilde{h} = arg\ arg\ \{w_i^{\alpha} \cdot r_i\}\ . \quad (3)$$

Здесь H – множество отверстий, в которые может быть установлен крепеж (рис. 3). Шаги 2 – 3 повторяются, пока размер получаемой расстановки H^0 не достигнет заданного значения N. Второй параметр геодезического алгоритма α позволяет регулировать баланс между механическими и геометрическими характеристиками отверстия, которые описываются весом w_i и величиной r_i соответственно.

В данной работе рассматривается задача поиска оптимальных значений параметров геодезического алгоритма α и δ. Для этого предварительно были получены таблицы, в ячейках которых находится значение функции цели – критерий качества полученной расстановки ВКЭ для выбранной пары значений α и δ. В качестве данного критерия использовалась вероятность дефекта при сборке, которая вычисляется следующим образом [1]:

$$P\left(\widetilde{H}\right) = \frac{\sum_{k=1}^{n_g} \sum_{i=1}^{n_u} \theta\left(g_i^{res}\left(g_k^0,\ \widetilde{H}\right) - g_*\right)}{n_g n_u},\ \theta(x) = \{1,\ x > 0\ 0,\ x \le 0\ , \quad (4)$$

где $g^{res}\left(g_k^0, \widetilde{H}\right)$ – зазор между деталями при заданном начальном зазоре g_k^0 и расстановке крепежа $\widetilde{H}$, g_* – допустимый зазор, n_g – число начальных зазоров, n_u – число узлов конечно-элементной модели. В работе для удобства рассматривается функция цели $1 - P\left(\widetilde{H}\right)$. Это связано с тем, что вероятность дефекта необходимо минимизировать, тогда как указанная функция должна достигнуть максимума.

Отметим, что на практике обычно известно только, в каких ячейках таблицы расположены одинаковые значения (они соответствуют одинаковым расстановкам ВКЭ). В связи с этим, в работе ставится задача за наименьшее число шагов по таблице найти

максимальное значение функции цели (шаг по таблице – вычисление точного значения функции цели в ячейке таблицы).

Итак, рассмотрим некоторую таблицу и построим на ее основе граф: вершиной будем называть множество клеток, которым соответствует одна и та же расстановка ВКЭ, а ребро между вершинами проводится тогда и только тогда, когда существуют две клетки, входящие в разные вершины, при этом имеющие общую сторону. В работе предлагается исследовать полученный граф и искать в нем вершину с максимальным значением функции цели по определенному алгоритму. Все версии алгоритма, которые были реализованы и протестированы, основываются на идее поиска в ширину [4].

Предлагаемый алгоритм состоит в следующем: обойдем данный граф в ширину, при этом начальную вершину будем выбирать случайным образом. Определив начальную вершину, “откроем” ее – то есть, вычислим в ней значение функции цели. Далее, на очередном шаге алгоритма будем открывать всех не открытых ранее соседей текущей вершины и будем двигаться в ту, в которой значение функции цели будет наибольшим.

Ясно, что при описанных действиях алгоритм рано или поздно остановится, поскольку будет достигнут либо локальный, либо глобальный максимум функции цели. В работе для тестирования алгоритма рассматривалось два набора таблиц: первый из них соответствовал модельной задаче, а второй – реальной задаче. Для таблиц из модельной задачи известно точное значение глобального максимума. Следовательно, после остановки алгоритма можно проверить, достигнуто ли данное значение, и при необходимости перезапустить алгоритм, выбрав новую начальную вершину. Таким образом, для таблиц из модельной задачи алгоритм завершается при достижении точного значения глобального максимума.

На практике глобальный максимум обычно неизвестен, поэтому для таблиц из реальной задачи алгоритм завершается при достижении ограничения на общее количество открытых вершин в графе. При этом, пока ограничение не достигнуто, при необходимости алгоритм перезапускается выбором новой начальной вершины.

Также в ходе исследования было предложено обобщить описанный алгоритм, введя в нем параметр k – количество вершин, которые открываются при запуске (или перезапуске) алгоритма. После открытия k вершин из них выбирается та, в которой значение функции цели оказывается наибольшим, а затем алгоритм следует описанным выше образом. Как показали численные эксперименты, введение параметра позволяет улучшить качество результатов разработанного алгоритма.

На рис. 4 приведены численные результаты, полученные для одной из таблиц из модельной задачи, которая порождает граф на 429 вершинах. На рисунке изображено сравнение результатов работы предложенного алгоритма с методом случайного поиска.

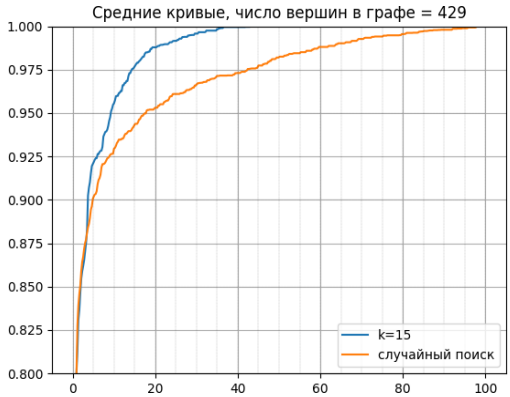


Рис. 4. Зависимость максимального вычисленного значения функции цели от количества вызовов функции цели (модельная задача)

Здесь приводится зависимость максимального вычисленного значения функции цели от текущего количества открытых вершин в графе. Данные приведены в относительных значениях: 0 по вертикальной оси означает минимум функции цели по таблице, а 1 – максимум. Также 100 по горизонтальной оси означает, что в графе открыты все вершины. Здесь изображены результаты, усредненные по 100 экспериментам, которые показывают, что кривая для разработанного алгоритма лежит заметно выше, чем кривая для случайного поиска. Это говорит о том, что разработанный алгоритм работает лучше, то есть, находит большие значения функции цели за одинаковое число вызовов функции. Также на модельных данных выполнялась настройка алгоритма по параметру *k*. Было получено, что оптимальное *k* лежит в диапазоне от 10 до 20 (в зависимости от таблицы), поэтому для реальной задачи было выбрано *k* равным 15.

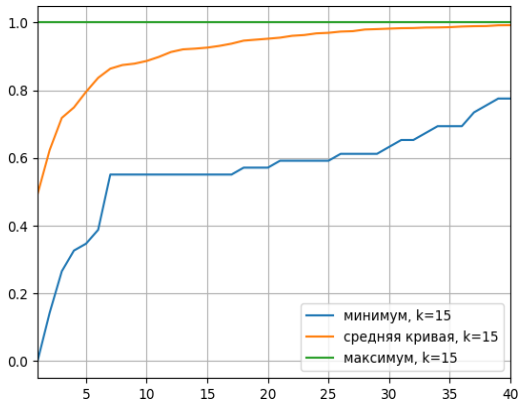


Рис. 5. Зависимость максимального вычисленного значения функции цели от количества вызовов функции цели (реальная задача)

Теперь рассмотрим результаты для реальной задачи. В данном случае для одной из таблиц в графе имелось 1605 вершин. На рис. 5 помимо усредненной кривой также приводятся лучший (максимум) и худший (минимум) случаи среди проведенных экспериментов. Горизонтальная ось здесь приведена в абсолютных величинах. Отметим, что при открытии 40 вершин алгоритм завершается. Было получено, что разработанный алгоритм в среднем находит величину, составляющую 99% от максимума, а в худшем случае дает результат в 78% от максимума, что является хорошим результатом.

Таким образом, в данной работе был разработан и протестирован алгоритм нахождения оптимальных параметров геодезического алгоритма расстановки временных крепежных элементов. Разработанный алгоритм работает значительно эффективнее, чем применявшийся ранее метод полного перебора. Как показали результаты численных экспериментов, алгоритм может быть успешно применен для решения практических задач.

Работа выполнена при поддержке гранта РНФ № 22-19-00062-П.

ЛИТЕРАТУРА

1. Погарская Т.А. Разработка методов выбора расположения и порядка установки временных крепежных элементов при математическом моделировании сборки авиационных конструкций: автореф. дис., канд. тех. наук. – СПб., 2021. – 18 с.
2. T. Pogarskaia, S. Lupuleac, E. Bonhomme. Novel Approach to Optimization of Fastener Pattern for Airframe Assembly Process // Procedia CIRP – 2020 – №93. – С. 1151–1157.
3. Lupuleac, S. and Pogarskaia, T. Geodesic algorithm: new approach to optimization of temporary fastener arrangement in airframe assembly process // Robotic Intelligence and Automation - 2024 - Vol. 44, No. 4 — pp. 501-515.
4. Томас Х. Кормен, Чарльз И. Лейзерсон, Рональд Л. Ривест, Клиффорд Штайн. Алгоритмы: построение и анализ // Introduction to Algorithms. – 2-е изд. – М.: "Вильямс", 2006. – С. 1296.

УДК 51-72

Р.А. Красников, М.В. Титова
Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого(*)

РАЗЛИЧНЫЕ ПОДХОДЫ К УСКОРЕНИЮ БЫСТРОГО ГРАДИЕНТНОГО МЕТОДА В ПРИМЕНЕНИИ К РЕШЕНИЮ ЗАДАЧ СБОРКИ

В процессе моделирования сборки авиационных конструкций для определения установившихся зазоров приходится решать серии контактных задач. Эти задачи могут быть формализованы как задачи на минимум функционала энергии при условии непроникновения, которые после дискретизации представляют собой задачи квадратичного программирования [1].

Для эффективного применения методов, использующих проекцию на множество допустимых точек (к которым относятся и исследованные в данной работе методы), целесообразно решать соответствующую задачу квадратичного программирования в двойственной постановке [2]:

$$-\frac{1}{2}\lambda^{\top}Q\lambda + p^{\top}\lambda + s \to max \qquad (1)$$
$$\lambda \geq 0.$$

Для решения задач (1) можно применять быстрый градиентный метод [3], имеющий в случае постоянного шага $h = 1/L$, а также некоторых других зафиксированных параметрах вид

$$\{x_{k+1} = P\left(y_k - \frac{1}{L}\nabla f(y_k)\right), y_{k+1} = x_{k+1} + \frac{1-\alpha_k}{1+\alpha_k}(x_{k+1} - x_k),$$

где $f(x)$ – минимизируемая функция, μ-строго выпуклая и с L-липшицевым градиентом (можно показать, что в случае квадратичной формы μ и L – наименьшее и наибольшее собственные числа матрицы Гессе), $\alpha_k \equiv \sqrt{c_f} = \sqrt{\mu/L}$. Однако, как показано в [4], для задачи без ограничений, параметр α_k можно выбирать более “жадным” образом. Так, для сходимости достаточно, чтобы на каждой итерации выполнялось

$$(\alpha_k^2 - \eta)||\nabla f(y_k)||_2^2 \leq \mu^2 \frac{\alpha_k(1-\alpha_k)}{1+\alpha_k}||x_k - v_k||_2^2.$$

Подход из [4] был обобщен на случай задачи с ограничениями и подробно описан в [5]. Отметим здесь, что этот подход основан на выборе α_k, удовлетворяющего кубическому неравенству $\psi_k(\alpha_k) \leq 0$. Характерный вид кубического полинома ψ_k представлен на рис. 1.

Отметим также, что выбор слишком больших α_k (например, $\alpha_k = r_k$), может приводить к вынужденному возврату к $\alpha_k \equiv \sqrt{c_f}$ и пересчету градиента целевой функции, что ведет к замедлению метода. Притом выбор α_k слишком близкого к $\sqrt{c_f}$ может вести к слишком незначительному ускорению метода. В данной работе предложены и протестированы два σ-параметрических семейства стратегий выбора α_k.

1. Основанная на точке минимума m_k функции ψ_k
$$M(\sigma): \alpha_k = (1-\sigma)\sqrt{c_f} + \sigma m_k$$
2. Основанная на нуле r_k функции ψ_k
$$R(\sigma): \alpha_k = (1-\sigma)\sqrt{c_f} + \sigma r_k$$

На рис. 2 представлено сравнение этих стратегий на задачах верхнего соединения крыла с фюзеляжем. Можно видеть, что с ростом σ происходит сначала ускорение метода (по числу

(*) Р.А. Красников, krasnikov.ra@gmail.com

обращений к процедуре вычисления градиента целевой функции), однако затем при слишком больших σ наблюдается тенденция к замедлению. Наилучшим (из протестированных) значением σ в обеих стратегиях оказывается 0.05. При этом стратегия $M(0.05)$ позволяет добиться ускорения приблизительно в 31%, а $R(0.05)$ – в 27%.

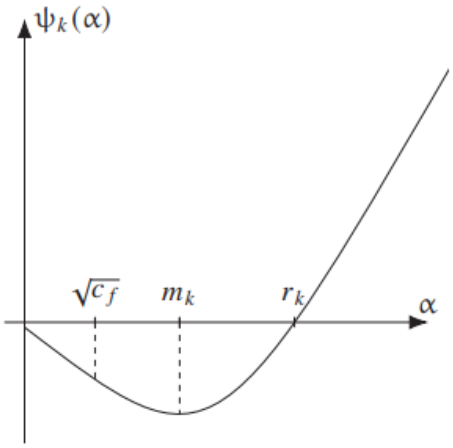


Рис. 1. Характерный вид кубического полинома ψ_k

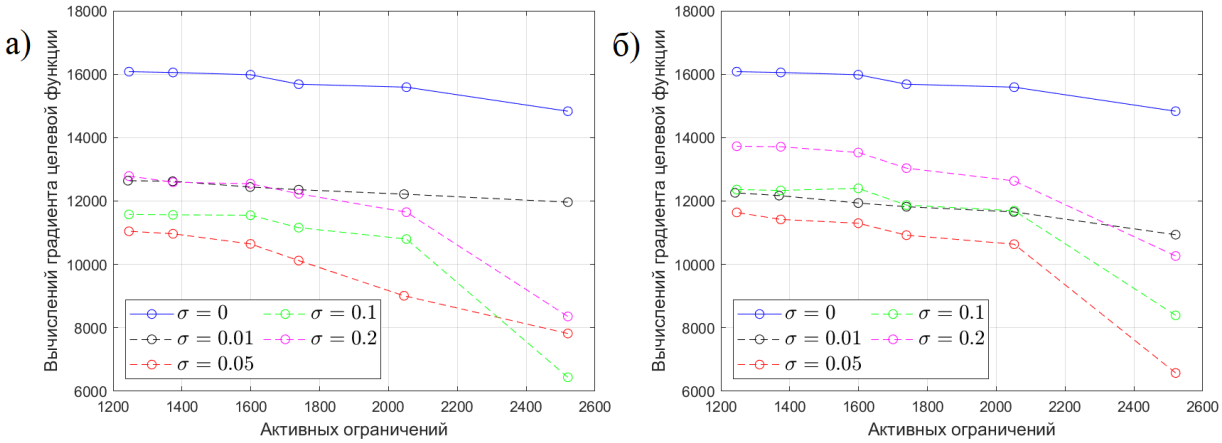


Рис. 2. Сравнение стратегий выбора α_k на задачах верхнего соединения крыла с фюзеляжем самолета Airbus A350 (2603 переменные): а – стратегия $M(\sigma)$, основанная на точке минимума m_k функции ψ_k, б – стратегия $R(\sigma)$, основанная на нуле r_k функции ψ_k

Другой подход к ускорению быстрого градиентного метода основан на переформулировке задачи с ограничениями в задачу глобальной минимизации *композитной целевой функции* $f(x) + g(x)$, где $f(x)$ – квадратичная форма, а

$$g(x) = \{0, x \geq 0 \; \infty, \text{иначе}.$$

Для таких задач оптимизации широко распространены проксимальные методы. В данных методах используется прокс-оператор [6], определенный по формуле

$$prox_g(z) = arg\ arg\ min\ _{x \in R^n} \left(g(x) + \frac{1}{2} ||x - z||_2^2 \right).$$

Отметим также, что для решаемых задач действие оператора $prox_g$ совпадает с действием оператора проектирования P. Однако, нетрудно видеть, что использование прокс-оператора вместо оператора проектирования дает более широкий класс методов.

Так, в качестве подхода к ускорению быстрого градиентного метода в данной работе рассмотрен “полностью неявный” быстрый градиентный метод – приближенный проксимальный алгоритм [7]. В нем на каждой итерации требуется приближенно вычислять

$$x_{k+1} \approx_\delta prox_{h_k(f+g)}(y_k),$$

где $\delta = \sqrt{1+\mu h_k}$, а приближенное равенство следует понимать в смысле

$$x \approx_\delta prox_g(y) \Leftrightarrow ||x + \nabla g(x) - y||_2 \leq \delta ||x - y||_2.$$

Для решаемых задач квадратичного программирования с $f(x) = \frac{1}{2}x^\top Qx - p^\top x$ это означает, что на каждой итерации решается задача квадратичного программирования

$$\frac{1}{2}x^\top Qx - p^\top x + \frac{1}{2h_k}||x - y_k||_2^2 \to min$$
$$x \geq 0.$$

Ясно, что эта задача – аналогичная задача квадратичного программирования, но с матрицей $Q + \frac{1}{h_k}E$, где E – единичная матрица, что обеспечивает улучшение обусловленности с ростом шага h_k. Однако, при слишком малом шаге может требоваться слишком много итераций для сходимости. Таким образом, шаг h_k в данном алгоритме требует рассмотрения отдельных подходов к его выбору.

Так, на рис. 3 представлена зависимость числа обращений к процедуре вычисления градиента целевой функции от постоянного шага $h_k \equiv h$ на примере одной из задач верхнего соединения крыла с фюзеляжем. Можно видеть, что при $h \approx 30$ приближенный проксимальный алгоритм сходится быстрее классического быстрого градиентного метода приблизительно на 16%.

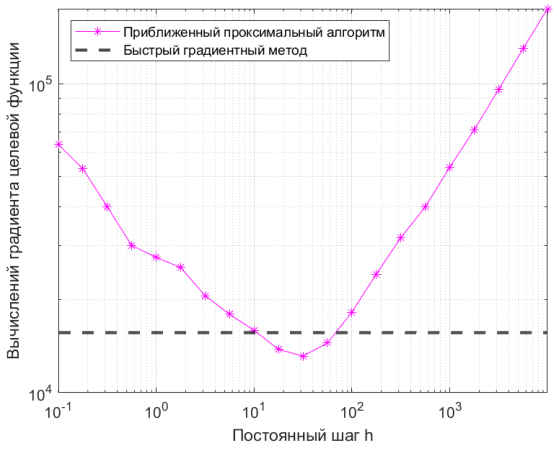


Рис. 3. О выборе постоянного шага в приближенном проксимальном алгоритме на примере задачи верхнего соединения крыла с фюзеляжем самолета Airbus A350 (2603 переменные, 1739 активных ограничений)

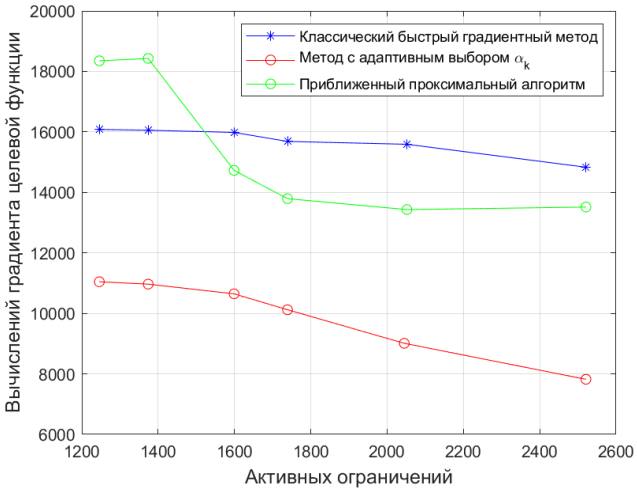


Рис. 4. Сравнение методов по числу обращений к процедуре вычисления градиента целевой функции при решении задач верхнего соединения крыла с фюзеляжем самолета Airbus A350 (2603 переменные)

Сравнение рассмотренных в работе методов по числу обращений к процедуре вычисления градиента целевой функции представлено на рис. 4. Отметим, что для двух задач с меньшим числом активных ограничений приближенный проксимальный алгоритм с постоянным шагом сходится несколько дольше классического быстрого градиентного метода.

Таким образом, в работе рассмотрены 2 подхода к ускорению быстрого градиентного метода. Первый подход связан с адаптивным выбором параметра α_k и по результатам

численных экспериментов при удачном выборе σ может ускорять классический быстрый градиентный метод на 30%. Второй подход основан на использовании приближенного проксимального алгоритма, как обобщения быстрого градиентного метода для глобальной оптимизации композитной целевой функции. В нем вместо решения одной плохо обусловленной задачи решается последовательность хорошо обусловленных задач. Такой подход позволяет улучшить численную устойчивость алгоритма и, в случае удачного выбора шага, может ускорять классический быстрый градиентный метод на 16%.

Работа выполнена при поддержке гранта РНФ № 22-19-00062-П.

ЛИТЕРАТУРА

1. Stefanova M., Minevich O., Baklanov S., Petukhova M., Lupuleac S., Grigor'ev B., Kokkolaras M., Convex optimization techniques in compliant assembly simulation // Springer Nature. – 2020. – Vol. 24. – P. 1666-1690
2. Красников Р.А., Титова М.В., Бакланов С.М. Исследование быстрого градиентного метода применительно к задачам сборки / Неделя науки ФизМех: Сборник материалов Всероссийской научной конференции, 01-05 апреля, 2024 г. – СПб: ПОЛИТЕХ-ПРЕСС, 2024. – С.161-164.
3. Nesterov Yu. Lectures on convex optimization. Second edition. // Springer Nature. – 2018.
4. Meng X., Chen H. Accelerating Nesterov's method for strongly convex functions with Lipschitz gradient: tech. rep. / Stanford University. — Stanford, CA 94305, 2011. — 13 p.
5. Красников Р.А. Исследование быстрого градиентного метода применительно к задачам сборки: выпускная квалификационная работа бакалавра; специальность: 01.03.02 – прикладная математика и информатика. – СПб.: ФГАОУ ВО «СПбПУ», 2024. – 70 с.
6. Tseng P. On accelerated proximal gradient methods for convex-concave optimization. // SIAM J. Optim. – 2008.
7. d'Aspermont A., Scieur D., Taylor A. Acceleration Methods. // Foundations and Trends® in Optimization. – 2021. – Vol. 5, No. 1-2. – pp. 1-245.

УДК 519.63

Д.А. Петухов, М.Е. Фролов
Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого(*)

АДАПТИВНЫЕ АЛГОРИТМЫ РЕШЕНИЯ ПЛОСКИХ ЗАДАЧ ЛИНЕЙНОЙ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ С НЕСКОЛЬКИМИ МАТЕРИАЛАМИ НА ОСНОВЕ ЭЛЕМЕНТОВ РАВЬЯРА – ТОМА НУЛЕВОГО И ПЕРВОГО ПОРЯДКОВ

Современные прикладные задачи, как правило, решаются численно, в частности, при помощи метода конечных элементов (МКЭ). Этот подход приводит к тому, что в конечном результате расчетов, помимо ошибок модели, присутствуют ошибки дискретизации и вычислительная погрешность от использования итерационных методов решения. При анализе результатов важно отделять и надежно контролировать последние две ошибки. В связи с этим актуальны исследования методов апостериорного контроля точности приближенных решений. На данный момент наиболее подробно описаны апостериорные оценки, основанные на явном или неявном методе невязок; на свойстве суперсходимости; апостериорные оценки иерархического типа и ряд других (см., например [1] и цитируемую там литературу). Одними из перспективных и надежных являются оценки функционального типа (см., например, [1-6] и цитируемую там литературу), поскольку они применимы для широкого спектра аппроксимаций и не имеют в своей структуре констант, зависящих от сетки.

(*) Д.А. Петухов, d_a_petukhov@mail.ru

В рамках данного исследования, которое развивает работу [7], рассмотрена плоская задача линейной теории упругости с учетом нескольких материалов внутри расчетной области. Постановка задачи выглядит следующим образом:

$$\mathrm{Div}\sigma + \mathbf{f} = 0, \qquad \sigma = L\varepsilon, \qquad \varepsilon(\boldsymbol{u}) = \frac{1}{2}(\nabla \boldsymbol{u} + \nabla \boldsymbol{u}^T) \text{ в } \Omega;$$

$$\boldsymbol{u} = \boldsymbol{u}_d \text{ на } \Gamma_d \qquad \sigma \boldsymbol{n} = \boldsymbol{F} \text{ на } \Gamma_s,$$

где Ω – расчетная область в R^2; $\boldsymbol{f} \in \mathbb{L}_2(\Omega, R^2)$ – плотность объемных сил; L – тензор упругих модулей, причем $l_1^2|\varepsilon|^2 \le L\varepsilon : \varepsilon \le l_2^2|\varepsilon|^2$; σ – тензор напряжений; ε – тензор малых деформаций; $\boldsymbol{u}$ – поле перемещений; Γ_d,Γ_s – две непересекающиеся части границы Γ области Ω, причем $\Gamma_d \cup \Gamma_s = \Gamma$; $\boldsymbol{u}_d$ – заданные перемещения (например, нулевые при жестком закреплении); $\boldsymbol{F}$ – заданные поверхностные силы, действующие на границе (например, нулевые при свободной границе); $\boldsymbol{n}$ – внешняя нормаль к границе. Постановка рассматривается в обобщенном смысле, подробнее о соответствующих функциональных пространствах можно найти в монографии [2] или, в частности, в недавней статье [7].

Для задач линейной теории упругости апостериорная оценка функционального типа выглядит следующим образом (см. [2]):

$$|||\boldsymbol{u} - \boldsymbol{v}|||^2 = \int_\Omega L\varepsilon(\boldsymbol{u} - \boldsymbol{v}) : \varepsilon(\boldsymbol{u} - \boldsymbol{v})\, d\Omega \le \widehat{M}_{LE}^2(\boldsymbol{v}, \tau, \beta_1, \beta_2) := (1 + \beta_1)|||\tau_{sym} - L\varepsilon(\boldsymbol{v})|||_*^2 +$$

$$+ \left(1 + \frac{1}{\beta_1}\right)(1 + \beta_2)C^2(\|\mathrm{Div}\,\tau + \mathbf{f}\|^2 + \|\boldsymbol{F} - \tau\boldsymbol{n}\|^2) + \left(1 + \frac{1}{\beta_1}\right)\left(1 + \frac{1}{\beta_2}\right)\left(\frac{C_{\Omega\Gamma_d}}{l_1}\right)^2 \|\tau_{sk}\|^2,$$

где $\widehat{M}_{LE}$ – мажоранта погрешности приближенного решения $\mathbf{v}$; $\boldsymbol{u}$ – точное решение; τ_{sym},τ_{sk}– симметричная и кососимметричная части свободного тензора τ; $C, C_{\Omega\Gamma_d}$ – независящие от сетки константы; β_1 и β_2 – положительные параметры; $\|\cdots\|$ – единое обозначение для норм в пространстве Лебега суммируемых с квадратом функции.

Оптимальные значения параметров β_1 и β_2 при заданном τ определяются по следующим формулам:

$$\beta_1 = \frac{C\sqrt{\|\mathrm{Div}\,\tau + \mathbf{f}\|^2 + \|\boldsymbol{F} - \tau\boldsymbol{n}\|^2} + C_{\Omega\Gamma_d}\|\tau_{sk}\|/l_1}{|||\tau_{sym} - L\varepsilon(\boldsymbol{v})|||_*},$$

$$\beta_2 = \frac{C_{\Omega\Gamma_d}\|\tau_{sk}\|/l_1}{C\sqrt{\|\mathrm{Div}\,\tau + \mathbf{f}\|^2 + \|\boldsymbol{F} - \tau\boldsymbol{n}\|^2}}.$$

Норма $|||\cdots|||_*$ в мажоранте определяется следующим образом:

$$|||\tau|||_* := \left(\int_\Omega L^{-1}\tau : \tau\, d\Omega\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Основной характеристикой адекватности апостериорных оценок является индекс эффективности $I_{eff} = \widehat{M}_{LE} / |||\boldsymbol{u} - \boldsymbol{v}|||$, который отражает то, насколько сильно значение мажоранты $\widehat{M}_{LE}$ переоценивает истинную величину ошибки, и имеет ли место недооценка.

Свободный тензор τ необходимо аппроксимировать элементами, характерными для смешанных МКЭ [5, 6], иначе может возрастать переоценка величины погрешности в результате адаптации сетки (см. [3, 5]). В представляемой работе свободный тензор τ аппроксимирован элементами Равьяра-Тома [8] нулевого (RT0) и первого (RT1) порядка.

Рассмотрим один из примеров, дополняющих работу [7]. В нем расчетная область разбита на три подобласти (рис. 1).

Каждой подобласти присвоены свои упругие свойства материала. Для подобласти I модуль Юнга равен 70 ГПа, коэффициент Пуассона – 0.34. Подобласть II имеет модуль Юнга 210 ГПа, коэффициент Пуассона – 0.30. В подобласти III задается модуль Юнга – 110 ГПа, коэффициент Пуассона – 0.35. Вся область жестко закреплена по границе. Массовая сила задается через ускорение свободного падения $(0, -9.8)^T$ м/с^2.

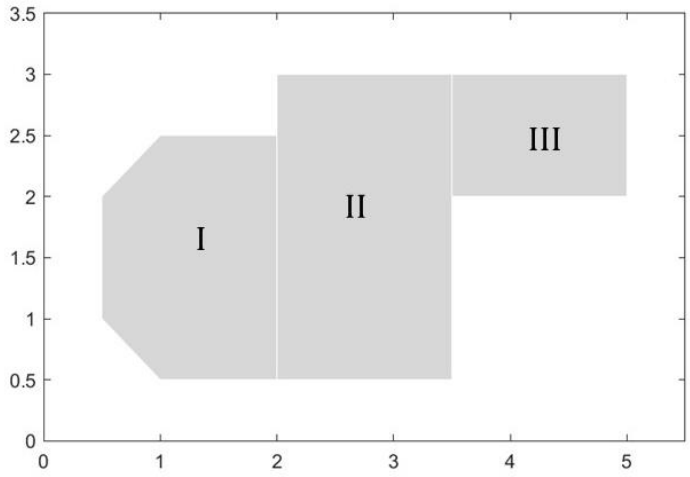


Рис. 1. Расчетная область с тремя подобластями

Сравнение результатов работы алгоритмов решения на основе апостериорных оценок функционального типа представлено в табл. 1. Узлы сеток, полученные после адаптации, приведены на рис. 2.

Табл. 1. Результаты работы адаптивных алгоритмов с применением элементов RT0 и RT1

RT0				RT1			
Кол-во узлов	Кол-во элементов	Ошибка,%	I_{eff}	Кол-во узлов	Кол-во элементов	Ошибка,%	I_{eff}
96	153	25.81	2.16	96	153	25.81	1.23
359	640	14.29	2.06	331	588	14.81	1.20
1438	2711	7.45	2.05	1215	2274	7.97	1.18
5847	11348	3.79	2.03	4227	8147	4.34	1.15

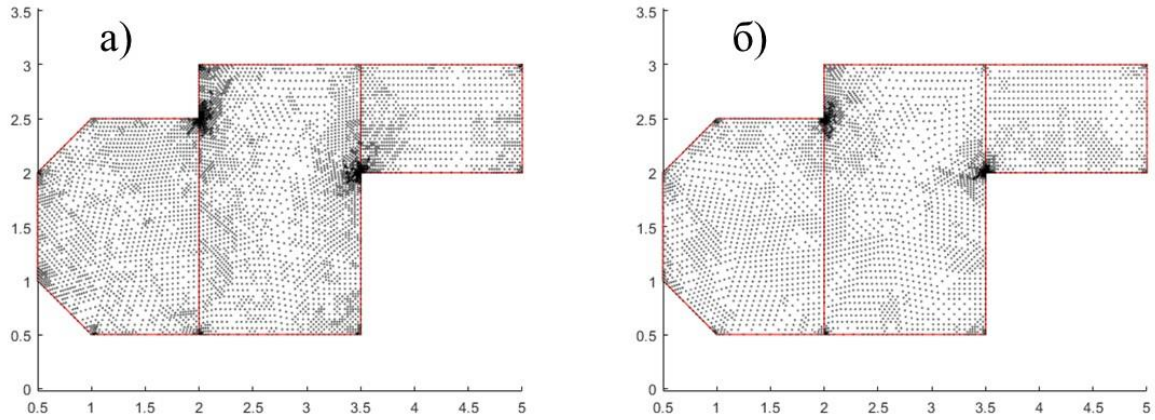


Рис. 2. Узлы сеток после адаптации при использовании RT0 (а) и RT1 (б)

Из анализа результатов следует, что использование элементов RT1 позволяет существенно снизить переоценку погрешности решения по сравнению с элементами RT0. Это дает возможность более своевременно остановить процесс вычисления решения при достижении им необходимой точности. Например, для RT0 на последней сетке оценка

погрешности покажет точность менее 95% из-за переоценки, тогда как для RT1 алгоритм покажет, что точность в 95% достигнута.

Отметим, что элементы RT1 для рассматриваемой задачи реализованы первым автором впервые в пакете MATLAB, начиная с работы [7].

ЛИТЕРАТУРА

1. Mali O., Neittaanmäki P., Repin S. Accuracy verification methods: theory and algorithms. –Springer Dordrecht, 2014.
2. Repin S.I. A posteriori estimates for partial differential equations. – Walter de Gruyter Berlin New York, 2008. – 316 p.
3. Muzalevsky A.V., Repin S.I. On two-sided error estimates for approximate solutions of problems in the linear theory of elasticity // Russ. J. Numer. Anal. – 2003. – Vol. 18 (1). – P. 65-85
4. Repin S.I., Sauter S.A. Accuracy of mathematical models. – European Mathematical Society Berlin, 2020. – 317 p.
5. Фролов М.Е. Применение функциональных оценок погрешности со смешанными аппроксимациями к плоским задачам линейной теории упругости // Журнал вычислительной математики и математической физики. – 2013. – Т. 53. – № 7. – С. 1178-1191.
6. Фролов М.Е., Чурилова М.А. Адаптация сеток на основе функциональных апостериорных оценок с аппроксимацией Равьяра–Тома // Журнал вычислительной математики и математической физики. – 2012. – Т. 52. – № 7. – С. 1277-1288.
7. Петухов Д.А., Фролов М.Е. Сравнение адаптивных алгоритмов решения плоских задач линейной теории упругости на основе элементов Равьяра–Тома нулевого и первого порядков // Научно-технические ведомости СПбГПУ. Физико-математические науки. – 2024. – Т. 17. – № 4. – С. 161-174.
8. Raviart P.A., Thomas J.M. A mixed finite element for second order elliptic problems / Lecture Notes in Mathematics. – Springer Verlag Berlin-Heidelberg, 1977. – Vol. 606. – P. 292-315.

УДК 51-73

А.В. Афанасьев, А.Н. Баженов
Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого(*)

МЕТОД ТЕЙЛА-СЕНА. ИНТЕРВАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ

Работа посвящена исследованию экспериментальных данных диагностики томсоновского рассеяния на токамаке Глобус-М2 с учетом погрешностей измерения. Для этого применяются методы интервального анализа и медианная регрессия Тейла–Сена, позволяющие более робастно оценивать температуру электронов даже при наличии шумов и выбросов в данных.

Наиболее распространенные методы статистической обработки данных (такие как метод наименьших квадратов) чувствительны к выбросам и не учитывают полноценно погрешности измерений. В случае анализа экспериментов с большими ошибками измерений важно использовать робастные подходы, позволяющие надежно оценивать параметры. Одним из таких методов является **метод Тейла–Сена**, в котором для построения регрессионной зависимости применяются медианные оценки. Интервальный анализ, используемый в работе, дает возможность учитывать погрешности, представляя каждую экспериментальную точку в виде интервала. Таким образом, даже при наличии существенных шумов и выбросов можно достовернее определить характер зависимости (линейной или иной) между исследуемыми переменными.

(*) А.В. Афанасьев, afanasyev239@gmail.com

В литературе [1] показана эффективность медианных методов при анализе некорректных и зашумленных данных. Совмещение идей интервального анализа с медианными методами позволяет повысить надежность статистических выводов, что особенно важно в физическом эксперименте с большими погрешностями.

Цели и задачи работы состоят в анализе данных диагностики томсоновского рассеяния на токамаке «Глобус-М2» с учетом погрешностей измерений, чтобы проверить гипотезу о совпадении величины температуры электронов при двух разных длинах волн лазерного излучения. Для этого формируются интервальные выборки, где каждый результат хранится не как точка, а как интервал со своим центром и радиусом, отражающим ошибку. Далее реализуются наиболее известные алгоритмы, позволяющие вычислять медианные оценки (Крейновича и Пролубникова) [2] и применять расширенный метод Тейла–Сена к интервальным данным [3] [4]. Параллельно исследуется степень совместности (пересечения) отдельных интервалов, а также оценка вариабельности: если совокупность интервалов оказывается пустой, можно выявить подвыборки, максимизирующие пересечение. В описании методов исследования делается акцент на медианные принципы регрессии, где наклон и смещение прямой определяются через медианы всех возможных пар (в классическом случае) либо всех пар «брусов» (в интервальном случае).

Введем следующее определение интервала: $\mathbf{x} = \{x \in \mathbb{R} \mid \underline{\mathbf{x}} \le x \le \overline{\mathbf{x}}\}$, $\mathbb{IR}$ – множество всех интервалов на $\mathbb{R}$. Тогда арифметические операции для $\forall \mathbf{a} \in \mathbb{IR}$ и $\forall \mathbf{b} \in \mathbb{IR}$ определяются следующим образом: $\mathbf{a} \star \mathbf{b} = a \star b \mid a \in \mathbf{a}, b \in \mathbf{b}$, где $\star \in \{+, -, *, /\}$. Пересечение интервалов: $\mathbf{x} \cap \mathbf{y} = [\max\{\underline{\mathbf{x}}, \underline{\mathbf{y}}\}, \min\{\overline{\mathbf{x}}, \overline{\mathbf{y}}\}]$. Объединение интервалов: $\mathbf{x} \cup \mathbf{y} = [\min\{\underline{\mathbf{x}}, \underline{\mathbf{y}}\}, \max\{\overline{\mathbf{x}}, \overline{\mathbf{y}}\}]$. Центр интервала: $\mathrm{mid}\mathbf{x} = \frac{1}{2}(\underline{\mathbf{x}} + \overline{\mathbf{x}})$. Радиус интервала: $\mathrm{rad}\mathbf{x} = \frac{1}{2}(\overline{\mathbf{x}} - \underline{\mathbf{x}})$. Ширина интервала: $\mathrm{wid}\mathbf{x} = \overline{\mathbf{x}} - \underline{\mathbf{x}}$.

На рис. 1 представлен пример данных из одного набора. Для удобства на график также нанесена прямая $T_{47} = T_{64}$, т.к. это ожидаемая зависимость. В начале были выбраны значения для T_{64}, затем рассчитаны концы интервалов значений с учетом ошибки: $T_{64} \pm T_{64\mathrm{err}}$, которые затем были отображены на графике при фиксированных T_{47}. Аналогично было выполнено и для T_{47}. На рис.2 приведен график с отображенными медианами и значениями.

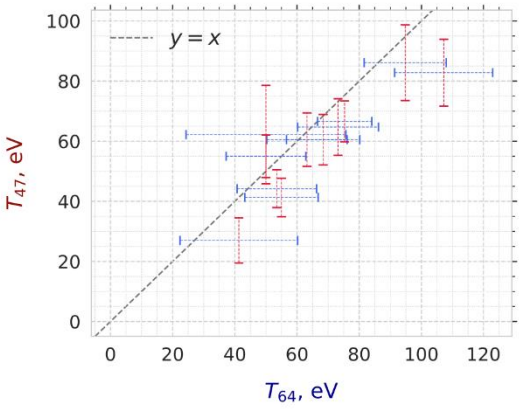


Рис. 1. Данные из первого набора

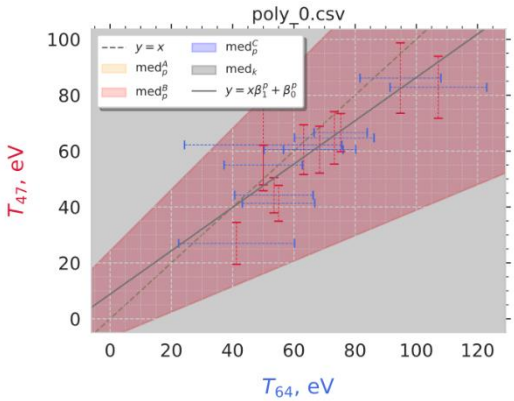


Рис. 2. Результат для первого набора данных. Прямая $y = x$ – ожидаемая зависимость. med_k – медиана Крейновича. $med_p^A, med_p^B, med_p^C$ – медианы Пролубникова. Заштрихованные области отражают интервалы значений, даваемые этими медианами.

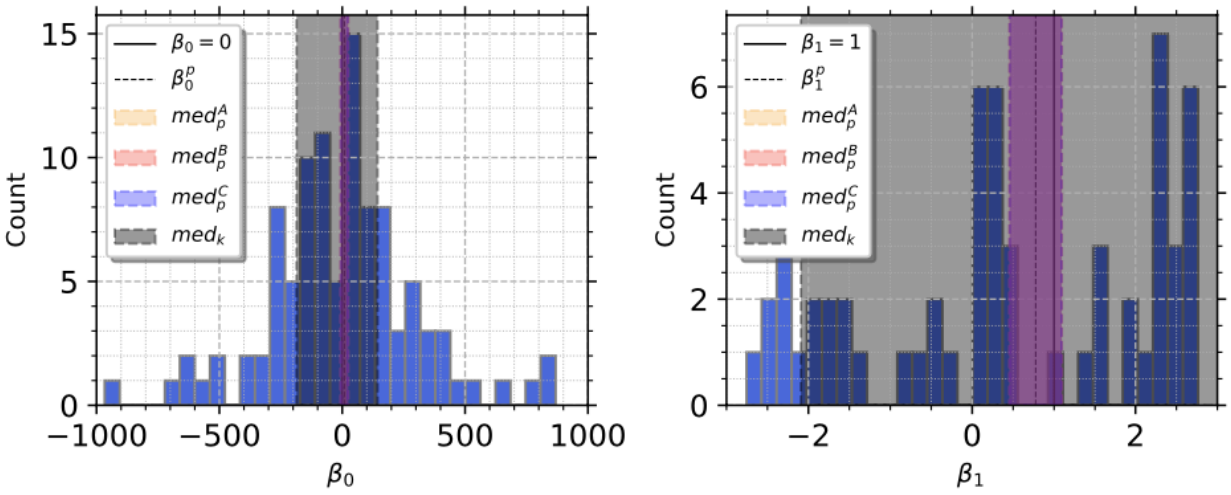


Рис. 3. Гистограммы для первого набора данных

На рис. 3 отображены гистограммы для коэффициентов β_0 и β_1, где β_1 – медиана всех наклонов, вычисленных по парам точек, а свободный член β_0 – медиана пересечений соответствующих прямых с осью y.

На рис. 4 приведены результаты для первого набора данных, где для выборки X медианы Пролубникова имеют типы: $med_p^A X = \frac{\tilde{x}_m + \tilde{x}_{m+1}}{2}$, $med_p^B X = \frac{\tilde{x}_m + \tilde{x}_{m+1}}{2} \cap (\tilde{x}_m \cup \tilde{x}_{m+1})$, $med_p^C X = \tilde{x}_m \cap \tilde{x}_{m+1}$, где $\tilde{x}_m \in \tilde{X}$ – значение варианты, для которой первая половина вариант из $\tilde{X}$ с учетом их частот лежит слева, а вторая половина справа. Из графиков и из таблицы видно, что медиана Пролубникова дает более узкую область в сравнении с медианой Крейновича.

Медианы для набора poly_0

Медиана	β_0	β_1
Поточечная	0.78	8.81
med_p^A	[0.46, 1.1]	[−6.7, 24.3]
med_p^B	[0.46, 1.1]	[−6.7, 24.3]
med_p^C	[0.46, 1.1]	[−6.7, 24.3]
med_k	[−186.12, 144.04]	[−2.09, 3.32]

Рис. 4. Медианы для первого набора данных

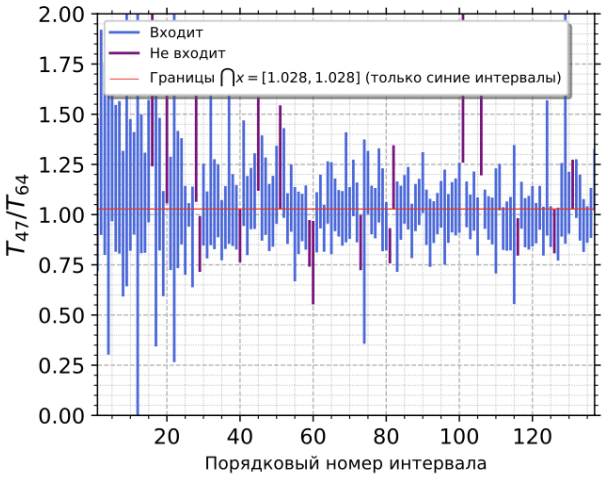


Рис. 5. Точечная оценка совместности

Также были вычислена мода, частота и другие оценки. Анализ каждой отдельной выборки и общей выборки позволяет сделать вывод, что общая выборка несовместна.

На рис.6 отображен график частот всех отдельных выборок и объединенной выборки. Здесь также отображены моды для каждой из подвыборок и объединенной выборки.

Исследования позволили установить, что медиана Крейновича формирует более широкий коридор значений, что позволяет сделать вывод о неспособности этой конструкции однозначно определить значение. Использование медианы Пролубникова позволяет значительно уменьшить коридор даже на частичных (сильно ограниченных) данных.

Объединение данных в одну общую выборку позволило добиться уменьшение размера коридоров для всех рассматриваемых методов. Кроме того, в процессе исследования была найдена точечная оценка и была оценена вариабельность.

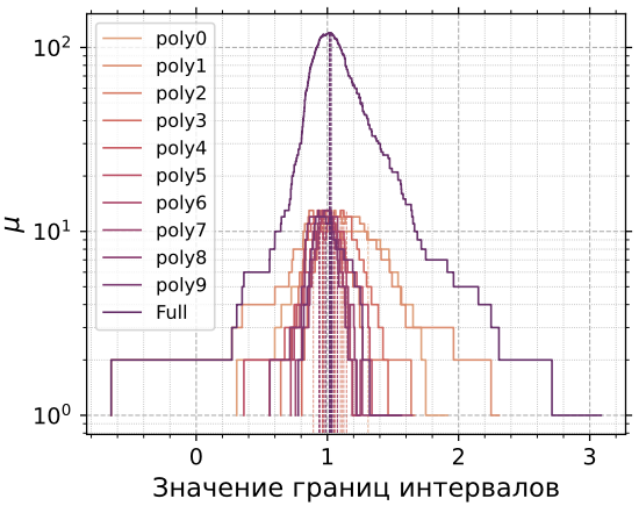


Рис. 6. График частот для всех отдельных выборок и объединенной выборки

Основным результатом данной работы является то, что использование метода Пролубникова может давать положительные результаты даже в случае сильно ограниченных выборок. Сравнение с методом Крейновича указывает на более высокую робастность медианы Пролубникова.

Основной целью данного анализа было проверить равенство значений температуры, полученных при двух различных способах измерения. Иными словами, проверяется равенство $\frac{T_{47}}{T_{64}} = 1$. Часть расчетов показала, что в определенном диапазоне величины T_{47} и T_{64} оказываются близки друг к другу и дают медианные оценки, близкие к единице. Также при объединении выборок было показано, что объединение выборок дает несовместную выборку. Такой результат говорит о том, что в эксперименте есть неучтенные погрешности.

ЛИТЕРАТУРА

1. Баженов А.Н., Жилин С.И., Кумков С.И., Шарый С.П. Обработка и анализ данных с интервальной неопределенностью. – НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2024. – 356с.
2. Пролубников А. Медиана интервальных данных // Вычислительные технологии. 2024. — Т. 29, № 4. — С. 55—70.
3. Sen P. K. Estimates of the regression coefficient based on Kendall’s tau // Journal of the American statistical association. — 1968. — Т. 63, № 324. — С. 1379—1389.
4. Theil H. A rank-invariant method of linear and polynomial regression analysis // Indagationes mathematicae. — 1950. — Т. 12, № 85. — С. 173.

УДК 51–73

С.А. Бабахина[1,2], А.Н. Баженов[1,2]
[1]Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого(*)
[2]Физико-технический институт им. А. Ф. Иоффе

ПРИМЕНЕНИЕ ИНТЕРВАЛЬНЫХ АРИФМЕТИК ДЛЯ ОБРАБОТКИ И АНАЛИЗА СИГНАЛОВ ТОМСОНОВСКОГО РАССЕЯНИЯ

Введение. Обработка и анализ данных с высоким уровнем зашумленности требуют применения методов, способных учитывать неопределенность измерений и неоднородность самих данных. В данной работе рассматривается применение интервальных методов для анализа сигналов, регистрируемых приборами томсоновского рассеяния, где каждый фрейм данных характеризуется индивидуальными параметрами ячеек памяти. Целями данной работы являются получение калибровочных коэффициентов β_0 и β_1 каждой ячейки микросхемы DRS4 (Domino Ring Sampler) и восстановление формы входного сигнала.

Предварительные сведения об установке. Запись сигнала осуществляется с помощью микросхемы быстрой аналоговой памяти PSI DRS4, имеющей 8 каналов по 1024 ячейки. Каждая ячейка содержит конденсатор для хранения заряда и электронный ключ для записи и считывания сигналов через АЦП (аналогово-цифровой преобразователь). Ячейки объединены в кольцевые буферы. При синхронизации запись прекращается, фиксируя номер последней ячейки. Для калибровки на вход подаются эталонные сигналы постоянной величины, результаты обработки которых позволяют вычислить интервалы значений калибровочных коэффициентов и восстановить форму сигналов [1].

Постановка задачи интервальной линейной регрессии. Отношение входного и выходного сигналов моделируется линейной зависимостью. Таким образом, калибровка прибора сводится к определению параметров линейной регрессии β_0 и β_1. Каждая ячейка микросхемы DRS4 $\boldsymbol{x_{ij}}$, где $i \in (1, \dots, 8)$; $j \in (1, \dots, 1024)$, уникальна и требует индивидуального расчета параметров интервальной линейной регрессии. Полученные калибровочные коэффициенты (2 x 8 x 1024 = 16384 для одного устройства LIDAR) сохраняются в памяти и затем используются для восстановления сигнала LIDAR (Light Detection and Ranging) [1] – [2]. Коэффициенты β_0 и β_1 для каждой ячейки из набора могут быть получены решением ИСЛАУ (интервальная система линейных алгебраических уравнений) следующего вида:

$$X \cdot \boldsymbol{\beta_{ij}} = \boldsymbol{Y_{ij}}, \quad (1)$$

где X – матрица линейных признаков, составленная по уровням измерения входного сигнала; $\boldsymbol{\beta_{ij}}$ – вектор неизвестных коэффициентов регрессии для ячейки $\boldsymbol{x_{ij}}$; $\boldsymbol{Y_{ij}}$ - интервальный вектор-столбец правой части. Особый интерес при составлении системы представляет $\boldsymbol{Y_{ij}}$, который необходимо получить из результатов измерения входного сигнала. Предлагается следующий вариант составления $\boldsymbol{Y_{ij}}$ для некоторой ячейки $\boldsymbol{x_{ij}}$: выбирается ячейка $\boldsymbol{x_{ij}}$ из набора в каждом из фреймов записи, и формируется массив значений $\boldsymbol{x_{ij}}$ (эталонных измерений для каждой ячейки получаем набор из 100 измерений входного уровня в кодах). На полученном массиве некоторым образом берутся внешняя и внутренняя оценки (более точные определения будут приведены далее в разделе «Предварительная обработка данных»). Оценки выбираются для одной и той же ячейки по всем уровням и формируется два вектора-столбца размерности 1 x N, где N – число уровней измерения входного сигнала. Затем по полученным интервальным векторам-столбцам формируются две ИСЛАУ – по внутренним и внешним оценкам. По результатам решения систем получаем допусковые множества $\boldsymbol{\beta}$ – вычисленные по внутренним и по внешним оценкам.

(*) С.А. Бабахина, sofa301103@gmail.com

Определение. Допусковое множество решений [2] – [3]:

$$\Xi_{tol}(A,b) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid (\forall A \in A)(\exists b \in b)(Ax = b)\}, \textit{(2)}$$

Теорема. Пусть даны интервальная $m \times n$-матрица $\boldsymbol{A}$ и интервальный вектор правой части $\boldsymbol{b}$, а выражением (сформулирована и доказана в [2] – [3]):

$$Tol(x, \boldsymbol{A}, \boldsymbol{b}) = \min_{1 \le i \le m} \{rad\ b_i\ - |mid\ b_i - \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j|\ \}, \textit{(3)}$$

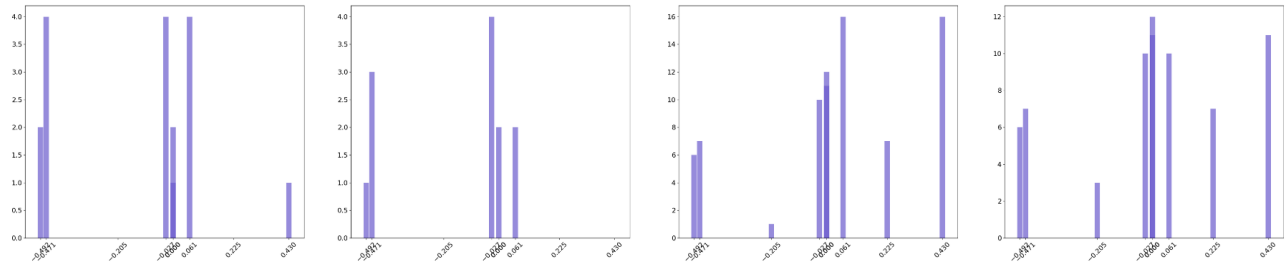
Определяется функционал Tol: $\mathbb{R}^n \times I\mathbb{R}^{m \times n} \times I\mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$, тогда принадлежность $x \in \Xi_{tol}(A,b)$ равносильна $Tol(x, \boldsymbol{A}, \boldsymbol{b}) \ge 0$, допусковое множество решений интервальной линейной системы $\boldsymbol{A}x = \boldsymbol{b}$ есть множество уровня функционала Tol:

$$\{x \in \mathbb{R}^n \mid Tol(x, A, b) \ge 0\}, \textit{(4)}$$

Наиболее предпочтительным будет получить коэффициенты решением системы по внутренним оценкам, т. к. коридор значений β в этом случае уже, и, следовательно, интервальная неопределенность ниже. Действительно, в некоторых случаях система по внутренним оценкам совместна, и мы можем в одно действие получить параметры регрессии. Однако в ситуации, когда система по внутренним оценкам несовместна, возникает необходимость провести процедуру коррекции ИСЛАУ - заменить строку внутренних оценок в вектор-столбце соответствующей строкой из вектор-столбца внешних оценок по номерам строк с отрицательным значением распознающего функционала.

Предварительная обработка данных. Данные сигнала зашумлены и имеют выбросы. Для построения оптимальных оценок и формирования правой части ИСЛАУ необходимо провести предобработку данных. Этим целям служат различные модификации бокс-плота Тьюки. Тогда внешние оценки будут соответствовать границам усов бокс-плота, а внутренние – 1 и 3 квантилям. В ходе работы было проведено исследование эффективности различных бокс-плотов: стандартного, MAD-бокс-плота, FQ-бокс-плота и бокс-плота на критерии Граббса (на робастной медиане) [4]. Ниже на графиках (рис. 1) представлены результаты отсеивания выбросов в одной и той же ячейке по уровням.

Подбор оптимального параметра для боксплота или некоторой его модификации является нетривиальной задачей. Тем не менее данные сигнала имеют асимметричное, преимущественно унимодальное распределение, следовательно, в качестве алгоритма для отсеивания выбросов имеет смысл выбрать наименее чувствительную модификацию - на критерии Граббса. Это объясняется тем, что для построения допусковых множеств ИСЛАУ интервалы в правой части должны быть достаточно узкими, но представительными и гарантировать разрешимость ИСЛАУ по внешним оценкам.



(а) Боксплот Тьюки (б) Боксплот Граббса (с) MAD-боксплот (с) FQ-боксплот

Рис. 1. Сравнение результатов отсеивания выбросов различными модификациями бокс-плота

Результаты решения ИСЛАУ. Ниже на рис. 2 представлены совместное расположение внутренних и внешних оценок по уровням, коридор совместных зависимостей β и допусковые множества ИСЛАУ. На рисунках под буквой (в) представлен случай, когда система несовместна на первом шаге: на верхнем изображении построено допусковое множество по внешним оценкам, на нижнем – множества по внешним и по внутренним (последнее расширено до внешних по номерам строк, в которых $Tol(\beta, A, b) \ge 0$).

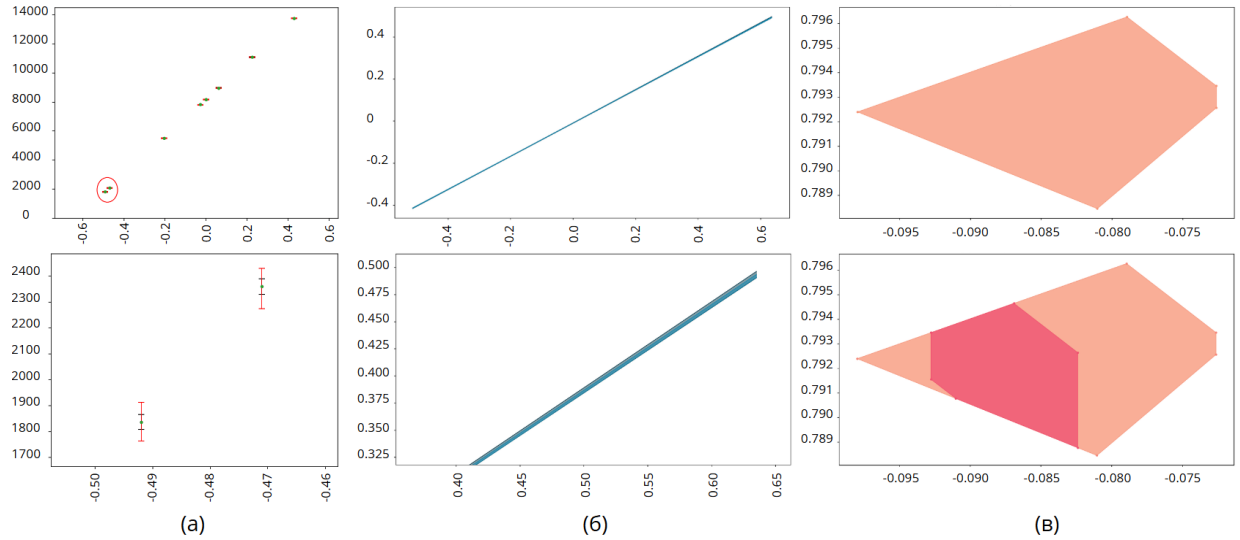


Рис. 2 (а) - внешние и внутренние оценки для некоторой ячейки; (б) - коридор совместных зависимостей β; (в) - Ξ_{tol} по внешним и внутренним оценкам (до и после коррекции правой части)

Восстановление сигнала. На выходе алгоритма, решающего ИСЛАУ (1) по внутренним и внешним оценкам, имеем два набора интервальных коэффициентов β, которые можно использовать для восстановления сигнала по обратной формуле:

$$x = \frac{y-\beta_0}{\beta_1}, \quad (5)$$

На рисунке ниже представлен результат восстановления формы сигнала с помощью полученных ранее коэффициентов.

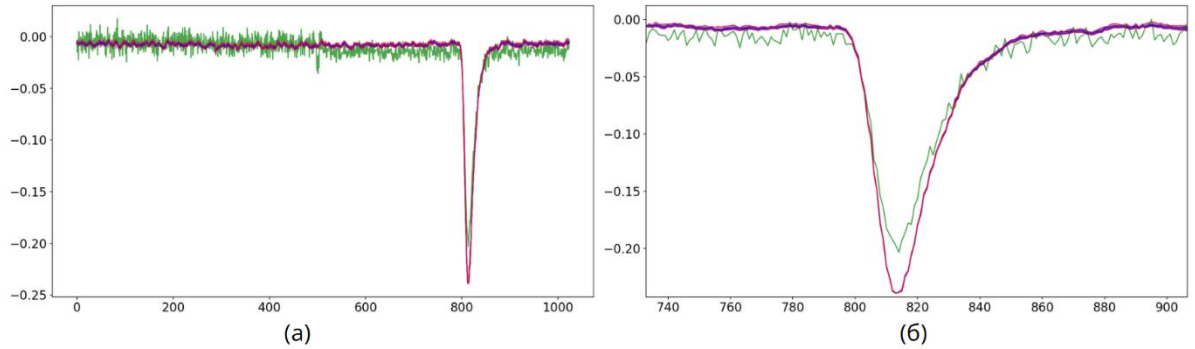


Рис. 3 Результаты восстановления сигнала по β: (а) – все данные, (б) – область сигнала

На графиках показано, что интервальный характер полученных калибровочных коэффициентов порождает интервальный характер восстановленного сигнала. Кроме того, наглядно представляется взаимное расположение коридоров, полученных с помощью систем по внешним и внутренним оценкам. Зеленой линией на обоих рисунках обозначен неоткалиброванный сигнал. Синий коридор – сигнал, восстановленный по коэффициентам, полученным из системы по внутренним оценкам, красный – по внешним. Графики демонстрируют эффективность применения обратного преобразования (5) с использованием вычисленных интервальных коэффициентов линейной регрессии в задаче по восстановлению формы сигнала.

Заключение. В работе продемонстрирована эффективность применения интервальной арифметики для обработки и анализа сигналов. Показано, что использование различных модификаций бокс-плота Тьюки позволяет повысить точность обработки данных. Результаты работы могут быть применены для анализа сигналов в различных областях, включая физику плазмы и обработку экспериментальных данных, например, для вычисления временных характеристик сигнала, таких как ширина на половине максимума.

ЛИТЕРАТУРА
1. Galli, L., Baldini, A.M., Cei, F., et al. 2019. Wave DAQ: A highly integrated trigger and data acquisition system. // Nuclear Instruments and Methods in Physics Research. Section A: Accelerators, Spectrometers, Detectors and Associated Equipment, 936, p.399-400.
2. T.Iavoruk, A.Bazhenov. The use of twice intervals estimations in the calibration process of LIDAR-based data. ICAPM 2025, Tokyo, April 10-12, 2025
3. А.Н.Баженов. Интервальный анализ. Основы теории и учебные примеры. СПбПУ. 2020.
4. K. Andrea, G.L. Shevlyakov. Outlier Detection With Boxplots Based On New Highly Efficient Robust Estimates Of Scale. СПБГПУ. 2013.

УДК 51-73

С.Д. Корпусова[1], А.Н. Баженов[1,2]
[1]Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого(*)
[2]Физико-технический институт им. А.Ф. Иоффе

ПРИМЕНЕНИЕ МАТРИЦЫ ОТНОШЕНИЙ ДЛЯ ПОСТРОЕНИЯ ГИСТОГРАММЫ И НАХОЖДЕНИЯ МОДЫ ИНТЕРВАЛЬНОЙ ВЫБОРКИ

Мода, как мера центральной тенденции, широко применяется в интервальном анализе данных благодаря простоте вычисления, интерпретируемости и применимости к любым типам данных. Важным свойством моды является ее устойчивость к выбросам, поскольку мода определяется частотой значений, а не их величиной. В работе [1] представлен алгоритм вычисления моды, основанный на наборе элементарных подынтервалов – участков вещественной оси, ограниченных концами интервалов выборки, идущими друг за другом.

Проблемы вычисления интервальной моды на основе элементарных подынтервалов. При работе с реальными данными мода может терять информативность, особенно при высокой точности измерений или значительном перекрытии интервалов, что обсуждается в публикации [2]. Рассмотрим два предельных случая.

Для наборов данных, содержащих действительные числа или интервальные значения при бесконечной или достаточно высокой точности, вероятность совпадения двух значений крайне мала. В ситуации, когда все значения уникальны или интервалы выборки настолько малы, что практически эквивалентны точечным значениям, определение моды становится проблематичным [3].

Рассмотрим такую ситуацию на примере. Пусть есть интервальная выборка $X_1 = \{[1,\ 1.3], [1.8, 2.2], [2.7, 3.5], [4, 4.3], [5, 5.8]\}$. Можно заметить, что интервалы в ней не пересекаются. Выделим элементарные подынтервалы, $W_1 = \{[1, 1.3], [1.3, 1.8], [1.8, 2.2], [2.2, 2.7], [2.7, 3.5], [3.5, 4], [4, 4.3], [4.3, 5], [5, 5.8]\}$

Согласно матрице отношений, можно построить график распределения частот, представленный на рис.1. Определить моду по этому графику в ее классическом понимании не представляется возможным.

В случае, когда интервалы выборки, напротив, пересекаются таким образом, что почти не отличаются друг от друга, на графике частот будет наблюдаться пик. В случае большого числа интервалов ширина моды будет очень мала по сравнению с шириной интервалов выборки, то есть мода станет нестабильной и нерелевантной оценкой [4].

Например, рассмотрим интервальную выборку $X_2 = \{[3, 5.5], [3.3, 4.4], [1, 4], [3.3, 5], [1, 3.5], [1.3, 5], [2, 5]\}$ с элементарными подынтервалами $W_2 =$

(*) С.Д. Корпусова, sophy-spb@yandex.ru

$\{[1, 1.3], [1.3, 2], [2, 3], [3, 3.3], [3.3, 3.5], [3.7, 3.8], [3.8, 4], [4, 4.4], [4.4, 5], [5, 5.5]\}$. Для данной выборки график распределения частот представлен на рис. 2.

Из примеров следует, что учитывать лишь вхождение интервала выборки в элементарный подынтервал гистограммы не достаточно для получения показательной оценки.

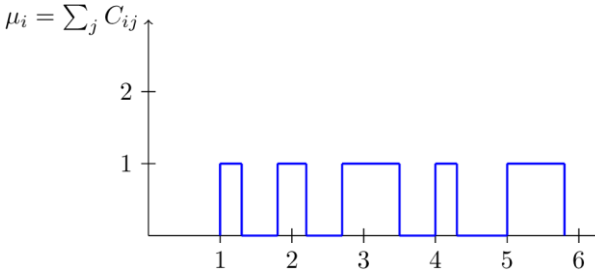


Рис. 1. График распределения частот для случая непересекающихся интервалов

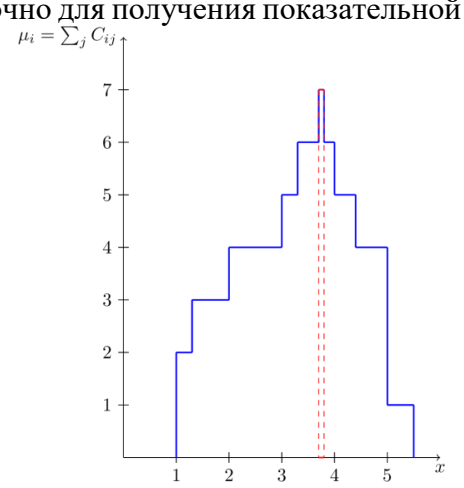


Рис. 2. График распределения частот для случая сильно пересекающихся интервалов

Альтернативное вычисления интервальной моды на основе несимметричной меры совместности и матрицы отношений. Поскольку использование набора элементарных подынтервалов не всегда целесообразно, рассмотрим подход, который используется в обычных гистограммах, и обобщим его на интервальные данные. Множество W выбирается исходя из особенностей конкретной задачи. Естественный подход – ограничить W снизу левым концом наименьшего интервала, а сверху – правым концом наибольшего интервала выборки. Набор бинов определяется из требований поставленной задачи. Данный подход, с одной стороны, использует информацию о выборке, а с другой стороны, не привязан жестко к концам всех интервалов. Например, можно объединять элементарные подынтервалы, если они слишком малы, или выбирать бины, не привязанные к подынтревалам выборки.

Обозначим элементы W как $\{w_i\}$. Для расчета гистограммы интервальной выборки предлагается использовать модифицированный несимметричный коэффициент Жаккара, который для расчета величины c_{ij} учитывает только пересекающиеся интервалы. Формула 1 из [4] позволяет оценить долю исходного интервала выборки x_j попавшего в бин w_i.

$$c_{ij} = \frac{wid(w_i \cap x_j)}{wid(x_j)} (1)$$

На основе величин c_{ij}строится так называемая матрица отношений, рассматриваемая в [3] как универсальный способ построения функций от исследуемого множества по базису другого (наиболее распространенный случай - гистограммы выборок).

Пусть имеется выборка $X_3 = \{[1, 6], [2, 5], [1, 4], [3, 4], [3, 4], [8, 10]\}$. Сетка бинов вводится с помощью эвристики. Пусть она имеет вид $W_3 = \{[1, 4.5], [4.5, 8], [8, 10]\}$. Матрица отношений и график распределения частот для данной выборки представлены на рис. 3 и рис. 4 соответственно.

Полученная гистограмма может быть использована для построения гистограммы кумулятивной суммы выборки, которая позволяет учесть выбросы данных. В этом случае предлагается выбрать в качестве границ верхнего и нижнего квартилей параметры, определяемые с помощью эвристики.

	x_1	x_2	x_3	x_4	
w_1	$\frac{7}{10}$	$\frac{5}{6}$	1	0	$\frac{38}{15}$
w_2	$\frac{3}{10}$	$\frac{1}{6}$	0	0	$\frac{7}{15}$
w_3	0	0	0	1	1
					4

Рис. 3. Матрица отношений для выборки X_3

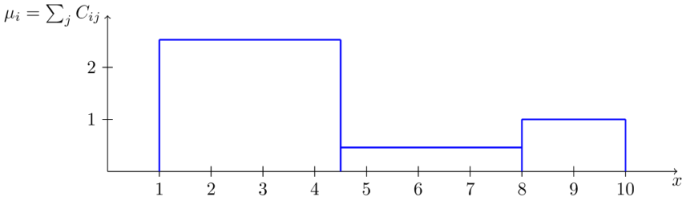


Рис. 4. График распределения частот для выборки X_3

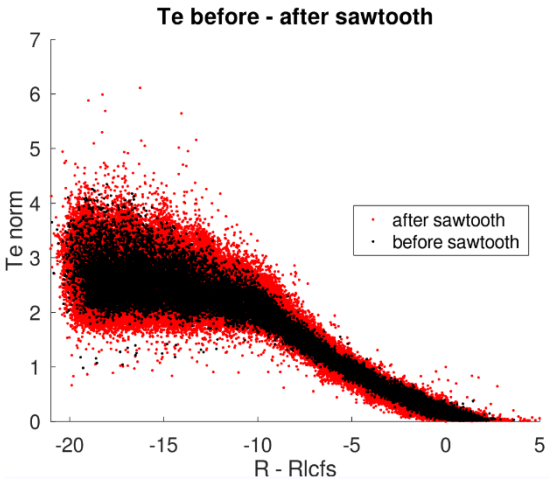


Рис. 5. Нормированная температура электронов плазмы в зависимости от расстояния до границы плазмы

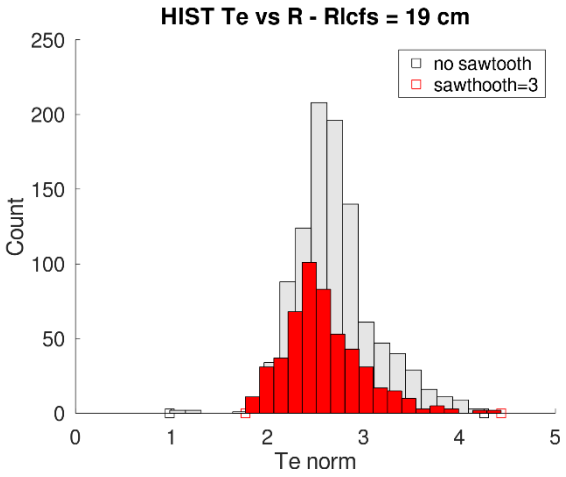


Рис. 6. Гистограммы нормированных температур на радиусе 19 до пилообразных колебаний и после 3-го колебания

Эффективность методов проверена на примерах с данными, полученными на токамаке “Глобус-М2” ФТИ им. А.Ф.Иоффе РАН. Общая картина данных представлена на рис.5. Объем данных составляет около 300 000 значений. Для обозримости представления данные были сгруппированы, как показано на рис.6. Внутри групп объемом от 10000 до 50000 построены гистограммы для групп расстояний до границы плазмы по описанной выше методике.

ЛИТЕРАТУРА

1. Баженов А.Н., Жилин С.И., Кумков С.И., Шарый С.П.. Обработка и анализ данных с интервальной неопределенностью. – НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2024. – 356с.

2. S.Ferson, V.Kreinovich, J.Hajagos, W.Oberkampf, L.Ginzburg. Experimental Uncertainty Estimation and Statistics for Data Having Interval Uncertainty // Sandia National Laboratories. – 2007. – Report SAND2007-0939. – 162 p.

3. Баженов А.Н., Тельнова А. Ю. Объединение выборок в анализе данных с интервальной неопределенностью // Журнал технической физики. – 2024. – Т. 95. – № 4. – С. 839-846.

4. Баженов А.Н. Обобщение мер совместности в анализе данных. Учебное пособие– Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого, 2022.- 80с.

УДК 51-73

Т.О. Яворук[1], А.Н. Баженов[2,3]
[1]Университет ИТМО(*)
[2]Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого
[3]Физико-технический институт им. А. Ф. Иоффе

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ ЛИНЕЙНОЙ РЕГРЕССИИ В СЛУЧАЕ ДВОЙНОГО ОЦЕНИВАНИЯ ОШИБОК ИСХОДНЫХ ДАННЫХ

Введение. Калибровка измерительных приборов требует учета как внутренних, так и внешних ошибок данных [1]. В данной работе для их описания используются твины (двойные интервалы). В линейной регрессии внутренние оценки данных позволяют повысить точность, но могут приводить к пустому множеству решений. В то же время использование только внешних оценок приводит к слишком большому числу решений. Оптимальным подходом является комбинирование внутренних и внешних оценок.

В работе рассматривается решение твинной системы линейных алгебраических уравнений и его применение в калибровке, сборе и анализе данных на основе LIDAR, используемого в исследованиях ядерного синтеза и физики плазмы. Для решения данной проблемы предложены два алгоритма: первый заменяет внутренние оценки внешними, а второй вводит дополнительные интервалы. Эффективность алгоритмов демонстрируется на примерах с синтетическими данными.

Интервальный анализ. Классическая интервальная арифметика (IR) представляет собой алгебраическую систему, состоящую из правильных интервалов $\boldsymbol{x} = [\underline{x}, \overline{x}] \subset \mathbb{R}$.

Для любой арифметической операции $\star \in \{+, -, \cdot, /\}$ результат операции между интервалами определяется как

$$x \star y = \{x \star y \mid x \in x, y \in y\}, \text{ где } x, y \in \mathbb{R}.$$

В более общем случае задачи интервального анализа могут решаться в рамках полной интервальной арифметики или арифметики Каухера ($\mathbb{KR}$). Эта арифметика получается из классической интервальной арифметики ($\mathbb{IR}$) путем добавления неправильных интервалов $\boldsymbol{x} = [\underline{x}, \overline{x}]$, где $\underline{x} \geq \overline{x}$.

Мы будем рассматривать интервальные системы линейных алгебраических уравнений (ИСЛАУ) следующего типа [2]:

$$\boldsymbol{A}x = \boldsymbol{b},$$

где правая часть $\boldsymbol{b}$ состоит из интервалов, а матрица $\boldsymbol{A}$ является точечной.
Будем рассматривать допусковое множество решений ИСЛАУ:

$$\Xi_{tol} = \{x \in \mathbb{R}^m | (\forall A \in \boldsymbol{A})(\exists b \in \boldsymbol{b})(Ax = b)\}.$$

Для нахождения решения данной системы используется следующий распознающий функционал:

$$Tol(x, \boldsymbol{A}, \boldsymbol{b}) = \min_i \{rad\ \boldsymbol{b_i} - |mid\ \boldsymbol{b_i} - \sum \boldsymbol{A_{ij}} x_j|\}.$$

С помощью этого функционала можно определить является интервальная выборка совместной, а также можно найти данные, которые «нарушают» совместность всех остальных. В работе будет использовано определение твина по свойству включения [3]:

$$\mathbb{T} = [\boldsymbol{t}_{in}, \boldsymbol{T}_{out}] = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{KR} | \boldsymbol{t}_{in} \subset \boldsymbol{x} \subset \boldsymbol{T}_{out}\},$$

где $\boldsymbol{t}_{in}$ и $\boldsymbol{T}_{out}$ внутренняя и внешняя оценки $\boldsymbol{x}$ соответственно.

(*) Т.О. Яворук, tatianaiavoruk@gmai.com

Далее будут рассматриваться СЛАУ, у которых для правой части получено две оценки. В таком случае правая часть представляет собой вектор, состоящий из твинов. Рассмотрим разные способы решения таких систем.

Постановка задачи. Решается задача поиска коэффициентов линейной регрессии β_0, β_1:

$$\boldsymbol{y} = \beta_1 x + \beta_0,$$

Выходные данные $\boldsymbol{y}$ представляют собой твин, а входные данные x являются точечными значениями.

Описание алгоритмов. Мы предполагаем, что множество решений для внешних оценок не пусто, и стремимся его сузить. Ниже представлены два способа достижения этой цели.

Первый метод заключается в следующем: 1) Найти максимум для системы интервальных линейных алгебраических уравнений (ИСЛАУ), содержащей только внутренние интервалы. 2) Вычислить значения распознающего функционала для всех индексов. 3) Для индексов, где значение отрицательное, заменить внутренние интервалы на внешние оценки.

Поскольку ИСЛАУ с внешними оценками всегда имеет решение, а свойство распознающего функционала позволяет выявлять несовместимые интервалы, этот процесс достаточно эффективен для сужения множества решений.

Во втором методе предлагается создать новую систему ИСЛАУ, которая позволит получить еще более узкое множество решений для аналогичной системы. В новую систему включаются уравнения, содержащие не только внутренние и внешние оценки правой части, но и дополнительные интервалы. Эти дополнительные интервалы представляют собой: нижнюю границу внутренней оценки и верхнюю границу внешней оценки, а также наоборот – верхнюю границу внешней оценки и нижнюю границу внутренней оценки.

Следующим шагом является вычисление выражений для всех уравнений новой системы. Для внешних оценок функция всегда принимает положительные значения, поскольку предполагается их совместимость. Затем необходимо определить индексы выражений с отрицательными значениями, исключить их из системы и решить обновленную систему.

В результате множество решений будет меньше, чем в первом методе, так как в систему добавлены дополнительные интервалы, учитывающие больше возможных вариантов.

Численные эксперименты. Рассмотрим задачу линейной регрессии в случае двух неизвестных: $y = \beta_1 x + \beta_0$. Задача состоит в поиске коэффициентов β_0, β_1.

Входные и выходные данные следующие:

$$x = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\},$$
$$y = \{5.5, 5.5, 6, 7, 8, 8, 8.5, 9, 9.5\}.$$

Внутренние оценки для y составляют 2% от значения y вверх и вниз, а внешние – 10%.

На рис. 1 данные с интервальными погрешностями показаны черными отрезками (внутренние и внешние интервалы). Для ИСЛАУ, составленной только из внутренних интервалов, множество решений пусто: невозможно провести прямую через все внутренние интервалы.

На рис. 2 представлены три множества решений.

- Самое большое (зеленый цвет) – это решение, полученное только с внешними оценками.
- Среднее по размеру множество решений (красный цвет) получено с помощью первого метода.
- Наименьшее множество решений (синий цвет) получено с помощью второго метода.

Заметим, что множества вложены друг в друга.

На рис. 1 показаны прогнозные коридоры решений. Цвета соответствуют множествам решений на рис. 2.

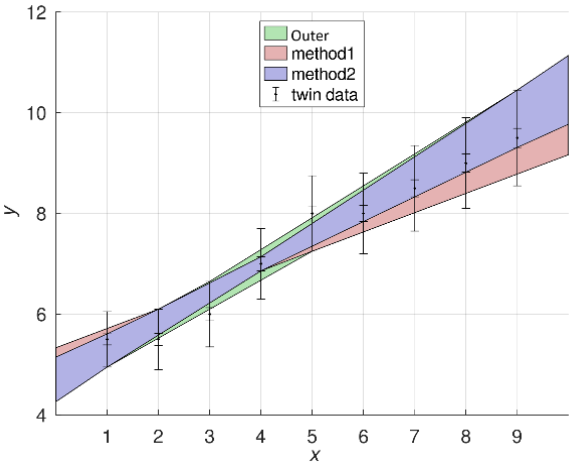


Рис. 1. Данные и прогнозные коридоры решений, полученные различными методами

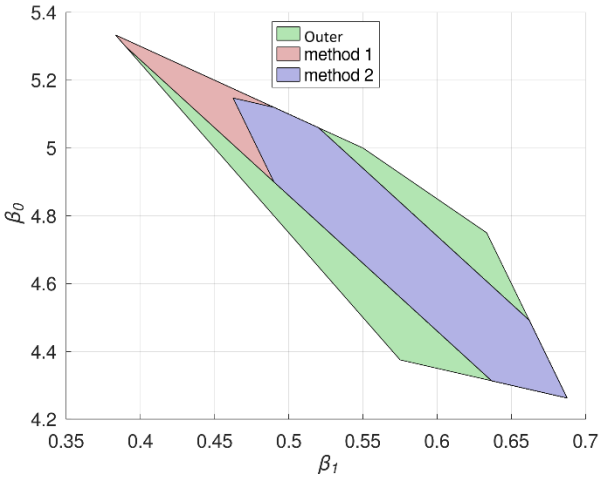


Рис. 2. Множества решений твинной СЛАУ, полученные различными методами

Заключение и анализ результатов. Главная задача исследования — получить множество решений задачи регрессии с использованием внутренних оценок данных. В случае успеха это дает наиболее точные оценки параметров регрессии. Для достижения разрешимости используется распознающий функционал.

На рис. 1 видно, что при использовании только внутренних оценок остается лишь одна точка (x = 4), а остальные требуют корректировки ошибок. Это может означать, что внутренние оценки слишком узкие и, возможно, метод их получения стоит пересмотреть.
Второй метод (с дополнительными интервалами) помогает выявить избыточные внешние оценки, а также определить, на какой стороне (верхней или нижней) внутренние оценки недостаточно точно учитывают ошибки.

ЛИТЕРАТУРА

1. Mukhin, E., Tolstyakov, S., Kurskiev, G., Zhil'tsov, N., Koval, A., Solovei, V., Gorbunov, A., Gorshkov, A., Asadulin, G., Kornev, A., Makarov, A., Bogachev, D., Babinov, N., Samsonov, D., Razdobarin, A., Bazhenov, A., Bukreev, I., Dmitriev, A., Elets, D., and Ermakov, N. 2022. Combined Thomson Scattering and Laser-Induced Fluorescence for Studying Divertor and X-point Plasmas in Tokamak with Reactor Technologies. Plasma Physics Reports, 48, p.866-874.
2. Shary, S. 2018. Weak and Strong Compatibility in Data Fitting Problems under Interval Uncertainty / In International seminar "Mathematics, Statistics and Computation to Support Measurement Quality" (MSCSMQ-2018), pp. 1-30.
3. Sainz, M., Armengol, J., Calm, R., Herrero, P., Jorba, L., and Vehi, J. 2013. Modal Interval Analysis: New Tools for Numerical Information. Springer International Publishing.

УДК 004.89, 004.932

В.А. Карасев, Е.И. Герасимов, В.С. Чуканов, Е.И. Пчицкая
Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого(*)

НЕЙРОСЕТЕВОЙ МЕТОД ОПРЕДЕЛЕНИЯ ПОЛОЖЕНИЯ, ХАРАКТЕРИСТИК И ПОВЕДЕНИЯ МЫШИ

Для изучения патологических процессов, происходящих при нейродегенеративных заболеваний (в частности, болезни Альцгеймера), а также тестирования потенциальных методов лечения таких патологий, используются лабораторные мыши. Исследование их поведения в экспериментальной среде с одновременной регистрацией нейрональной активности позволяет изучать фундаментальные изменения в функционировании нейронных цепей в процессе патогенеза болезни Альцгеймера. Однако для определения такой корреляции необходима предварительная автоматизированная обработка огромного массива данных о поведении мыши в различных условиях с последующим переводом данных в текстовый вид для дальнейшего анализа и сопоставления с активностью нейронных ансамблей.

В данной работе представлено приложение для детекции и распознавания поведения мыши, реализованное на базе нейросетей семейства YOLO-pose-v8-m и YOLO-classification-v11-l, их документация представлена в [1]. Также для определения местоположения мыши используется классическое аналитическое компьютерное зрение на базе библиотеки OpenCV, в частности, методы для преобразования цветового пространства, методы поиска контуров и встроенные функции поиска окружностей на изображении. Данные для обучения сетей были получены в тесте открытое поле (стандартной установке для оценки локомоторной активности и тревожности грызунов, описание представлено в [2]) на мышах дикого типа и трансгенных мышах линии 5xFAD возраста 6,5 месяцев (более 10000 фреймов с размеченным силуэтом и поведением мыши). Обработка данных для обучения распознавания поведения производилась методами, представленными в [3], в частности, использовался метод с созданием так называемых “композитных изображений”. Для балансировки датасета также использовались методы аугментации датасета. Процессы генерации данных, обучения сети и записи в csv-формат полученных результатов были разработаны на языке программирования Python с использованием библиотеки нейронных сетей YOLO Ultralytics и библиотеки компьютерного зрения OpenCV.

В частности, работа была произведена в три этапа: обнаружение мыши с помощью YOLO-pose-v8-m, аналитическая разметка арены с помощью библиотеки компьютерного зрения OpenCV и определение поведения мыши классификатором на основе YOLO-classification-v11-l. Разметка арены представлена на рис.1.

Результатом работы приложения является csv-файл, в котором хранится необходимая информация о мыши на каждом кадре, а именно: время видеоролика, координаты центра масс мыши по системе MARS [4], скорость мыши (рассчитанная как $(c_2 - c_1)/ t_{int}$, где c_2 - центр мыши на текущем кадре, c_1- центр мыши на предыдущем кадре, t_{int} - интервал времени между кадрами), положение мыши относительно зон арены (определяемое путем проверки принадлежности координат ключевых точек заранее заданным полигонам зон). Нейросеть для определения поведения мыши обрабатывает видеоролик и распознает четыре типа поведения мыши: мышь сидит, бег, груминг, мышь стоит. Метрикой качества для работы нейросети, детектирующую мышь по ключевым точкам, выбрана метрика Percentage of Correct Key-points @ 0.25 (далее PCK@0.25), ее значение равняется 82%. Визуальное отображение данной метрики приведено на рис. 2. Ее смысл состоит в следующем: при попадании предсказанной

(*) В.А. Карасев, slavikfish03@yandex.ru

точки в доверительный радиус, равный 0.25 * D (зеленые окружности), где D – расстояние между ушами мыши, соответствующей истинной (размеченной) точки считаем, что нейронная сеть справилась, в противном случае нет. Метрикой качества для нейросети, определяющей поведение, выбрана F-мера (F1-score), рассчитываемая как F1 = 2 * (Precision * Recall) / (Precision + Recall), где Precision (точность предсказания положительного класса) = TP / (TP + FP), где TP — количество объектов, названных моделью положительными и действительно являющихся положительными, FP — количество ложноположительных объектов; Recall (полнота) — TP / (TP + FN), где TP — количество объектов положительного класса, найденных алгоритмом, FN — количество объектов положительного класса, которые модель не распознала. Значение F-меры равняется 0.963.

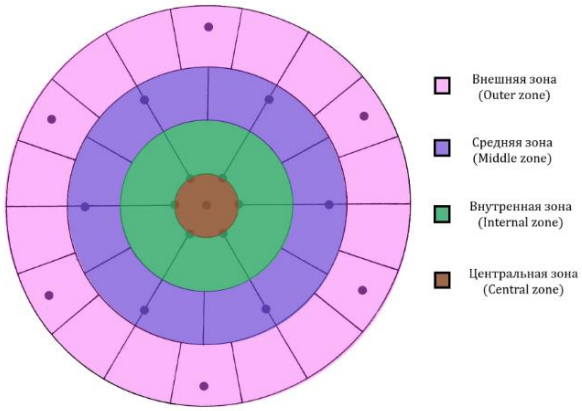


Рис. 1. Визуальное отображение метрики PCK@0.25

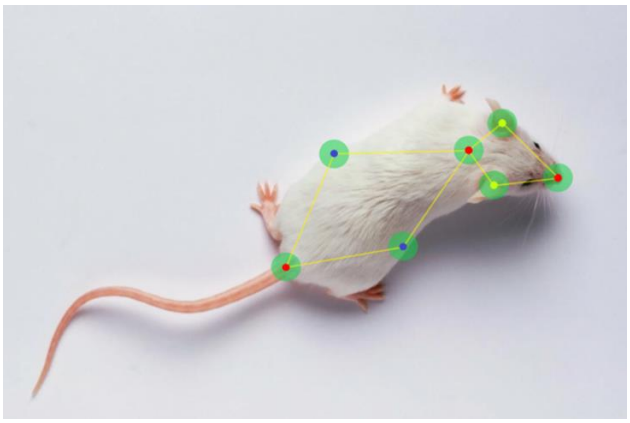


Рис. 2. Визуальное отображение метрики PCK@0.25

Таким образом, разработанное приложение позволяет автоматизировать ручную рутинную обработку видеороликов и ускорить данный процесс. Также благодаря этому повышается точность и корректность полученных данных, так как исключается человеческий фактор.

Настоящее исследование было поддержано грантом в рамках государственного задания FSEG-2024-0025 и Фондом поддержки инноваций и молодежных инициатив Санкт-Петербурга в рамках проекта «Кампус цифровых лабораторий Blue Sky Research».

ЛИТЕРАТУРА

1. https://docs.ultralytics.com/ru
2. Novák, C., Jaramillo Flautero, A. M., & Prigge, M. Open field test for mice v1 // *Protocвols.io* – 2024.
3. Ingested non-essential amino acids recruit brain orexin cells to suppress eating in mice / P. Viskaitis [et al.] // Current biology : CB. – 2022. – Vol. 32. – № 8. – P. 1812-1821.
4.Segalin C., Williams J., Karigo T., Hui M., Zelikowsky M., Sun J.J., Perona P., Anderson D.J., Kennedy A. The mouse action recognition system (MARS) software pipeline for automated analysis of social behaviors in mice / C. Segalin [et al.] // eLife. – 2021. – Vol. 10. – P. 1-35

УДК 004.8, 004.932

С.А. Умнов, Е.И. Герасимов, В.С. Чуканов, Е. И. Пчицкая
Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого(*)

ОБНАРУЖЕНИЕ ПАТОЛОГИЙ С ПОМОЩЬЮ ОЦЕНКИ АКТИВНОСТИ НЕЙРОННЫХ АНСАМБЛЕЙ ГИППОКАМПА МЫШЕЙ ПОСТРОЕНИЕМ МАНИФОЛДОВ

Изучение нейронной активности головного мозга мышей позволяет продвинуться в области изучения различных нейродегенеративных заболеваний. Современные методы регистрации нейронной активности, например метод миниатюрной флуоресцентной микроскопии, позволяют детектировать активность большого количества нейронов у свободно передвигающихся животных, однако большая размерность полученных данных затрудняет их прямой анализ. В данной работе была поставлена следующая задача: разработать метод автоматизированного анализа многомерных данных нейронной активности, позволяющий: снижать размерность данных с сохранением ключевых взаимосвязей между нейронами, выявлять паттерны, ассоциированные с нейродегенеративными заболеваниями и обеспечивать классификацию состояния животных (здоровые/больные) на основе нейронной динамики.

В данной работе представлен подход на основе построения нейрональных манифолдов [1] с целью исследования влияния болезни Альцгеймера (БА) на работу нейронных гиппокампальных ансамблей. Для моделирования этого нейродегенеративного заболевания были использованы трансгенные мыши с генетической моделью БА линии 5xFAD возраста 6,5 месяцев. В качестве контрольных мышей были выбраны их дикие однопометники. Данные о нейронной активности гиппокампальных ансамблей мышей были получены с использованием метода миниатюрной флуоресцентной микроскопии. Эти данные представляют собой временные ряды зависимости интенсивности флуоресценции генетичейски кодируемого кальциевого индикатора GCaMP6f от времени для индивидуальных нейронов гиппокампа. Полученный временной ряд разбивается на определенные временные участки фиксированной длины для сглаживания активности нейронов при понижении размерности [2]. Карта нейронной активности приведена на рис. 1.

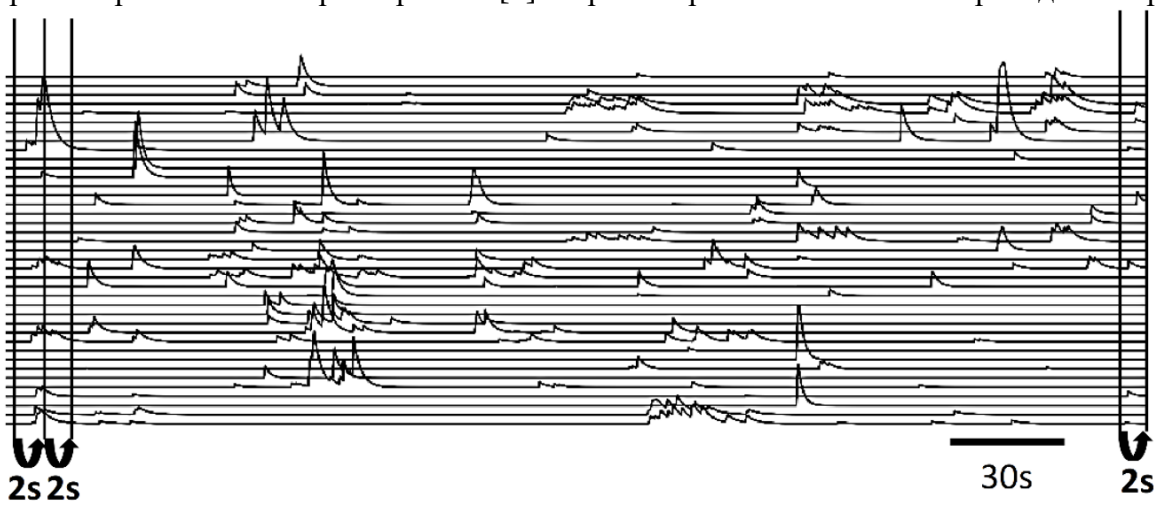


Рис. 1. Карта нейронной активности с временными участками

Затем по обработанным данным строится манифолд с помощью алгоритма понижения размерности. В данной работе используется t-SNE (Стохастическое вложение соседей с t-

(*) С.А. Умнов, sergejumnov148@gmail.com

распределением). По полученным манифолдам производится оценка параметров, в данной работе для задачи разделения трансгенных мышей от диких было использовано внутрикластерное расстояния. Полученные проекции манифолда приведены на рис. 2.

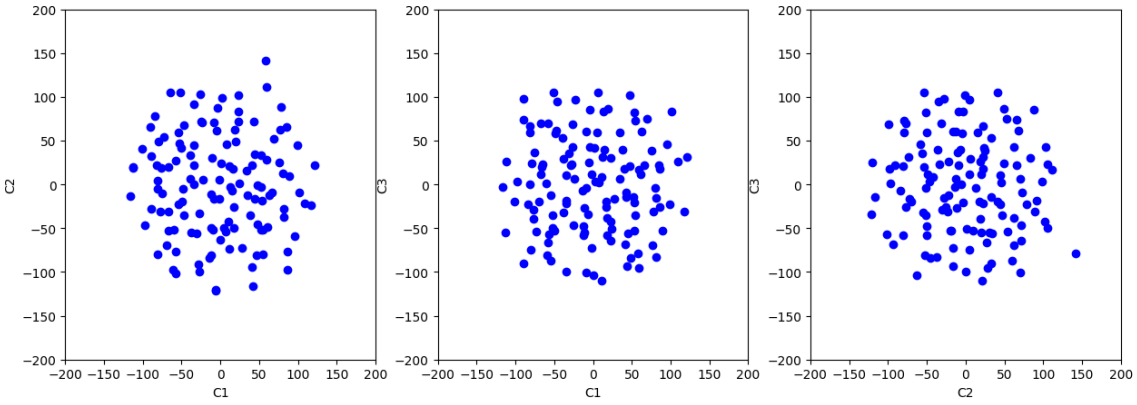


Рис. 2. Проекции манифолда нейронной активности дикой мыши

Результатом проведенного анализа данных является обнаружение трансгенных мышей с генетической моделью болезни Альцгеймера. Для этого была проведена бинарная классификация с помощью линейного классификатора при размере тестовой выборки 30%. Положительным классом был выбран класс здоровой мыши. Полученные результаты классификации приведены в табл. 1. Высокие значения метрик свидетельствуют об эффективности предложенного подхода для обнаружения патологий нейронной активности.

Табл. 1. Полученные метрики бинарной классификации

Метрика	**Значение метрики**
Accuracy	0.88
Precision	0.99
Recall	0.79
F1	0.86

Предложенный подход с использованием построения нейронных манифолдов позволяет по нейронной активности мышей обнаруживать патологии в функционировании нейронных ансамблей, присутствующие при болезни Альцгеймера. В дальнейшем, представленный метод будет использоваться для изучения этих нарушений, а также определения эффективности исследуемых подходов для терапии БА на лабораторных мышах.

Настоящее исследование было поддержано грантом в рамках государственного задания FSEG-2024-0025 и Фондом поддержки инноваций и молодежных инициатив Санкт-Петербурга в рамках проекта «Кампус цифровых лабораторий Blue Sky Research».

ЛИТЕРАТУРА

1. Mitchell-Heggs R, Prado S, Gava GP, Go MA, Schultz SR. Neural manifold analysis of brain circuit dynamics in health and disease // Journal of Computational Neuroscience. – 2023. – Vol. 51. – № 1. – P. 1-21.

2. Rubin, A., Sheintuch, L., Brande-Eilat, N. et al. Revealing neural correlates of behavior without behavioral measurements // Nature Communications. – 2019. – Vol. 10. – № 1.

УДК 004.925.3

И.А. Пучкин[1], В.С. Чуканов [1], А.А. Васильев[2]
[1]Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого(*)
[2]Saber Interactive

МОДЕЛИРОВАНИЕ РЕАЛИСТИЧНОГО ОСВЕЩЕНИЯ В ШИРОКОМ ЦВЕТОВОМ ДИАПАЗОНЕ

Введение. Реалистичное освещение является ключевым аспектом в создании визуально убедительных изображений и анимаций. В последние годы значительное внимание уделяется разработке моделей, которые позволяют точно воспроизводить освещение в широком цветовом диапазоне. В данной работе рассматривается адаптация модели освещения травы на основе модели Фонга под Модель Кука-Торренса.

Цель работы. Предложить модель освещения травы на основе современной модели Кука-Торренса с сохранением всех особенностей оригинальной модели освещения травы, основанной на устаревшей модели Фонга.

Оригинальная модель освещения травы. Оригинальная реализация [1] в своей основе имеет модель освещения Фонга, совмещенную с идеей просвечиваемости травинок и зависимости цвета травинки от расстояния между текущей точки травинки и основанием травинки.

Модель освещения Кука-Торренса. Модель Кука-Торренса (наиболее часто используемая интерпретация физически обоснованного рендеринга) [2], которая является наиболее часто используемой интерпретацией физически обоснованного освещения, использует линейное пространство RGB для вычисления освещенности, чего не может предложить модель освещения Фонга, которая работает со стандартным RGB. Благодаря использованию линейного пространства RGB, открывается также возможность использовать широкий динамический диапазон (HDR), что позволяет расположить несколько ярких источников освещения на сцене без потери качества картинки.

Смена модели освещения. Для адаптации оригинальной модели освещения рассеянная компонента света (diffuse) была преобразована следующим образом:

$$K_d \ * \ \frac{I_d^* l^6}{\pi} * \int_\Omega L_i(p, \omega_i) * max\{(\omega_i \cdot n), C(-n \cdot \omega_i)\}\, d\omega_i \qquad (1)$$

Как можно заметить, модель Кука-Торренса позволяет нам сохранить одну из ключевых особенностей оригинальной реализации – просвечиваемость травинок. Здесь K_d – коэффициент рассеянной освещенности. I_d^* - освещенность верхушки травинки, l – нормализованное расстояние от основания травинки до ее верхушки, n – нормаль к верхушке травинки, ω_i – падающий на травинку свет.

В отраженной (specular) компоненте света в оригинальной модели также есть особенность – коэффициент блеска травинки (shininess) равный десяти, что требует подбора коэффициента шероховатости (roughness) – аналога коэффициента блеска из модели Фонга. Также в силу того, что освещенность всей травинки считается как освещенность ее верхушки, умноженная на нормализованное расстояние между основанием и верхушкой, необходимо домножить коэффициент Френеля на это расстояние.

Сравним график функции распределения нормалей модели Кука-Торренса с графиком функции распределения нормалей из оригинальной модели. Полученные графики представлены на рис. 1. График для функции распределения нормалей модели Кука-Торренса визуально схож с графиком функции распределения нормалей оригинальной модели с

(*) И.А. Пучкин, puchkin.ia@edu.spbstu.ru

некоторым коэффициентом шероховатости. Подставим это значение в уравнение 3. Таким образом, получаем следующие зависимости:

$$F = (F_0 + (1 - F_0)(1 - (h \cdot v))^5)l^6 \quad (2)$$

$$D = \frac{\alpha^2}{\pi((n \cdot h)^2(\alpha^2 - 1) + 1)^2} \quad (3)$$

Здесь модель Кука-Торренса также позволяет нам сохранить особенности оригинальной модели, а именно – зависимость цвета травинки от расстояния точки травинки до основания травинки. В данных уравнениях: F – коэффициент Френеля, F_0 – базовая отражательная способность поверхности (полагается равной 0.04), h – медианный вектор между направлением света и направлением обзора, D – функция распределения нормалей, α – коэффициент шероховатости.

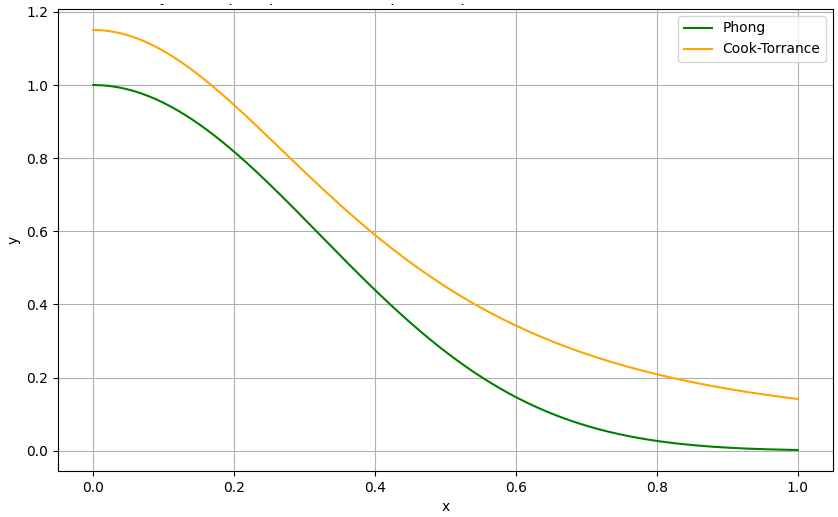


Рис. 1. Графики распределения нормалей оригинальной модели освещения на основе модели Фонга (зеленый) и предлагаемой модели освещения (оранжевый)

В компоненте окружающего света (ambient) есть существенные различия в моделях Фонга и Кука-Торренса: в модели Фонга окружающий свет задается константой, в то время как в модели Кука-Торренса компонента окружающего света вычисляется с помощью предварительно посчитанной карты освещенности.

В рамках данной работы для вычисления компоненты окружающего света мы пользовались готовой реализацией IBL (image based lighting), взятой из движка [3]. Подробнее о работе IBL можно узнать, например, в [2].

Реализация. Данная работа была выполнена на движке, представленном в [3].

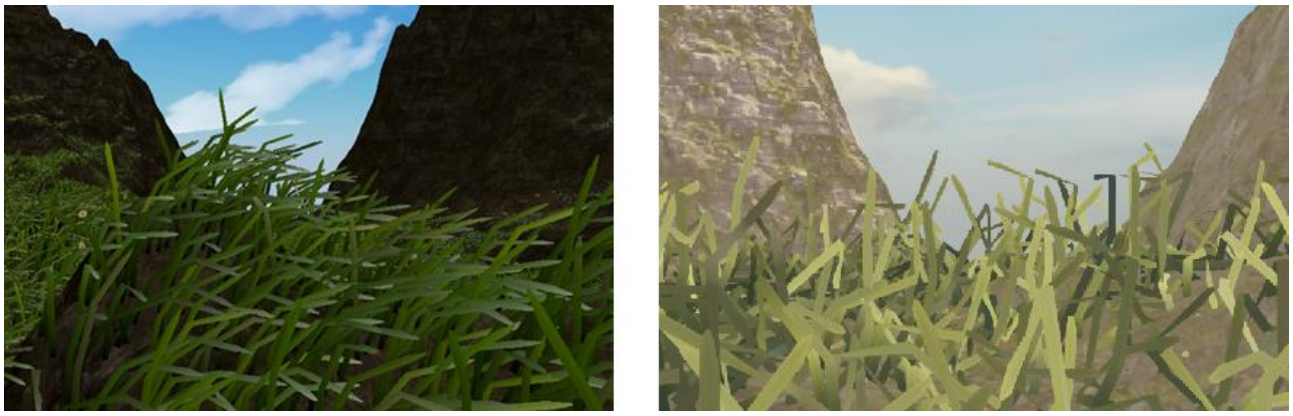


Рис. 2. а) Оригинальная модель освещения; б) разработанная модель освещения

Результаты. На рис. 2а изображена трава, модель освещения которой является модификацией модели Фонга. Следует отметить, что трава выделяется на фоне земли, что делает изображение менее реалистичным. На рисунке 2б представлен результат работы предлагаемой авторами модели, где сочетание травы и земли выглядит более гармоничным.

Заключение. Выполнен переход от настроенной для травинок модели освещения Фонга к физически обоснованному рендерингу, а именно к модели Кука-Торренса, и также эта модель настроена для освещения травинок. Переход был осуществлен с сохранением всех особенностей оригинальной модели.

ЛИТЕРАТУРА

1. Belyaev S., Laevsky I., Chukanov V. Real-time animation, collision and rendering of grassland // Proceedings of GraphiCon2011. – 2011. – С. 1-4.
2. Karis B., Games E. Real shading in unreal engine 4 // Proc. Physically Based Shading Theory Practice. – 2013. – Т. 4. – №. 3. – С. 1.
3. Парусов В.А. Оптимизация количества вызовов отрисовки в современных графических системах: выпускная квалификационная работа бакалавра: направление 01.03.02 - прикладная математика и информатика – СПб.: ФГАОУ ВО «СПбПУ», 2023. – 37 с.

УДК 004.852

Г.А. Гребнев, В.С. Чуканов, А.А. Васильев
Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого (*)

ИСПОЛЬЗОВАНИЕ НЕЙРОСЕТЕЙ ДЛЯ ПОВЫШЕНИЯ FPS ПУТЕМ ГЕНЕРАЦИИ КАДРОВ

Введение. В условиях массового перехода на мониторы с высокой частотой обновления (100 Гц и выше) требования к производительности графических систем постоянно растут. Генерация реалистичной графики требует значительных вычислительных ресурсов, что ограничивает возможности достижения высокого количества кадров в секунду (frames per second, FPS) на доступном аппаратном обеспечении. В данном контексте нейросетевые методы интерполяции представляют перспективное решение, позволяющее повысить плавность видеопотока без модернизации аппаратного обеспечения.

В данной работе ставится задача повышения FPS в приложениях компьютерной графики за счет вставки сгенерированных промежуточных кадров между двумя исходными. Для ее решения проводится сравнительный анализ современных подходов к интерполяции, основанных на сверточных нейронных сетях (Convolutional Neural Networks, CNN) [1], с последующим отбором наиболее релевантного метода. Особое внимание уделяется достижению баланса между качеством реконструкции промежуточных кадров, временем выполнения и стабильностью работы в режиме реального времени.

Практическая значимость исследования обусловлена возможностью применения усовершенствованного алгоритма в игровых движках, системах виртуальной реальности и технологиях потоковой передачи видео.

Методология. В рамках исследования был проведен всесторонний анализ современных методов интерполяции видео, включая такие подходы, как алгоритмы на основе оптического потока [1] и комбинированные архитектуры [2]. Особое внимание уделялось оценке соотношения между качеством реконструкции промежуточных кадров и вычислительной сложностью методов. В результате детального сравнения для дальнейшей работы был выбран

(*) Г.А. Гребнев, grebnevgleb17@gmail.com

подход оценки промежуточного потока в реальном времени для интерполяции видеокадров (Real-Time Intermediate Flow Estimation for Video Frame Interpolation, RIFE) [3], который обеспечивает высокую точность предсказания кадров при сохранении высокой скорости работы и возможности интеграции в промышленные конвейеры обработки видео.

Разработанная методология адаптации выбранного метода к специфическим требованиям обработки игрового видеоконтента включает несколько взаимосвязанных этапов. Первоначально проводилось тестирование базовой реализации модели на широком наборе репрезентативных игровых сцен различной сложности, включая сцены с быстрым движением объектов, сложными текстурами, ротацией камеры и динамическим освещением. В процессе тестирования были выявлены характерные артефакты интерполяции, проявляющиеся в определенных типах сцен. На основании проведенного анализа разработана стратегия дообучения модели, учитывающая как необходимость повышения качества обработки, так и требование сохранения ключевых характеристик производительности.

Важным аспектом проведенной работы стало сохранение совместимости модифицированного алгоритма с технологией DirectML (Direct Machine Learning) — интерфейсом программирования приложений, предназначенным для выполнения задач машинного обучения на графических процессорах в рамках экосистемы DirectX. Последняя представляет собой набор интерфейсов программирования приложений для обработки задач, связанных с компьютерной графикой. Сохранение совместимости с DirectML позволяет интегрировать обученные модели непосредственно в приложения, использующие DirectX. Это обеспечивает практическое применение алгоритма в современных графических конвейерах. Особое внимание уделялось поддержанию способности системы работать в режиме реального времени, что является критически важным требованием для игровых приложений. Предложенный подход к модификации исходного алгоритма позволяет достичь заметного улучшения качества обработки динамичных сцен, характерных для компьютерных игр, без существенного увеличения вычислительной нагрузки на систему. Это становится возможным благодаря тщательно подобранной стратегии дообучения, учитывающей специфические особенности целевого типа контента.

Анализ результатов. Экспериментальная проверка эффективности предложенного подхода проводилась на специализированном наборе данных, включающем игровые видеопоследовательности различной сложности. Тестовые данные охватывали широкий спектр сценариев: от относительно статичных сцен до динамичных эпизодов с быстрым перемещением объектов и сложными визуальными эффектами. Для объективной оценки результатов использовались стандартные метрики качества видеопроцессинга: показатель пикового отношения сигнала к шуму (Peak Signal-to-Noise Ratio, PSNR) [4] и индекс структурного сходства (Structural Similarity Index Measure, SSIM) [5], а также измерялась частота кадров после обработки.

Результаты сравнительного анализа демонстрируют значительное улучшение качества интерполяции после проведения дообучения модели. В сценах с последовательным движением показатель PSNR увеличился с 30.13 dB до 31.29 dB (прирост 3.85%), SSIM вырос с 0.9169 до 0.9261 (прирост 2.09%). Наиболее впечатляющие результаты достигнуты при обработке динамичных сцен с ротацией камеры и одновременным движением объектов по нелинейным траекториям, где PSNR улучшился с 27.65 dB до 30.05 dB (прирост 8.68%), а SSIM вырос с 0.8745 до 0.9009 (улучшение на 3.02%).

Сравнительный анализ результатов сравнения с базовой версией алгоритма выявил следующие преимущества дообученной модели: более стабильное качество интерполяции во всех типах сцен, улучшение работы с динамичными эпизодами, сохранение приемлемой производительности на доступных устройствах GPU.

На рис. 1 представлено сравнение реального кадра (слева) и интерполированного кадра (справа), иллюстрирующее эффективность предложенного метода интерполяции в сложной динамичной сцене. Красными прямоугольниками выделены области с обнаруженными артефактами. Интерполированный кадр имеет минимальное количество артефактов: слегка увеличенные прорези в узоре диска и небольшие искажения переднего сплиттера. Это сравнение демонстрирует, что предложенный алгоритм успешно генерирует промежуточные кадры с минимальными искажениями.

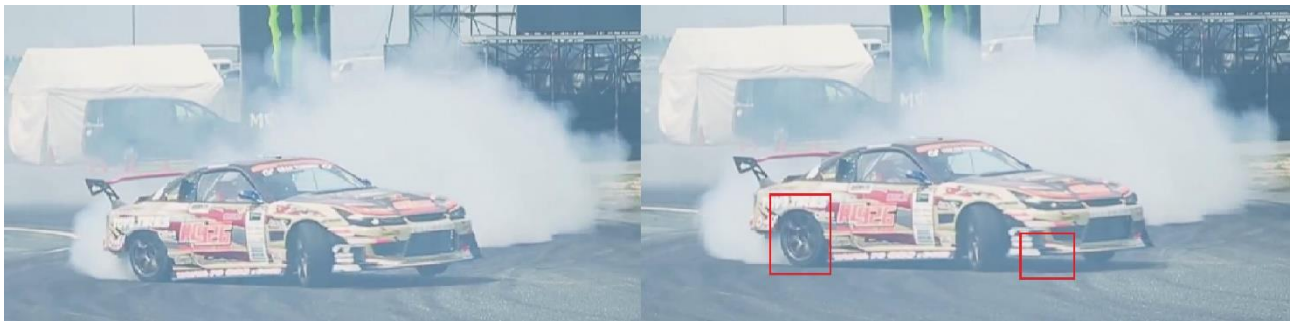


Рис. 1. Сравнение кадров: исходный (слева) и интерполированный (справа)
Области с минимальными артефактами выделены прямоугольниками

Перспективы развития. Полученные результаты открывают широкие возможности для практического применения предложенного метода в различных областях компьютерной графики и обработки видео. Наиболее перспективными направлениями представляются: системы потокового вещания игрового контента, технологии виртуальной реальности, а также профессиональные инструменты для видеомонтажа. Особую ценность разработанное решение представляет для индустрии компьютерных игр, где оно может быть использовано для повышения плавности игрового процесса без необходимости модернизации аппаратного обеспечения.

Важным аспектом, требующим дальнейшего исследования, является адаптация метода для работы с различными платформами и графическими программными интерфейсами (application programming interfaces, API). Первые успешные эксперименты по интеграции с DirectML демонстрируют хороший потенциал в этом направлении. Дополнительные перспективы связаны с возможностью комбинирования предложенного подхода с другими технологиями повышения качества видео, такими как супер-разрешение и улучшение динамического диапазона.

ЛИТЕРАТУРА

1. Dosovitskiy A. et al. Flownet: Learning optical flow with convolutional networks //Proceedings of the IEEE international conference on computer vision. – 2015. – С. 2758-2766.
2. Bao W. et al. Depth-aware video frame interpolation //Proceedings of the IEEE/CVF conference on computer vision and pattern recognition. – 2019. – С. 3703-3712.
3. Huang Z. et al. Real-time intermediate flow estimation for video frame interpolation //European Conference on Computer Vision. – Cham : Springer Nature Switzerland, 2022. – С. 624-642.
4. Hore A., Ziou D. Image quality metrics: PSNR vs. SSIM / In: 20th international conference on pattern recognition. – IEEE, 2010. – С. 2366-2369.
5. Wang Z. et al. Image quality assessment: from error visibility to structural similarity //IEEE transactions on image processing. – 2004. – Т. 13. – №. 4. – С. 600-612.

УДК 51-76

Е.О. Крылова, Д.С. Смирнова, Е.И. Пчицкая, В.С. Чуканов
Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого(*)

АЛГОРИТМИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ДЕНДРИТОВ НА ОСНОВЕ СТАТИСТИЧЕСКИХ ХАРАКТЕРИСТИК

Введение. Исследование морфологии дендритов представляет важное направление в нейробиологии, учитывая их ключевую роль в функционировании нейронов и связь с нейродегенеративными процессами. По данным ВОЗ, распространенность заболеваний, связанных с нарушением нейронных структур, таких как болезнь Альцгеймера, продолжает расти, что требует развития новых подходов к их изучению [1]. Современные исследования морфологии нейронов сталкиваются с проблемой ограниченного объема данных, полученных методами конфокальной микроскопии. Процесс создания аннотированных наборов данных дендритных структур требует значительных временных и вычислительных ресурсов, что затрудняет применение методов глубокого обучения для анализа нейронных сетей [6]. Одним из перспективных решений является разработка алгоритмов генерации синтетических изображений дендритов, которые могли бы расширить обучающие выборки и повысить точность моделей. В данной работе предложен подход к алгоритмическому моделированию дендритных структур на основе статистических характеристик их геометрии. В качестве исходных данных использованы трехмерные модели дендритов, полученные с помощью программного обеспечения SpineTool [2]. Основная цель исследования – разработка метода параметрического описания морфологии дендритных стволов с последующей реконструкцией их поверхности на основе извлеченных статистических закономерностей.

Методы. В качестве набора данных для процедур статистического моделирования были получены полигональные сетки дендритных стволов, а также расположенных на них дендритных шипиков в формате набора вершин и граней. Для использования данных дендритных структур была проведена предобработка датасета: отделение в полигональной сетке дендрита дендритных шипиков и дендритного ствола на различные полигональные сетки с заполнением мест разреза алгоритмами репарации поверхности. Далее из очищенного меша извлекается скелет методом волнового фронта [3], после чего определяется сердцевина скелета – наиболее протяженный путь между двумя крайними точками [2]. Для устранения оставшихся артефактов разработан комбинированный подход, включающий статистическую фильтрацию выбросов на основе межквартильного размаха и перцентилей расстояний точек меша до сердцевины и удаление нерелевантных участков меша с помощью анализа пересечений лучей, испущенных из узлов сердцевины. В качестве структуры, описывающей локальную ширину дендритного ствола, был разработан вид массива элементов, называемых нами "звездочками". Эта структура представляет собой векторы толщины в сферических координатах, вычисленные для каждого узла сердцевины (за исключением начальных и конечных) в 32-х направлениях. Таким образом, в результате использования описанных процедур предобработки был получен набор данных, который стал базой для кластеризации и статистического моделирования.

Изложение результатов. Разработанный алгоритм моделирования дендритной структуры использует подход с комбинацией статистического моделирования и алгоритмической реконструкции трехмерных структур. Для генерации скелетов применен метод марковских цепей высокого порядка [4], где переходы между состояниями определяются локальным морфологическим контекстом. Параметры распределений подбирались методом максимального правдоподобия с учетом контекста предыдущих 5-ти

(*) Е.О. Крылова, katya.kryloff@gmail.com

сегментов, что позволило сохранить пространственные корреляции, характерные для реальных дендритов.

Оптимальное количество кластеров морфологических особенностей "звездочек" определялось методом локтя, показавшим разделение на два кластера. Для моделирования переходов между кластерами применялась марковская модель 10-го порядка, учитывающая пространственную память структуры дендрита. Вероятность перехода между кластерами вычисляется как:

$$P(C_{t+1}|C_t, C_{t-1}, \dots, C_{t-9}) = \frac{N(C_{t-9}, \dots, C_t, C_{t+1})}{N(C_{t-9}, \dots, C_t)}$$

где C_t – кластер в позиции t, $N(\cdot)$ – количество наблюдений данной последовательности в обучающих данных.

Реконструкция поверхности дендритов базируется на преобразовании цилиндрических сегментов вдоль скелетной структуры с использованием данных "звездочек". Механизм адаптивного перекрытия (15% длины) и матричные преобразования обеспечивают плавные переходы между сегментами. Радиусы оптимизируются через глобальную интерполяцию и стабилизацию для устранения резких перепадов толщины. Радиус трубки в точке v_i определяется через взвешенное среднее соседних звездочек:

$$r_i = \alpha \cdot \max_{j \in S_i} l_j + (1 - \alpha) \cdot \frac{1}{|N_i|} \sum_{k \in N_i} r_k$$

где S_i – множество индексов звездочек вершины v_i, N_i – соседние вершины, α=0.8 – коэффициент коррекции. Соединение сегментов реализовано с помощью KD-деревьев и специальных переходных граней. Финальная обработка сочетает пуассоновское и лапласианское сглаживание [5] с проекцией на скелет для сохранения морфологических особенностей.

Эксперименты. Для верификации точности моделирования проведен сравнительный анализ синтетических и реальных дендритных структур по трем аспектам: (рис. 1.а) распределение базовых морфометрических параметров (длины сегментов и углы между ними) демонстрирует близкое соответствие с сохранением центров распределений при незначительных различиях в плотностях; (рис. 1.б) анализ последовательностей кластеров в логарифмическом масштабе выявил воспроизведение общей тенденции при частичном отклонении в области длинных последовательностей; (рис. 1.в) проекция в пространстве t-SNE показала, что синтетические структуры образуют компактное подмножество внутри области реальных данных, что подтверждает сохранение ключевых топологических закономерностей.

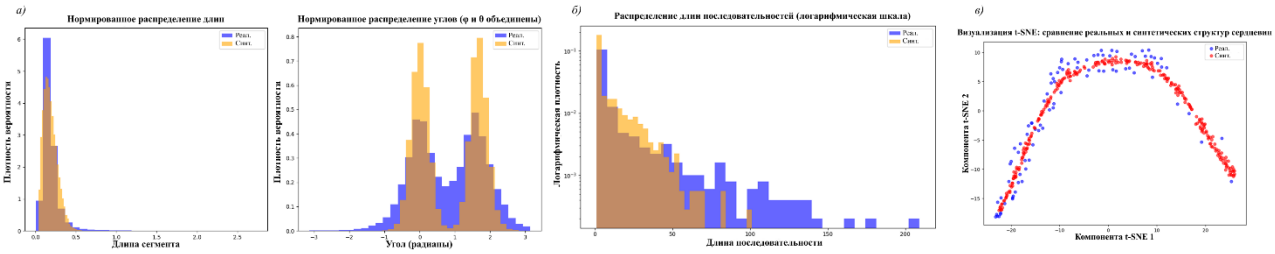


Рис. 1. Анализ точности моделирования дендритных структур: а) Сравнение распределений длин сегментов и углов между реальными (синий) и синтетическими (оранжевый) данными; б) распределение длин последовательностей кластеров в логарифмическом масштабе; в) Проекция t-SNE векторных представлений структур

Для оценки качества реконструкции поверхности проведен сравнительный анализ 110 дендритных стволов (рис. 2) путем натяжения синтетических мешей на реальные скелетные структуры. Визуальное сопоставление показывает хорошее совпадение формы и ветвления

между реальными (синий) и синтетическими (красный) поверхностями при незначительных различиях в контурах (рис. 2а). Средняя относительная разность объемов рассчитывалась по формуле:

$$\Delta V_{rel} = \frac{|V_{real} - V_{synth}|}{V_{real}}$$

где V_{real} и V_{synth} – объемы реальной и синтетической поверхностей соответственно. Полученное значение составило 12% (рис. 2б), что подтверждает достаточно высокую точность реконструкции.

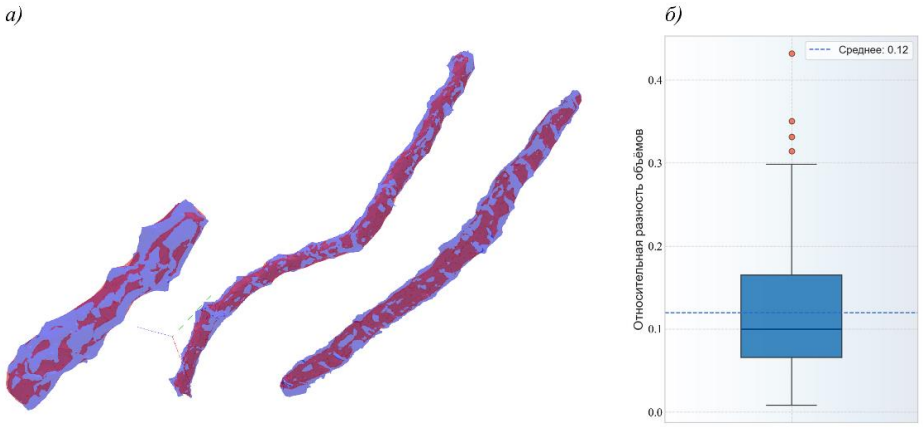


Рис. 2. Анализ качества процедуры натяжения поверхности: а) Наложение реальной (синий) и синтетической (красный) поверхностей для трех репрезентативных случаев; б) распределение относительных разностей объемов (n=110)

Предложенный метод генерации позволяет получать дендритные стволы, воспроизводящие ключевые морфологические особенности реальных структур (рис. 3). Синтетические образцы (рис. 3б) демонстрируют характерные черты биологических прототипов (рис. 3а) – вариабельность толщины, естественное ветвление и сложную пространственную организацию, что подтверждает адекватность использованного подхода статистического моделирования в сочетании с алгоритмической реконструкцией.

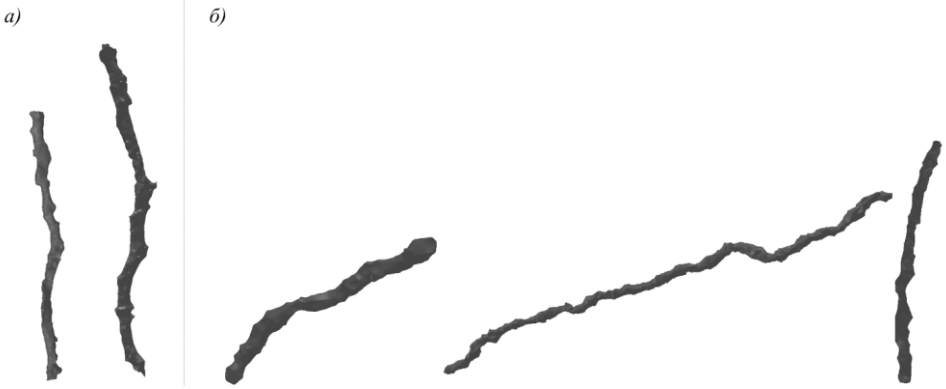


Рис. 3. Результат процедуры генерации дендритного ствола: а) Примеры исходных дендритных стволов; б) результаты полного цикла генерации синтетических структур

Заключение. Разработанный метод алгоритмического моделирования позволяет создавать синтетические дендритные структуры, сохраняя статистические закономерности реальных образцов. Основу подхода составляет последовательная обработка данных: от выделения скелета и "звездочек" толщины до реконструкции поверхности с адаптивными параметрами. Экспериментальные результаты демонстрируют возможность генерации

реалистичных 3D-моделей дендритных стволов с сохранением их характерных морфологических особенностей. Перспективным направлением развития метода является моделирование пространственного распределения дендритных шипиков на поверхности стволов с учетом их морфометрических характеристик и плотности расположения.

Настоящее исследование было поддержано грантом в рамках государственного задания FSEG-2024-0025 и Фондом поддержки инноваций и молодежных инициатив Санкт-Петербурга в рамках проекта «Кампус цифровых лабораторий Blue Sky Research».

ЛИТЕРАТУРА

1. Prince M., Ali G.-C., Guerchet M., Prina A.M., Albanese E., Wu Y.-T. Recent global trends in the prevalence and incidence of dementia, and survival with dementia // Alzheimer's research & therapy. – 2016. – Vol. 8. – P. 1–13.
2. Pchitskaya E., Kraskov A., Lushnikova I., Bezprozvanny I. SpineTool is an open-source software for analysis of morphology of dendritic spines // Scientific Reports. – 2023. – Vol. 13, № 1. – P. 10561.
3. Xu C., Wang T.Y., Liu Y.-J., Liu L., He Y. Fast Wavefront Propagation (FWP) for Computing Exact Geodesic Distances on Meshes // IEEE Transactions on Visualization and Computer Graphics. – 2015. – Vol. 21, № 7. – P. 822–834.
4. Snodgrass S., Ontanon S. A Hierarchical Approach to Generating Maps Using Markov Chains // Proceedings of the AAAI Conference on Artificial Intelligence and Interactive Digital Entertainment. – 2014. – Vol. 10, № 1. – P. 59–65.
5. Shontz S.M., Vavasis S.A. A Mesh Warping Algorithm Based on Weighted Laplacian Smoothing // Proceedings of 12th International Meshing Roundtable. – 2003. – P. 147–158.
6. Cui J., Zhang J., Kneip L., Schwertfeger S. Neural Surfel Reconstruction: Addressing Loop Closure Challenges in Large-Scale 3D Neural Scene Mapping // Sensors. – 2024. – Vol. 24, № 21. – P. 6919.

УДК 51-76

Е.К. Липс, Д.С. Смирнова, Е.И. Пчицкая, В.С. Чуканов
Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого (*)

РАЗРАБОТКА МЕТОДА ОЦЕНКИ НАЛИЧИЯ ЗАКОНОМЕРНОСТЕЙ В ПРОСТРАНСТВЕННОЙ ОРГАНИЗАЦИИ ДЕНДРИТА НЕЙРОНА

Введение. Современные исследования, направленные на изучение организации нейронных сетей при нейропсихиатрических заболеваниях, в частности при расстройствах аутистического спектра, шизофрении и болезни Альцгеймера, свидетельствуют о ключевом значении структурных изменений шипиковых синапсов в патогенезе данных заболеваний. Изменение численности или модификация структурной организации дендритных шипиков могут выступать в качестве первичного патогенного фактора, инициирующего развитие целого спектра патологий [1]. Кроме того, было выявлено, что взаимное расположение шипов и степень их сгруппированности напрямую связаны с эффективностью обработки и хранения информации в нейронных сетях [2]. Данная работа направлена на разработку методов оценки сгруппированности дендритных шипиков и выявление закономерностей взаимного расположения дендритных шипиков на дендрите в норме и при нейропатологии.

Методы. В качестве методов предобработки данных была реализована процедура перевода исходных трехмерных координат в цилиндрические для корректного вычисления расстояний между шипиками по поверхности дендрита. Для определения оси дендрита, и проецирования точек на плоскость, перпендикулярную этой оси, использовался метод главных компонент (PCA). Для каждого шипика средствами Spinetool [3] были извлечены

(*) Е.К. Липс, ek.lipsss@mail.ru

классические морфологические признаки такие как объем, длина, площадь поверхности и другие. В качестве первичного анализа пространственных закономерностей был проведен анализ распределения попарных расстояний между шипиками.

Для оценки расстояния между ближайшими соседями в наборе точек была вычислена метрика NNdist (Nearest Neighbor Distance), которая позволяет оценить общую плотность распределения точек в пространстве [4-5]. Формула для вычисления NNdist:

$$NNdist = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \min_{i \neq j} dist(p_i, p_j) \quad (1)$$

где p_i – некоторая точка, p_j – ближайший сосед p_i. Однако, в исследовании [6] показано, что в отличие от метрики NNdist функция парной корреляции PCF (Pair Correlation Function) может дать более информативное описание распределения точек. PCF вычисляет вероятность нахождения точки на любом расстоянии от некоторой заданной точки, позволяя выявить наличие структуры в расположении точек. Формально PCF определяется как:

$$g(r) = \frac{\rho(r)}{\rho_0} \quad (2)$$

где $\rho(r)$ – средняя плотность точек на расстоянии r от некоторой точки, ρ_0 – средняя плотность точек. Для количественной оценки графика PCF была использована энтропия Шеннона, которая позволяет количественно оценить степень упорядоченности или хаотичности в распределении точек системы и определяется следующим образом:

$$S = -\sum_i p(r_i) \log p(r_i) \quad (3)$$

$$p(r_i) = \frac{g(r_i) \cdot r_i^2}{\sum_j g(r_i) \cdot r_j^2} \quad (4)$$

Для выявления пространственной автокорреляции была вычислена мера автокорреляции Морана I [7]. Значение $I \approx 1$ свидетельствует о наличии сильной положительной автокорреляции, $I \approx$ -1 - сильной отрицательной автокорреляции, а $I \approx 0$ – отсутствию автокорреляции.

Вид пространственной сгруппированности шипиков возможно оценить решением задачи кластеризации точек в физическом пространстве. Мы кластеризовали цилиндрические координаты шипиков на дендритном стволе с использованием алгоритма DBSCAN [8], который позволяет настраивать такие параметры как радиус окрестности точки (ε) и минимальное количество точек в ε-окрестности для создания кластера (min_sampes). Метод перебора параметров с использованием теста Крускала-Уоллиса [9] позволил нам получить оптимальные параметры кластеризации с учетом метрик размера.

Описание экспериментов. Для проведения анализа использовались данные двух групп дендритов: дендриты культуры гиппокампа мышей дикого типа (Wt) и культуры моделирующие болезнь Альцгеймера (Ab). В рамках каждого типа Ab/Wt для всех дендритов были применены все реализованные методы и получены соответствующие оценки пространственной сгруппированности. Для выявления отличий между распределениями попарных расстояний дендритов типа Wt и Ab был проведен тест Колмогорова-Смирнова, результаты которого показали статистическую значимость разницы распределений. Сравнение метрики NNdist, энтропии Шеннона и меры Морана для метрики объема представлено на рис. 1 в виде боксплотов. Получено, что метрика NNdist для разных типов дендритов одинакова, в то время как энтропия Шеннона для дендритов типа Ab выше, что свидетельствует о наличии более выраженной структуры в расположении дендритов данного

типа. Также для данных метрик были вычислены средние значения и тест Колмогорова-Смирнова, результаты которого приведены в табл. 1, тест подтвердил отсутствие значимых отличий метрики NNdist и статистическую значимость отличий энтропии Шеннона для разных типов дендритов, мера Морана для обоих типов имеет отрицательные значения, однако наблюдается статистически значимое уменьшение значения в группе Ab, это свидетельствует о том, что при патологии наблюдается более выраженная отрицательная автокорреляция относительно метрики объема.

Табл. 1. Средние значения метрик и результаты теста Колмогорова-Смирнова

	Среднее значение		**Тест КС**	
Метрика	**Wt**	**Ab**	**Статистика**	**p-value**
NNdist	2.31	2.25	0.18	0.652
Энтропия Шеннона	2.73	3.37	0.48	0.001
Мера Морана метрики «Объем»	-0.03	-0.16	0.43	0.008
ε	2.56	3.08	0.19	0.577
min_samles	1.94	2.50	0.16	0.778
Статистика теста Крускала-	2.44	2.10	0.25	0.270
p_value теста Крускала-Уоллиса	0.20	0.32	0.57	6.741
Доля шума	0.14	0.21	0.33	0.600

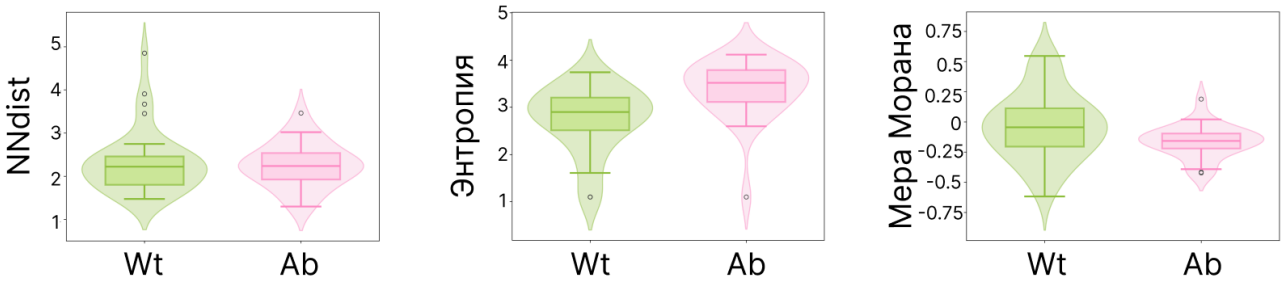


Рис. 1. Статистическое распределение значений метрик пространственной структурированности

Для оптимальных параметров кластеризации и доли некластеризованных шипиков также были построены боксплоты, которые приведены на рис. 2, и вычислен тест Колмогорова-Смирнова, результаты которого приведены в табл. 1. На графиках видно, что значение ε и $min_samples$ не имеют сильных отличий, кроме того, можно заметить, что оптимальным значением $min_samples$ является 2, то есть минимальным кластеров может считаться группа из двух шипиков, что также освещалось в работе [2]. Совсем иначе обстоят дела с долей шума, на графике видно, что доля некластеризованных шипиков у типа Ab выше, чем у Wt. Тест Колмогорова-Смирнова выделает статистически значимое отличие только для доли шума. Таким образом, мы можем сделать вывод о том, что на дендритах амилоидных мышей шипики склонны вырастать вне окрестностей других шипиков.

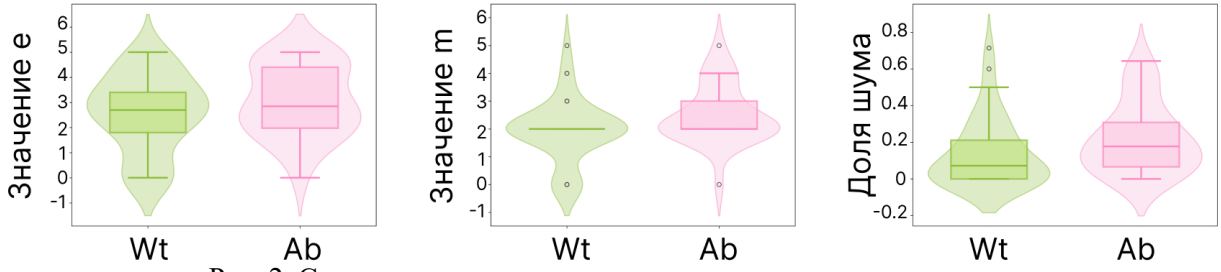


Рис. 2. Статистическое распределение метрик кластеризуемости

Заключение. В ходе анализа взаимного расположения дендритных шипиков в норме и при нейродегенерации были выявлены отличительные особенности дендритов рассмотренных типов: диких мышей и модели Альцгеймера. Кроме того, были выявлены метрики, которые остаются неизменными в случае нейропаталогии. Так, распределение попарных расстояний было признано различным для разных типов дендритов. Метрика NNdist, сообщающая только среднее расстояние между соседними шипиками, оказалась неразличимой для дендритов типа Wt и Ab. Энтропия Шеннона для функции парной корреляции PCF наоборот показала статистически значимое различие, что говорит о ее преимуществе перед метрикой NNdist для выявления сложных пространственных закономерностей. Анализ пространственной автокорреляции показал, что у дендритов типа Ab по сравнению с Wt наблюдается более выраженная отрицательная автокорреляция относительно метрики объема, то есть располагаться рядом склонны шипики разного размера.

Кластерный анализ дендритов выявил, что для дендритов обоих типов радиус окрестности и минимальное число шипиков в кластере близки, более того кластер минимального размера для дендритов диких мышей имеет точное значение, равное двум шипикам. Основным результатом кластеризации стало заключение о том, что на дендритах типа Ab наблюдается большее число некластеризованных шипиков, что может быть причиной ухудшения синаптической активности и развития нейродегенеративных заболеваний.

Настоящее исследование было поддержано грантом в рамках государственного задания FSEG-2024-0025 и Фондом поддержки инноваций и молодежных инициатив Санкт-Петербурга в рамках проекта «Кампус цифровых лабораторий Blue Sky Research».

ЛИТЕРАТУРА

1. Penzes P. et al. Dendritic spine pathology in neuropsychiatric disorders //Nature neuroscience. – 2011. – Т. 14. – №. 3. – С. 285-293.
2. Frank A. C. et al. Hotspots of dendritic spine turnover facilitate clustered spine addition and learning and memory //Nature communications. – 2018. – Т. 9. – №. 1. – С. 422.
3. Pchitskaya E. et al. SpineTool is an open-source software for analysis of morphology of dendritic spines //Scientific reports. – 2023. – Т. 13. – №. 1. – С. 10561.
4. Ilamathi H. S. et al. Mitochondrial fission is required for proper nucleoid distribution within mitochondrial networks //bioRxiv. – 2021. – С. 2021.03. 17.435804.
5. Toffin E. et al. Colonization of weakened trees by mass-attacking bark beetles: No penalty for pioneers, scattered initial distributions and final regular patterns //Royal Society open science. – 2018. – Т. 5. – №. 1. – С. 170454.
6. Ilamathi H. S. et al. A new automated tool to quantify nucleoid distribution within mitochondrial networks //Scientific reports. – 2021. – Т. 11. – №. 1. – С. 22755.
7. Chen Y. An analytical process of spatial autocorrelation functions based on Moran’s index //PLoS One. – 2021. – Т. 16. – №. 4. – С. e0249589.
8. Deng D. DBSCAN clustering algorithm based on density //2020 7th international forum on electrical engineering and automation (IFEEA). – IEEE, 2020. – С. 949-953.
9. Ostertagova E., Ostertag O., Kováč J. Methodology and application of the Kruskal-Wallis test //Applied mechanics and materials. – 2014. – Т. 611. – С. 115-120.

УДК 004.415.5

Д.Д. Пестряков, Ф.А. Новиков
Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого(*)

ЯЗЫК PLATO КАК СПОСОБ ЗАПИСИ АВТОМАТИЧЕСКИ ПРОВЕРЯЕМЫХ ДОКАЗАТЕЛЬСТВ ТЕОРЕМ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ ОНТОЛОГИЙ

В настоящее время существует несколько семейств языков представления онтологий в вычислительных машинах. Само понятие «онтология» зародилось порядка 600 лет назад как эквивалент понятия «метафизика». С появлением информатики термин «онтология» обрел новый смысл в контексте данной науки: это способ целостной формализации знаний о какой-то предметной области [1].

Существуют различные подходы к представлению онтологий: таксономия (обобщение иерархических связей между классами), реляционная модель данных (выделение классов, атрибутов классов и отношений между классами). Так или иначе эти подходы нашли свое отражение в существующих формальных текстовых языках описания онтологий: RDF, RDFS, OWL. Также для представления онтологий можно использовать унифицированный язык моделирования, использующий графические обозначения, UML.

Согласно [1] язык UML обладает всеми возможностями языков RDF, RDFS и OWL, и даже большими за счет введения в рассмотрение таких типов отношений как агрегация, композиция и зависимость. Несмотря на все свои достоинства, диаграммы UML обладают существенным недостатком: из-за представления исключительно в графической форме они имеют низкую машиночитаемость. Это обстоятельство является серьезным препятствием для использования языка UML в автоматизации образовательного процесса.

Автоматизация образовательного процесса - важнейшая задача современности, так как главной его особенностью является массовость. А именно, на одного преподавателя в университете приходятся десятки студентов [2]. Это обстоятельство ставит перед системой образования следующие задачи: размножить знания преподавателей, а также автоматизировать проверку остаточных знаний студентов, применяя минимум усилий.

Исходя из выше поставленных задач, можно сформулировать критерии для языка онтологий, который претендует на использование в академической среде. Он должен иметь низкий порог входа для студентов. А также быть достаточно выразительным, чтобы с его помощью можно было автоматизировать процесс проведения проверок остаточных знаний у студентов.

В [1] обсуждается подход, согласно которому для массовой передачи знаний предлагается использовать онтологии в нотации UML, разделенные на грани. В рамках курса «Дискретная математика» в СПбПУ предлагается выделять следующие грани: иерархические отношения между понятиями и алгоритмические аспекты. В рамках другого курса, «Грамматики и автоматы», в СПбПУ весной 2025 года был разработан предметно-ориентированный язык ONTOL [3], который позволяет записать в виде формализованного текста следующее: базовые понятия предметных областей; функциональные связи между базовыми понятиями; иерархические связи между понятиями. Конкурентными преимуществами данного языка являются поддержка модульности и возможность трансляции в plantUML [4], текстовый язык описания UML-диаграмм.

Язык ONTOL удовлетворяет одной из вышеупомянутых целей: имеет низкий порог входа как для студентов, так и преподавателей. Программа на ONTOL транслируется в plantUML. Далее интерпретатор plantUML порождает UML-диаграмму, которая в итоге

(*) Д.Д. Пестряков, pestryakovdanil@mail.ru

выдается студентам вместе с лекционными материалами. Однако этого языка все еще недостаточно для автоматизации проведения проверки остаточных знаний у студентов.

По этой причине было решено разработать язык PLATO, совместимый с языком ONTOL. PLATO является аббревиатурой на «**P**roofs' **L**anguage **A**pplying **T**heorems' **O**ntologies», которая дословно переводится как «язык доказательств с использованием онтологий теорем». Записанные на языке ONTOL файлы будут использованы как способ задания онтологий предметных областей, а язык PLATO станет расширением нотации ONTOL для записи автоматически проверяемых доказательств теорем. Важно отметить, что язык ONTOL является самостоятельным и может найти применение в других задачах. Таким образом, оба этих языка могут развиваться параллельно.

Определим корректность доказательства теоремы: формальная логическая непротиворечивость и семантическая непротиворечивость. Для проверки логической непротиворечивости предлагается решать задачу выполнимости булевых формул (SAT), интерпретируя введенное студентом доказательство как булеву формулу. Семантическая непротиворечивость будет определена ниже. Грамматика языка доказательств в РБНФ:

<логическоеУтверждение> ::= <переменная>
| <функциональноеВыражение>
| <логическоеУтверждение> "and" <логическоеУтверждение>
| <логическоеУтверждение> "or" <логическоеУтверждение>
| "not" <логическоеУтверждение>
| "(" <логическоеУтверждение> ")"
<функциональноеВыражение> ::= <имяФункции> "(" <аргументы> ")"
<аргументы> ::= <пусто> | <аргумент> | <аргумент> "," <аргументы>
<аргумент> ::= <переменная> | <функциональноеВыражение>
<переменная> ::= <буква>
<имяФункции> ::= <буква> | <буква> <имяФункции>
<буква> ::= ^[a-zA-Z]$
<пусто> ::=
<логическаяСвязка> ::= "=>" | "<=>"
<логическаяЦепочка> ::= <логическоеУтверждение> <логическаяСвязка> <логическоеУтверждение> | <логическаяЦепочка> <логическаяСвязка> <логическоеУтверждение>
<логическоеЗаключение> ::= <логическаяЦепочка> | (<логическоеЗаключение >) "and" (<логическоеЗаключение >) | (<логическоеЗаключение >) "or" (<логическоеЗаключение >) | "not" (<логическоеЗаключение >)

Согласно грамматике, логические утверждения состоят из переменных и функциональных выражений. Гипотеза, которая лежит в основе данного языка: доказательство, записанное с помощью «вызова» функций, должно быть понятно любому начинающему программисту. Также данный подход соответствует парадигме «программа как доказательство», порожденной из соответствия Карри-Ховарда [5, 6]. Таким образом, под семантической непротиворечивостью подразумевается вызов функций с нужным числом аргументов, каждый из которых имеет допустимый тип, определенный в онтологии.

Ниже приведен пример доказательства теоремы «$\sqrt{2}$ – иррациональное число»:

type(sqrt(2), irdFrac) => (exists(m, type(m, posInt)) and exists(n, type(n, posInt)) and equal(sqrt(2), irdFrac(m,n)) => equal(2, irdFrac(pow(m, 2), pow(n, 2))) => equal(pow(m, 2), mul(2, pow(n, 2))) => even(m) => exists(k, type(k, posInt)) and equal(m, mul(2, k)) => equal(mul(4, pow(k, 2)), mul(2, pow(n, 2))) => equal(mul(2, pow(k, 2)), mul(1, pow(n, 2))) => even(n)) and (irdFrac(m, n) and even(m) => odd(n)).

Таким образом, получаем противоречие: odd(n) and even(n).

Пример файла numberTheory.plato:

from {numberTheory.ontol} import posInt, equal, sqrt, irdFrac, pow, even, odd, mul
axioms:

1. type(a, irdFrac) => (exists(m, type(m, posInt)) and exists(n, type(n, posInt)) and equal(a, irdFrac(m,n))
2. equal(a, b) <=> equal(b, a)

3. mul(a, b) <=> mul(b, a)
4. equal(sqrt(a), irdFrac(m,n)) => equal(a, irdFrac(pow(m, 2), pow(n, 2)))
5. equal(a, irdFrac(m, n)) => equal(m, mul(a, n))
6. mul(2, a) => even(mul(2, a))
7. even(a) and equal(a, b) => even(b)
8. odd(a) and equal(a, b) => odd(b)
9. even(a) => exists(k, type(k, posInt)) and equal(a, mul(2, k))
10. equal(a, b) and equal(b, c) => equal(a, c)
11. equal(mul(4, a), mul(2, b)) => equal(mul(2, a), mul(1, b))
12. irdFrac(m, n) and even(m) => odd(n)
13. type(a, posInt) and even(a) <=> type(a, posInt) and even(pow(a, 2))
14. type(a, posInt) and odd(a) <=> type(a, posInt) and odd(pow(a, 2))
15. even(a) <=> not odd(a)

input:
type(sqrt(2), irdFrac)
output:
not type(sqrt(2), irdFrac).

Доказательство теоремы состоит из 9 логических переходов, для осуществления которых необходимо 15 аксиом. Важно отметить, что детальность доказательства в данном случае напрямую зависит от того, какие именно утверждения будут приняты в качестве аксиом. В то же время доказательство этой теоремы с помощью интерактивного программного средства доказательства теорем Coq содержит больше 100 строк [7].

На рис. 1 представлена визуализация онтологии предметной области «Теория чисел».

В итоге, разработан язык для записи автоматически проверяемых доказательств теорем, совместимый с языком ONTOL представления знаний в вычислительной машине. Знания могут передаваться студентам как формализованным текстом, так и UML-диаграммой. А проверку остаточных знаний можно автоматизировать, интерпретируя запись в нотации PLATO как булеву формулу.

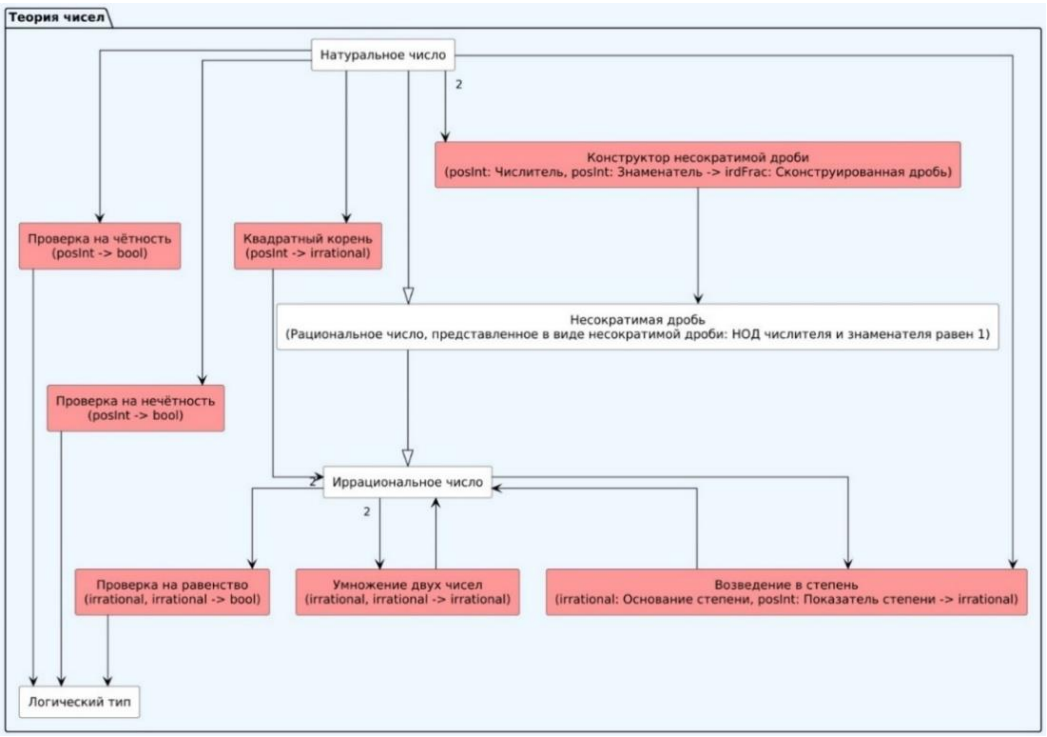


Рис. 1. Онтология «Теория чисел», сгенерированная ONTOL

ЛИТЕРАТУРА
1. Молотков И. И., Новиков Ф. А. Онтология дискретной математики в образовании // Компьютерные инструменты в образовании, 2021, №1, с. 69–85.
2. Krasheninnikov S. V., Kurnosov D. A., Nakhatovich M. A., Novikov F. A. Development and implementation of intellectual components of the digital educational environment / In: EDULEARN23 Proceedings, IATED, 2023, с. 6535-6541.
3. ONTOL PyPI. URL: https://pypi.org/project/ontol/ (дата обращения: 28.03.2025)
4. PlantUML Language Reference Guide. URL: https://plantuml.com/ru/guide (дата обращения: 28.03.2025)
5. Curry, H. B., Feys, R. Combinatory Logic Vol. I. — Amsterdam: North-Holland, 1958.
6. Howard, W. A. The formulae-as-types notion of construction / In: To H.B. Curry: Essays on Combinatory Logic, Lambda Calculus and Formalism. — Boston: Academic Press, 1980. — С. 479–490.
7. jsCoq – Use Coq in Your Browser. URL: https://coq.vercel.app/examples/sqrt_2.html (дата обращения 10.04.2025)

УДК 004.415.22

Н.Е. Моторный, Ф.А. Новиков
Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого(*)

ИСПОЛЬЗОВАНИЕ ЯЗЫКА PYTHON КАК ДЕКЛАРАТИВНОГО DSL ОПИСАНИЯ PlantUML ДИАГРАММ

Введение. Инструмент PlantUML [1] является повсеместно распространенным в индустрии для работы с UML диаграммами [2] благодаря лаконичному текстовому языку, сильному сообществу и открытому исходному коду программных модулей. Инструмент состоит из декларативного языка DSL (Domain specific language), позволяющего описывать девять типов UML диаграмм, и программной утилиты, предназначенной для преобразования текстовых описаний диаграмм на формальном языке в изображения. Утилита покрывает широкий спектр задач: от валидации синтаксиса DSL, до оптимизации расстановки элементов диаграммы на холсте с целью повышения общей читаемости. В файлах определения диаграмм, обычно имеющих расширение .puml, можно использовать возможности препроцессора, включающего в себя набор базовых функций и конструкций ветвления. Препроцессинг имеет синтаксис и принципы работы, схожие с языком Си, то есть оперирует подаваемым на вход файлом как набором подстрок, без анализа их семантической нагрузки как конструкций языка PlantUML.

Следующие практические и технические ограничения инструментария PlantUML обуславливают невозможность расширения спектра решаемых задач: доступные для использования императивные конструкции не взаимодействуют с семантикой DSL; для работы необходимо изучать два новых языка; слабые возможности статического анализа языка PlantUML, что осложняет его использование; непредоставление средств работы с распространенными парадигмами, такими как система типов или ООП; манипуляции с сущностями, составляющими диаграмму, например, их запись в СУБД, а также расширение их семантики, возможно только либо посредством создания отдельного парсера, либо модификацией исходного кода Java распространяемого модуля рендеринга диаграмм. Решение отмеченных сложностей возможно с помощью внедрения в процесс работы с диаграммами использующихся в промышленности языков программирования [3] и построения в них дополнительного уровня абстракции для работы с диаграммами. Преимуществом также будет являться унификация набора языков, используемого как при работе с диаграммами, так и при другой научной деятельности пользователей. В связи с тем,

(*) Н.Е. Моторный, nikita.motorny@mail.ru

что язык Python в данный момент является одним из самых распространенных языков для прототипирования научных решений и связывания различных компонент систем, в данной работе рассматривается именно он.

Обзор существующих решений. Представленные в открытом доступе библиотеки на языке Python в большинстве своем ориентированы только на предоставление API для доступа к модулю рендеринга изображений, то есть им на вход поступает plantUML файл. Примерами таких библиотек являются: python-plantuml и Plantweb. Другую позицию занимает библиотека py2puml, позволяющая генерировать файлы на языке PlantUML, однако она заточена под одну узкоспециализированную задачу – создание диаграммы классов по существующему Python приложению.

Подход с введением уровня абстракции для работы с сущностями вне программы активно используется в библиотеке SQLAlchemy [4], в который декларативные определения классов на языке Python соответствуют таблицам в СУБД и позволяют генерировать запросы на языке SQL.

```
class User(Base):
    __tablename__ = "user_account"
    id = mapped_column(primary_key=True)
    name = mapped_column(String(30))
```

Цели и задачи. Целью работы является анализ и использование возможностей языка Python для построения расширяемого декларативного DSL описания UML диаграмм. Среди задач работы: создание библиотеки на языке Python, позволяющей задавать диаграммы на python-совместимом DSL, обработка таких файлов и генерация эквивалентных описаний этих диаграмм на языке PlantUML. Также, библиотека должна быть расширяемой как авторами, так и пользователями, с целью упрощения ее адаптации к предметной области пользователя.

Авторские результаты. В данной работе авторы используют язык Python в качестве упомянутого уровня абстракции, так как широкие возможности Python в работе с рефлексией и динамическая типизация способствуют созданию интуитивного и удобного для конечного пользователя API работы с диаграммами. Авторами предлагается библиотека, позволяющая задавать UML диаграммы с помощью декларативных определений, соответствующих синтаксису языку Python, с последующей трансляцией в файлы формата .puml для визуализации стандартными инструментами PlantUML. API библиотеки представляет собой DSL для описания диаграмм, синтаксис которого является подмножеством синтаксиса Python, благодаря этому файлы описания диаграмм могут быть подключены к приложению как стандартные Python модули, а также обогащены любыми конструкциями Python или его сторонними библиотеками.

Библиотека состоит из следующих структурных элементов, модулей: *ядром* библиотеки является класс `UmlCollection`, обеспечивающий группировку элементов диаграммы, модуль *exporter* отвечает за создание выходного текстового файла формата .puml, различные *утилиты*, предназначены, например, для декларативного задания условных конструкций. Далее, на основании *базового интерфейса* `Umable`, определены классы, соответствующие определенным элементам UML нотации. Создание экземпляров этих классов добавляет элементы UML к будущей диаграмме. На данный момент с библиотекой распространяется набор классов, предназначенных для работы с UML диаграммой состояний. Библиотека является расширяемой, так как пользователи могут добавлять свои реализации классов, отображающих другие элементы нотации UML, поддерживаемые в синтаксисе PlantUML.

Далее приводятся примеры работы с UML диаграммой состояний. Определение набора состояний выглядит следующим образом:

```
a = UmlStateC(title="A", style="#line:red;line.bold")
b = UmlStateC(title="B").
```

Отличительная особенность библиотеки – отсутствие необходимости явного связывания каждого элемента диаграммы с экземпляром диаграммы, с сохранением изоляции экземпляров диаграмм. Это достигается с помощью функции из ядра библиотеки, которая ассоциирует с диаграммой не каждый элемент, а используемые типы элементов:

```
uml_colleciton = UmlCollection()
UmlStateC = uml_colleciton.assoc(UmlState)
uml_colleciton_2 = UmlCollection()
UmlStateC2 = uml_colleciton_2.assoc(UmlState)
a1 = UmlStateC(title="A")
a2 = UmlStateC2(title="A"),
```

где UmlState – класс, импортированный из модуля работы с диаграммами состояний.

Связывание типов элементов с диаграммой также делает более лаконичным определение диаграммы, так как отпадает необходимость явно указывать диаграмму в каждом элементе, например:

```
a = UmlStateC(collection=uml_colleciton, title="A")
```

или

```
a = UmlStateC(title="A")
uml_colleciton.bind(ok).
```

Применение библиотеки открывает набор возможностей, рассмотренный с примерами далее. Добавление семантики предметной области любым элементам нотации PlantUML можно проиллюстрировать тремя различными определениями одного и того же перехода между состояниями от a к b:

```
a.transition_to(b)
a.leads_to(b)
b.transition_from(a)
```

Конструкции ветвления могут быть добавлены, например, для условного связывания, в диаграмму как декларативные с помощью функций из библиотеки:

```
a.transition_to(condition_if(b, cond=<any expression>))
```

так и с помощью императивных конструкций самого языка, благодаря соответствию синтаксиса:

```
if <any expression>:
    a.transition_to(b)
```

Все прочие конструкции языка Python также могут применяться в файле описания диаграммы, с целью параметризации или организации внутренней структуры файла.

Работая с диаграммами в нотации, предлагаемой библиотекой, пользователи избегают необходимости изучения синтаксиса языка PlantUML и его препроцессора, а также получают полный доступ к всем средствам статического анализа, использующихся в промышленном программировании, в том числе к анализу и поиску ошибок на основании системы типов. Так как сущности диаграммы определены объектами языка Python, описание диаграммы можно далее использовать не только для генерации изображения, но и для любых других целей. Например, диаграмму состояний можно использовать для создания таблицы переходов конечного автомата.

Артефактом работы программы, использующей созданную библиотеку, является .puml файл, который затем будет преобразован в визуальное отображение диаграммы с помощью утилиты PlantUML. Пример файла приведен ниже:

```
@startuml example-diag
state "A" as a
state "B" as b
state "C" as c
a --> b
b --> c
@enduml
```

Исходный код разработанной библиотеки опубликован как Python пакет pypuml-gen [5].

ЛИТЕРАТУРА
1. PlantUML Language Reference Guide. URL: https://plantuml.com/ru/guide (дата обращения: 25.03.2025)
2. Новиков Ф. А., Иванов Д. Ю. Моделирование на UML. Теория, практика, видеокурс. СПб: Наука и Техника, 2010. - 640 с.
3. Заика И. В. Обзор современных языков программирования. Информационные и инновационные технологии в науке и образовании / Сборник научных трудов по итогам VII всероссийской научно-практической конференции с международным участием, 27–28 октября 2022 г. - Таганрог, 2023. - С. 441-442.
4. Исходный код библиотеки pypuml-gen. URL: https://github.com/motorny/pypuml-gen (дата обращения 25.03.2025)
5. Документация библиотеки SQLAlchemy. URL: https://docs.sqlalchemy.org/en/20/index.html (дата обращения 25.03.2025)

УДК 004.85, 519.85, 577.218

А.Ю. Волгузов, Е.А. Родионова
Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого(*)

ОПТИМИЗАЦИЯ ВЫБОРА ПРИЗНАКОВ В ЗАДАЧАХ КЛАССИФИКАЦИИ И АНАЛИЗЕ ЭКСПРЕССИИ ГЕНОВ

Введение. Современная генетика часто сталкивается с необходимостью обработки огромных массивов данных, где число исследуемых генов значительно превышает количество доступных образцов. Это создает сложности при выявлении ключевых биомаркеров, так как традиционные методы отбора признаков нередко приводят к переобучению и затрудняют интерпретацию результатов [1,2]. Цель работы - разработка и исследование гибридного метода отбора признаков на основе алгоритма светлячков (FA) с локальным поиском для повышения качества классификации биомедицинских данных [3]. В качестве базового классификатора выбран метод опорных векторов (SVM) ввиду его успешно зарекомендованной эффективности на задачах классификации по экспрессии генов. Проведено сравнение предлагаемого метода с альтернативными подходами: снижением размерности методом главных компонент (PCA) и отбором признаков с помощью логистической регрессии с L1-регуляризацией (LASSO).

Методы. Перед запуском алгоритма проводится фильтрация признаков: исключаются признаки с низкой дисперсией и высокой корреляцией (|r| > 0.9). Затем выполняется фильтрация с учетом меток класса по ANOVA-критерию ($p - value < \alpha$). Данная фильтрация позволяет существенно сократить исходное пространство признаков, сохраняя информативные признаки и подготавливая данные для дальнейшей оптимизации.

Инициализация алгоритма FA – SVM: Популяция алгоритма инициализируется случайным образом: $\Delta = \{\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_n\}$, где $\delta_i \in [0,1]^m$, m – число признаков после фильтрации. Компоненты вектора интерпретируются как интенсивность выбора признаков: чем ближе значение к 1, тем выше вероятность включения в модель. Для получения корректного подмножество применяется пороговое округление: если $\delta_i[j] > \theta$, то j-й признак считается активным, иначе не используется. Значение θ выбирается эмпирически, δ_i оценивается по целевой функции, учитывающей точность классификации на подмножестве признаков и штраф за размер подмножества [4]:

$$B(\delta_i) = \lambda_1 * Acc\left(SVM\left(S(\delta_i)\right)\right) - \lambda_2 \frac{|\,S(\delta_i)\,|}{D}, \qquad (1)$$

(*) А.Ю Волгузов, volguzov.ayu@edu.spbstu.ru

где $S(\delta_i)$ – множество признаков, выбранных на основе пороговой бинаризации вектора δ_i, D – общее число доступных признаков после фильтрации, λ_1, λ_2 — коэффициенты задающие степень штрафа за размер подмножества, $Acc(SVM(S(\delta_i)))$ – оценка точности классификации, полученная с помощью модели SVM, обученной на подмножестве признаков $S(\delta_i)$. Эта оценка служит для определения качества текущего решения в алгоритме FA. Таким образом, алгоритм стремится находить точные и при этом минимальные по размеру подмножества признаков

Правило обновления. Пусть δ_j обладает большей интенсивность, чем δ_i ($B(\delta_j) > B(\delta_i)$), тогда δ_i обновляется в направлении δ_j по закону:

$$\delta_i^{t+1} = \delta_i^t + \beta_0 e^{-\gamma r_{ij}^2}\left(\delta_j^t - \delta_i^t\right) + \alpha * \varepsilon \quad (2)$$

где α - амплитуда случайного движения, δ_i^t— положение i-го светлячка на итерации t, $\varepsilon \sim U(-0.5,0.5)^m$ – случайный шум, β_0 – базовая привлекательность, γ – коэффициент затухания, r_{ij} – евклидово расстояние между светлячками i и j.

После завершения основного цикла итераций проводится локальный поиск для улучшения наилучшего найденного решения. На каждом шаге поочередно инвертируются отдельные признаки ($0 \to 1$ или $1 \to 0$) и изменения сохраняются, если они улучшают значение функции приспособленности. Это позволяет дополнительно уменьшить размер подмножества без потери точности [5].

Дополнительные методы. FA+PCA+SVM: сначала алгоритм FA отбирал подмножество исходных признаков. Затем к данным, содержащим только эти отобранные признаки, применялся метод главных компонент (PCA) для дальнейшего снижения размерности. Итоговая классификация проводилась с помощью SVM на полученных главных компонентах.

FA+LASSO: В качестве фитнес-функции для FA использовалась точность логистической регрессии с L1-регуляризацией.

Результаты. Используемые наборы данных представлены в табл.1.

Табл. 1. Наборы данных используемые в работе

Набор данных	Образцы	Признаки	Образцов в каждом классе
Lung [6]	96	7129	86 опухолей и 10 норм
Colon [7]	62	2000	40 опухолей и 22 нормы
Leukemia1 [1]	72	7129	25 ОМЛ и 47 ОЛЛ

В табл. 2–4 приведены результаты сравнения методов. Для оценки точности классификации использовалась процедура LOOCV (Leave-One-Out Cross-Validation), обеспечивающая максимально полное использование выборки при ограниченном числе объектов. В итоговых таблицах представлены средние значения точности классификации и числа отобранных признаков, усредненные по 10 запускам.

Табл. 2. Результаты на наборе данных lung

Метод	Число признаков	Точность
FA+SVM	2	1.0000
FA+SVM (no local)	4	1.0000
FA+PCA+SVM	5	1.0000
FA+LASSO	3	1.0000

Все варианты на наборе lung достигли 100%-й точности классификации. При этом FA+SVM с локальным поиском позволяет сократить число признаков до 2.

Табл. 3. Результаты на датасете colon

Метод	Число признаков	Точность
FA+SVM	9	0.9679
FA+SVM (no local)	11	0.8872
FA+PCA+SVM	32	0.9038
FA+LASSO	5	0.8577

Для набора colon максимальная точность 96.79% была достигнута FA+SVM с локальным поиском, при этом количество отобранных признаков 9 находится в среднем диапазоне. Интересно, что FA+LASSO выбрал всего 5 признаков, обеспечив точность 0.8577. Это чуть ниже по точности, но дает более компактное решение.

Табл. 4. Результаты на датасете leukemia1

Метод	Число признаков	Точность
FA+SVM	17	1.0000
FA+SVM (no local)	44	1.0000
FA+PCA+SVM	58	0.9857
FA+LASSO	36	0.9857

На последнем датасете leukemia1 лучше всего проявил себя FA+SVM с локальным поиском 100%-я точность при относительно небольшом числе признаков 17.

Заключение. Экспериментальные результаты показали, что метод FA+SVM с локальным поиском достиг более высокой точности классификации при меньшем числе отобранных признаков по сравнению с другими рассмотренными методами отбора, такими как FA+PCA+SVM и FA+LASSO.

Разработанный гибридный метод подтвердил свою эффективность в задаче отбора признаков для классификации по экспрессии генов. В качестве дальнейших направлений исследования предлагается расширить данный подход на мультиклассовые задачи, например, при наличии нескольких типов или подтипов заболевания. Кроме того, необходимо протестировать метод на данных RNA-seq с еще более высоким числом генов и большим варьированием уровня экспрессии. Перспективным направлением является и исследование влияния адаптивных стратегий изменения параметров алгоритма (α, β, γ) в ходе его выполнения, что потенциально позволит повысить его эффективность и точность.

ЛИТЕРАТУРА

1. Golub T.R., Slonim D.K., Tamayo P. et al. Molecular classification of cancer: class discovery and class prediction by gene expression monitoring // Science. – 1999. – Vol. 286 (5439). – P. 531–537.
2. Guyon I., Gunn S., Benbouzid D., Dror G. Design of experiments for the NIPS 2003 variable selection benchmark // NIPS 2003 workshop on feature extraction. – 2004. – P. 1–6.
3. Yang X.-S. Firefly algorithms for multimodal optimization // International Symposium on Stochastic Algorithms. – Springer, 2009. – P. 169–178.
4. Almugren N., Alshamlan H. FF-SVM: New FireFly-based Gene Selection Algorithm for Microarray Cancer Classification / In: 2019 Int. Conf. on Computer and Information Sciences (ICCIS). – IEEE, 2019. – P. 1–6.
5. Moradi P., Gholampour M. A hybrid particle swarm optimization for feature subset selection by integrating a novel local search strategy // Applied Soft Computing. – 2016. – Vol. 43. – P. 117–130.
6. Beer D.G., Kardia S.L., Huang C.-C. et al. Gene-expression profiles predict survival of patients with lung adenocarcinoma // Nature Medicine. – 2002. – Vol. 8, № 8. – P. 816–824.
7. Alon U., Barkai N., Notterman D.A. et al. Broad patterns of gene expression revealed by clustering analysis of tumor and normal colon tissues probed by oligonucleotide arrays // Proceedings of the National Academy of Sciences of the USA. – 1999. – Vol. 96, № 12. – P. 6745–6750.

УДК 519.853

П.Г. Двас, Е.А. Родионова
Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого(*)

ПРЕДМЕТНО-ОБЪЕКТНАЯ ИНВЕРСИЯ В ПРИМЕНЕНИИ К ЗАДАЧАМ СМЕШАННОГО ЦЕЛОЧИСЛЕННОГО НЕЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ (MINLP)

Введение. В работе рассматривается предметно-объектная инверсия, применительно к задачам MINLP на примере известной задачи оптимизации режима полива подсолнечника [1]. В рамках функционально-структурной модели растения GreenLab задаются интенсивности полива в начале и конце жизненного цикла растения. Предметно-объектная инверсия в данном контексте заключается в перестановке ролей между управляющими параметрами (режимом полива) и целевой переменной (весом плода), что позволяет трактовать задачу как задачу оптимизации, к которой можно применять различные алгоритмы решения.

Описание используемой модели. В данной работе была использована функционально-структурная модель растения (FSPM) GreenLab [2]. GreenLab является общей и механистической FSPM, поскольку различные ботанические архитектуры могут быть получены с помощью ее реализации органогенеза, а рост растения регулируется конкуренцией по биомассе между растущими органами. Вместе с тем GreenLab — это математическая динамическая модель, направленная на моделирование и имитацию создания и производства растительных структур. Модель позволяет получить количественную оценку структуры (количество органов и т.д.), не требуя исчерпывающей структурной реализации. При этом производство органов количественно описывается частями растений, конкурирующими за общий пул биомассы. Отличительной особенностью модели GreenLab является и то, что ее органогенез (в смысле количества органов) и рост (в смысле биомассы органов) формулируются с помощью рекуррентных уравнений. Это облегчает аналитическое исследование поведения модели, а также применение эффективных алгоритмов оптимизации для идентификации параметров или решения задач оптимального управления.

В модели GreenLab рост растения происходит в соответствии с его биологическими циклами роста (GC). Для каждого растения данный параметр уникален, в данной работе моделируется подсолнечник, имеющий 63 цикла [3]. На каждом этапе роста растения GreenLab вычисляет различные характеристики растения, в том числе вес плода, учитывая множество параметров, в том числе, объем воды, получаемой растением. Именно этот параметр является в данной работе основным.

Вместо оптимизации подачи воды на каждом цикле роста растения рассмотрим кривые распределения общего количества подаваемой воды. Используем параметризованную бета-функцию для генерации кластера кривых водоснабжения, учитывая общий объем водоснабжения. В качестве параметров бета-функции выберем интенсивность полива растения в начале и конце жизненного цикла растения.

Приведем соответствующие выражения для общего количества подаваемой воды в цикле [4]:

$$U_i = \frac{WT}{S}\left(\frac{i-0.5}{N}\right)^{a-1}\left(1-\frac{i-0.5}{N}\right)^{b-1},$$

где WT – общее количество воды за все время, N – общее число биологических циклов роста, i – номер текущего цикла роста, a, b – соответствующие параметры бета-функции, S – нормирующий коэффициент, определяемый выражением:

(*) П.Г. Двас, pavel@dvas.ru

$$S = \sum_{i=1}^{N} \left(\frac{i-0.5}{N}\right)^{a-1} \left(1 - \frac{i-0.5}{N}\right)^{b-1}$$

Введем две переменные, $startGC$ и $freq$, обозначающие, соответственно, номер биологического цикла роста, с которого начинается полив, и частоту (в циклах роста), с которой поливается растение. Тогда номер текущего цикла i будет выглядеть так:

$$i = freq \cdot j + startGC, 1 \le j \le N$$

Приведем выражение для функции цели:

$$f(a, b, startGC, freq) = P_0 \cdot \frac{Q(a, b, startGC, freq)}{D(startGC, freq)}, \quad (1)$$

где $Q(a, b, startGC, freq)$ – биомасса, полученная в результате фотосинтеза всех листьев растения на конкретном цикле роста, $D(startGC, freq)$ – требуемая биомасса на каждом цикле роста, P_0 – силы поглощения растения (является скрытым параметром модели). Выражения для Q и D также являются заданными и подробно описаны в [4].

Постановка задачи. Поставим задачу поиска максимума функции (1) при ограничениях:

$$1 \le a, b \le 100$$
$$startGC, freq \text{ считаются зафиксированными} \quad (2)$$

Описание реализованного алгоритма. Для решения задачи (2) в работе применяется муравьиный алгоритм [5]. Данный алгоритм является эвристическим, основанным на моделировании поведения муравьев в природе, которые оставляют феромоны на пути к пище. Чем лучше путь (решение), тем больше феромонов на нем остается, что привлекает других муравьев. В нашей задаче феромоны отвечают за вероятность выбора определенного решения оставшимися «муравьями». Феромоны имеют свойство испаряться с течением временем, что регулируется соответствующим коэффициентом.

Анализ результатов. В табл. 1 представлены результаты, полученные с помощью муравьиного алгоритма, а в табл. 2 – результаты решения задачи методом, предложенным в [6]. Следует отметить, что при одинаковых начальных условиях решения, полученные муравьиным алгоритмом, оказались лучше, так как вес плода оказался больше.

Табл. 1. Результаты решения задачи муравьиным алгоритмом

Значения параметров				Оптимальный вес плода (г)	Номер поколения
a	b	startGC	freq		
1.3757	1.1575	1	2	1204.1	30
1.3799	1.1527	1	2	1205.7	11
1.3891	1.1615	1	2	1207.8	46

Табл. 2. Результаты решения задачи алгоритмом [6]

Значения параметров				Оптимальный вес плода (г)	Номер поколения
a	b	startGC	freq		
1.3686	1.1934	1	2	1196.3	110
1.3263	1.1632	1	2	1196.3	92
1.3263	1.1571	1	2	1196.6	108

Заключение. В работе показано, что предметно-объектная инверсия в применении к задачам смешанного целочисленного нелинейного программирования позволяет повысить качество решения и эффективно использовать для поиска оптимального решения эвристический муравьиный алгоритм.

ЛИТЕРАТУРА
1. Wu L., De Reffye P., Hu B.-G., Le Dimet F.-X., Cournède P.-H. A water supply optimization problem for plant growth based on GreenLab model / Revue Africaine de la Recherche en Informatique et Mathématiques Appliquées. – 2005. – Special Issue CARI'04. – P. 194-207.
2. Plant growth architecture and production dynamics. [Электронный ресурс]. – Режим доступа: https://greenlab.cirad.fr/GLUVED/html/P2_GLab/GL_intro.html (дата обращения: 02.02.2025).
3. Zhan Z., Wang Y., De Reffye P., Wang Bingbing, Xiong Yanwen. Architectural Modeling of Wheat Growth and Validation Study / ASAE Annual International Meeting. – 2000. – P. 30-45.
4. Wu L. Variational Methods Applied to Plant Functional-Structural Dynamics: Parameter Identification, Control and Data Assimilation: diss. … PhD; specialty – Applied Mathematics Laboratoire de Modélisation et Calcul, Université Joseph Fourier, 2005. – 169 P.
5. Dorigo M., Birattari M., Stutzle T. Ant Colony Optimization // IEEE Computational Intelligence Magazine – 2006. – P. 28-39.
6. Lin C.Y., Hajela P. Genetic algorithms in optimization problems with discrete and integer design variables // Engineering Optimization. – 1992. – P. 309–327.

УДК 519.872.3

В.Е. Бакшеев, О.И. Заяц
Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого(*)

ИССЛЕДОВАНИЕ ПРИОРИТЕТНОЙ СИСТЕМЫ ОБСЛУЖИВАНИЯ С ДЕТЕРМИНИРОВАННЫМ ВЫТАЛКИВАЮЩИМ МЕХАНИЗМОМ И РАНДОМИЗИРОВАННОЙ ПРОФИЛАКТИКОЙ КАНАЛА ОБСЛУЖИВАНИЯ

В современной теории массового обслуживания (ТМО) имеется большое число самых разнообразных моделей систем массового обслуживания (СМО). Эти модели постоянно модифицируются и совершенствуются, чтобы более точно описывать реальную ситуацию. Например, в последние десятилетия разработана теория приоритетных СМО с выталкивающим механизмом [1]. Настоящая работа посвящена гораздо менее употребительной модификации СМО, в которой при определенных условиях допускаются контролируемые перерывы в работе. В англоязычной литературе эти перерывы называют словом *vacation*, далее будем использовать термин *профилактика*.

Как и в любой новой модели СМО выбор момента начала профилактики определяется потребностями практики. В настоящей работе этот момент наступает при полном освобождении системы от требований. Цель исследования - изучение влияния такого видоизменения работы СМО на ее поведение по сравнению с обычной моделью [2,3].

В нотации Д. Кендалла [4], Г.П. Башарина [5] и Б.Доши [6] данная система имеет обозначение $\overrightarrow{M_2}$/M/1/k/f_2^2/V_R (два входящих потока, один канал обслуживания, емкость k, абсолютный приоритет, детерминированный выталкивающий механизм). Время профилактики распределено экспоненциально. Если в течение профилактики новых заявок не было, то система с вероятностью γ переходит в состояние их ожидания, а с вероятностью $1-\gamma$ уходит на новую профилактику. Схема такой СМО представлена на рис. 1.

Главные характеристики системы - финальные вероятности ее состояния вычислялись методом производящих функций [7]. С его помощью были вычислены такие практически важные показатели, как вероятности потери обоих типов требований, вероятность проведения профилактики, а также вероятность простоя системы. Для двух последних были выведены аналитические формулы. Эти аналитические выражения являются достаточно громоздкими и для краткости здесь не приводятся.

(*) В.Е. Бакшеев, baksheev.ve@edu.spbstu.ru

Оказалось, что вероятности потери требований весьма слабо зависят от параметра проведения профилактики γ. Графики вероятностей потери в зависимости от значений γ представлены на рис. 2.

На рис. 3 приведено отношение вероятности простоя к вероятности профилактики в зависимости от параметра γ, а также в зависимости от загрузки системы ρ.

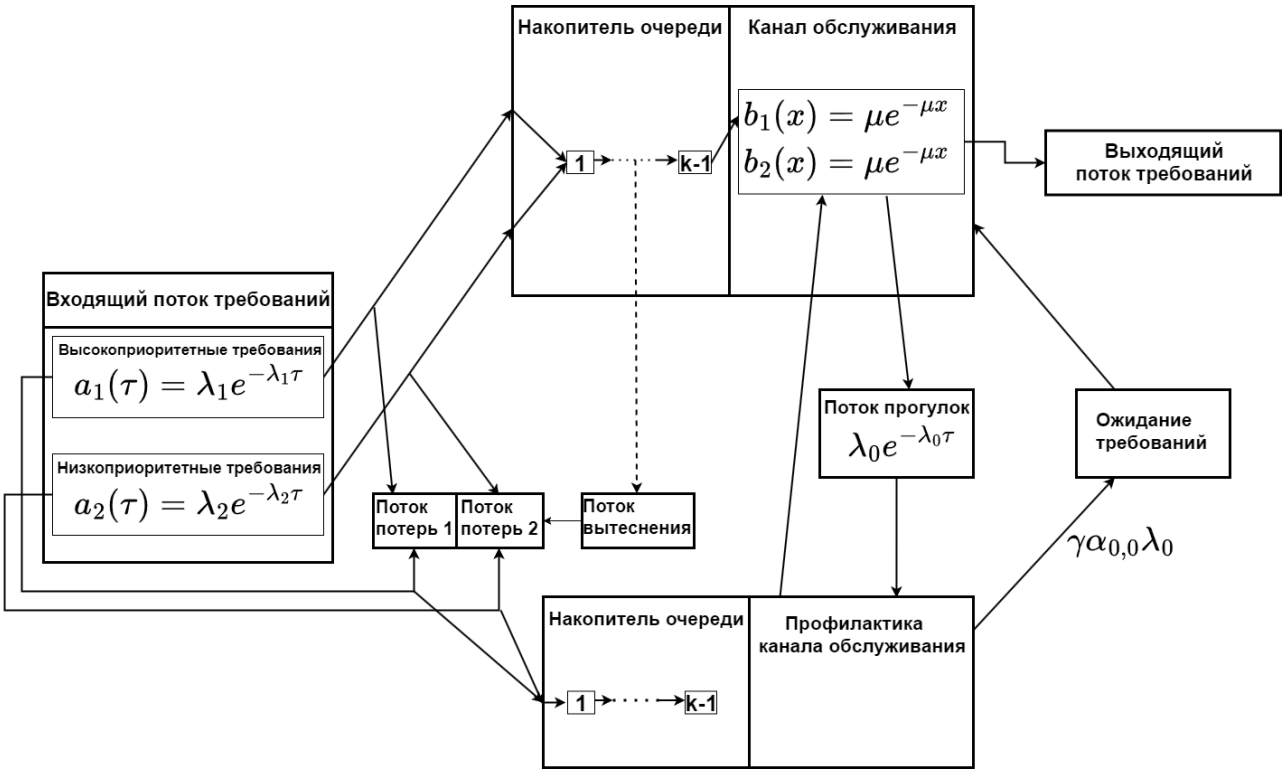


Рис. 1. Схема СМО класса $\overrightarrow{M_2} / M /1/ k / f_2^2 / V_R$

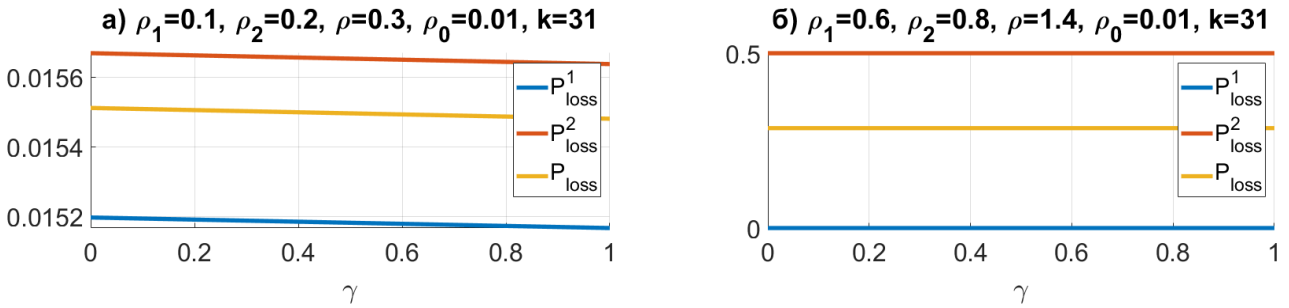


Рис. 2. Зависимость вероятностей потери от параметра проведения профилактики γ в случае а) слабой загрузки; б) сильной загрузки

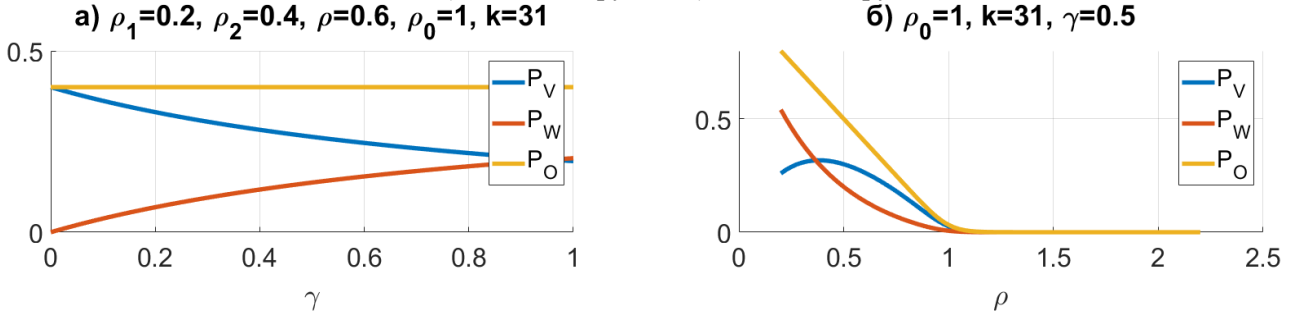


Рис. 3. а) Зависимость вероятности проведения профилактики от параметра профилактики γ; б) Зависимость вероятности простоя от общей загрузки системы ρ

Можно отметить ряд качественных особенностей полученных графиков:

1. Параметр проведения профилактики γ слабо влияет на вероятности потери требований. Даже при слабой загрузке их относительное изменение не превосходит 1%. При сильной загрузке оно вообще пренебрежимо мало.

2. Параметр γ, напротив, существенно влияет на отношение вероятностей простоя и профилактики. Так, с увеличением γ вероятность простоя, возрастает от нуля до значений, которые даже могут превзойти вероятность проведения профилактики. Факт наличия пересечения этих двух графиков зависит от задания конкретных значений числовых значений параметров системы

3. Вероятность простоя системы в случае ее слабой загрузки нечувствительна к изменениям γ. Этот вывод подтверждают также выведенные в работе асимптотические формулы, согласно которым кривые вероятности простоя и вероятности профилактики асимптотически аппроксимируются некоторыми гиперболами.

4. Для слабо загруженных систем зависимость вероятности простоя от параметра загрузки ρ достаточно точно описывается функцией $1-\rho$. Для сильно загруженных систем эта зависимость усложняется и оказывается пропорциональной ρ^{-k}. На участке слабой загрузки кривая вероятности простоя сохраняет форму гиперболы, а вероятность проведения профилактики будет описываться более сложной дробно-рациональной функцией.

Разобранная в данной работе модель СМО имеет существенную практическую значимость, а ее детальный анализ представляет собой актуальную прикладную задачу. Хотя работа непосредственно была ориентирована на решение задачи удаленного управления роботами на борту космической станции, детально описанной в [2,3], однако аналогичные проблемы возникают и в других приложениях, например, при управлении беспилотными летательными и подводными аппаратами, при беспилотном вождении автомобилей и в других подобного же рода задачах. Рандомизация профилактики является естественным обобщением других ее вариантов, известных из литературы. Она является весьма простым, но достаточно эффективным средством более тонкой настройки системы. В результате исследования получены важные прикладные результаты, которые могут быть использованы при проектировании и расчете реальных телематических систем.

ЛИТЕРАТУРА

1. Вишневский В. М. Теоретические основы проектирования компьютерных сетей. — М.:Техносфера, 2003. — 512 с.

2. Заяц О.И., Заборовский В.С., Мулюха В.А., Вербенко А.С. Управление пакетными коммутациями в телематических устройствах с ограниченным буфером при использовании абсолютного приоритета и вероятностного выталкивающего механизма. Часть 1 // Программная инженерия.— 2012. — № 2. — С. 22—27.

3. Заяц О.И., Заборовский В.С., Мулюха В.А., Вербенко А.С. Управление пакетными коммутациями в телематических устройствах с ограниченным буфером при использовании абсолютного приоритета и вероятностного выталкивающего механизма. Часть 2 // Программная инженерия.— 2012. — № 3. — С. 21—29.

4. Кендалл Д. Стохастические процессы, встречающиеся в теории очередей, и их анализ методом вложенных цепей Маркова // Математика. — 1959. — Т. 3, № 6. — С. 97—111.

5. Башарин Г. П. Некоторые результаты для системы с приоритетом // Массовое обслуживание в системах передачи информации. М.:Наука. — 1969. —С. 39—53.

6. Doshi B. Queueing systems with vacations - a survey // Queueing systems. —1986. —Vol. 1, no. 1. — P. 29–66.

7. Ильяшенко А. С. Модели и метод исследования приоритетных систем массового обслуживания с вероятностным выталкивающим механизмом. Кандидатская диссертация. — СПб: СПбГПУ, 2015. — 150 с.

УДК 575.112

И.М. Маликов, К.Н. Козлов
Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого (*)

ПРЕДСКАЗАНИЕ ФЕНОТИПА РАСТЕНИЙ НА ОСНОВЕ ГЕНОТИПА С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ ТРАНСФОРМЕРОВ

Современ ные методы молекулярной селекции растений требуют точных инструментов для прогнозирования фенотипа на основе генетической информации [1]. В частности, в сельском хозяйстве важно учитывать не только средние прогнозные значения признаков, но и их возможные колебания, обусловленные изменениями условий внешней среды. В данном исследовании представлен инновационный подход, сочетающий архитектуры трансформеров [2] и вариационный автоэнкодер (VAE) [3], для предсказания фенотипа нута (масса 1000 семян, TSW) на основе генотипических данных.

Материалы и методы. SNP-маркеры (однонуклеотидные полиморфизмы) — это наиболее распространенный тип генетических вариаций, представляющий собой замену одного нуклеотида на другой в определенном участке ДНК [4].

Задача геномного прогнозирования заключается в восстановлении регрессионной зависимости целевой переменной — важного фенотипического признака, от предикторов — значений в определенных позициях генетического кода (SNP), по данным — наблюдениям о проявлении признака у набора образцов в эксперименте.

Таким образом, необходимо построить функцию:

$$y = f(x) + \epsilon,$$

где y — фенотипическое значение, $x \in R^n$ — вектор генотипических признаков (SNP-маркеров с позиционной информацией), $\epsilon \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2)$ — стохастическая ошибка, распределенная по нормальному закону, моделирующая влияние внешней среды и прочих ненаблюдаемых факторов (σ^2 — стандартное отклонение полученного распределения).

Построение модели основано на нейронной сети, сочетающей архитектуру трансформеров и вариационного автоэнкодера (VAE). Для начала генотипические данные $x \in R^n$, представленные в виде векторов SNP-маркеров, разворачиваются в формат унитарного кода и объединяются с позиционными данными и данными о важности SNP-маркеров (размеченные отдельной моделью случайного леса). Далее они преобразуются в эмбеддинги фиксированной размерности:

$$z_0 = xW_e + b_e,$$

где $W_e \in R^{n \times d}$ — матрица эмбеддинга, d — размерность эмбеддингового пространства.

Далее они обрабатываются трансформерным энкодером с многоголовым механизмом самовнимания [2]:

$$Attention(Q, K, V) = softmax\left(\frac{QK^\top}{\sqrt{d_k}}\right)V,$$

где

$$Q = zW_Q, \quad K = zW_K, \quad V = zW_V,$$

$W_Q, W_K, W_V \in R^{d \times d_k}$ являются обучаемыми параметрами.

После прохождения нескольких слоев энкодера выходное представление z_T подается в вариационный автоэнкодер, который формирует аппроксимации параметров латентного распределения:

$$\log \sigma^2 = W_\sigma z_T + b_\sigma, \quad \mu = W\mu zT + b\mu, \quad z \sim N(\mu, \sigma^2),$$

(*) И.М. Маликов, ildar72malikov@gmail.com

с использованием трюка параметризации: $z = \mu + \sigma \cdot \epsilon, \epsilon \sim N(0, I)$. В итоге, на основе латентного вектора z модель предсказывает как среднее значение фенотипа:

$$\hat{y} = W_{\text{out}} z + b_{\text{out}},$$

так и доверительный интервал через предсказание дисперсии.

Обучение модели осуществляется путем минимизации функции потерь, включающей отрицательное логарифмическое правдоподобие (Negative Log-Likelihood, NLL) и регуляризатор Кульбака–Лейблера:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} \left[\frac{1}{2} \log \sigma_i^2 + \frac{(y_i - \mu_i)^2}{2\sigma_i^2} \right] + \beta \cdot D_{\text{KL}}[q(z|x)|p(z)],$$

где $p(z) = \mathcal{N}(0, I)$, а β — коэффициент регуляризации.

Исходные данные включали генетическую информацию (SNP-маркеры), полученную в лаборатории СПбПУ на основе образцов, собранных на опытной станции ВИР. Генотипирование проводилось с использованием высокопроизводительного секвенирования. В предварительной обработке данных использовался метод случайного леса (Random Forest) для отбора наиболее значимых SNP-маркеров, что повысило интерпретируемость модели и снизило вычислительные затраты. Данные были разделены на обучающую и тестовую выборки в соотношении 80/20, что позволило адекватно оценить обобщающую способность модели.

Разработанная модель представляла собой модифицированную трансформерную архитектуру, включающую 4 слоя энкодера, 8 голов внимания, механизм нормализации и вариационный автоэнкодер. В отличие от традиционных подходов, модель предсказывала два параметра:

- Среднее значение μ, соответствующее прогнозируемому значению фенотипа.
- Логарифм дисперсии $\log(\sigma^2)$, что гарантировало положительность стандартного отклонения и позволяло оценивать степень уверенности предсказания.

Таким образом, модель учитывала вариативность фенотипических признаков, вызванную как генетическими, так и внешними факторами. Дополнительно был применен метод регуляризации для предотвращения переобучения модели на ограниченном наборе данных.

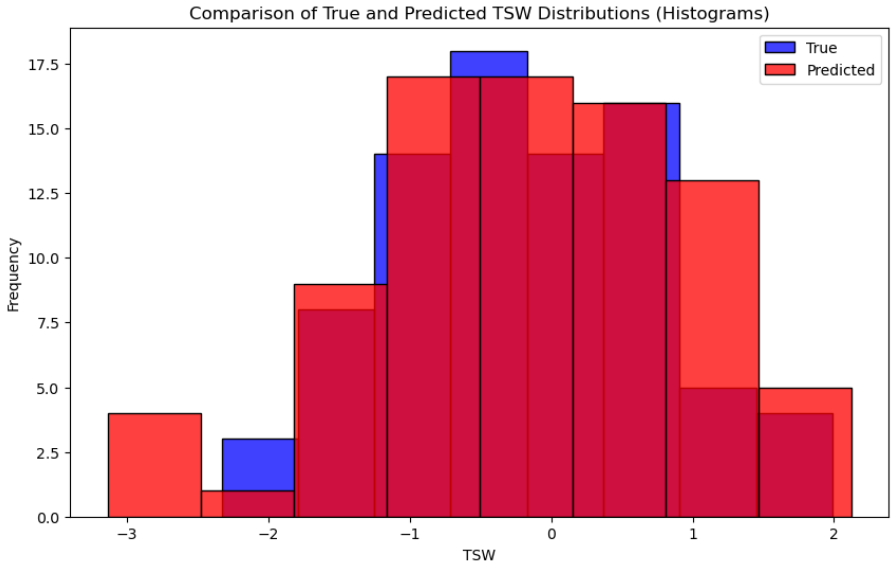


Рис. 1. Гистограммы прогнозного и экспериментального значений признака вес тысячи семян

Результаты. Модифицированная трансформерная модель с VAE продемонстрировала улучшенные показатели точности по сравнению с традиционными методами машинного

обучения. Градиентный бустинг и случайный лес обеспечивали среднюю абсолютную процентную ошибку (MAPE) около 15%, в то время как предложенный метод снизил эту ошибку до 4%. Более того, благодаря предсказанию стандартного отклонения модель позволила сформировать доверительный интервал для каждого предсказанного значения, что делает ее особенно полезной для прогнозирования в условиях изменяющихся факторов окружающей среды.

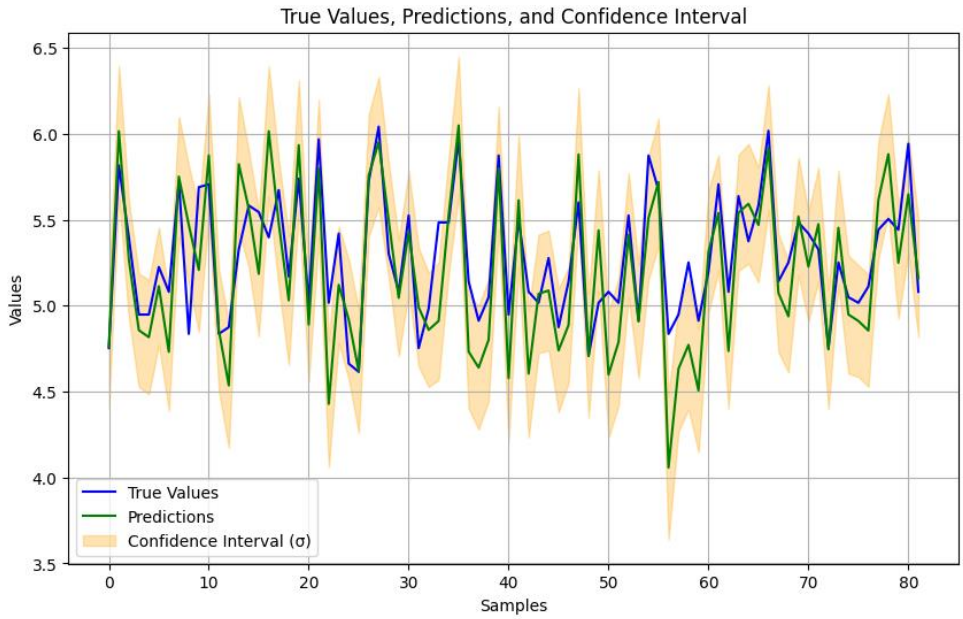


Рис. 2. Доверительный интервал прогнозируемого значения признака

Для оценки качества предсказаний были рассчитаны основные метрики:

- Коэффициент корреляции Пирсона: 0.83 для трансформеров с VAE (по сравнению с 0.78 у градиентного бустинга), что свидетельствует о высокой точности предсказаний.
- MAPE: 4% (против 15% у градиентного бустинга), что демонстрирует значительное улучшение точности прогноза.

Визуализация предсказанных значений в сравнении с реальными показала высокую степень совпадения распределений (рис. 1). Графики плотности продемонстрировали адекватное моделирование разброса значений (рис. 2), что подтвердило способность модели учитывать естественную изменчивость фенотипов. В свою очередь, использование доверительных интервалов позволяет не только предсказывать отдельные значения, но и анализировать степень надежности предсказаний, что особенно важно при принятии решений в селекционных исследованиях.

Заключение. Предложенная архитектура трансформеров с вариационным автоэнкодером открывает новые возможности для предсказания фенотипа растений, обеспечивая не только среднее значение, но и диапазон возможных отклонений. Это может оказаться особенно полезным для селекционных программ, где требуется учитывать природную изменчивость признаков и оценивать уровень доверия к предсказаниям. В дальнейшем планируется расширение модели за счет учета дополнительных биологических факторов, таких как влияние климатических условий и эпигенетических данных, а также применение метода на других культурах. Такой междисциплинарный подход способствует развитию прецизионного сельского хозяйства и устойчивых агротехнологий, повышая эффективность программ селекции и сокращая затраты на полевые испытания.

ЛИТЕРАТУРА
1. Barkur S., Shastry B. SNPs: Impact on Gene Function and Phenotype // *Methods in Molecular Biology (Clifton, N.J.).* – 2009. – Vol. 578. – P. 3–22.
2. Vaswani A., Shazeer N., Parmar N., Uszkoreit J., Jones L., Gomez A.N., Kaiser Ł., Polosukhin I. Attention is All You Need // Advances in Neural Information Processing Systems. – 2017. – Vol. 30.
3. Kingma D.P., Welling M. Auto-Encoding Variational Bayes // *arXiv preprint.* – 2013. – arXiv:1312.6114.
4. Brookes A.J. The essence of SNPs // Gene. – 1999. – Vol. 234, No. 2. – P. 177–186.

УДК 51-76

Т.А. Чибышев, К.Н. Козлов
Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого(*)

РАЗРАБОТКА И СРАВНЕНИЕ КЛАССИФИКАТОРОВ ИЗОБРАЖЕНИЙ КОЛОНИЙ ПСКЧ

Введение. Определение фенотипа плюрипотентных стволовых клеток человека (ПСКЧ) через анализ морфологии актинового цитоскелета критически важно для биомедицинских исследований, как показано в работе [1]. Клетки «плохого» класса, в отличие от «хорошего», теряют свойства плюрипотентности и не могут быть использованы на практике. Визуальная оценка экспертом требует опыта, может занимать продолжительное время и оказаться субъективной. Для решения этой задачи в предыдущих исследованиях были построены классификаторы на основе моделей глубокого обучения VGG (Vision Geometry Group) и Inception-ResNetV2, которые показали среднюю точность 72%. С целью повышения точности в работе рассмотрен классификатор на основе Swin Transformer. Проведено структурирование набора данных для обучения и тестирования моделей.

Данные. Экспериментальный набор содержит 174 изображения с иммунофлуоресцентным окрашиванием (94 «хороший», 80 «плохой» фенотип).

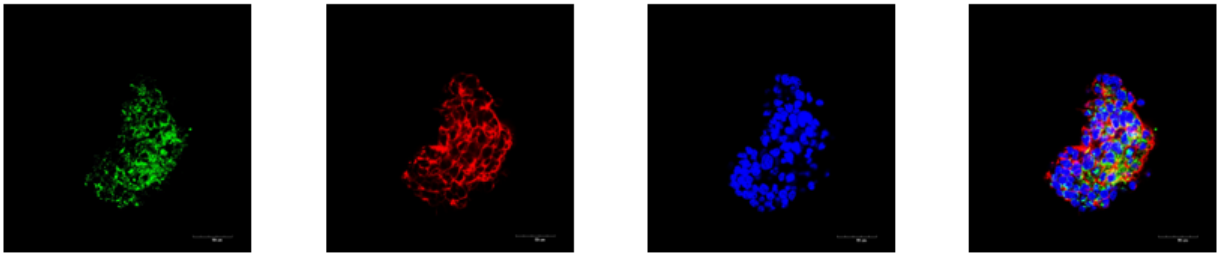


Рис. 1. Примеры исходных данных с тремя каналами a, b, c, объединенными в RGB изображение d. Размер изображений: 512×512 пикселей

Данные получены в трех спектральных каналах (рис. 1), объединенных в цветные изображения в формате RGB, которые использовались для обучения. Отметим наличие в данных промежуточного класса. К нему относятся изображения с признаками обоих классов, но более выраженным одним из них.

Архитектура SwinTransformer. Swin Transformer (рис. 2) состоит из четырех иерархических стадий, включая блоки со смещением оконных областей и объединение патчей (Patch Merging), что позволяет увеличивать глубину признаков и сокращать пространственную разрешающую способность. Такой подход обеспечивает глобальную контекстную обработку, сохраняя вычислительную эффективность.

В работе для построения классификатора выбран вариант Swin-Tiny из репозитория PyTorch Image Models. Данная модель swin_tiny_patch4_window7_224 содержит 28.5 млн

(*) Т.А. Чибышев, xjiscjcjd@inbox.ru

параметров и была предобучена на ImageNet-1K [3], что делает ее достаточно компактной и эффективной для задачи исследования. Для оценки модели использовались метрики: Точность (Accuracy) и F1-мера:

$$Acc = \frac{TP + TN}{TP + TN + FP + FN}, F1 = \frac{2 \cdot TP}{2 \cdot TP + FP + FN},$$

где TP – количество истинно положительных классификаций (True Positive), TN – количество истинно отрицательных классификаций (True Negative), FP – количество ложно положительных классификаций (False Positive), FN – количество ложно отрицательных классификаций (False Negative).

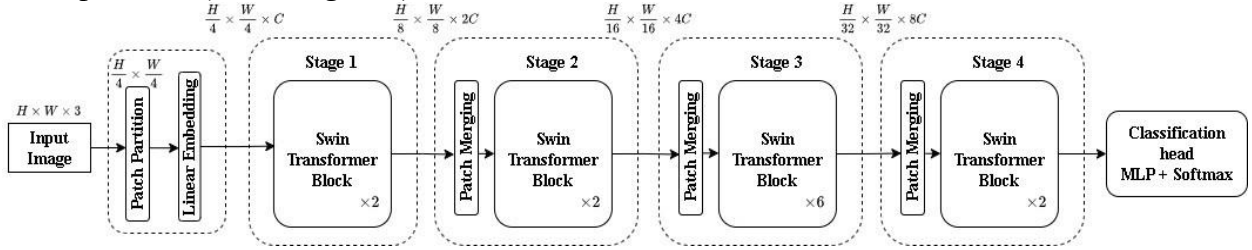


Рис. 2. Архитектура Swin Transformer (воспроизведено по материалам [2])

Эксперимент 1: Кросс-валидация с базовой аугментацией. Данные разделены в пропорции 70:15:15 на обучающую, валидационную и тестовую выборки. Количество изображений каждого класса составило 250, 11 и 11, соответственно. Для обучения использовались 250 изображений каждого класса с использованием преобразований (поворота, горизонтального и вертикального отражения, обрезки). Для оценки точности использовались изображения без преобразований. Для 5 этапов кросс-валидации среднее значение точности на тестовой выборке составило 61.8% при средней метрике F1 61.1%. Обучение проводилось в течение 20 эпох, т. е. проходов по обучающей выборке, при этом значения метрик испытывали сильные колебания (рис. 3).

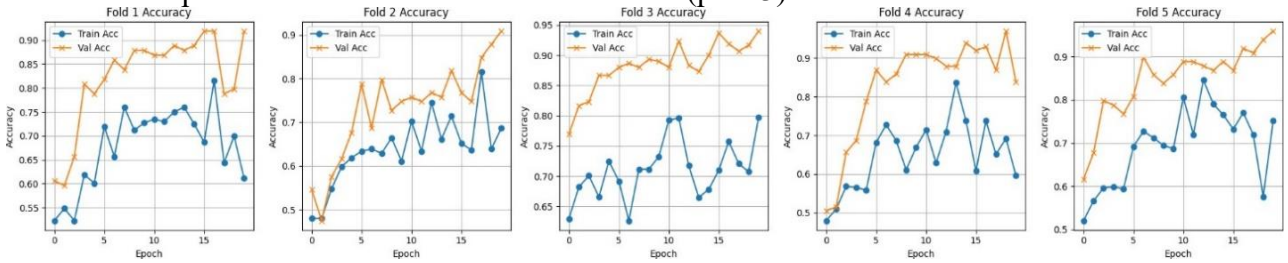


Рис. 3. Сравнение точности валидации и теста по фолдам кросс-валидации

Эксперимент 2: Третий класс и усиленная аугментация. В структуре данных, кроме классов good и bad введен промежуточный класс maybe для сомнительных случаев. Сохраняя пропорцию как в Эксперименте 1 (70:15:15).

Для оценки точности модели использовались 60 аугментированных изображений на класс. Обучение в течение 30 эпох привело к достаточной стабилизации значений метрик (рис. 4). Обученная модель на основе Swin-Tiny достигла точности 96.0% на тестовой выборке и F1-меры 96.0% для всех классов.

Заключение. В текущей работе проведены два эксперимента с использованием классификатора на основе модели Swin-Tiny.

Полученные в эксперименте 1 низкие значения точности на тестовой выборке при сильных колебаниях основных метрик в ходе обучения являются признаком переобучения. В эксперименте 2 введение третьего класса и усиленная аугментация позволили достичь стабильных результатов. Полное отсутствие ошибок между классами good и maybe (рис. 4, матрица ошибок) подтверждает эффективность модификации.



Рис. 4. Изменение метрик при обучении и матрица ошибок Эксперимента 2: 60 изображений на класс в тестовой выборке. Числа в матрице ошибок показывают количество образцов из класса в данных, соответствующего строке, отнесенных моделью классу, соответствующему столбцу

Использование модели Swin Transformer в модификации Swin-Tiny и введение промежуточного класса позволило построить классификатор изображений колоний ПСКЧ, обладающий высокой точностью 96% на тестовой выборке, превосходящий предыдущие результаты в 72% для классификаторов на основе VGG (Vision Geometry Group) и Inception-ResNetV2.

ЛИТЕРАТУРА

1. Gursky V., Krasnova O., Sopova J., Kovaleva A., Kulakova K., Tikhonova O., Neganova I. How Morphology of the Human Pluripotent Stem Cells Determines the Selection of the Best Clone // In: Advances in Pluripotent Stem Cells [Working Title]. – 2023. doi: 10.5772/ intechopen.112655.
2. Liu Z. et al. Swin Transformer: Hierarchical Vision Transformer using Shifted Windows // ICCV. – 2021.
3. Russakovsky O. et al. ImageNet Large Scale Visual Recognition Challenge // Int J Comput Vis. – 2015. – 115, 211–252. https://doi.org/10.1007/s11263-015-0816-y.

УДК 51-74

А.А. Усиков, М.В. Лагунова
Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого

АНАЛИТИЧЕСКАЯ МАТЕМАТИКА В АЛГОРИТМЕ ТРАССИРОВКИ ЛУЧЕЙ

Целью данной работы является реализация алгоритма трассировки лучей на основе методов аналитической математики, предназначенного для обработки пересечений лучей с различными объектами сцены.

Понятие луча определяется двумя векторами: радиус-вектором точки начала луча и нормированным вектором направления. Таким образом, уравнение точки на луче задается выражением:

$$\vec{P}(t) = \vec{O} + \vec{D} \cdot t \qquad (1)$$

$\vec{P}$ – радиус-вектор точки на луче, $\vec{O}$ – радиус-вектор точки, из которой выходит луч, и $\vec{D}$ - нормализованное направление луча. Координаты векторов $\vec{O}$ и $\vec{D}$ обозначаются как (Ox, Oy, Oz) и (Dx, Dy, Dz) соответственно.

Алгоритм состоит в построении луча для каждой точки экрана, нахождении его пересечений с объектами сцены, учете источников света и возвращении цвета пикселя в указанной точке. Для того чтобы построить луч в каждой точке экрана, необходимо учитывать параметры сценической камеры и размеры экрана [1].

Рассмотрим пересечения луча с объектами сцены. В трехмерном пространстве геометрические фигуры могут быть заданы уравнением вида:

$$F(x, y, z) = 0 \quad (2)$$

Подставив в это уравнение координаты вышеупомянутого вектора $\vec{P}(t)$, получим уравнение относительно t, которое необходимо решить с условием, что $t > 0$.

Простейшей фигурой в трехмерном пространстве является плоскость с уравнением

$$F(x, y, z) = A \cdot x + B \cdot y + C \cdot z + D = 0 \quad (3)$$

Подставив в это уравнение координаты луча, получаем уравнение относительно t, решив которое, получим формулу для вычисления пересечения:

$$t = \frac{-(\vec{N} \cdot \vec{O} + D)}{\vec{N} \cdot \vec{D}}, \text{ где } \vec{N} = (A, B, C) \quad (4)$$

Несколько сложнее находится пересечение луча и треугольника. Точка пересечения луча и треугольника совпадает со случаем плоскости, однако надо еще проверить, что точка принадлежит треугольнику.Треугольник задается радиус-векторами трех точек: $\overrightarrow{P_0}$, $\overrightarrow{P_1}$ и $\overrightarrow{P_2}$. Проведем векторы от точки P_0 к точкам P, P_1, P_2. Они обозначаются так: $\vec{r} = \vec{P} - \overrightarrow{P_0}$, $\overrightarrow{s_1} = \overrightarrow{P_1} - \overrightarrow{P_0}$, $\overrightarrow{s_2} = \overrightarrow{P_2} - \overrightarrow{P_0}$. Разложим вектор $\vec{r}$ по двум другим векторам: $\vec{r} = \overrightarrow{s_1} \cdot u + \overrightarrow{s_2} \cdot v$. Координаты разложения зависят от начальных условий (то есть заданных точек треугольника), а условие принадлежности точки треугольнику выглядит так:

$$u \geq 0 \;\&\; v \geq 0 \;\&\; u + v \leq 1 \quad (5)$$

Последней фигурой, которая рассматривается в данной работе, является сфера. В этом случае проще решить задачу геометрически. Возможны два варианта расположения начальной точки луча и сферы: либо внутри, либо снаружи. В первом случае луч в любом случае пересечет сферу, во втором случае можно обратиться к рис.1:

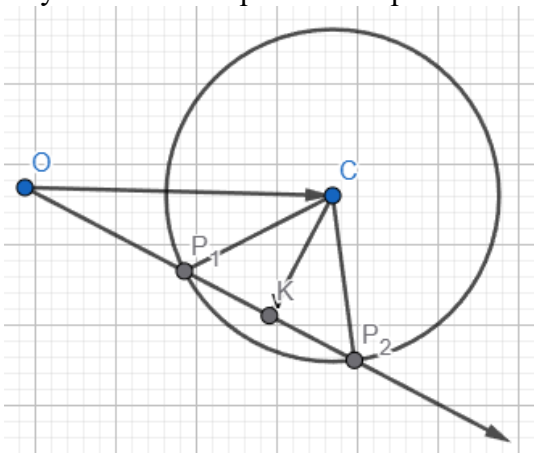


Рис. 1. Луч «протыкает» сферу, двумерная проекция

По построению: $OK = \overrightarrow{OC} \cdot \vec{D}$. В случае, если $OK < 0$, сфера находится «за лучом», и пересечения нет. Найдем $CK^2 = OC^2 - OK^2$ и определим знак выражения $R^2 - CK^2$. Если он отрицательный, то луч не пересекается со сферой, в ином случае луч пересекается со сферой и точка пересечения находится так (R - радиус сферы):

$$t = OK - \sqrt{R^2 - CK^2} \tag{6}$$

Несколько затронем тему освещения. Воспользуемся моделью Блинна-Фонга с коэффициентами фонового, диффузного, отраженного света, а также коэффициентом Фонга. Все параметры задаются заранее и для каждого есть свои правила наложения, рассматриваемые далее.

Фоновое освещение просто служит дополнительным слагаемым в сумме света, поэтому накладывается аддитивно.

Диффузное освещение прямо пропорционально скалярному произведению направления источника света и нормали к поверхности в точке пересечения [2]. Здесь учитываются тени: от точки пересечения в сторону источника света запускается второй луч, и если было найдено пересечение его с объектом, то точка пересечения находится в тени.

Отраженное освещение, как следует из названия, зависит от отраженного вектора луча к поверхности:

$$\vec{R} = \vec{D} - \vec{N} \cdot (2 \cdot \vec{D} \cdot \vec{N}) \tag{7}$$

Принцип его наложения схож с принципом наложения диффузного освещения, с той лишь разницей, что скалярное произведение отраженного вектора и направления источника света возводится в степень, равную коэффициенту Фонга [2].

Примеры разных материалов с разными коэффициентами освещения можно наблюдать на рис.2.

Наличие отраженного вектора позволяет ввести коэффициент отражения и запустить еще один луч от поверхности с направлением, равным отраженному вектору. Более того, можно вспомнить о наличии отражения, ввести коэффициент прозрачности материала и запустить очередной луч в сторону преломленного вектора, который считается по законам оптики.

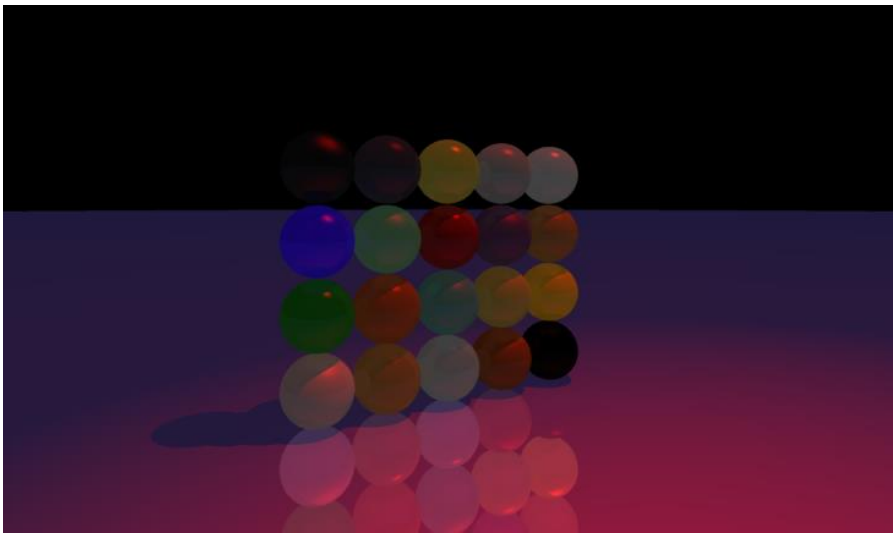


Рис. 2. Примеры материалов с разными коэффициентами освещения

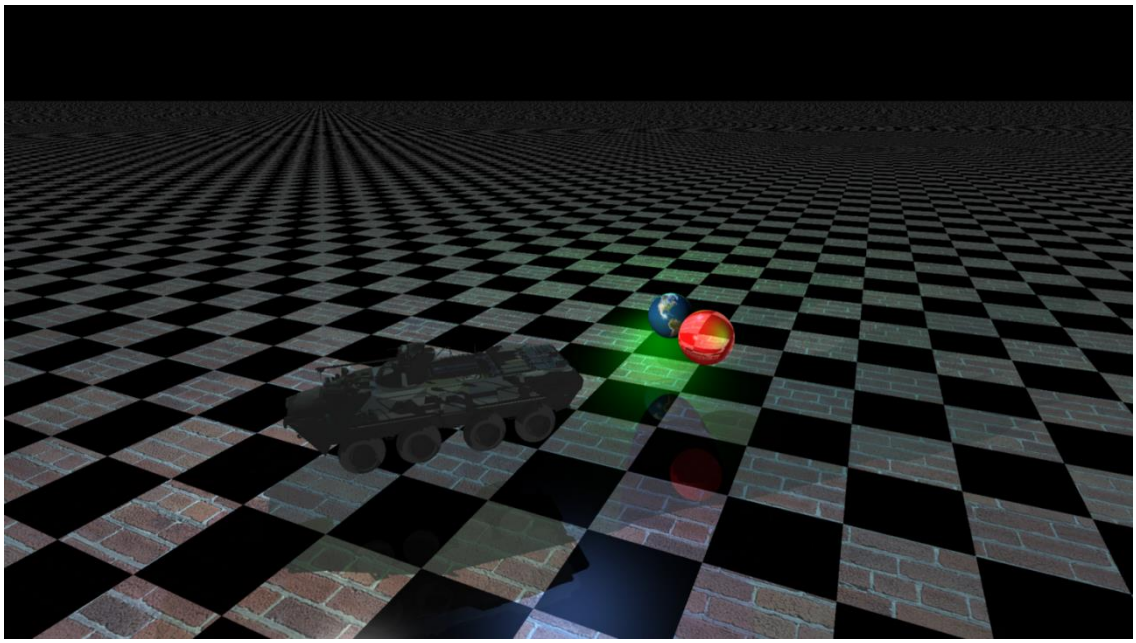


Рис. 3. Комплексная сцена с множеством примеров

В завершение поговорим о текстурировании объектов. Текстура представляет из себя картинку с известной высотой и шириной, которая накладывается вместе с диффузным освещением. Чтобы понять, какой именно пиксель в текстуре надо наложить на объект, используются текстурные координаты. Для плоскости никаких преобразований делать не надо и текстурные координаты можно взять равными обычным, взяв остаток от деления на высоту и ширину, чтобы не выйти за пределы изображения. Для сферы достаточно перейти от прямоугольной системы координат к сферической и обратно, тогда пара текстурных координат (u, v) будет выглядеть так ($\phi = \text{atan}\left(\frac{Pz}{Px}\right), \theta = \text{acos}\left(\frac{\text{Py}}{R}\right)$) [3]:

$$(u, v) = (\frac{-\phi+\pi}{2\pi}, \frac{\theta}{\pi}) \quad (8)$$

Для треугольника в работе берутся готовые текстурные координаты из исходного файла модели. Пример сцены, простроенной по описанной схеме, приведен на рис.3.

ЛИТЕРАТУРА

1. Andrew S. Glassner (ed.), Eric Haines, Pat Hanrahan, Robert L. Cook, James Arvo, David Kirk, Paul S. Heckbert, «An Introduction to Ray Tracing», Academic Press, 1989.
2. Matt Pharr, Wenzel Jakob, Greg Humphreys, «Physically Based Rendering: from Theory to implementation», 3 edition, Morgan Kaufmann, 2016.
3. David S. Ebert, F. Kenton Musgrave, Darwyn Peachey, Ken Perlin, Steve Worley, «Texturing and modeling, Third Edition: A Procedural Approach», Morgan Kaufmann, 2002.

УДК 004.896

М.И. Аптуков, В.А. Кожевников
Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого(*)

РАЗРАБОТКА ПРОГРАММЫ НАСТРОЙКИ ТЕМПЕРАТУРНОГО РЕЖИМА РАБОТЫ СЕРВЕРОВ VEGMAN С ПРИМЕНЕНИЕМ АЛГОРИТМОВ ОПТИМИЗАЦИИ

Статья посвящена алгоритмам оптимизации для подбора коэффициентов ПИД-регулятора системных вентиляторов. На основе разработанных на python программ рассмотрена эффективность применения различных алгоритмов для настройки температурного режима работы серверов.

Современные серверы оснащаются высокопроизводительными вентиляторами, обеспечивающими интенсивный воздушный поток внутри корпуса и эффективный отвод тепла от нагревающихся компонентов. Для надежной и эффективной работы серверов необходима настройка температурного режима системных вентиляторов.

Наиболее широко распространены Пропорционально-Интегрально-Дифференцирующие регуляторы вентиляторов. Настройка ПИД-регулятора сводится к подбору величин трех коэффициентов [1] так, чтобы устройство поддерживало заданный параметр на определенном уровне. Формула ПИД-регулятора имеет вид:

$$u(t) = P + I + D = K_p e(t) + K_i \int_0^\tau e(t)dt + K_d \frac{de(t)}{dt}$$

где $u(t)$ – воздействие; P – пропорциональная составляющая; I – интегральная составляющая; D – дифференциальная составляющая; $e(t)$ – текущая ошибка; K_p – пропорциональный коэффициент; K_i – интегральный коэффициент; K_d – дифференциальный коэффициент.

Некорректная настройка коэффициентов может привести к перегреву системы, к излишней скорости вентиляторов, сопровождающейся повышенным энергопотреблением и шумом. Поэтому разработка программных методов автоматического подбора оптимальных значений коэффициентов ПИД-регулятора для системы охлаждения серверов является актуальной задачей.

В данной работе рассматривается программный вариант настройки температурного режима серверов VEGMAN с применением алгоритмов оптимизации. Методы решений задач оптимизации подразделяют на две группы: точные методы (прямого перебора, динамического программирования ветвей и границ) и приближенные методы (метаэвристические методы) [2]. Точные методы ресурсоемки, особенно метод прямого перебора. Наиболее эффективными для случая оптимизации многофакторной целевой функции являются метаэвристические методы [3]. Упрощенно можно рассматривать метаэвристики как алгоритмы, реализующие прямой случайный поиск возможных решений задачи, оптимальных или близких к оптимальным, пока не будет выполнено некое условие или достигнуто заданное число итераций [4].

Цель состоит в выборе оптимального алгоритма, способного эффективно находить коэффициенты ПИД-регулятора, обеспечивающие стабильную температуру процессора при минимально необходимой скорости вентиляторов. Для решения этой задачи реализованы на python и исследованы несколько алгоритмов оптимизации: метод роя частиц, муравьиный алгоритм, байесовская оптимизация и генетический алгоритм.

Метод роя частиц, предложенный Д. Кеннеди и Р. Эберхартом в 1995 году, основан на поведении косяков рыб, стай птиц и предназначен для поиска глобального экстремума

(*) М.И. Аптуков, aptukovm@yandex.ru

сложных многофакторных функций. Блок-схема метода представлена на рис. 1. Метод прост в реализации, хорошо подходит для непрерывных задач, таких как подбор ПИД-коэффициентов. Он требует настройки лишь нескольких гиперпараметров (размер роя, коэффициенты влияния инерции, личного и глобального опыта) и, как правило, быстро сходится. К недостаткам можно отнести риск преждевременной сходимости к локальному экстремуму и отсутствие строгой гарантии нахождения глобального минимума за конечное число шагов.



Рис. 1. Блок-схема метода роя частиц

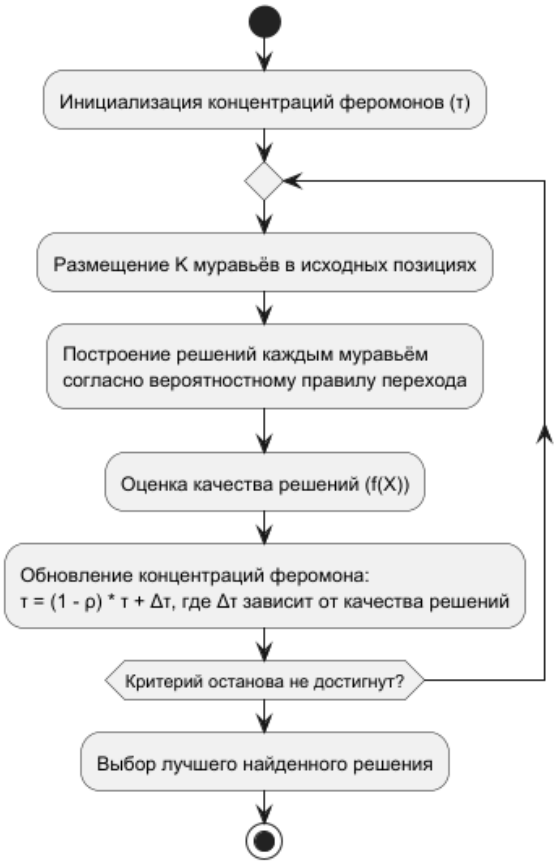


Рис. 2. Блок-схема муравьиного алгоритма

Муравьиный алгоритм (рис. 2), предложенный М. Дориго в 1992 году, имитирует поведение муравьев при поиске оптимальных путей. Муравьи исследуют пространство решений, помечая траектории «феромоном», который направляет других муравьев к более выгодным маршрутам. Концентрация феромонов обновляется на каждой итерации. Со временем «феромоны» испаряются, позволяя избежать преждевременной сходимости.

Муравьиный алгоритм имеет способность коллективно адаптироваться к изменениям условий. Недостатками являются сложность настройки параметров алгоритма (интенсивности обновления и скорости испарения феромона) и более медленная, по сравнению с другими, методами сходимость.

Байесовская оптимизация основана на построении вероятностной модели целевой функции. Она используется для оптимизации функций, где вычисление градиента невозможно или затратно. Порядок выполнения байесовской оптимизация приведен на рис. 3. Достоинство байесовской оптимизации – высокая эффективность при ограниченном числе экспериментов. Это важно для настройки температурного режима серверов, поскольку проведение экспериментов (разгон процессора, разогрев системы при разных настройках) может быть

длительным и изнашивающим оборудование. К недостаткам метода относятся необходимость вычислительных ресурсов для поддержки и обновления статистической модели на каждой итерации, особенно если данных накоплено много, а также сравнительная сложность реализации. Однако, при трех параметрах (ПИД-коэффициентах) и разумного числа итераций байесовская оптимизация эффективна.

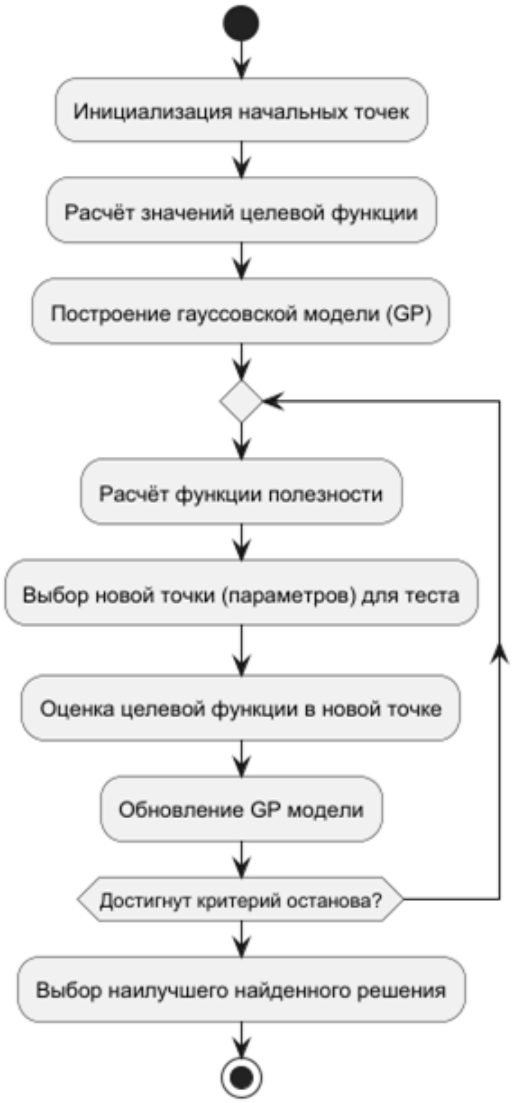


Рис. 3. Порядок выполнения байесовской оптимизации

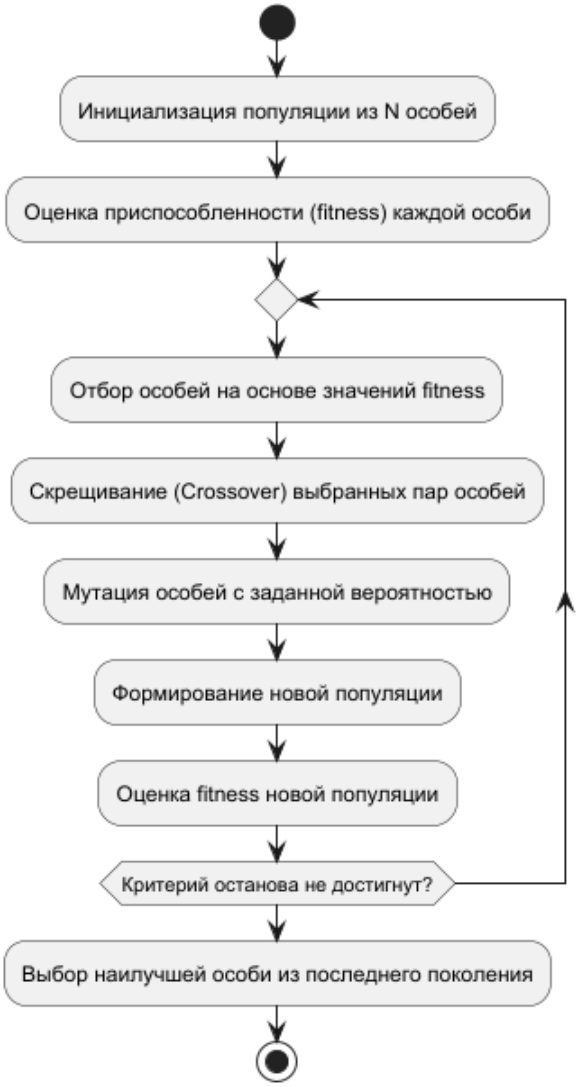


Рис. 4. Блок-схема генетического алгоритма

Генетический алгоритм (рис. 4), предложенный Д. Холландом в 1975 году, основан на процессах отбора, мутации и скрещивания, подобных биологическому геному. Применительно к задаче подбора ПИД-коэффициентов происходит следующее: создается популяция, в которой каждая особь представляет собой комбинацию ПИД-коэффициентов, оценивается качество работы системы с текущими коэффициентами. После каждой итерации происходит обновление коэффициентов, и система тестируется в реальном времени.

Для реализации алгоритмов на python разработаны соответствующие программы. Программы протестированы на различных серверах VEGMAN. Сравнение эффективности применения различных алгоритмов для подбора коэффициентов ПИД-регуляторов вентиляторов серверов VEGMAN представлено в табл. 1.

Табл. 1. Эффективность применения различных алгоритмов оптимизации

Показатель	Метод роя частиц	Муравьиный алгоритм	Байесовская оптимизация	Генетический алгоритм
Число итераций	6	5	4	8
Амплитуда колебания температуры CPU, ºC	2,5	3	2	3
Время стабилизации, мин	11	9	5	8
Время работы алгоритма, ч	10	8	4	12

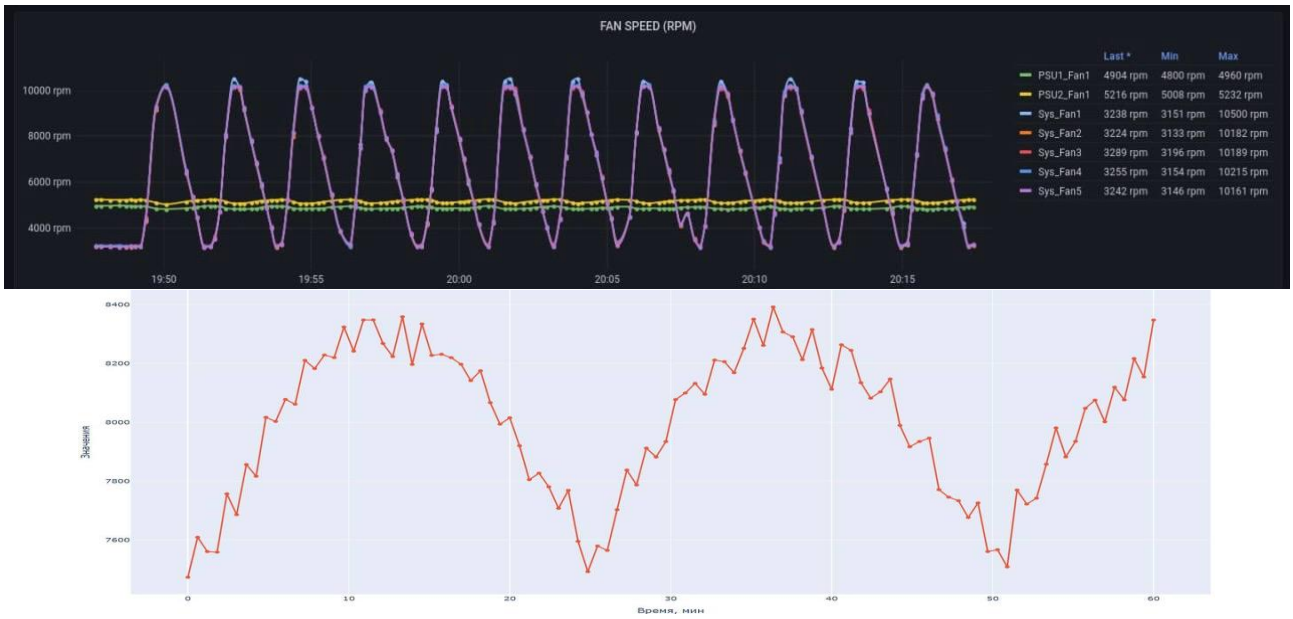


Рис. 5. График скорости вращения вентилятора до и после подбора коэффициентов

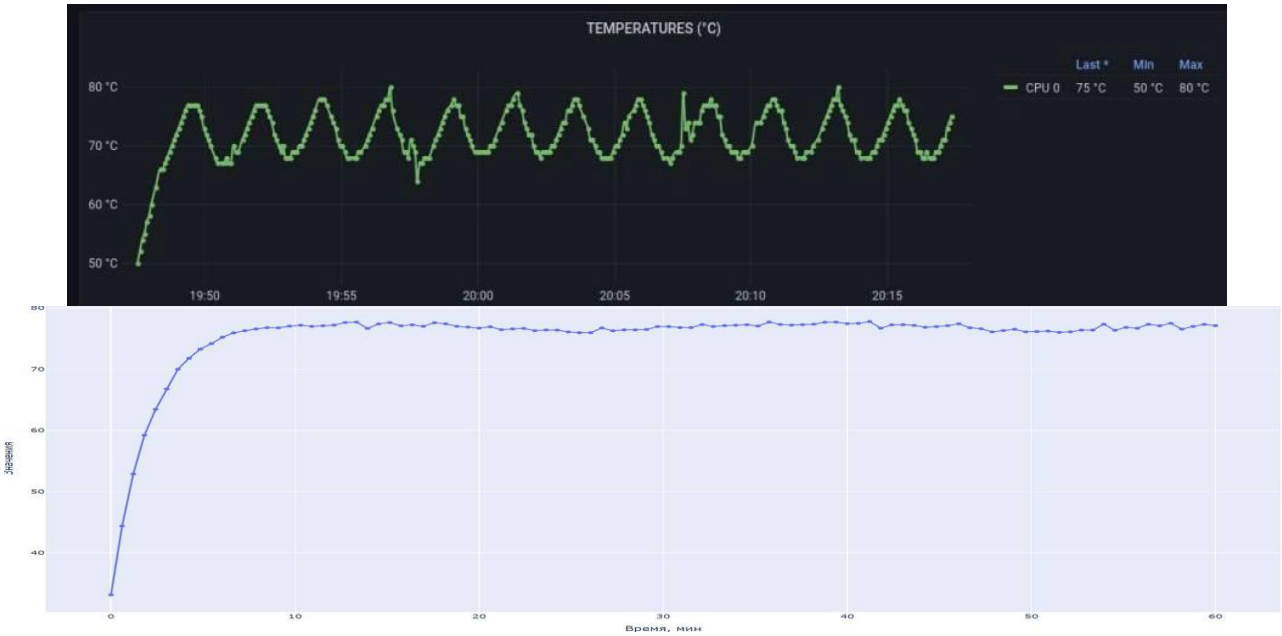


Рис. 6. График температуры процессора до и после подбора коэффициентов

По совокупности критериев из табл. 1 (наименьшая амплитуда колебаний после подбора коэффициентов, наименьшее время работы алгоритма при подборе коэффициентов, быстрый выход на заданную температуру) наиболее эффективной является байесовская оптимизация, за ней следует метод роя частиц - как метод, сбалансированный по простоте и качеству. Генетический алгоритм уступает по скорости достижения оптимума, а применение муравьиного алгоритма менее оправданно. Таким образом, из рассмотренных методов наиболее целесообразным выбором для задачи автоматической настройки температурного режима серверов является **байесовская оптимизация.** Она обеспечивает быстрый поиск оптимальных параметров при минимуме испытаний, что важно для бережной и оперативной настройки оборудования.

На рис. 5, 6 приведены графики зависимостей скорости вращения вентилятора, температуры процессора до и после подбора коэффициентов.

В ходе выполнения работы разработана программа автоматизированной настройки системы охлаждения серверов VEGMAN на основе оптимизации подбора коэффициентов ПИД-регуляторов системных вентиляторов. В ходе работы удалось подобрать оптимальные коэффициенты, которые даже при импульсной нагрузке позволяют сохранять стабильное охлаждение. Улучшение работы системных вентиляторов обеспечивает оптимальный температурный режим работы серверов VEGMAN, что повышает надежность их работы.

ЛИТЕРАТУРА

1. https://rusautomation.ru/articles/nastroyka-pid-regulyatora-temperatury/
2. Габдрахманова Л.Р., Еникеева Л.В. Гармонический поиск и его применение // Доклады Башкирского университета — 2020 — Том 5, № 4 — С. 244-249.
3. Корнеев А.М., Суханов А.В. Исследование точности и скорости сходимости алгоритмов стохастической оптимизации функций на многомерном пространстве – Вестник Астраханского государственного технического университета — 2018 — №3 – С. 26-37.
4. Щербина О.А. Метаэвристические алгоритмы для задач комбинаторной оптимизации (обзор) – Симферополь: Таврический вестник информатики и математики —2014 — №1(24) – С. 56-72.

УДК 51-72

К.И. Желудев, А.А. Елисеев
Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого(*)

ОПТИМИЗАЦИЯ ПОЛОЖЕНИЯ ДЕТАЛЕЙ ПРИ СБОРКЕ АВИАЦИОННЫХ КОНСТРУКЦИЙ

Сборка современных авиационных конструкций представляет собой крайне трудоемкий процесс. Несмотря на большой размер соединяемых деталей, точность сборки должна быть высокой. В частности, незначительное изменение положения деталей на сборочном стапеле может привести к несоответствию собранной конструкции техническим требованиям по надежности. Данные требования обычно формулируются в терминах результирующих зазоров между деталями, поэтому при математическом моделировании процесса сборки важно учитывать изменение положений деталей на стапеле и анализировать его влияние на конечные зазоры в собираемых конструкциях.

В авиастроении одним из критериев надежности собранной конструкции является малость механических напряжений, возникающих в процессе сборки. Это требование можно обеспечить, если правильным образом отрегулировать начальное положение деталей на

(*) К.И. Желудев, kirill.zheludev@yandex.ru

стапеле. В связи с этим, в данной работе формулируется и рассматривается задача оптимизации функционала энергии деформации относительно начального положения деталей конструкции.

Конечный зазор между деталями представляет собой решение контактной задачи, поскольку имеет место нелинейное контактное взаимодействие. Вариационная постановка задачи контактного взаимодействия может быть сведена к задаче квадратичного программирования, в которой используется конечно-элементное представление модели [1].

В качестве примера рассмотрим модель двух панелей крыла и фюзеляжа (рис. 1). Узлы конечно-элементной модели разделяются на три группы: контактные узлы, т. е., те, которые могут быть приведены в контакт; закрепленные узлы, перемещения которых можно варьировать, и остальные. Их степени свободы (в данном случае нормальные перемещения) обозначим как U_C, U_V, U_R соответственно.

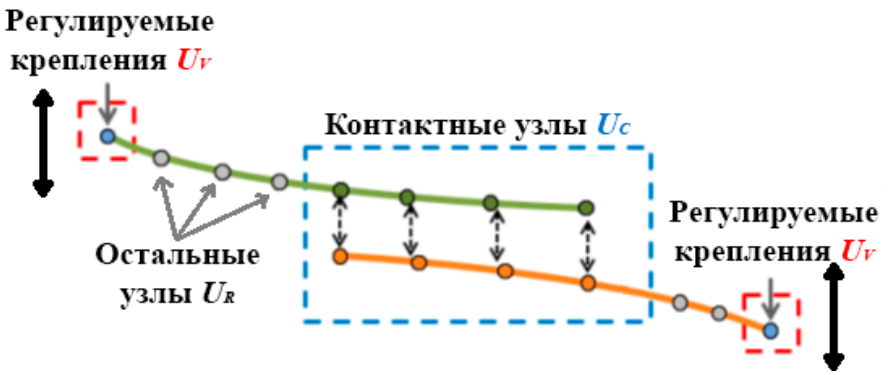


Рис. 1. Конечно-элементная модель

Для описания контактного взаимодействия формулируется задача квадратичного программирования относительно перемещений контактных узлов U_C при зафиксированных перемещениях закрепленных узлов U_V [2, 3]:

$$\left(\frac{1}{2}U_C^T \cdot K_C \cdot U_C - (F_C^T + (M_{var} \cdot U_V)^T) \cdot U_C\right), \quad (1)$$

$$S_C = \{U_C : A_C \cdot U_C \le G\},$$

где F_C – вектор нагрузок в области возможного контакта (зоне стыка), A_C – линейный оператор, задающий условие непроникновения деталей друг в друга, G – вектор начального зазора между панелями, K_C и M_{var} – конечно-элементные подматрицы жесткости, соответствующие контактным узлам U_C и закрепленным узлам U_V соответственно.

На основе решения задачи (1) можно определить распределение механических напряжений, возникающих в результате сборки конструкции. На практике для анализа данных напряжений обычно используются специальные числовые характеристики, которые содержат информацию о распределении напряжений “в целом”. В данной работе в качестве подобной характеристики рассматривался функционал энергии деформации следующего вида:

$$E(U_V) = \frac{1}{2}U_C^T\langle U_V\rangle \cdot K_C \cdot U_C\langle U_V\rangle, \quad (2)$$

где под записью $U_C\langle U_V\rangle$ подразумеваются перемещения контактных узлов U_C, найденные как решение задачи (1) при зафиксированных перемещениях в закрепленных узлах U_V.

Окончательно, в работе рассматривается следующая задача: требуется найти такое оптимальное значение U_V^* перемещений закрепленных узлов, что перемещения $U_C\langle U_V^*\rangle$ в области соединения будут сообщать минимум функционалу энергии деформации $E(U_V)$:

$$E(U_V^*) = \min_{U_V} E(U_V). \quad (3)$$

Иначе говоря, необходимо отрегулировать начальное положение деталей так, чтобы энергия деформации всей конструкции после сборки была минимальна.

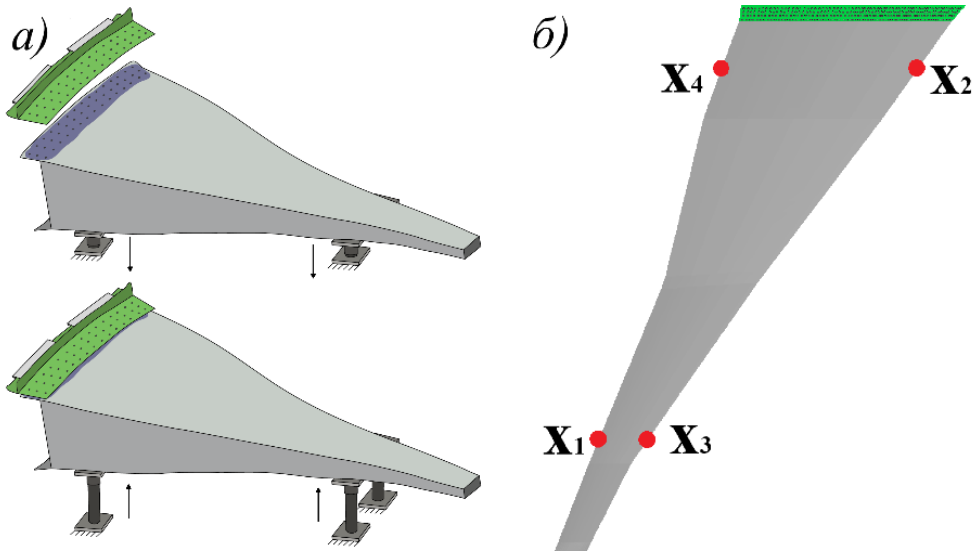


Рис. 2. а) Пример изменения положения закреплений крыла самолета;
б) Перемещения в закрепленных узлах

На рис. 3 приведены графики, иллюстрирующие поведение функционала $E(U_V)$ вблизи точки оптимума для тестовой задачи. В этой задаче требуется найти оптимальное положение 4-х закреплений крыла самолета, указанных на рис. 2. Представленные графики демонстрируют влияние каждого из 4-х рассматриваемых закреплений на величину функционала деформации и, как нетрудно видеть, для двух случаев наблюдаются значительные осцилляции. Они связаны с плохой обусловленностью поставленной задачи и их наличие необходимо учитывать при решении задачи оптимизации.

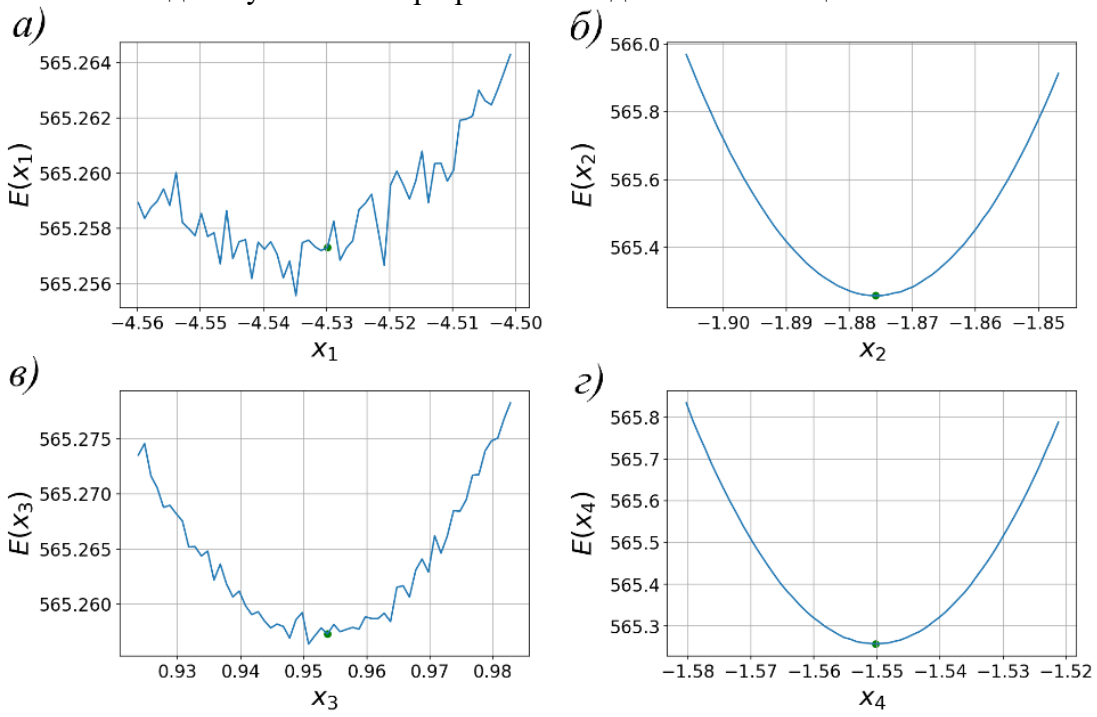


Рис. 3. Изменение значения функционала энергии деформации вблизи точки оптимума:
а) по переменной x_1, б) по переменной x_2, в) по переменной x_3, г) по переменной x_4.

Наблюдаемые осцилляции не позволяют применять для минимизации функционала $E(U_V)$ известные градиентные методы, в связи с чем в работе рассматривается безградиентный

подход, основанный на приближении функционала квадрикой $\tilde{E}(x) = \tilde{E}(x_1, x_2, x_3, x_4)$ следующего вида:

$$\tilde{E}(x) = \alpha + \sum_{i=1}^{4} \beta_i x_i + \sum_{i=1}^{4} \sum_{j=1}^{4} \gamma_{ij} x_i x_j. \quad (4)$$

Для определения неизвестных коэффициентов квадрики составляется совокупность из N точек, принадлежащая гиперкубу со стороной $2r$ с центром в некоторой точке. По этим точкам строится совокупность значений функционала $E(x)$. Далее рассматривается остаточная сумма квадратов, которую необходимо минимизировать выбором коэффициентов $\tilde{E}(x)$:

$$S(\alpha, \beta_i, \gamma_{ij}) = \sum_{k=1}^{N} \left(\tilde{E}(x^{(k)}) - E(x^{(k)}) \right)^2. \quad (5)$$

Условие минимизации указанной суммы приводит к системе линейных алгебраических уравнений, которая решается численно методом сопряженных градиентов [4]. После нахождения коэффициентов квадрики можно определить ее точку минимума и повторить процесс построения квадрики в окрестности получившейся точки, при этом уменьшив характерный размер гиперкуба r.

В табл. 1 приведены результаты работы описанного алгоритма оптимизации функционала $E(x)$ для тестовой задачи. Как видно из таблицы, с каждой итерацией $E(x)$ не возрастает, причем первая итерация метода оказалась наиболее эффективной.

Табл. 1. Результаты применения метода суррогатного моделирования

Номер итерации	r	x	$E(x)$
1	0.5	(0.00, 0.00, 0.00, 0.00)	3352.07
2	0.25	(−1.39, 1.16, −3.95, 0.52)	222.41
3	0.125	(−1.90, 1.12, −4.20, 0.45)	221.81
4	0.0625	(−1.89, 1.12, −4.20, 0.46)	221.81
5	-	(−1.89, 1.12, −4.20, 0.46)	221.81

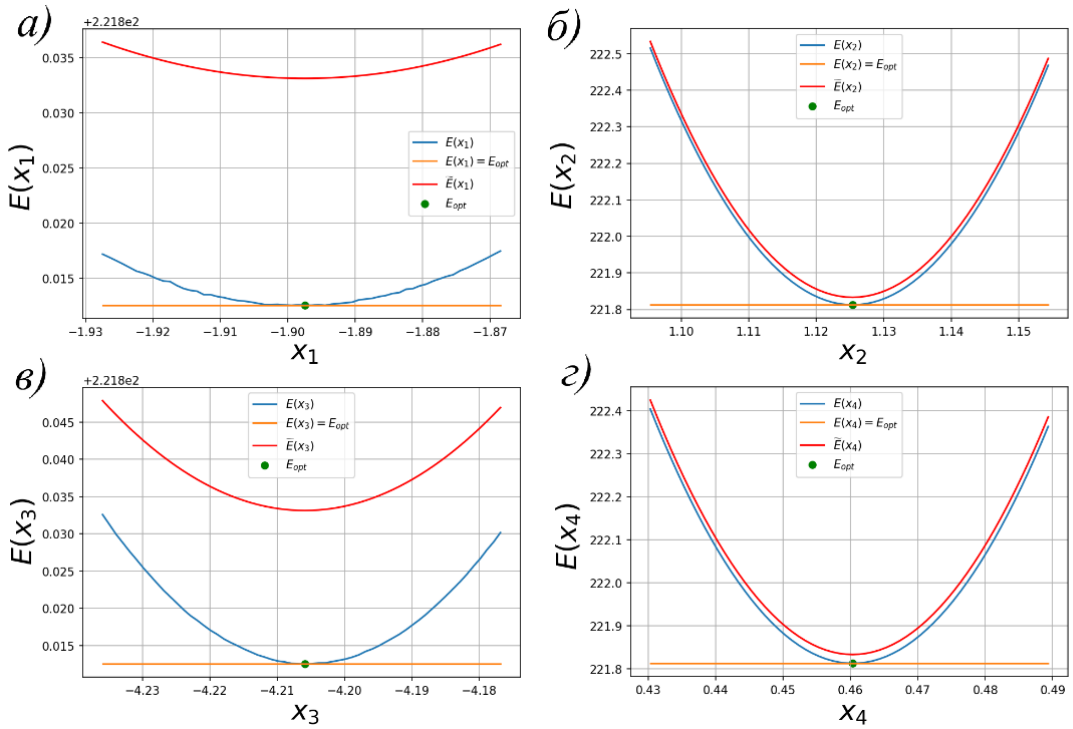


Рис. 4. Графики E(x) и $\tilde{E}$(x) в окрестности точки оптимума:
а) по переменной x_1, б) по переменной x_2, в) по переменной x_3, г) по переменной x_4.

Рис. 4 иллюстрирует сравнение исходного функционала $E(x)$ и приближающей его квадрики $\tilde{E}(x)$, и по рисунку видно, что точки оптимума функционалов совпадают достаточно хорошо. Подобное поведение наблюдалось в ходе серии тестовых экспериментов, отличающихся профилем начального зазора G.

Таким образом, в данной работе был предложен и рассмотрен метод оптимизации функционала энергии деформации авиационных конструкций, в котором деформация минимизируется за счет выбора оптимального положения деталей на сборочном стапеле. Метод учитывает особенности рассматриваемой задачи и, как показывают полученные результаты, может быть использован в авиационной промышленности.

Работа выполнена при поддержке гранта РНФ № 22-19-00062-П.

ЛИТЕРАТУРА

1. Assembly simulation of riveting process / S. Lupuleac [et al.] // SAE International Journal of Aerospace. — 2010. — Vol. 2, no. 1. — P. 193–198.
2. Nonlinear Tolerancing: Variation Simulation and Assembly Analysis with Regard to Contact Interaction of Parts / S. Lupuleac [et al.] // Axioms. — 2024. — Vol. 13, no. 1. — P. 30.
3. Convex optimization techniques in compliant assembly simulation / M. Stefanova [et al.] // Springer Nature. — 2020. — Vol. 24, no. 6. — P. 26.
4. Вержбицкий В.М. Основы численных методов: [учеб. для вузов по направлению "Прикладная математика"]. — Высш. шк., 2002 – 840 с.

УДК 517.518.85

А.А. Рябоконь, С.В. Божокин, Т.Д. Шохин
Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого(•)

ЛОГИСТИЧЕСКАЯ АППРОКСИМАЦИЯ СИСТЕМЫ НЕРАВНООТСТОЯЩИХ ТОЧЕК

Введение. Потребность в получении непрерывного или аналитического описания некоторой зависимости по набору дискретных значений остается фундаментальной и актуальной во многих областях современных исследований. В данной работе рассматривается задача аппроксимации некоторой функции $y(x)$, заданной таблицей экспериментальных данных $\{x_i, y_i\}$, причем индекс i пробегает ряд значений $i = 0, 1, \dots, N-1$, где N – количество точек. Данная задача возникает при необходимости найти значения функции в точках, отличных от измеренных. Распространенный метод аппроксимации - интерполяция, когда аппроксимирующая функция $f(x)$ проходит через данные точки: $f(x_i) = y_i$. К известным методам относятся линейная интерполяция, полиномы Лагранжа, сплайны. Для построения математических моделей при описании различных физических процессов используются различные нелинейные подходы.

Особую сложность представляет случай сильно неравномерной системы аргументов x_i, где традиционные методы могут приводить к осцилляциям аппроксимирующей функции. Примеры таких процессов - сердечные сокращения при аритмии, вспышки на звездах, нейронные импульсы головного мозга. Дополнительную трудность в аппроксимации создают сильные выбросы в экспериментальных данных, которые часто свидетельствуют о возникновении новых физических процессов. Такие выбросы не являются ошибками эксперимента, поэтому их нельзя игнорировать или устранить как внешнее шумовое

(•) А.А. Рябоконь, ryabokonaa@mail.ru

воздействие. Существенно, что традиционные функции плохо работают в случае значительных неоднородностей, поэтому задача аппроксимации для таких физических явлений остается актуальной темой современных исследований.

Цель исследования. Разработка новых методов моделирования сложных нестационарных процессов, основанных на предлагаемом методе адаптивной логистической аппроксимации.

Методы исследования. Предлагается новый метод адаптивной логистической аппроксимации для неравномерных данных с выбросами. Модель имеет вид суммы логистических функций с переменными параметрами: центр промежутка, характерный размер и параметр роста, который адаптируется к длине промежутка наблюдений, обеспечивая плавность аппроксимации на больших экспериментальных интервалах и детализацию на малых.

На множестве экспериментальных точек $\{x_i, y_i\}$ представим математическую модель логистической аппроксимации $y(x) = f(x)$ в виде

$$f(x) = y_0 + \sum_{k=1}^{N-1} \frac{(y_k - y_{k-1})}{1 + exp\left(-\frac{x - x_c(k)}{\tau(k)}\right)}; \quad (1)$$

$$x_c(k) = \frac{x_k + x_{k-1}}{2},$$

$$\tau(k) = \frac{x_k - x_{k-1}}{L_g}.$$

В пространстве неравноотстоящих значений аргумента $x_{min} \le x_i \le x_{max}$, $x_0 = x_{min}, x_{N-1} = x_{max}$, $k = 1,2, \dots, N-1$, величина k представляет собой номер промежутка. Величина $x_c(k) = (x_k + x_{k-1})/2$ – представляет собой центр k промежутка, величина $\tau(k) = (x_k - x_{k-1})/L_g$ – представляет собой характерный размер логистической аппроксимации, определяющий скорость роста логистической функции. Параметр $\tau(k)$ пропорционален длине k безразмерного отрезка, где индекс $k = 1,2, \dots, N-1$ нумерует длины отрезков Δ_k между точками x_k и x_{k-1}, и обратно пропорционален величине единственного феноменологического параметра аппроксимации L_g.

Результаты. Применим метод логистической аппроксимации (1) для последовательности из восьми точек $\{x_i, y_i\}$, расположенных на неравномерной сетке аргумента *x*, с тремя выбросами (рис. 1).

Логистическая математическая модель $f(x)$ (тонкая линия на рис. 1) с адаптивным параметром L_g (1) не имеет сильно осциллирующего поведения в промежутках между аппроксимирующими точками и хорошо описывает гладкие релаксационные процессы в исследуемых системах.

Функции же, построенные с помощью кубических сплайнов, могут демонстрировать сильные колебания, амплитуда которых значительно выше или ниже экспериментальных точек (рис. 2). Этот эффект продемонстрирован нами на примере аппроксимации функции Рунге $f_R(x) = 1/(1 + 25x^2)$, заданной в пяти точках на интервале $[-1; 1]$ как с помощью сплайнов, так и с помощью метода логистической аппроксимации (1).

На рис. 2 представлена функция Рунге $f_R(x)$, заданная в виде пяти точек на интервале $[-1; 1]$. По этим пяти точкам построена логистическая аппроксимация (1), имеющая монотонный характер, а также аппроксимация кубическими сплайнами, имеющая сильные осцилляции в промежуточных значениях абсцисс. Среднеквадратичное отклонение $RMSE$ между логистической аппроксимацией и функцией $f_R(x)$, вычисленная по всему интервалу $[-1; 1]$, составляет $RMSE = 0.1015$. Среднеквадратичное отклонение между сплайн-аппроксимацией и $f_R(x)$ значительно больше: $RMSE = 0.2188$.

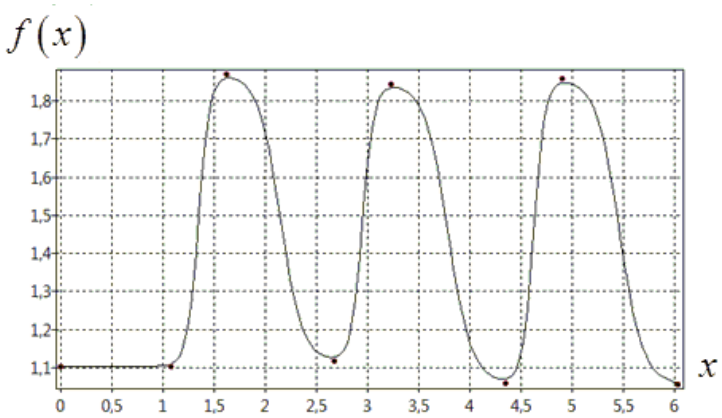


Рис. 1. Точками изображены значения $\{x_i, y_i\}$, характеризующиеся тремя выбросами; непрерывная кривая $f(x)$ − модельная аппроксимация (1) для параметра $L_g = 10$

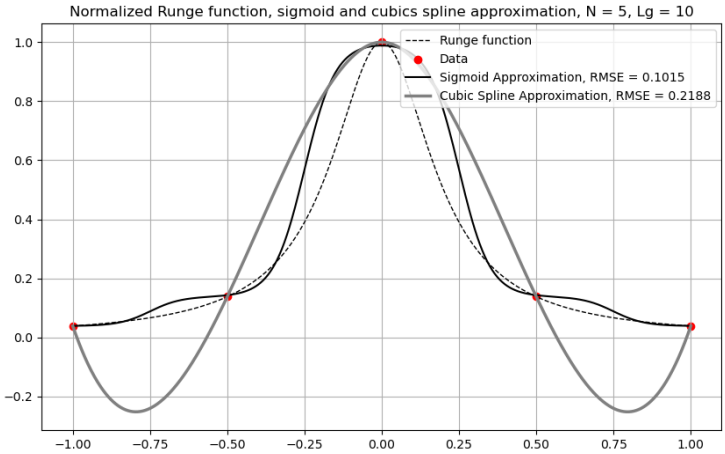


Рис. 2. Пунктирной линией отмечена функция Рунге $f_R(x)$; тонкой черной линией отмечена логистическая аппроксимация при значении адаптивного параметра сглаживания $L_g = 10$; жирной серой линией отмечена аппроксимация кубическим сплайном; точками отмечены узлы сетки, $N = 5$

Заключение. Основное преимущество предлагаемой нами адаптивной логистической модели аппроксимации над традиционными - учет нестационарности процесса и способность адекватно описывать появление новых физических явлений. Важным свойством модели (1) является адаптивный характер параметра сглаживания, зависящий от расстояния между экспериментальными точками. Это позволяет гибко подстраиваться под неравномерность распределения точек и корректно обрабатывать сильные выбросы, сохраняя информацию о резких изменениях в наблюдаемом физическом процессе. Метод демонстрируется на примерах неравномерных данных с выбросами, показывая свою эффективность для аппроксимации сложных нестационарных процессов.

ЛИТЕРАТУРА

1. Bozhokin S. V., Suslova I. B., Ryabokon A. A., Shokhin T. D. Heart Rate Turbulence: Wavelet Analysis of Frequency Modulated Signals // In Proceedings of the 18th International Joint Conference on Biomedical Engineering Systems and Technologies - BIOSIGNALS. - 2025 - Vol. 1 - P. 1038-1045. DOI: 10.5220/0013342700003911

2. Кобзарь А.И., Прикладная математическая статистика. Для инженеров и научных работников. 2 издание. М: Физматлит, 2012, -812 с.

3. Турчак Л.И., Плотников П.В., Основы численных методов. Учебное пособие. 2-е издание, М.: Физматлит, 2003. -304 С.

УДК 51-76

Я.А. Тырыкин, К.Н. Козлов
Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого(*)

МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРОДУКТИВНОСТИ НУТА НА ОСНОВЕ ИСКУССТВЕННЫХ ИЗОБРАЖЕНИЙ И СВЕРТОЧНЫХ НЕЙРОННЫХ СЕТЕЙ

Разработка в области сельскохозяйственных культур обусловлена потребностью в увеличении продуктивности растений и их устойчивости к неблагоприятным внешним факторам и климатической изменчивости [1,2]. Бобовые культуры, в частности бобы маш и нут, являются передовыми растительными видами, играющими важную роль в мировом сельском хозяйстве. Прогнозирование их качественных показателей перед началом культивирования позволяет выбрать наиболее подходящую разновидность по эффективности или устойчивости к внешним воздействиям из широкого многообразия видов. Подобная задача селекции часто решается путем геномного прогнозирования, направленного на предсказания фенотипа на основе однонуклеотидных полиморфизмов (SNP). Цель представляемого исследования заключалась в разработке модели прогнозирования признаков продуктивности нута на основе имеющегося набора генетических параметров и извлечении наиболее важных признаков, влияющих на предсказание модели для выбранного признака.

В ходе работы решались следующие задачи:

- Построение искусственных изображений (AIO) для каждого образца путем кодирования генетических показателей в пиксели трехканальных изображений.
- Получение скрытых признаков с полученных изображений путем применения сверточной нейросети.
- Обучение словаря для разреженного кодирования изображения на основе словаря патчей.
- Построение градиентного бустинга для прогнозирования фенотипов растений, например, времени цветения (DF) или массы тысячи семян (TSW) [3].
- Вычисление наиболее важных SNP путем применения регрессионных карт важности [6].

Структура модели представлена на рис. 1.

Исследуемые данные представляют собой набор из 407 образцов нута, собранных в разных регионах Юго-Восточной Азии. Каждому растению сопоставлены 6642 генетических маркера и 36 фенологических показателей.

Набор генетических параметров для каждого растения кодируется в искусственное изображение по формулам (1):

$$R = \begin{cases} 1, f_g = 0 \\ 0, f_g \neq 0 \end{cases} \quad G = \begin{cases} 1, f_g = 1 \\ 0, f_g \neq 1 \end{cases} \quad B = \begin{cases} 1, f_g = 2 \\ 0, f_g \neq 2 \end{cases} \qquad (1)$$

Каждый пиксель после обработки приобретает красный/синий/зеленый цвет в зависимости от того, какая аллель (вариация нуклеотида A, C, G, T) находится в заданной позиции генома. Изображения строились в формате 128 на 128 пикселей, каждое содержит минимум 2 набора генетических параметров.

Для учета внутригруппового родства образцов нута был использован метод разреженного кодирования образцов и обучения словаря базисных шаблонов [5]. Сначала каждое искусственное изображение преобразуется в вектор из строк пикселей, далее полученные векторы для всех растений накладываются друг на друга, формируя общее изображение. Это позволяет проанализировать все доступные признаки. Объединенное

(*) Я.А. Тырыкин, tyrykin.yaa@edu.spbstu.ru

изображение разбивается на квадратные блоки меньшей размерности, например, 16 на 16 пикселей. Каждый блок AIO может быть представлен как взвешенная сумма выбранного количества, например 16, шаблонных изображений (называемых атомами), хранящихся в словаре. На этапе обучения шаблонные изображения получают из набора блоков реальных изображений, поиск похожих шаблонов осуществляется методом k-nearest neighbors, а сходимость итерационного процесса построения словаря ускоряется методом разложения по сингулярным значениям (SVD). Количество атомов в словаре лучших моделей равнялось 30, размер одного патча – 16 на 16 пикселей.

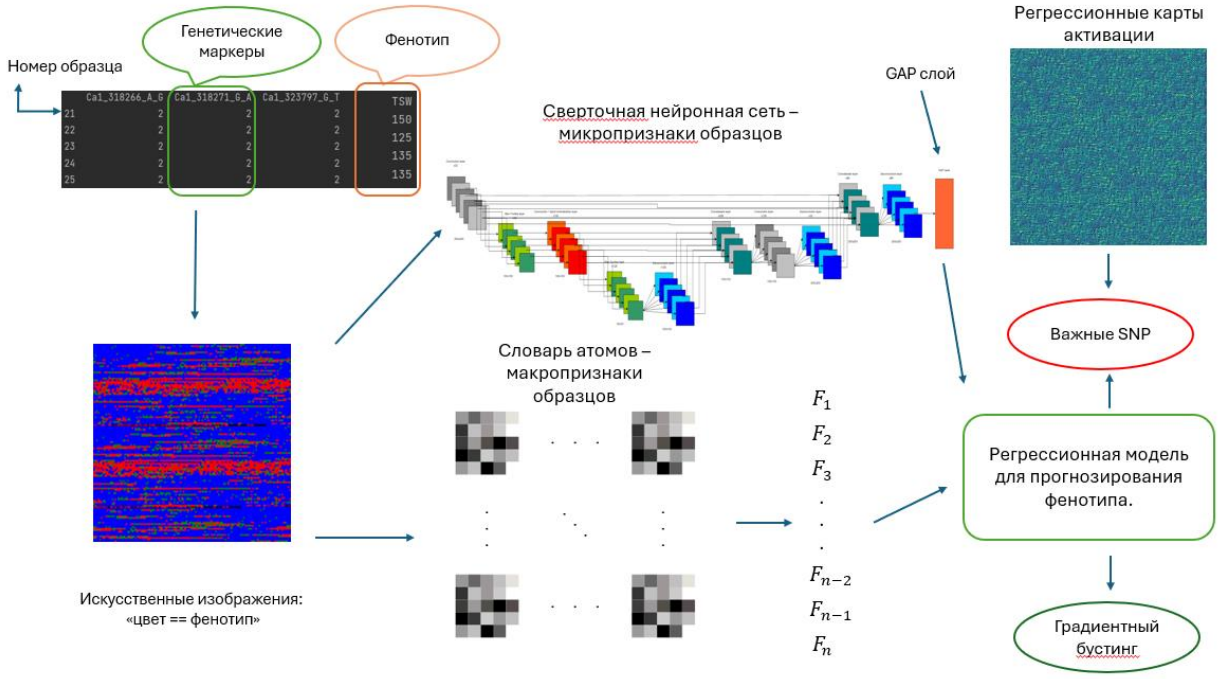


Рис. 1. Схема модели

Дополнительно в модель была добавлена компонента сверточной нейронной сети, улучшенной относительно модели, предложенной в [2]. На вход модели поступает искусственное изображение для заданного образца и вектор параметров для его разреженного кодирования атомами словаря. Далее к изображению последовательно применяются сначала комбинации слоев сверток и пулинга, после чего применяются обратные операции деконволюции для приведения карт признаков к исходному размеру изображений. Каждый фильтр представляет собой набор из трех ядер, проходящих по определенному каналу. Результирующая карта признаков составляется из карт по трем каналам. В конце карты признаков были объединены с помощью слоя Global Average Pooling (GAP), который преобразовал карты в вектор признаков, после чего он был объединен с числовым вектором разреженного кодирования. Объединенный вектор использовался для получения решения с помощью регрессионной модели экстремального градиентного усиления. В качестве функции потерь использовалась средняя абсолютная ошибка. Нейронная сеть и регрессионная модель обучались одновременно для получения согласованного решения.

Сеть включает более 500000 параметров и реализована при помощи пакетов TensorFlow/Keras v2.12 и соответствующего функционального интерфейса языка Python.

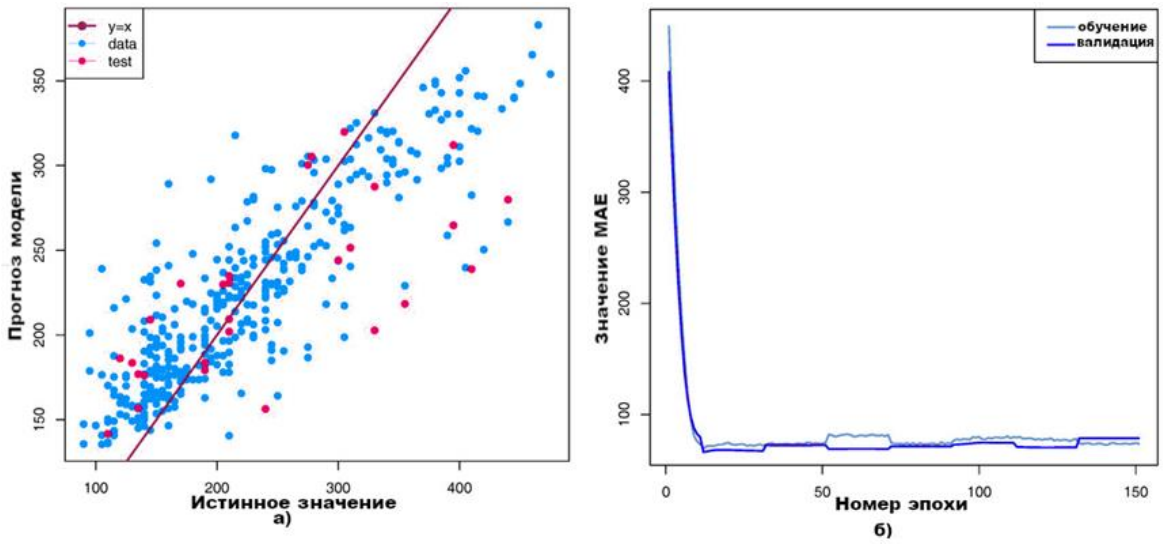


Рис. 2. а) Оценка качества модели на TSW,
б) Сходимость процесса обучения модели для прогнозирования TSW

Модель применялась для прогнозирования двух фенотипов – числа семян с одного растения (SNpP) и массы тысячи семян (TSW). Обучение проводилось при помощи десятикратной перекрестной кросс-валидации на 150 эпохах - итерациях обновления параметров стохастического градиентного спуска. На обучение отводилось 366 образцов, из которых 20% использовалось в качестве валидационного множества. Процесс обучения в обоих случаях достиг сходимости (рис. 2б), лучшие модели показали точность прогнозирования 84% и 85% (рис. 2а) количества семян с одного растения и массы тысячи семян соответственно. Расчет точности проводился на основе коэффициента корреляции Пирсона.

Использованное представление позволяет кодировать геномные факторы в виде AIO. Обученные модели описанной архитектуры на основе получения словаря с разреженным кодированием, CNN и градиентного бустинга позволяют предсказать количество семян на растение и вес тысячи семян у сортов нута из набора данных с приемлемой точностью. В контексте селекции нута наш подход может помочь более эффективно выводить сорта с желаемыми признаками, однако необходимы дальнейшие исследования для получения новой ценной и объективной информации для оценки его методологического потенциала.

Наиболее важные SNP, влияющие на предсказание модели, определены с помощью регрессионных карт важности. Отмеченные SNP были найдены в известных генах или в пределах 1 кб фланкирующих областей и, скорее всего, метят кандидатные случайные гены, функции некоторых из которых известны. Применение t-теста Стьюдента для части этих SNP показало значимость разницы в значениях фенотипов, что подтверждает важность этих факторов для интересующих признаков.

ЛИТЕРАТУРА

1. Rehm, C.D.; Goltz, S.R.; Katcher, J.A.; Guarneiri, L.L.; Dicklin, M.R.; Maki, K.C. Trends and Patterns of Chickpea Consumption among United States Adults: Analyses of National Health and Nutrition Examination Survey Data. *J. Nutr.* 2023, *153*, 1567–1576.
2. Laxuman, C.; Naik, Y.D.; Desai, B.K.; Kenganal, M.; Patil, B.; Reddy, B.S.; Patil, D.H.; Chakurte, S.; Kuchanur, P.H.; K, S.K.; et al. Development and evaluation of *Fusarium* wilt-resistant and high-yielding chickpea advanced breeding line, KCD 11. *Plant Genome* 2024, *17*, e20460.

3. Mikhail Bankin, Yaroslav Tyrykin, Maria Duk, Maria Samsonova, Konstantin Kozlov. Modeling Chickpea Productivity with Artificial Image Objects and Convolutional Neural Network. *Plants* 2024, *13*(17), 2444.
4. Zhang, X.; Gao, J. Measuring Feature Importance of Convolutional Neural Networks. *IEEE Access* 2020, *8*, 196062–196074.
5. Bavykina, M.; Kostina, N.; Lee, C.R.; Schafleitner, R.; Bishop-von Wettberg, E.; Nuzhdin, S.V.; Samsonova, M.; Gursky, V.; Kozlov, K. Modeling of Flowering Time in Vigna radiata with Artificial Image Objects, Convolutional Neural Network and Random Forest // *Plants* — 2022 — V. 11, No. 23— p. 3327.
6. Mairal, J.; Bach, F.; Ponce, J.; Sapiro, G. Online dictionary learning for sparse coding. In Proceedings of the 26th Annual International Conference on Machine Learning, Montreal, QC, Canada, 14–18 June 2009; pp. 689–696.

УДК 004.622

А.А. Воротников, Ф.А. Новиков
Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого(*)

СИСТЕМА ХРАНЕНИЯ ОНТОЛОГИЙ КАК ЯДРО ИНТЕЛЛЕКТУАЛЬНОЙ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЙ СРЕДЫ

Введение. В рамках проекта интеллектуальной образовательной среды (ИОС) [1] предлагается использование символического искусственного интеллекта для построения двунаправленного, адаптивного и масштабируемого процесса передачи знаний.

В работе [2] описан подход к применению онтологий в образовательном процессе на примере преподавания курса «Дискретная математика». Для описания онтологий используется язык Unified Modeling Language (UML). В рамках апробации использования онтологий в качестве визуального материала были построены онтологии предметных областей дискретной математики, которые легли в основу данной работы.

Работа посвящена разработке системы хранения онтологий для использования в качестве базы знаний в системах проверки и передачи знаний.

Требования к системе хранения онтологий. Сформулируем требования к системе хранения онтологий для использования в образовательном процессе.

Любой курс делится на логические единицы: модули или главы. Будем называть их предметными областями. Онтологии должны позволять извлекать сведения как по конкретной предметной области, так и по набору связанных предметных областей, например, предоставлять сведения изученных за данный семестр предметных областей.

В рамках одной предметной области не требуется разделять онтологию на несколько онтологий, обеспечивая ее читаемость – это может сделать отдельный модуль визуализации. Единое хранение всей онтологии, наоборот, позволяет упростить взаимодействие с ней сервисов проверки знаний.

На рис. 1 приведена метамодель онтологий, которая предлагается к использованию. Опишем приведенные сущности.

Понятия являются терминами, которые используются в предметной области. Они характеризуются атрибутами и типами. Атрибуты имеют имя и тип. Понятие может быть классом, абстрактным классом, объектом, или алгоритмом. Отметим, что понятие может иметь и несколько типов, например понятие «алгоритм сортировки» является и алгоритмом, и абстрактным классом.

(*) А.А. Воротников, AndrewVorotnikov@yandex.ru

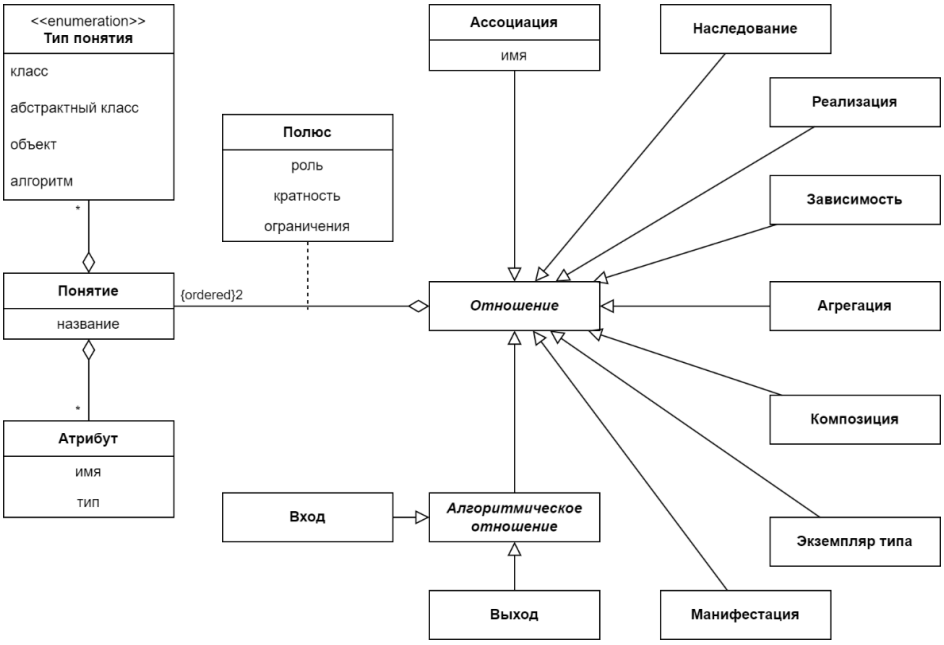


Рис. 1. Метамодель онтологий

Понятия являются полюсами отношений. Полюс, кроме этого, может иметь роль, кратность и ограничения. В рамках данной работы мы рассматриваем исключительно бинарные направленные отношения.

Отношения в системе представлены девятью видами.

Отметим, что онтологии обычно предполагают бинарные отношения между понятиями – данные представляются тройкой «подлежащее – сказуемое – дополнение». Именно такую структуру позволяют описывать наиболее популярные языки описания онтологий: Resource Description Framework (RDF) [3], RDF Schema (RDFS) [4] и Web Ontology Language (OWL) [5].

С точки зрения формального определения онтологии [6] под отношениями понимаются собственно математические бинарные отношения, каждое из которых можно представить множеством кортежей. Кортеж из двух элементов соответствует бинарному отношению, а большие кортежи – композиции бинарных отношений.

Язык UML же существенно расширяет спектр возможных отношений и допускает многополюсные отношения, отношения между отношениями и ненаправленные отношения. В метамодели такие отношения не учтены за их редкостью.

Обзор инструментальных средств. Рассмотрим системы хранения, которые используются для представления RDF-подобных онтологий. Архитектура таких систем двукомпонентная [7]. Для реализации первого – хранилища обычно используется реляционная база данных. Второй компонент – промежуточный слой предоставляет доступ к хранилищу и функции создания, запроса и удаления данных.

Промежуточный слой транслирует запросы к RDF-схеме в язык запросов к хранилищу. Для запросов к RDF-схеме разработан язык SPARQL (рекурсивный акроним SPARQL Protocol and RDF Query Language) [8]. Отметим, что SPARQL не предоставляет возможности для редактирования онтологии, для этого предусмотрены, например, XML-схемы, язык Notation 3 (N3) и его подмножество Turtle [9].

Можно заметить, что структура онтологий схожа с графом, поэтому для ее хранения можно рассмотреть графовые базы данных. Они оперируют двумя видами объектов: вершинами и ребрами. Любой объект можно нагрузить дополнительной информацией: типом, названием и так далее. Такое представление позволяет естественно применять любые алгоритмы над графами [10].

Одним из языков для запросов к графовым базам данных является Cypher [11]. В отличие от SPARQL он позволяет не только извлекать информацию, но и редактировать ее.

Таким образом, имеется два способа решения задачи хранения онтологий: хранилище триплетов и графовые базы данных. Оба способа позволяют решить поставленную задачу. Для реализации была выбрана графовая СУБД Neo4j [12], использующая для запросов язык Cypher.

Архитектура интеллектуальной образовательной среды. Описанная система хранения онтологий на основе графовой СУБД позволяет спроектировать вокруг нее архитектуру интеллектуальной образовательной среды. Она представлена в виде диаграммы компонентов на рис. 2.

Система хранения онтологий в ИОС выполняет функцию базы знаний для различных служб и систем. Эти службы работают не напрямую с системой хранения онтологий, а через набор промежуточных служб – адаптеров, как в гексагональной архитектуре [13].

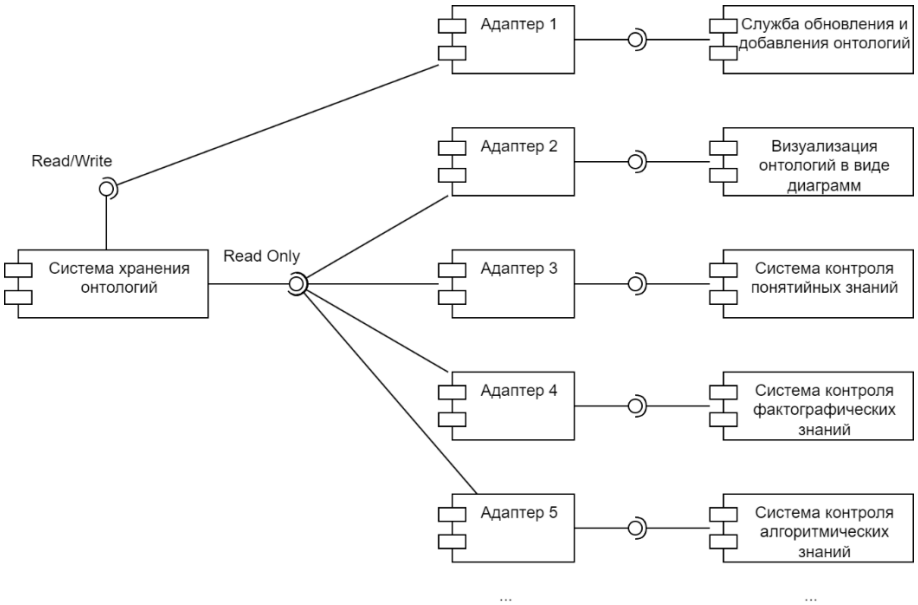


Рис. 2. Архитектура интеллектуальной образовательной среды

Заключение. В работе описаны требования к системе хранения онтологий и инструментальные средства для ее создания. Описано конструирование системы на основе графовой базы данных. Приведена также архитектура интеллектуальной образовательной среды, которая использует онтологии для проверки знаний студентов.

ЛИТЕРАТУРА

1. Krasheninnikov S. et al. Development and implementation of intellectual components of the digital educational environment //EDULEARN23 Proceedings. – IATED, 2023. – С. 6535-6541.

2. Молотков И. И., Новиков Ф. А. Онтология дискретной математики в образовании //Компьютерные инструменты в образовании. – 2021. – №. 1. – С. 68-84.

3. Decker S. et al. The semantic web: The roles of XML and RDF //IEEE Internet computing. – 2000. – Т. 4.– №. 5. – С. 63-73.

4. McBride B. The Resource Description Framework (RDF) and its Vocabulary Description Language RDFS //Handbook on Ontologies. – 2004.

5. McGuinness D. L. Owl web ontology language overview w3c recommendation 10 february 2004 //http://www. w3. org/TR/2004/REC-owl-features-20040210/. – 2007.

6. Guarino N., Oberle D., Staab S. What is an ontology? //Handbook on ontologies. – 2009. – С. 1-17.

7. Hastings J. T. Portable software tools for managing and referencing taxonomies // Digital Mapping Techniques' 03—Workshop Proceedings, June. – 2003. – С. 185-192.
8. Seaborne A., Prud'hommeaux E. SPARQL query language for RDF //W3C Recommendation, W3C. – 2008.
9. World Wide Web Consortium et al. RDF 1.1 Turtle: Terse RDF triple language. – 2014.
10. Kleppmann M. Designing data-intensive applications: The big ideas behind reliable, scalable, and maintainable systems. – O'Reilly Media, Inc. 2017.
11. Francis N. et al. Cypher: An evolving query language for property graphs //Proceedings of the 2018 international conference on management of data. – 2018. – С. 1433-1445.
12. Vukotic A. et al. Neo4j in action. – Manning Publications Co., 2014.
13. Cockburn A. Hexagonal architecture //The Pattern: Ports and Adapters. – 2005.

УДК 004.891.2

В.С. Скворцов[1], И.М. Золин[2], Е.И. Пчицкая[1]
[1]Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого(*)
[2]Университет ИТМО

NEURORAG: МУЛЬТИАГЕНТНЫЙ ИИ АССИСТЕНТ НЕЙРОБИОЛОГА

В условиях стремительного роста объема биомедицинской литературы и усложнения запросов традиционные системы поиска информации сталкиваются с серьезными трудностями. Задача заключается в создании системы, способной обрабатывать большие объемы данных и предоставлять точные ответы на вопросы нейробиологов. Система должна обеспечивать высокую точность, минимизировать риск возникновения «галлюцинаций» (ложной информации) и декомпозировать сложные вопросы.

Настоящая публикация представляет разработку в области нейробиологического вопросно-ответного моделирования — систему NeuroRAG, позиционируемую как инновационное решение, объединяющее возможности больших языковых моделей (БЯМ) и стратегии Retrieval-Augmented Generation (RAG) [1] для предоставления точных и релевантных ответов, подкрепленных списком источников.

NeuroRAG — это мультиагентная модель, специально разработанная для нейробиологического вопросно-ответного взаимодействия. Основная цель использования множества агентов заключается в обеспечении более точного извлечения и анализа информации. В модели применяются различные промежуточные узлы и тщательно разработанная логика для определения релевантных источников, что позволяет минимизировать риск утраты важных сведений.

Обычные большие языковые модели могут порождать «галлюцинации» (ложную информацию) и предоставлять ссылки на несоответствующие источники. В биомедицинской области такие неточности представляют особую опасность, так как могут приводить к ошибочным выводам. Поэтому одной из ключевых задач, решаемых NeuroRAG, является проверка фактической корректности ответа путем сопоставления ответа модели с извлеченными документами.

Модель обладает уникальной способностью преобразовывать вопросы пользователей, путем переформулировки их в более формальный и точный язык. Этот процесс включает в себя применение техники «step-back» [2], которая помогает выявить более общий и абстрактный вопрос, что, в свою очередь, позволяет глубже понять суть запроса. Кроме того, модель декомпозирует исходный вопрос, разбивая сложные запросы на несколько более простых. Для реализации декомпозиции сложных вопросов используется модель LLaMA 3.1, которая обрабатывает запросы и возвращает структурированные JSON-ответы. Эти ответы

(*) В.С. Скворцов, mail@vladimirskvortsov.com

содержат декомпозированные части исходного вопроса. Такой подход обеспечивает возможность рассматривать вопрос пользователя с различных сторон, что значительно увеличивает вероятность нахождения релевантной и полезной информации.

В дополнение к тщательному выбору релевантных и авторитетных источников, система также реализует механизмы проверки ответов на наличие галлюцинаций. Для этого используется специальная цепочка оценок, также построенная на использовании модели LLaMA 3.1, которая сравнивает сгенерированный ответ с набором найденных фактов, изначально извлеченных из различных документов. На основе этого сравнения система выносит заключение о достоверности ответа. В случаях, когда ответ оказывается недостаточно обоснованным или вызывает сомнения, модель активирует дополнительные шаги, такие как повторный поиск информации или переформулирование исходного вопроса. Такой многоступенчатый подход значительно увеличивает вероятность получения точного и надежного ответа, тем самым снижая риск возникновения случайных неточностей и ошибок в выводах.

Архитектура NeuroRAG основана на множестве узлов, выполняющих различные функции: преобразование запроса пользователя, фильтрация найденных документов, генерация итогового ответа с использованием ансамбля [3] БЯМ общего назначения и специализированных, а также двухфакторная валидация ответа [4, 5]. Система может обращаться как к внутреннему векторному хранилищу [6], содержащему более 30 учебников по нейробиологии, так и к внешним базам данных: PubMed и Arxiv для поиска релевантных научных статей, NCBI для получения протеиновых и геномных последовательностей и информации о них. Кроме того, модель имеет доступ к интернету для поиска самой актуальной и специализированной информации.

Для оценки эффективности NeuroRAG были использованы несколько датасетов, включая BrainScape Neurobiology, MedMCQA и MEDIQA, которые охватывают широкий спектр биомедицинских вопросов в формате вопрос-ответ. Эти датасеты были выбраны для того, чтобы максимально точно имитировать реальные условия использования и проверить способность системы обрабатывать сложные и специфические запросы.

В ряде экспериментов оценивались показатели «схожести» эталонного ответа и ответа модели с использованием метрик ROUGE-1 (Recall-Oriented Understudy for Gisting Evaluation), ROUGE-L, BLEU (Bilingual Evaluation Understudy) и коэффициента косинусного сходства (cosine similarity) векторных представлений ответов. ROUGE-1 оценивает количество совпадающих униграмм (отдельных слов) между эталонным ответом и ответом модели. ROUGE-1 используется для измерения точности и полноты на уровне слов. ROUGE-L основана на вычислении длины наибольшей общей подпоследовательности (Longest Common Subsequence, LCS) между эталонным ответом и ответом модели. ROUGE-L учитывает порядок слов, что делает ее более чувствительной к структуре текста. BLEU оценивает количество совпадающих униграмм, биграм, 3-грам и 4-грам, возвращая геометрическое среднее их оценок. Она также использует модифицированную меру точности, включающую в качестве параметра штраф за слишком короткие ответы. Косинусное сходство вычисляет косинус угла между двумя векторными представлениями ответов (embeddings). Она показывает, насколько близки направления векторов, и определяется как

$$CosSim(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) = \frac{\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b}}{\|\boldsymbol{a}\| \|\boldsymbol{b}\|},$$

где $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ — векторные представления ответов, $\cdot$ обозначает скалярное произведение, а $\|\cdot\|$ — евклидову норму вектора. Для векторных представлений ответов были использованы векторные представления LLaMA. Все перечисленные метрики ограничены сверху единицей, и чем больше значение, тем ближе полученный ответ к эталонному.

Критерии успеха включают достижение значений метрик, превосходящих пороговые значения, установленные на основе сравнения с существующими моделями. Например, для

успешной работы системы требуется, чтобы значения косинусного сходства превышали 0.6, а значения BLEU были выше 0.02. В сравнении с отдельными крупными языковыми моделями (например, LLaMA 3.1, Mistral Large и GPT-4.0 Mini) NeuroRAG продемонстрировал более высокие результаты (табл. 1).

Табл. 1. Сравнение результатов моделей на наборе данных Brainscape Neurobiology

Модель	CosSim	BLEU	ROGUE-1	ROGUE-L
NeuroRAG	0.6252	0.0252	0.2228	0.1949
GPT-4o mini	0.4697	0.0076	0.2159	0.1824
Mistral Large	0.4683	0.0066	0.2137	0.1807
LLaMA 3.1	0.4672	0.0063	0.1852	0.1594

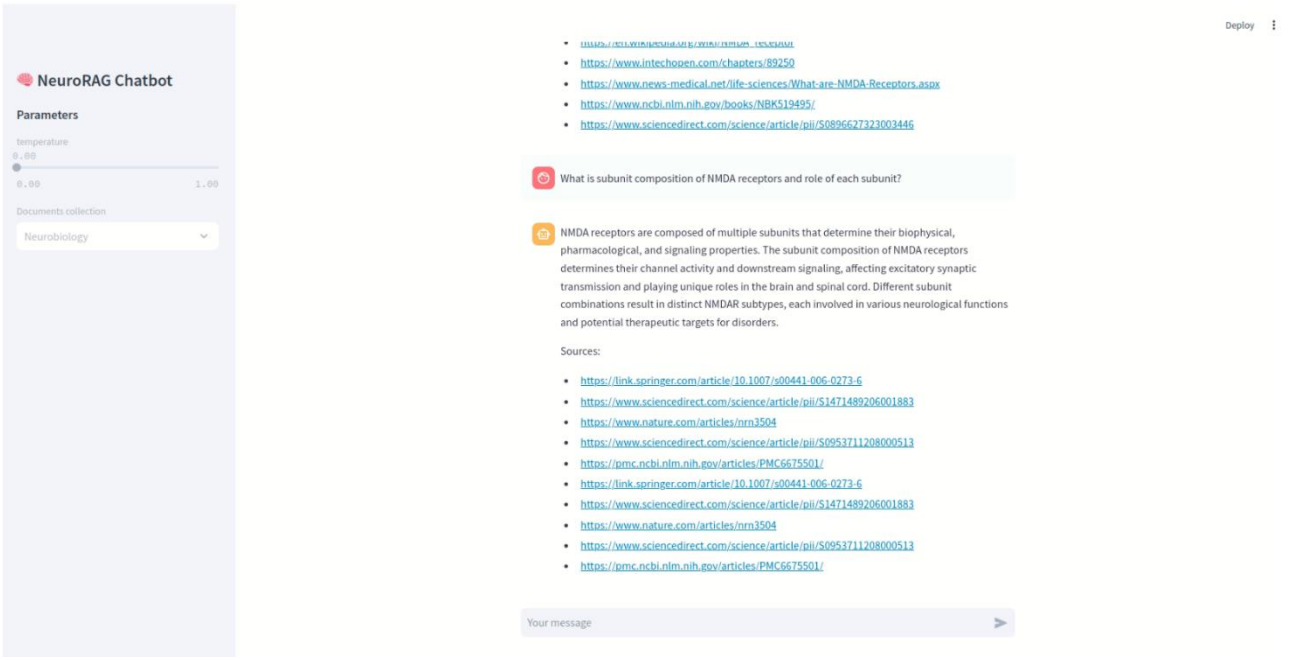


Рис. 1. Приложение чат-бот для взаимодействия с NeuroRAG

NeuroRAG демонстрирует высокую точность и релевантность ответов, что достигается за счет сочетания нескольких крупных языковых моделей и развитой мультиагентной логики. Вместе с тем, использование большого количества узлов и расширенного поиска повышает вычислительную сложность и затраты времени. В ряде случаев может потребоваться оптимизация процедур фильтрации и валидации. Тем не менее, даже при наличии указанных ограничений, NeuroRAG предоставляет ценный инструмент для исследователей и практиков в медицине, поскольку облегчает доступ к качественным данным и снижает риск ошибок.

Для упрощения взаимодействия с NeuroRAG и повышения прозрачности работы системы нами также было разработано web-приложение (рис. 1) в формате чат-бота. С его помощью пользователи могут задавать вопросы, получать развернутые ответы, а также просматривать использованные при формировании ответа источники (включая соответствующие ссылки или библиографические ссылки на научную литературу). Такой подход обеспечивает удобный доступ к результатам работы модели и помогает специалистам быстро проверять корректность и актуальность предоставляемой информации, опираясь на релевантные первоисточники.

Таким образом, NeuroRAG вносит значительный вклад в область биомедицинского поиска, комбинируя методы Retrieval-Augmented Generation, пошаговую обработку сложных запросов и мультиагентный подход. Эта архитектура, сопровождаемая механизмом фильтрации нерелевантных данных и проверкой фактической корректности, дает возможность эффективно ориентироваться в колоссальном массиве биомедицинской информации. Перспективы дальнейших исследований связаны с улучшением вычислительной оптимизации и созданием более развитых механизмов обнаружения галлюцинаций, для обеспечения максимально надежных и точных ответы для специалистов в области нейробиологии и смежных дисциплин.

Настоящее исследование было поддержано грантом в рамках государственного задания FSEG-2024-0025 и Фондом поддержки инноваций и молодежных инициатив Санкт-Петербурга в рамках проекта «Кампус цифровых лабораторий Blue Sky Research».

ЛИТЕРАТУРА

1. Lewis P., Perez E., Piktus A., Petroni F., Karpukhin V., Goyal N., Küttler H., Lewis M., Yih W., Rocktäschel T., Riedel S., Kiela D. Retrieval-Augmented Generation for Knowledge-Intensive NLP Tasks // arXiv preprint arXiv:2005.11401. – 2020.
2. Zheng H. S., Mishra S., Chen X., Cheng H.-T., Chi E. H., Le Q. V., Zhou D. Take a Step Back: Evoking Reasoning via Abstraction in Large Language Models // arXiv preprint arXiv:2310.06117. – 2023.
3. Jiang D., Ren X., Lin B. Y. LLM-Blender: Ensembling Large Language Models with Pairwise Ranking and Generative Fusion // arXiv preprint arXiv:2306.02561. – 2023.
4. Asai A., Wu Z., Wang Y., Sil A., Hajishirzi H. Self-RAG: Learning to Retrieve, Generate, and Critique through Self-Reflection // arXiv preprint arXiv:2310.11511. – 2023.
5. Yan S., Gu J., Zhu Y., Ling Z. Corrective Retrieval Augmented Generation // arXiv preprint arXiv:2401.15884. – 2024.
6. Jimmy L., Ronak P., Tommaso T., Jasper X.. Vector Search with OpenAI Embeddings: Lucene Is All You Need // arXiv preprint arXiv:2308.14963. – 2024.

УДК 533.6.011

М.А. Абакарова, Д.С. Кравченко, Е.В. Кустова
Санкт-Петербургский государственный университет(*)

МОДЕЛИРОВАНИЕ ОБТЕКАНИЯ ЦИЛИНДРА СВЕРХЗВУКОВЫМ ПОТОКОМ С ЛОКАЛЬНЫМ ЭНЕРГОВЛОЖЕНИЕМ

В последние десятилетия активизировались исследования в области перспективных методов управления аэродинамическими характеристиками тел в сверхзвуковых потоках с помощью энерговложения различной природы (лазерный, микроволновый разряд и т.п.). Исследования проводятся как за рубежом [1,2], так и в России [3,4]. С развитием компьютерных технологий открывается возможность проводить высокоточное численное моделирование сложных физико-химических процессов, протекающих в высокоэнтальпийных течениях. Ранее для этого было необходимо использовать программные комплексы собственной разработки или же дорабатывать имеющиеся программные комплексы [5], но с развитием индустрии CFD моделирования стало возможным использование и проприетарных программных комплексов, которые, тем не менее, необходимо валидировать.

В работе исследуется обтекание кругового цилиндра сверхзвуковым потоком с локальным вложением энергии в области перед головной ударной волной. Для моделирования используется пакет прикладных программ *Ansys Fluent 2022R1*.

В рамках данного исследования рассматривается обтекание цилиндра диаметром 12 мм, перед которым на расстоянии 10 мм располагается область нагрева радиусом 1,5 мм и длиной 15 мм. В течение 2 мкс в нагреваемую область подводится энергия величиной 1,5 мДж. Входной поток характеризуется числом Маха M = 3, статическим давлением p = 23 Торр и температурой T = 187 К. Данные условия соответствуют постановке, приведенной в работе [4]. Подробная схема области течения приведена на рис. 1.

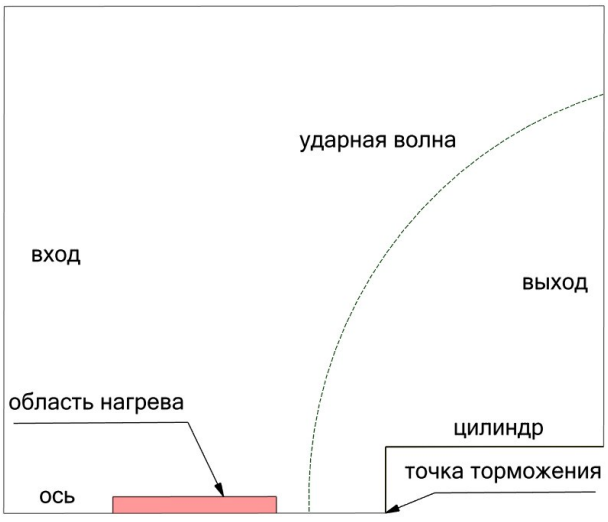


Рис. 1. Схема исследуемой области течения

Размеры области 46 на 55 мм, характерный размер элемента сетки 0,1 мм, расчетная сетка, блочно-структурированного типа, содержит порядка 208 тыс. элементов, минимальное

(*) М.А. Абакарова, st107748@student.spbu.ru

ортогональное качество: 1, максимальное соотношение сторон для элемента сетки (aspect ratio): 3. Сеточная сходимость отдельно не исследовалась, но планируется в будущем.

Цель работы – воспроизвести результаты эксперимента с помощью численного моделирования и исследовать влияние колебательной и химической неравновесности на ключевые параметры течения. Моделирование проводилось в двух постановках: 1) однотемпературная модель без учета химических реакций и колебательной неравновесности; 2) двухтемпературная модель с учетом химических реакций и колебательной неравновесности.

Основная система уравнений для описания осесимметричного течения, которая решается с помощью *Ansys Fluent*, представлена в виде осреднённых по Рейнольдсу уравнений неразрывности, движения и энергии

$$\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial r}\right), \quad \nabla \cdot \vec{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{1}{r}\frac{\partial (rA_r)}{\partial r}$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \vec{v}) = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho \vec{v}) + \nabla \cdot (\rho \vec{v}\vec{v}) = -\nabla \mathrm{p} + \nabla \cdot \bar{\bar{\tau}} - \nabla \cdot (\rho \overline{\vec{v}'\vec{v}'})$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho E) + \nabla \cdot \left(\vec{v}(\rho E + p)\right) = -\nabla \cdot \left(\vec{q} + \left(\bar{\bar{\tau}} \cdot \vec{v}\right) - \sum h_i J_i\right)$$

В двухтемпературной модели к этой системе уравнений также добавляются уравнения, отвечающие за изменение массовых долей каждого компонента смеси вследствие химических реакций, и дополнительное уравнение релаксации для объединенной колебательно-электронной температуры:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho Y_i) + \nabla \cdot (\rho \vec{v} Y_i) = -\nabla \cdot \vec{J}_i + R_i$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho E_{ve}) + \nabla \cdot (\rho E_{ve} \vec{v}) = -\nabla \cdot \vec{q}_{ve} - \sum_i \nabla \cdot \left(E_{ve,i} J_i\right) + R^{tv} + \sum R_i E_{ve,i}$$

где x – аксиальная координата, r – радиальная координата, ρ – плотность смеси (использовалось уравнение состояния идеального газа), $\vec{v}$ – скорость течения, $\bar{\bar{\tau}}$ – тензор вязких напряжений, $-\nabla \cdot (\rho \overline{\vec{v}'\vec{v}'})$ – тензор турбулентных напряжений (для замыкания использовалась модель турбулентности *SST* k - ω), E – полная энергия, J_i – диффузионный поток (по закону Фика), h_i – удельная энтальпия, $\vec{q}$ и $\vec{q}_{ve}$ – вектор потока полно энергии и колебательно-электронной энергии (по закону Фурье), Y_i – массовая доля i-ой компоненты, E_{ve} – объединенная колебательно-электронная энергия, R_i – релаксационные члены, отвечающие за химические процессы, R^{tv} – релаксационный член, отвечающий за колебательную релаксацию между поступательными и колебательными модами. Для моделирования колебательной релаксации используется формула Ландау-Теллера. Химические релаксационные члены вычислялись с помощью коэффициентов скоростей реакций по наиболее распространенной модели Парка, использовалась модель пятикомпонентного воздуха (N_2, O_2, NO, O, N).

На границе входа и на верхней границе области задавались параметры невозмущенного потока (число Маха 3 и избыточное давление 0 Па), на стенках цилиндра – условие прилипания и адиабатичности стенки, на выходе из области избыточное давление также равно 0.

Моделирование проводилось в три этапа. На первом этапе рассчитывался процесс установления стационарного обтекания торца цилиндра длительностью 200 мкс. На втором

этапе в область нагрева в течение 2 мкс подводилась энергия. Третий этап включал нестационарный расчет взаимодействия разогретого газа с головной ударной волной и последующее восстановление стационарного режима обтекания за 200 мкс.

По результатам моделирования было проведено сравнение одно- и двухтемпературного подходов с экспериментальными данными [4] по параметру относительного давления в точке торможения. Как видно из графика на рис. 2а, где приведена зависимость относительного давления в точке торможения от времени, результаты моделирования по однотемпературному (1T) и двухтемпературному (2T) подходам находятся в удовлетворительном согласии с экспериментом, а усложнение модели не оказывает существенного влияния на данную характеристику. Это можно объяснить тем, что давление мало зависит от колебательной релаксации, а температура в области за ударной волной слишком низка для активных химических реакций.

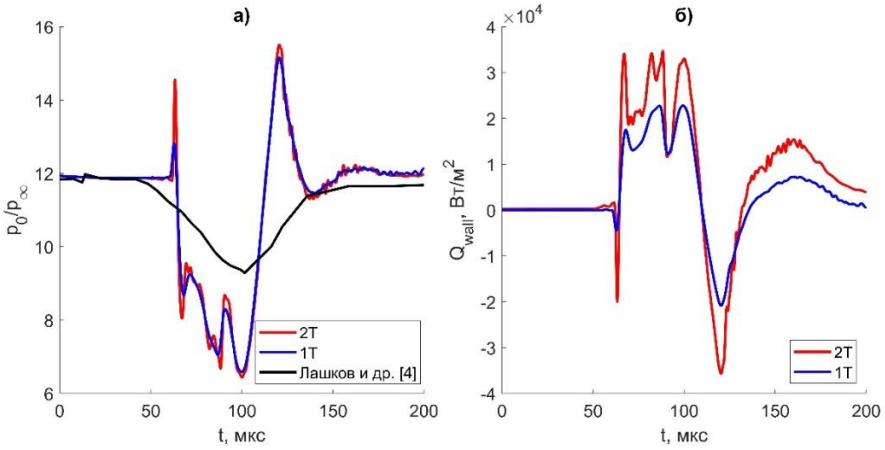


Рис. 2. а) Относительное давление в точке торможения в зависимости от времени;
б) Тепловой поток в точке торможения в зависимости от времени

С целью выявления возможных различий между результатами по двум подходам к моделированию оценивалась величина теплового потока в точке торможения цилиндра. Для этого, перед началом моделирования второго этапа, условие на стенке цилиндра изменялось с адиабатического на условие для стенки с постоянной температурой, равную температуре в точке торможения при достижении стационарного режима обтекания. На рис. 2б показано сравнение теплового потока в точке торможения в зависимости от времени для однотемпературной и двухтемпературной моделей, которое выявило значительное влияние колебательной неравновесности на тепловой поток.

Исследования по данной тематике продолжаются: будет рассмотрена более сложная постановка задачи с использованием 11-компонентной смеси воздуха и учетом процессов ионизации, эта постановка соответствует более высокотемпературному эксперименту, где поступательная температура в области плазмоида достигает 6000 К.

Работа выполнена при поддержке гранта № 22-1-1-17-5 Фонда развития теоретической физики и математики “БАЗИС”.

ЛИТЕРАТУРА

1. Adelgren, R. G., Yan, H., Elliott, G. S., Knight, D. D., Beutner, T. J., Zheltovodov, A. A. Control of Edney IV interaction by pulsed laser energy deposition // AIAA journal. – 2005. – Vol. 43. – No. 2. – P. 256-269.
2. Feng, X., Jie, L., Cheng, Y. Study on control of hypersonic aerodynamic force by quasi-DC discharge plasma energy deposition // Acta Astronautica. – 2021. – Vol. 187. – P. 325-334.
3. Kolesnichenko, Y., Azarova, O., Brovkin, V., Khmara, D., Lashkov, V., Mashek, I., Ryvkin, M. Basics in beamed MW energy deposition for flow/flight control // 42nd AIAA Aerospace Sciences Meeting and Exhibit. – 2004. – P. 669.

4. Lashkov, V. A., Karpenko, A. G., Khoronzhuk, R. S., Mashek, I. C. Effect of Mach number on the efficiency of microwave energy deposition in supersonic flow // Physics of Plasmas. – 2016. – Vol. 23. – No. 5. – 052305.
5. Шоев, Г. В., Бондарь, Е. А., Облапенко, Г. П., Кустова, Е. В. Разработка и апробация методики численного моделирования термически неравновесных диссоциирующих течений в ANSYS Fluent // Теплофизика и аэромеханика. – 2016. – Т. 23. – №. 2. – С. 159-171.

УДК 532.517

В.Р. Адиатуллин, С.А. Галаев, Н.Г. Иванов, В.В. Рис
Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого(*)

ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ ВСТРЕЧНЫХ ПРИСТЕННЫХ СТРУЙ В ПРЯМОУГОЛЬНОЙ ПОЛОСТИ

Введение. Эффективная вентиляция является ключевым фактором качественного воздухообмена и удаления вредных примесей из помещений. Для обеспечения соответствующих параметров в помещениях формируются сложные приточные струйные течения, которые могут принимать черты статистически нестационарных течений, включая течения с автоколебаниями. Колебания приточных струй в помещениях улучшают перемешивание среды и, как следствие, снижают концентрацию вредных примесей.

Настоящее исследование посвящено численному моделированию, анализу структуры потока и определению характеристик автоколебаний при стационарной подаче встречных пристенных турбулентных струй в полость, показанную на рис. 1. Течение в такой же полости, формирующееся при подаче струй, расход которых меняется во времени по гармоническому закону, численно исследовано в работе [1]. В этой работе моделировался режим, при котором течения в подводящих каналах и струях турбулентные: число $\mathrm{Re} = \rho V_0 h_{in} / \mu = 5500$ (V_0 – среднерасходная скорость в подводящих каналах высотой h_{in}, рис. 1). Цель настоящей работы – показать, что при стационарных условиях подачи струй в помещении могут формироваться нестационарные течения с выраженными низкочастотными модами, которые можно назвать автоколебаниями.

Постановка задачи. Помещение имеет прямоугольную форму размерами $(H \times W \times L) = (3 \times 3 \times 6)$ м (рис. 1). Воздух поступает из припотолочных каналов высотой $h_{in} = 0.056H$ (входные сечения показаны синим цветом) и удаляется через каналы высотой $h_{out} = 0.16H$, расположенные у пола (выходные сечения показаны красным цветом).

Во входных сечениях заданы однородные распределения скорости, равной V_0, и значения характеристик турбулентности: $I = 10\%$ и $\mu_t / \mu = 10$, в выходных сечениях – нулевое избыточное давление. Остальные границы – непроницаемые с условием прилипания.

Получены решения для турбулентного режима течения ($\mathrm{Re} = 5500$), и режимов, при которых течение в подводящих каналах ламинарное с числами $\mathrm{Re} = 60$ и $\mathrm{Re} = 100$. Выбор малых значений Re подстроен под данные о турбулентной вязкости, полученные для течения с $\mathrm{Re} = 5500$.

Нестационарные течения с малыми значениями Re моделировались путем решения уравнений Навье-Стокса. Течение с $\mathrm{Re} = 5500$ моделировалось на основе URANS и LES подходов. Турбулентная вязкость находилась по стандартной k-ε модели, LES подход реализован моделью WMLES. Для всех режимов использовались блочные квазиструктурированные расчетные сетки. Размеры сеток приведены в табл. 1.

(*) В.Р. Адиатуллин, adiatullin_vr@spbstu.ru

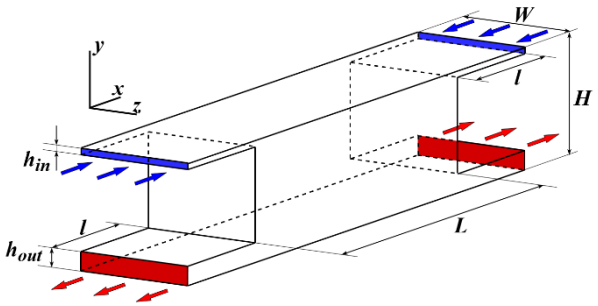


Рис. 1. Геометрическая модель помещения и граничные условия

Табл. 1. Основные вычислительные аспекты

Постановка	**Размер сеток, млн ячеек**	**Шаг по времени, H/V_0**	**Модель течения**	**Период осреднения, H/V_0**
Re = 5500	22	$1.67\cdot10^{-3}$	WMLES	410
Re = 5500	4.8	$1.67\cdot10^{-2}$	URANS (k-ε Standard)	1150
Re = 100	0.85	$8.33\cdot10^{-3}$	Laminar	2670
Re = 60				1670

Численное решение получено с применением программного пакета ANSYS Fluent 2022R1. В расчетах использовался (pressure-based) решатель двойной точности, конвективные слагаемые дискретизировались по противопоточной схеме 2-го порядка. Временные шаги указаны в табл. 1. В случае моделирования методом WMLES во входных сечениях каналов создавался турбулентный контент генератором синтетической турбулентности (Vortex Method). Времена набора статистически достоверных результатов для всех вариантов приведены в табл. 1.

Результаты моделирования. Результаты расчетов распространения встречных пристенных струй показали развитие в помещении автоколебательных режимов для всех значений числа Re. На рис. 2 представлена эволюция компонент скорости в точке мониторинга, расположенной в геометрическом центре помещения. В табл. 2 сведены значения безразмерных периодов колебаний компонент скорости, которые идентифицированы нами как ведущая мода автоколебаний. Получено, что автоколебания скорости являются низкочастотными, а их амплитуда сравнима с характерной скоростью течения. Расчеты методами URANS и WMLES предсказали близкие частоты автоколебаний.

Интересной особенностью течения при Re = 5500 является периодическое возникновение воздушного столба, поднимающегося вверх, в центральной области помещения (цветные карты на рис. 2б). Данная структура предсказывается моделированием обоими методами, URANS и LES. Режимы с малыми значениями Re демонстрируют существенно разное поведение течения во времени. Если для Re = 60 наблюдается явно периодическое изменение скорости, то в случае Re = 100 эволюция скорости близка к хаотической, как и в случае Re = 5500 для метода WMLES.

На рис. 3 представлены поля z-компоненты мгновенной скорости и линии тока в продольной плоскости $z/W = 0.5$ (т.е. компонента скорости, перпендикулярная сечению), а также поля модуля осредненной скорости в том же сечении для рассматриваемых режимов течения. Мгновенные поля взяты в схожие моменты циклов изменения скорости. Как видно, наблюдается качественное совпадение картин течения. Мгновенные поля скорости с линиями тока демонстрируют сложную пространственную структуру течения взаимодействующих струй с образованием глобальных вихревых зон, размер которых сравним с характерным геометрическим масштабом *H*. Осредненные поля течения являются симметричными.

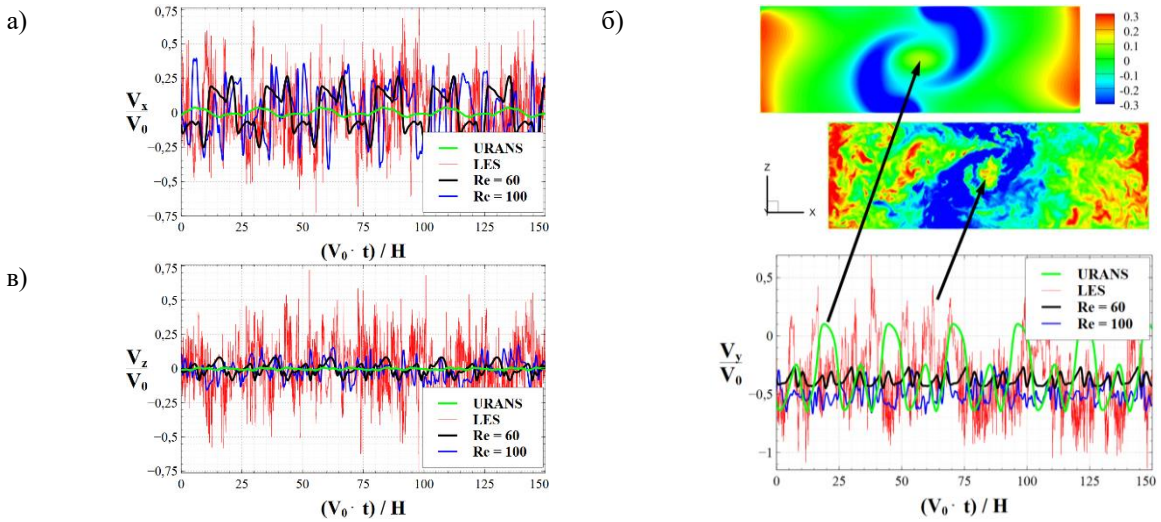


Рис. 2. Эволюция компонент скорости в точке мониторинга для разных постановок: а) *x*-компонента; б) *y*-компонента и ее мгновенные поля в плоскости *y*/*H* = 0.5, полученные URANS и LES подходами; в) *z*-компонента

Табл. 2. Характерный период колебаний компонент скорости в точке мониторинга

Постановка	**Характерный период колебаний, H/V_0**		
	V_x	V_y	V_z
Re = 5500 WMLES	26.0	16.5	13.7
Re = 5500 URANS	25.7	12.8	12.7
Re = 100	20.8	7.8	17.9
Re = 60	22.8	11.3	11.5

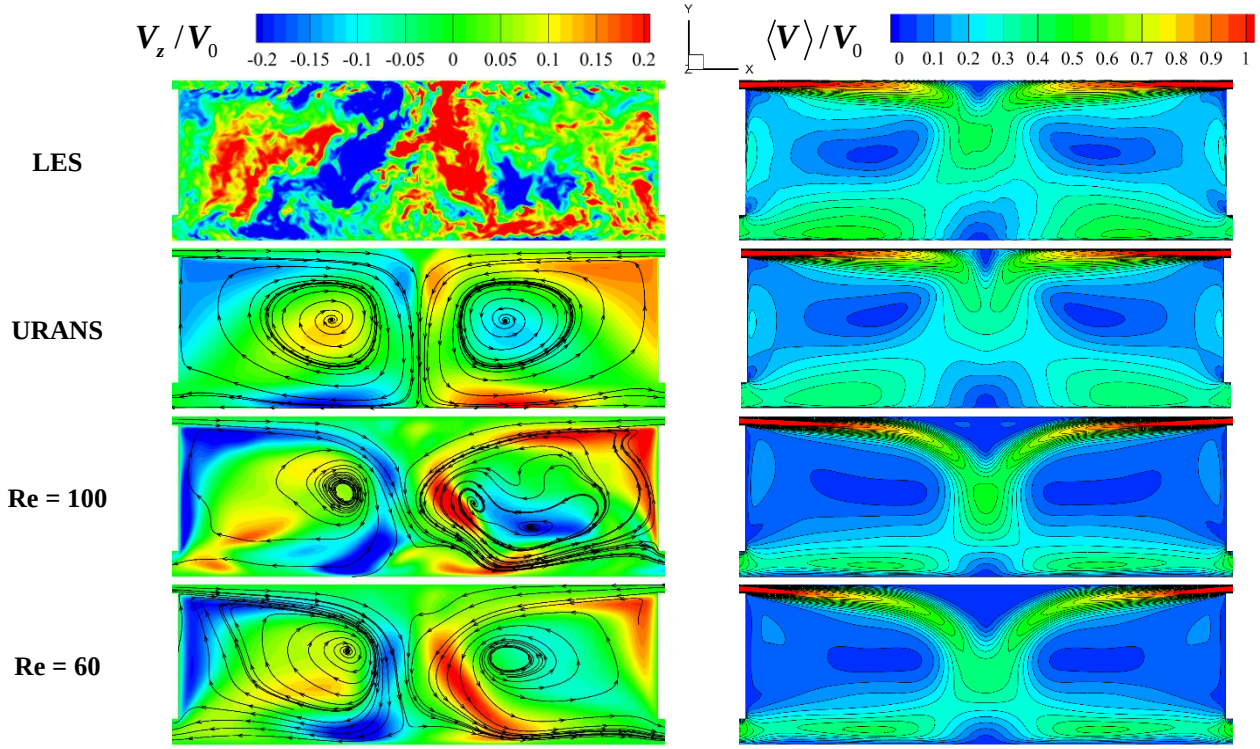


Рис. 3. Слева – поля мгновенной *z*-компоненты скорости и линии тока в плоскости *z*/*W* = 0.5; справа – поля модуля осредненной скорости в том же сечении

Расчеты проводились с использованием ресурсов СКЦ «Политехнический».
Работа выполнена при поддержке Российского научного фонда, грант № 24-19-00437.

ЛИТЕРАТУРА

1. Van Hooff T., Blocken B. Mixing ventilation driven by two oppositely located supply jets with a time-periodic supply velocity: A numerical analysis using computational fluid dynamics // Indoor and Built Environment. – 2020. – Vol. 29(4). – P. 603-620.

УДК 532.526.5

М.В. Акунец, А.В. Гарбарук
Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого(*)

АНАЛИЗ ПРИМЕНЕНИЯ НЕЙРОННЫХ СЕТЕЙ И МЕТОДА ГЕНЕТИЧЕСКОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ ДЛЯ ПОВЫШЕНИЯ ТОЧНОСТИ RANS-МОДЕЛИРОВАНИЯ ТУРБУЛЕНТНЫХ ТЕЧЕНИЙ

Введение. Нередко точность расчетов различных типов турбулентных течений методом RANS с применением полуэмпирических моделей турбулентности является неудовлетворительной. Одной из основных причин этого является неуниверсальность моделей, что обусловлено их настройкой на ограниченном наборе течений. Для повышения точности при расчете других классов течений в модели зачастую вводятся поправки, которые представляют собой множители или слагаемые в уравнениях переноса турбулентных характеристик и строятся на основании эксперимента или результатов DNS. При их разработке обычно опираются на интуицию, однако в последние годы широкое распространение получили методы машинного обучения (ML). В работе [1] для разработки такой поправки применялась нейронная сеть (NN). Альтернативный подход к определению поправки в форме математического выражений с помощью эволюционного алгоритма (EA) ML рассмотрен в работе [2]. Настоящая работа посвящена анализу эффективности указанных NN и EA методов для повышения точности модели турбулентности Спаларта-Аллмараса (SA) [3] при решении задачи обтекания выпуклости на поверхности.

Постановка задачи. Рассматривается обтекание выпуклости длиной L_0, расположенной на плоской поверхности, при числе Маха 0.4 и числах Рейнольдса $(\mathrm{Re} = U_0 L_0 / \nu): 25\times10^4, 5\times10^5, 10^6$. Выпуклость описывается гауссовой кривой $y(x) = h\exp[-(x/x_0)^2]$, где $h/L = 0.085,\ x_0/L = 0.195,$ x и y - продольная и поперечная координаты. RANS моделирование выполнено в конечно-объемном CFD-коде “Numerical Turbulence Simulation” (NTS) в двухмерной постановке при полностью турбулентном режиме обтекания. Размеры прямоугольной расчетной области $L_x/L_0 = 2,\ L_y/L_0 = 0.5.$ Расчетные сетки обеспечивают сеточную сходимость и содержат около 130 тыс. ячеек.

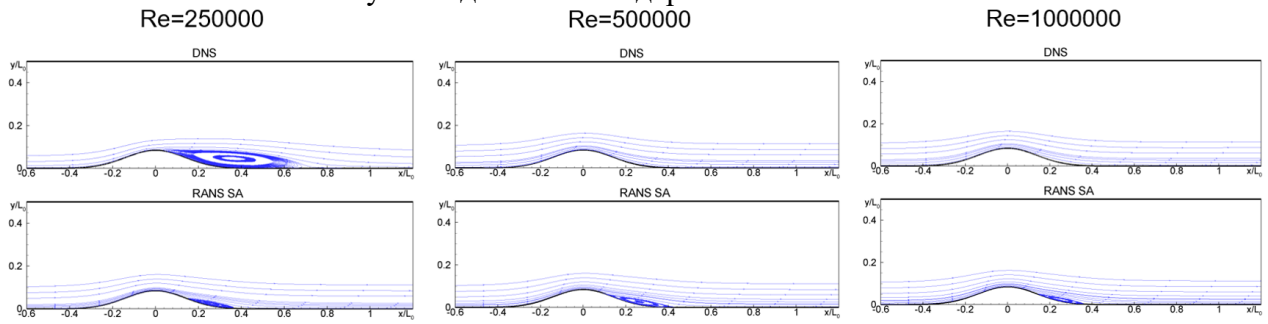


Рис. 1. Результаты DNS и RANS моделирования

(*) М.В. Акунец, akunets_mv@spbstu.ru

Полученные результаты RANS SA моделирования существенно отличаются от результатов DNS, полученных ранее в лаборатории вычислительной гидроаэроакустики и турбулентности СПбПУ(рис. 1). Так, при $\mathrm{Re} = 25 \cdot 10^4$ величина зоны отрыва в расчете RANS SA значительно меньше, чем в DNS расчете. В тоже время при $\mathrm{Re} = 5 \cdot 10^5$ и 10^6 наблюдается противоположная картина - RANS SA завышает размеры зоны отрыва.

Для повышения точности RANS моделирования выполнена модификация SA модели путем введения безразмерного множителя β перед генерационным слагаемым в уравнении переноса модифицированной турбулентной вязкости $\tilde{\nu}$.

$$\frac{\mathrm{D}\tilde{\nu}}{\mathrm{Dt}} = \beta P(\tilde{\nu}, U) - D(\tilde{\nu}, U) + T(\tilde{\nu}, U) \qquad (1)$$

где $U(x, y)$ - осредненный по Рейнольдсу вектор консервативных переменных, P, D, T - соответственно генерационный, диссипативный и диффузионный члены. Поправка $\beta(X)$ локальна и в каждой точке пространства зависит от безразмерных переменных $X = \{X_1(U), ..., X_n(U)\}$. Установление функциональной формы $\beta(X)$ выполняется в два этапа по методу FIML, предложенному в работе [4].

На первом этапе решается обратная задача моделирования и определяется оптимальное поле поправки $\beta(x, y)$, обеспечивающее наилучшее согласование результатов RANS и DNS. Задача оптимизации поля $\beta(x, y)$ определяется как минимизация расхождения значений интеграла продольной компоненты скорости u_x в прямоугольной области F, ограниченной $\mathrm{x/L_0} \in [-0.2; 1.0]$, $\mathrm{y/L_0} \in [0.0; 0.15]$ и была решена градиентным методом:

$$\beta^i = \beta^{i-1} - \alpha \frac{dJ}{d\beta}, J = \int_F u_x df \qquad (2)$$

где i – номер итерации оптимизации, $\alpha = 0.5$ – параметр, определяющий скорость оптимизации, $dJ/d\beta$ – частные производные определяемые с помощью Adjoint метода.

На втором этапе определяется набор переменных X, и далее совместно с оптимальными полями $\beta(x, y)$, полученными на первом этапе, формируется обучающая выборка и проводится обучение ML моделей. Первая из рассмотренных ML моделей - нейронная сеть - описывает функциональную форму $\beta(X)$ путем последовательного конструирования линейных комбинаций и их нелинейного преобразования посредством функции активации. В данной работе разработка и обучение модели нейронной сети реализовано с помощью открытой библиотеки машинного обучения scikit-learn [5]. Оптимальные параметры нейронной сети для текущей задачи подобраны в ходе предварительных расчетов: 2 скрытых слоя с 64 нейронами каждый и логистическая функция активации. Вторым рассмотренным ML методом является разновидность EA - программирование с экспрессией генов (GEP). В GEP математическое выражение $\beta=f(X)$ формируется путем генерации случайных комбинаций из заданного набора математических операторов, функций и переменных X с последующим применением операторов EA (таких как рекомбинация и мутация) и отбором наилучших выражений. В данной работе модель GEP реализована с помощью библиотеки geppy на Python [6]. Размер генерируемого выражения (размер хромосомы) в данной работе был ограничен 1 геном с длиной головной части h=8, содержащей базовые операторы и функции $(*, +, -, /, pow, \tanh, \exp, \log)$ и 4 автоматически определяемые функции (ADF), представленные геном с длиной h=8.

Выбор безразмерных величин для набора переменных X может быть проведен различными способами, при этом надежные априорные методы оценки набора X отсутствуют. В данной работе для этой цели рассмотрено применение GEP метода, который автоматически выбирает в ходе эволюции из заданного предварительно широкого набора безразмерных величин только наиболее значимые (X_{GEP}) и устанавливает зависимость $\beta = f(X)$. Так, для

формирования набора X_{GEP} в текущей работе проведено многократное обучение GEP модели на наборе содержащем 12 безразмерных величин, в результате которого были отобраны только 4 величины, наиболее часто встречающиеся в полученном GEP математическом выражении: $X_{GEP} = \{\chi/(\chi+1), \overline{\Omega}, S/\Omega, f_d\}$. Здесь $\overline{\Omega} = \tilde{\Omega} d^2/(\nu+\nu)$, $\tilde{\Omega}$, ν и χ – величины, входящие в модель SA [3], d – расстояние до стенки, Ω – модуль тензора завихренности, S – модуль тензора скоростей деформации, $f_d = 1 - \tanh([8r_d]^3)$, $r_d \equiv (\nu+\nu)/(\sqrt{V_{i,j}V_{i,j}}\kappa^2 d^2)$, $V_{i,j}$ – градиенты скорости, $\kappa = 0.41$ – постоянная Кармана.

Далее было проведено обучение оптимальных NN и GEP моделей на выбранном наборе X_{GEP}. По результатам обучения GEP модели было получено символьное выражение для поправки:

$$\beta = -0.057 \cdot (\log[(\chi/(\chi+1))^6 + 0.0725 \cdot [(\overline{\Omega} - 34.1)/52.5]^2] - (\chi/(\chi+1))^2 (f_d - 0.16)/0.31) + 0.931 \quad (3)$$

Результаты, полученные с использованием моделей SA-NN и SA-GEP, приведены на рис. 2. В первую очередь следует отметить превосходство модели SA-NN над моделью SA-GEP. Так, SA-NN превосходит оригинальную модель SA во всех расчетных случаях, в то время как модель GEP демонстрирует при $\mathrm{Re} = 25 \cdot 10^4$ значительное ухудшение результатов относительно оригинальной модели SA. Дальнейшие попытки повысить точность SA-NN путем использования других наборов переменных X к улучшению не привели.

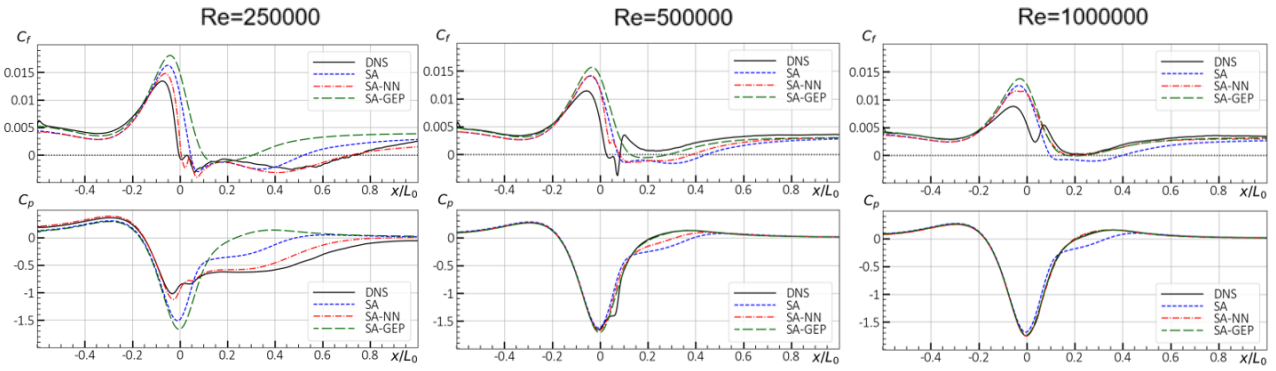


Рис. 2. Сравнение распределений коэффициента трения и коэффициента давления для DNS, базовой модели SA и моделей SA-NN, SA-GEP

По результатам работы возможно сформулировать алгоритм повышения точности существующих моделей турбулентности путем введения поправки, состоящий из 3-х этапов: решение обратной задачи для определения оптимального поля поправки β; формирование набора безразмерных переменных X с использованием GEP метода; обучение нейронной сети для формирования функциональной формы $\beta = f(X)$.

Работа выполнена при поддержке гранта РНФ № 25-21-00013

ЛИТЕРАТУРА

1. Singh A.P., Shivaji M., Duraisamy K. Machine-Learning-Augmented Predictive Modeling of Turbulent Separated Flows over Airfoils // AIAA Journal. – 2017. –Vol. 55(7). – P. 2215-2227.
2. Sun X., Shan X., Liu Y., Zhang W. Towards a Generalized SA Model: Symbolic Regression-Based Correction for Separated Flows [Электронный ресурс]. – Режим доступа: https://arxiv.org/abs/2503.09225 (дата обращения: 10.01.2025).
3. Spalart, P.R., Allmaras, S.R. A One-Equation Turbulence Model for Aerodynamic Flows / 30th Aerospace Sciences Meeting & Exhibit,Reno. – NV, Jan. – 1992.
4. Duraisamy K., Zhang Z.J., Singh A.P. New Approaches in Turbulence and Transition Modeling Using Data-driven Tehniques / 53rd AIAA Aerospace Sciences Meeting AIAA SciTech AIAA Paper. – 2015.

5. Scikit-learn Machine Learning in Python. [Электронный ресурс]. – Режим доступа: https://scikit-learn.org (дата обращения: 10.01.2025).
6. *Geppy* evolutionary algorithm framework. [Электронный ресурс]. – Режим доступа: https://geppy.readthedocs.io/en (дата обращения: 10.01.2025).

УДК 620.92

С.В. Андрейко, А.В. Павлов, П.Г. Бобылев, В.Ю. Митяков
Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого(*)

ИССЛЕДОВАНИЕ ВЛИЯНИЯ ОГРАНИЧИТЕЛЯ ПОТОКА ОХЛАЖДАЮЩЕЙ ЖИДКОСТИ НА ТЕПЛООБМЕН ПРИ КИПЕНИИ В БОЛЬШОМ ОБЪЕМЕ

Введение. Теплообмен при кипении на плоской поверхности изучен достаточно хорошо, что позволяет рассчитывать режимы и размеры теплоотдающих поверхностей, однако до сих пор не предложены методы управления отводимым тепловым потоком без изменения нагрузки охлаждаемых модулей. Согласно данным авторов [1], при помощи гидравлических ограничителей потока можно управлять отводимым тепловым потоком при кипении. Цель ограничителя – разделить потоки подводимой к поверхности жидкости и отводимой пароводяной смеси. В работе предложено использование ограничителя потока для управления отводимым тепловым потоком при кипении на оребренной поверхности.

Методика исследования. Основным методом исследования является градиентная теплометрия. Это метод изучения тепловых процессов с помощью градиентных датчиков теплового потока (ГДТП). Датчик представляет собой анизотропный термоэлемент [2]. Принцип работы таких датчиков основан на поперечном эффекте Зеебека. Связь термоЭДС с плотностью теплового потока выражается формулой (1):

$$q = \frac{E_{\perp}}{A \cdot S_0}, \text{Вт/м}^2 \quad (1)$$

где q – ПТП, Вт/м^2; $E_{\perp}$ – термоЭДС, мВ; A – площадь ГДТП в плане, м^2; S_0 – вольт-ваттная чувствительность ГДТП, мВ/Вт. В работе применялись гетерогенные градиентные датчики теплового потока (ГГДТП) из композиции медь-никель [3].

Экспериментальная установка моделирует систему пассивного охлаждения «силового модуля». Стенд включает емкость объемом 4,5 л, в дне которой выполнено квадратное отверстие размерами 30 × 30 мм для ввода исследуемых поверхностей теплообмена (рис.1).

Исследуемая поверхность монтируется на цилиндр из алюминия диаметром 50 мм и длиной 120 мм, обмотанный нагревателем из нихрома с номинальным сопротивлением 45 Ом. Между проволокой и цилиндром проложен изолирующий слой слюды толщиной 0,05 мм. Снаружи нагреватель теплоизолирован слоем асбеста толщиной 3 мм. Чтобы снизить потери теплоты от нагревателя в окружающую среду, он помещается в печь, используемую в качестве охранного нагревателя. На верхнем торце нагреваемого цилиндра выполнена выборка размерами 5 × 5 × 0,4 мм, куда устанавливались ГГДТП размерами 3×3×0,3 мм и спай термопары (ТХА). ГГДТП и термопара располагаются под исследуемой пластиной толщиной 9 мм. ГГДТП фиксирует ПТП, проходящую от нагреваемого цилиндра к поверхности теплообмена, а термопара – температуру «силового модуля». Данные с ГГДТП и термопары записываются с помощью ИВК NIPXI-1050 с частотой записи 5000 изм./с.

(*) С.В. Андрейко, Andrejko.sv@edu.spbstu.ru

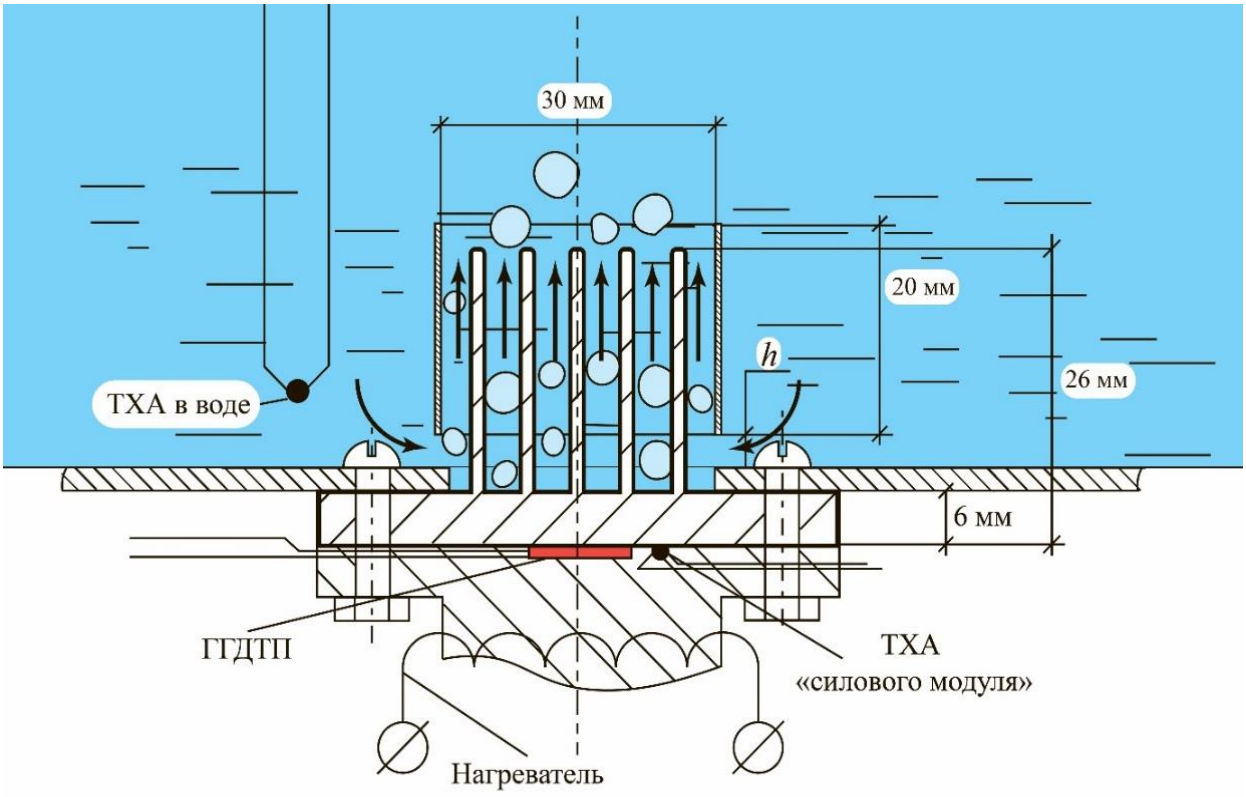


Рис. 1. Схема экспериментального участка

Результаты. В ходе экспериментов была измерена местная плотность теплового потока и температура охлаждаемого «силового модуля». На рис.2 представлены результаты для поверхности с 3 ребрами, а на рис.3. для поверхности с 5 ребрами. Высота ребра 20 мм, толщина 1,5 мм. На модели с 5 ребрами шаг оребрения составил 6 мм, а на модели с 3 ребрами 12 мм.

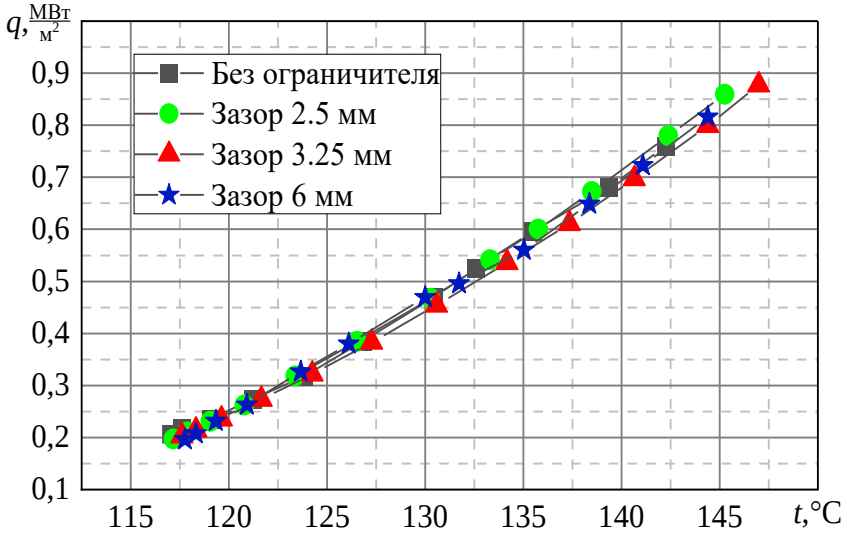


Рис. 2. Зависимость ПТП от температуры «силового модуля» для поверхности с тремя ребрами

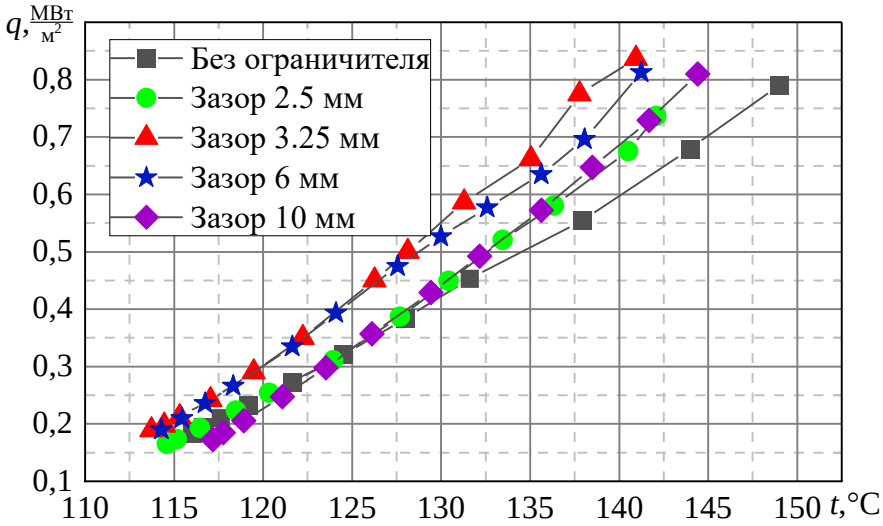


Рис. 3. Зависимость ПТП от температуры «силового модуля» для поверхности с пятью ребрами

Вывод. Из рис.2 видно, что при использовании оребренной модели с шагом оребрения 12 мм эффект от использования ограничителя потока не обнаружен. Использование модели с шагом оребрения 6 мм демонстрирует наличие эффекта от применения ограничителя потока. Увеличение зазора между основанием и ограничителем приводит к снижению температуры «силового модуля» при неизменной отводимой плотности теплового потока. Обнаружен Определена величина зазора с наибольшим эффектом (3,25 мм), превышение которой снижает обнаруженный эффект вплоть до полного его исчезновения.

ЛИТЕРАТУРА

1. Yuan, L., F. Hong, and P. Cheng. Pool boiling enhancement through a guidance structure mounted above heating surface // International Journal of Heat and Mass Transfer. – 2019. – p. 751-763.
2. Sapozhnikov S.Z., Mityakov V. Yu., Mityakov A.V. Heatmetry: The Science and Practice of Heat Flux Measurement. – Springer International Publishing, St.-Petersburg, 2020. – 209 p.
3. Павлов А.В., Бобылев П.Г., Сапожников С.З. Градиентная теплометрия в исследовании теплообмена при кипении в большом объеме недогретой воды и жидкости с добавлением микрочастиц Al2O3 // Теплоэнергетика. – 2023. – No 3. – С. 40-48

УДК 533.6.04

А.П. Байнов, А.В. Гарбарук, А.А. Матюшенко
Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого(*)

ЧИСЛЕННОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ ВЛИЯНИЯ ТОЛЩИНЫ И ВОГНУТОСТИ ПРОФИЛЯ КРЫЛА С ВОЛНООБРАЗНОЙ ПЕРЕДНЕЙ КРОМКОЙ НА ЕГО АЭРОДИНАМИЧЕСКИЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ

При проектировании различных объектов, таких как крылья самолетов, лопасти ветряных турбин и пропеллеры летательных аппаратов, стараются добиться плавного изменения аэродинамических характеристик при изменении угла атаки. Однако при больших углах атаки возникает массивный срыв потока на стороне разрежения, который приводит к резкому изменению нагрузок, характеризующихся коэффициентами подъемной силы C_L и

(*) А.П. Байнов, antonbaynoff@gmail.com

силы сопротивления C_D, что негативно сказывается на эффективности и стабильности работы вышеперечисленных устройств. В связи с этим активно разрабатываются подходы, обеспечивающие плавное изменение аэродинамических характеристик в зависимости от угла атаки.

Одним из таких подходов является создание волнообразной передней кромки (ВПК) в плоскости крыла, что эквивалентно периодическому изменению хорды крыла вдоль его размаха (рис. 1). Параметры ВПК подбираются таким образом, чтобы до критического угла атаки значения C_L оставались почти прежними, а после него обеспечивались высокие значения C_L.

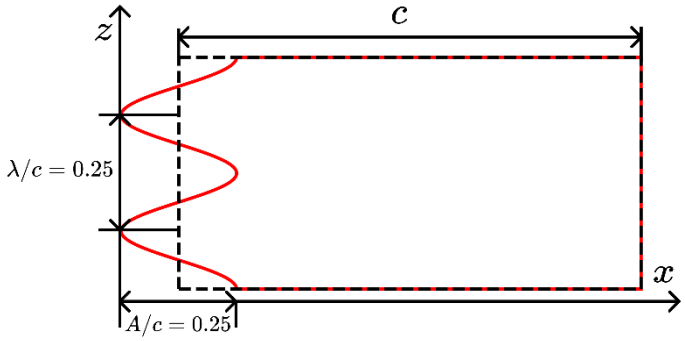


Рис. 1. Вид ВПК в плоскости крыла

В публикациях, посвященных исследованию влияния ВПК, демонстрируется эффективность данного подхода. Так, например, для NACA0021 в [1] представляется экспериментальное исследование влияния параметров ВПК на обтекание крыла конечного размаха; результаты свидетельствуют о том, что удается избежать резкого изменения характеристик из-за срыва потока и добиться почти постоянного C_L при углах атаки больше критического. В исследованиях [2] и [3] проводились численные расчеты по методу LES, как без ВПК, так и с ВПК одной из конфигураций, представленных в [1]. В результатах расчетов наблюдается позитивное влияние ВПК на характеристики крыльев, однако полученные результаты отличаются как друг от друга, так и от результатов [1]. В работе [4] для крыла с двумя конфигурациями ВПК из [1] проводился LES расчет, результаты которого хорошо согласуются с [1] и демонстрируют эффективность ВПК. Таким образом, из [1-4] следует, что применение ВПК позволяет добиться гладкого изменения аэродинамических характеристик NACA0021, однако получаемый результат сильно зависит от параметров ВПК, таких как амплитуда и длина волны. Похожие выводы по влиянию ВПК можно сделать на основе анализа ряда исследований и для других крыловых профилей. В [2-3] также предполагается, что наблюдаемые эффекты могут быть связаны с наличием ламинарно-турбулентного перехода, а также с изменением механизма передачи энергии при обтекании крыла с ВПК.

В настоящей работе представляются результаты численного исследования методом RANS влияния толщины и вогнутости профиля крыла с ВПК на примере профилей серии “NACA 4-digit”. Рассматривалось обтекание гладкого крыла бесконечного размаха с ВПК турбулентным потоком вязкой несжимаемой жидкости при числе Рейнольдса Re=120000. Для получения ВПК на крыло накладывалась деформация по формуле

$$x = \frac{0.5 - x}{0.5} \cdot \frac{A}{c} \cdot \cos\left(\frac{2\pi c z}{\lambda}\right), x \in [0, 0.5],$$

где A и λ – параметры амплитуды и длины волны ВПК, а c – длина хорды крыла. Отметим, что после деформации площадь крыла оставалась неизменной.

Расчеты проводились с использованием модели турбулентности SST HL [5], предназначенной для расчета обтеканий крыловых профилей в режимах близких к срыву потока. Размеры расчетной области по размаху крыла составили одну длину волны ВПК, а в

плоскости XY ее границы отстояли от крыла на расстояние не менее 20 хорд. На входных границах области задавались компоненты скорости и характеристики турбулентности потока, давление экстраполировалось изнутри расчетной области. На выходной границе задавалось нулевое избыточное давление, а другие переменные экстраполировались изнутри расчетной области. На боковых гранях области задавались периодические граничные условия. На крыле задавались условия прилипания и непроницаемости и нулевой градиент давления по нормали к стенке.

Расчеты проводились в пакете ANSYS Fluent методом конечных объемов на структурированной расчетной сетке С-типа со сгущением ячеек к крылу, обеспечивающим параметр $y+$ на крыле не больше 1 на всем исследуемом диапазоне углов атаки.

При расчетах некоторых режимов течений в стационарной постановке, как с ВПК, так и без нее, не удавалось добиться сходимости решения. Дополнительные расчеты в нестационарной постановке показали, что это вызвано неустойчивостью стационарного решения и возникновением периодических колебаний потока. В тех случаях, когда удалось получить оба решения, осредненное по времени нестационарное решение существенно отличалось от стационарного. По этой причине дальнейшие расчеты проводились в нестационарной постановке.

Для исследования влияния длины волны и амплитуды ВПК на аэродинамические характеристики профиля NACA0012 была проведена серия расчетов при различных параметрах ВПК: параметр A варьировал от 0 до 0.2, а параметр λ от 0 до 0.3. Из рис. 2, на котором приведены результаты этой серии расчетов, видно, что применение ВПК приводит к уменьшению падения C_L при критическом угле атаки и к росту C_D в диапазоне углов от 5° до 12°. Если рассматривать влияние ВПК на C_L, то можно увидеть, что для λ/c в 20 и 30%, при A/c больше 10% C_L возрастает после критического угла атаки, в то время как малые амплитуды и длины волны не дают существенного прироста C_L.

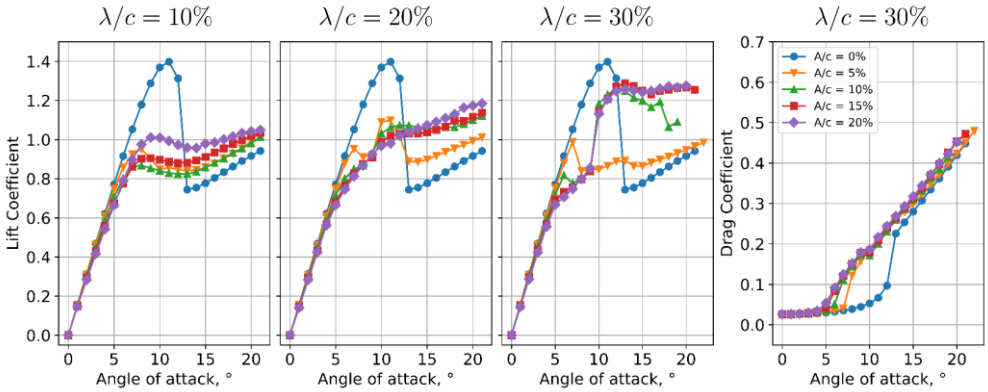


Рис. 2. Влияние конфигурации ВПК на зависимость коэффициентов подъемной силы и сопротивления от угла атаки для профиля NACA0012

Для исследования влияния толщины и вогнутости профиля были проведены расчеты обтекания крыловых профилей NACA0021 и NACA4412 без ВПК и с ВПК при A/c=20% и h/c=20%. Результаты расчетов, приведенные на рисунке 3, свидетельствуют об эффективности ВПК для всех рассмотренных профилей: зависимость C_L от угла атаки становится более гладкой. Влияние вогнутости и толщины профиля на эффект ВПК состоит в следующем. Для вогнутого крыла профиля NACA4412 применение ВПК приводит к снижению C_L на всем диапазоне углов атаки. При увеличении толщины профиля крыла (NACA0021) диапазон углов атаки, в котором наблюдается прирост C_L, существенно уменьшается. Следует отметить, что наблюдаемые тенденции получены при конкретных характеристиках ВПК, изменение которых может привести к изменению влияния ВПК.

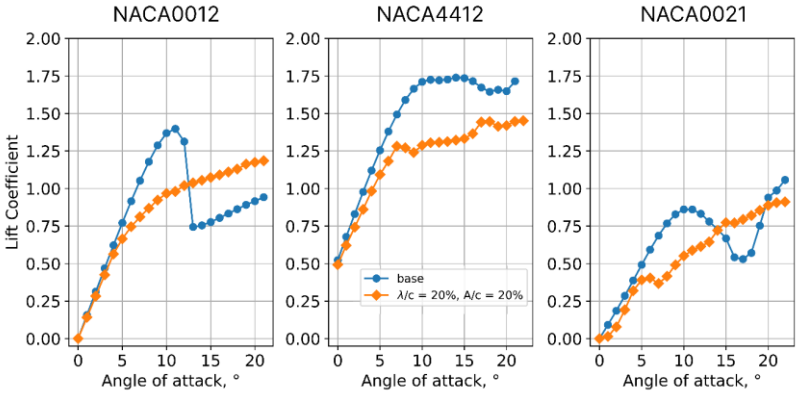


Рис. 3. Характеристики крыльев разных профилей при разных параметрах ВПК

В результате проведенных численных исследований можно заключить, что применение ВПК приводит к более гладкой зависимости коэффициента подъемной силы от угла атаки и к росту коэффициента сопротивления на определенных режимах. При этом для симметричных профилей с ВПК, существует диапазон углов атаки, при котором применение ВПК приводит к росту C_L, в то время как для вогнутых профилей такие режимы отсутствуют. Последний вывод получен для конкретной конфигурации ВПК, его обобщение на другие конфигурации требует дальнейших исследований.

ЛИТЕРАТУРА

1. Hansen, K. L., Kelso, R. M., & Dally, B. B. Performance variations of leading-edge tubercles for distinct airfoil profiles // AIAA Journal. – 2011 – №49(1). – P. 185–194.
2. Skillen, A., Revell, A., Pinelli, A., Piomelli, U., & Favier, J. Flow over a wing with leading-edge undulations. // AIAA Journal. – 2015. – № 53(2). – P. 464–472.
3. Pérez-Torró, R., & Kim, J. W. A large-eddy simulation on a deep-stalled aerofoil with a wavy leading edge. // Journal of Fluid Mechanics. – 2017. – №813. – P. 23–52.
4. Zhao, M., Wei, T., Zhao, Y., & Liu, Z. (2023). Influences of Leading-Edge Tubercle Amplitude on Airfoil Flow Field. // Journal of Thermal Science. – 2023 – №32(4). – 1335–1344. https://doi.org/10.1007/s11630-023-1465-z
5. А.А. Матюшенко, Усовершенствованные версии k-ω SST модели турбулентности для расчета аэродинамических характеристик крыльев и турбинных лопаток // дис. к-ф. м. наук. – 2023.

УДК 532.517:004.85

В.А. Баранов, А.Г. Абрамов
Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого(*)

ПРИМЕНЕНИЕ ГРАФОВЫХ НЕЙРОННЫХ СЕТЕЙ ДЛЯ ПРЕДСКАЗАНИЯ ХАРАКТЕРИСТИК ПУЛЬСИРУЮЩЕГО ТЕЧЕНИЯ ВЯЗКОЙ ЖИДКОСТИ В КАНАЛЕ

Введение. Графовые нейронные сети (Graph Neural Networks, GNN) – класс моделей глубокого обучения, ориентированных на работу с данными, которые можно представить в виде графов. Такое представление применимо к широкому спектру областей, а GNN позволяют работать со структурированными данными с произвольными связями между объектами с учетом топологии без необходимости в предварительной обработке. В связи с этим, можно упомянуть задачи предсказания дорожного трафика, классификации молекул по их химической структуре, анализа социальных сетей, работу с графами знаний и др. Большое

(*) В.А. Баранов, baranov_va@spbstu.ru

число исследований последнего десятилетия посвящено разработке GNN и графовых сверток, находящих свое применение в самых разных приложениях (см., например, [1]).

Целью работы являлось изучение возможностей применения GNN в области гидродинамики на примере задачи о пульсирующем течении вязкой жидкости в плоском канале. Производилась апробация различных видов графовых сверток с выбором нескольких для последующего применения в основных исследованиях. Изучались три режима работы моделей для прогнозирования полей скорости и давления на варьируемое число шагов по времени вперед с оценкой предсказательной способности в нестационарных условиях.

Постановка задачи. Рассматривается пульсирующее течение вязкой несжимаемой жидкости в плоском канале длиной 1 м и шириной 0.1 м. Граничные условия: на левой границе задавалось условие периодичности для модуля скорости $U = 0.1 \cdot \sin(t)$, на правой – равенство нулю давления p, на верхней и нижней границах – условие прилипания. Число Рейнольдса, построенное по ширине канала и амплитуде модуля скорости, составляло 560.

Формирование наборов данных. Расчеты проводились на основе полных уравнений Навье-Стокса в CFD-пакете ANSYS Fluent 24R2 на основе схем аппроксимации второго порядка на равномерной сетке размерностью 100x10 ячеек. До старта расчетов были разработаны и протестированы пользовательские функции (UDF), позволяющие производить запись координат узлов расчетной сетки и взаимосвязей между узлами для нахождения соседей в целях формирования графовой структуры, а также функция вывода в файл давления и компонент скорости после каждого шага по времени.

Наборы данных с временными метками, необходимые для обучения моделей нейросетей, были сформированы в результате проведения нестационарного расчета с выбранным по результатам предварительных оценок шагом $\Delta t = 0.025$ с. Общее количество шагов по времени – 2000. Каждой временной метке соотносился индивидуальный граф, в узлах которого хранились значения давления и компонент скорости; графы состояли из 1000 вершин и 1890 ребер. Сохраненные данные записывались в компактную встраиваемую СУБД SQLite для ускорения выдачи результатов по запросу.

Методики создания и использования нейросетей. Полезно заметить, что по принципу построения и использования GNN близки к являющимся их подмножеством и широко внедренным в практику сверточным нейросетям (Convolutional Neural Networks, CNN). GNN собирают информацию от соседних по отношению к текущему узлов и обновляют данные с помощью графовых сверток. Эксплуатируются две основные парадигмы построения графовых сверток – пространственная и спектральная; первая основывается на алгоритме передачи сообщений между узлами графа (Message Passing Neural Networks, MPNN), а вторая анализирует матрицы, описывающие структуру графа (Graph Convolutional Networks, GCN).

В данной работе была задействована пространственная парадигма, и, по результатам изучения предсказательных возможностей набора сверток (более 10), отобраны несколько моделей, для которых были получены наиболее точные предсказания полей, в том числе Graph Attention Network (GAT), GraphSage [1], EdgeCNN [2], PNA [3], LINNX [4]. Другие свертки и модели в оригинальных работах использовались для семантически отличающихся задач, например, динамически изменяющихся ребер графа, и оказались здесь непригодными.

GNN создавались и обучались с помощью инструментов библиотеки PyTorch Geometric (*https://pytorch-geometric.readthedocs.io*), основанной на популярной библиотеке глубокого обучения PyTorch. Применялся онлайновый метод обучения, при котором модели обучаются на данных, поступающих в реальном времени, и адаптируются к изменениям по мере получения новой информации.

Модели были апробированы в нескольких режимах работы для предсказания развития нестационарного процесса – на 1, 10 и 100 шагов по времени, начиная от некоторого стартового момента, граф которого выступал в качестве входных данных (предсказания

выполнялись на каждом шаге). Гиперпараметры были исходно подобраны для модели GAT и шага 1 и оказались приемлемыми для других временных шагов и моделей. В процессе подбора ошибка оценивалась по метрике WMSE с условием падения на 2-3 порядка в результате обучения на нескольких итерациях. Ключевыми параметрами являлись скорость обучения (была выбрана равной 0.001), количество скрытых слоев (1) и скрытых каналов (100). Попытки увеличения количества скрытых слоев приводили к существенному уменьшению скорости работы при отсутствии значимого изменения величины ошибки. На выбор гиперпараметров также повлияло использование модели в онлайновом режиме, при котором получение предсказаний может происходить быстрее, чем исходных данных.

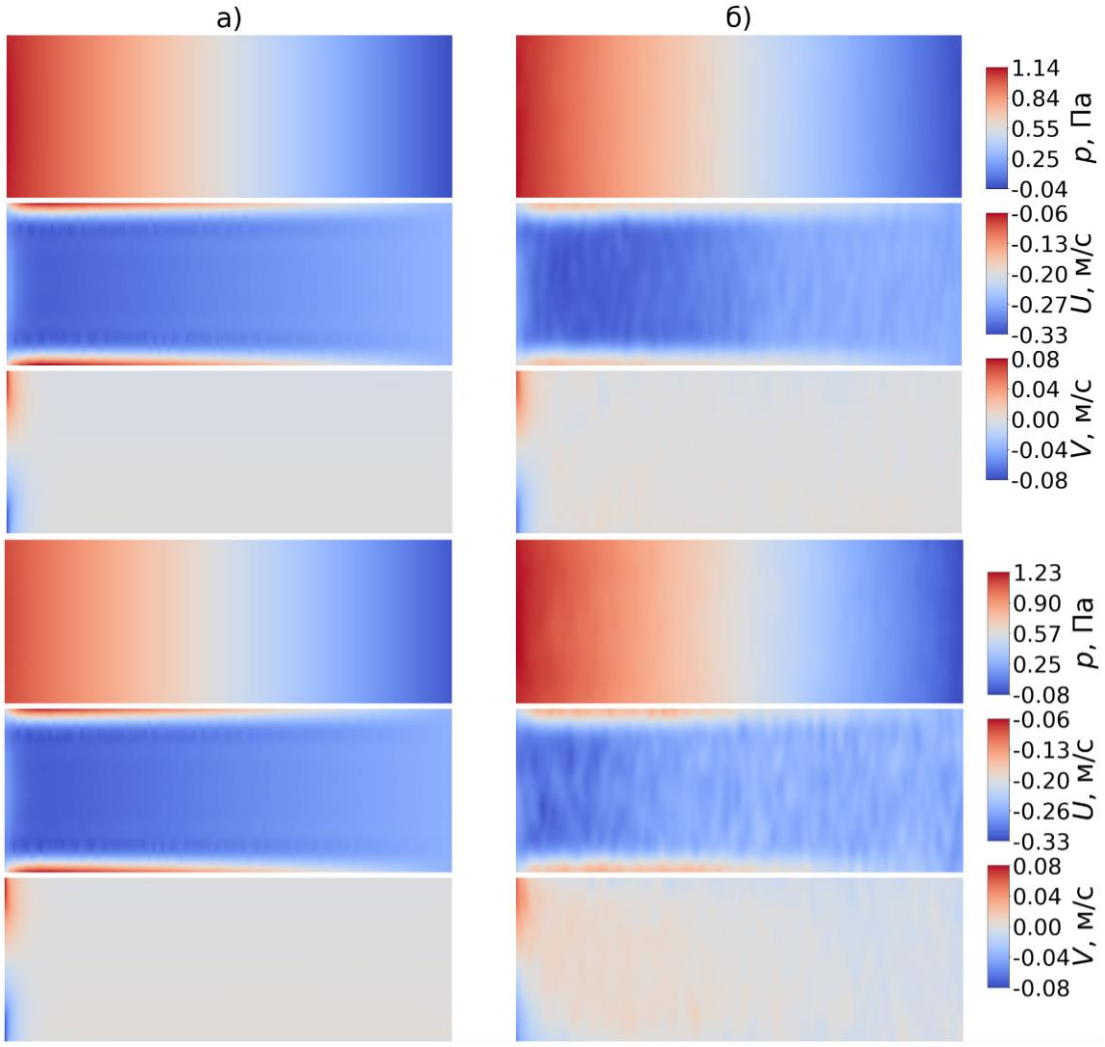


Рис. 1. Сравнение результатов работы модели LINNX с расчетами в момент t = 50 с для режима с предсказанием 1 (вверху) и 10 (внизу) шагов по времени а) CFD-расчет; б) предсказанные поля

Результаты исследований. На рис. 1 в виде графовых представлений приведены примеры полей, рассчитанных методом CFD и предсказанных моделью для режимов с 1 и 10 шагами с помощью свертки LINNX, которая оказалось наиболее быстрой и эффективной из всех реализаций. Как видно, общая картина и значения величин хорошо согласуются друг с другом, особенно для режима с наименьшим сдвигом по времени. Для режима с 10 шагами наблюдаются относительно небольшие локальные отличия предсказанных значений от полученных в CFD-расчете. Значения метрики WMSE для этих режимов были равны $2.57 \cdot 10^{-4}$ и $3.01 \cdot 10^{-3}$. Заметим, что для режима с продвижением сразу на 100 шагов по времени получить приемлемые для представления результаты на данном этапе исследований не удалось.

В отношении сопоставления временных затрат можно указать на то, что CFD-расчет временного шага на одном ядре CPU выполнялся около 1 с, а прогноз с помощью GNN во всех режимах – около 0.002 с. Типичное время обучения модели составляло 0.01 с.

Подчеркнем, что разработанная модель не может быть формально обобщена на другие типы задач, равно как и на рассматриваемое течение с измененными параметрами. Каждый запуск процесса обучения с новыми данными потребует переопределения гиперпараметров.

Заключение. Полученные результаты продемонстрировали, в целом, приемлемое качество работы задействованных моделей машинного обучения, построенных на базе GNN. Графовые нейросети, интегрированные в CFD-процесс, представляются перспективным инструментом оценки полей для последовательности временных шагов при существенном снижении затрат вычислительных ресурсов. Предполагается, что разработанные и апробированные методики будут использованы в дальнейших исследованиях по применению GNN к рассматриваемой области – планируются улучшения и проверка возможностей моделей в более сложных постановках, включая существенно трехмерные, а также интеграция наработок с библиотекой PyAnsys (*https://docs.pyansys.com*) для применения при работе с пакетами механики сплошных сред Ansys через коды на языке Python.

Расчеты проводились с использованием ресурсов СКЦ «Политехнический».

ЛИТЕРАТУРА

1. Tanis J.H., Giannella C., Mariano A.V. Introduction to graph neural networks: a starting point for machine learning engineers. – The MITRE Corporation, 2024. arXiv:2412.19419. – 49 p.
2. Wang Y., Sun Y., Liu Z., et al. Dynamic graph CNN for learning on point clouds // ACM Transactions on Graphics. – 2019. – Vol. 38. – No. 5. – P. 1-12.
3. Corso G., Cavalleri L., Beaini D., Liò P., Veličković P. Principal neighbourhood aggregation for graph nets / NIPS'20: Proc. of the 34th Int. Conf. on Neural Inf. Proc. Syst., 2020. – Article No.: 1112. – P. 1326013271.
4. Lim D., Hohne F., Li X., et al. Large scale learning on non-homophilous graphs: new benchmarks and strong simple methods / NIPS'21: Proc. of the 35th Int. Conf. on Neural Inf. Proc. Syst., 2021. – Article No.: 1598. – P. 20887-20902.

УДК 519.6:536.46:544.45:661.48

В.А. Баранов[1,2], Д.С. Пашкевич[1], Т.А. Федорова[1]
[1]Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого(*)
[2]АО «Инжиниринговый центр «Кронштадт»

ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДОВ МАШИННОГО ОБУЧЕНИЯ ДЛЯ МОДЕЛИРОВАНИЯ МАКСИМАЛЬНОЙ ТЕМПЕРАТУРЫ В ЗОНЕ РЕАКЦИИ ГЕКСАФТОРИДА УРАНА, МЕТАНА И КИСЛОРОДА В РЕЖИМЕ ГОРЕНИЯ

Введение. Одним из методов переработки гексафторида урана, обедненного по изотопу U-235 (далее ОГФУ), является его взаимодействие с CH_4 и O_2 в режиме горения [1]:

$$UF_{6_{\text{газ}}} + 1.5CH_{4_{\text{газ}}} + 2.5O_{2_{\text{газ}}} \rightarrow UO_{2_{\text{тв}}} + 6HF_{\text{газ}} + 1.5CO_{2_{\text{газ}}} - 1056\text{кДж}. \quad (1)$$

Основным параметром, определяющим состав продуктов процесса (1), является максимальная температура в зоне реакции. Для ее расчета была построена математическая модель турбулентного диффузионного горения, представляющая собой систему дифференциальных уравнений переноса импульса, энергии и вещества, реализованная в программном комплексе ANSYS Fluent [2]. Для описания тепловыделения, связанного с

(*) В.А. Баранов, baranov_va@spbstu.ru

химическим превращением, была выбрана диффузионная модель, именуемая в ANSYS Fluent моделью дробления вихрей.

Расчетами на основе созданной модели (далее CFD-расчет) было показано [2], что в экспериментах на пилотной установке [1] максимальная температура в зоне реакции составляла величину порядка 2220 К. На рис. 1 приведены результаты CFD-расчета полей температуры на основании математической модели [2] для различных расходов компонентов для пилотной установки [1].

В модели [2] сделано допущение о несжимаемости среды, таким образом, она пригодна для проведения расчетов течения с числом Маха не более 0.3 [3]. Скорость звука в смеси (UF_6-$1.5CH_4$-$2O_2$) при температуре 473 К составляет 165 м/с, а в смеси ($6HF$-$1.5CO_2$) - 417 и 965 м/с для температуры 2000 К и 473 К соответственно. Таким образом, максимальный расход ОГФУ, при котором выполняется условие несжимаемости среды для пилотного реактора [1], составляет около 9 г/с.

CFD-расчет поля температуры для одного режима (одного расхода ОГФУ) с использованием многоядерного процессора с тактовой частотой 3.2 ГГц требует примерно 1-2 часов машинного времени при использовании 10 процессов для проведения вычислений.

Метод машинного обучения. Для снижения затрат вычислительных ресурсов при расчете профиля температуры в реакторе типа туннельной горелки при проведении в нем процесса (1) для различных расходов компонентов на основе результатов, представленных на рис. 1, была разработана и обучена регрессионная модель с использованием библиотеки машинного обучения Scikit-learn [4] на языке программирования Python.

В качестве основного алгоритма для построения регрессии был выбран метод опорных векторов для задачи регрессии (Support Vector Regression, далее SVR), с помощью которого находят гиперплоскость в многомерном пространстве, в которой минимизирована ошибка предсказания с учетом заданного "ε-зазор" [5]. Зазор определяет область, в пределах которой ошибки предсказания считаются приемлемыми. В SVR для определения положения гиперплоскости используют опорные векторы, которые находятся на границах области. Алгоритм поддерживает различные функции ядра, что позволяет эффективно обрабатывать как линейные, так и нелинейные зависимости.

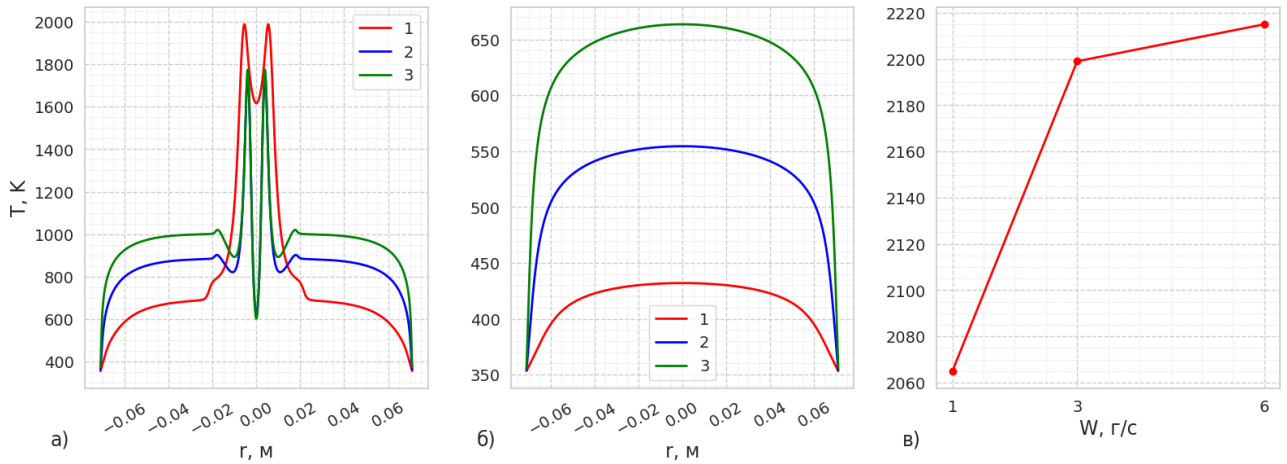


Рис. 1. Результаты CFD-расчета полей температуры в реакторе типа туннельной горелки [1] на основе математической модели [2] – осевое распределение температуры на расстоянии 55 и 1100 мм от устья форсунки, а) и б) соответственно, и значения максимальной температуры в зоне горения, в), для различных значений расхода ОГФУ W. На рис. а) и б) 1, 2, 3 - расход ОГФУ 1, 3, 6 г/с соответственно.

Входными данными для обучения модели служили расходы ОГФУ в реакторе типа туннельной горелки, а выходными — два распределения температуры, по 1000 значений в каждом, в двух сечениях и максимальная температура. Из-за малого количества исходных данных разделение выборки на обучающую и валидационную не проводили. Предварительно были подобраны гиперпараметры: C, равный 1000, который определяет штраф за ошибки в обучении, и параметр размера зазора epsilon, равный 0.001. Значение среднеквадратичной ошибки (Mean Squared Error), при использовании модели на исходных данных (рис. 1), по порядку составило 10^{-7}, что свидетельствует о том, что модель успешно выучила обучающую выборку.

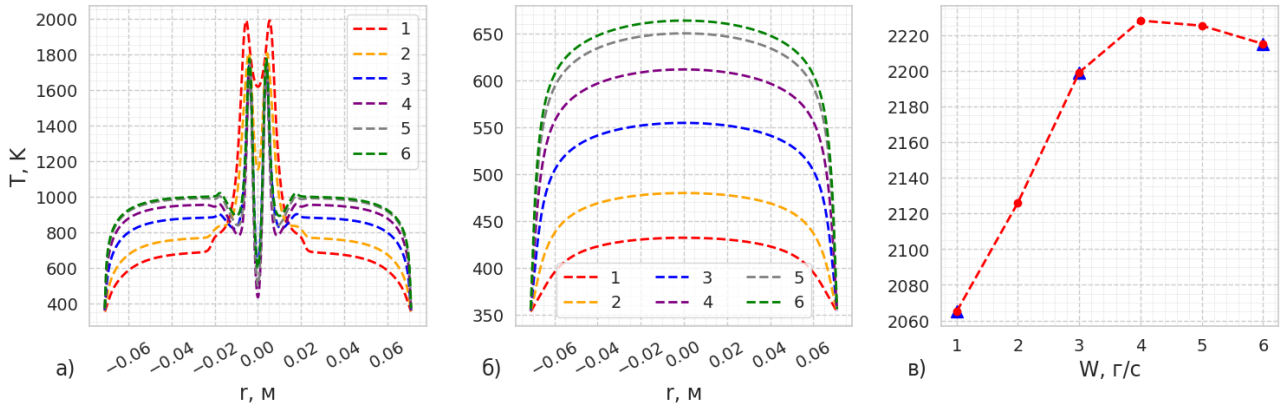


Рис. 2. Результаты предсказания полей температуры, полученные с использованием SVR-модели, в реакторе типа туннельной горелки [1] – осевое распределение температуры на расстоянии 55 и 1100 мм от устья форсунки, а) и б) соответственно, и значения максимальной температуры в зоне горения, в), для различных значений расхода ОГФУ W. На рис. а) и б) 1, 2, 3, 4, 5, 6 — расход ОГФУ в г/с. На рис. в) ▲-первичный CFD-расчет, -●- -предсказания SVR-модели.

При наличии небольшого объема данных построение и обучение модели потребовало около двух секунд машинного времени при использовании одного ядра процессора с тактовой частотой 2.2 ГГц. Характерное время предсказания с использованием SVR-модели составило порядка секунды для всех исследуемых расходов одновременно.

Результаты исследований. На рис. 2 представлены результаты предсказания распределения температуры в реакторе типа туннельной горелки, полученные с помощью обученной модели (далее SVR-модель).

С использованием SVR-модели на зависимости максимальной температуры от расхода ОГФУ был обнаружен максимум при расходе 4 г/с, значение которого составило 2228 К. Наличие этого максимума может быть связано с увеличением степени турбулентности потока, истекающего из форсунки, с увеличением расхода ОГФУ. С одной стороны, с увеличением степени турбулентности увеличивается скорость химического тепловыделения, с другой увеличивается значение эффективной турбулентной теплопроводности. Кроме того, с увеличением температуры в зоне горения увеличивается температурный напор, что особенно актуально для лучистого переноса.

Для верификации полученного с помощью SVR-модели результата были проведены CFD-расчеты для расходов ОГФУ 4 и 5 г/с. Результаты обоих расчетов приведены на рис. 3. Из этих результатов следует, что с помощью CFD-расчета подтверждается наличие максимума на зависимости максимальной температуры от расхода ОГФУ, предсказанного с помощью SVR-модели. Различие значений максимальной температуры, полученных с помощью CFD-расчета и SVR-модели, для расходов ОГФУ 4 и 5 г/с составило 7.7 и 2.8 % соответственно.

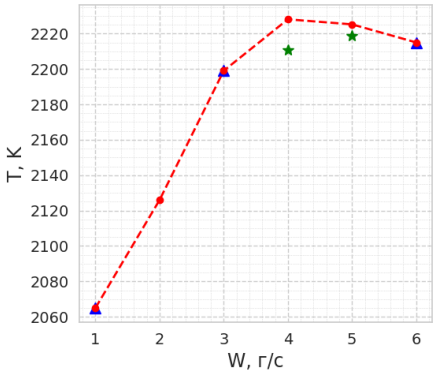


Рис. 3. Зависимость максимальной температуры в зоне реакции (1) от расхода ОГФУ для пилотного реактора [2], полученные с помощью SVR-модели и CFD-расчета. ▲-первичный CFD-расчет, -●--предсказания SVR-модели, ★-верификационный CFD-расчет.

Заключение. На основе результатов CFD-расчетов поля температуры в реакторе типа туннельной горелки при проведении в нем процесса взаимодействия UF_6 с CH_4 и O_2 в режиме горения при различных расходах компонентов была построена регрессионная модель, позволяющая предсказывать поля температуры в указанном реакторе для различных расходов реагентов. В частности, с использованием разработанной модели был предсказан максимум на зависимости максимальной температуры в зоне реакции от расхода UF_6, который в дальнейшем был подтвержден с помощью CFD-расчета.

Построенная регрессионная модель показала эффективность применения методов машинного обучения для исследуемого процесса при сверхмалом количестве исходных данных. При этом, затраты машинного времени при использовании SVR-модели в указанном реакторе на 3-4 порядка ниже, чем при CFD-расчете при одинаковой производительности процессора.

ЛИТЕРАТУРА

1. Пашкевич Д.С., Зимин А.Р., Алексеев Ю.И., Мухортов Д.А., Камбур П.С., Петров В.Б., Баженов Д.А., Капустин В.В., Смолкин П.А., Федорова Т.А. Получение фторида водорода при взаимодействии обедненного гексафторида урана с метаном и кислородом в режиме горения // Инженерно-физический журнал. – 2025. – Том 98. №1. – С. 154-163.

2. Федорова Т. А., Пашкевич Д. С., Попов П. А., Талалов В. А. Численное исследование влияния способа подачи реагентов в реактор на взаимодействие гексафторида урана с метаном и кислородом в режиме горения // Инженерно-физический журнал. – 2025. – Том 98. №1. – С. 145-153.

3. Башкин, В. А., Егоров, И. В., & Иванов, Д. В. (2002). Влияние числа Маха на поле течения и аэродинамические характеристики нерегулируемого гиперзвукового воздухозаборника при числе $Re=10^6$ // Ученые записки ЦАГИ. – XXXIII (1-2). – С. 15-21.

4. Scikit-learn. Scikit-learn: Machine Learning in Python [Электронный ресурс]. URL: https://scikit-learn.org/stable (дата обращения: 26.03.2025).

5. Smola, A.J., Schölkopf, B. A tutorial on support vector regression // Statistics and Computing. 2004. – 14. – P.199–222.

УДК 533.6.071.8

К.И. Белов, Н.А. Монахов, Т.А. Лапушкина
Физико-технический институт им. А.Ф. Иоффе (*)

ИССЛЕДОВАНИЕ ЭФФЕКТА УМЕНЬШЕНИЯ ЧИСЛА МАХА ПАДАЮЩЕЙ УДАРНОЙ ВОЛНЫ ПРИ ИСПОЛЬЗОВАНИИ БЫСТРОДЕЙСТВУЮЩЕГО КЛАПАНА НА УДАРНОЙ ТРУБЕ

Использование современных методов контактной диагностики течения за ударными волнами, таких как измерение теплового потока и степени ионизации, требуют исключения возможных рисков, связанных с методом запуска ударной трубы. Наиболее распространенный метод – диафрагменный – влечет за собой риск отрыва элементов диафрагмы во время ее раскрытия, что, как следствие, может привести к повреждению поверхности датчиков, используемых для диагностики. Наиболее рациональным решением данной проблемы является переход к бездиафрагменному методу запуска ударной трубы с использованием быстродействующего клапана [1]. В данной работе рассмотрен, пожалуй, самый существенный недостаток данного метода – уменьшение числа Маха падающей волны по сравнению с диафрагменным методом.

Эксперименты проводились на малой ударной трубе ФТИ им. А.Ф. Иоффе (рис. 1.). Ударная труба имеет канал внутренним диаметром 50 мм. Камера высокого давления (1), длиной 100 см, отсекается от камеры низкого давления (4), длиной 455,5 см, путем установки между ними быстродействующего клапана (2) или разрушаемой диафрагмы.

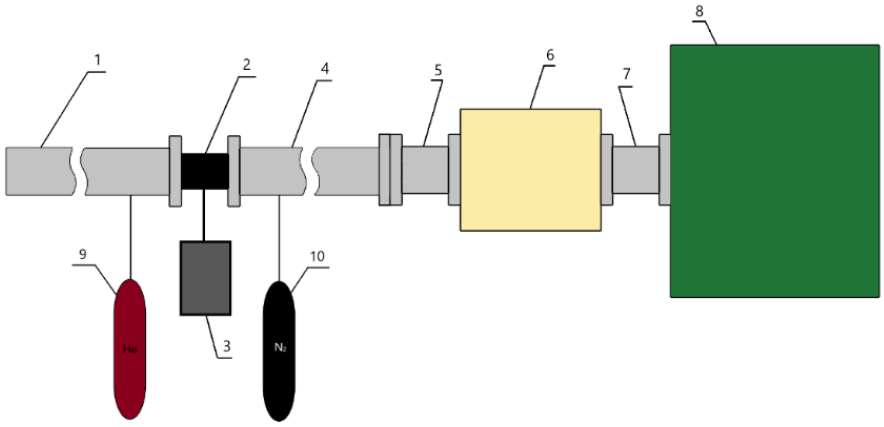


Рис. 1. Схема экспериментальной установки: 1 – камера высокого давления, 2 – быстродействующий клапан, 3 – ресивер клапана, 4 – камера низкого давления, 5 – измерительная камера, 6 – рабочая камера, 7 – выпускная труба, 8 – демпферный бак, 9 – баллон с гелием (толкающий газ), 10 – баллон с азотом (рабочий газ)

Принцип работы быстродействующего клапана «КБ-40-100-УТ», произведенного российской фирмой ООО «НПП «ИСТА», можно упрощенно представить схемой, изображенной на рис. 2. Он имеет эффективный диаметр проходного сечения 40 мм. Заявленное время открытия – не более 4 мс (типичное время раскрытия алюминиевой диафрагмы ~ 0.1 мс). Полное время открытия (от начала подачи управляющего электрического импульса до полного открытия) – 35 мс. Диапазон рабочих давлений клапана составляет 1.0 ÷ 10.0 МПа.

(*) К.И. Белов, k.belov@mail.ioffe.ru

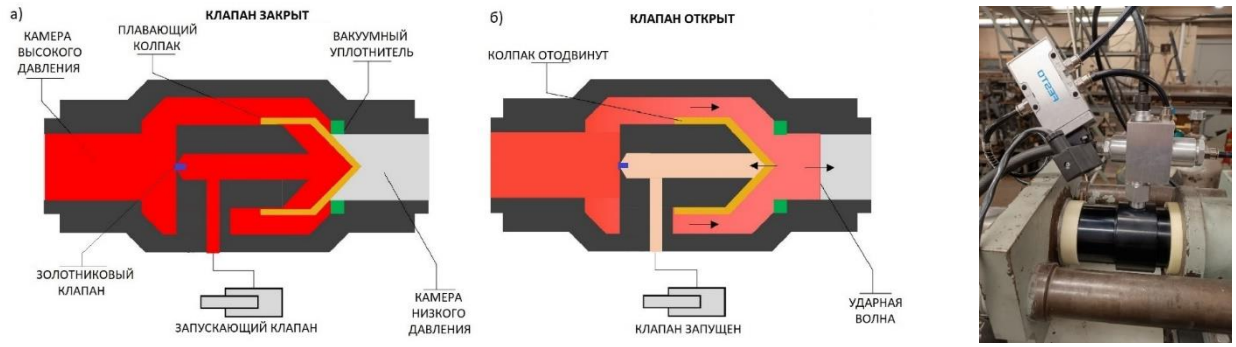


Рис. 2. Схема работы (слева) и фото (справа) быстродействующего клапана

Расчетное число Маха падающей ударной волны (M_1) для отношения давления p_4 в камере высокого давления ударной трубы к давлению p_1 в камере низкого давления вычисляется по элементарной теории ударной трубы [2]:

$$\frac{p_4}{p_1}=\left(\frac{2\gamma_1}{\gamma_1+1}M_1^{\,2}-\frac{\gamma_1-1}{\gamma_1+1}\right)\left[1-\frac{\gamma_4-1}{\gamma_1+1}\left(M_1-\frac{1}{M_1}\right)\frac{a_1}{a_4}\right]^{-\frac{2\gamma_4}{\gamma_4-1}} \quad (1)$$

здесь γ_4 и γ_1 – показатели адиабаты толкающего и рабочего газа, соответственно, M_1 – число Маха падающей ударной волны, a_4 и a_1– скорости звука в толкающем и рабочем газе, вычисляемые по формуле $a=\sqrt{\frac{\gamma RT}{\mu}}$, где μ - молекулярный вес рабочего или толкающего газа, R – универсальная газовая постоянная.

Измерение скорости падающей ударной волны производилось в измерительной камере с помощью двух датчиков давления, установленных на расстоянии 35 мм друг от друга. Длительность временной развертки осциллографа в данных экспериментах составляла 10 μs, шаг временного интервала — 0.1 μs. Погрешность измерения скорости ударной волны не превышала 5%. Измерительная камера расположена на расстоянии 455.5 см от диафрагменного узла.

В табл. 1. приведены выбранные для исследования газодинамические режимы, которые покрывают весь рабочий диапазон ударной трубы.

Табл. 1. Исследуемые режимы (Д – дифрагма, К – клапан)

Режим	Толкающий газ	p_4, атм	Рабочий газ	p_1, торр	M_{1exp}	M_1
1Д	He	13	N_2	29	4,17	4,51
1К	He	20	N_2	29	3,73	4,86
2Д	He	28	N_2	65	3,98	4,48
2К	He	30	N_2	65	3,70	5,11
3Д	He	45	N_2	144	3,89	4,14
3К	He	55	N_2	144	3,76	4,28
4Д	He	29	N_2	188	3,56	3,69
4К	He	30	N_2	188	3,14	3,72
5Д	He	46	N_2	427	3,05	3,42
5К	He	50	N_2	427	2,92	3,48

Поскольку для выбранных газодинамических режимов для обеспечения необходимого числа Маха в случае быстродействующего клапана давления толкающего газа (p_4) приведены уже в скорректированном виде (выше относительно диафрагменного режима), то сравнивать экспериментальные числа Маха для клапана и диафрагмы между собой напрямую

некорректно. Следовательно, для сравнения были выбраны относительные изменения экспериментального числа Маха по сравнению с расчетным для всех режимов.

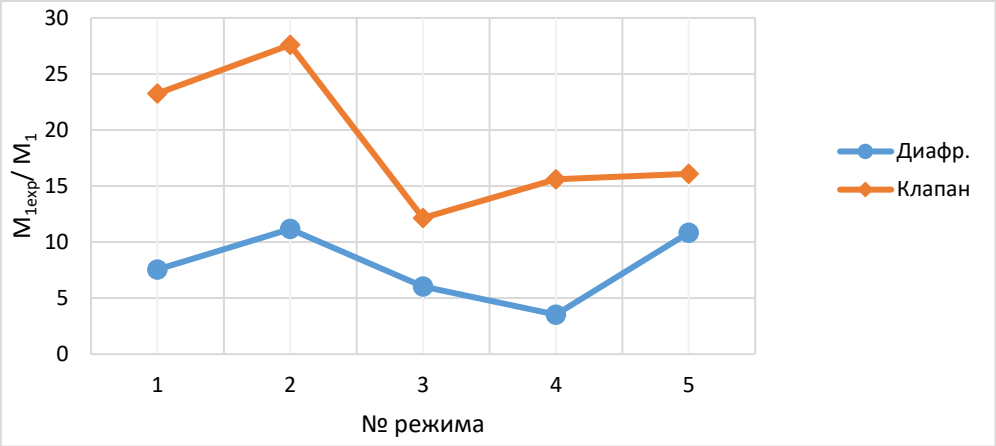


Рис. 3. Относительное отличие экспериментального числа Маха от расчетного для выбранных режимов

Из графика на рис. 3 видно, что кривая изменения экспериментального числа Маха по отношению к расчетному для быстродействующего клапана для всех режимов лежит выше аналогичной кривой для режимов на диафрагме. Также видно, что для первых двух режимов для клапана (с наиболее низким p_4), отклонение числа Маха от расчетного значительно превышает соответствующие отклонения для остальных режимов (для более высоких p_4), что говорит о выходе клапана на относительно стабильный режим работы. Отклонения экспериментального числа Маха от расчетного для клапана (среднее отклонение равно 18,9 %) значительно больше, чем для диафрагмы (среднее отклонение равно 7,8 %). Поскольку запорный колпак имеет коническую форму, истечение толкающего газа в камере низкого давления в момент раскрытия происходит от края внутреннего сечения к центру, что также оказывает влияние на характер формирования фронта падающей ударной волны на разгонном участке камеры низкого давления [3]. Несмотря на более медленное раскрытие клапана по сравнению с диафрагмой, длины разгонного участка камеры низкого давления 455,5 см достаточно для формирования четкого фронта падающей ударной волны.

ЛИТЕРАТУРА

1. Janardhanraj, S., S. K. Karthick, and Aamir Farooq. A review of diaphragmless shock tubes for interdisciplinary applications. // Progress in Energy and Combustion Science. – 2022. – Vol. 93. – 2022. – 101042.
2. Лойцянский Л.Г. Механика жидкости и газа. Изд. 6-е. – М.: Наука, 1987. – 840 с.
3. Котов М.А. О некоторых особенностях использования быстродействующего конического клапана для формирования падающей ударной волны в ударных трубах // Физико-химическая кинетика в газовой динамике. – 2019. – Т. 20, № 3. – С. 5.

УДК 621.412

А.А. Васильев[1,2], С.В. Булович[1,2]
[1]Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого (*)
[2]Физико-технический институт имени А.Ф.Иоффе

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ТЕРМОАКУСТИЧЕСКОГО ДВИГАТЕЛЯ СТИРЛИНГА С НАГРУЗКОЙ В ВИДЕ ЛИНЕЙНОГО ГЕНЕРАТОРА

Термоакустика – перспективная технология для преобразования тепловой энергии в энергию акустического поля [1]. Использование линейного генератора позволяет при помощи возвратно-поступательного движения поршня превратить акустическую энергию в электрическую. Одним из узких мест, ограничивающих широкое распространение термоакустических устройств, являются теплообменники. Во-первых, они должны быть расположены внутри резонатора, во-вторых, закономерности поведения термодинамических функций в колебательных потоках сильно отличаются от их поведения при работе на стационарном режиме. Кроме того, классическая линейная акустическая теория в частотной области не может с высокой точностью предсказать термогидродинамику таких теплообменников. В настоящей работе рассмотрена математическая модель устройства, учитывающая взаимодействие тепловых процессов в пластинчатом теплообменнике и механических процессов, связанных с подвижным поршнем.

Рассмотрена конструкция акустического двигателя Стирлинга на стоячей волне с внутренним пространством в форме резонатора Гельмгольца. Нагреватель, регенератор (стек) и охладитель расположены в горле резонатора. Все элементы теплообменного блока представляют собой пластины разной протяженности. Пластины нагревателя и охладителя смонтированы на стойках, одновременно являющимися тепловыми трубами для подвода и отвода тепла от пластин. Пластинчатый регенератор также смонтирован на стойках, не участвующих в теплообмене. В торцевой части колбы резонатора расположен поршень. Равновесное положение поршня обеспечивается газовой пружиной – камерой известного объема, заполненной газом. Смещение поршня вызывает в ней изменение давления, возвращающего поршень в положение равновесия.

Резонатор состоит из каналов квадратного и прямоугольного сечения, соединенных между собой каналом переменной площади с углом раскрытия 30°. Задача решена в упрощенной постановке. С учетом повторяемости однотипных элементов конструкции теплообменного блока (53 пластины нагрева), оценка поведения термодинамических функций проведена относительно одного элементарного канала. Протяженность рассматриваемой области в продольном направлении ограничена торцевыми стенками резонатора, поперечный размер определяется расстоянием между соседними пластинами нагрева. Изменение поперечного размера расчетной области в горле резонатора, в пересчете на один канал, соответствует углу раскрытия 0.566°. Постановка задачи, с указанием размеров расчетной области и граничных условий приведена на рис. 1 (геометрические пропорции искажены).

Термодинамическое состояние газа в резонаторе определялось путем численного интегрирования нестационарной системы дифференциальных уравнений Навье-Стокса. Температура стека была найдена в результате численного интегрирования нестационарного уравнения теплопроводности. На границе контакта газа и твердого тела тепловой поток и температура соответствовали граничному условию 4-го рода. В качестве рабочего тела рассмотрен воздух. Задача решена в двумерной постановке.

(*) С.В. Булович, bulovic@yandex.ru

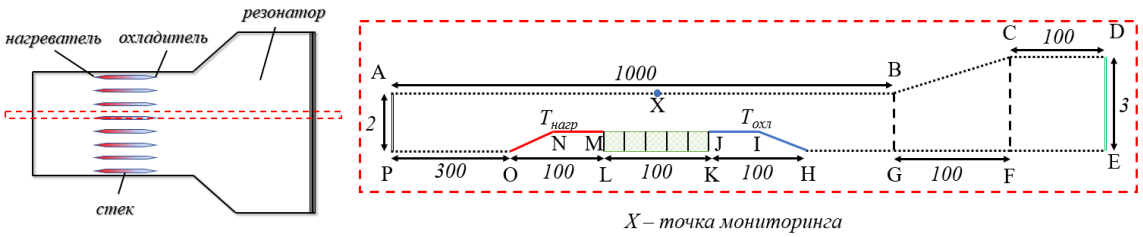


Рис. 1. Геометрия области с указанием размеров и граничных условий

Дискретизация расчетной области проведена с применением структурированной сетки, со сгущением к поверхностям теплообмена. Для отслеживания перемещения поршня использована динамическая сетка. Среднее количество расчетных ячеек в канале и стеке ~25 тыс. Шаг интегрирования по времени: $\Delta t = 0.0001$ с, что позволяло моделировать период акустических колебаний, обеспечивая 50 точек/период. Решение получено при помощи пакета программ ANSYS Fluent 2021 R1.

Начальное поле газодинамических функций задано значениями $T_{наг}$=900 К, $T_{охл}$=300 К, T_0=600 К, p_0=0.1МПа, приложенные тепловые потоки в нагревателе и охладителе равны между собой, а по периметру расчетной области ставится условие тепловой изоляции. В последующие моменты времени дисбаланс тепловых потоков соответствует аккумуляции энергии в акустическом поле и работе газа по перемещению поршня.

Сценарий возбуждения и эволюции колебаний газового столба демонстрируется на рис. 2, где представлены временные зависимости давления и отклонение поршня от его начального положения.

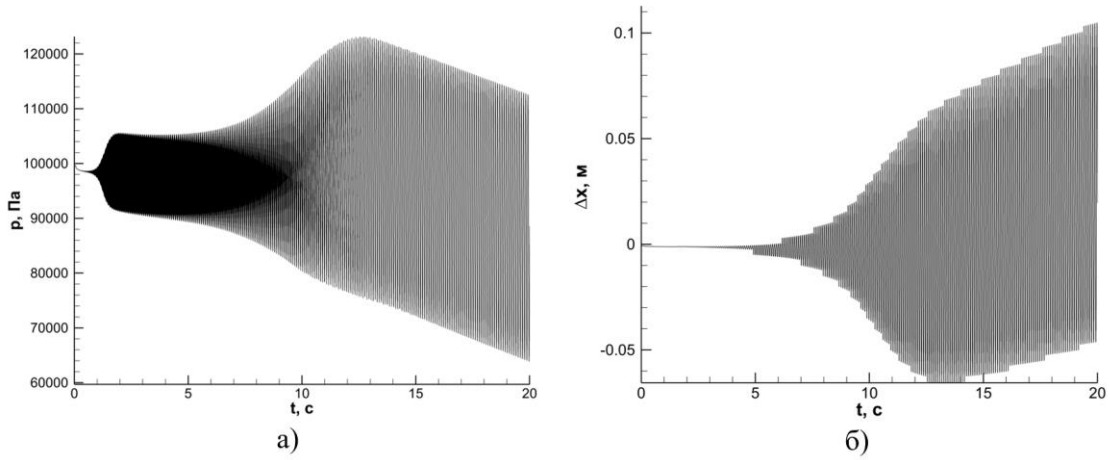


Рис. 2. Значение давления на торцевой поверхности горла резонатора (а) и отклонение поршня от начального положения (б) в зависимости от времени

Анализируя поведение функций в акустическом двигателе Стирлинга при его запуске, можно выделить несколько стадий. В первый момент происходит возбуждение акустических колебаний газа в системе. Наблюдается линейный закон нарастания амплитуды колебаний газодинамических функций, поршень неподвижен. Вторая стадия характеризуется возникновением положительной обратной связи, когда увеличение скорости движения газа сопровождается интенсификацией теплообмена в области нагревателя и охладителя. Увеличение интенсивности теплообмена приводит к росту энергии акустического поля, т.е. возрастанию амплитуды колебания скорости и давления. К этому моменту времени формируется градиент температуры в стеке, который дополнительно увеличивает амплитуду колебания давления. Третья стадия связана с возникновением заметных перемещений поршня. Динамика движения поршня зависит от ряда параметров. В частности, от его массы и «жесткости» газовой пружины. Хотя перемещение поршня происходит на другой частоте,

отличной от частоты описывающей характеристики акустической стоячей волны, тем не менее, скорость движения газа в теплообменном блоке увеличивается, что приводит к дальнейшему увеличению теплообменных процессов в тепловом блоке акустического двигателя Стирлинга. Четвертая стадия характеризуется стабилизацией амплитуды колебаний, как газового столба, так и поршня. Гармоника, связанная с акустическими колебаниями, присутствует в спектральном анализе сигнала, но имеет меньшую амплитуду по сравнению с гармоникой, определяемой частотой перемещения поршня.

Более полное представление о поведении газодинамических функций в теплообменном блоке позволяет получить векторное поле скорости в характерные моменты цикла, определяемого перемещением поршня (рис. 3).

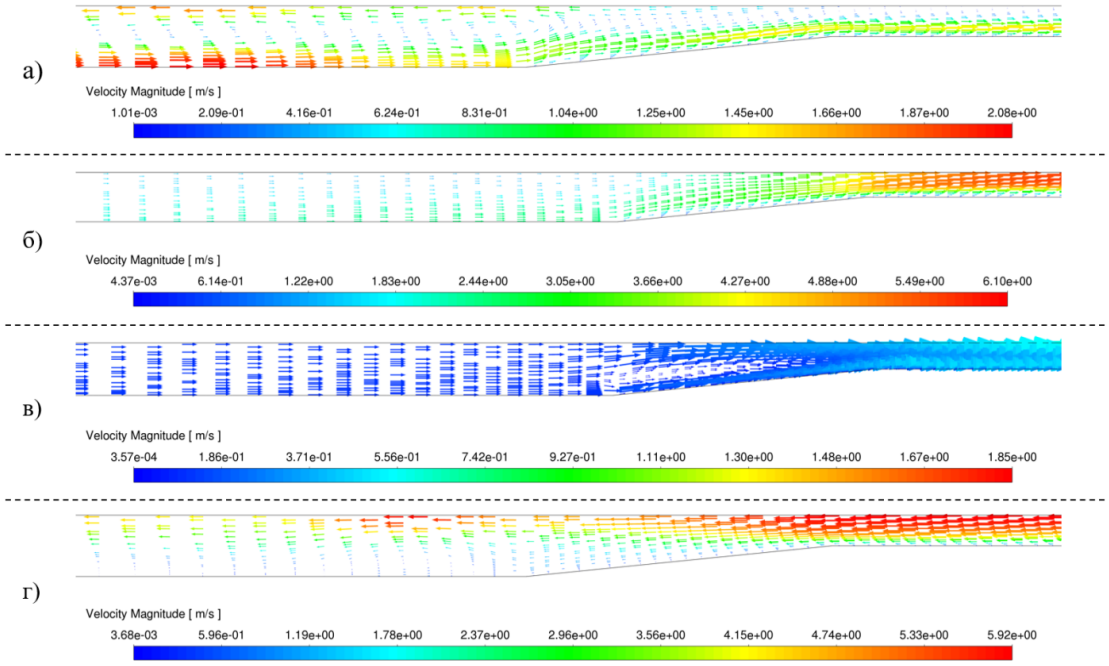
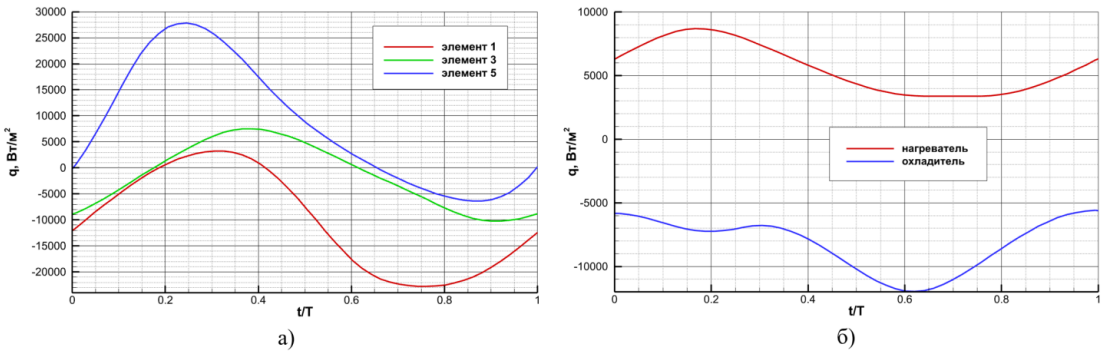


Рис. 3. Поля вектора скорости в характерные моменты цикла: а) $t = t_0$; б) $t = t_0 + 0.25T$; в) $t = t_0 + 0.5T$; г) $t = t_0 + 0.75T$ (T = 0.1 с – период колебания)

На рис. 3 изображено векторное поле скорости вблизи нагревателя в различные моменты цикла колебания газового столба. При изменении направления движения газа формируется интенсивное вихревое течение, которое обусловливает нестационарный характер теплообмена с высокой амплитудой колебание теплового потока. Графики зависимости плотности теплового потока от времени для нагревателя, охладителя и отдельных элементов стека приведены на рис. 4.



а) б)

Рис. 4. Зависимость плотности теплового потока на нагревателе и охладителе (б), и трех элементов стека (1,3,5) (а) от времени за период колебания поршня

Полученные данные о поведении термодинамических функций в области теплообменного аппарата позволяют проанализировать детальную структуру поля температуры и поля скорости, выявить закономерности их поведения в зависимости от определяющих параметров задачи.

ЛИТЕРАТУРА

1. Swift GW. Thermoacoustics: a unifying perspective for some engines and refrigerators. . – New York: Acoustical Society of America through the American Institute of Physics. – 2002.

УДК 532.526.2

А.Н. Габараев[1], С.В. Булович[1,2]
[1]Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого(*)
[2]Физико-технический институт имени А.Ф.Иоффе

РАСЧЕТ НЕСТАЦИОНАРНЫХ ВНУТРЕННИХ ТЕЧЕНИЙ ВЯЗКОГО ГАЗА В ПРИБЛИЖЕНИИ УЗКОГО КАНАЛА

Введение. Численное моделирование нестационарного течения вязкого газа в канале большого удлинения путем решения двумерной системы уравнений Навье-Стокса требует значительных вычислительных ресурсов, хотя и наиболее полно описывает суть происходящих процессов. Другая возможность для решения задачи данного типа заключается в использовании одномерного приближения. Однако в этом случае затруднительно корректно учитывать эффекты трения и теплообмена, поскольку их определение связывают со значениями средней скорости и температуры, которые в нестационарных процессах не отражают поведение функций в окрестности стенки. В этой ситуации компромиссным вариантом может быть рассмотрение задачи течения газа в рамках системы уравнений узкого канала.

Цель работы. Хорошо известны границы применимости системы уравнений Прандтля для стационарных течений [1]. Подобной оценки в случае решения задачи для нестационарной постановки в литературе не просматривается. В настоящей работе реализован численный алгоритм решения нестационарных уравнений узкого канала [2]. Программа была протестирована на ряде модельных задач, результаты сопоставлены с данными, полученными путем решения полной системы уравнений Навье-Стокса в программном комплексе Ansys Fluent.

Постановка задачи. В работе представлено два расчета – установление течения в расширяющемся канале и распространение возмущений в закрытом канале. Расширение канала и сгущение сетки к стенке были заданы преобразованием координат $x = x(\xi)$, $y = y(\xi,\eta)$. В новых координатах система уравнений узкого канала имеет вид

$$\frac{\partial\left(\rho J^{-1}\right)}{\partial t}+\frac{\partial\left(\rho U\right)}{\partial \xi}+\frac{\partial\left(\rho V\right)}{\partial \eta}=0, \qquad \frac{p}{\rho^{\gamma}}=\frac{p_0}{\rho^{\gamma}{}_0},$$

$$\frac{\partial\left(\rho u J^{-1}\right)}{\partial t}+\frac{\partial\left(\rho u U\right)}{\partial \xi}+\frac{\partial\left(\rho u V\right)}{\partial \eta}-\frac{\partial}{\partial \eta}\left(\rho\mu\frac{x_\xi}{y_\eta}\frac{\partial u}{\partial \eta}\right)+y_\eta\frac{\partial p}{\partial \xi}=0.$$

Здесь $U = y_\eta u$, $V = -y_\xi u + x_\xi v$, $J^{-1} = x_\xi y_\eta$.

Система состоит из трех уравнений, в которой присутствуют четыре функции. В качестве недостающего уравнения используется избыточное для рассматриваемой системы

(*) С.В. Булович, bulovic@yandex.ru

граничное условие для поперечной компоненты вектора скорости. В частности, интегрирование уравнения баланса массы в поперечном направлении, при котором используются оба граничных условия для поперечной компоненты вектора скорости, дает следующее уравнение для определения плотности или давления

$$\int_{\eta_{bot}}^{\eta_{top}} \frac{\partial\left(\rho J^{-1}\right)}{\partial t} d\eta + \int_{\eta_{bot}}^{\eta_{top}} \frac{\partial\left(\rho U\right)}{\partial \xi} d\eta + \left(\rho V\right)\Big|_{\eta_{bot}}^{\eta_{top}} = 0 .$$

На верхней стенке канала ($\eta_{top} = const$) задается условие прилипания, на нижней границе ($\eta_{bot} = const$) – условие симметрии. По координате ξ в постановке для расширяющегося канала на входе был задан однородный профиль скорости, а на выходе давление – u_0 = 1 м/с, p_L = 25 Па. В задаче о закрытом канале на входе и выходе были заданы стенки.

Начальные условия в первом расчете соответствовали значениям на границах, а во втором расчете была задана нулевая скорость и давления 25 Па и 50 Па в левой и правой половинах канала соответственно.

Дискретизация уравнений. Аппроксимация системы уравнений проведена по явно-неявной схеме: производные в продольном направлении – по явной схеме, а в поперечном направлении по неявной. Неявная аппроксимация слагаемых, описывающих перенос в поперечном направлении, ослабляет ограничения на значения чисел Куранта и Неймана. Значение продольной компоненты вектора скорости на гранях ячейки сформировано по противопоточной схеме. В работе рассмотрены дозвуковые течения, поэтому для формирования давления на гранях ячейки использовалось значение функции ниже по потоку.

Алгоритм расчета. Несмотря на нелинейность исходной системы, решение уравнений в определенном порядке позволило построить безытерационный алгоритм. В частности, из интегрального уравнения неразрывности было рассчитано значение плотности. Неявная двухточечная аппроксимация в самом уравнении неразрывности позволила вычислить значения поперечной компоненты скорости по схеме бегущего счета. Оставшееся третье уравнение системы к этому шагу вычислений содержит одну неизвестную функцию – продольную компоненту вектора скорости, которую можно получить обращением трехдиаганальной матрицы. Таким образом, был реализован безытерационный алгоритм численного решения системы дифференциальных уравнений с первым порядком точности по времени и продольной координате и вторым порядком точности по поперечной координате.

Результаты расчетов. Все постановки дублировались в пакете Ansys Fluent с аналогичными схемами интерполяции и сетками. Расчет в пакете Ansys Fluent проводился по безытерационному методу NITA, а сравнение с результатами, полученными по разработанной программе, проводилось по сопоставлению значений из точек мониторинга на оси канала.

Для первой модельной задачи отношение высот канала на выходе и входе составило 1.5. Используемая сетка с 82 узлами на длину и с 22 узлами на высоту изображена на рис. 1. Также было задано сгущение к верхней стенке.

По рис. 3 можно наблюдать продолжительный процесс, предшествующий установлению стационарного режима течения (рис. 2). Сопоставление с решением, полученным по уравнениям Навье-Стокса, показывает удовлетворительную точность.

Вторая постановка моделирует ситуацию волнового течения газа при разрыве диафрагмы между областями с разным значением давления. Как и в первом случае использовалась сетка 82x22 со сгущением к верхней стенке.

Начальные условия во второй задаче следующие:

$u = 0$ м/с , $v = 0$ м/с, $\begin{cases} p = 50, & 0 < x < 1 \\ p = 25, & 1 < x < 2 \end{cases}$ Па , $\begin{cases} \rho = 1.64 , & 0 < x < 1 \\ \rho = 1.0 \quad , & 1 < x < 2 \end{cases}$ кг/м^3.

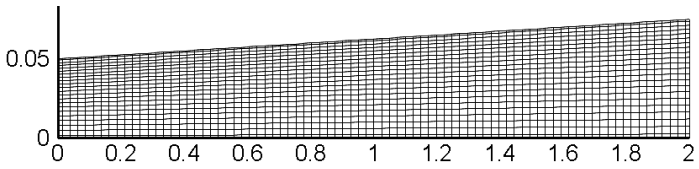


Рис. 1. Сетка

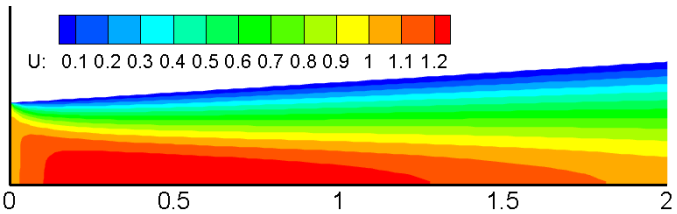


Рис. 2. Установившееся поле продольной скорости

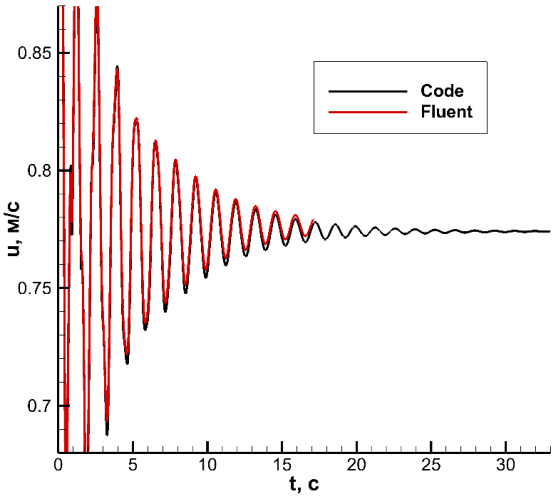


Рис. 3. Изменение во времени продольной скорости в точке мониторинга (1, 0.037) по данным двух расчетов

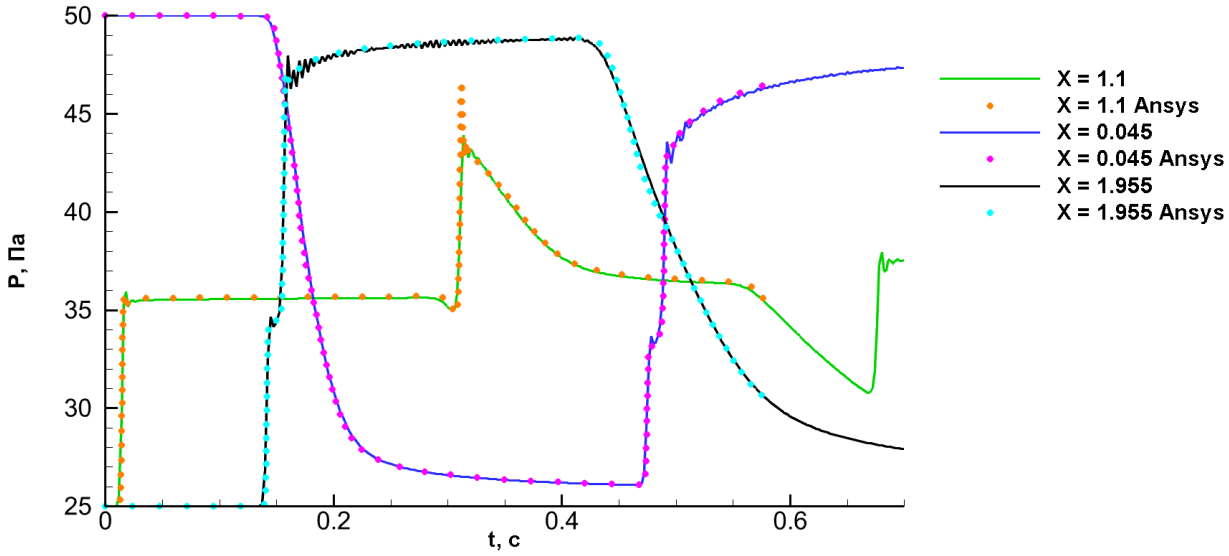


Рис. 4. Изменения давления в точках мониторинга в зависимости от времени

Показанное на рис. 4 сопоставление с решением, полученным в Ansys Fluent, и в этом случае иллюстрирует достаточную точность разработанного подхода. На кривых, полученных по уравнениям узкого канала, возникают «шумы», связанные с торможением потока в окрестности торцевых стенок канала. На кривой для X = 1.955 шумы проявляются раньше всего, поскольку в первые моменты газ движется из области повышенного давления к правой стенке и там тормозится. Одновременно с этим давление повышается, и газ начинает движение в обратном направлении, к левой стенке, где в момент $t \approx 0.5$ с снова тормозится. Это соответствует появлению шумов на кривой X = 0.045. На этом временном промежутке в точке мониторинга, расположенной в середине канала, значение скорости отлично от нуля, поэтому не возникает ситуации «переключения шаблона», кривая давления не содержит «шума».

Вывод. Показано, что система уравнений узкого канала в рассмотренных постановках с хорошей точностью воспроизводит решение, получаемое по уравнениям Навье-Стокса. Преимущества использования упрощенной модели заключаются в меньших требованиях к вычислительным ресурсам: расчеты в пакете Ansys Fluent занимают на порядок больше

времени. Причины возникновения осцилляций и определение границ применимости разрабатываемого подхода требуют дальнейшего уточнения.

ЛИТЕРАТУРА

1. Лапин Ю.В., Стрелец М.Х. Внутренние течения газовых смесей. – М.: Наука, 1989. – 366 с.
2. Булович С. В., Виколайнен В. Э. Волновое движение газа в протяженных каналах: учебное пособие. – Санкт-Петербург: Изд-во Политехн. ун-та, 2006. – 67с.

УДК 532.5.013.4

В.Д. Голубков, А.В. Гарбарук
Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого(*)

ВАЛИДАЦИЯ МЕТОДА ОПРЕДЕЛЕНИЯ ПОЛОЖЕНИЯ ЛАМИНАРНО-ТУРБУЛЕНТНОГО ПЕРЕХОДА В ПОГРАНИЧНЫХ СЛОЯХ С НЕОДНОРОДНОСТЯМИ ПОВЕРХНОСТИ, ОСНОВАННОГО НА ГЛОБАЛЬНОМ АНАЛИЗЕ УСТОЙЧИВОСТИ

Введение. Определение положения ламинарно-турбулентного перехода (ЛТП) в пограничных слоях (ПС) – важная задача внешней аэродинамики. Во внешних течениях одним из самых распространенных является естественный сценарий ЛТП, при котором переход происходит в результате конвективной неустойчивости и последующего развития волн Толлмина-Шлихтинга (ТШ). Неоднородности поверхности, неизбежно присутствующие в реальных конструкциях, могут значительно влиять на эволюцию волн ТШ и положение естественного ЛТП. В этом случае положение ЛТП может быть определено численно с использованием недавно предложенного метода [1,2], основанного на Глобальном Анализе Устойчивости (ГАУ). Настоящая работа посвящена валидации этого метода.

Разработанный метод включает несколько этапов. На первом этапе численно находится стационарное («базовое») решение $\bar{q}(x, y)$ сжимаемых уравнений Н.-С.

$$\frac{\partial q}{\partial t} = RHS(q), \qquad (1)$$

где $q(x, y, t)$ - вектор консервативных переменных, $RHS(q)$ - оператор правой части уравнений.

На втором этапе система (1) линеаризуется относительно базового решения, что с учетом гармонического представления малых возмущений приводит к задаче на собственные значения для оператора якобиана правой части уравнений Навье-Стокса $J = \frac{\partial RHS}{\partial q}(\bar{q})$:

$$J\hat{q} = \omega\hat{q}, \qquad (2)$$

где $\hat{q}(x, y)$ – собственный вектор, соответствующий пространственному распределению амплитуд возмущений, $\omega = \omega_r + i\omega_i$ – собственное число, вещественная часть которого определяет показатель роста или затухания амплитуды возмущений во времени, а мнимая – частоту их колебаний.

На третьем, заключительном этапе в результате применения процедуры постпроцессинга, подробно описанной в [1], по парам собственных чисел и векторов определяются амплитуды волн ТШ с учетом их затухания во времени, соответствующие показатели темпа роста (N-факторы) и, наконец, огибающая $N(x)$. Положение ЛТП может быть определено по огибающей $N(x)$ в рамках метода e^N: переход происходит в точке, где показатель темпа роста возмущений достигает критического значения N_{crit}.

(*) В.Д. Голубков, golubkovvd@gmail.com

Из литературы известно два способа валидации подобных подходов. Первый, прямой способ состоит в сравнении экспериментальных x_t и расчетных $x_t^{ГАУ}$ положений ЛТП в ПС с неоднородностями на пластине. При этом критическое значение N-фактора N_{crit} определяется по огибающей возмущений на гладкой пластине $N(x)$ и экспериментально измеренному положению ЛТП x_{t0} на гладкой пластине: $N_{crit} = N(x_{t0})$.

Альтернативный способ базируется на привлечении так называемого метода переменного N-фактора [3,4]. Этот способ предполагает сравнение декрементов критического значения N-фактора ΔN. В экспериментах эта величина рассчитывается по огибающей возмущений на гладкой пластине $N(x)$ и экспериментально измеренным положениям перехода на гладкой пластине x_{t0} и пластине с неоднородностью x_t как разница между критическими значениями N-факторов $N(x_{t0})$ и $N(x_t)$: $\Delta N = N_{crit} - N_{crit}^h$ (рис. 1, слева). По результатам ГАУ – огибающей возмущений на гладкой пластине $N(x)$ и на пластине с неоднородностью $N_h(x)$ – и критическому значению N-фактора $N_{crit} = N(x_{t0})$ декремент рассчитывается как $\Delta N^{ГАУ} = N_{crit} - N(x_t^{ГАУ})$ (рис. 1, справа). Стоит отметить, использование такого метода валидации оправдано только в том случае, когда продольные зависимости огибающих $N(x)$ и $N_h(x)$ параллельны вниз по потоку от неоднородности.

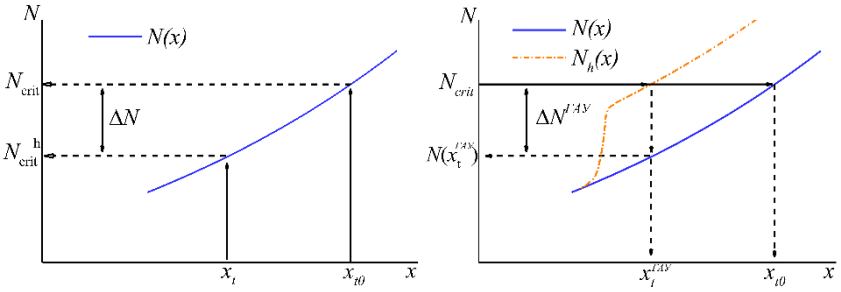


Рис. 1. Применение метода переменного N-фактора для валидации предложенного метода

Для валидации разработанного метода использовалось два набора экспериментальных данных. В первом эксперименте [3] рассматривался ПС на плоской пластине с обратными уступами без градиента давления при числе Рейнольдса, построенном по длине пластины L_0 $Re_0 = 3 \cdot 10^6$. Во втором [4] рассматривался ПС на плоской пластине с прямыми и обратными уступами с градиентом давления, индуцированным профилированной стенкой аэродинамической трубы над пластиной, при числе Рейнольдса $Re_0 = 6 \cdot 10^6$.

Постановки задач. Общая схема расчетных областей, использованных для расчета базовых течений, соответствующих рассматриваемым экспериментам, приведена на рис.2. В расчетную область включен участок невязкого течения перед пластиной, необходимый для правильного описания формирования ламинарного ПС на начальном участке пластины. При моделировании эксперимента [3] рассматривался ПС с обратными уступами, расположенными на расстоянии x_h/L_0 (от 0.17 до 0.2) от передней кромки пластины, с обезразмеренными на локальную толщину вытеснения высотами h/δ^* в диапазоне от 0.55 до 1.02. При этом верхняя граница расчетной области была прямой (граница 1 на рис. 2.)

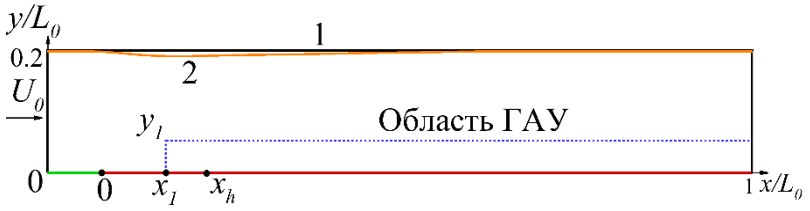


Рис. 2. Схема расчетных областей

При моделировании эксперимента [4] рассматривался ПС с прямыми и обратными уступами, расположенными при $x_h/L_0 = 0.225$. Безразмерные высоты обратных уступов h/δ^* менялись в диапазоне от 0.12 до 0.74, а прямых – от 0.10 до 0.98. Форма верхней границы

(граница 2 на рис. 2) была подобрана таким образом, чтобы обеспечивать распределение давления на пластине, соответствующее эксперименту.

Граничные условия для расчета базовых течений задавались следующим образом. На левой границе задавался равномерный профиль скорости $u = U_0$, $v = 0$ и температуры $T = T_0$, давление экстраполировалось изнутри расчетной области. На части нижней границы при $x/L_0 < 0$ задавались условия проскальзывания, а при $x/L_0 > 0$ – условия прилипания и адиабатичности. На правой границе задавалось постоянное давление, остальные величины экстраполировались. При моделировании эксперимента [3] на верхней границе задавались входные или выходные условия в зависимости от знака нормальной скорости, а при моделировании эксперимента [4] – условия проскальзывания и адиабатичности.

Расчетная область для проведения ГАУ была уменьшена по сравнению с областями для расчета базового течения. Верхняя (y_1 на рис.2) и левая (x_1 на рис.2) граница были подобраны отдельно для каждого эксперимента с целью наилучшего разрешения волн ТШ, определяющих ЛТП. Для возмущений на левой границе области для ГАУ задавались условия Дирихле, на верхней и правой границе – условия экстраполяции изнутри расчетной области, а на нижней – линеаризованные условия прилипания и адиабатичности.

Результаты расчетов. Результаты разработанного метода сравнивались с результатами эксперимента [3] по методу переменного N-фактора. Полученные огибающие $N_h(x)$ были практически параллельны огибающей $N(x)$, при этом разница между расчетными $\Delta N^{ГАУ}$ и экспериментальными ΔN значениями, отнесенными к критическому значению N-фактора, не превышала 6%. Рассмотрим подробнее результаты сравнения с экспериментом [4].

Огибающие возмущений, полученные с использованием разработанной методики на примере ПС с прямыми уступами и градиентом давления (эксперимент [4]) приведены на рис. 3. По экспериментальному положению перехода $x_{t0}/L_0 = 1.0$ и расчетной огибающей $N(x)$ для плоской пластины ($h/\delta^* = 0$) было получено критическое значение N-фактора $N_{crit} = 10.1$. Это значение использовалось для определения положения перехода $x_t^{ГАУ}/L_0$ по огибающим для уступов и расчета $\Delta N^{ГАУ}$, как показано во введении. Относительная разница расчетных и экспериментальных значений положений ЛТП и декрементов критического значения N-фактора приведена в табл. 1. Ошибка предсказаний предложенного метода по обоим валидационным параметрам не превышает 4%.

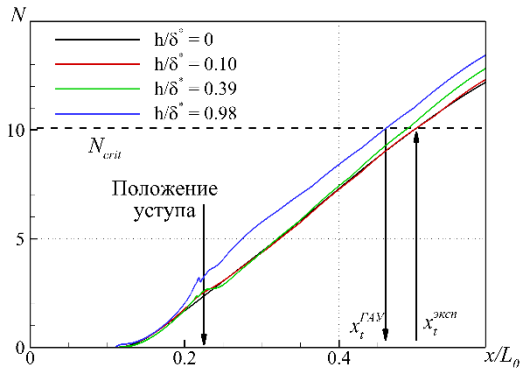


Рис. 3. Огибающие, полученные по результатам ГАУ, для плоской пластины и пластины с прямыми уступами и градиентом давления.

Табл. 1. Сравнение положений ЛТП, измеренных в эксперименте [4] и полученных по результатам ГАУ, на пластине с обратными ($h/\delta^*<0$) и прямыми ($h/\delta^*>0$) уступами

h/δ^*	$\lvert x_t^{ГАУ} - x_t\rvert / x_t$, %	$\lvert \Delta N^{ГАУ} - \Delta N\rvert / N_{crit}$, %
-0.12	< 1	< 1
-0.37	< 1	< 1
-0.74	3	< 1
+0.10	< 1	< 1
+0.39	4	4
+0.98	2	< 1

Таким образом, в результате сравнения результатов разработанного метода и экспериментальных данных было показано, что он позволяет предсказывать положение ЛТП с ошибкой не более 4%.

ЛИТЕРАТУРА
1. Belyaev K. et al. Prediction of effect of small local surface irregularities on natural transition to turbulence based on Global Stability Analysis // International Journal of Heat and Fluid Flow. 2024. P. 109358.
2. Garbaruk A., Golubkov V. A comparison of two approaches to the global stability analysis using the example of the cylinder flow problem // St. Petersburg Polytechnic University Journal. Physics and Mathematics. 2023. Vol. 70, № 4. P. 50–62.
3. Wang Y.X., Gaster M. Effect of surface steps on boundary layer transition // Exp Fluids. 2005. Vol. 39, № 4. P. 679–686.
4. Crouch J.D. et al. Characterizing surface-gap effects on boundary-layer transition dominated by Tollmien–Schlichting instability // Flow. Cambridge University Press, 2022. Vol. 2. P. E8.

УДК 533.6.04

Н.Д. Дегтярев
Балтийский государственный технический университет «Военмех» им. Д.Ф. Устинова(*)

ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ КРЫЛОВОГО ПРОФИЛЯ С ГАЗОДИНАМИЧЕСКИМ ЭЛЕМЕНТОМ УПРАВЛЕНИЯ

Введение. Первые работы об увеличении подъемной силы аэродинамических объектов за счет газодинамических элементов управления были написаны в 1950-х годах. Тогда к рассмотрению было принято несколько способов газодинамического управления: реактивный закрылок; закрылок с ламинеризацией пограничного слоя; выдув тангенциальной струи на закругленную заднюю кромку. Названые методы изучались с целями улучшить работу аэродинамических поверхностей за счет ликвидации отрыва потока и создания дополнительной подъемной силы. Позднее в основном разрабатывался способ управления, использующий выдув тангенциальной струи на закругленную заднюю кромку. Основная цель разработки состояла в создании дополнительной подъемной силы при взлете и посадке воздушных судов для уменьшения длины взлетно-посадочной полосы, требуемой для их базирования. Этот вопрос стал особенно актуальным с появлением авианесущих крейсеров [1].

В XXI веке увеличение подъемной силы за счет газодинамических элементов изучалось для управления маневренными летательными аппаратами в полете без применения механизации крыла. Впервые эта технология была реализована компанией BAE systems в рамках программы FLAVIIR (Flapless Air Vehicle Integrated Industrial Research) при участии десяти британских университетов на прототипе беспилотного летательного аппарата Demon [2], управление которым обеспечивалось без подвижных поверхностей – только струями воздуха. Это был демонстратор технологий, показавший принципиальную возможность использования органов управления нового типа. Дальнейшие работы в данном направлении при участии фирмы BAE Systems и Манчестерского университета привели к созданию более зрелого прототипа БПЛА с низким уровнем радиолокационной заметности – Magma, поднявшегося в воздух семь лет спустя [3].

В рамках данной работы было проведено численное моделирование конфигурации тангенциального выдува струи на закругленную заднюю кромку крылового профиля GOE134 в двумерной постановке. По результатам получены зависимости коэффициентов силы сопротивления, подъемной силы и коэффициента момента тангажа от коэффициента импульса струи. Данные зависимости были построены при углах атаки от 0 до 16 градусов с шагом 2 градуса.

(*) Н.Д. Дегтярев, shmoolya606@gmail.com

Постановка задачи. Основными параметрами подобия тела со струйной механизацией являются коэффициент импульса струи C_m и коэффициент давления на срезе сопла C_{pc}.

Коэффициент импульса струи вычисляется по формуле

$$C_\mu = \frac{J_c}{\frac{\rho_\infty V_\infty^2}{2} S}, \quad (1)$$

где J_c – импульс струи: $J_c = \rho_c V_c F_c$;

S – площадь крыла, находящаяся под воздействием струи;

Коэффициент давления вычисляется по формуле

$$C_{p_c} = \frac{p_c - p_\infty}{\frac{\rho_\infty V_\infty^2}{2}}, \quad (2)$$

где p_c – давление на срезе сопла; p_∞ - давление в набегающем потоке.

Все расчеты были выполнены при скорости набегающего потока 50 м/с. Варьировались значения коэффициента импульса струи C_m = 0...1 и угла атаки а = 0…16 градусов. Для моделирования был выбран крыловой профиль GOE 134 с хордой 100мм. Задача решалась в двумерной постановке.

Результаты моделирования. Зависимость коэффициента C_y для выдува с задней кромки имеет разный характер при значениях $C_\mu < 0{,}444$ и $C_\mu > 0{,}444$. Поэтому для получения непрерывных зависимостей необходимо применять кусочную интерполяцию. Обработка данных показала, что участок кривой при $C_\mu < 0{,}444$ интерполируется полиномом второго порядка, а на участке при $C_\mu > 0{,}444$ C_y пропорционален $\sqrt{C_\mu}$. Для непрерывного определения зависимости $C_y = f(C_\mu, \alpha)$ во всем диапазоне C_μ и в диапазонах углов атаки при которых реализуется безотрывное обтекание профиля, необходимо знать всего две зависимости: $C_y = f(C_\mu)$ при $\alpha = 0$ и $C_y = f(\alpha)$ при $C_\mu = 0$:

$$\begin{cases} C_y = 5 \cdot 10^{-4} {C_\mu}^2 + 0{,}0943 C_\mu + f(\alpha), & \text{при } C_\mu < 0{,}444 \\ C_y = 0{,}62\sqrt{C_\mu} + f(\alpha), & \text{при } C_\mu > 0{,}444 \end{cases} \quad (3)$$

Сравнение зависимости $C_y = f(C_\mu, \alpha)$, полученной исходя из изложенных соображений и путем численного моделирования, представлено на рис. 1. Пунктирными линиями показаны значения, полученные по уравнению 3, крестиками – данные из численного моделирования.

Коэффициент подъемной силы крылового профиля C_y складывается из подъемной силы, возникающей вследствие работы элемента управления и вследствие наличия ненулевого угла атаки. Тогда уравнение 1 можно переписать в следующем виде:

$$C_y = C_{y_\mu} + C_{y_\alpha}$$

где

$$\begin{cases} C_{y_\mu} = 5 \cdot 10^{-4} {C_\mu}^2 + 0{,}0943 C_\mu, & \text{при } C_\mu < 0{,}444 \\ C_{y_\mu} = 0{,}62\sqrt{C_\mu}, & \text{при } C_\mu > 0{,}444 \end{cases} \quad (3.1)$$

Для оценки эффективности и сравнения элементов управления, опираясь на уравнение 3.1, можно ввести коэффициент влияния газодинамического элемента управления χ, равный отношению коэффициента подъемной силы, возникающей вследствие работы элемента управления к суммарному коэффициенту подъемной силы:

$$\chi = \frac{C_{y_\mu}}{C_y}. \quad (4)$$

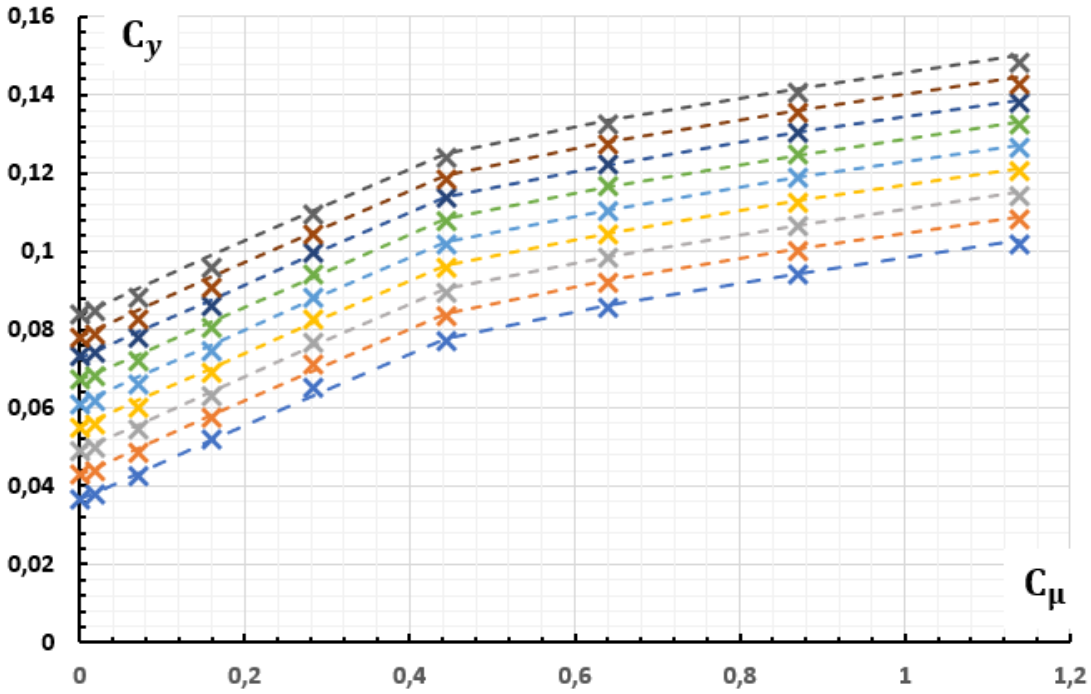


Рис. 1. Сравнение зависимости $C_y = f(C_\mu, \alpha)$ с результатами численного моделирования

Заключение. Для исследованного газодинамического способа управления обтеканием крыловым профилем было показано, что для получения непрерывной зависимости $C_y = f(C_\mu, \alpha)$ в диапазоне докритических углов атаки, достаточно знать две зависимости $C_y = f(C_\mu)$ при $\alpha = 0$ и $C_y = f(\alpha)$ при $\alpha = C_\mu$. Частное уравнение (3) для такой зависимости было получено для аэродинамического профиля GOE 134. Поле значений C_y, полученное по этому уравнению, совпало с результатами численного моделирования.

ЛИТЕРАТУРА

1. Englar R. J. et al. Design of the circulation control wing STOL demonstrator aircraft //Journal of Aircraft. – 1981. – Т. 18. – №. 1. – С. 51-58.
2. Fielding J. et al. Design, build and flight of the DEMON demonstrator UAV //11th AIAA Aviation Technology, Integration, and Operations (ATIO) Conference, including the AIAA Balloon Systems Conference and 19th AIAA Lighter-Than. – 2011. – С. 6963.
3. Warsop C., Crowther W. J., Shearwood T. NATO AVT-239: Flight demonstration of fluidic flight controls on the magma subscale demonstrator aircraft NATO AVT-239 special session //AIAA Scitech 2019 Forum. – Reston, VA : AIAA, 2019. – С. 1-20.

УДК 539.377

И.О. Демо[1, 2], Д.И. Хлопушин[1], А.А. Смирновский[1, 2]
[1]Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого(*)
[2]ООО «Софт-Импакт»

ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ТЕРМОУПРУГИХ НАПРЯЖЕНИЙ, ВОЗНИКАЮЩИХ В ТОНКОЙ ПЛАСТИНЕ ПРИ ВОЗДЕЙСТВИИ НА НЕЕ ЛАЗЕРНЫМ ИЗЛУЧЕНИЕМ

Введение. Технологии получения и обработки полупроводников кристаллов являются востребованными во всем мире. Одним из способов улучшения структуры

(*) И.О. Демо, demo.io@edu.spbstu.ru

полупроводниковых элементов является лазерный отжиг [1, 2]. Это технология обработки материалов с использованием лазерного излучения для изменения их структурных и электрических свойств. В настоящей работе представляются результаты численных расчетов теплопередачи и напряженного состояния в тонкой квадратной кремниевой пластине при воздействии на нее лазерным излучением. Расчеты выполнялись с использованием специализированного программного кода CVDSim3D, в котором было реализовано решение уравнения для термоупругих напряжений с использованием метода конечных объемов. Также для анализа термоупругих напряжений использовалась программа SCAD+, основанная на методе конечных элементов, где были заданы температурные нагрузки, проведен расчет и определены напряжения, возникающие вследствие нагрева. Проведено параметрическое исследование влияния мощности лазерного излучения и некоторых параметров пластины на величину и характер термоупругих напряжений. Результаты расчетов сравниваются с численными данными других авторов [3] и демонстрируется хорошее согласие результатов.

Постановка задачи. Тонкая кремниевая пластинка размерами 20×20×0.525 мм подвергается действию инфракрасного лазерного излучения, приводя к ее тепловому нагреву и возникновению термоупругих напряжений. Численное моделирование было проведено на основе решения уравнений для термоупругих напряжений в изотропном приближении. Иллюстрация постановки задачи представлена на рис. 1. Используемые свойства: модуль Юнга: $E = 156 \cdot 10^9$Па, коэффициент Пуассона: $\nu = 0.234$, остальные свойства представлены в табл. 1. Эффект нагрева моделируется за счет поверхностного теплового источника:

$$Q = I_0(1-R)exp\left(-2\frac{x^2+y^2}{r_0^2}\right), \quad (1)$$

где I_0 – мощность излучения лазера, R – коэффициент отражения, r_0 – радиус обогреваемой поверхности (см. рис. 1). На всех остальных границах задано граничное условие конвективного и лучистого теплоотвода:

$$n \cdot (k_t \nabla T) = h(T_{amb} - T) + \varepsilon_{rad}\sigma_{SB}(T_{amb}^4 - T^4), \quad (2)$$

где k_t – коэффициент теплопроводности, h = 5 Вт/(м²·К) – коэффициент конвективного теплообмена, T_{amb} = 293 К температура окружающей среды, ε_{rad} = 0.7 – степень черноты пластины, σ_{SB} – константа Стефана-Больцмана.

Табл. 1. Свойства пластины в зависимости от температуры

T, К	300	500	700	900	1100	1300	1500
R	0.316	0.324	0.334	0.352	0.366	0.382	0.398
k_t, Вт/м²·К	156	80	52	35.6	28	24.8	22.7
α, 10^{-6} 1/К	2.62	3.61	4.02	4.19	4.32	4.44	4.56

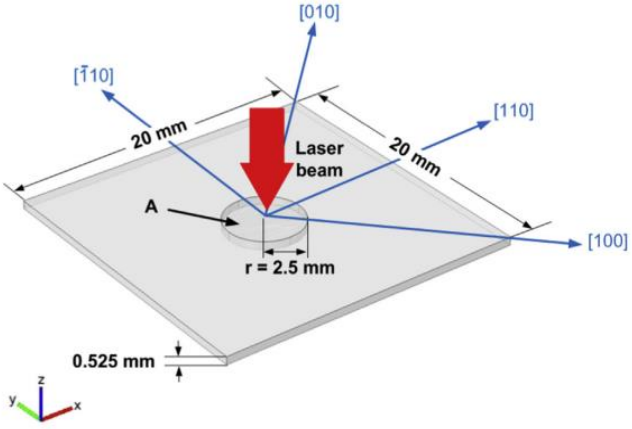


Рис. 1. Расчетная область (из [3])

Используемые сетки. Число ячеек/элементов, используемых при расчете, составило 170000 и 1600, при этом средний размер ячейки/элемента составил 0.15x0.15x0.09 мм и 0.5x0.5 мм для CVDSim3D и SCAD+ соответственно.

Анализ результатов. Для верификации полученные в CVDSim3D поля температуры (рис. 2) и одной компоненты напряжений (компоненты *xx*, рис. 3) были сопоставлены с данными из [3]. Результаты хорошо согласуются друг с другом, небольшие отличия могут быть связаны с упрощением постановки: в [3] задавался объемный тепловой источник.

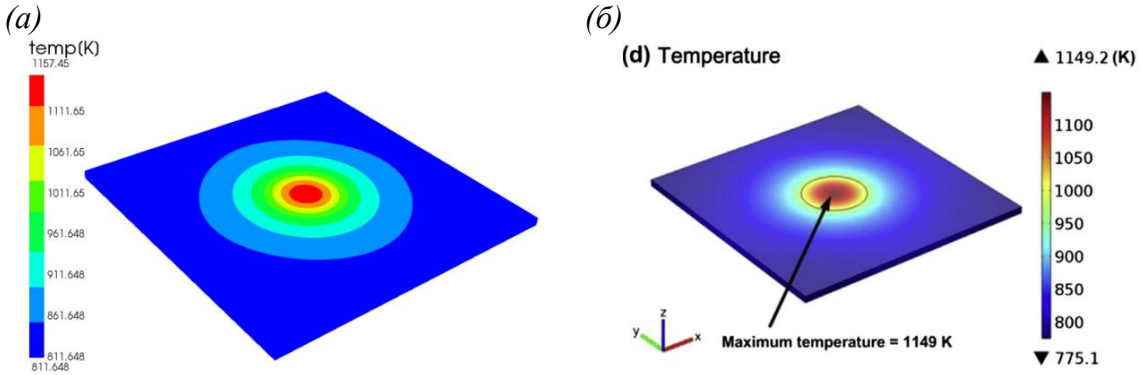


Рис. 2. Сопоставление температурных полей: (а) – результаты CVDSim3D, (б) – из [3]

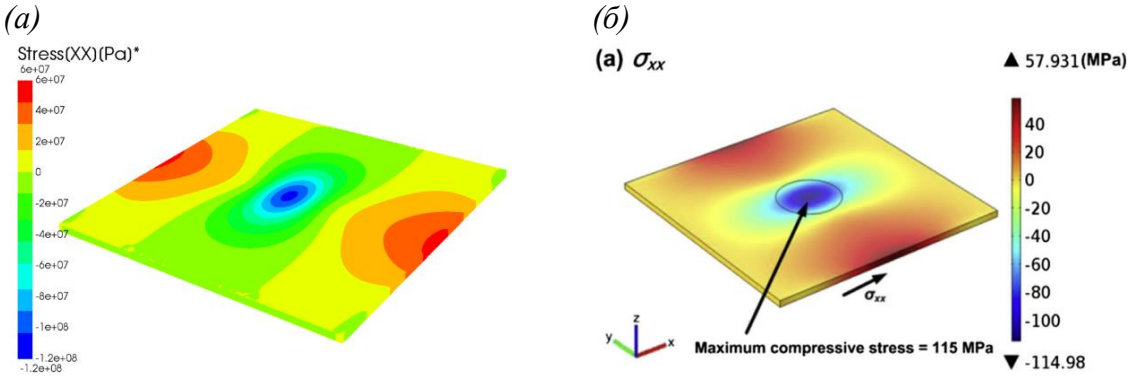


Рис. 3. Сопоставление одного из главных напряжений: (а) – результаты CVDSim3D, (б) – из [3]

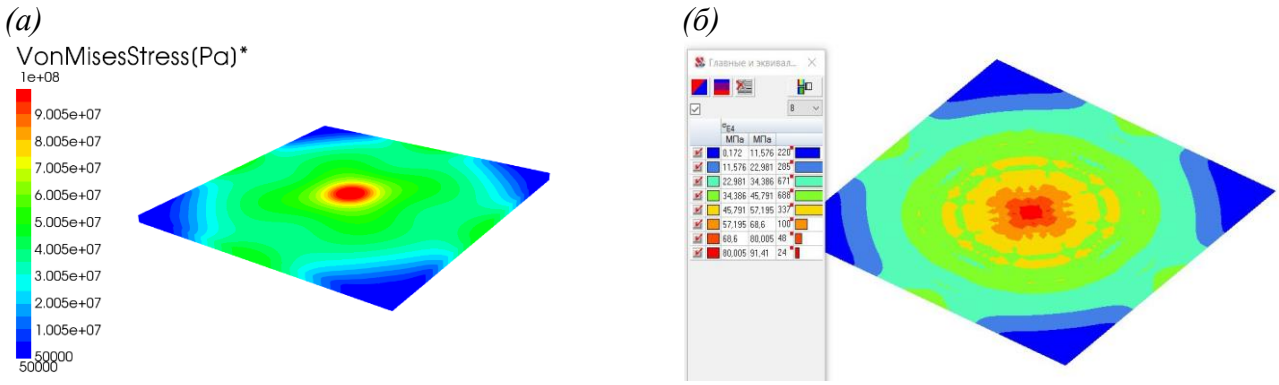


Рис. 4. Сопоставление напряжений по Мизесу между двумя пакетами CVDSim3D (а) и SCAD+ (б)

Одним из важных критериев оценки величины критического напряжения до возникновения эффектов пластичности является напряжение по Мизесу [4], которое вычисляется при помощи следующей формулы:

$$\sigma_{mises} = \sqrt{\frac{1}{2}\left((\sigma_{11}-\sigma_{22})^2 + (\sigma_{22}-\sigma_{33})^2 + (\sigma_{11}-\sigma_{33})^2 + 6(\sigma_{12}^2+\sigma_{23}^2+\sigma_{13}^2)\right)}, \quad (3)$$

где σ_{ii} компоненты тензора напряжений. На рис. 4 представлено сопоставление напряжений по Мизесу, полученные с помощью пакетов CVDSim3D и SCAD+. Как видно, качественно и количественно результаты хорошо согласуются между собой.

В рамках параметрического исследования было изучено влияние количества лучей на возникающие термоупрпугие напряжения в пластине (при сохранении суммарной мощности тепловыделения). На рис. 5 представлены поля напряжений по Мизесу при нагреве пластины 4 лучами, а в табл. 3 – количественное сравнение. Можно сделать вывод, что максимальные напряжения меньше, чем при нагреве одним лучом, вследствие более равномерного распределения температурной нагрузки.

(а) *(б)*

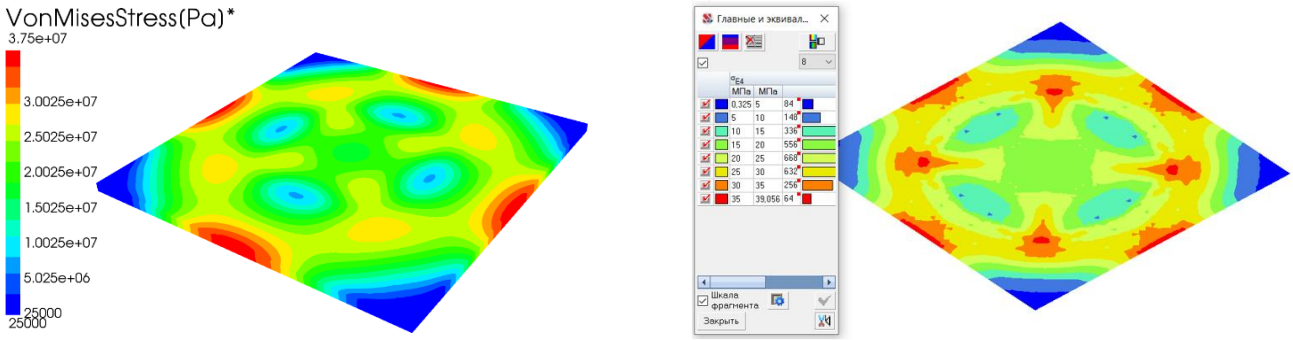


Рис. 5. Сопоставление напряжений по Мизесу при нагреве 4 лучами между двумя пакетами CVDSim3D (а) и SCAD+ (б)

Табл. 3. Зависимость величины напряжений от количества лучей

Кол-во лучей	**Макс. напр. *xx***	**Макс. напр. по Мизесу**
1 луч CVDSim3D	1.100e+08 Па	1.100e+08 Па
1 луч SCAD+	1.001e+08 Па	0.904e+08 Па
4 луча CVDSim3D	3.702e+07 Па	3.693e+07 Па
4 луча SCAD+	3.910e+07 Па	3.906e+07 Па

ЛИТЕРАТУРА

1. J. Poate. Laser Annealing of Semiconductors. - Academic Pr; First Edition, 1982. – p. 576
2. Г. Г. Закиров, И. Б. Хайбуллин, Е. И. Штырков, Лазерный и термический отжиг ультрадисперсных имплантированных слоев германия // Физика и техника полупроводников, 1985, т. 19, вып. 1, с. 33–37
3. S. Choi, K.-Y. Jhang. Slip damage of silicon wafers subjected to continuous infrared laser irradiation. // Current Applied Physics 14. – 2014. – p. 843-849
4. Р. Хилл. Математическая теория пластичности.: Пер. с англ. – М.: Гостехтеоретиздат, 1956. – 409 с.

УДК 536.25

А.С. Еропов, Е.М. Смирнов
Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого(*)

РАЗВИТИЕ ТУРБУЛЕНТНОЙ СВОБОДНОЙ КОНВЕКЦИИ У ВНЕЗАПНО НАГРЕВАЕМОЙ ВЕРТИКАЛЬНОЙ ПЛАСТИНЫ С ЛОКАЛЬНЫМИ ИНТЕНСИФИКАТОРАМИ ТЕПЛООБМЕНА В ВИДЕ НАКЛОННЫХ РЕБЕР

Введение. Одной из важнейших проблем, с которой сталкиваются разработчики и проектировщики, является охлаждение технических устройств и сооружений, для оптимальной работы которых требуется поддерживать их температуру в определенном диапазоне ее значений. Увеличить теплосъем с поверхности можно как более интенсивным обдувом (что применимо лишь в случае вынужденной конвекции), так и установкой интенсификаторов теплоотдачи в виде ребер или выступов различной формы [1]. На практике нередко отсутствует возможность обеспечить вынужденно-конвективное охлаждение используемых устройств из-за нехватки места или мощности, а также по соображениям безопасности. В связи с этим широкое распространение получило охлаждение свободноконвективным потоком; соответственно, требуются надежные методы его расчета.

Одним из интересных видов интенсификаторов свободноконвективной теплоотдачи является установка на охлаждаемую поверхность тонких ребер с V-образным расположением, ранее рассматривавшаяся, в частности, в работе [2]. В этой работе на основе RANS-подхода, в трехмерной стационарной постановке, численно исследовалось развитие свободноконвективного турбулентного пограничного слоя за возмущающей системой ребер с варьируемым размером и углом наклона относительно набегающего на ребра потока. В работе [3], также на основе RANS-подхода, исследовалась интенсификация турбулентной свободноконвективной теплоотдачи на вертикальной пластине путем установки периодической макрошероховатости в виде цилиндрических выступов. Поскольку численное исследование пространственно развивающегося 3D течения для такого рода задач сопряжено с большими вычислительными затратами, авторы работы [3] применили относительно экономичный метод «Time-developing simulation» (TDS), согласно которому развитие течения по пространственной координате заменяется на развитие во времени. Подход TDS был ранее успешно опробован на задаче прямого численного моделирования турбулентности в свободноконвективном пограничном слое на гладкой пластине [4,5]. Численное решение одномерной задачи TDS о развитии свободноконвективного турбулентного пограничного слоя на внезапно нагреваемой гладкой пластине, сформулированной в рамках RANS-подхода, представлено в работе [6], где было показано, что на стадии развитой турбулентности результаты расчетов хорошо согласуются с данными прямого численного моделирования.

Постановка задачи. Для настоящего исследования был взят один вариантов совокупности геометрических параметров ребер, рассмотренных в упомянутой работе [2]. Полагается, что на бесконечной пластине периодически установлены ребра длиной L =8 см и высотой $L/2$. Угол наклона ребер относительно вертикали составляет 30°. Выбранная для данного исследования прямоугольная расчетная область (рис. 1) имеет размеры $2L$ x $4L$ x $12.5L$.

Граничные условия приведены в табл. 1. Применение метода TDS предопределяет постановку условий периодичности на нижней и верхней границах. Условия периодичности ставятся и на боковых границах.

Тепловые граничные условия задачи соответствуют приведенным в широко известной экспериментальной работе [7] по исследованию свободноконвективного пограничного слоя воздуха на изотермической пластине. Температура внезапно нагретой стенки принимается

(*) А.С. Еропов, algenalk@mail.ru

равной 60 °C, температура внешней среды (воздуха) – равной 20 °C. Предполагается, что до момента внезапного нагрева температура пластины была равна температуре внешнего неподвижный среды.

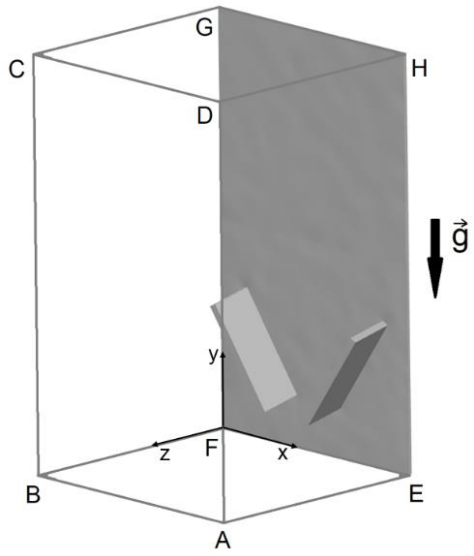


Рис. 1. Геометрия расчетной области

Табл. 1. Граничные условия

Граница	Условие
Стенка	Прилипание, фиксированная температура
Ребра	Прилипание
	Адиабатичность
Внешняя (ABCD)	Фиксированные давление и температура
Правая (ADHE)	Периодичность
Левая (BCGF)	
Верхняя (DCGH)	Периодичность
Нижняя (ABFE)	

Вычислительные аспекты. Численно интегрировались нестационарные, осредненные по Рейнольдсу, уравнения Навье-Стокса и энергии; эффекты плавучести моделировались в приближении Буссинеска. Для замыкания применялась *k*-ω SST модель турбулентности. Расчеты выполнялись по методу конечных объемов, с использованием гидродинамического кода общего назначения ANSYS Fluent 24.2. Размерность расчетной сетки составляла около двух миллионов ячеек. Выбор числа ячеек был основан на результатах предварительных расчетов по оценке сеточной сходимости. Сетки были сгущены к твердым стенкам так, чтобы в течение всего рассчитываемого промежутка времени средняя величина y^+ для ближайших к стенкам расчетных точек не превышала 1. Для продвижения по времени применялся безытерационный солвер, шаг по времени составлял 0.005 с.

Результаты расчетов. Общий анализ эффекта интенсификации тепла проводился по данным, полученным для интегрального коэффициента теплоотдачи – отношению среднего по поверхности пластины теплового потока к перепаду температуры. На рисунке 2 приведена полученная по результатам расчетов зависимость данного коэффициента от времени с момента внезапного нагрева пластины.

Исходя из показанных на рис. 2 данных, развитие моделируемого течения можно условно разбить на 4 этапа. Первый этап (I) – начальное развитие ламинарного течения. На нем, в частности, хорошо прослеживается эффект внезапного нагрева пластины, отражающийся в больших значениях коэффициента теплоотдачи на малых временах. С ростом времени, по мере прогрева среды, величина коэффициента быстро уменьшается. В конце первого этапа начинается постепенное увеличение коэффициента теплоотдачи вследствие образования ламинарных вихревых структур за ребрами. На втором этапе (II) происходит нарастание турбулентной вязкости, генерируемой *k*-ω SST моделью турбулентности. На третьем этапе (III) идет нарастание толщины турбулентного пограничного слоя, возмущаемого нестационарными вихревыми структурами, формирующимися при обтекании ребер. На четвертом этапе (IV) теплосъем в среднем «насыщается», однако возникают низкочастотные пульсации средней теплоотдачи, причины возникновения которых пока не до конца ясны.

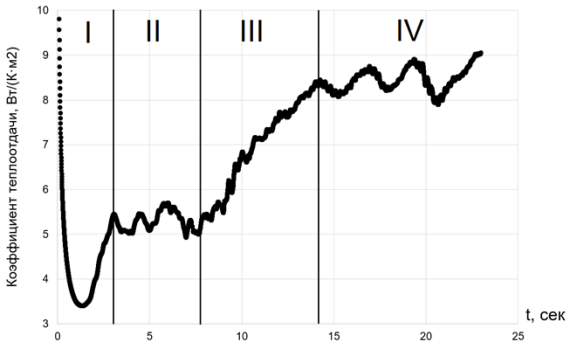


Рис. 2. Зависимость коэффициента теплоотдачи от времени



Рис. 3. Участок зависимости коэффициента теплоотдачи от времени для IV этапа

На рис. 3-5 детальнее показаны данные для четвертого этапа развития моделируемого течения. Этот этап характеризуется наличием низкочастотных колебаний, с попеременной превалирующей ролью вихрей, образующихся при обтекании соседствующих ребер. Когда один из вихрей превалирует над другим (рис. 4), отмечается максимум коэффициента теплоотдачи, что обусловлено приближением одного из вихрей к поверхности пластины и вызываемой этим интенсификацией теплосъема (рис. 5). Моменты с минимальными значениями коэффициента теплоотдачи отвечают состоянию с равнозначностью вихрей, которое нестабильно.

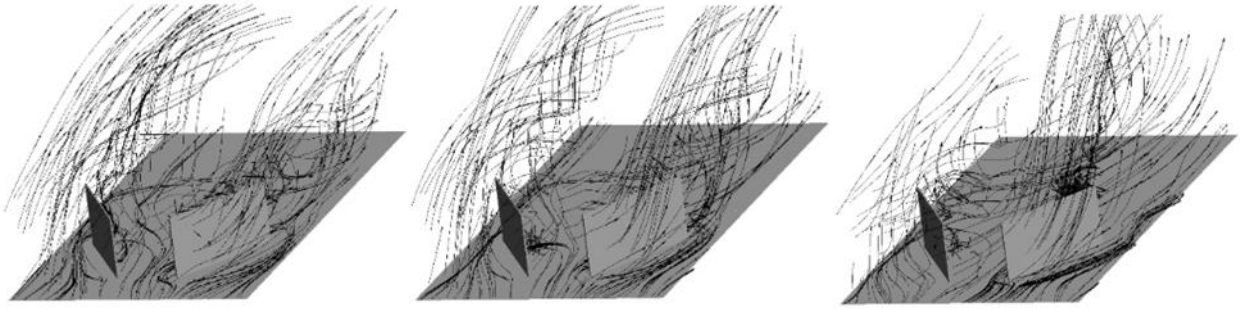


Рис. 4. Линии тока на этапе IV: (слева-направо) t=17.05, 18.05, 19.45 с

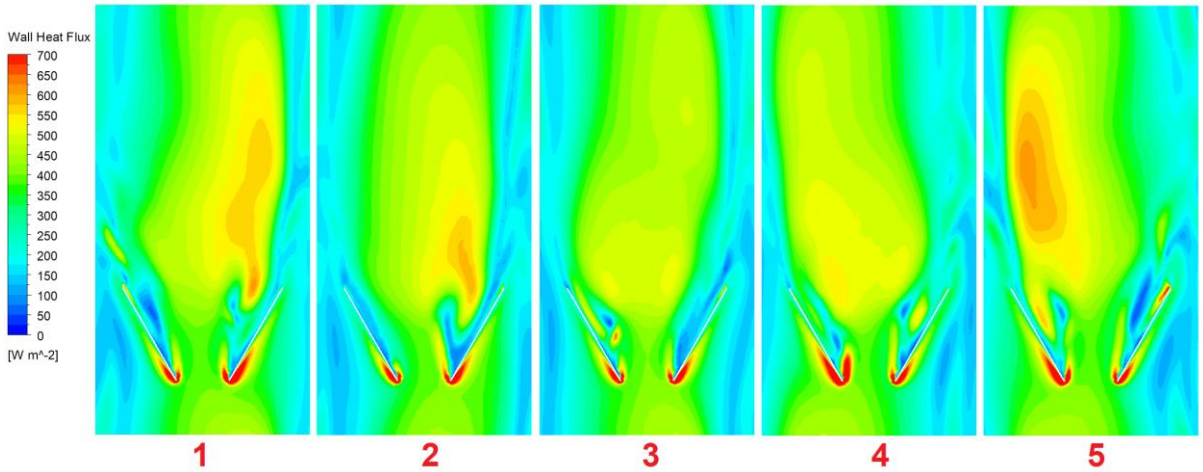


Рис. 5. Распределение теплового потока в разные моменты времени на этапе IV

Среднее «насыщенное» значение коэффициента теплоотдачи составляет величину около 8.3 (рис.2,3). Расчет, проведенный в аналогичной постановке, но для случая гладкой пластины, для моментов времени в интервале 15-20 секунд дает значение коэффициента теплоотдачи около 6.5. Соответственно, достигнутую интенсификацию теплоотдачи в случае рассмотренного варианта ребер можно оценить величиной в 25%.

ЛИТЕРАТУРА
1. Теплообмен в дозвуковых отрывных потоках: монография / колл. авторов; под редакцией В.И. Терехова. Новосибирск: Изд-во НГТУ, 2016. – 247 с
2. Желудков Н.А. Численное исследование турбулентного свободноконвективного пограничного слоя, возмущаемого тонкими пластинками с V-образным расположением / Выпускная магистерская работа по направлению подготовки 03.04.01 – Прикладные математика и физика, СПбПУ, – 2021.– 44с.
3. Левченя А.М., Смирнов Е.М., Трунова С.Н. Влияние периодической макрошероховатости на развитие турбулентной свободной конвекции у внезапно нагреваемой вертикальной пластины // Письма в Журнал технической физики. – 2022. – 48 (3) – С.47-50.
4. Abedin M.Z., Tsuji T., Hattori Y. Direct numerical simulation for a time-developing natural-convection boundary layer along a vertical plate // International Journal of Heat and Mass Transfer. – 2009. – 52 (19-20) – P.1723-1734.
5. Abramov A.G., Smirnov E.M., Goryachev V.D. Temporal direct numerical simulation of transitional natural-convection boundary layer under conditions of considerable external turbulence effects // Fluid Dynamics Res. – 2014. – 46 (4). – 041408.
6. Левченя А.М., Трунова С.Н., Колесник Е.В. Оценка возможностей RANS моделей турбулентности по результатам расчетов свободной конвекции, развивающейся вблизи внезапно нагретой вертикальной пластины // Науч.-техн. ведомости СПбГПУ. Сер.: Физ.-мат. науки. – 2020. – Т. 13, № 2. – С. 27-40.
7. Tsuji T., Nagano Y. Characteristics of a turbulent natural convection boundary layer along a vertical flat plate // International Journal of Heat and Mass Transfer. – 1988. – 31 (8) – P.1723-1734.

УДК 534

К.К. Забелло, А.В. Гарбарук
Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого(*)

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ О МОНОПОЛЕ МЕТОДОМ РЕШЕТОЧНЫХ УРАВНЕНИЙ БОЛЬЦМАНА

Введение. Метод решеточных уравнений Больцмана (LBM) является альтернативой конечно-объемному методу при решении уравнений Навье-Стокса. В некоторых работах высказываются предположения, что этот метод наиболее эффективен при решении задач аэроакустики и со временем вытеснит другие методы [1]. Однако, применение этого метода сопряжено с необходимостью выбора большого количества настроек. К сожалению, в литературе эти настройки обычно не приводятся или приводятся недостаточно полно, что делает результаты трудновоспроизводимыми. Таким образом, целью данной работы является исследование влияния настроек метода решеточных уравнения Больцмана на примере канонической задачи о распространении однотонного сигнала в неограниченном пространстве.

Постановка задачи и методика расчета. Рассматривается гармонический источник акустических волн $Q = Q_0 \sin(\omega t)$, расположенный в центре расчетной области в одном узле. Данный источник создает волну длиной $\lambda = \frac{2\pi c_s}{\omega}$, где c_s – скорость звука. Характерное число Рейнольдса, построенное по скорости звука и длине волны, составляет $Re \approx \frac{1}{\tau_{vi}\omega} = O(10^8)$, где $\tau_{vi} = \frac{1}{c_s^2}\left(\frac{4}{3}\nu + \nu_b\right)$ – вязкое время релаксации (ν и $\nu_B = \frac{2}{3}\nu$ – коэффициенты кинематической и объемной вязкости соответственно). Таким образом, влияние вязкости на распространение акустических волн для выбранных параметров пренебрежимо мало.

Рассматриваемое течение описывается системой уравнений Навье-Стокса с изотермическим уравнением состояния:

(*) К.К. Забелло, kosnay@mail.ru

$$\partial_t \rho + \partial_\alpha(\rho v_\alpha) = Q\delta(x)$$
$$\partial_t(\rho v_\alpha) + \partial_\alpha\left(\rho v_\alpha v_\beta\right) = -\partial_\alpha p + \partial_\beta\left(\mu\left(\partial_\beta v_\alpha + \partial_\alpha v_\beta - \frac{2}{3}\delta_{\alpha\beta}\partial_\gamma v_\gamma\right) + \mu_b \delta_{\alpha\beta}\partial_\gamma v_\gamma\right) \quad (1)$$
$$p = \rho c_s^2$$

Пользуясь допущениями линейной акустики, данную систему можно преобразовать в вязкое волновое уравнение:

$$\left[\frac{1}{c_s^2}\partial_t^2 - (1 + \tau_{vi}\partial_t)\partial_\alpha\partial_\alpha\right]p' = \partial_t Q\delta(x), \quad (2)$$

где $p' = p - p_0$ – пульсации давления. Аналитическое решение данного уравнения в невязком случае ($\tau_{vi} = 0$) имеет вид:

$$p'_a = Re\left(i\omega Q_0 \frac{1}{4i} H_0^{(2)}\left(\frac{2\pi|x|}{\lambda}\right)e^{i\omega t}\right), \quad (3)$$

где $H_0^{(2)}$ – функция Ганкеля второго рода 0-го порядка.

Общий вид используемого для решения (1) и (2) решеточного уравнения Больцмана может быть представлен как:

$$f_i\,(x + c_i, t\; + \Delta t) - f_i\,(x,t) = \; j_i\,(x,t)\Delta t + \; \Omega_i\,(x,t)\Delta t + \Omega_{PML,i}(x,t)\Delta t, \quad (4)$$

где $f_i(x,t)$ – функция распределения; $j_i(x,t) = w_i Q\delta(x)$ – источник; $\Omega_{PML,i}(x,t)$ – источник, соответствующий демпфирующему слою; $\Omega_i\,(x,t)$ – оператор столкновений, рассматриваются BGK и MRT [2] операторы (параметры MRT: $\tau_\epsilon = \tau_e, \tau_q = \Delta t$).

Операторы столкновений описывают релаксацию f_i к равновесному состоянию f_i^{eq}, определяющих вид решаемых уравнений. В работе используется следующая равновесная функция:

$$f_i^{eq} = w_i\rho\left(1 + \frac{v_\alpha c_{i\alpha}}{c_s^2} + \frac{v_\alpha v_\beta\left(c_{i\alpha}c_{i\beta} - c_s^2\delta_{\alpha\beta}\right)}{2c_s^4}\right), \quad (5)$$

соответствующая системе уравнений (1), а также ее линеаризованный вариант:

$$f_i^{eq} = w_i\left(\rho + \frac{\rho_0 v'_\alpha c_{i\alpha}}{c_s^2}\right), \quad (6)$$

соответствующий уравнению (2); здесь w_i и $\vec{c}_i$ – веса и скорости из набора скоростей D2Q9 соответственно [2].

Расчетная область имеет форму квадрата со стороной 10λ. На внешней границе задаются характеристические граничные условия в сочетании с демпфирующем слоем (PML [3]). Демпфирующий слой определяется толщиной (L_{PML}) и коэффициентом демпфирования σ, меняющимся по параболическому закону от 0 до σ_{max} к границе области.

Расчетная сетка является декартовой с постоянным шагом Δx. Стоит отметить, что в методе решеточных уравнений Больцмана шаги по времени и пространству не могу быть выбраны независимо, между ними существует связь:

$$\Delta t\omega = \frac{2\pi}{\sqrt{3}}\left(\frac{\lambda}{\Delta x}\right)^{-1}. \quad (7)$$

Для количественной оценки расхождения между численным и аналитическим решениями использовалась следующая формула:

$$Error = \frac{1}{2\lambda}\sum_{x=\lambda}^{3\lambda}\frac{||p| - |p_a||}{|p_a|}. \quad (8)$$

Результаты расчетов и обсуждение. На рис. 1а приведены результаты решения для MRT и BGK операторов при $\sigma_{max} = 0.07, L_{PML} = 2\lambda$ и $\Delta x/\lambda = 29$ в случае линеаризованной равновесной функции (6). Видно наличие паразитных осцилляций в решение для BGK оператора, а MRT оператор демонстрирует хорошее совпадение с аналитическим решением.

На рис. 1б представлена зависимость ошибки от числа точек на длину волны для MRT оператора в случае линеаризованной равновесной функции при $\sigma_{max} = 0.07, L_{PML} = 2\lambda$ и 4λ. Как видно из рисунка, LBM демонстрирует второй порядок точности, при этом 20 точек на длину волны обеспечивают погрешность менее 1%. Стоит отметить существенную

зависимость решения от граничных условий. Увеличение числа точек на длину волны приводит к уменьшению численной диссипации решения, вследствие чего отраженные от границы возмущения не успевают затухать, проходя через демпфирующий слой (PML), что приводит к росту ошибки. Увеличение толщины демпфирующего слоя позволяет избежать данного эффекта. Таким образом, параметры демпфирующего слоя (PML) должны выбираться в зависимости от соотношения шага сетки и разрешаемых длин волн.

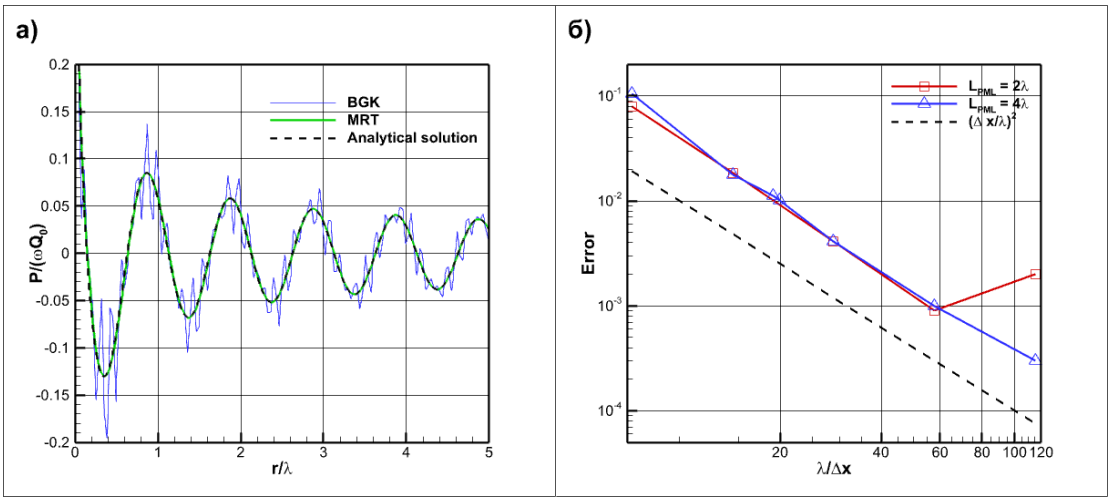


Рис. 1. а) Сравнение решение для BGK MRT операторов столкновений для случая линейной равновесной функции. б) Оценка сеточной сходимости решения

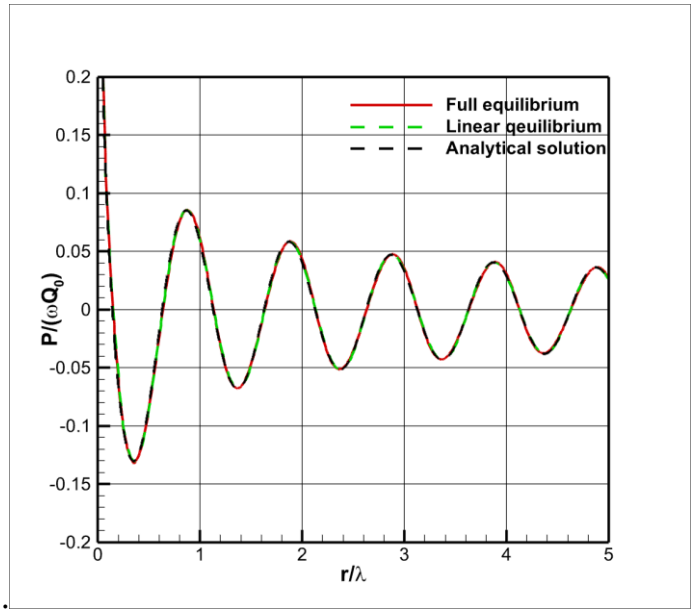


Рис. 2. Сравнение решения для MRT оператора с полной и линеаризованной равновесными функциями

Решение для полной равновесной функции (5) представлено на рис. 2. Стоит отметить, что устойчивость для полной равновесной функции хуже, чем для линеаризованной, вследствие возникновения ошибки сжимаемости порядка квадрата числа Маха в аппроксимации системы уравнений (1). Решение с использованием BGK оператора абсолютно неустойчиво, а для MRT оператора устойчивость достигается путем повышения объемной вязкости ν_b на 4 порядка, что ведет к понижению числа Рейнольдса $Re = O(10^4)$. Несмотря на это, решение для полной равновесной функции практически совпадает с аналитическим

решением. Однако, сам факт необходимости увеличения объемной вязкости вызывает опасения и требует дополнительного исследования.

Заключение. Метод решеточных уравнений Больцмана пригоден для акустических расчетов с использованием MRT оператора столкновений, обеспечивающим погрешность менее 1% при 20 точках на длину волны. При этом параметры демпфирующего слоя (PML) должны корректироваться в зависимости от разрешения сетки, чтобы минимизировать отраженные возмущения от выходной границы.

ЛИТЕРАТУРА

1. Alexandre Suss, Ivan Mary, Thomas Le Garrec, Simon Marié. Comprehensive comparison between the lattice Boltzmann and Navier–Stokes methods for aerodynamic and aeroacoustic applications // Computers & Fluids. – 2023. – Vol. 257.
2. Lallemand, Pierre and Luo, Li-Shi. Theory of the lattice Boltzmann method: Dispersion, dissipation, isotropy, Galilean invariance, and stability // Phys. Rev. E. – 2000. – Vol. 61. – P. 6546-6562.
3. A. Najafi-Yazdi, L. Mongeau. An absorbing boundary condition for the lattice Boltzmann method based on the perfectly matched layer // Computers & Fluids. – 2012. – Vol. 68. – P. 203-218.

УДК 532.517

К.К. Кафиева, М.А. Засимова
Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого(*)

ИССЛЕДОВАНИЕ ВЛИЯНИЯ ЭФФЕКТОВ ПЛАВУЧЕСТИ НА ДВИЖЕНИЕ ВИХРЕВОЙ СТРУКТУРЫ, ФОРМИРУЮЩЕЙСЯ ПРИ ИМПУЛЬСНОЙ ПОДАЧЕ СТРУИ В ЗАТОПЛЕННОЕ ПРОСТРАНСТВО

При импульсной подаче струи формируются вихревые структуры, характеризующиеся безразмерным параметром $P = (L_0/d)^{1/3}$ [1], где $L_0 = V_0T_0$ – протяженность «воздушного поршня» при выдуве, а значения T_0, V_0 – время выдува струи и средняя за это время скорость подачи среды через отверстие диаметром d. Согласно [1], при $1{,}6 < P < 8$ наблюдается образование вихревых облаков, при меньших значениях – вихревых колец, а при больших – нестационарных струй. Формирование и движение турбулентных вихревых облаков в изотермических условиях исследовалось в работе [2]. Решение задачи осуществлялось в осесимметричной (2D) постановке, моделирование течения осуществлялось на основе подхода URANS (с моделью турбулентности k-ε RNG). Так, было показано, что течение при импульсной подаче струи можно разделить на две фазы: (1) начальную фазу, которая включает в себя промежуток подачи струи и формирование вихревого облака, и (2) фазу автомодельности, на которой вихревое облако сформировалось и безразмерные поля скорости совпадают в разные промежутки времени.

В настоящей работе представляются результаты расчетов неизотермического течения, в которых в неподвижное окружающее пространство импульсно подается одиночная плавучая струя. Исследование направлено на оценку влияния на структуру формируемого вихревого течения перепада температуры между окружающей средой и импульсной струей и направления подачи струи относительно гравитационной силы. Данные неизотермических расчетов сопоставляются с данными расчетов, проведенных в изотермических условиях.

Расчеты проведены в двух постановках: осесимметричной 2D постановке (без учета сил плавучести) и в 3D постановке (с учетом сил плавучести). На рис. 1а,б показана геометрия и размеры расчетных областей. Воздух поступает в неподвижное пространство через входное

(*) К.К. Кафиева, kafieva_kk@spbstu.ru

отверстие круглой формы диаметром d = 5 см.

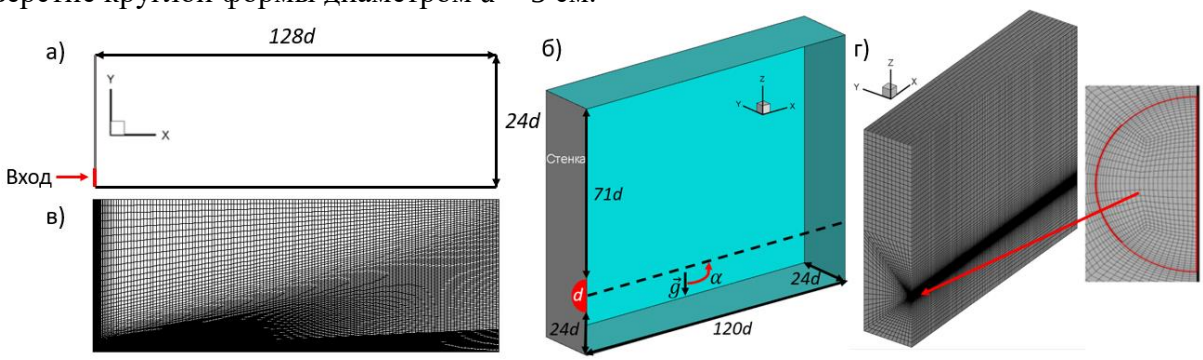


Рис. 1. Геометрия расчетной области для а) осесимметричной и б) 3D постановки; расчетные сетки для в) осесимметричной и г) 3D постановки

Задавались постоянные физические свойства воздуха: динамический коэффициент вязкости $\mu = 1{,}8\cdot10^{-5}$ кг/м·с, коэффициент теплопроводности $k = 0{,}0242$ Вт/м·К, удельная теплоемкость $C_p = 1006$ Дж/кг·К. На входной границе задавалось постоянное значение скорости $V_0 = 4{,}28$ м/с до момента времени $T_0 = 0{,}57$ с, при $t > T_0$ значение скорости на этой границе задавалось равным 0. На границе $x = 0$, на которой расположено входное отверстие, задавалось условие прилипания. В случае 3D моделирования задача решалась в несколько упрощенной постановке: на границе $y = 0$ задавалось условие симметрии. Остальные границы расчетной области для обеих постановок – открытые (проницаемые). В момент подачи струи температура воздуха на входе T_{in} задавалась постоянной и равной 30°С, 40°С или 60°С. После окончания истечения струи, при $t > T_0$, температура задавалась равной 20°С. На остальных границах расчетной области задавалась температура равная $T_a = 20$°С. Угол α (рис. 1б) между направлением подачи импульсной струи и направлением гравитационной силы варьировался в диапазоне значений от 0° до 180°.

Рассматриваемое течение характеризуется числом Рейнольдса $Re = V_0 d/\nu \approx 1{,}5\cdot10^4$, параметром $P = 3{,}65$ (что соответствует формированию вихревого облака) и числом Грасгофа, определенным в моменты подачи струи по диаметру приточного отверстия, $Gr = g\beta_T d^3 \Delta T/\nu^2 \approx (1.9\ldots7.8)\cdot10^5$, здесь $\Delta T = T_{in} - T_a$. Отметим, что число Ричардсона $Ri = Gr/Re^2$ в начальные моменты времени принимало значения близкие к нулевым, однако вдали от источника, по мере уменьшения скорости и температуры вихревого облака, значения Ri составляли порядка единицы.

В расчетах использовались структурированные расчетные сетки (рис. 1в,г), построенные в программном пакете ICEM CFD 19.3. Число ячеек для осесимметричной постановки составило 17 тысяч, а для 3D постановки – 540 тысяч. Моделирование течения осуществлялось на основе URANS подхода, для замыкания системы уравнений Рейнольдса использовалась стандартная k-ε модель турбулентности. Эффекты плавучести учитывались в приближении Буссинеска. Расчеты проводились в пакете ANSYS Fluent с привлечением ресурсов суперкомпьютерного центра «Политехнический» (*scc.spbstu.ru*). Шаг по времени составлял 0,001 с. Уравнения аппроксимировались со вторым порядком пространственной и временной дискретизации.

На рис. 2а представлены поля модуля скорости для двух вариантов расчетов в 3D постановке (при $\alpha = 60°$ и $\alpha = 120°$) в момент времени $t = 1$ с и в моменты времени ($t = t_{max}$), соответствующие $V_{max} \approx 0{,}035V_0$, то есть, когда сформировавшееся вихревое облако практически перестало двигаться. Была проведена оценка времени движения вихревого облака (t_{max}), дальности его распространения (x_{max}), а также его отклонения от оси распространения импульсной струи (z_{max}) для различных углов подачи струи α. Полученные при фиксированном перепаде $\Delta T = 20$°С зависимости представлены на рис. 2б,г.

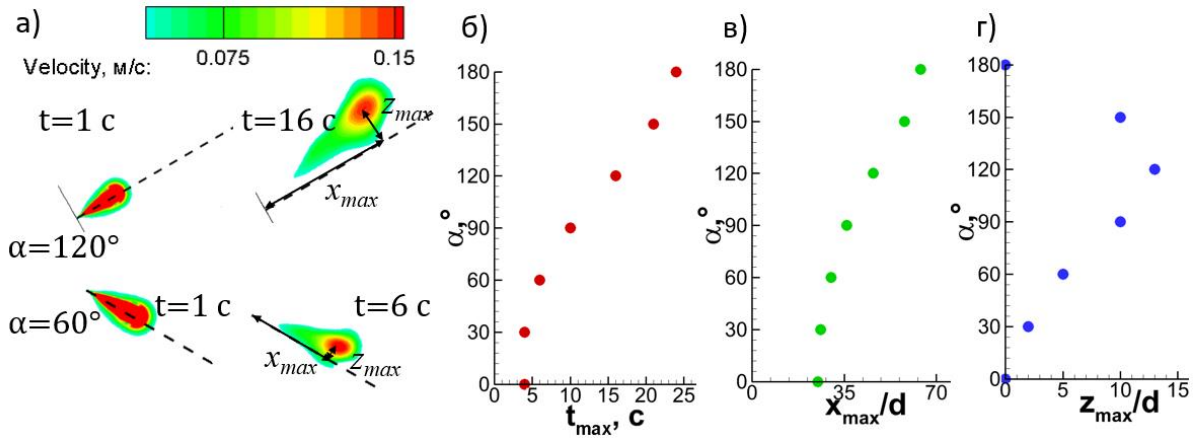


Рис. 2. а) Поля модуля скорости в два момента времени (t = 1 с и $t = t_{max}$); б) зависимость времени движения вихревого облака от α; в) зависимость дальности распространения от α; г) зависимость отклонения от оси распространения импульсной струи от α

По рис. 2а видно, что в начальные моменты времени поля модуля скорости для разных углов α схожи друг с другом, а при больших временах поля скорости в сформировавшемся вихревом облаке различны: облако распространяется на разные по дальности расстояния и отклоняется от оси распространения импульсной струи тоже на разные расстояния. С увеличением угла α вихревое облако распространяется в продольном направлении на большее расстояние. Так, при α = 180° вихревое облако распространилось на 64 калибра, в то время как при α = 0° - на 25 калибров. В поперечном направлении вихревое облако распространяется на максимальное расстояние (13 калибров) при α = 120°, а при α = 0° и α = 180 вовсе не отклоняется от оси распространения струи.

На рис. 3а представлено изменение положения максимума скорости вихревого облака от безразмерного времени $t' = tV_0/d$. С течением времени положение максимума скорости в продольном направлении начинает изменяться по степенному закону: $x = At^B$. На рис. 3б,в представлены зависимости коэффициента A и показателя B степенного закона изменения положения максимума скорости вихревого облака в зависимости от угла α. На рис. 3б,в также нанесены штриховые линии, соответствующие коэффициенту $A = 7{,}1$ и показателю степени $B = 0{,}25$, полученные для изотермического варианта расчета в осесимметричной постановке, которые согласуются с зависимостью [1] для оценки положения максимума скорости вихревой структуры во времени $x \sim t'^{\,0{,}25}$. Стоит отметить, что наиболее согласующимся с 2D вариантом расчета является вариант при α = 60° и α = 90°.

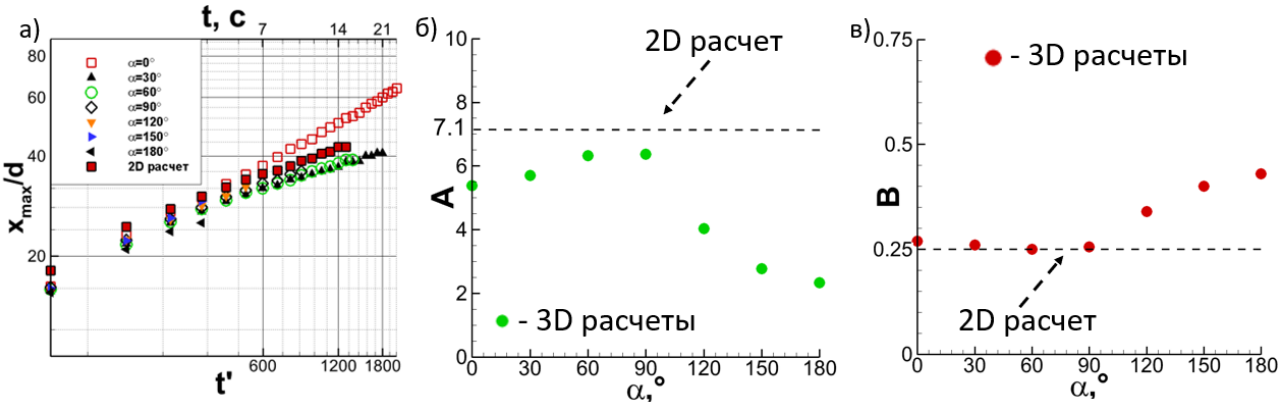


Рис. 3. а) Зависимость положения максимума скорости вихревого облака от времени; б) зависимость коэффициента степенного закона от α; в) зависимость показателя степенного закона от α

Заключение. Проведено исследование влияния на движение вихревого облака задаваемого перепада температуры между окружающей средой и импульсной струей и направления подачи импульсной плавучей струи относительно направления гравитационной силы. Расчеты при фиксированном перепаде температуры показывают, что с увеличением угла между направлением подачи импульсной струи и гравитационной силы дальность распространения вихревого облака в фиксированные моменты времени возрастает. Начиная с фиксированного для каждого варианта момента времени, изменения во времени максимальной скорости вихревого облака и его положения подчиняются степенным зависимостям.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ghaem-Maghami E., Johari H. Concentration field measurements within isolated turbulent puffs // ASME. J. Fluids Eng. – 2007. – V. 129. №2. – P. 194–199.
2. Засимова М.А., Рис В.В., Иванов Н.Г. Численное моделирование формирования и движения турбулентных вихревых облаков // Изв. РАН. МЖГ. – 2023. № 5. – С. 57–69.

УДК 536.2

С.А. Князев, В.В. Сероштанов, А.А. Гусаков
Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого(*)

ВЛИЯНИЕ СТЕРЖНЕЙ-ТУРБУЛИЗАТОРОВ НА ТЕЧЕНИЕ И ТЕПЛООБМЕН ВБЛИЗИ ЦИЛИНДРА

Повышение энергоэффективности теплообменного оборудования – наиболее актуальное направление исследований в области тепло- и массообмена. Использование поверхностных интенсификаторов: уступов или углублений, разрушающих гидравлический и тепловой пограничные слои, позволяет увеличить коэффициент теплоотдачи (КТО) и снизить гидравлическое сопротивление. Целью таких работ обычно является определение оптимальных геометрических и режимных параметров [1].

В настоящей работе с применением градиентной теплометрии исследовано влияние стержней-турбулизаторов на течение и теплообмен вблизи одиночного цилиндра, оснащенного поверхностными интенсификаторами в виде тонких стержней круглого сечения. Опыты проводились для числа Рейнольдса Re = 9600, определяемого по диаметру несущего цилиндра, в аэродинамической трубе НОЦ «Теплофизика в энергетике» СПбПУ [2]. Несущий цилиндр – полый, диаметром D = 66 мм и длиной 600 мм, изготовленный из листа стали толщиной 0,1 мм. Цилиндр имеет патрубок подачи насыщенного водяного пара при атмосферном давлении и два патрубка отвода конденсата (Рис. 1). Таким образом на поверхности цилиндра обеспечивается условие T = const ≈ 393 К. Цилиндр с установленным на поверхности градиентным датчиком теплового потока (ГДТП) [3] может проворачиваться вокруг оси на угол φ, что позволяет измерить местную плотность теплового потока и определить местное число Нуссельта на поверхности цилиндра (Рис. 2).

Два стержня-турбулизатора устанавливаются на поверхность цилиндра или вблизи него вдоль его образующих. В работе использованы стержни диаметром d = 1,6 и 3,2 мм, которые устанавливались симметрично на угол ψ = 30…60°. Экспериментальная установка, кроме того, позволяет устанавливать турбулизаторы с зазором δ между поверхностью цилиндра и стержнями.

(*) С.А. Князев, leontev803@gmail.com

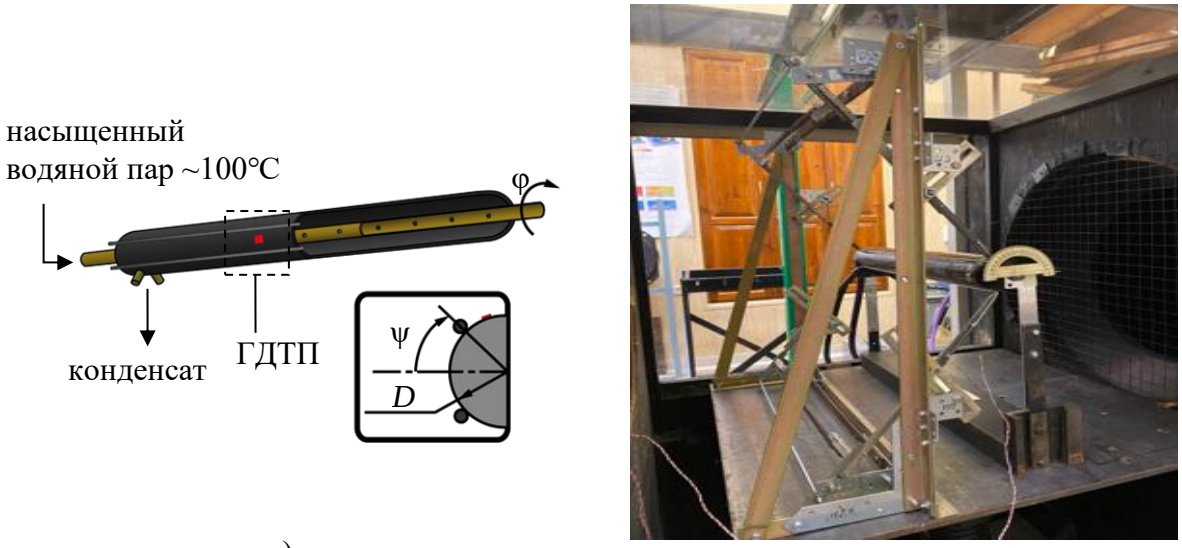


Рис. 1. Схема (а) и фото (б) исследуемой модели со стержнями-турбулизаторами

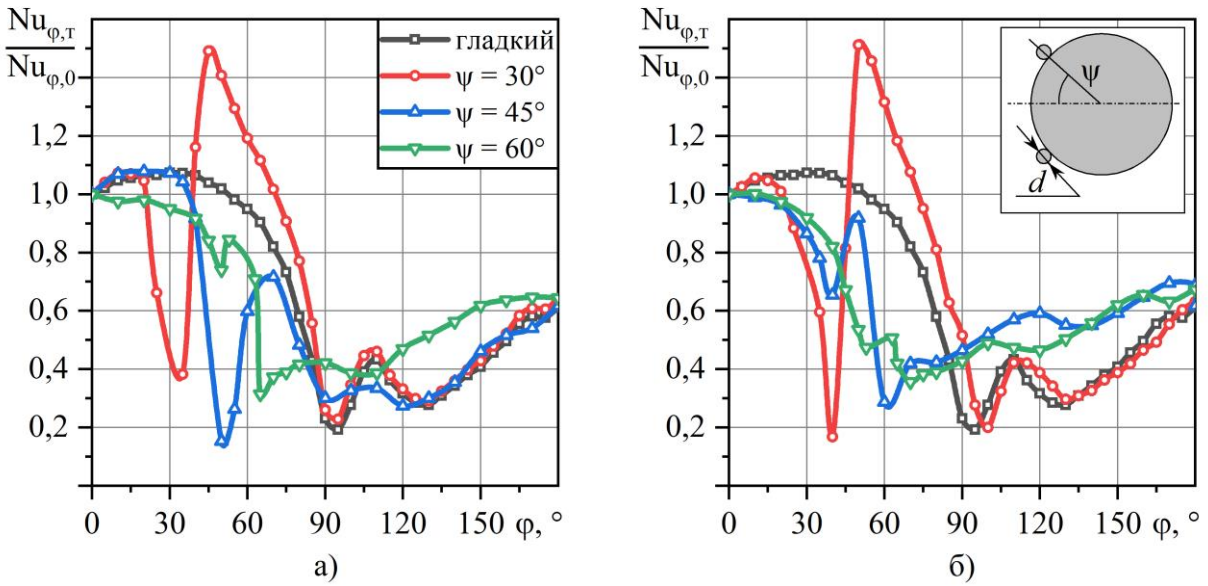


Рис. 2. Распределение местного числа Нуссельта по поверхности цилиндра со стержнями-турбулизаторами диаметром 1,6 мм (а) и 3,2 мм (б), установленными на угол ψ

На рис. 2 представлены распределения местного относительного числа Нуссельта по поверхности цилиндра. Показано влияние угла установки турбулизаторов ψ и их толщины *d* на интенсивность теплообмена на поверхности цилиндра.

Видно, что стержни меняют положение минимального числа Нуссельта, а значит, и положение точки отрыва. При установке стержней ближе к лобовой образующей (ψ = 30°) влияние стержней практически не распространяется на ход кривых в кормовой части, однако при увеличении ψ до 45…60°, интенсивность теплоотдачи в кормовой части выше, чем для гладкого, что говорит об интенсификации возвратных течении в области рециркуляции, как ранее показано в работе [3]. Для указанного диапазона ψ распределение местного числа Нуссельта более чувствительно к толщине стержней.

На рис. 3 показано влияние на теплообмен зазора δ между цилиндром и стержнями.

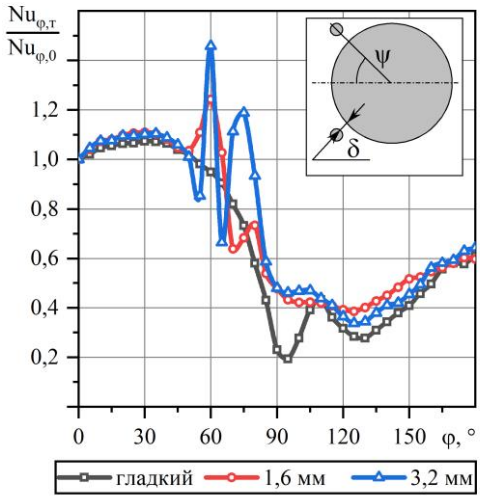


Рис. 3. Распределение местного числа Нуссельта по поверхности цилиндра со стержнями-турбулизаторами, установленными на угол ψ = 60° с зазором δ = *d*

При величине δ, сопоставимой с толщиной стержней, для ψ =60° область угнетенного теплообмена за стержнем уменьшается, и более того, наблюдается второй локальный экстремум для кривых, величина которого зависит и от толщины стержней, и от зазора, что можно объяснить сопоставимыми размерами системы и пограничного слоя для рассматриваемой скорости набегающего потока. Распределение числа Нуссельта в кормовой части в случае, когда стержни установлены с зазором, соответствует гладкому цилиндру, однако второй локальный минимум числа Нуссельта выражен слабее.

Наиболее эффективным углом установки стержней-турбулизаторов без зазора, в рассматриваемом диапазоне углов, оказался угол ψ = 30° (повышение КТО до 5%). Однако его существенное снижение до 20…40 % от значения коэффициента теплоотдачи в лобовой точке и дальнейшее увеличение в 4…7 раз приведет на практике к местным перегревам несущего цилиндра, что в ряде случаев недопустимо.

Наличие зазора между стержнями-турбулизаторами и поверхностью цилиндра позволяет интенсифицировать теплообмен на поверхности цилиндра значительно: при установке стержней на угол ψ = 60° с зазором равным диаметру турбулизаторов наблюдается повышение среднего по поверхности коэффициента теплоотдачи до 13%.

Заключение. В результате исследования удалось определить влияние стержней-турбулизаторов на распределение местного коэффициента теплоотдачи по поверхности кругового цилиндра. Установлено, что установка стержней с зазором относительно поверхности цилиндра в рассматриваемом диапазоне углов установки ψ и для исследованных диаметров стержней интенсифицирует теплообмен на поверхности несущего цилиндра.

ЛИТЕРАТУРА

1. Попов И.А., Махянов Х.М., Гуреев В.М. Физические основы и промышленное применение интенсификации теплообмена: Интенсификация теплообмена. – Казань: Центр инновационных технологий, 2009. – 560 с.

2. Князев С.А., Сероштанов В.В., Гусаков А.А. Исследование течения и теплообмена вблизи цилиндра со стержнями-турбулизаторами / Бутаковские чтения: Сборник статей IV Всероссийской с международным участием молодежной конференции, Томск, 10–12 декабря 2024 года. – Томск: Национальный исследовательский Томский политехнический университет, 2024. – С. 152-156.

3. Павлов А.В., Бобылев П.Г., Сапожников С.З. Градиентная теплометрия в исследовании теплообмена при кипении в большом объеме недогретой воды и жидкости с добавлением микрочастиц Al_2O_3 / Теплоэнергетика. – 2023. – № 3. – С. 40-48. – DOI 10.56304/S0040363623030062

УДК 621.565.7

В.Ю. Коекин[1,2], С.В. Булович[1,2]
[1]Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого(*)
[2]Физико-технический институт им. А.Ф. Иоффе РАН

ОПТИМИЗАЦИЯ РАБОТЫ РОТОРНО-ЛОПАСТНОЙ МАШИНЫ ПО ХОЛОДИЛЬНОМУ ЦИКЛУ

Введение. Конструкция роторно-лопастной машины (РЛМ) обладает большой универсальностью, что предоставляет возможность использовать ее в качестве устройств различного назначения [1]. В частности, использование рабочей камеры РЛМ за один оборот вала в процессах сжатия и расширения позволяет применять машину в производстве холода. Принципиальная возможность использования РЛМ в таком качестве обоснована в статье [2]. Целью данной работы является исследование закономерностей работы РЛМ в открытом термодинамическом цикле.

Постановка задачи и метод решения. Схематическое изображение газового охладителя приведено на рис. 1. Линейные и угловые размеры камер (*1-4*) и лопастей (*7-10*), а также положение окон золотникового газораспределения, исключая окна входа и выхода теплообменника (*5*), взяты из работы [3].

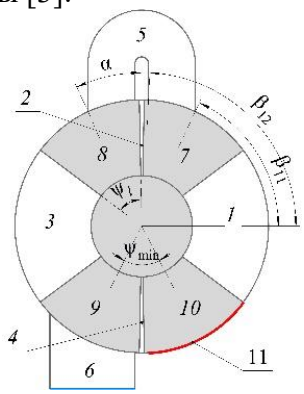


Рис. 1. Схема РЛМ в производстве холода

В качестве рабочего тела рассмотрен воздух. Через входное окно (11) (красная линия на рис.1) газ подается в РЛМ с температурой 300 K и давлением 1 бар. Выход газа из охладителя организован через выходной коллектор (6), в который газ поступает из рабочих камер через окно газораспределения. Выходная граница охладителя (синяя линия на рис.1) считается проницаемой, если давление в коллекторе превышает давление 1 бар, в противном случае граница является непроницаемой. В такой формулировке выходное граничное условие имитирует работу обратного клапана. Объем выходного коллектора составляет 0.5 м^3, площадь выходной границы равна $6.3\cdot10^{-3}$ м^2.

Для математического моделирования термогазодинамических процессов в холодильной РЛМ был использован метод узлового анализа, который ранее успешно был применен для определения характеристик работы роторно-лопастного двигателя (РЛД) с внешним подводом тепла. В статье [3] приведено описание метода узлового анализа применительно к конструкции РЛД. Сравнение значений функций, полученных по методу узлового анализа, с результатами по более полной математической модели, на основе численного интегрирования системы уравнений Навье-Стокса в двумерной постановке, выполнено в работе [4]. Моделирование теплообменного аппарата (5) проводилось с использованием коэффициента

(*) В.Ю. Коекин, koiokin@mail.ru

объемной теплоотдачи, значение которого составляло 1000 Вт/(м^3·К). Объем теплообменного аппарата равен 0.5 м^3, температура стенки теплообменного аппарата была выбрана равной 400 К. Угловая скорость вращения ротора ω=10π рад/с.

Угловые размеры окна входа в теплообменник (5) ($\beta_{11}=74°$, $\beta_{12}=88.9°$) в настоящем исследовании не изменялись. Положение окна выхода из теплообменника определяется углом начала окна $\beta_{21}=91.1°$ и углом конца окна $\beta_{22}=90°+\alpha$. Размер окна варьировался заданием параметра α, который менялся в диапазоне 12°-24°.

Анализ результатов. Рассмотрим базовый вариант, с «симметричным» расположением окон. На рис. 2 кривая красного цвета иллюстрирует изменение значений среднемассовой температуры и давления в рабочей камере (*1*), при равных размерах окон выпуска и выпуска (α=16°) теплообменника, за один период (τ=0.2с). При адиабатическом сжатии газа (0-0.2τ) происходит повышение температуры и давления рабочего тела в камере до величин, которые существенно превышают их значения в теплообменнике (рис. 2). В результате этого реализуется выхлоп газа (0.2τ-0.25τ). В интервале времени 0.25τ-0.3τ происходит наполнение рабочей камеры газом, охлажденным в теплообменнике. Далее температура и давление рабочего тела снижается в адиабатическом процессе расширения газа (0.3τ-0.5τ). В конце процесса расширения давление в камере становится ниже атмосферного давления в выходном коллекторе. Это приводит к обратному затеканию газа в рабочую камеру (0.5τ-0.75τ). Сжатие газа в рабочей камере производится «условным поршнем» до выравнивания давлений и вызывает повышение температуры. В результате в коллектор вытесняется газ, температура которого выше температуры газа в конце адиабатического расширения. Цикл завершается наполнением рабочей камеры газом из входного окна (0.75τ-τ).

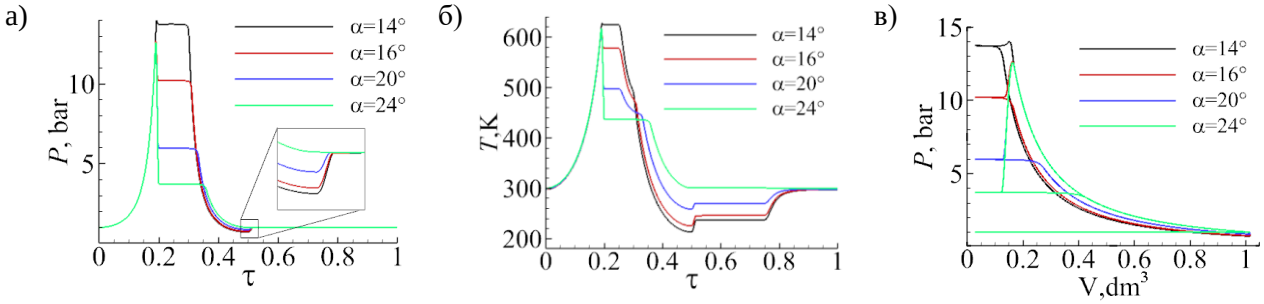


Рис. 2. Изменение давления (а) и температуры (б) в камере за цикл; PV-диаграмма (в)

Таким образом, в термодинамическом цикле холодильной РЛМ наблюдается две особенности, влияющие на его эффективность: (1) выхлоп рабочего тела в теплообменник, вызванный излишним сжатием газа, с затратой внешней работы; (2) снижение давления в рабочей камере ниже атмосферного, которое, с точки зрения холодильного цикла, оказывается бесполезным, и не приводит к уменьшению температуры на выходе охладителя. Восстановление давления до 1 бара происходит за счет работы атмосферы над газом. Стоит отметить, что подобный процесс, вызванный несоответствием давлений в контактирующих емкостях, наблюдался в РЛД с внешним подводом тепла [4].

В работе также исследовано влияние изменения угла α на процесс быстрого выхлопа и обратного затекания газа в рабочую камеру. Увеличение угла α, по сравнению с базовым вариантом, приводит к снижению давления в теплообменнике (рис. 2а). Вместе с этим, как видно из рисунка, все больше внешней работы затрачивается на адиабатическое сжатие «впустую». Уменьшение угла α приводит к тому, что работа расширения меньше компенсирует работу сжатия (адиабата расширения опускается ниже на PV-диаграмме) и внешняя работа тоже возрастает (рис. 2в). Сочетание этих факторов обуславливает немонотонный характер изменения затрачиваемой внешней работы от угла α (зеленая кривая

на рис. 3а). Для выбранных значений параметров задачи, минимальная работа достигается при несимметричном положении окон (α=18°).

Угол α определяет коэффициент объемного расширения, который равен отношению объема камеры в конце адиабатического процесса к значению объема камеры в начале. Уменьшение угла α сопровождается увеличением коэффициента объемного расширения, поэтому температура газа на выходе охладителя достигает более низких значений (рис. 2а).

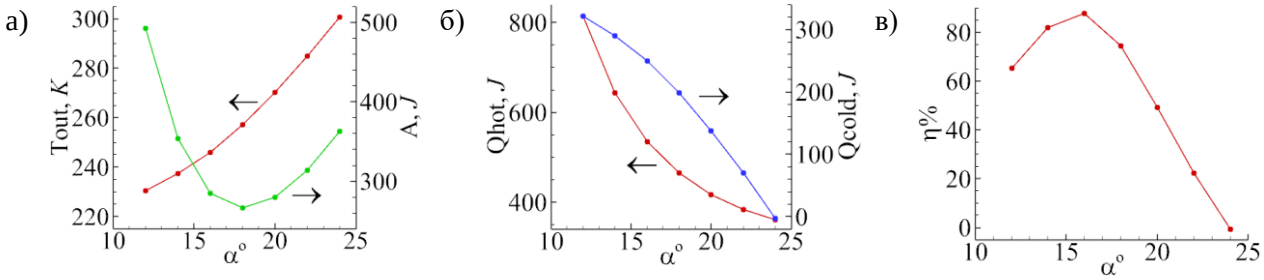


Рис. 3. Зависимость средней за цикл температуры на выходе (красный цвет) и совершаемой за цикл внешней работы (зеленый) от угла α (а); зависимость от угла α количества теплоты (красный), отданного в теплообменнике за цикл, и количества теплоты (синий), отобранного от охлаждаемого тела за цикл (б); изменение холодильного коэффициента от угла α (в)

На рис. 3б приведена зависимость от угла α количества теплоты Q_{hot}, отданного в теплообменнике за цикл, а также количества теплоты Q_{cold}, отобранного от охлаждаемого тела за цикл. Тепло Q_{cold} определяется как разность средней за цикл энтальпии на входе и выходе из холодильника. Оценка эффективности РЛМ в холодильном цикле проводилась по величине холодильного коэффициента: $\eta = (Q_{cold}/A)\cdot 100\%$, который достигает своего максимального значения при «симметричном» расположении окон (рис. 3в).

Следует указать и на другой способ устранения обратного затекания газа в рабочую камеру. Для этого необходимо подавать в РЛМ предварительно изотермически сжатый воздух. На рис. 4 приведены изменения за цикл температуры и давления в рабочей камере, при симметричном расположении окон теплообменника и давлении на входе 1.3 бар.

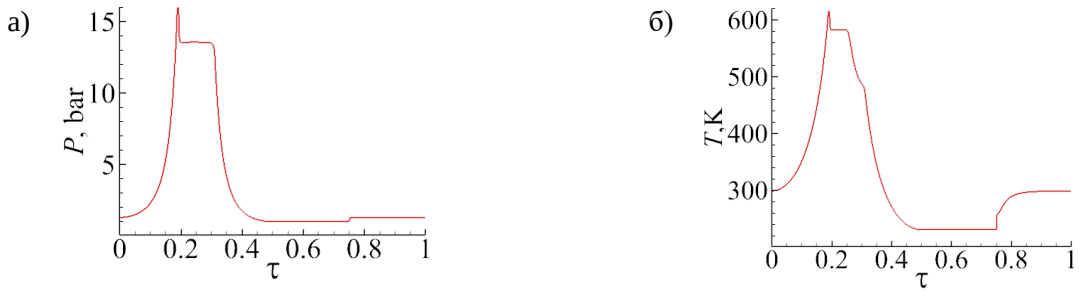


Рис. 4. Изменение давления (а) и температуры (б) в камере за цикл

В этом случае температура на выходе равна 230K. Количество теплоты, отданное за цикл в теплообменнике, составляет Q_{hot}=649 Дж, количество теплоты, отобранное за цикл от охлаждаемого тела, равно Q_{cold}=421 Дж. Холодильный коэффициент составляет η=185%.

Заключение. В работе исследован открытый холодильный цикл роторно-лопастной машины. В рамках модели узлового анализа было исследовано влияние размера окна выхода из теплообменника на холодопроизводительность. Установлено, что наибольшая энергоэффективность достигается при симметричном расположении окон теплообменника.

Изменение размера выходного окна не позволяет одновременно уравнять давление при расширении в рабочей камере с давлением в выходном коллекторе и обеспечить охлаждение

газа. В качестве альтернативы предложен способ с увеличением давления на входе. Показано, что данный подход позволяет существенно повысить эффективность цикла.

ЛИТЕРАТУРА

1. Гринев Д. В. Конструктивные схемы и принцип работы роторно-лопастных машин // Вестник ПсковГУ. Сер. Экономические и технические науки. – 2014. – С. 142 -150.
2. Булович С. В., Коекин В. Ю. Роторно-лопастная машина в производстве холода // Журнал технической физики (поступила в редакцию).
3. Коекин В. Ю., Булович С. В. Математическое моделирование методом узлового анализа теплофизических процессов в роторно-лопастном двигателе с внешним подводом тепла // Научно-технические ведомости СПбГПУ. Физико-математические науки. – 2023. – Т. 16. № 3. – С. 49–58.
4. Коекин В. Ю., Булович С. В. Математическое моделирование в двумерной постановке термогазодинамических процессов в роторно-лопастном двигателе с внешним подводом тепла // Научно-технические ведомости СПбГПУ. Физико-математические науки. – 2024. – Т. 17. № 4. – С. 20-33.

УДК 621.486

Л.Д. Кондратьев[1], С.В. Булович[1,2]
[1]Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого(*)
[2]Физико-технический институт имени А.Ф.Иоффе, Санкт- Петербург

МОДЕЛИРОВАНИЕ ТЕРМОГАЗОДИНАМИЧЕСКИХ ПРОЦЕССОВ В СЕГМЕНТЕ ТЕПЛОВОГО БЛОКА АКУСТИЧЕСКОГО ДВИГАТЕЛЯ СТИРЛИНГА

Введение. Акустический двигатель Стирлинга представляет собой устройство, преобразующее тепловую энергию в механическую энергию вследствие акустического колебания рабочего тела. В отличие от двигателя внутреннего сгорания, тепло в таком двигателе подводится и отводится извне, что делает его перспективными для использования в различных энергетических системах [1].

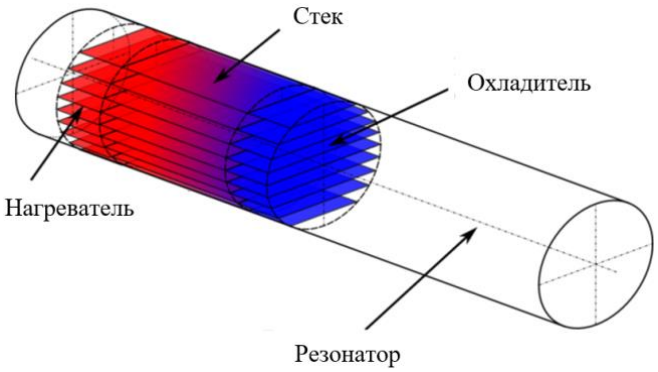


Рис. 1. Схема акустического двигателя

Конструкция акустического двигателя Стирлинга на стоячей волне предполагает линейную схему расположения теплообменных элементов, находящихся в замкнутом объеме – резонаторе (рис.1). При осциллирующем движении газового столба в окрестности твердой поверхности значения трения и теплового потока на стенке отстают по фазе от изменения соответствующих определяющих функций скорости и температуры в ядре потока. Этот эффект приводит к возникновению положительной обратной связи, когда возникшие в резонаторе собственные колебания газового столба усиливаются за счет интенсификации

(*) Л.Д. Кондратьев, korhonenleon@yandex.ru

теплообмена на теплообменных элементах [2]. Акустические колебания, частота и моды которых определяются размером и формой резонатора, можно еще в большей степени усилить при помощи стека, по аналогии с регенератором, который применяется в различных конструкциях поршневых двигателей Стирлинга. Усиление преобразования тепловой энергии в акустические колебания происходят в области стека, представляющим из себя набор тонких пластин или пористую структуру, обеспечивающую эффективный теплообмен между газом и материалом стека. Для создания и поддержания градиента температуры в стеке, необходимого для усиления колебаний, по обе стороны стека располагают нагревательные и охладительные элементы. В свою очередь, интенсивные акустические колебания газового столба преобразуются в электрическую энергию с помощью линейного генератора.

Постановка задачи. Математическое моделирование состояния термодинамических функций в акустическом двигателе Стирлинга на установившемся режиме течения газа проводилось в рамках полной системы уравнений Навье-Стокса в двухмерной постановке. Система уравнений, описывающая процессы, происходящие с рабочим телом, состоит из уравнений сохранения массы, импульса и энергии. Обозначение функций и операторов дифференцирования общепринятое.

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \left(\rho \vec{V} \right) = 0, \\ \dfrac{\partial \rho \vec{V}}{\partial t} + \nabla \cdot \left(\rho \vec{V} \cdot \vec{V} \right) = -\nabla p + \nabla \cdot \tau, \\ \rho C_p \left(\dfrac{\partial T}{\partial t} + \left(\nabla \cdot \vec{V} \right) T \right) = \nabla \cdot \left(\lambda \nabla T \right). \end{cases} \quad (1)$$

Для определения значения температуры в материале регенератора решается нестационарное уравнение теплопроводности

$$\rho_s C_s \frac{\partial T_s}{\partial t} = \nabla \left(\lambda_s \nabla T_s \right). \quad (2)$$

Численное интегрирование системы дифференциальных уравнений (1) и (2) проводилось в пакете программ Ansys Fluent 2024 R2. Для аппроксимации конвективных потоков был использован оператор третьего порядка точности QUICK, аппроксимация нестационарных слагаемых проведена со вторым порядком точности.

В работе рассмотрена упрощенная схема двигателя, состоящая из нагревателя, охладителя, регенератора и акустического резонатора. Поскольку конструкция двигателя относительно оси резонатора в поперечном направлении состоит из множества повторяющихся элементов, можно выделить сегмент, который ограничен половиной канала, занятого газом, и половиной области, занятой типовыми элементами нагревателя, охладителя или стека. На введенных линиях, разрезающих конструкцию акустического двигателя Стирлинга вдоль, было поставлено условие симметрии. Форма расчетной области, с указанием геометрических размеров, представлена на рис. 2.

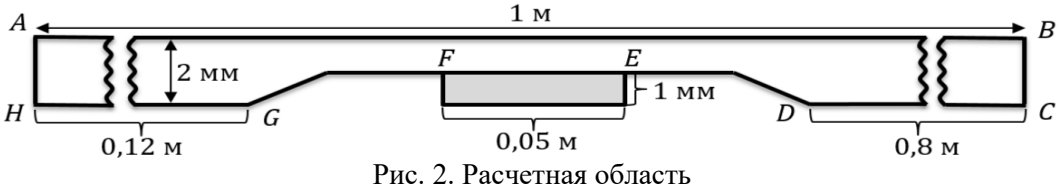


Рис. 2. Расчетная область

В начальный момент времени температура во всей расчетной области полагалась равной температуре охладителя $T = 300\ K$, давление в канале $P = 10^6\ Па$. Температура нагревателя

$T = 800\,K$. На границах AB, BC, CD, GH, HA задано условие симметрии. FG и ED – горячая и холодная стенки соответственно. За исключением участка FE, по границе пластины, поставлено условие тепловой изоляции. FE – поверхность стека, с граничным условием 4-го рода (условие сопряженного теплообмена). Условие прилипания использовано на участках контакта газа с поверхностями теплообменных аппаратов и стеком *GFED*. Рабочий газ – воздух. Материал стека – алюминий.

Результаты моделирования. Расчеты показали, что через 17 секунд с момента запуска достигается режим течения газа, близкий к установившемуся. Приводимые и обсуждаемые далее результаты моделирования относятся к этому режиму.

Средняя за цикл температура газа вдоль теплообменного блока уменьшается от нагревателя к охладителю. Среднее значение температуры стека приблизительно равно полусумме значений температур нагревателя и охладителя. Вдоль стека устанавливается почти линейное изменение температуры, «наклон линии» определяется коэффициентом теплопроводности материала стека.

На рис. 3 представлены зависимости температуры газа от продольной координаты на оси симметрии в характерные фазы цикла. При этом циклическое изменение температуры поверхности стека незначительно.

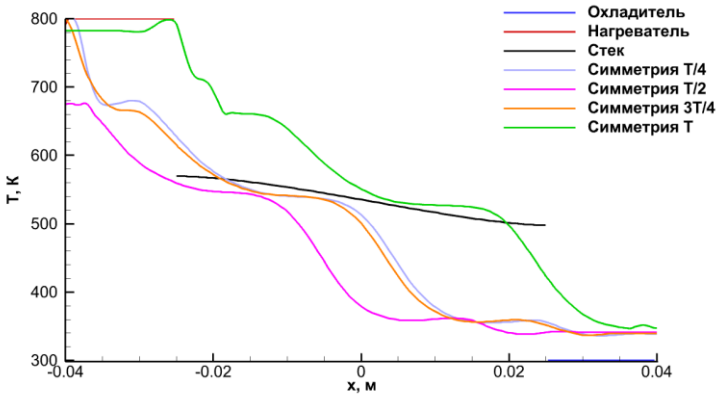


Рис. 3. Распределения температуры в газе на оси симметрии и на твердых поверхностях стека и теплообменниках в разные фазы цикла

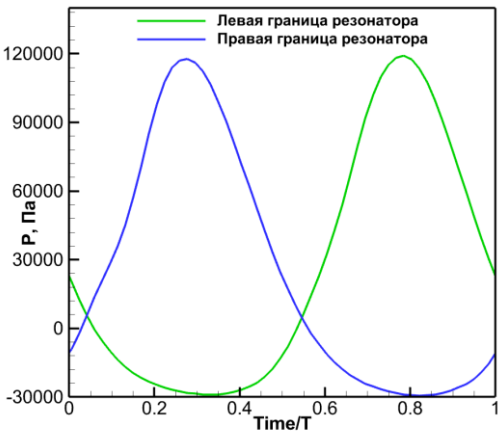


Рис. 4. Колебание давления на правой и левой границах расчетной области

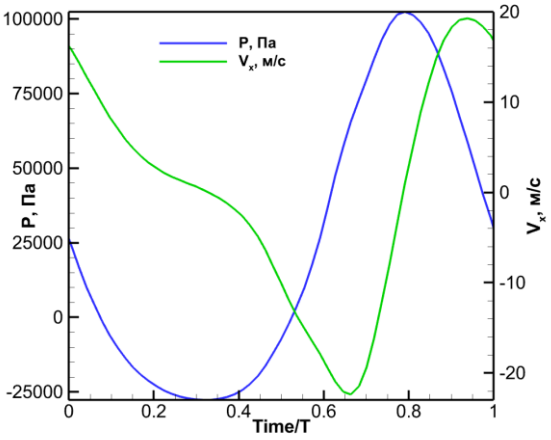


Рис. 5. Колебание давления и продольной компоненты скорости в сечении $x = 0$

Изменение термодинамических функций в точках мониторинга за один период колебаний характеризуется следующим. Собственная частота колебания газового столба составляет приблизительно 181 Гц. Амплитуду колебания давления на обоих концах расчетной области оценивается величиной 70 КПа. Колебания давления на торцевых поверхностях резонатора имеют сдвиг по фазе $\approx 180^0$, что характерно для стоячей волны (рис. 4). Здесь значение давления приведено как величина отклонения от начального состояния. Амплитуда колебаний продольной компоненты вектора скорости в сечении $x = 0$ (середина стека) составила 20 м/с. Колебания скорости и давления в сечении $x = 0$ сдвинуты по фазе более чем на 90^0, следовательно, происходит накопление энергии в акустическом поле (рис. 5).

Полученные данные о поведении термодинамических функций в области теплообменного аппарата позволяют определить детальную структуру поля температуры и поля скорости, выявить закономерности их изменений в зависимости от определяющих параметров задачи.

ЛИТЕРАТУРА

1. Swift GW. Thermoacoustics: a unifying perspective for some engines and refrigerators. – New York: Acoustical Society of America through the American Institute of Physics. – 2002.
2. Булович С.В. Численное моделирование термоакустических колебаний газа в трубе с теплообменными элементами тороидальной формы // Научно-технические ведомости СПбГПУ. Физико-математические науки. – 2021. – Т. 14. № 3. – С. 36–48. DOI: 10.18721/JPM.14303

УДК 536.24

Д.Ю. Конин, А.Г. Пулин, И.Ю. Талабира, В.С. Модестов, А.А. Попович
Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого(*)

ПОВЫШЕНИЕ КОЭФФИЦИЕНТА ГЛУБИНЫ ОХЛАЖДЕНИЯ В КАНАЛАХ ЛОПАТОК ГАЗОВЫХ ТУРБИН С ПОМОЩЬЮ ТПМП РЕШЕТЧАТЫХ СТРУКТУР

Введение. Эффективное охлаждение лопаток газовых турбин является актуальной задачей ввиду высоких тепловых нагрузок. Внутренние каналы охлаждения лопатки могут быть как гладкими, так и содержать элементы турбулизации: ребра [1], штырьки [2], вихревые камеры [3], ямки [4], выпуклости [5] и др. Эти элементы создают вихревое течение охлаждающего потока и, как следствие, увеличивают коэффициент теплоотдачи. Все указанные решения допускают различные конструктивные исполнения.

Интенсификация теплообмена остается актуальной задачей как в прикладной, так и в фундаментальной областях. В данной работе предлагается рассмотреть задачу интенсификации теплообмена в лопатках через призму биомиметических технологий. Природные теплообменные структуры, обладающие микро- и макромасштабной организацией, демонстрируют высокую эффективность терморегуляции. Например, структуры крыльев бабочек [6] и экзоскелетов жуков-долгоносиков [7] топологически соотносятся с решетками на основе трижды периодических минимальных поверхностей (ТПМП).

Как показано в работе Kirttayoth Yeranee и др. [8], замена штырьковых вставок в каналах охлаждения лопатки на ТПМП-структуру типа «даймонд» улучшает теплотехнические характеристики и снижает термические напряжения. В настоящем исследовании

(*) Д.Ю. Конин, konin_dyu@spbstu.ru

анализируется теплообмен в канале круглого сечения, имитирующего фрагмент системы охлаждения лопатки. Рассмотрено два случая: с ТПМП решеткой типа «гироид» и без нее.

Постановка задачи. В данном исследовании используется упрощенная модель, представляющая собой цилиндрический канал, имитирующий канал системы охлаждения рабочей лопатки газовой турбины. Схемы расчетных моделей представлены на рис. 1.

Внутренний диаметр канала составляет 30 мм, что соответствует типовым размерам каналов охлаждения лопаток, длина участка с решеткой — 50 мм. Внутри канала течет охладитель – воздух, снаружи моделируется нагрев от газа. Для интенсификации теплоотвода в центральной части канала размещена решетчатая структура, построенная на основе ТПМП решетки типа «гироид» с размером периодичности 30 мм и толщиной стенки 1.5 мм. Поскольку перед и после решетки возникают значительные неравномерности потока, было добавлено по участку гладкого канала до и после решетки: для стабилизации течения и корректного осреднения параметров. Общая длина канала составила 150 мм.

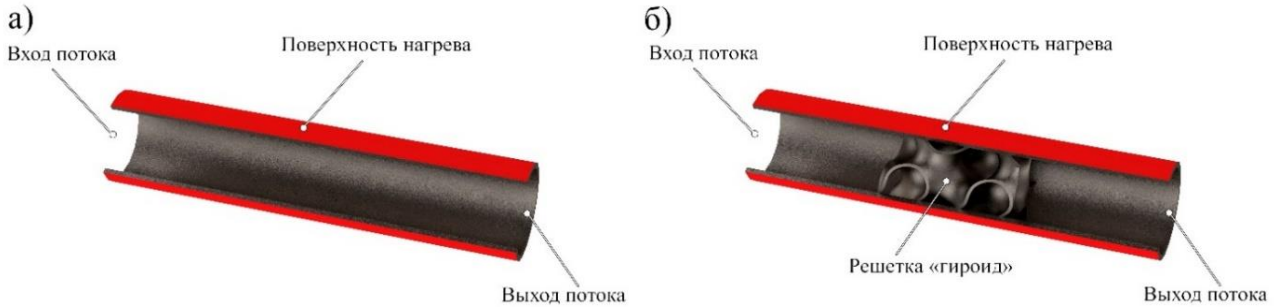


Рис. 1. Схема расчетной модели а) “гладкая труба”; б) “труба с ТПМП”

Расчетная сетка для проведения вычислений методом конечных объемов в пакете ANSYS CFX была построена с локальным сгущением у стенок для аккуратного описания пограничного слоя. Сеточная независимость решения была подтверждена.

В ANSYS CFX были созданы два домена: твердое тело (конструкционная сталь) и охладитель – воздух. На внешнюю поверхность канала наложено граничное условие нагрева, а взаимодействие между доменами реализовано через интерфейсы, обеспечивающие теплоперенос. Для моделирования турбулентности применена двухпараметрическая модель SST k–ω с учетом сжимаемости и включенной функцией SST Curvature Correction. Уравнения теплопереноса решались с использованием модели Total Energy для воздушной среды и Thermal Energy для твердого тела. Сопряжение расчетных сеток обеспечивалось через интерфейс General Grid Interface (GGI) с активной функцией переноса теплоты. Физико-технические параметры, использованные в расчете, приведены в табл. 1.

Табл. 1. Граничные условия расчета

Параметр	Единица измерения	Значение
Скорость охладителя на входе	м/с	1-9
Температура охладителя на входе	°C	200
Температура нагревателя на стенке	°C	1000
Давление на выходе	атм.	1

Результаты расчетов. Были проведены расчеты течения в гладком модельном канале системы охлаждения, а также в канале охлаждения с гироидной ТПМП решетчатой структурой, получены значения числа Нуссельта, безразмерного коэффициента глубины охлаждения, а также значения потерь давления в канале в зависимости от числа Рейнольдса. Расчеты проведены для разных чисел Рейнольдса. Эпюры температур представлены на рис. 2.

После получения результатов произдена их обработка и анализ. Основные оцениваемые параметры: числа Нуссельта и их отношение для “оребренного” и гладкого каналов, минимальное и максимальное значение глубины охлаждения и коэффициенты местных потерь давления. На рис. 3 представлены графики полученных параметров в зависимости от числа Рейнольдса.

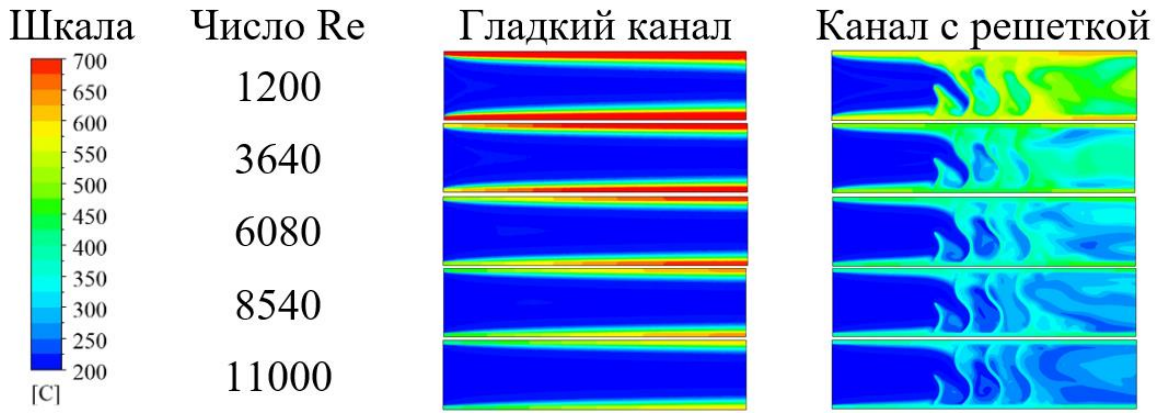


Рис. 2. Результаты расчета (эпюры температур)

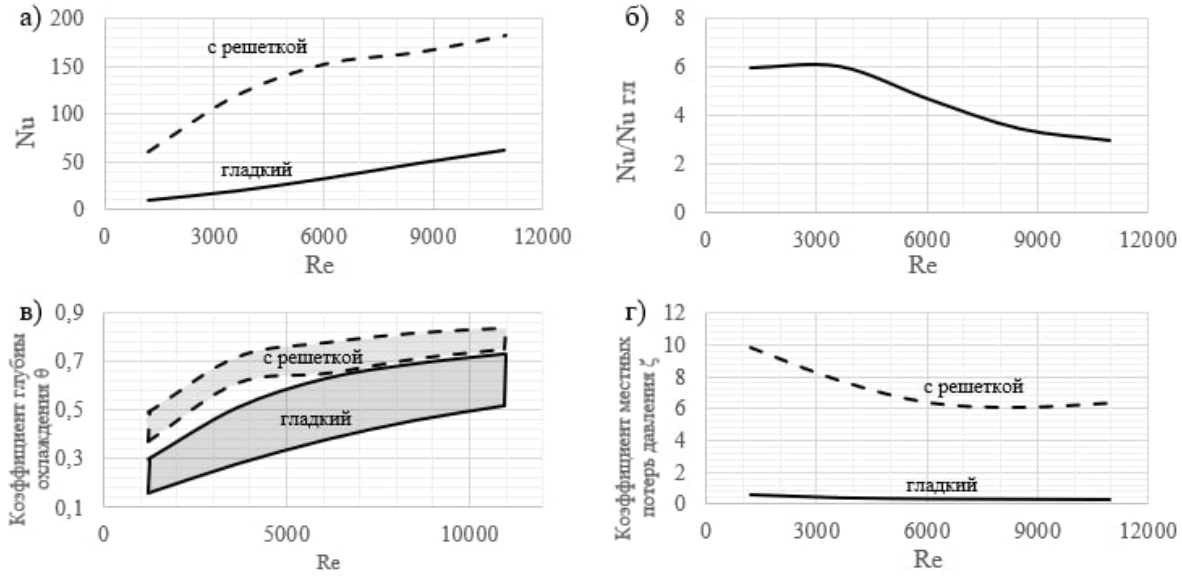


Рис. 3. Графики зависимости от числа Рейнольдса а) числа Нуссельта; б) отношения $\frac{Nu}{Nu_{гл}}$; в) безразмерного коэффициента охлаждения; г) коэффициента местных потерь давления

Заключение. Решетка «гироид» увеличивает число Нуссельта до 6 раз в сравнении с гладким каналом. Установлено, что применение решетки с ТПМП приводит к увеличению безразмерного коэффициента охлаждения в среднем на 50 % по сравнению с гладким каналом, а минимальный коэффициент охлаждения с решеткой больше, чем максимальный коэффициент охлаждения гладкого канала. Однако коэффициент местных потерь давления в случае применения решетчатой структуры более чем в 10 раз превышает значение для гладкого канала.

Увеличение осредненного безразмерного коэффициента охлаждения на 50% подтверждает перспективность использование решетки «гироид» в системе охлаждения лопатки. Увеличение гидравлических потерь в 10 раз негативно сказывается на применимости данной решетки. Стоит обратить внимание, что коэффициент гидравлического сопротивления

определяет расход охлаждающего воздуха, проходимый через систему охлаждения лопатки. Это означает, что в сравнении с гладким каналом расход уменьшается, что отражается на эффективности системы охлаждения. Однако важно подчеркнуть, что данная система охлаждения может показывать бóльшие значения эффективности, при меньшем расходе в сравнении с классическим каналом.

Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства науки и высшего образования Российской Федерации (договор № 075-15-2024-562 от 25 апреля 2024 г.).

ЛИТЕРАТУРА

1. Gajghate S.S., Deshpande O.P., Desai A.U., Deshmukh A.D., Kharade S.U., Pal S., Cardoso E.M., Saha B.B., Bhaumik S. Effect of Ribs Configurations on Heat Transfer Enhancement for W-Shaped Ribs in a Square Duct // Arab J Sci Eng. – 2023. – Vol. 48, – № 9.
2. Sun R., Hua J., Zhang X., Zhao X., Experimental study on the effect of shape on the boiling flow and heat transfer characteristics of different pin-fin microchannels // Heat and Mass Transfer. Springer. – 2021. – Vol. 57, – № 12. – P. 2081–2095.
3. Bruschewski M., Grundmann S., Schiffer H.P. Considerations for the design of swirl chambers for the cyclone cooling of turbine blades and for other applications with high swirl intensity // Int J Heat Fluid Flow. – 2020. – Vol. 86.
4. Neil Jordan C., Wright L.M. Heat Transfer Enhancement in a Rectangular (AR = 3:1) Channel With V-Shaped Dimples // J Turbomach. – 2012. – Vol. 135, – № 1.
5. Murata A., Nishida S., Saito H., Iwamoto K., Okita Y., Nakamata C. Heat transfer enhancement due to combination of dimples, protrusions, and ribs in narrow internal passage of gas turbine blade // Proceedings of the ASME Turbo Expo. – 2011. – Vol. 5, – № PARTS A AND B
6. Gan Z., Turner M.D., Gu M. Biomimetic gyroid nanostructures exceeding their natural origins // Sci Adv. American Association for the Advancement of Science. – 2016. – Vol. 2, – № 5. – P. e1600084.
7. Han L., Che S. An overview of materials with triply periodic minimal surfaces and related geometry: from biological structures to self-assembled systems // Advanced Materials. Wiley Online Library. – 2018. – Vol. 30, – № 17. – P. 1705708.
8. Yeranee K. et al. Turbulent Flow Heat Transfer and Thermal Stress Improvement of Gas Turbine Blade Trailing Edge Cooling with Diamond-Type TPMS Structure // Aerospace. MDPI. – 2023. – Vol. 11, – № 1. – P. 37.

УДК 532.517

Т.С. Корскова, М.А. Засимова
Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого(*)

ЧИСЛЕННОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ ТЕЧЕНИЯ В ВЕНТИЛИРУЕМОМ ПРОСТРАНСТВЕ ПРИ СТАЦИОНАРНОЙ ПОДАЧЕ ПРИТОЧНОЙ СТРУИ И НЕСТАЦИОНАРНОЙ, ОРГАНИЗОВАННОЙ ЗА СЧЕТ ИСПОЛЬЗОВАНИЯ ОСЦИЛЛЯТОРА

Введение. Системы вентиляции предназначены для обеспечения комфортной среды внутри ограниченных пространств, они обеспечивают перемешивание воздуха путем подачи воздушной среды в вентилируемое пространство и поддерживают заданные параметры температуры и вредных примесей. Подача воздуха в вентилируемые пространства обычно осуществляется через диффузоры с постоянным, не изменяющимся со временем, расходом приточного воздуха. Такие системы могут приводить к формированию застойных зон, в которых параметры воздушной среды слабо контролируются. Для интенсификации процесса перемешивания воздушной среды можно организовать систему с вынужденной генерацией колебаний расхода приточного воздуха. В работе [1] предложено организовать подачу воздуха

(*) Т.С. Корскова, korskova.tatyana@yandex.ru

в тестовое вентилируемое пространство через осциллятор с упрощенной геометрией. В осцилляторе формировались автоколебания приточного расхода и периодическое изменение направления подачи струи. В настоящей работе проведено сопоставление параметров течения и теплообмена для задач с постоянным расходом приточного воздуха (стационарная подача приточного воздуха) и переменным (нестационарная подача приточного воздуха), который формируется при использовании осциллятора.

Постановка задачи. Моделирование течения и теплообмена выполнено в 3D постановке. Воздух поступает в тестовое помещение (рис. 1а) через щелевое отверстие высоты d = 0.04 м, расположенное в центре вертикальной торцевой стенки. Вблизи пола на этой торцевой стенке расположено выходное щелевое отверстие высоты 5d. Внутри помещения располагается нагретый объект кубической формы, размер которого равен 5d.

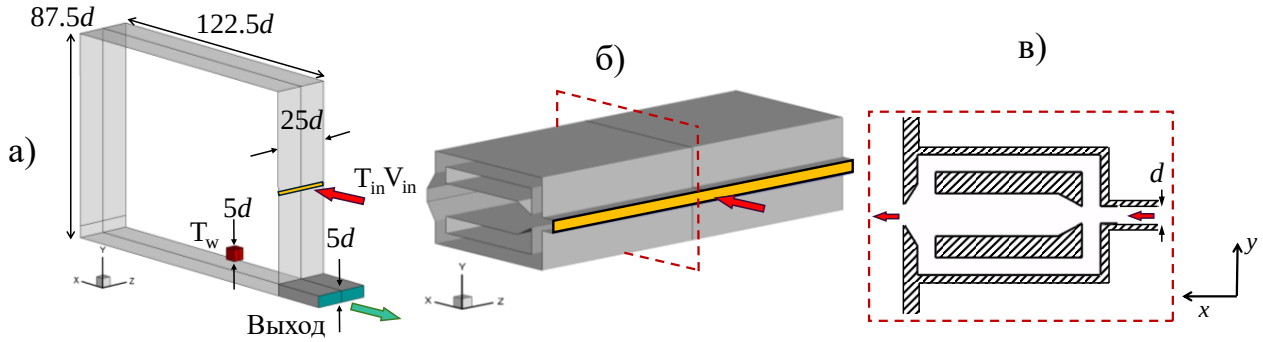


Рис. 1. а) Геометрия вентилируемого помещения; геометрия осциллятора: б) изометрический вид и в) вид в плоскости, перпендикулярной оси z

Рассмотрены две постановки задачи. В первой постановке #1 воздух подается стационарно через приточное щелевое отверстие, высота которого равна d (отмечено на рис. 1а желтым цветом). Во второй постановке #2 воздух подается стационарно через осциллятор, геометрические характеристики которого взяты в соответствии с [1] и показаны на рис. 1б и 1в. Размеры входного и выходного отверстия осциллятора совпадают и равны d.

Воздух рассматривался как несжимаемая среда. Значения входной скорости V_{in} варьировались от 2 до 16 м/с, соответствующие им значения чисел Рейнольдса $Re = dV_{in}/\nu$ находятся в диапазоне $(5…50)\times10^3$. Значения объемного расхода $Q = 25d\times dV_{in}$, соответственно варьировались 0.08…0.64 м^3/с. Решалась задача установления течения в помещении: в начальный момент времени температура окружающей среды задавалась равной T_0 = 309 K, температура охлаждающей приточной струи была задана равной T_{in} = 293 K. Температура на поверхности нагретого объекта поддерживалась равной $T_w = T_0$.

Использовались построенные в пакете ICEM CFD квазиструктурированные сетки, число ячеек которых составило 7.5 млн, при этом сетка в осцилляторе состоит из 1.8 млн ячеек. Расчеты выполнены на основе URANS подхода с использованием модели k-ω *SST*. Шаг по времени задавался равным 3×10^{-3} с. Расчеты проведены в пакете ANSYS Fluent с использованием ресурсов СКЦ «Политехнический». В работе показано, что решение обладает малой чувствительностью к используемой расчетной сетке и выбранному шагу по времени.

Течение в осцилляторе. При движении воздуха через осциллятор, как и в работе [1], формируется нестационарное течение с периодом T_p. На рис. 2а и 2б показана картина течения в осцилляторе при $Re = 5.3\times10^3$ (V_{in} = 4 м/с) в три момента времени, когда осуществляется прилипание приточной струи к нижней (t = 0) и верхней ($t = 0.4T_p$) стенке смесительного канала, а также промежуточный момент времени ($t = 0.2T_p$). При прилипании струи к стенке смесительного канала (моменты времени t = 0 и $t = 0.2T_p$) в соответствующем (ближнем)

канале обратной связи характерные значения давления начинают увеличиваться, что вызывает отклонение струи в смесительном канале к другой стенке ($t = 0.4T_p$). Нестационарный режим течения в осцилляторе формирует нестационарное изменение расхода на приточном отверстии в помещение.

Период колебаний в осцилляторе зависит от скорости подачи струи. Для представленного на рис. 2а и 2б варианта задачи (V_{in} = 4 м/с) период колебаний T_p составил 2.05 с. При увеличении приточного расхода наблюдается линейное увеличение частоты колебаний f_p и гиперболическое уменьшение периода T_p (рис. 2в). В рассмотренном диапазоне изменения числа Рейнольдса Re число Струхаля $Sh = df_p/V_{in}$ изменяется слабо - от 4.2×10^{-3} до 5.0×10^{-3}.

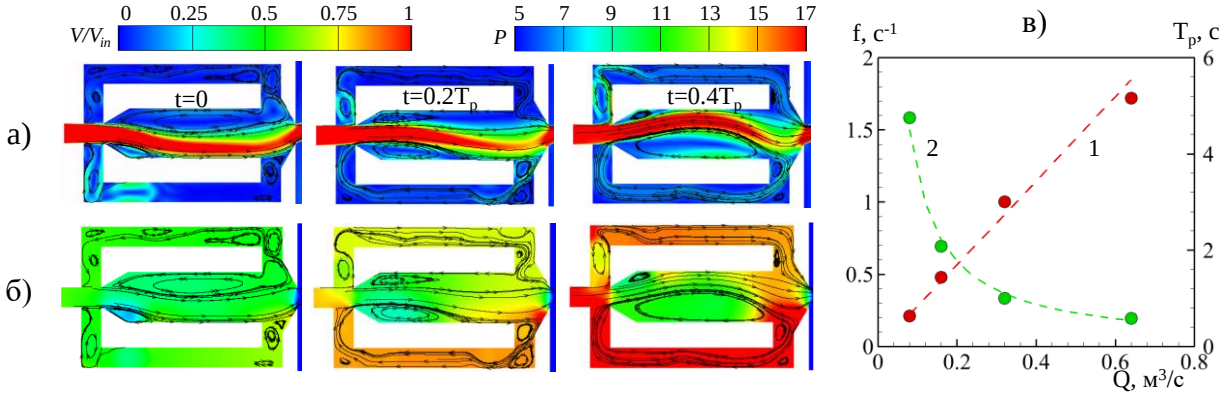


Рис. 2. а) Поля скорости и б) поля давления в осцилляторе в три момента времени при $Re = 5.3\times10^3$; в) зависимость частоты f_p (1) и периода T_p колебаний (2) от расхода Q

Течение в помещении. Проведен сравнительный анализ параметров течения и теплообмена для стационарного (постановка #1) и нестационарного (постановка #2) режимов подачи приточного воздуха. На рис. 3а показаны картины течения в помещении. Обе постановки формируют крупномасштабную рециркуляционную область с повышенными значениями скорости, локализованную вблизи выходного отверстия, которая охватывает около четверти объема помещения. Протяженность этой области составила 50d и 55d вдоль оси x для постановок #1 и #2 соответственно. В остальной части помещения формируется вторичное течение с пониженными значениями скорости. Можно отметить, что при нестационарной подаче (постановка #2) струя максимально отклоняется от оси распространения на 5d.

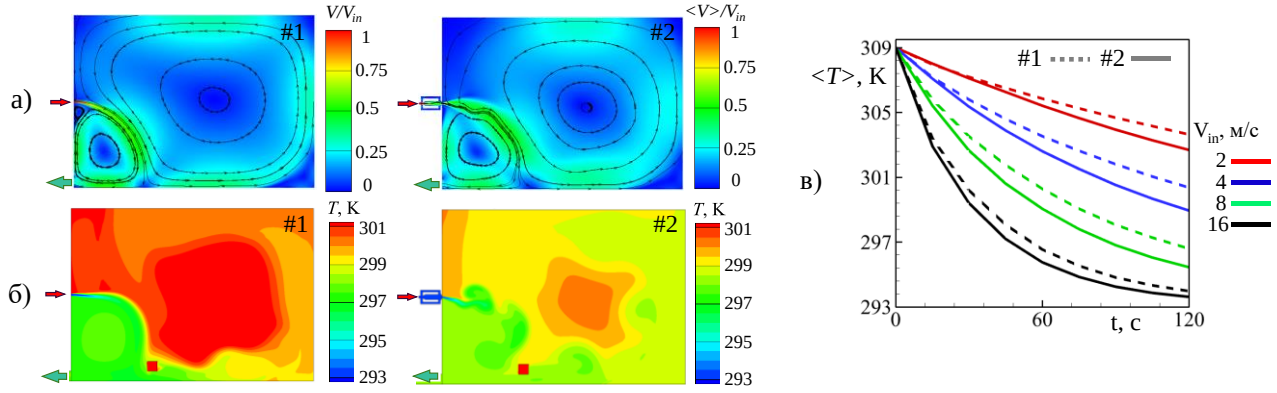


Рис. 3. а) Поле скорости в постановке #1 и #2; б) поле температуры в помещении для постановок #1 и #2 в момент времени t = 120 с ($Re = 5.3\times10^3$); в) изменение средней температуры в объеме помещения с течением времени для двух постановок #1 и #2

На рис. 3б показаны поля температуры в момент времени, когда средняя температура в помещении уменьшилась примерно в два раза. В случае стационарной подачи формируются две локальные зоны с пониженными и повышенными значениями температуры, отделенные границей распространения струи. В случае нестационарного режима происходит более интенсивное перемешивание потока и обеспечивается равномерное пространственное распределение температуры на всем протяжении процесса установления. Максимальные различия в характеристиках теплообмена наиболее заметны в начальный период времени, когда температурные градиенты максимальны.

Изменение средней температуры воздуха в объеме помещения $\langle T \rangle$ во времени представлено на рис. 3в. Показано, что нестационарная подача воздуха приводит к более быстрому охлаждению вентилируемого пространства по сравнению со стационарным случаем. Процесс выравнивания температуры при использовании осциллятора происходит быстрее за счет существенно однородного и интенсивного перемешивания, вызванного периодическим изменением направления струи, охватывающим большую часть помещения.

Работа выполнена при поддержке гранта РНФ (№ 24-19-00437).

ЛИТЕРАТУРА

1. Liang B., Wang H. A preliminary research on the periodic characteristics of a ventilation system with fluid oscillator // E3S Web of Conferences. – 2022. – Vol. 356. – 01068. 4 p.

УДК 536.25

Д.Ю. Кучиев, А.А. Смирновский
Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого(*)

ОЦЕНКА ПРИМЕНИМОСТИ РАЗЛИЧНЫХ RANS МОДЕЛЕЙ К РАСЧЕТУ СВОБОДНОЙ КОНВЕКЦИИ В СЛОЕ С ОБЪЕМНЫМ ТЕПЛОВЫДЕЛЕНИЕМ

Введение. Радиационно-генерируемая конвекция (РГК), возникающая в бореальных озерах в конце зимы — начале весны, представляет собой важный физический процесс, вызванный проникновением солнечной радиации под лед и ее неравномерным поглощением [1, 2]. Особенности плотности воды при температурах, близких к 0 °C, способствуют формированию конвективных движений, оказывающих влияние на температурный режим озера и его экосистему.

Для изучения РГК в условиях, когда проведение полевых наблюдений затруднено, активно применяются методы численного моделирования, преимущественно вихреразрешающие подходы LES и методы прямого численного моделирования DNS.

Настоящая работа посвящена численному моделированию РГК с использованием RANS моделей турбулентности в модельной постановке задачи свободной конвекции в полости с объемным источником тепла и охлаждаемыми стенками; постановка задачи соответствует [3], где представлены результаты прямого численного моделирования. Такая конфигурация близка к условиям подледной конвекции и удобна для тестирования моделей турбулентности.

Постановка задачи. Рассматривается модельная задача о свободной конвекции в прямоугольной области размером $L \times L \times H$, где $L = 1.5$, $H = 1$, с равномерным объемным тепловыделением и охлаждаемыми стенками. На рис. 1 представлена схема расчетной области. Движение жидкости описывается безразмерными уравнениями Навье-Стокса в приближении Буссинеска. Исследуются режимы течения при различных значениях числа Рэлея ($Ra = 10^6$; 10^8; 10^{10}).

(*) Д.Ю. Кучиев, kuchiev.dyu@edu.spbstu.ru

Моделирование проводилось с использованием пакета Open-FOAM v11. В качестве моделей турбулентности сравнивались *k*-ω SST модель, модель рейнольдсовых напряжений LRR и модель SA.

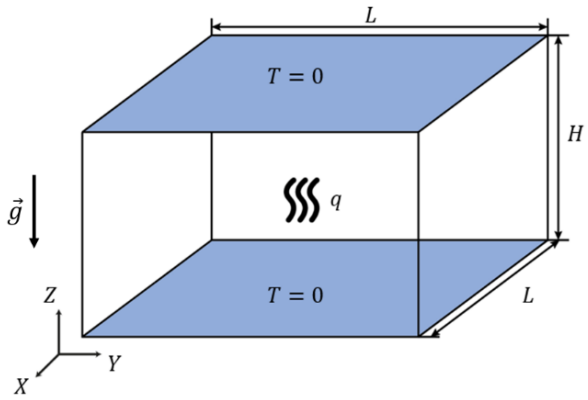


Рис. 1. Общий вид расчетной области

Анализ результатов. На рис. 2 представлены профили осредненной температуры вдоль вертикальной линии, проходящей через центр расчетной области. Осреднение производилось как по времени, так и по пространству, а именно по плоскостям параллельным верхней и нижней стенкам. Результаты численного моделирования сравниваются с данными из работы [3]. Для числа Рэлея 10^{10} также было проведено сопоставление с Implicit LES расчетом, проведенным с использованием кода SINF/Flag-S [4].

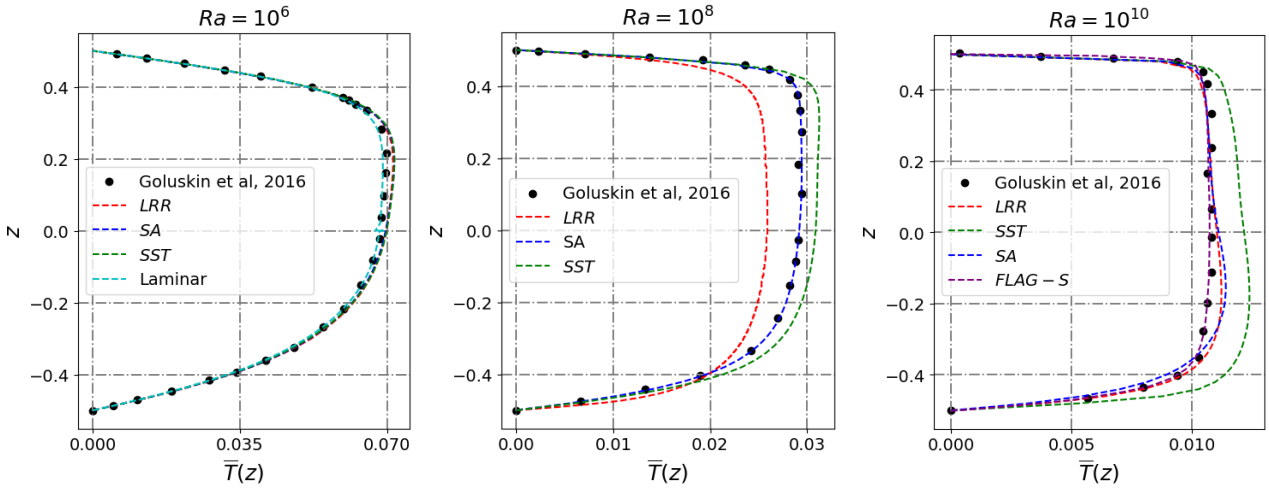


Рис. 2. Профили температуры вдоль вертикальной линии

Для числа Ra = 10^6 наблюдается совпадение профилей температуры, причем модели SST и SA практически не генерируют турбулентную вязкость (профиль, обозначенный как Laminar, получен в расчете без использования модели турбулентности). В целом, течение при Ra = 10^6 довольно упорядочено и характеризуется наличием крупных вихревых структур, аналогичных таковым в классической задаче Рэлея-Бенара в обогреваемой снизу полости. При увеличении числа Рэлея увеличивается отличие между RANS расчетами и DNS расчетом (отметим, что модель SA по-прежнему не дает сколько-нибудь значимый уровень турбулентной вязкости). В случае использования моделей SST и LRR генерируется излишняя турбулентная вязкость, которая для модели LRR приводит к увеличению теплового потока на стенках. Стоит отметить,

что при Ra = 10^{10} модель рейнольдсовых напряжений и модель SA показывают неплохую согласованность с эталонным расчетом.

Для количественного сопоставления при Ra = 10^{10} были также рассчитаны тепловые потоки на нижней стенке, обезразмеренные на величину объемного тепловыделения. Данные расчета и сравнение с данными из [3] представлены в табл. 1. Видно, что наименьшее отклонение от эталонного расчета приходится на модель турбулентности LRR, другие модели дают большее отличие.

Табл. 1. Безразмерный тепловой поток на нижней стенке

Ra = 10^{10}	**LRR**	**SA**	**SST**	**FLAG-S**	**[3]**
F_b	0.229	0.186	0.284	0.218	0.230
δF_b,%	0.4	19.2	23.5	5.0	

Также было проведено исследование влияния числа Прандтля при фиксированном числе Рэлея Ra=10^8 на безразмерный тепловой поток (рис. 3) в случае использования модели LRR. Отметим наличие количественных различий с эталонным расчетом, вызванных генерацией моделью избыточной турбулентной вязкости, что наблюдалось также и для числа Рэлея Ra=10^{10}.

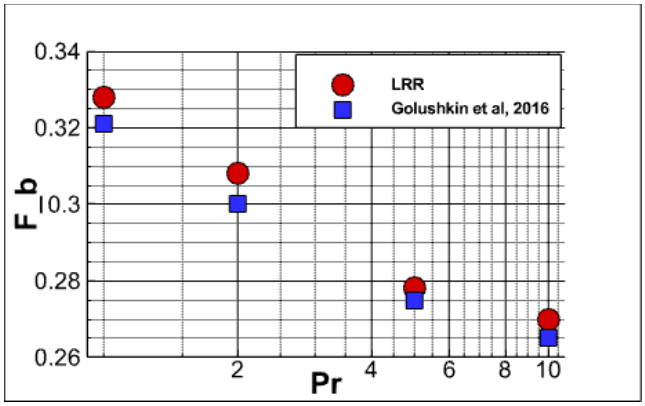


Рис. 3. График зависимости безразмерного теплового потока на нижней стенке от числа Прандтля

Выводы. Установлено, что при низких значениях числа Рэлея в системе формируются устойчивые вихревые структуры, сохраняющие свою конфигурацию во времени. При высоких значениях Ra развивается турбулентный режим течения, характеризующийся интенсивным перемешиванием и снижением температуры в центральной части области. Сравнение результатов моделирования с данными из литературы показало, что некоторые модели турбулентности из класса RANS обеспечивают удовлетворительное соответствие эталонным расчетам.

Модель рейнольдсовых напряжений (LRR) показала пониженную точность в переходных режимах, однако продемонстрировала наибольшую достоверность при высоких значениях Ra. Полученные результаты подтверждают применимость RANS моделей, включая модель LRR, для исследования процессов подледной конвекции.

ЛИТЕРАТУРА

1. Mironov D.V., Terzhevik A.Yu. Spring convection in ice-covered freshwater lakes // Izvestiya, Atmospheric and Oceanic Physics. 2000. – Vol. 36. No. 5. – P. 627–634.
2. Bouffard D., Wüest A. Convection in lakes // Annual Review of Fluid Mechanics. – 2019. Vol. – 51. No. 1. – P. 189–215.

3. Goluskin D., van der Poel E.P. Penetrative internally heated convection in two and three dimensions // Journal of Fluid Mechanics. 2016. – Vol. 791. – R6. – DOI: 10.1017/jfm.2016.69.
4. Smirnov S., Smirnovsky A., Bogdanov S. The Emergence and Identification of Large-Scale Coherent Structures in Free Convective Flows of the Rayleigh-Bénard Type // Fluids. – 2021. – Vol. 6, No. 12. – P. 431

УДК 519.6:533.6.011

Д.А. Максимов, Е.В. Колесник
Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого(*)

ПРОГРАММНАЯ РЕАЛИЗАЦИЯ РАВНОВЕСНОЙ МОДЕЛИ ВЛАЖНОГО ВОДЯНОГО ПАРА В КОДЕ SINF/FLAG-S И ЕЕ ПРИМЕНЕНИЕ ДЛЯ РАСЧЕТА ТРАНСЗВУКОВЫХ ТЕЧЕНИЙ

При численном решении задач о течении сжимаемого газа как сплошной среды для замыкания системы уравнений обычно используется модель (уравнение состояния) совершенного газа в силу простоты программной реализации. Однако данное уравнение состояния имеет существенные ограничения и может приводить не только к значительным количественным отклонениям при рассмотрении широких диапазонов температур и давлений, а также сред со сложным молекулярным строением вещества, но и к качественному неверному предсказанию параметров потока. Последнее в большинстве случаев обусловлено невозможностью описать фазовый переход, который для газа чаще всего сводится к конденсации и последующему испарению образовавшейся жидкости. Таким образом, возникает задача обеспечить возможность численного расчета с достаточно высокой точностью класса течений, предполагающего наличие указанных явлений.

Данная работа посвящена программной реализации равновесной модели конденсации влажного пара. Предполагается, что однофазное состояние соответствует пару, перегретому относительно температуры насыщения, а из равновесного приближения следует, что двухфазное состояние описывается значениями термодинамических характеристик на линии насыщения. Для пара используется вириальное уравнение состояния, взятое из [1], а конкретная форма равновесной модели конденсации заимствована из [2].

Вириальное уравнение состояние для водяного пара из [1] предполагает разложение давления по степеням плотности $p = \rho RT\,(1 + B\rho + C\rho^2)$, где p – давление, ρ – плотность, $R = 461.51$ Дж/(кг·К) – удельная газовая постоянная для воды. Преимущество такого подхода заключается в том, что коэффициенты B и C являются функциями только температуры T. При этом, учет только первых трех степеней плотности является достаточным для получения значений всех параметров газа с незначительной относительно таблиц погрешностью во всем диапазоне давлений, встречающихся в практических приложениях (в частности, в турбомашиностроении). Явные зависимости B и C от температуры определены в соответствии с экспериментальными данными. Указанные функции от T, вместе с известными из термодинамики соотношениями, дополненные эмпирической аппроксимацией для теплоемкости и необходимыми константами, позволяют получить все требуемые связи между переменными для замыкания системы.

В равновесной модели фазового перехода [2] для описания смеси пара и жидкости как гомогенной вводится степень влажности $\alpha = m''/(m' + m'')$, где m – масса, заключенная в некотором объеме, а штрихами здесь и далее обозначают параметры жидкости ($'$) и пара ($''$) соответственно. Пользуясь данным определением, можно выразить степень влажности через энтальпии смеси h и фаз, а также через плотности смеси ρ и фаз: $\alpha = (h - h'')/(h' - h'')$

(*) Д.А. Максимов, maksimov3.da@edu.spbstu.ru

= ρ′/ρ · (ρ″ – ρ)/(ρ″ – ρ′). Зависимость ρ′ на линии насыщения как функция температуры взята из [1]. Энтальпия жидкости h' определяется через энтальпию пара h'' из уравнения Клапейрона-Клаузиуса, а связь изобарных теплоемкостей жидкости C_p' и пара C_p'' получается путем дифференцирования этого уравнения. Последним необходимым соотношением является зависимость давления насыщения от температуры $p_s = p_s(T)$ [1]. Скорость звука в смеси c определяется через изохорную теплоемкость смеси C_v по известным зависимостям (см. [3]).

Для получения численного решения задач о течении водяного пара используется метод конечных объемов. Для определения области фазового перехода в каждой ячейке после итерации метода установления проверяется, превышает ли текущий уровень давление насыщения. Если это так, то по значениям параметров смеси, в соответствии с зависимостями энтальпий и плотностей фаз от температуры, находятся температура T и степень влажности α. Если указанное значение α лежит в диапазоне от 0 до 1, то имеем двухфазное состояние, иначе – однофазное.

Описанные выше модели и алгоритм были реализованы в коде SINF/Flag-S, разрабатываемом в СПбПУ. Для верификации модели равновесной конденсации были выполнены тестовые расчеты невязкого течения водяного пара в сопле Лаваля. Постановка и геометрия основаны на данных [2] (отношение высоты входного сечения к высоте критического составляет 2.5, длины сопла к высоте критического сечения – 216). Использованная расчетная область состояла из 100×10 ячеек. На входе в сопло задавались такие полные температура (T_0 = 400.95 К) и давление (p_0 = 146921.25 Па), при которых вблизи критического сечения происходил фазовый переход. На выходе осуществлялась экстраполяция всех переменных. Конвективные потоки вычислялись по схеме AUSM второго порядка точности. Решение, полученное с использованием SINF/Flag-S («SINF/Flag-S – wet steam»), в сопоставлении с данными из [2] («Ref. [2] – wet steam») приведено на рис. 1 в виде сравнения распределений температуры (для которой также показан результат, найденный для уравнения состояния совершенного газа без учета конденсации – «SINF/Flag-S – ideal gas») и степени влажности вдоль сопла.

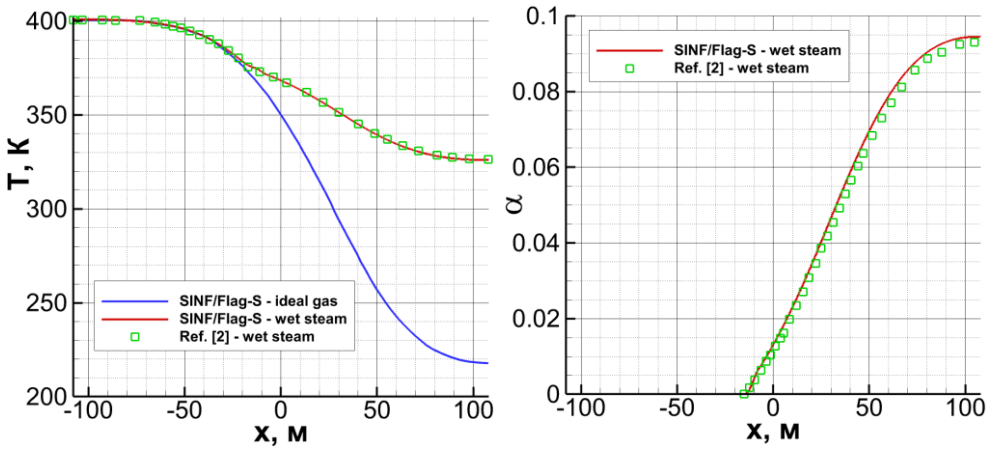


Рис. 1. Сопоставление решения, найденного с помощью SINF/Flag-S, с данными из [2]: распределения температуры (слева), распределения степени влажности (справа)

Рис. 1 свидетельствует о том, что для данной задачи модель совершенного газа абсолютно неприменима, так как она неспособна описать фазовый переход, из-за чего не может предсказать распределение температуры вдоль сопла после начала конденсации. При этом для равновесной модели имеем отличное согласие найденного решения с данными из [2]. Незначительная погрешность обусловлена различием в способах, использованных для описания термодинамических параметров фаз.

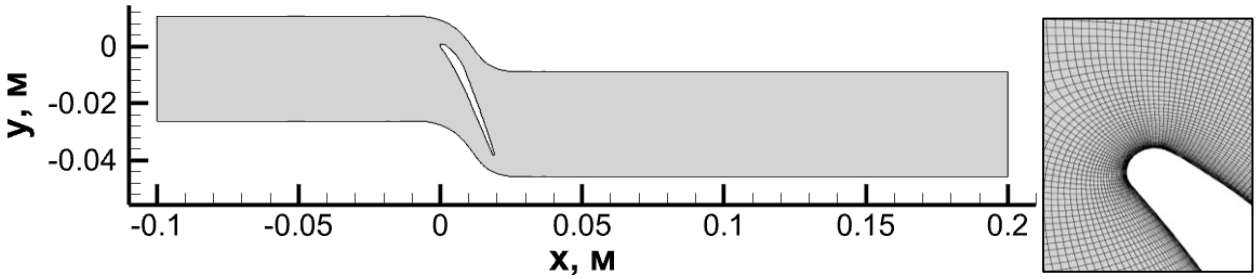


Рис. 2. Расчетная область (слева) и фрагмент расчетной сетки (справа), использованные при расчете течения водяного пара через решетку турбинных лопаток

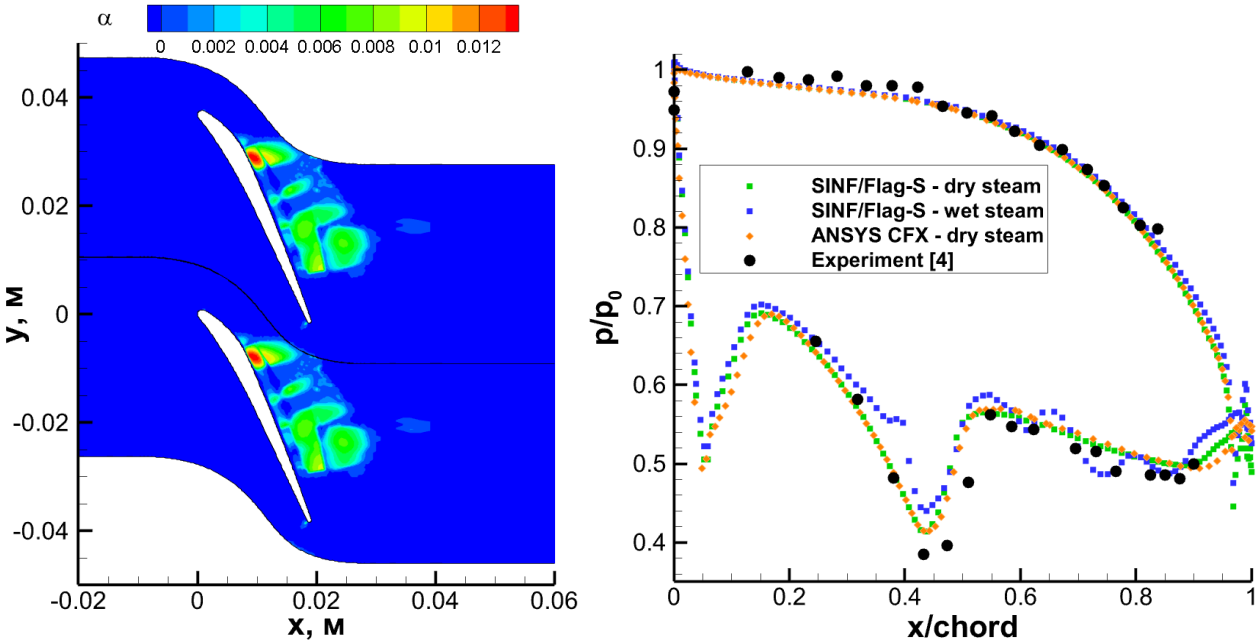


Рис. 3. Поле степени влажности для расчета по равновесной модели в коде SINF/Flag-S (слева) и распределения относительного давления по лопатке для трех расчетов в сопоставлении с экспериментом (справа)

Далее был выполнен расчет трансзвукового турбулентного течения водяного пара через решетку турбинных лопаток, постановка соответствует экспериментальному исследованию [4]. Течение описывалось осредненными по Рейнольдсу уравнениями Навье-Стокса и уравнением энергии, для замыкания применялась k-ω SST модель Ментера. Входные значения числа Рейнольдса, построенного по хорде лопатки и входной скорости, и входного числа Маха составляли $Re_{in} = 2.3 \cdot 10^5$ и $M_{in} = 0.24$. Использованная расчетная область и фрагмент расчетной сетки, состоявшей из 34750 ячеек с $y_1^+ < 1.3$, изображены на рис. 2. Граничные условия задавались следующим образом: левая граница (вход) – полные температура $T_0 = 403.3$ К и давление $p_0 = 99700$ Па, направление потока определялось углом $\beta = 128°$ между векторами скоростей и хордой профиля, интенсивность турбулентности $Tu = 5\%$, отношение турбулентной и молекулярной вязкостей $\nu_t/\nu = 10$; правая граница (выход) – статическое давление $p = 55100$ Па; верхняя и нижняя граница – периодичность; поверхность лопатки – неподвижная теплоизолированная стенка. Расчеты были выполнены с помощью SINF/Flag-S, применяя вириальное уравнение состояния без учета конденсации («dry steam») и с учетом фазового перехода по равновесной модели («wet steam»). Конвективные потоки вычислялись по схеме AUSM второго порядка точности. Помимо этого, был проведен кросс-верификационный расчет с использованием коммерческого программного пакета ANSYS CFX для пара без учета конденсации.

Полученные результаты представлены на рис. 3 в виде поля степени влажности (SINF/Flag-S, равновесная модель) и распределений относительного давления по поверхности лопатки в сопоставлении с экспериментальными данными [4]. Когда конденсация не учитывается, оба кода дают очень близкие результаты, так что кросс-верификация была проведена успешно. В случае использования равновесной модели на стороне давления получено схожее распределение, а на стороне разрежения наблюдается немонотонное распределение давления из-за возникающей конденсации. При этом получено несколько лучшее согласие с опытом для области после скачка.

ЛИТЕРАТУРА

1. Young J. B. An Equation of State for Steam for Turbomachinery and Other Flow Calculations // Journal of Engineering for Gas Turbines and Power. – 1988. – Vol. 1 (110). – P. 1–7.
2. Смирновский А.А., Смирнов Е.М. Численное моделирование трансзвуковых течений реального газа на основе уравнений Навье-Стокса: дис. на соискание ученой степени магистра. – Санкт-Петербург: СПбПУ, 2005. – 47 с.
3. Вукалович М.П., Новиков И.И. Техническая термодинамика. Москва, издательство «Энергия», 1968 г. – 496 с.
4. Bakhtar F., Ebrahimi M., Webb R. A. On the Performance of a Cascade of Turbine Rotor Tip Section Blading in Nucleating Steam: Part 1: Surface Pressure Distributions // Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part C: Journal of Mechanical Engineering Science. – 1995. – Vol. 2 (209). – P. 115–124.

УДК 532.517

Н.А. Монахов, П.А. Попов
Физико-технический институт им. А.Ф. Иоффе, Санкт-Петербург(*)

АНАЛИЗ ПРИМЕНИМОСТИ ОДНОМЕРНОГО ПОДХОДА К РАСЧЕТУ ТЕЧЕНИЯ В УДАРНОЙ ТРУБЕ С ОТРАЖАЮЩИМ СОПЛОМ

Введение. Для сопровождения современного эксперимента на ударных трубах активно используются различные газодинамические коды. Полное моделирование ударной трубы со сверхзвуковым соплом с учетом всех особенностей течения чрезвычайно затратно с вычислительной точки зрения и не позволяет в достаточной степени учесть уникальные особенности конкретной экспериментальной установки и исследуемого режима течения [1-2]. Возникает необходимость компромиссного подхода, позволяющего проанализировать основные нестационарные газодинамические процессы в ударной трубе, но не требующего при этом значительных вычислительных ресурсов. Одним из инструментов, позволяющих реализовать подобный подход, является GasDynamics Toolkit (GDTk) [3]. Входящие в его состав коды позволяют проводить одномерный расчет равновесных параметров газа за падающей и отраженной ударной волной и ускорения в сопле с учетом химических реакций, моделировать нестационарные газодинамические процессы в ударных трубах на основе квазиодномерного лагранжева подхода с приближенным учетом вязких эффектов и теплообмена, осуществлять двух- и трехмерное моделирование высокоскоростных течений с учетом физико-химических процессов при высоких температурах.

Произведен анализ применимости компонентов GDTk для оценки параметров рабочего газа за отраженной ударной волной и сверхзвукового потока в сопле в режиме сопровождения эксперимента на Большой ударной трубе ФТИ им. А.Ф. Иоффе. Получены длительности

(*) Н.А. Монахов, nikolay.monakhov@mail.ioffe.ru

запуска сопла, параметров сверхзвукового потока газа в месте установки модели. Выполнено сравнение результатов расчета с измерениями.

Расчет. Расчет равновесного состояния газа за падающей и отраженной ударной волной и далее расширения в сопле на основе одномерной модели с учетом реальных свойств рабочего газа проводился с помощью кода Nenzf1d. Такой подход не позволял учесть непостоянство параметров на входе в сопло, обусловленное конечным временем раскрытия диафрагмы, двумерными эффектами на начальном участке ускорения ударной волны и вязкими эффектами и теплообменом на внутренней поверхности камеры низкого давления.

Осесимметричный расчет течения в сопле для двух выбранных газодинамических режимов был проведен с помощью кода Eilmer. Использовались два варианта, отличающиеся расчетной областью и способом задания входных граничных условий. В первом случае она состояла из фрагмента камеры низкого давления, сопла и фрагмента демпферного бака. Во втором случае рассматривалась только диффузорная часть сопла и фрагмент демпферного бака. Общее количество ячеек составляло 75000 и 45000, соответственно. Сетка сгущалась вблизи всех границ расчетной области, минимальный размер ячейки составлял $5 \cdot 10^{-5}$ м. В первом случае в качестве постоянных граничных условий в камере низкого давления задавались равновесные параметры за отраженной ударной волной. Во втором случае, задавались параметры в критическом сечении сопла с однородным профилем скорости вдоль оси сопла, полученные с помощью расчета в Nenzf1d. На твердых стенках задавалось условие прилипания и постоянная температура. На выходной границе задавалось мягкое граничное условие. Течение считалось ламинарным и учитывались реальные свойства рабочего газа. Расчет проводился по явной схеме. Интегрирование по времени проводилось с помощью метода Рунге-Кутта 3 порядка до момента установления стационарной картины течения. Максимальный шаг по времени составлял $\approx 5 \cdot 10^{-9}$ с. Расчет потоков проводился по схеме AUSMDV.

Эксперимент. Эксперименты проводились на Большой ударной трубе ФТИ им. А.Ф. Иоффе [4]. Длина камеры высокого давления составляет 3.3 м, камеры низкого давления 12.4 м, внутренний диаметр 100 мм. В конце камеры низкого давления установлено сверхзвуковое коническое сопло с диаметром выходного сечения 100 мм, выходящее в демпферный бак. Камеры высокого и низкого давления разделялись с помощью металлической диафрагмы с крестообразной насечкой, перед входом в сопло устанавливалась тонкая полиэтиленовая диафрагма. Скорость падающей ударной волны вблизи зоны отражения измерялась с помощью двух пьезодатчиков давления, установленных на расстоянии 230 мм друг от друга. В торце камеры низкого давления установлен датчик для регистрации давления за отраженной ударной волной и оценки длительности рабочего времени.

Тестовая модель представляла собой полусферу диаметром 70 мм. Модель закреплялась внутри демпферного бака на оси сопла на подвижной державке. Давление торможения в критической точке модели измерялось с помощью пьезоэлектрического датчика PCB 113B28.

Результаты. В табл. 1 представлены начальные условия экспериментов, рассчитанные с помощью Nenzf1d параметры газа на входе в сопло и в точке установки модели, а также время запуска виртуального сопла, учитывающего расстояние до критической точки и единичное число Рейнольдса. Основное отличие данных режимов состоит в скорости падающей ударной волны и, соответственно, различной волновой конфигурации в области отражения.

На рис. 1 показано поле числа Маха, полученное в расчете с помощью Eilmer для двух способов задания граничных условий. Видно, что в первом случае острая кромка в критическом сечении приводит к появлению возмущений, которые отсутствуют во втором случае. Поскольку недорасширенная струя на срезе сопла имеет низкую степень нерасчетности, в пределах первой характеристики она продолжает расширяться.

Табл. 1. Начальные условия экспериментов и рассчитанные с помощью Nenzf1d параметры газа за отраженной ударной волной и потока вблизи критической точки затупленного тела

Режим	Начальные условия эксперимента		Параметры газа в зоне отражения			Параметры течения вблизи критической точки затупленного тела						
	p_1, кПа	V_1, м/с	p_5, кПа	T_5, К	h_5, МДж/кг	M_2	v, м/с	p_∞, кПа	T_∞, К	ρ_∞, кг/м^3	t, мкс	Re, м$^{-1}$
1	4.94	1871	1231	315	3.73	6.98	706	0.182	362	0.0017	184	2.22e+5
2	14.81	1259	1302	722	1.65	7.17	890	0.226	167	0.0046	232	6.7e+5

На рис. 2 показано давление торможения, полученное в эксперименте (зеленая кривая) и в осесимметричном (черные кривые) и одномерном расчете (красная линия) для режима №1 и №2. Синей вертикальной линией отмечена длительность запуска сопла, рассчитанная в Nenzf1d. Отсчет времени ведется от момента отражения падающей ударной волны от торца ударной трубы. Оценка времени с помощью одномерного расчета удовлетворительно совпадает с результатом измерений и осесимметричных расчетов. В квазистационарной фазе обтекания отличие измеренного давления от результатов осесимметричного расчета не превышает 10 % для обеих расчетных постановок.

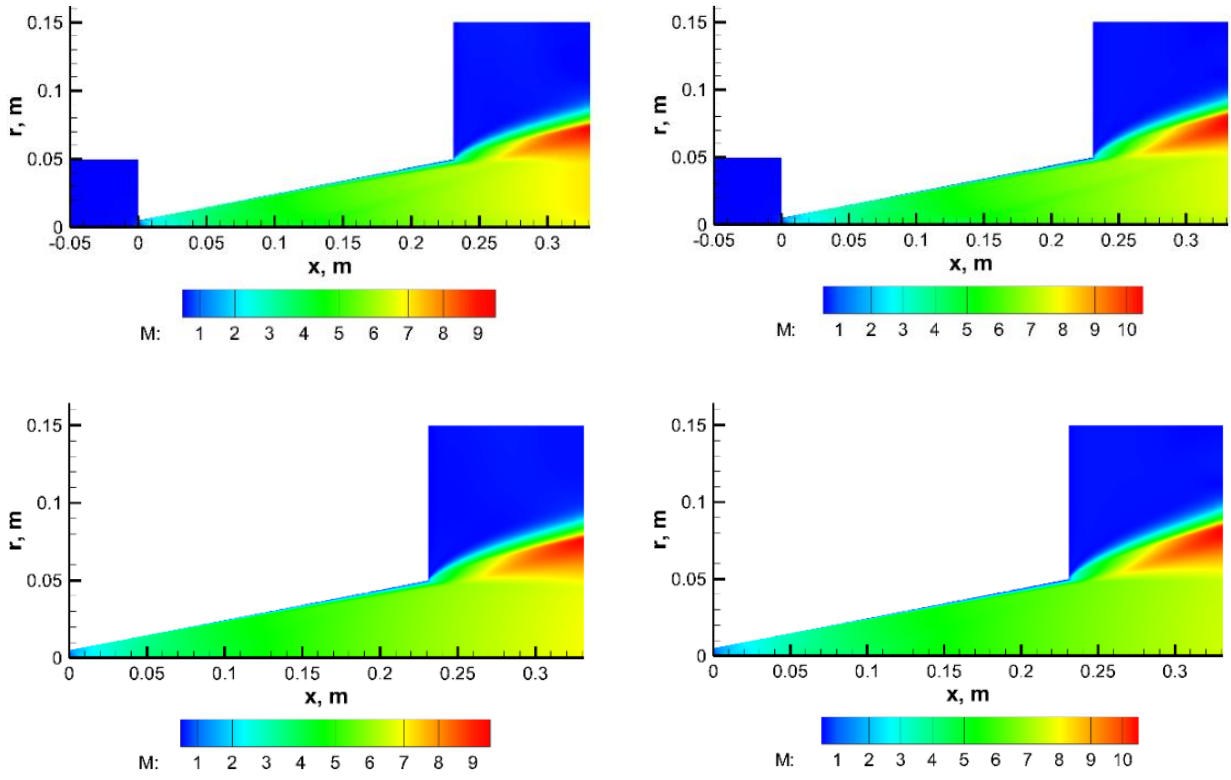


Рис. 1. Поле числа Маха для режима №1 (слева) и режима №2 (справа) для двух способов задания граничных условий.

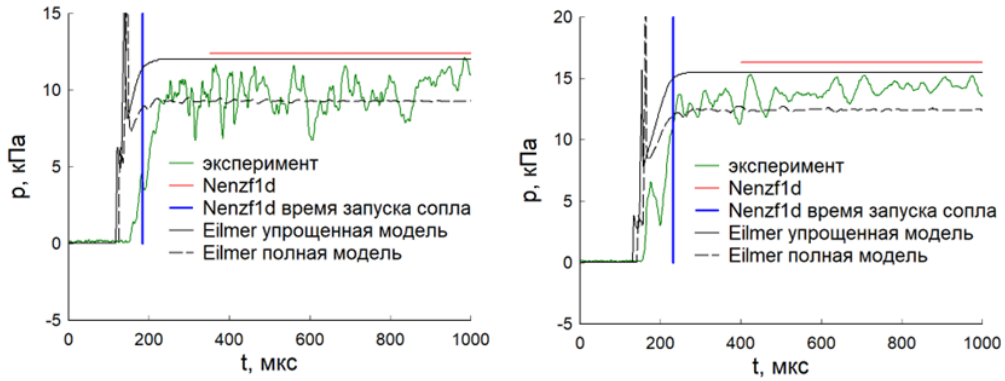


Рис. 2. Давление торможения, измеренное в эксперименте (зеленая кривая), рассчитанное в Eilmer (черные кривые) и в Nenzf1d (красная линия) для режима №1 (слева) и режима №2 (справа). Синей вертикальной линией показано рассчитанное в Nenzf1d время запуска сопла

Полученные результаты позволяют сделать вывод о применимости одномерного расчета для оценки газодинамических параметров течения в каналах ударных труб и сверхзвуковых соплах. Такой подход позволяет с минимумом временных затрат осуществлять планирование импульсного газодинамического эксперимента и повышать качество измерений.

ЛИТЕРАТУРА

1. P. Collen, L.J. Doherty, S.D. Subiah, T. Sopek, I. Jahn, D. Gildfind, R. Penty Geraets, R. Gollan, C. Hambidge, R. Morgan, M. McGilvray. Development and commissioning of the T6 Stalker Tunnel // Experiments in Fluids. – 2021. – Vol. 62. – P. 1-24.
2. K.P. Lynch, T. Grasser, R. Spillers, C. Downing, K. A. Daniel, E.R. Jans, S. Kearney, B.J. Morreale, R. Wagnild, J.L. Wagner. Design and characterization of the Sandia free-piston reflected shock tunnel // Shock Waves. – 2023. – Vol. 33. – P. 299–314.
3. Gasdynamic Toolkit (GDTk). [Электронный ресурс]. – Режим доступа: https://gdtk.uqcloud.net/ (дата обращения: 24.03.2025).
4. Масленников В.Г., Сахаров В.А. Двухдиафрагменная ударная труба Физико-технического института // ЖТФ. – 1997. – Т. 67. – №11. – С. 88-95.

УДК 536.627

В.Ю. Неянин, В.А. Талалов
Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого(*)

ОБРАБОТКА СИГНАЛОВ МИКРОКАЛОРИМЕТРА ПРИ ПИРОЛИЗЕ

Введение. Метод кислородной микрокалориметрии (КМК) [1-3] является одним из инструментом для исследования пиролиза — процесса термического разложения материалов в отсутствие кислорода. В отличие от классических методов, таких как термогравиметрический анализ (ТГА), кислородная микрокалориметрия фокусируется на тепловых эффектах, возникающих при последующем взаимодействии продуктов пиролиза с кислородом. В ходе проведения эксперимента измеряется расход кислорода, поглощаемого при окислении летучих, измеренный сигнал сопоставляется с динамикой роста температуры образца с учетом времени перемещения газовой смеси вдоль камеры сгорания. По измеренному расходу кислорода определяется мощность тепловыделения, имеющего место при окислении летучих. Одной из регистрируемых зависимостей является зависимость

(*) В.Ю. Неянин, neyanin.v@yandex.by

удельной мощности тепловыделения от температуры образца $\dot{q}(T)$ при $T = T_0 + \beta t$, где β – скорость нагрева, t – время выполнения эксперимента.

Итогами исследования КМК являются характеристики пиролиза материала, такие как максимальная скорость реакции, температура при максимальной скорости реакции, теплота сгорания исходного материала и летучих, массовая доля углистого остатка. Также величины, входящие в уравнение Аррениуса: энергия активации, предэкспоненциальный множитель. Данные величины важны как для обеспечения контролируемого сжигания в промышленных установках, так и для анализа неконтролируемого горения, например, в случае пожаров.

Описание и результаты процесса обработки. Для обработки рекомендуется использовать данные экспериментов, проведенных при минимум 3 скоростях нагрева β по 3 раза на каждой из скоростей. После получения результатов экспериментов при визуальном анализе отбрасываются аномальные кривые. По оставшимся кривым находится средняя зависимость $\dot{q}(T)$ и стандартное отклонение.

На рис. 1 и 5 приведены экспериментальные данные, полученные при пиролизе полиэтилентерефталата (далее PET), рябины и сосны (только древесина крупных веток) при скоростях нагрева β = 10, 20, 30 °C/мин, а на рис. 2, 6 приведены полученные средние зависимости.

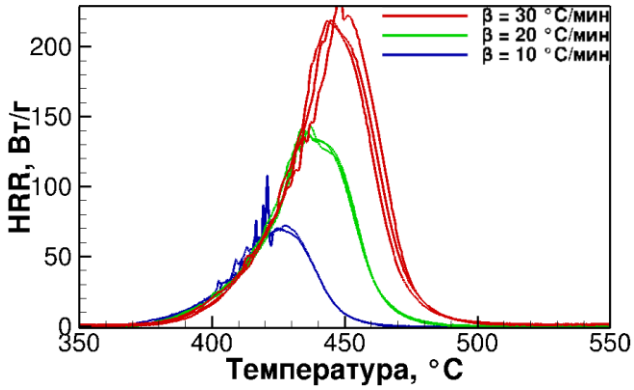


Рис. 1. Обрабатываемые экспериментальные зависимости

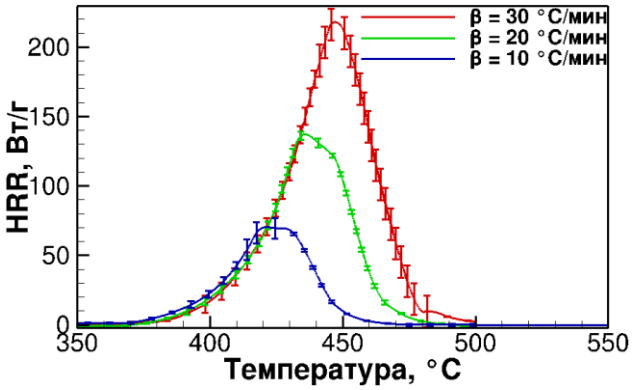


Рис. 2. Результаты обработки экспериментальных зависимостей

Для каждой скорости нагрева по формулам (1)-(4) вычисляются теплота сгорания исходного материала (1), теплота сгорания летучих (2), температурный интервал пиролиза (3), глубина превращения (конверсия) (4).

$$\overline{\Delta q'} = \frac{1}{\beta}\int_{T_0}^{T_{max}} \dot{q}(T)dT \quad (1)$$

$$\overline{\Delta q} = \frac{\overline{\Delta q'}}{1 - \frac{m_{res}}{m_0}} \quad (2)$$

$$\Delta T_{pyr} = T_{0.9} - T_{0.1} \quad (3)$$

$$\alpha = \frac{1}{\beta}\frac{\int_{T_0}^{T} \dot{q}(T)dT}{\overline{\Delta q'}} \quad (4)$$

где m_{res} – масса углистого остатка, m_0 – масса исходного образца, $T_{0.9}$ и $T_{0.1}$ – температура образца при глубине превращения 0.9 и 0.1 соответственно. Данные величины участвуют в построении кинетической модели.

В простейшем случае реакцию пиролиза полимера можно представить как протекающую в одну стадию с изменением масс компонентов следующим образом

$$-\frac{dm_P}{dt} = \frac{1}{1-\frac{m_{res}}{m_0}}\frac{dm_V}{dt} = \frac{m_0}{m_{res}}\frac{dm_R}{dt} \quad (5)$$

где P, V, R – исходный полимер, летучие, углистый остаток.

Учитывая (1), (5) и изложенное в [1, 2] после нескольких преобразований, получим скорость реакции

$$k = \frac{\dot{q}}{\Delta q'} = \frac{d\alpha}{dt} \quad (6)$$

Для нахождения констант уравнения Аррениуса использовался метод Фридмана ввиду простоты его реализации и отсутствия необходимости априорного знания кинетической модели. После применения метода уравнение Аррениуса примет вид

$$ln(k) = -\frac{E_a}{RT} + ln[Af(\alpha)] \quad (7)$$

Получено линейное уравнение (7), коэффициенты которого можно найти по экспериментальным данным с помощью метода наименьших квадратов. На рис. 3 и 4 показаны зависимости $E_a(\alpha)$ и $lnA(\alpha)$, полученные по данным пиролиза полиэтилентерефталата.

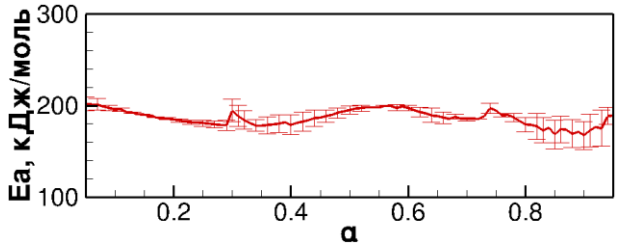


Рис. 3. Зависимость энергии активации от глубины превращения

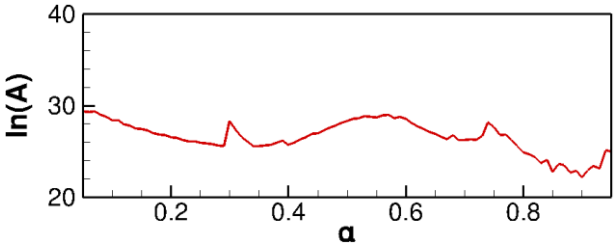


Рис. 4. Зависимость логарифма предэкспоненциального множителя от глубины превращения

Получены следующие средние значения: E_a = 187 кДж/моль, $A = 3.5 \cdot 10^{11}$. В работах [4], [5] приводятся значения E_a = 193 кДж/моль и E_a = 189 кДж/моль, полученные при использовании метода Киссингера, что свидетельствует об адекватности результатов настоящей работы.

Табл. 1. Полученные характеристики пиролиза PET

Скорость нагрева, °C/мин	Максимальная скорость реакции, $10^{-3} \cdot c^{-1}$	Температура при максимальной скорости реакции, °C	Теплота сгорания исходного материала, кДж/г	Теплота сгорания летучих, кДж/г	Массовая доля углистого остатка
10	4.31	421	16.33	18.79	0.131
20	8.54	437	16.02	18.31	0.125
30	12.7	448	17.15	19.38	0.115

При анализе данных, приведенных в табл. 1 можно отметить, что максимальная скорость реакции увеличивается пропорционально увеличению скорости нагрева. Температура при максимальной скорости реакции увеличивается с увеличением скорости нагрева.

Обработка экспериментальных зависимостей при пиролизе древесины. Выше была рассмотрена одностадийная реакция пиролиза материала на примере PET. Рассмотрение

многостадийной реакции пиролиза проводилось для нескольких видов древесины. В настоящей работе приведены результаты, полученные при пиролизе рябины и сосны.

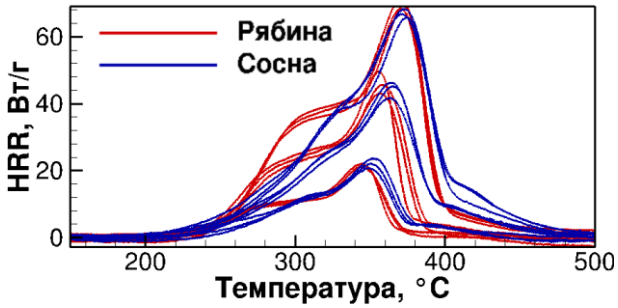


Рис. 5. Обрабатываемые экспериментальные зависимости

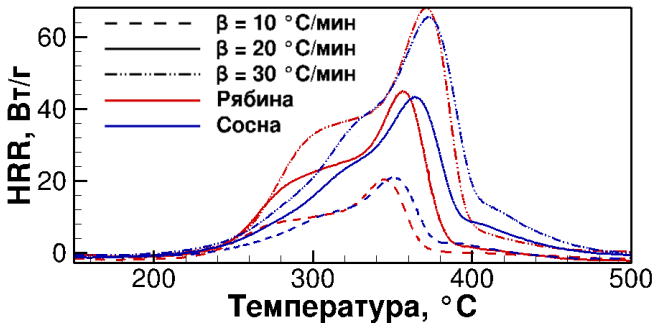


Рис. 6. Результаты обработки экспериментальных зависимостей

Видны различия в полученных для рябины и сосны данных, что свидетельствует о значительном различии теплофизических свойств разных пород древесины и обуславливает дальнейший интерес к накоплению опыта по применению изложенной методики нахождения характеристик пиролиза материалов.

ЛИТЕРАТУРА

1. ASTM D7309-07a. Standard Test Method for Determining Flammability Characteristics of Plastics and Other Solid Materials Using Microscale Combustion Calorimetry. ASTM Int., 2007. P. 1-8.
2. Lyon R.E., Walters R.N., Stoliarov S.I., Safronava N. Principles and Practice of Microscale Combustion Calorimetry / Technical Report DOT/FAA/TC-12/53(R1). FAA. – 2014. –95 p.
3. Snegirev A.Yu. Generalized approach to model pyrolysis of fl ammable materials // Thermochim. Acta. – 2014. – Vol. 590. – P. 242-250.
4. Işıl Acar, Gülin Selda Pozan, Saadet Özgümüş. Thermal oxidative degradation kinetics and thermal properties of poly(ethylene terephthalate) modified with poly(lactic acid) // Applied Polymer Science. – 2008. – Vol. 109. – P. 2754.
5. Pilawka R., Paszkiewicz S., Rosłaniec Z. Thermal degradation kinetics of PET/SWCNTs nanocomposites prepared by the in-situ polymerization // Thermal Analysis and Calorimetry. – 2013. – Vol. 115. – P. 457.

УДК 544.3, 536.46, 661.48

Д.С. Пашкевич[1,2], М.А. Олисов [1*], В.В. Капустин[1,2,3],
[1]Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого[(*)]
[2]ООО «Новые химические продукты»
[3]АО «РНЦ “Прикладная химия”»,

ТЕРМОДИНАМИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ ПРОЦЕССА РЕГЕНЕРАЦИИ ФТОРА ИЗ ПОЛИФТОРИДА АММОНИЯ

В настоящее время мировое производство гидрофторида достигает 1,5 млн тонн в год и продолжает увеличиваться. Так, расширение производства литий-ионных аккумуляторов потребует увеличения производства фторида водорода на 20% в ближайшие годы. Основным методом его получения остается сернокислотное разложение концентрата природного плавикового шпата кислотного сорта. Основным производителем CaF_2 является Китай, который контролирует около 60 % мировой добычи этого минерала или 3,5 млн. тонн

(*) М.А. Олисов, misha.olisov@yandex.ru

ежегодно, являясь лидером отрасли. В России запасы плавикового шпата необходимого состава исчерпаны и его приходится импортировать [1].

В тоже время плавиковый шпат является не единственным потенциальным источником фтора. Так, мировые запасы фтора в природном фторапатите превышают его запасы в плавиковом шпате в 10 раз [2]. Фторапатит используют при производстве экстракционной фосфорной кислоты, при этом фторсодержащие вещества, в основном водные растворы гексафторкремниевой кислоты, нейтрализуют, и продукты нейтрализации размещают на полях промышленных отходов. В России фторсодержащие отходы производства фосфорной кислоты образуются на целом ряде предприятий. И таким образом, разработка методов получения фтористого водорода из фторсодержащих побочных продуктов переработки фторапатитов является актуальной задачей не только с точки зрения нового источника гидрофторида, но и с точки зрения регенерации фтора из неиспользуемых отходов.

Известно, что из водного раствора гексафторкремниевой кислоты аминированием можно получить полифторид аммония $NH_4F{\cdot}nHF$. Также известно, что одним из методов регенерации фтора в виде HF из фторсодержащих веществ является их взаимодействие с водородсодержащими веществами и кислородом в режиме горения. В этом случае продуктами реакции являются фторид водорода, оксид элемента, или сам элемент, или фторид элемента с меньшим содержанием атомов фтора, чем в исходном фториде [3].

Исходя из вышеизложенных положений, был предложен метод переработки гексафторкремниевой кислоты, заключающийся в ее аминировании с получением полифторида аммония (далее ПФА) и последующей обработки ПФА в режиме горения.

Экспериментально установлено, что при взаимодействии некоторых фторидов с водородсодержащими веществами и кислородом в режиме горения при температуре порядка 2000 К состав продуктов процесса близок к термодинамически равновесному составу для соответствующей группы элементов при этой температуре [4].

Поэтому для групп элементов N-H-F-O и N-H-F-O-C с помощью программного комплекса «Астра-4» были проведены расчеты термодинамически равновесных составов веществ, моделирующие составы продуктов взаимодействия ПФА с кислородом, ПФА с кислородом и метаном, ПФА с кислородом и углеродом в режиме горения. Расчеты проводились для такого соотношения атомов, чтобы количество атомов водорода всегда было больше или равно количеству атомов фтора. Результаты расчетов приведены ниже.

Взаимодействие ПФА (или бифторида аммония) с кислородом сопровождается высоким тепловым эффектом:

$$NH_4F \cdot HF_{\text{жидк}} + 0{,}75O_{2\ \text{газ}} \rightarrow 0{,}5N_{2\ \text{газ}} + 1{,}5H_2O_{\text{газ}} + 2HF_{\text{газ}} - 294\text{кДж}. \quad (1)$$

Адиабатическая температура продуктов (1) без учета их диссоциации составляет 2400 К при начальной температуре исходных веществ 130 °С.

В интервале изменения температуры от 300 до 2000 К в группе элементов N-5H-2F-1,5O единственным фторсодержащим веществом является HF, а фториды и оксифториды азота отсутствуют.

Известно, что нормальная скорость распространения пламени в смеси аммиака и воздуха относительно низка – 0,1 м/с, что в 4 раза ниже, чем для смеси метана и воздуха. Поэтому не исключено, что при промышленной реализации (1) потребуется использование метана для стабилизации фронта пламени при форсировании производительности реактора типа туннельной горелки:

$$NH_4F \cdot HF_{\text{жидк}} + mO_{2\ \text{газ}} + nCH_{4\ \text{газ}} \rightarrow 0{,}5N_{2\ \text{газ}} + lH_2O_{\text{газ}} + 2HF_{\text{газ}} + nCO_{2\ \text{газ}} - Q \quad (2)$$

Для n=0,25 и m=1,25 тепловой эффект (2) составляет -517 кДж, а адиабатическая температура продуктов без учета их диссоциации - 2835 К при начальной температуре исходных веществ 130 °С.

Расчетами показано, что в интервале изменения температуры от 300 до 2000 К в группе

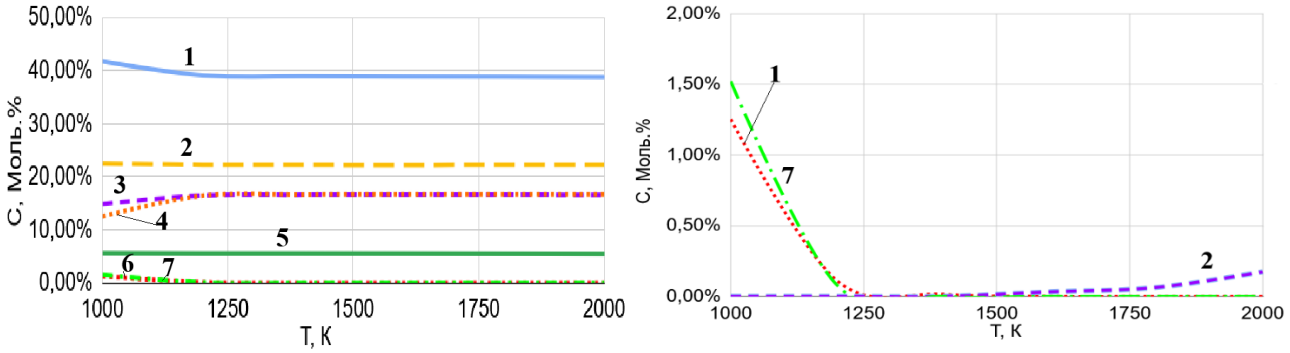
элементов N-6H-2F-2,5O-0,25C единственным фторсодержащим веществом является фторид водорода, а фториды и фториды-оксиды углерода отсутствуют.

В процессах (1) и (2) в качестве одного из продуктов присутствует вода. В тоже время известно, что для получения большинства промышленных соединений фтора (фториды урана, электронные газы, озонобезопасные хладоны, трифторид алюминия и др.) требуется безводный фторид водорода. Также известно [5], что при взаимодействии испаренного водного раствора плавиковой кислоты с углеродом во фронте фильтрационного горения углерода в кислороде удается получить фторид водорода с содержанием воды менее 0,1 %.

Поэтому было предложено рассмотреть следующий процесс переработки ПФА:

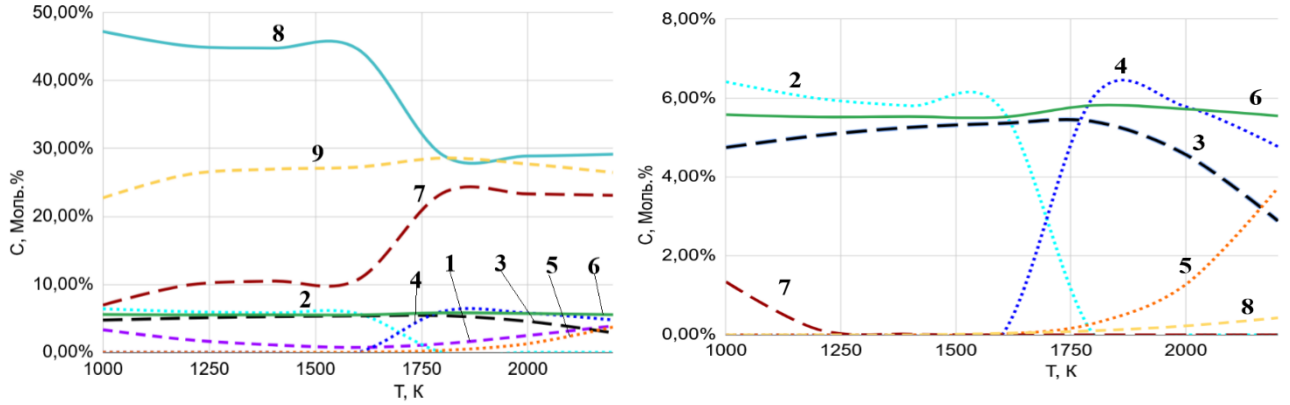
$$NH_4F \cdot HF_{\text{жидк}} + 0{,}75O_{2\ \text{газ}} + 5C_{\text{тв}} \rightarrow 0{,}5N_{2\ \text{газ}} + 1{,}5H_{2\ \text{газ}} + 2HF_{\text{газ}} + 0{,}75CO_{2\ \text{газ}} + \\ + 0{,}75CO_{\text{газ}} + 3{,}5C_{\text{тв}}. \qquad (3)$$

На рис. 1 представлены результаты расчетов термодинамически равновесных составов соединений для группы элементов N-5H-2F-1,5O-5C. Единственным фторсодержащим веществом в термодинамически равновесной смеси является HF. Концентрация воды в плавиковой кислоте меняется от 5,28% до 0% в диапазоне изменения температуры 1000–2000 К. В термодинамически равновесной смеси при T>1800 К может присутствовать HCN в количестве не более 0,2 %.



а) б)

Рис. 1. Концентрация компонентов C (моль.%) в термодинамически равновесной смеси веществ в группе элементов N-5H-2F-1,5O-5C в зависимости от температуры. а) соединения с концентрацией более 1 об. %: 1 – $C_{тв}$, 2 – $HF_{газ}$, 3 – $H_{2\ газ}$, 4 – $CO_{газ}$, 5 – $N_{2\ газ}$, 6 – $H_2O_{газ}$, 7 – $CO_{2\ газ}$; б) соединения с концентрацией менее 1 об. %: 1 – $H_2O_{газ}$, 2 – $HCN_{газ}$.



а) б)

Рис. 2. Концентрация компонентов C (моль.%) в термодинамически равновесной смеси веществ в группе элементов N-5H-2F-2O-5C-Si в зависимости от температуры. а) соединения с концентрацией более 1 об. %: 1 – $HF_{газ}$, 2 – $SiO_{2\ тв}$, 3 – $SiF_{4\ газ}$, 4 – $SiC_{\ тв}$, 5 – $SiF_{2\ газ}$, 6 – $N_{2\ газ}$, 7 – $CO_{\ газ}$, 8 – $C_{тв}$, 9 – $H_{2\ газ}$; б) соединения с концентрацией менее 5 об. %: 7 – $H_2O_{газ}$, 8 – $HCN_{газ}$.

В ПФА при его получении из гексафторкремниевой кислоты может присутствовать диоксид кремния в количестве порядка 1%. Поэтому были проведены расчеты термодинамически равновесного состава веществ для группы элементов N-5H-2F-2O-5C-Si, результаты представлены на рис. 2.

Диоксид кремния в результате проведения процесса (3), согласно результатам расчета, при температуре 1700 К может быть профторирован с образованием SiF_4 (порядка 50%), оставшаяся часть будет существовать в виде твердых SiO_2 и SiC.

Заключение. В результате проведенных расчетов показано, что в широком диапазоне изменения температуры, когда количество атомов водорода больше количества атомов фтора, единственным фторсодержащим веществом в термодинамически равновесной смеси в группах элементов N-H-F-O и N-H-F-O-C является фторид водорода, а фториды и фториды-оксиды азота и углерода, а также фториды кислорода отсутствуют. Тепловые эффекты процессов (1-3) велики и они могут быть реализованы в режиме горения.

ЛИТЕРАТУРА

1. U.S. Geological Survey, 2020, Mineral commodity summaries 2020: U.S. Geological Survey, 2020. – P.61.
2. Туманов В.В., Островский С.В., Старостин А.Г. Сырьевая база фтора в России и других странах // Вестник Пермского национального исследовательского политехнического университета. Химическая технология и биотехнология. – 2015, №4. – С. 124-136.
3. Pashkevich, D. S. Regeneration of Fluorine in the Form of Hydrogen Fluoride from Volatile Fluorine-Containing Wastes in a Hydrogen-Containing Fuel–Oxygen-Containing Oxidant Flame // Russian journal of physical chemistry B. – 2019. – Vol. 13, No. 6. – P. 993-1003.
4. Pashkevich D.S., Zimin A. R., Alekseev Yu. I., Smolkin P.A., Fedorova, T. A. Obtaining Hydrogen Fluoride During the Interaction of Depleted Uranium Hexafluoride with Methane and Oxygen in a Combustion Regime // Journal of Engineering Physics and Thermophysics. – 2025. – Vol. 98, No 1. – P. 154-162
5. Kapustin V. V., Pashkevich D. S., Talalov V. A. [et al.] Stability of Hydrogen Fluoride Under Water-Gas-Reaction Conditions // Journal of Engineering Physics and Thermophysics. – 2019. – Vol. 92, No. 4. – P. 889-898.

УДК 533.6.071.8

Ф.А. Орлов, Н.А. Монахов, П.А. Попов, К.И. Белов
ФТИ им. А.Ф. Иоффе, Санкт-Петербург (*)

ВЛИЯНИЕ СВОЙСТВ РАБОЧЕГО ГАЗА НА ТОЧНОСТЬ КАЛИБРОВКИ ДАТЧИКОВ ТЕПЛОВОГО ПОТОКА С ПОМОЩЬЮ ОТРАЖЕННОЙ УДАРНОЙ ВОЛНЫ

Исследование нестационарных физико-химических процессов при высоких температурах за падающими и отраженными ударными волнами является одним из стандартных экспериментальных приемов в химической кинетике. Такой способ позволяет «мгновенно» нагреть газ до высоких температур и далее исследовать кинетические процессы с помощью различных методов диагностики. Одним из способов исследования является регистрация теплового потока за отраженной ударной волной в торце ударной трубы. Для этих целей удобно использовать датчики на анизотропных термоэлементах из монокристалла висмута [1]. Важнейшей задачей, определяющей точность получаемых результатов, является достоверная калибровка датчиков. Удобным подходом является калибровка по отраженной ударной волне [2], которая позволяет не только определить вольт-ваттный коэффициент, но и проверить датчик на наличие внутренних повреждений кристаллической структуры. Характерными особенностями данных экспериментов являются: время теплового воздействия

(*) Ф.А. Орлов, fill-orlov@mail.ioffe.ru

$\sim 100\,\mu s$, приведенный тепловой поток $q\sqrt{t} \sim 1 \div 10\,kW\sqrt{s}/m^2$ и электрический сигнал датчика $\sim 1 - 10\,mV$. Накопленный опыт показывает, что основными факторами, определяющими достоверность измерений с помощью датчиков на анизотропных термоэлементах в экспериментах на ударных трубах, являются характеристики промежуточного усилителя и системы регистрации.

Эксперименты проводились на малой ударной трубе ФТИ им. А.Ф. Иоффе внутренним диаметром $50\,mm$. Датчик теплового потока на основе единичного анизотропного термоэлемента из монокристалла висмута размером $4.5 \times 0.74\ mm$ и толщиной $0.35\ mm$ был установлен в торце камеры низкого давления на расстоянии $14\ mm$ от оси трубы. Его принцип действия основан на генерации термоэлектрического поля в направлении, перпендикулярном вектору теплового потока [3]. В рамках одномерной тепловой и термоэлектрической модели, используемой в методе расчета теплового потока, электрический сигнал связан с перепадом температуры между рабочей и тыльной поверхностями термоэлемента следующим соотношением:

$$[T_0(t) - T_h(t)] = \frac{hU_s(t)}{S_0 \lambda_y A}$$

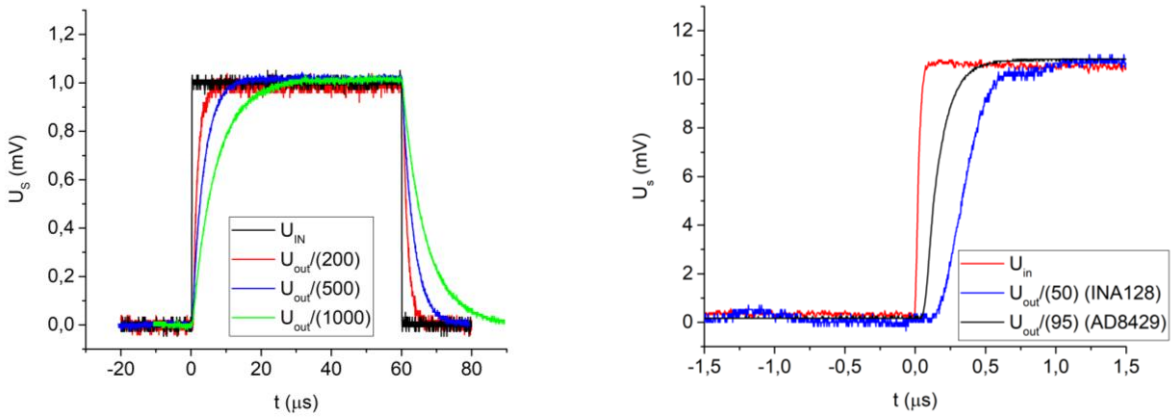
где U_s – электрический сигнал, зарегистрированный в эксперименте, h – высота термоэлемента, A – площадь термоэлемента, λ_y – эффективная теплопроводность термоэлемента в вертикальном направлении, S_0 – искомый вольт-ватный коэффициент.

В табл. 1 представлены начальные условия экспериментов и рассчитанные по ним параметры рабочего газа за отраженной ударной волной, приведенный тепловой поток и вольт-ваттный коэффициент. Первый режим является основным, поскольку аргон при температурах, когда степень ионизации пренебрежимо мала, полностью соответствует исходным положениям зависимости для теплового потока за отраженной ударной волной [2]. Второй режим был выбран для оценки отклонения получаемого вольт-ваттного коэффициента из-за увеличения теплоемкости азота C_p на 6% при нагреве за отраженной ударной волной.

В ходе модернизации системы регистрации был разработан усилитель на основе микросхемы AD8429 с заявленной полосой пропускания $15\,MHz$ по уровню $-3\,db$, заменивший ранее применявшийся усилитель на базе INA128 с полосой $1.3\,MHz$ при единичном усилении. На рис. 1a представлен исходный прямоугольный сигнал с генератора, подаваемый на вход INA128 и выходной сигнал, нормированный на коэффициент усиления. На рис. 1b показано изменение формы выходного сигнала при минимально допустимом коэффициенте усиления для данных экспериментов. Видно, что применение AD8429 позволило уменьшить сглаживание сигнала, что принципиально важно при регистрации теплового потока в процессах с характерным временем $\sim 1\ \mu s$.

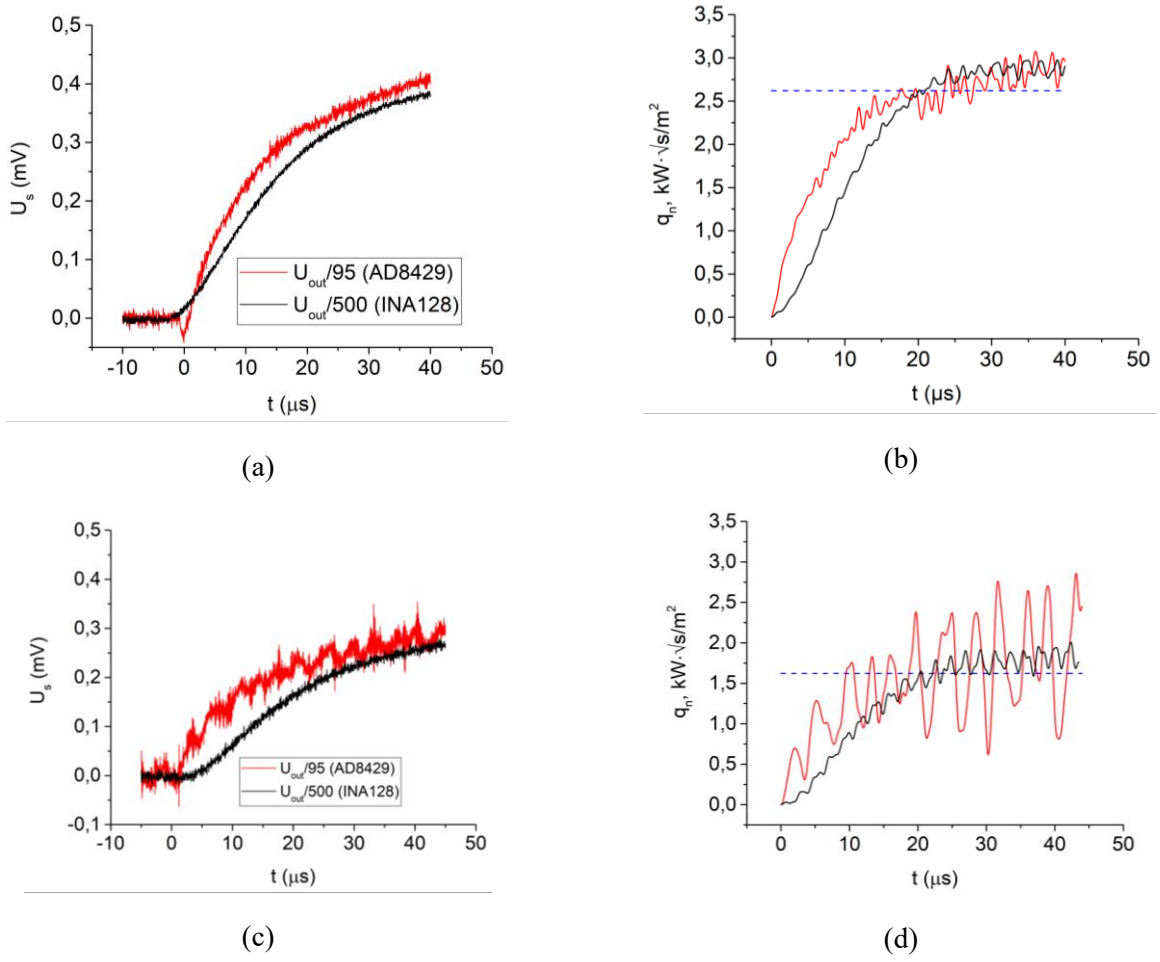
Табл. 1. Начальные условия экспериментов, рассчитанные параметры рабочего газа за отраженной ударной волной, определенный вольт-ваттный коэффициент датчика и полученное осредненное значение экспериментального приведенного теплового потока.

Эксперимент	M_1	P_1, kPa	T_5, K	$a_5, m/s$	$\left(q\sqrt{t}\right)_{th}$, $W \cdot \sqrt{s}/m^2$	S_0, mV/W	$\left(\overline{q\sqrt{t}}\right)_{exp}$, $W \cdot \sqrt{s}/m^2$
1943	2.32	6.67 Ar	1316	672	2589	5.0	2624
1939	2.09	6.67 N_2	766	554	1622	5.2	1666



(a) (b)

Рис. 1. Влияние коэффициента усиления на форму выходного сигнала, нормированного на коэффициент усиления: (a) – усилитель на базе микросхемы INA128, (b) – усилитель на базе INA128 и AD8429



(a) (b)

(c) (d)

Рис. 2. Исходные сигналы датчика, приведенный тепловой поток при использовании усилителя на INA128 (черные кривые) и AD8429 (красные кривые), полученный в эксперименте 1943 (a, b) и 1939 (c, d), теоретический приведенный тепловой поток (синие пунктирные линии).

На рис. 2a и 2c приведены исходные электрические сигналы датчика, а также рассчитанные по ним приведенные тепловые потоки (рисунки b и d) для эксперимента 1943 (рисунки a и b) и 1939 (рисунки c и d). Красным цветом показаны тепловые потоки при использовании AD8429 (коэффициент усиления $x95$) и черным при использовании INA128 (коэффициент усиления $x500$). Горизонтальной линией показано теоретическое значение, рассчитанное по начальным условиям экспериментов. Перед расчетом теплового потока, электрические сигналы были сглажены с помощью Фурье фильтра с частотой среза $1.25\ MHz$. Видно, что меньшая полоса пропускания INA128 приводит к заметному сглаживанию кривой на начальной фазе теплообмена и уменьшению участка, где $q\sqrt{t} \approx \mathrm{const}$, а также завышению получаемого значения вольт-ваттного коэффициента. В случае AD8429 возникает скачкообразное падение сигнала, вызванное особенностями работы данного усилителя. Необходимо отметить, что опыт применения датчиков с несколькими термоэлементами и большим электрическим сигналом, но без промежуточного усилителя показывает, что начальная фаза, где $q\sqrt{t} \neq \mathrm{const}$ не превышает $1\ \mu s$. Использование азота приводит к появлению сильных осцилляций электрического сигнала, имеющих газодинамическую природу, что отражается на форме рассчитываемого теплового потока и завышению получаемого вольт-ваттного коэффициента датчика на $\approx 4\%$.

Основным фактором, ограничивающим длительность фазы одномерного невозмущенного теплообмена в торце ударной трубы, является приход в точку расположения датчика возмущений, вызванных взаимодействием отраженной ударной волны с пограничным слоем и волной разрежения от истечения рабочего газа через дренажное отверстие. В качестве характерной длины можно принять расстояние от центра датчика до внутренней поверхности камеры низкого давления $10\ mm$. Скорость распространения возмущений ограничена скоростью звука за отраженной ударной волной (табл. 1). Таким образом, оценка снизу длительности фазы невозмущенного теплообмена составляет $\approx 20\ \mu s$. Как видно из результатов измерений, приведенный тепловой поток в начальной фазе теплообмена длительностью $\approx 10\ \mu s$ оказывается сильно сглажен и не пригоден для дальнейшего исследования, а общая длительность невозмущенного теплообмена не превышает $40\ \mu s$.

Заключение. Полученные результаты показывают, что использование двухатомного газа, который не в полной мере удовлетворяет исходным положениям одномерной теории теплообмена за отраженной ударной волной приводит к незначительному изменению значения вольт-ваттного коэффициента. Принципиальное ограничение максимальной длительности невозмущенного теплообмена обуславливает важность модернизации системы регистрации и использование усилителей с максимально широкой полосой пропускания.

ЛИТЕРАТУРА

1. Sapozhnikov S. Z., Mityakov V. Y., Mityakov A. V. Heatmetry: the science and practice of heat flux measurement. – Springer Nature, 2020.

2. Попов П. А. и др. Калибровка тепловых датчиков на анизотропных термоэлементах и гетерогенных металлических структурах с помощью отраженной ударной волны // Письма в Журнал технической физики. – 2022. – Т. 48. – №. 20. – С. 7-10.

3. Rowe D. M. (ed.). Thermoelectrics handbook: macro to nano. – CRC press, 2018.

УДК 533.6.071.8

Ф.А. Орлов, Н.А. Монахов, П.А. Попов, К.И. Белов
ФТИ им. А.Ф. Иоффе, Санкт-Петербург(*)

РАСЧЕТНО-ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ ТЕПЛООБМЕНА ЗА ОТРАЖЕННОЙ УДАРНОЙ ВОЛНОЙ В ОДНОАТОМНОМ И МОЛЕКУЛЯРНОМ ГАЗЕ

Исследование физико-химических процессов при высоких температурах за ударными волнами – одна из важных задач в физической газодинамике и химической кинетике. Ударное сжатие обеспечивает «мгновенный» нагрев газа, что позволяет изучать нестационарные физико-химические процессы в широком диапазоне температур и давлений. Одним из возможных методов исследования является измерение теплового потока за отраженной ударной волной. Малое время протекания исследуемых процессов $\sim 10\,\mu s$ и широкий диапазон изменения приведенного теплового потока $q\sqrt{t}$ предъявляют жесткие требования к измерительной аппаратуре. Удобным инструментом, позволяющим проводить достоверные измерения в данных условиях, являются датчики на основе анизотропных термоэлементов из монокристалла висмута.

Целью данной работы является экспериментальное и численное исследование теплообмена в торце камеры низкого давления ударной трубы за отраженной ударной волной в аргоне и углекислом газе. Начальные условия экспериментов (табл. 1) были выбраны исходя из требования постоянства химического состава рабочего газа. Равновесные параметры за отраженной волной рассчитаны с помощью кода Nenzf1d, входящего в состав пакета GasDynamics Toolkit (GDTk) [1], с учетом реальных свойств. Настоящая работа является подготовительным этапом перед дальнейшими исследованиями на режимах с большим числом Маха падающей ударной волны и диссоциацией углекислого газа.

Табл. 1. Начальные условия экспериментов и рассчитанные равновесные параметры рабочего газа за отраженной ударной волной.

Эксперимент	$\boldsymbol{Re}$	$\boldsymbol{P_1, kPa}$	$\boldsymbol{M_1}$	$\boldsymbol{T_5, K}$	$\boldsymbol{a_5, m/s}$	$\boldsymbol{\left(\overline{q\sqrt{t}}\right)_{th}}$, $\boldsymbol{W\cdot\sqrt{s}/m^2}$
1943	$5.9\cdot10^5$	6.67 Ar	2.32	1316	676	2600
1953	$3.0\cdot10^7$	26.66 Ar	3.91	3519	1105	28000
1941	$3.2\cdot10^7$	6.53 CO_2	3.36	1061	486	7500
1952	$3.1\cdot10^7$	3.99 CO_2	4.86	1779	624	19700

Эксперименты проводились на малой ударной трубе ФТИ им. А.Ф. Иоффе. Датчик теплового потока на основе единичного анизотропного термоэлемента из монокристалла висмута размером $4.5\times0.74\,mm$ и толщиной $0.35\,mm$ был установлен в торце камеры низкого давления на расстоянии $14\,mm$ от оси трубы. Полученный с помощью калибровки по отраженной ударной волне [2] вольт-ваттный коэффициент составляет $5.0\,mV/W$. В системе регистрации использовался промежуточный усилитель с коэффициентом усиления $x95$ на основе микросхемы AD8429 с полосой пропускания $15\,MHz$ по уровню $-3\,db$ при единичном усилении. Применение данного усилителя позволило значительно повысить точность измерений, но привело к сглаживанию кривой теплового потока в начальной фазе длительностью $\approx 10\,\mu s$.

Численное моделирование ламинарного течения в области отражения в осесимметричной постановке выполнено с помощью кода Eilmer, также входящего в состав пакета GDTk [1]. На левой границе задавались параметры рабочего газа за падающей ударной

(*) Ф.А. Орлов, fill-orlov@mail.ioffe.ru

волной, рассчитанные с помощью Nenzf1d, на остальных границах задавалась постоянная температура и условие прилипания. Задание постоянных по времени и оси y значений не позволяет в полной мере воспроизвести структуру пограничного слоя за падающей волной, однако это не оказывает существенного влияния на течение за отраженной ударной волной при малых временах. Невязкие потоки рассчитывались с помощью схем AUSMDV и гибридной Hanel-AUSMDV, последняя применялась для анализа влияния неустойчивости моделирования ударной волны на структуру течения. Итоговая сетка, на которой была достигнута сеточная сходимость состояла из 200 000 ячеек, размер пристеночной ячейки составлял 1 μm. Длительность расчета выбиралась исходя из оценки времени невозмущенного теплообмена, когда справедлива одномерная модель теплообмена [3].

На рис. 1a и 1b представлены приведенные тепловые потоки $q\sqrt{t}$, полученные в эксперименте и расчете с использованием схемы AUSMDV, пунктирной линией показано теоретическое значение, рассчитанное по [3] для аргона, а на рис 1c и 1d для углекислого газа. Видно, что в первом случае наблюдается хорошее совпадение результатов измерений, расчета и теории. Увеличение скорости звука за отраженной волной в эксперименте 1953 приводит к значительному сокращению длительности фазы стационарного теплообмена, где $q\sqrt{t} = \text{const}$ (рис. 1b). Во втором случае результаты измерений и расчета также совпадают, но наблюдается заметное отклонение приведенного теплового потока от теоретического значения, поскольку углекислый газ не в полной мере удовлетворяет исходным положениям теории [3].

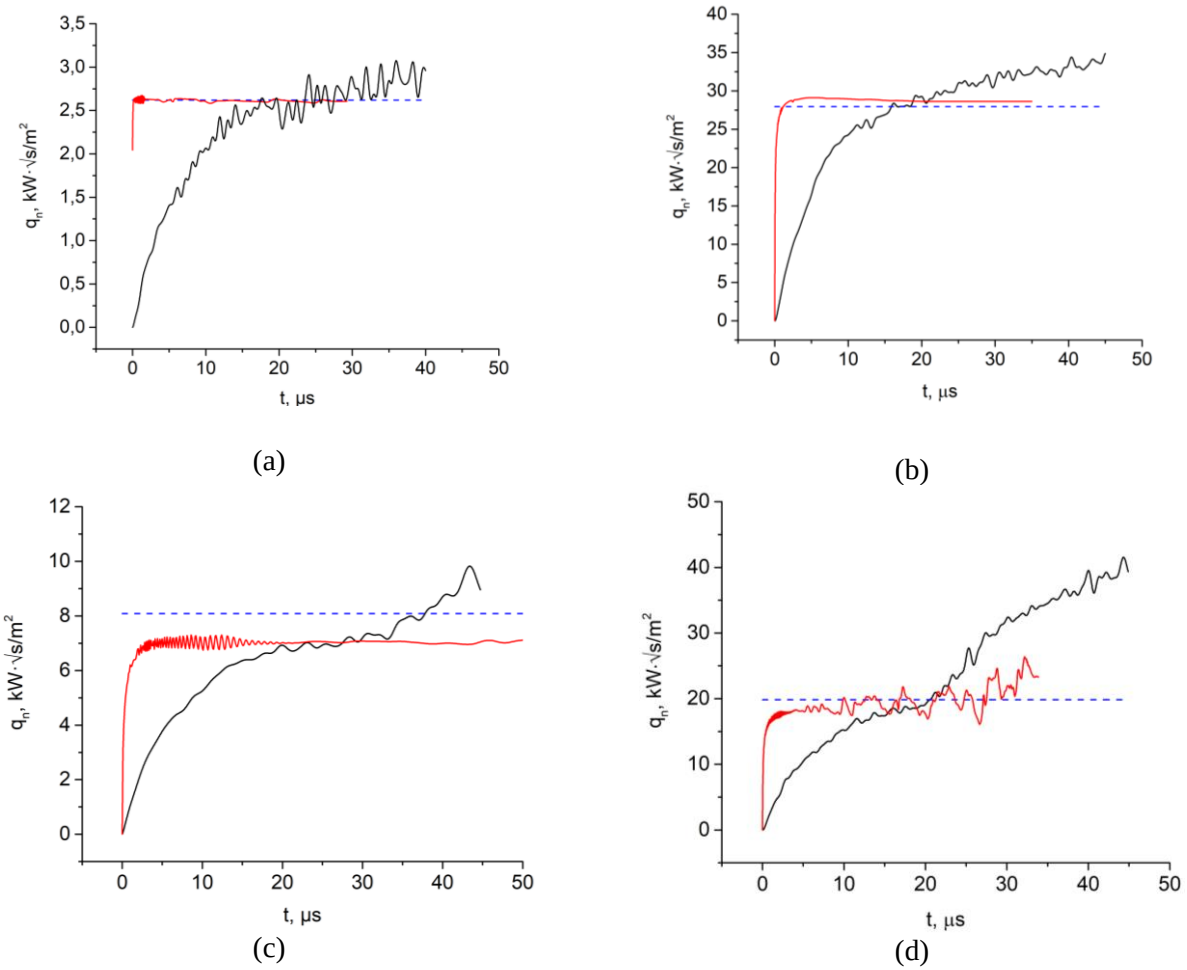
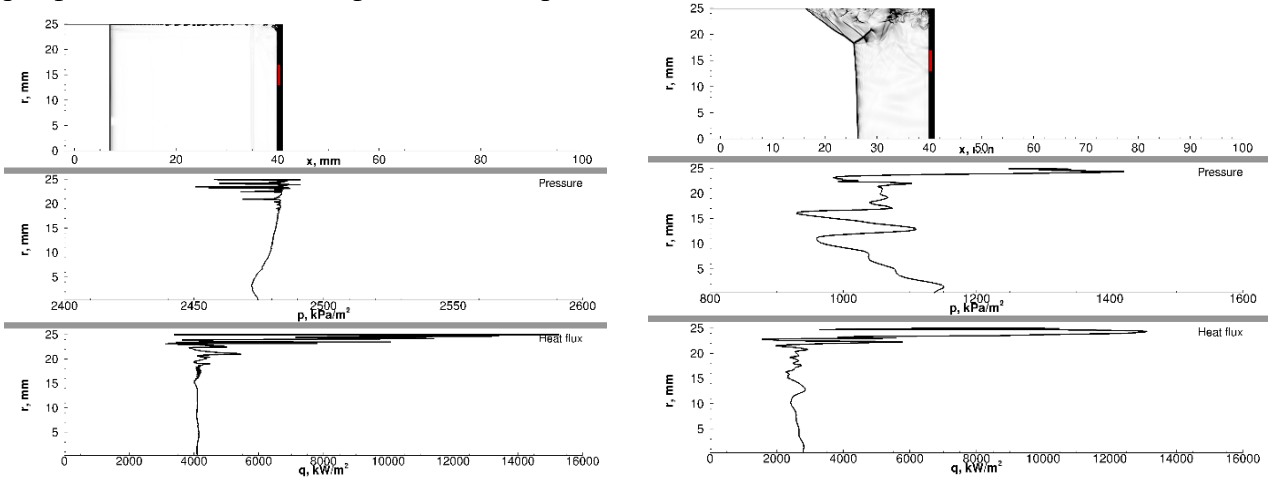


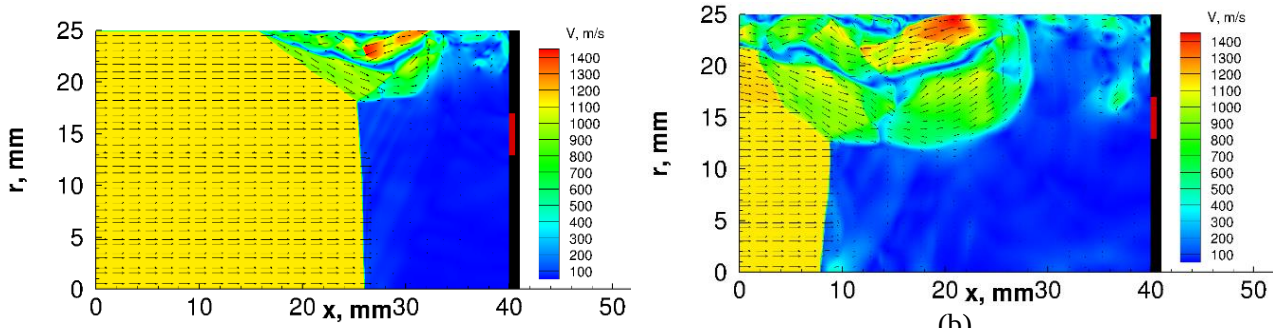
Рис. 1. Приведенный тепловой поток, полученный в эксперименте (черные кривые), расчете (красные кривые) и по теоретической зависимости (синие пунктирные линии) для аргона в эксперименте 1945 и 1953 (a, b) и для углекислого газа в 1941 и 1952 (c, d)

Существенное различие показателя адиабаты $\gamma = 5/3$ и $\gamma = 4/3$ рабочих газов приводит к принципиально различной структуре отраженной ударной волны и течения за ней (рис. 2). Причиной возникновения бифуркации и далее отрыва течения является превышение давления за отраженной ударной волной над давлением торможения в пограничном слое. В аргоне не возникает бифуркации отраженной волны, газ за ней неподвижен, в отличие от углекислого газа, где возникает трехударная конфигурация и газ приходит в движение. Это приводит к принципиально различному радиальному распределению давления и теплового потока в торце ударной трубы. Необходимо отметить, что высокочастотные осцилляции вызваны неустойчивостью схемы AUSMDV, а низкочастотные – газодинамическими причинами. Применение гибридной Hanel-AUSMD схемы позволяет частично устранить вычислительные артефакты, однако общая физическая картина остается неизменной.



(a) (b)

Рис. 2. Градиент плотности, радиальное распределение давления и теплового потока в торце ударной трубы в аргоне (a) и в углекислом газе (b) через 50 μs после отражения падающей ударной волны. Красным цветом указано положение датчика теплового потока



(a) (b)

Рис. 3. Модуль и вектор скорости в углекислом газе в моменты времени 50 μs (a) и 100 μs (b) после отражения ударной волны

Формирование трехударной конфигурации в углекислом газе приводит к образованию сложной нестационарной вихревой структуры вблизи торца ударной трубы. С течением времени размеры области увеличиваются и в какой-то момент достигают точки расположения датчика теплового потока, $r = 14\ mm$ (рис. 3). Поскольку температура газа в ней значительно выше, чем в пристеночном слое, то происходит увеличение теплового потока, что регистрируется в эксперименте и численном моделировании (рис. 1d).

ЛИТЕРАТУРА
1. Gas Dynamics Toolkit (GDTk) [Электронный ресурс] / The University of Queensland, Centre for Hypersonics. – 2025. – URL: https://gdtk.uqcloud.net/ (дата обращения: 14.04.2025).
2. Попов П. А. и др. Калибровка тепловых датчиков на анизотропных термоэлементах и гетерогенных металлических структурах с помощью отраженной ударной волны // Письма в Журнал технической физики. – 2022. – Т. 48. – №. 20. – С. 7-10.
3. Fay J. A., Kemp N. H. Theory of heat transfer to a shock-tube end-wall from an ionized monatomic gas // Journal of Fluid Mechanics. – 1965. – Т. 21. – №. 4. – С. 659-672.

УДК 533.6.071.8

Д.С. Осадчий[1], Е.В. Колесник[1,2], П.А. Попов[2]
[1]Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого, Санкт-Петербург(*)
[2]ФТИ им. А.Ф. Иоффе, Санкт-Петербург

РАСЧЕТНО-ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ ОБТЕКАНИЯ ОСЕСИММЕТРИЧНЫХ ТЕЛ СВЕРХЗВУКОВЫМ ПОТОКОМ

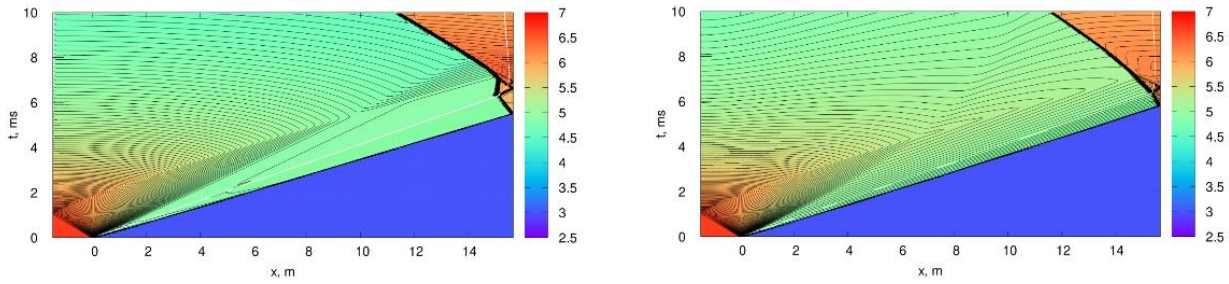
Исследование структуры течения и теплообмена на поверхности тел, обтекаемых сверхзвуковым потоком, остается одной из актуальных задач газодинамики. К настоящему моменту достаточно подробно теоретически, экспериментально и численно исследовано обтекание тел простых геометрических форм. Достоверное моделирование обтекания тел сложных форм при высоких температурах даже в случае ламинарного режима является весьма сложной задачей. Неотъемлемым этапом при проведении расчетных исследований является валидация полученных результатов на основе экспериментальных данных. Поскольку эксперименты чаще всего проводятся на импульсных установках различного принципа действия, результаты измерений помимо самих исследуемых процессов отражают и индивидуальные особенности установок. По этой причине, наиболее полным и достоверным является численное моделирование, воспроизводящее газодинамические процессы во всей экспериментальной установке.

В настоящей работе представлены результаты комплексного численного моделирования газодинамических процессов, происходящих при проведении экспериментов на Большой ударной трубе с отражающим соплом ФТИ им. А.Ф. Иоффе. Расчеты проведены с использованием пакета Gas Dynamics Toolkit [1]. Моделирование газодинамических процессов в ударной трубе после разрыва диафрагмы проведено с помощью квазиодномерного кода L1d. В качестве начальных условий задавались давление и температура в камере высокого и низкого давления. Расчет равновесных параметров за падающей и отраженной ударной волной, а также расширение в сопле в рамках одномерной модели выполнено с помощью кода Nenzf1d. В этом случае в качестве начальных условий задавались давление и температура в камере низкого давления и измеренная в эксперименте скорость падающей ударной волны. Осесимметричное моделирование обтекания конуса проведено в коде Eilmer в двух вариантах расчетной области: полная модель, содержащая область отражения камеры низкого давления, сопло и фрагмент демпферного бака с моделью тела, и усеченная, содержащая только фрагмент демпферного бака с моделью тела. В первом случае в качестве начальных условий задавались равновесные параметры газа за отраженной ударной волной, рассчитанные в Nenzf1d, а во втором случае – параметры параллельного сверхзвукового потока в точке установки модели.

(*) Д.С. Осадчий, danos2001@mail.ru

Начальные условия расчетов соответствовали одному из экспериментов. Камера низкого давления ударной трубы длиной 1.5 м была заполнена азотом при давлении $p_1 = 9.9$ мбар и температуре $T_1 = 20$℃, давление гелия в камере высокого давления длиной 15.88 м перед разрывом диафрагмы составляло $p_4 = 44.52$ атм при температуре $T_4 = 323$ ℃. Остаточное давление воздуха в демпферном баке не превышало 0.3 мбар. Число Маха падающей ударной волны, измеренное вблизи области отражения $M_1 = 5.63$. Число Рейнольдса сверхзвукового потока в точке установке модели, рассчитанное в Nenzf1d по одномерной модели с учетом реальных свойств $Re \approx 50\,000$.

На рис. 1а и 1б показаны $x - t$ диаграммы распределения логарифма давления без учета и с учетом трения и теплообмена на внутренней поверхности ударной трубы, рассчитанные с помощью L1d. Видно распространение падающей ударной волны и волны разрежения, образующихся после разрыва диафрагмы. Белой линией показано движение контактной поверхности. Вблизи правого торца камеры низкого давления наблюдается сложная картина взаимодействия отраженной ударной волны, контактной поверхности и волны разрежения. Учет трения приводят к замедлению падающей ударной волны (табл. 1), переменным по времени и пространству параметрам газа за ней, а также сокращению рабочего времени установки (рис. 1б). Полученные результаты позволяют проанализировать временные характеристики протекающих газодинамических процессов в ударной трубе.



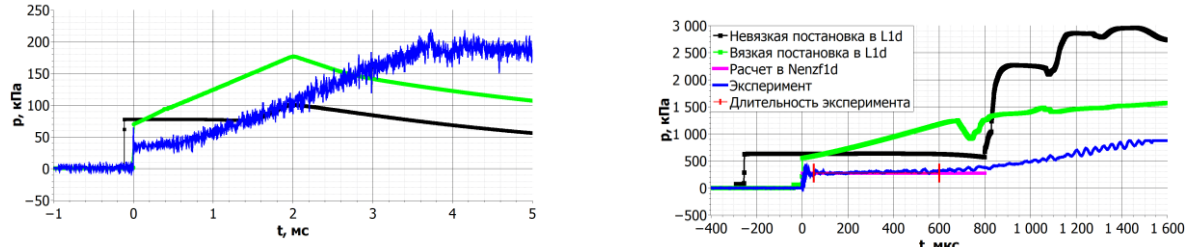
(а) (б)

Рис. 1. $x - t$ диаграмма распределения логарифма давления, рассчитанная с помощью L1d без учета (а) и с учетом вязкости и теплообмена на внутренней поверхности ударной трубы (б).

Особенностью данного эксперимента является модификация ударной трубы для нагрева камеры высокого давления. Это позволило повысить число Маха падающей ударной волны за счет увеличения скорости звука в толкающем газе, но одновременно с этим привело к увеличению потери импульса в блоке диафрагм и разгонном участке камеры низкого давления. Учет данных эффектов в L1d возможен с помощью введения дополнительных областей потери импульса. Подбор длины и интенсивности торможения в каждой из областей возможен только путем сбора статистики с большего количества промежуточных постов измерения давления по длине камеры низкого давления, чем было установлено в эксперименте (рис. 2а). По этой причине, в расчете учитывались только вязкие потери, что привело к заметному отличию значений скорости падающей ударной волны и давления, полученных в эксперименте и расчете (рис. 2б).

Табл. 1. Скорость падающей ударной волны вблизи области отражения, рассчитанная в L1d без учета и с учетом вязкости и теплообмена, а также измеренная в эксперименте

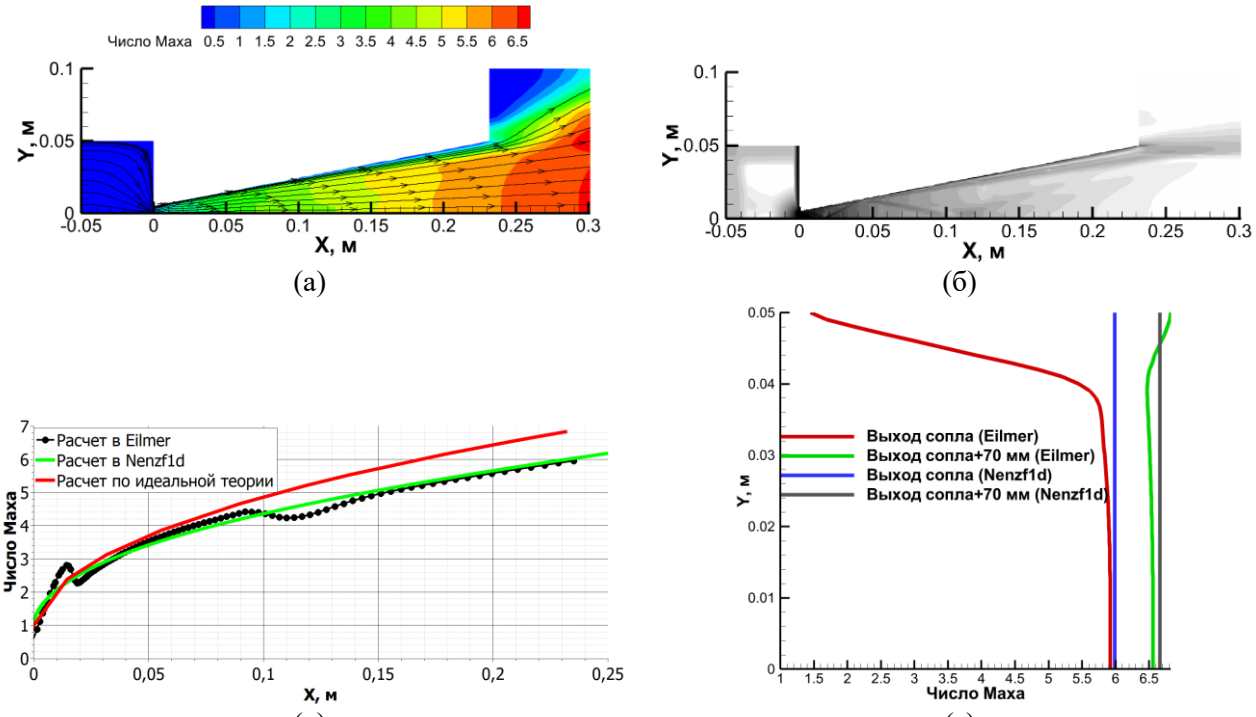
Расчет без учета вязкости, м/с	Расчет с учетом вязкости, м/с	Эксперимент, м/с
2770	2585	1969



(а) (б)

Рис. 2. Давление за падающей ударной волной на зарегистрированное на промежуточном посте, установленном на расстоянии 8.02 м от блока диафрагм (а) и за отраженной ударной волной на входе в сопло (б), полученное в расчетах в L1d и эксперименте

На рис. 3а и 3б показаны поля числа Маха с линиями тока и модуля градиента плотности, полученные при расчете в Eilmer для первого варианта расчетной области. Видно, что вдоль сопла образуется система косых скачков уплотнения, приводящая к немонотонному осевому распределению числа Маха (рис. 3в), а также некоторому отличию в радиальном распределении в плоскости, где расположена носовая точка модели (рис. 3г).



(а) (б)

(в) (г)

Рис. 3. Поле числа Маха с линиями тока (а), модуля градиента плотности (б), осевое (в) и радиальное распределение числа Маха (г) на выходе из сопла и на расстоянии 70 мм, где находится носовая точка модели

На рис. 4а и 4б показаны распределения коэффициентов давления и теплового потока по поверхности конуса, рассчитанные в Eilmer для двух вариантов расчетной области и полученные после осреднения по времени экспериментальные значения, а также теоретическое значение для случая параллельного потока [2]. Отличие результатов расчета для полной постановки от теоретического значения вызвано расходимостью потока по углу. На рис. 4в и 4д показана временная зависимость распределения давления и теплового потока в точках установки датчиков.

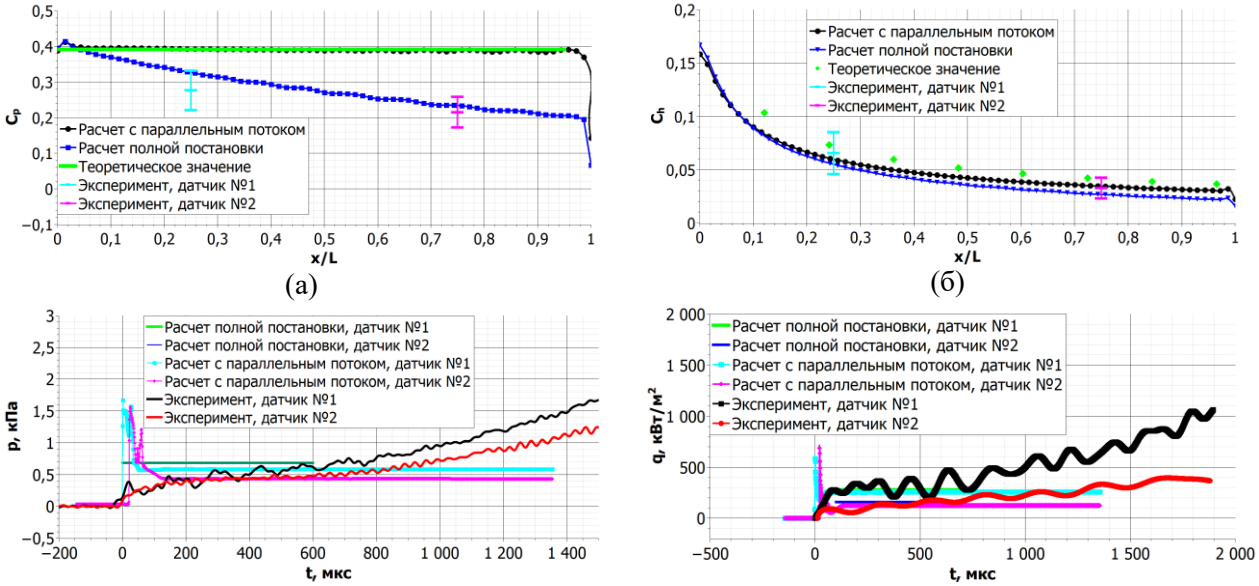


Рис. 4. Распределение коэффициентов и абсолютных значений давления и теплового потока, полученные в различных вариантах расчета и эксперименте

ЛИТЕРАТУРА

1. Пакет GDTk. [Электронный ресурс]. – Режим доступа: https://gdtk.uqcloud.net/ (дата обращения: 15.04.2025).
2. Краснов Н.Ф. Аэродинамика тел вращения. - Издание 2-е, переработанное и дополненное. – М.: Машиностроение. – 1964. – 573 с.

УДК 533.664

Н.С. Паксялин, Н.А. Щур
Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого(*)

ИССЛЕДОВАНИЕ ОБТЕКАНИЯ КРЫЛОВОГО ПРОФИЛЯ, МАШУЩЕГО В ОДНОРОДНОМ НАБЕГАЮЩЕМ ПОТОКЕ С НЕНУЛЕВЫМ СРЕДНИМ УГЛОМ АТАКИ

Введение. Взмаховые движения широко распространены в природе; активно используя их, птицы и рыбы значительно преуспели в передвижении в своих средах. В данной работе рассматривается симметричный взмах крылового профиля NACA 0012. Симметричный взмах моделируется трансляционными и вращательными гармоническими колебаниями. В работе рассматриваются симметричные взмахи с ненулевым средним углом атаки, вследствие чего колебания угла атаки становятся не симметричными. Ненулевой средний угол атаки задается однородным набегающим потоком.

Целью данной работы является исследование зависимости силовых характеристик обтекания от среднего угла атаки набегающего потока при фиксированных параметрах, таких как частота взмаха и максимальный эффективный угол атаки. Работа опирается на методологические исследования, проведенные автором работы [1] для случая нулевого среднего угла атаки.

(*) Н.С. Паксялин, paksyalin.ns@edu.spbstu.ru

Постановка задачи. Задача решалась в двумерной постановке. В качестве симметричного профиля использовался профиль NACA 0012. Длина хорды профиля равна c = 0.1 м.

Вращение осуществлялось вокруг передней точки профиля. Трансляционное и вращательное движение задавалось по формулам (1) и (2).

$$y(t) = h_0 \sin(2\pi f t) \quad (1)$$

$$\theta(t) = \theta_0 \sin(2\pi f t + \pi/2) \quad (2)$$

Эффективный угол атаки складывается из индуктированного трансляционным движением угла атаки, поворота профиля и угла атаки набегающего потока, формула (3).

$$\alpha(t) = -arctan\left(\frac{2\pi f h_0 \sin(2\pi f t)}{U}\right) + \theta_0 \sin\left(2\pi f t + \frac{\pi}{2}\right) + \alpha_0 \quad (3)$$

Амплитуда трансляционных колебаний, частота и эффективный угол атаки задаются как параметры. Амплитуда вращательных колебаний подбирается по формуле (4) из заданных параметров взмаха профиля:

$$\alpha_{max} = \max\left(-arctan\left(\frac{2\pi f h_0 \sin(2\pi f t)}{U}\right) + \theta_0 \sin\left(2\pi f t + \frac{\pi}{2}\right)\right) \quad (4)$$

На рис. 1 представлена схема возникновения углов атаки при трансляционном и вращательном движении. Трансляционное движение индуцирует угол атаки, а поворот профиля позволяет увеличить или уменьшить эффективный угол атаки.

В качестве среды рассматривается воздух. Плотность равна ρ = 1.225 кг/м^3, динамическая вязкость μ = 1.789·10^{-5} кг/(м·с). Модуль скорости набегающего потока полагается равным 17.52 м/с. В работе фиксируются следующие параметры: число Рейнольдса *Re* = 120000, амплитуда трансляционного колебания $h_0 = c$ = 0.1 м, частота взмаха f = 3.5 или 7 Гц, максимальный эффективный угол α_{max} = 2º; 6º. Варьируется угол набегающего потока α_0 = 0º; 2º; 4º; 6º.

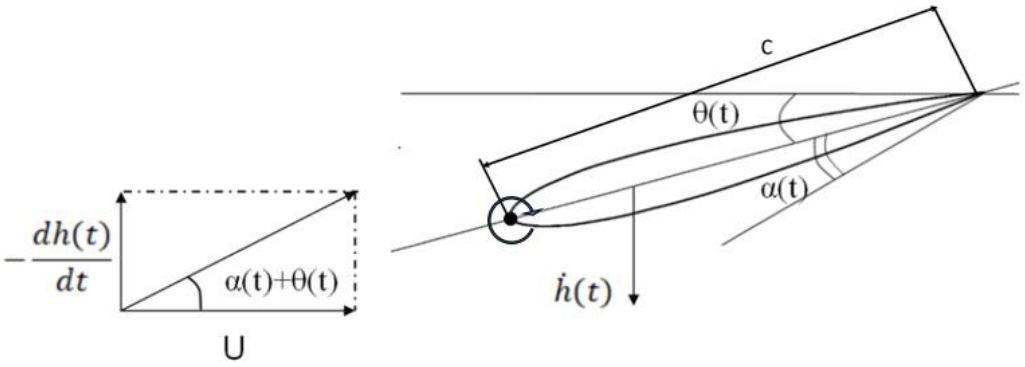


Рис. 1. Схема возникающих углов атаки

Особенности численной постановки. Для исследования использовался расчетный гидродинамический пакет Ansys Fluent 2019 R3. Использовался URANS подход с моделью турбулентности k-ω SST. Применялся алгоритм SIMPLE и схемы второго порядка точности по пространству и времени. На один период колебаний приходилось 500 временных шагов. Движение профиля моделировалось с помощью метода деформируемых сеток.

Внешняя граница представляла круг, отдаленный от профиля на 1000 хорд. На границе задавались граничные условия входа и выхода. Средний ненулевой угол атаки задавался на входном граничном условии величиной поперечной скорости. Степень турбулентности потока и отношение турбулентной вязкости к молекулярной на внешней границе задавались равными 0.1% и 1, соответственно. Использовалась неструктурированная расчетная сетка со значением y^+ около 35.

Результаты. Сначала выполнялся расчет стационарного обтекания профиля с различными углами атаки. Силовые характеристики при взмахах считаются как среднее по периоду, формула (5).

$$\langle F \rangle = \frac{1}{T}\int_0^T F(t)dt \tag{5}$$

Было проведено моделирование обтекания при двух разных частотах (3.5; 7 Гц) и двух максимальных эффективных углах атаки (2º; 6º). В табл. 1 приведены нормированные подъемные силы, действующие на профиль при стационарном обтекании и средние за взмах подъемные силы.

Табл. 1. Подъемные силы при стационарном и взмаховом обтекании при среднем угле атаки

α_0º	стационарное обтекание	f = 7 Гц, $\max(\alpha(t))$ = 6º	f = 7 Гц, $\max(\alpha(t))$ = 2º	f = 3.5 Гц, $\max(\alpha(t))$ = 2º
0	0.001	0.000	0.000	0.000
2	3.114	3.065	3.321	3.309
4	6.086	5.537	6.401	6.351
6	8.535	7.619	8.902	8.874

Из табл. 1 можно видеть, что при больших частотах и больших эффективных углах атаки происходит снижение подъемной силы, причем при увеличении среднего угла атаки увеличивается разность со стационарным обтеканием. Это происходит из-за того, что при движении вниз профиль выходит на режим обтекания с отрывом потока, рис. 2. На этом рисунке сравниваются поля продольной скорости для режимов обтекания, различавшихся максимальным эффективным углом атаки, при том же среднем угле атаки, равном 6º. На левой картие виден большой отрыв потока, со всей верхней части профиля. На правой картине состояние потока предотрывное. Стоит заметить, что при увеличении среднего угла атаки склонность к отрыву на верхней части профиля возрастает. При увеличении амплитуды поворота удается избавиться от отрыва, при этом возрастает подъемная сила относительно случая стационарного обтекания. При уменьшении частоты взмаха в два раза подъемная сила несколько уменьшилась, но осталась большей, чем при стационарном обтекании.

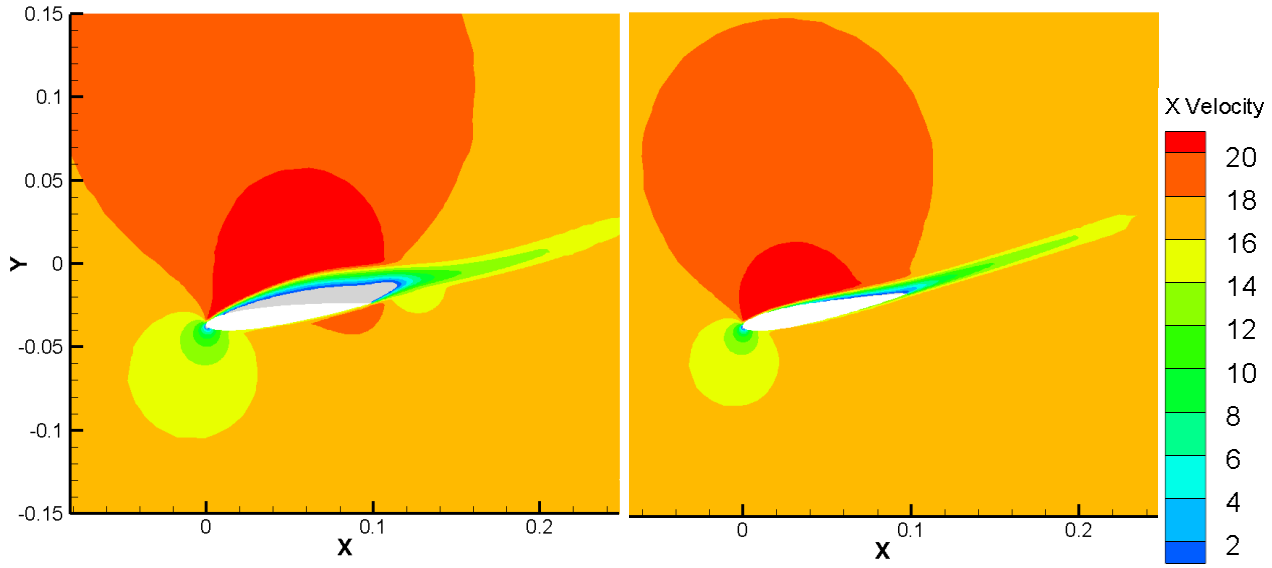


Рис. 2. Поля продольной скорости с частотой f = 7 Гц и средним углом атаки α_0 = 6º:
a – $\max(\alpha(t))$ = 6º, b – $\max(\alpha(t))$ = 2º

В табл. 2 приведены значения силы сопротивления при колебании профиля и тяги относительно стационарного обтекания.

Табл. 2. Сила сопротивления и тяга относительно стационарного обтекания

$\alpha_0{}^o$	стационарное обтекание	f = 7 Гц, $\max(\alpha(t))$ = 6º		f = 7 Гц, $\max(\alpha(t))$ = 2º		f = 3.5 Гц, $\max(\alpha(t))$ = 2º	
	F_x	$\langle F_x \rangle$	F_x-$\langle F_x \rangle$	$\langle F_x \rangle$	F_x-$\langle F_x \rangle$	$\langle F_x \rangle$	F_x-$\langle F_x \rangle$
0	0.410	-0.513	0.924	0.097	0.313	0.225	0.185
2	0.326	-0.584	0.910	0.001	0.325	0.140	0.186
4	0.088	-0.663	0.751	-0.269	0.357	-0.099	0.187
6	-0.209	-0.642	0.433	-0.635	0.427	-0.363	0.154

Из табл. 2 можно видеть, что при больших частотах и больших эффективных углах атаки происходит снижение тяги. Резкое снижение тяги происходит при значительных отрывах. При увеличении амплитуды поворота снижение тяги с увеличением среднего угла атаки не происходит. Однако само значение тяги сильно уменьшилось. При уменьшении частоты взмаха в два раза, тяга также значительно уменьшилась.

Выводы. В ходе выполнения работы были выведены следующие заключения: ненулевой средний угол атаки почти не влияет на создаваемую тягу при условии безотрывного обтекания профиля; маховые колебания профиля почти не влияют на зависимость подъемной силы от угла атаки при условии безотрывного обтекания профиля; большие отрывы потока несколько снижают подъемную силу и заметно снижают тягу, формируемую взмахами профиля. Результаты проведенных при нулевом угле атаки исследований могут быть использованы для подбора параметров и обеспечения необходимой скорости и продольной тяги крыла модели орнитоптера; величина подъемной силы может быть скорректирована изменением угла атаки набегающего потока.

ЛИТЕРАТУРА

1. Шекелашвили С.Т. Расчет аэродинамических характеристик профилей, совершающих взмаховые колебания: выпускная квалификационная работа магистра / Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого. — Санкт-Петербург, 2024. — 56 с.

УДК 532.517

А.А. Петров, Е.Э. Китанина
Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого(*)

ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ЛАМИНАРНОГО ТЕЧЕНИЯ И ТЕПЛООБМЕНА В ВИТЫХ ТРУБАХ КВАДРАТНОГО СЕЧЕНИЯ

Введение. Теплообменные аппараты, обеспечивающие интенсивное охлаждение высокотехнологичного оборудования, находят применение практически во всех сферах современного производства [1]. Широкая распространенность делает важными вопросы улучшения их производительности. На данный момент существует много способов для достижения этой цели, например, метод закрутки потока внутри витых труб. Витые трубы обладают рядом преимуществ, в число которых входит эффективное использование пространства, а также улучшение теплообмена, которое достигается за счет образования вторичных токов, возникающих из-за кривизны поверхности трубы. Помимо положительного эффекта, закрутка потока в витых трубах приводит к росту гидравлического сопротивления.

(*) А.А. Петров, petrov7.aa@edu.spbstu.ru

Постановка задачи. В настоящей работе моделируется ламинарное течение в витой трубе квадратного сечения. Предполагается, что длина трубы достаточна, чтобы течение установилось, это позволяет решать задачу в рамках условий периодичности. В качестве линейного масштаба используется гидравлический диаметр канала d_h. Кроме того, геометрия канала определяется длиной витка S и шагом закрутки H = S / d_h (в настоящей работе H = 12, 6, 3). Результаты, полученные для расчетной области, соответствующей ¼ витка и целому витку, отличались слабо, что позволило проводить параметрические расчеты для области протяженностью ¼ витка (представлена на рис. 1а).

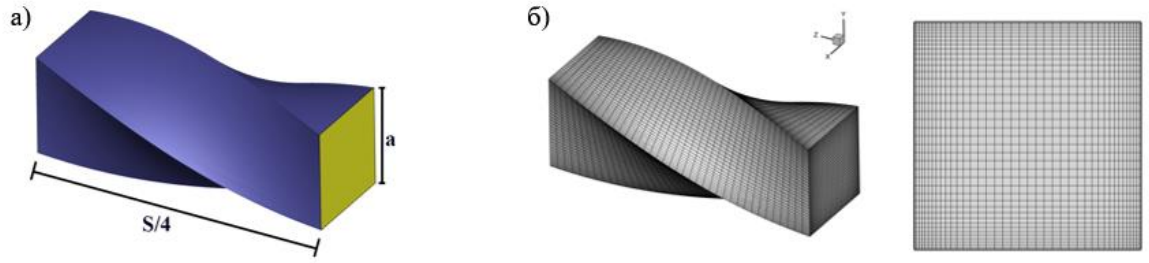


Рис. 1. Расчетная область (а) и пример расчетной сетки (б)

В рамках условий периодичности на границах расчетной области задавался массовой расход, удовлетворяющий числу Рейнольдса, варьировавшемуся в пределах от 10 до 1000. Стенки трубы поддерживались при постоянной температуре.

Вычислительные аспекты. Численное моделирование течения и теплообмена в витых трубах выполнено с использованием коммерческого пакета ANSYS FLUENT 24.1, основанного на методе конечных объемов. Расчетные сетки были построены с помощью сеточного генератора ANSYS ICEM CFD. В рамках исследования сеточной чувствительности было построено пять структурированных расчетных сеток размерностью от 16 до 256 тысяч ячеек. Сопоставление коэффициентов сопротивления и чисел Нуссельта показали, что результаты, полученные на самых подробных сетках, слабо отличаются от результатов, соответствующих расчетам на сетке размерностью 64 тысячи ячеек, что позволило выбрать ее в качестве базовой.

Результаты расчетов. На рис. 2 представлены распределения скорости в поперечном сечении витой трубы, соответствующие Re = 10 и Re = 1000. Как видно из рисунка, с увеличением числа Рейнольдса поле продольной компоненты скорости V_z/V_{mean} меняется слабо, при этом изолинии поперечной скорости $V_{cs} = \left(\sqrt{V_x^2 + V_y^2}\right)/V_{mean}$ существенно трансформируются и приближаются к углам сечения.

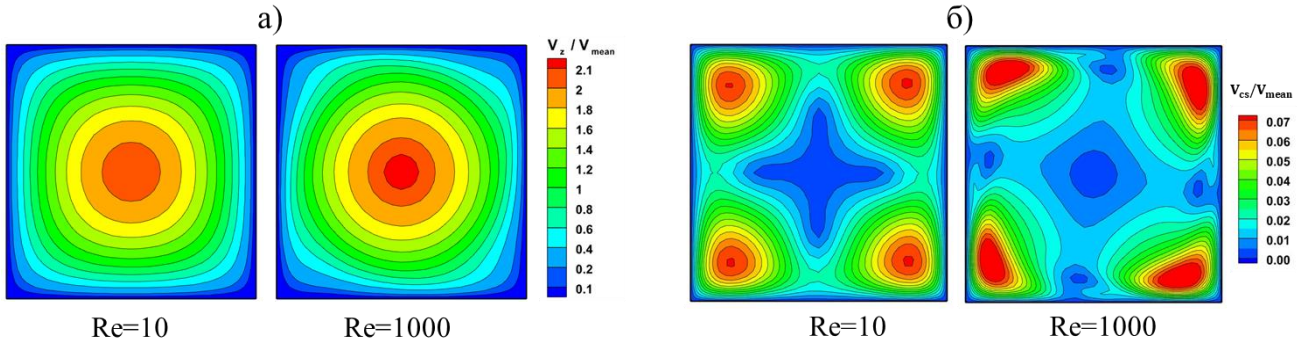


Рис. 2. Особенности течения в витой трубе при Re = 10 и Re = 1000:
а) поля нормированной продольной скорости; б) поля нормированной поперечной скорости

Рис. 3 демонстрирует влияние шага закрутки на течение при Re = 500. Как видно из рис. 3а, при уменьшении шага закрутки от 12 до 3 происходит рост относительной продольной скорости в ядре потока и увеличение размера застойных зон в углах сечения. Вторичные токи, показанные (рис. 3б) в сильно скрученном канале (H = 3), становятся более интенсивными вблизи стенок и не оказывают большего влияния на ядро потока.

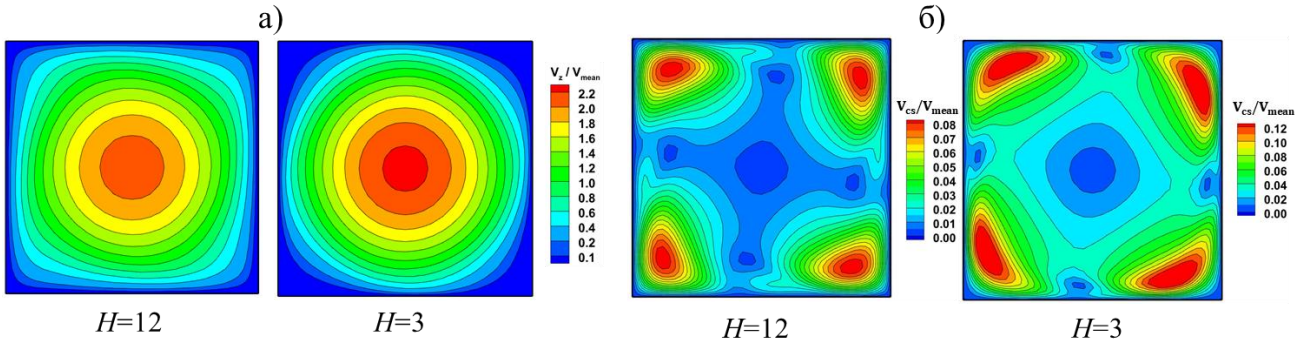


Рис. 3. Особенности течения в витых трубах с различным шагом закрутки:
а) поля нормированной продольной скорости; б) поля нормированной поперечной скорости

Увеличение интенсивности вторичных течений, наблюдавшееся как с ростом числа Рейнольдса, так и при уменьшении шага закрутки, приводит к росту коэффициента сопротивления в витой трубе по отношению к коэффициенту сопротивления в прямой трубе, что согласуется с литературными данными [2, 3]. Зависимость отношения $\lambda_{tw}/\lambda_{st}$ от Re и H, полученная в работе, показана на рис. 4а.

Особенности течения в витой трубе оказывают определяющее влияние на интенсивность теплообмена. На рис. 4б показана зависимость среднего числа Нуссельта от числа Рейнольдса и шага закрутки, полученная для течения воздуха (Pr = 0,74) в витой трубе. Как видно из рисунка, вплоть до Re = 100 число Нуссельта увеличивается, а потом начинает плавно уменьшаться, выходя на постоянное значение. Очевидно, что данный эффект обусловлен отдалением области высоких скоростей от стенок. При этом вторичные токи заполняют углы сечения, где температура потока меняется слабо, что может приводить к снижению эффективности теплообмена в витой трубе. Необходимо отметить, что данный эффект не упоминается в работах других авторов, однако, в литературе в качестве теплоносителя чаще всего рассматриваются жидкости с высокими числами Прандтля.

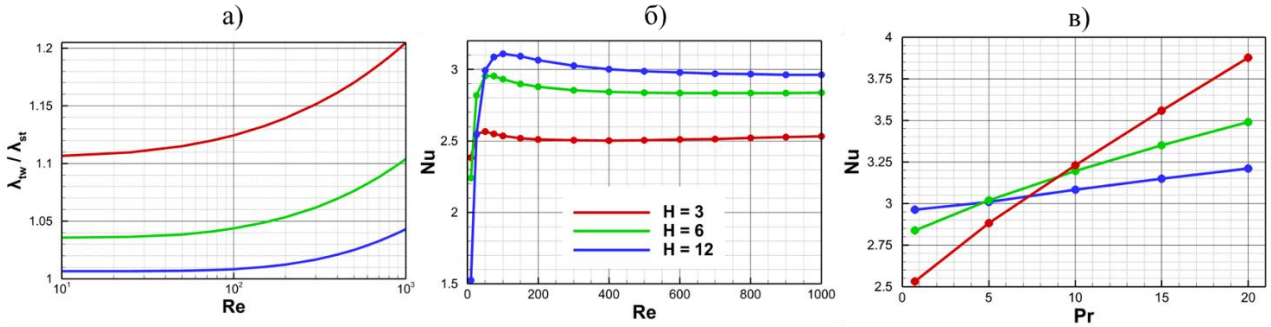


Рис. 4. Средние характеристики течения и теплоотдачи в витой трубе:
а) отношение коэффициентов сопротивления витой и прямой трубы; б) зависимость числа Нуссельта от числа Рейнольдса, Pr = 0.74; в) зависимость числа Нуссельта от числа Прандтля, Re = 1000

Результаты расчетов продемонстрировали значительную интенсификацию теплообмена в витых трубах при использовании теплоносителей с высокими числами Прандтля. Расчеты проводились при числе Рейнольдса, равном 1000. Наиболее резкий рост среднего числа

Нуссельта при увеличении числа Прандтля наблюдается в сильно скрученном канале (рис. 4, в). Результаты моделирования показали, что при Pr > 5 существенно деформируется поле температуры, а изменение локального числа Нуссельта вдоль стенки вблизи выходного сечения характеризуется двумя максимумами в отличие от параболического распределения, полученного для воздуха.

ЛИТЕРАТУРА

1. Дзюбенко Б.В., Дрейцер Г.А., Ашмантас Л.-В.А. Нестационарный тепломассообмен в пучках витых труб. М.: Машиностроение, 1988. 240 с.
2. Masliyah J.H., Nandakumar K. Steady laminar flow through twisted pipes. Fluid flow in square tubes // ASME J. Heat Transfer. – 1981. – Vol. 103 (4). –P. 785-790.
3. Manglik R.M., Patel P., Jog M.A. Enhanced laminar flow convection heat transfer in longitudinally twisted rectangular ducts // Proceedings of the ASME 2012 Summer Heat Transfer Conference, July 8-12, 2012. HT2012-58304.

УДК 621.412

К.Ю. Пожванюк[1], С.В. Булович[1,2]
[1]Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого(*)
[2]Физико-технический институт имени А.Ф.Иоффе, Санкт- Петербург, Россия

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ТЕЧЕНИЯ СЛАБОСЖИМАЕМОЙ ЖИДКОСТИ В ЩЕЛЕВОМ ЗАЗОРЕ РОТОРНО-ЛОПАСТНОЙ МАШИНЫ

Работе большинства поршневых машин, совершающих сжатие или расширение рабочего тела, сопутствует процесс, получивший в литературе название внутренние утечки. Характеризуется он расходом газа или жидкости через зазор между поршнем и корпусом из полости с более высоким давлением в полость с более низким давлением. Утечки отрицательно влияют на совершаемую работу, уменьшают производительность, приводят к снижению коэффициента полезного действия машины в целом.

Массообменные потери, вызванные внутренними утечками газа, хорошо изучены для уплотнительных узлов поршневого компрессора. В случае роторно-лопастной машины (РЛМ) можно уверенно говорить о постоянстве величины зазора и ширины щели за счет выбора материала корпуса и самих лопастей. Однако конфигурация щелевого зазора существенно сложнее. Наиболее важным отличием является разная протяженность щели в направлении течения газа, что приводит к отклонению линий тока от направления, «предписываемого» топологией области. Возможен также критический режим течения газа с запиранием потока либо на всей протяженности щели, либо на ее отдельных участках [1].

Для РЛМ не так много исследований, посвященных перетеканию рабочего тела через щелевое уплотнение. Можно выделить расчетно-экспериментальную работу [2], где проведена оценка потерь, влияющих на производительность роторно-лопастного компрессора, причем большая часть которых приходится на внутренние протечки. В работе [2] рассмотрен бесконтактный вариант уплотнения, при котором исключаются потери мощности на контактное трение. Для оценки расхода в щелевом зазоре используется аналитическая формула, полученная для модели несжимаемой жидкости

$$Q = \frac{\Delta p H^3 B}{12 \nu L}, \qquad (1)$$

(*) К.Ю. Пожванюк, kpozhvanyuk@inbox.ru

где Q – секундный расход, H – высота щели, B – ширина щели, L – длина зазора, Δp – перепад давлений, ν – кинематическая вязкость. Формула (1) позволяет определить влияние определяющих геометрических и режимных параметров на зависимость пропускной способности щели прямоугольной формы при ламинарном режиме течения несжимаемой жидкости.

Щелевой зазор РЛМ – переменной длины. Если длину щелевого зазора L определить как полусумму длин дуг αr_1 в окрестности ротора и αr_2 в окрестности корпуса (где α - размер лопасти по угловой координате), то формула (1) обретет вид

$$Q = \frac{\Delta p H^3}{12\nu} \frac{2\left(r_2 - r_1\right)}{\alpha\left(r_2 + r_1\right)}. \qquad (2)$$

Другой вариант обобщения формулы (1) для определения расхода в щелевом зазоре РЛМ получается, если предположить, что линии тока мало отклоняются от линий постоянного значения радиальной координаты. В этом случае расход в каждой трубке тока будет зависеть от радиальной координаты, а параметр в формуле (1) в виде отношения ширины щели к длине зазора выражается через отношение радиусов и размер щели по угловой координате

$$\frac{B}{L} = \int_{r_1}^{r_2} \frac{dr}{\alpha r} = \frac{1}{\alpha} \ln\left(\frac{r_2}{r_1}\right). \qquad (3)$$

В этом случае оценка величины расхода несжимаемой жидкости в щелевом зазоре в форме усеченного сектора будет иметь вид

$$Q = \frac{\Delta p H^3}{12\nu\alpha} \ln\left(\frac{r_2}{r_1}\right). \qquad (4)$$

Границу применимости формул (2) и (4) при оценке расхода жидкости в щелевом зазоре РЛМ, позволяет установить трехмерная модель течения несжимаемой жидкости (ρ=const). Более полной формулировкой задачи течения жидкости в щелевом зазоре будет трехмерная модель течения с учетом зависимости плотности от давления.

В простейшем случае учет сжимаемости среды реализуется в виде уравнения Тейта. Уравнение выражает зависимость плотности жидкости от давления и допускает различные формы записи. В частности, в форме Тейта-Мурнагана плотность среды определяется по формуле

$$\left(\frac{\rho}{\rho_0}\right)^n = 1 + \frac{n}{K_0}\left(p - p_0\right), \qquad (5)$$

где ρ_0 – плотность при давлении p_0, K_0 – объемный модуль при давлении p_0, n – параметр материала. Случай n=1 описывает линейную связь плотности и давления, что соответствует изотермическому режиму течению газа, для слабосжимаемых сред величина n находится в диапазоне 5-8.

Для отработки методики решения задачи течения среды в щелевом зазоре РЛМ было проведено численное интегрирование системы уравнений Навье-Стокса для несжимаемой жидкости и для варианта зависимости плотности от давления по формуле (5) в пакете программ Ansys Fluent 2024 R2. В расчетах, проведенных сначала для щели регулярной прямоугольной формы, была использована структурированная сетка со сгущением к твердым поверхностям.

В качестве граничных условий на входной границе было задано значение полного давления p_0=1.0 МПа, на выходной границе задавалась величина статического давления p_e=0.5 МПа. Были рассмотрены четыре значения высоты щелевого зазора: 20, 35, 50 и 100 мкм. Полученные результаты сравнивались с формулой (1).

Исходя из результатов в табл. 1, можно констатировать, что для ламинарного течения несжимаемой жидкости результаты численного расчета совпадают с аналитической формулой с приемлемой точностью. Для варианта 50 мкм режим течения несжимаемой жидкости в щели изменяется на турбулентный, поэтому наблюдается заметное расхождение в результатах. В случае высоты щели 50 мкм и выше была использована система уравнений Навье-Стокса, осредненная по Рейнольдсу. Для моделирования турбулентности применялась модель k-ω *SST*. Величина безразмерного расстояния до стенки y^+<1. В турбулентном потоке значительная часть механической энергии расходуется на преодоление внутреннего трения, возникающего вследствие вихревых пульсаций и перемешивания, что приводит к росту энергетических потерь и уменьшению пропускной способности щели.

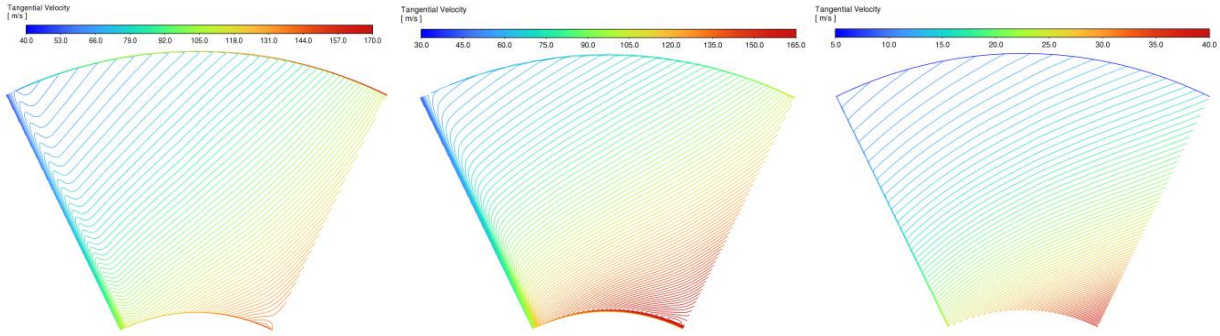
Табл. 1. Сравнение численного решения и аналитической формулы для щелевого зазора прямоугольной формы (L=0.087 м , B=0,075 м).

Высота щели, мкм	Формула (1)	Численный расчет
20	0.000176	0.000177
35	0.000948	0.000971
50	0.00276	0.00208
100	0.0221	0.00125

Щелевой зазор РЛМ определялся геометрическими размерами: угловой размер лопасти α=52°, внутренний радиус лопасти у ротора r_1=5.0 10^{-2} м, наружный радиус r_2=12.5 10^{-2} м, ширина лопасти B=0,075 м [3]. Размер щелевого зазора между лопастью и корпусом (высота щели H) был выбран также равным 20, 35, 50 и 100 мкм.

Граничные условия для проницаемых границ щелевого зазора РЛМ соответствуют постановке задачи для щели прямоугольной формы. На ограничивающих поверхностях с радиальными координатами r=r_1 и r=r_2 используется условие проскальзывания v_n=0. При большом значении радиуса кривизны влияние граничного условия на криволинейной стенке становится малосущественным. Но при рассмотрении щелевого зазора с малым радиусом кривизны на внутренней стенке необходимо задавать условие прилипания, что будет приводить к формированию пограничного слоя на выпуклой криволинейной поверхности и возможному его отрыву.

Влияние высоты щели на течение в зазоре в случае несжимаемой жидкости иллюстрируется на рис. 1. Данный рисунок показывает влияние высоты щели на значение компоненты скорости в окружном направлении. Приведенные поля построены на плоскости, положение которой определяется координатой H/2 в каждом из вариантов.



а) H=100 мкм. *б) H=50 мкм.* *в) H=20 мкм.*

Рис. 1. Линии равного значения окружной компоненты скорости в щели РЛМ (ρ=const)

Табл. 2. Сравнение моделей расчета течения газа в щелевом зазоре роторно-лопастной машины.

H, мкм	Формула (2)	Формула (4)	ρ=const	ρ=var
20	0.000176	0.000188	0.000189	0.000185
35	0.000948	0.00101	0.000985	0.000963
50	0.00276	0.00294	0.00266	0.00246
100	0.0221	0.0235	0.00621	0.00608

Для иллюстрации проявления сжимаемости среды рассмотрен вариант изотермического течения газа. Результаты исследования расходных характеристик щелевого зазора роторно-лопастной машины с использованием разных подходов приведены в табл. 2.

Таким образом, при численном моделировании течения среды в щелевом зазоре в форме усеченного сектора с разной полнотой описания протекающих процессов, получено совпадение результатов расчетов по формулам (2), (4) и численных расчетов при ламинарном режиме течения. Для высоты щели 50 мкм и выше, как и для щели прямоугольной формы, наблюдается турбулентный режим течения. Переход к описанию течения слабо сжимаемой жидкости в рамках уравнения Тейта-Мурнагана приводит к незначительному увеличению расхода, что свидетельствует о малом влиянии сжимаемости течения для рассматриваемого перепада давления.

ЛИТЕРАТУРА

1. Пожванюк К.Ю., Булович С.В. Математическое моделирование течения газа в щелевом зазоре роторно-лопастной машины. / Неделя науки ФизМех: сборник материалов Всероссийской научной конференции, 1–5 апреля 2024 г. – СПб. : ПОЛИТЕХ-ПРЕСС, 2024. – С. 441-444.
2. Коломин И.В., Довгялло А.И., Гальперин Р.Н. и др. Варианты оптимизации роторно-лопастного компрессора с бесконтактными уплотнениями рабочих камер // Вестник СГАУ. – 2009 №3 (19). –С. 260-264.
3. Расчет и проектирование роторно-лопастной машины с внешним подводом теплоты: Монография / [Ю. Н. Журавлев и др.]. – Псков: ПГУ, 2012. – 72 с.

УДК 532.517

Д.К. Попова[1,2], Н.Н. Кортиков[1]
[1]Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого(*)
[2]АО “ОДК-Климов”

ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА ГАРМОНИЧЕСКОГО БАЛАНСА ПРИ МОДЕЛИРОВАНИИ НЕСТАЦИОНАРНЫХ ПРОЦЕССОВ В ОХЛАЖДАЕМОЙ СТУПЕНИ ТУРБИНЫ

Нестационарный характер присущ потоку газа в турбомашинах. Основными источниками нестационарности в ступени турбины являются: дозвуковое потенциальное взаимодействие, взаимодействие ударных волн и взаимодействие следа, а также температурная неравномерность на выходе камеры сгорания [1]. Обзор литературы показал отсутствие доказательной базы эффективности метода гармонического баланса (НВ) при моделировании нестационарных эффектов в случае *охлаждаемых* ступеней турбин при *реальных условиях* их эксплуатации. В данной работе система охлаждения соплового аппарата включала в себя ряды перфораций, расположенные на поверхности профиля лопатки, верхней

(*) Д.К. Попова, daria_well96@mail.ru

и нижней полках. Рабочая лопатка использовала конвективную систему охлаждения с выдувом охладителя через выходную кромку.

В работе был рассмотрен перспективный вариант численного решения рассматриваемого класса задач, основанный на методе НВ и встроенный в пакет STAR-CCM+ [2]. Временно-периодическое решение, полученное при помощи метода гармонического баланса, представляется в виде ряда Фурье

$$W(\vec{r},t)=\sum_{m=-M}^{M} W_m(\vec{r})exp(i\omega mt),$$

где M – число гармоник. Главным условием успешного применения метода НВ является, во-первых, обоснование правомерности перехода от реального количества лопаток в венце рабочего колеса к одному межлопаточному каналу с применением условий периодичности; во - вторых, определение количества мод для адекватного описания переноса нестационарных возмущений в проточной части ступени.

В качестве объекта исследования выбрана ступень двигателя семейства РД33 (рис. 1*а*). Ступень состоит из 27 сопловых лопаток и 84 рабочих лопаток. Расчет газодинамических процессов в турбинной ступени проводился в программном комплексе STAR CCM+ в трехмерной постановке.

Расчетная область (рис. 1*б*) включает в себя 9 межлопаточных каналов соплового аппарата и один межлопаточный канал рабочего колеса с системой охлаждения рабочей лопатки. Количество межлопаточных каналов соплового аппарата было выбрано с целью сохранения периодичности поля температуры, полученного на выходе из камеры сгорания с 24 форсунками. Для проведения расчетов проточной части газогенератора, содержащей ступень турбины с системой подвода охладителя и заданием натурного распределения температуры на выходе камеры сгорания, потребовалось около 19 миллионов контрольных объемов расчетной сетки, при этом использовалось 4 вычислительных узла кластера с 32 вычислительными ядрами. Решение, полученное с помощью данного подхода, было сравнено с более точным решением, полученным методом URANS со скользящими сетками. Расчетная область для метода URANS представлена на рисунке 1*в*, а расчетная сетка составила около 90 млн ячеек.

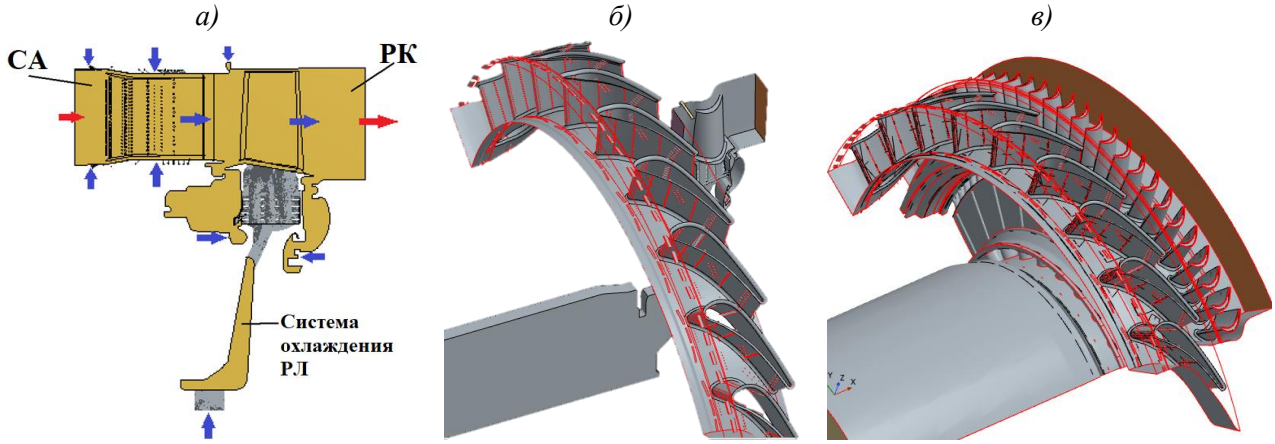


Рис. 1. а) Общий вид расчетной области; б) Расчетная область для метода НВ;
в) Расчетная область для метода URANS

Были проведены расчеты для четырех соотношений количества мод в сопловом аппарате и рабочем колесе: 1 – 1, 3 – 3, 5 – 5 и 7 – 7. Отмечается, что увеличение количества мод от 1 – 1 до 5 – 5 ведет к усложнению формы колебаний температуры потока вблизи поверхности рабочей лопатки (от гармонического сигнала до сложного периодического с несколькими

локальными экстремумами). Помимо этого, оптимальным соотношением мод является 5 – 5, а дальнейшее увеличение их количества не вносит дополнительных изменений.

Было отмечено, что метод НВ дает большую диффузию в потоке, тем самым размывая горячую струю, идущую от форсунки, в области рабочего колеса (рис.2 *а, б*). В ходе работы был подтвержден нестационарный характер течения и теплообмена в проточной части двигателя РД-33 при реальных условиях его эксплуатации. На рисунке 2*в* видно, что отклонение температуры на выходе из СА от среднего значения для нестационарного расчета составляет ±250 градусов, для гармонического баланса - ±100. Также сопоставление URANS и НВ дает расхождение в частотном спектре, что хорошо наблюдается на окружных распределениях температуры (рис. 2 *в, г*).

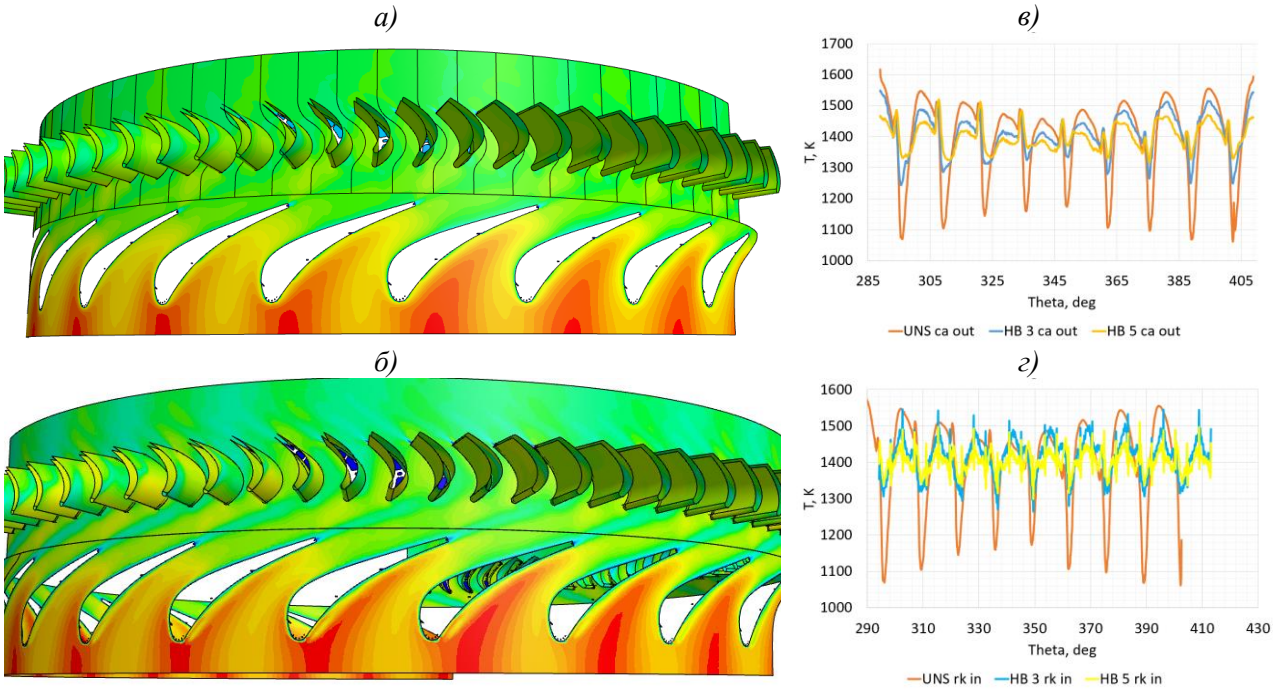


Рис. 2. а) Поле температуры для метода НВ; б) Поле температуры для метода URANS; в) Распределение температуры в окружном направлении в среднем сечении на выходе из СА; г) Распределение температуры в окружном направлении в среднем сечении на входе в РК

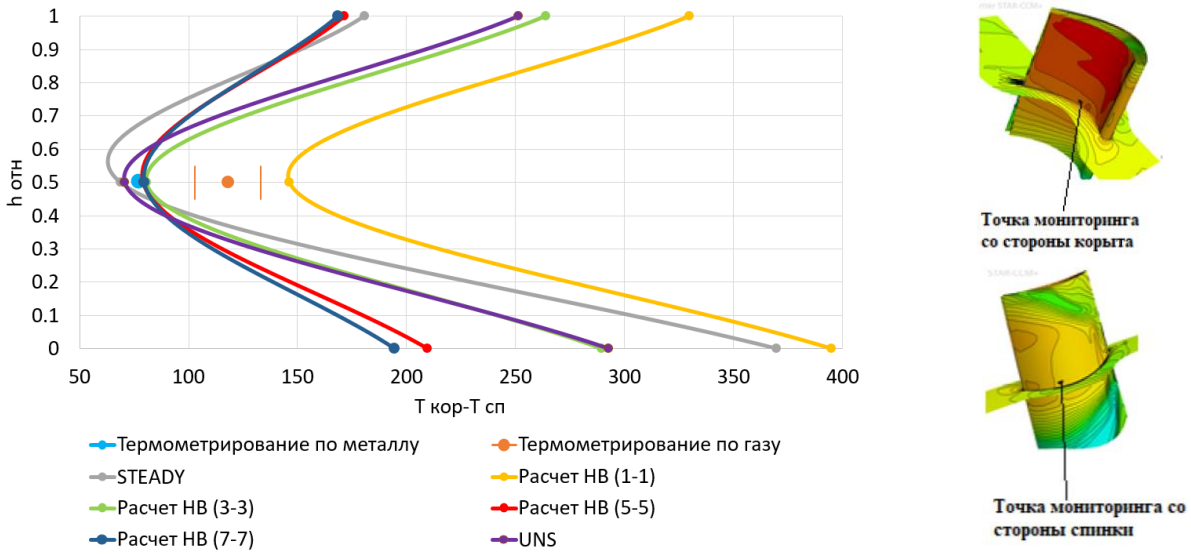


Рис. 3. Распределение температурной сепарации по высоте рабочей лопатки

Как известно из литературы [3], метод ИМТК (измеритель максимальной температуры монокристаллический) основан на использование монокристалла карбида кремния в виде датчика с размерами 0.2×0.2×0.2 мм, который устанавливается в керамический насадок диаметром 1.1 мм. Опытные данные [3] подтвердили, что полная температура газа со стороны корыта выше, чем со стороны спинки, что объясняется сегрегацией температурных полей за охлаждаемым сопловым аппаратом. Более того, отмечено, что минимальная температурная сепарация наблюдается в среднем сечении, а в корневом и периферийном сечении она возрастает. В результате расчетов также была получена температурная сепарация (рис. 3) для двигателя РД-33, величина которой минимальна в среднем сечении и возрастает на втулке и периферии. Метод гармонического баланса дал удовлетворительную точность и позволил сэкономить время в четыре и более раз.

ЛИТЕРАТУРА

1. Августович В.Г., Шмотин Ю.Н. Численное моделирование нестационарных явлений в газотурбинных двигателях. - М.: Машиностроение, 2005. – 536 с.
2. Григорьев А.В., Якунин А.И., Кузнецов Н.Б., Кондратьев В.Ф., Кортиков Н.Н. Расчет нестационарного ротор-статор взаимодействия в турбинной ступени методом гармонического баланса // Научно - технические ведомости СПбГПУ. – 2013. – № 1 (166). – С.183-191.
3. Церетели А.А., Ельшин А.А. Определение температуры рабочего тела в турбине с помощью монокристаллического измерителя максимальной температуры // Авиационные двигатели. 2019. – 2 (3). – С. 31-38.

УДК 532.517

А.С. Романов, С.А. Галаев
Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого(*)

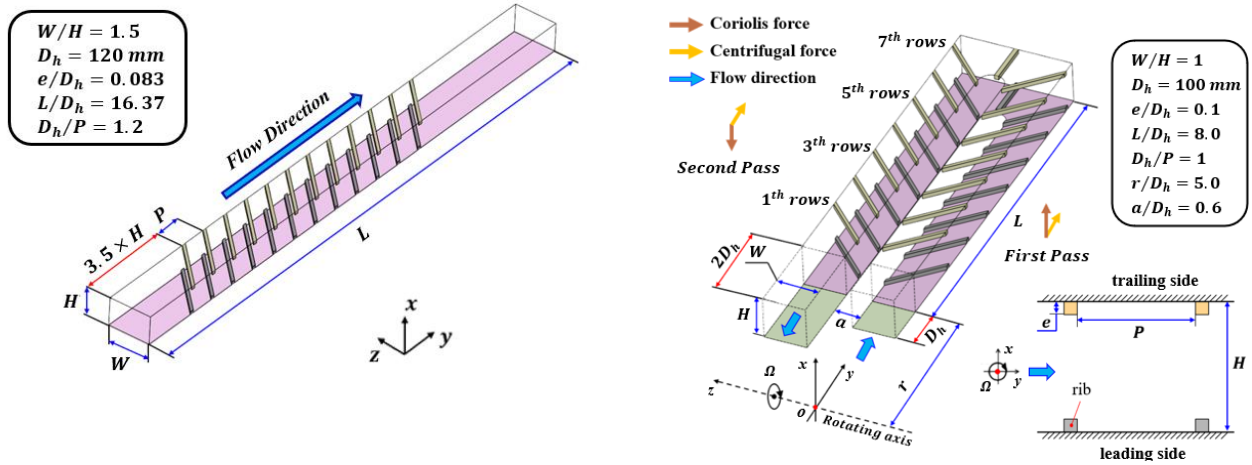
ЛОКАЛЬНЫЕ ОСОБЕННОСТИ ТЕЧЕНИЯ И ТЕПЛООБМЕНА В ОРЕБРЕННЫХ КАНАЛАХ, ТИПИЧНЫХ ДЛЯ СИСТЕМ ОХЛАЖДЕНИЯ РАБОЧИХ ЛОПАТОК ГАЗОВЫХ ТУРБИН

Введение. Повышение температуры термодинамического цикла Брайтона, направленное на рост мощности и увеличение к.п.д. современных газовых турбин, требует эффективного охлаждения лопаточных аппаратов для обеспечения их надежности и долговечности. В контексте продольно-петлевых систем охлаждения рабочих лопаток газовых турбин особый интерес представляют исследования, направленные на изучение особенностей течения и теплообмена в оребренных каналах различной геометрической конфигурации.

Описание математической модели и постановка задачи. В рамках данной работы было выполнено численное моделирование турбулентного течения слабосжимаемого газа в каналах с двухсторонним оребрением. Угол установки оребрения составляет 45°. Расчеты выполнены с использованием метода RANS, модель турбулентности k-ω SST. Рассмотрено два варианта геометрии и две модели среды: течение сжимаемой жидкости с переменными физическими свойствами (Pr = 0.71) в прямом неподвижном канале (постановка *1*) и течение несжимаемой жидкости с постоянными физическими свойствами (Pr = 0.7) в U-образном вращающемся канале (постановка *2*). Варианты геометрии продемонстрированы на рис. 1. Геометрия прямого канала в постановке *1* соответствует геометрии канала в экспериментальном исследовании [1].

(*) А.С. Романов, aleksey.romanov.01@gmail.com

В рамках постановки *1* рассматривалось течение при Re = $1.2\cdot10^5$; $1.4\cdot10^5$; $1.6\cdot10^5$. Профиль скорости на входе в расчетную область полагался развитым, интенсивность турбулентности на входе $Tu_{вх}$ = 1%. В рамках постановки *2* рассматривалось течение при режимных параметрах: {Re, Ro} = {$4\cdot10^4$; –0.15}; {$4\cdot10^4$; 0.0}; {$4\cdot10^4$; 0.15}; {$4\cdot10^4$; 0.3}; {10^5; 0.3}. На входе в расчетную область задавалось среднерасходное значение скорости U_{bulk}, обеспечивающее заданное число Рейнольдса, и $Tu_{вх}$ = 5%. В обеих постановках на выходе из расчетной области поддерживался уровень давления равный атмосферному, величина температурного напора $T_{вх}/T_w$ = 1.08.



(а) (б)

Рис. 1. Схема расчетной области: а) постановка *1*; б) постановка *2*

Расчеты выполнены в программном комплексе Ansys CFX 2020 R2. Для дискретизации диффузионно-конвективных потоков использовалась схема High Resolution. При моделировании турбулентности был реализован низко-рейнольдсовый подход так, что для первого пристенного узла $y^+ < 1$.

Расчетная сетка – квазиструктурированная, размерность расчетной сетки для задачи в постановке *1* составляет 39.5 млн. узлов (~3 млн. узлов на один межреберный участок), для задачи в постановке *2* – 26.4 млн. узлов (~1.5 млн. узлов на один межреберный участок).

Анализ результатов решения задачи. На рис. 2 продемонстрирована визуализация картин течения (Re = $1.6\cdot10^5$) и теплоотдачи, полученных в результате решения задачи в постановке *1*.

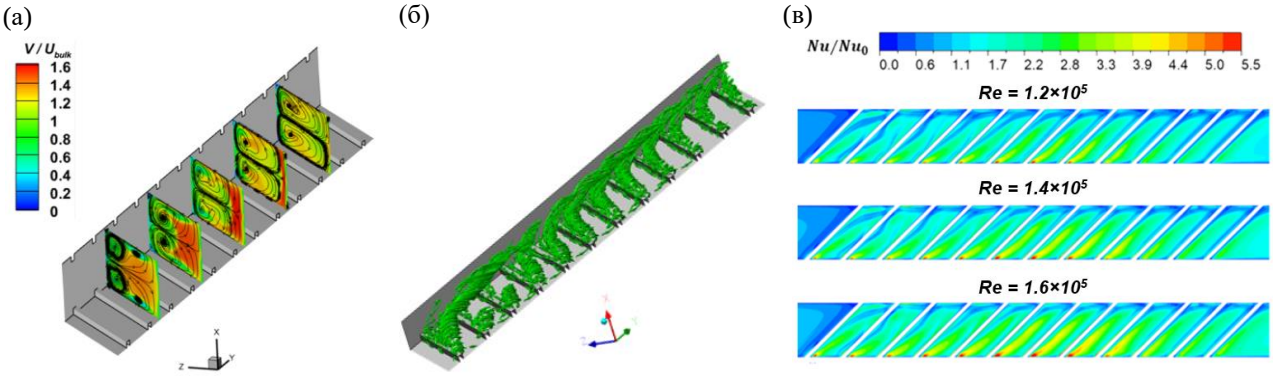


Рис. 2. Визуализация течения и теплоотдачи в постановке *1*: а) безразмерный модуль скорости; б) линии тока на изоповерхности Q-критерия; в) интенсификация теплоотдачи на стенке с ребрами

Периодически расположенные наклонные ребра вызывают появление глобальной закрутки потока в каждой из половин канала (рис. 2а). Срывающийся с кромки ребра поток приводит к формированию вихря, который распространяется по диагонали вдоль стенки в межреберном пространстве (рис. 2б). Образование вышеописанных вихревых структур играет основную роль в интенсификации теплоотдачи относительно гладкого канала Nu/Nu_0 ($Nu_0 = 0.023Re^{0.8}Pr^{0.4}$). Развитие вихревых структур ведет к росту интенсификации на первых пяти-шести сегментах, дальнейшее ее изменение происходит немонотонно (рис. 2в).

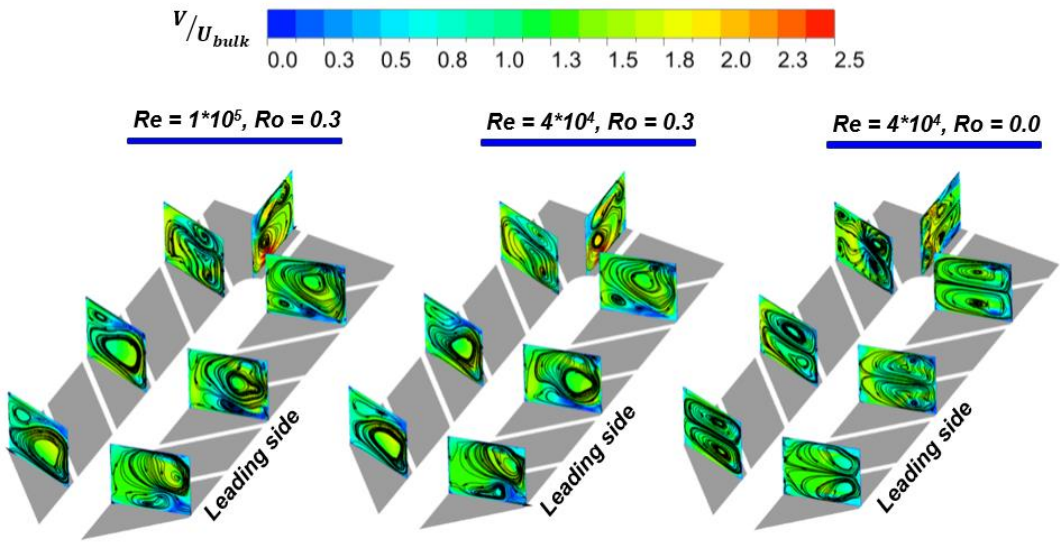


Рис. 3. Распределения безразмерного модуля скорости и линии тока в постановке *2*

На рис. 3 продемонстрирована визуализация картин течения, полученных в рамках решения задачи в постановке *2* для трех вариантов наборов режимных параметров.

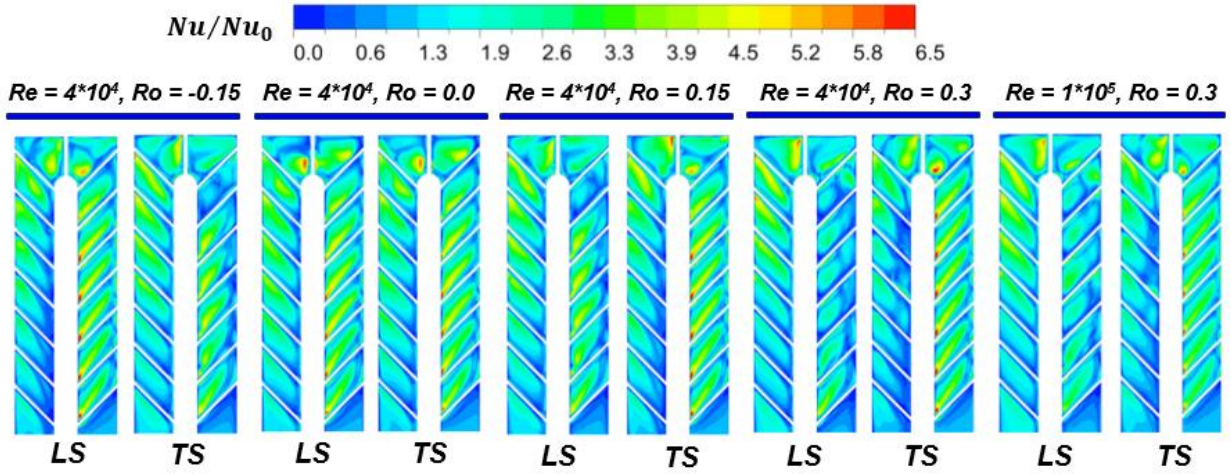


Рис. 4. Интенсификация теплоотдачи в U-образном канале с двухсторонним оребрением (LS – Leading side; TS – Trailing side)

В результате вращения происходит сдвиговая модификация течения за счет действия силы Кориолиса. По линиям тока трансверсальной скорости видно, что одна из вихревых структур преобладает в масштабе относительно другой, оттеснение более масштабного диагонального вихря происходит к стенке, внешняя нормаль которой сонаправлена с вектором действия силы Кориолиса. В результате такого изменения в картине течения интенсивность теплоотдачи (рис. 4) на противоположных стенках U-образного канала может различаться в

1.5 ÷ 2 раза в зависимости от параметра вращения. При этом интенсивность теплоотдачи больше на тех стенках, к которым происходит оттеснение вихрей большего масштаба. На поворотном участке U-образного канала происходит общее увеличение интенсивности теплоотдачи, вызванное влиянием вторичных вихрей, образованных вследствие инерционного отрыва потока. Также стоит отметить интегральное ухудшение интенсивности теплоотдачи в случае вращения U-образного канала, осредненные значения степени интенсификации теплообмена по всем стенкам канала представлены в табл. 1.

Табл. 1. Интегральные значения нормированного числа Нуссельта (Nu/Nu_0) по всем стенкам U-образного канала

Режимные параметры течения {Re, Ro}	**Интегральное значение Nu/Nu_0**		
	Leading Side	Trailing Side	По всем стенкам канала
$\{4\cdot10^4; -0.15\}$	1.94	1.88	1.74
$\{4\cdot10^4; 0.0\}$	2.03	2.01	1.81
$\{4\cdot10^4; 0.15\}$	1.89	2.01	1.76
$\{4\cdot10^4; 0.3\}$	1.71	1.89	1.69
$\{10^5; 0.3\}$	1.82	1.89	1.74

Заключение. В каналах с наклонным оребрением вследствие срыва потока с задней кромки верхней грани ребра образуется крупномасштабный вихрь, играющий основную роль в интенсификации теплоотдачи. Теплоотдача в оребренном канале возрастает по сравнению с гладким на 126–180 %.

Для прямого канала изменение интенсивности теплоотдачи на межреберных стенках увеличивается на первых 5-6 сегментах по ходу развития течения, дальнейшие изменение происходит немонотонно.

Для межреберных стенок U-образного канала наблюдается интегральное ухудшение интенсивности теплоотдачи в случае его вращения.

ЛИТЕРАТУРА

1. Байбузенко И.Н. Совершенствование воздушно-конвективных систем охлаждения лопаток турбин с внутриканальным оребрением для энергетических газотурбинных установок большой мощности, дисс. к.т.н., МГТУ — М., 2019.

УДК 519.6:533.6.011

А.И. Рябикова, Е.В. Бабич, Е.В. Колесник
Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого(*)

ЧИСЛЕННОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ ДВУМЕРНОГО ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ СВЕРХЗВУКОВОГО ПОТОКА ВЯЗКОГО ГАЗА СО СТРУЕЙ, ВДУВАЕМОЙ С ПОВЕРХНОСТИ ПЛАСТИНЫ

Введение. Задача о поперечно-щелевом вдуве струи в сверхзвуковой поток представляет значительный практический интерес в связи с широким спектром инженерных приложений [1]. Например, поперечно-щелевой вдув используется в системах управления сверхзвуковыми

(*) Е.В. Бабич, lll.helen.lll@mail.ru

летательными аппаратами для стабилизации режима обтекания; в гиперзвуковых прямоточных воздушно-реактивных двигателях (ГПВРД) для улучшения смесеобразования и горения топлива. Кроме того, поперечно-щелевой вдув исследуется в задачах аэродинамического торможения и теплозащиты элементов конструкций, подверженных интенсивному нагреву.

Для детального изучения данного класса задач необходимо использовать надежные методы численного моделирования, способные воспроизводить эффекты, характерные для данной конфигурации течения. В настоящей работе представлены результаты численного исследования модельной задачи двумерного обтекания пластины сверхзвуковым потоком воздуха и вдуваемой в него стационарной струи того же состава (рис. 1). Постановка основана на экспериментальной работе [2], что дает возможность провести подробные методические расчеты, нацеленные на выбор оптимальной вычислительной модели, включая исследование влияния модели турбулентности, используемых численных схем и подбор оптимальных параметров расчетных сеток.

Постановка задачи. Пластина обтекается сверхзвуковым потоком воздуха (единичное число Рейнольдса $\mathrm{Re} = 1.43 \cdot 10^7$ [1/м], $\mathrm{Re}_L = 4.3 \cdot 10^6$, $\mathrm{M} = 3.5$), в который перпендикулярно вдувается стационарная струя того же состава. Расчетная область (рис. 1) представляет прямоугольник высотой $H = 0.075$ м, общая длина пластины $L = 0.3$ м, расстояние от передней кромки пластины до щели $l = 228.47$ мм и протяженность отверстия $w = 0.2667$ мм. В качестве рабочего газа использовался воздух ($\gamma = 1.4$ и $C_p = 1005$ Дж/(кг·К), $\mathrm{Pr} = 0.71$). Полная температура набегающего потока $T_{0\infty} = 298.4$ К. Через узкую щель вдувается струя, при этом число Маха на срезе сопла полагалось равным 1, отношение температур $T_j/T_\infty = 3.45$ не менялось. Расчеты проводились для четырех значений отношения давления струи к давлению набегающего потока [2]: $P_j/P_\infty = 8.74$, 17.12, 42.79 и 63.5.

Решались осредненные по Рейнольдсу уравнения Навье-Стокса для совершенного газа. Предписывались следующие граничные условия: на входе и на срезе отверстия – однородный профиль с заданными параметрами для сверхзвукового набегающего потока и вдуваемой струи соответственно, на пластине – условие прилипания (адиабатическая стенка), на верхней границе области – неотражающее условие, на правой границе – выходное условие. Интенсивность турбулентности, *Tu*, и отношение турбулентной вязкости к молекулярной, *TVR*, для входных границ составили 0.01% и 1 соответственно.

Численные решения получены с применением конечно-объемного «неструктурированного» программного кода, прошедшего многолетнюю апробацию, SINF/Flag S, разрабатываемого в СПбПУ [3]. Для проведения расчетов использовались вычислительные ресурсы суперкомпьютерного центра Санкт-Петербургского политехнического университета Петра Великого (www.scc.spbstu.ru).

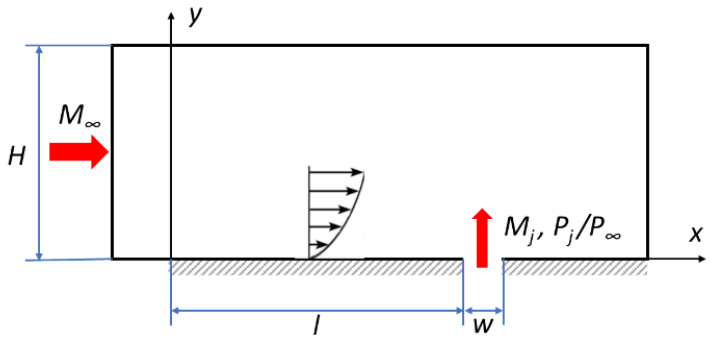


Рис. 1. Общий вид расчетной области

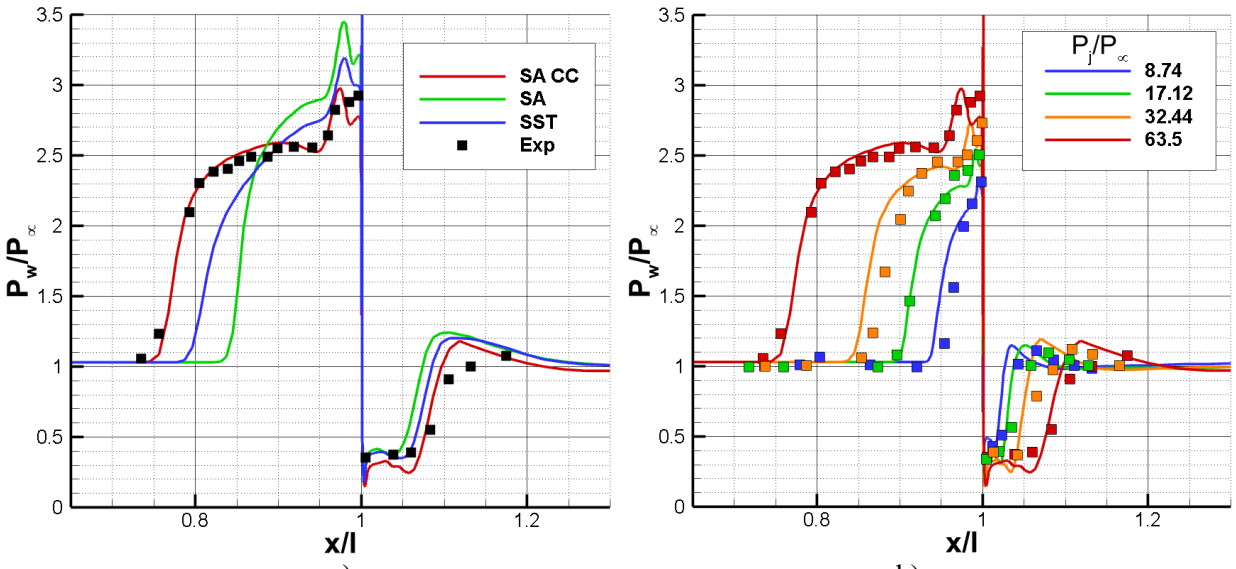
Методические исследования. Для исследования сеточной сходимости использовалось две квазиструктурированные расчетные сетки с прямоугольным типом элементов: базовая и

измельченная. Количество ячеек базовой сетки составило 40590; по всей поверхности пластины $y^+ < 1$. Измельченная сетка была получена из исходной путем уменьшения размера ячеек в два раза в продольном направлении в области вблизи струи (с сохранением размера первой пристенной ячейки). Незначительные отличия в распределении давления, полученных при использовании базовой и измельченной сеток, позволяют считать базовую сетку достаточной для проведения дальнейших расчетов.

Исследование влияния схем аппроксимации конвективных потоков (AUSM+up, Roe и HLL второго порядка точности) показало, что результаты, полученные с применением схемы HLL, которая характеризуется более диссипативными свойствами, немного отличались от других схем и от эксперимента. Для дальнейших расчетов использовалась схема AUSM+up, ввиду ее высокой устойчивости и низкой диссипативности.

Распределения давления, полученные в расчетах с использованием разных моделей турбулентности ($k-\omega$ *SST* модель Ментера 2003, модель Spalart Allmaras без учета поправки на сжимаемость (SA) и с учетом этой поправки (SA CC)) показаны на рис. 2a. Видно, что модель SA CC предсказывает распределение давления, которое лучше всего согласуется с полученным в эксперименте. Остальные модели предсказывают значительно менее протяженный участок постоянного («слабо меняющегося») давления на пластине. Представленные ниже результаты получены с использованием модели турбулентности SA CC.

Анализ результатов. На рис. 2*b* приведены распределения давления вдоль пластины для случаев с разными значениями P_j/P_∞. Видно, что во всех случаях наблюдается хорошее согласие с экспериментальными данными, что позволяет считать методику расчета надежной. При изменении P_j/P_∞ картина течения масштабируется без изменения общей конфигурации в целом, поэтому для описания структуры потока выбран только один случай с наибольшим отношением давления $P_j/P_\infty = 63.5$.



a) b)

Рис. 2. Распределение давления вдоль пластины в случае a) $P_j/P_\infty = 63.5$ и разных моделей турбулентности b) разных значений P_j/P_∞

На рис. 3 видно, что перед отверстием появляется косой скачок уплотнения, индуцируемый отрывной зоной, которая состоит из двух вихрей (для осредненного течения). Более протяженный вихрь создает область постоянного давления, что проявляется в виде плато на соответствующем графике (рис. 3). Из-за торможения натекающего сверхзвукового потока образуется серия косых скачков уплотнения, в том числе появляется нависающий скачок уплотнения при расширении струи и отошедший скачок. Ниже по потоку струя

разворачивается параллельно пластине и появляется область рециркуляции, в которой под основным вихрем наблюдается формирование менее интенсивного дополнительного вихря.

Анализ результатов, полученных при задании разных значений отношения давлений, показал, что при меньших P_j/P_∞ уменьшаются и гидродинамические потери за счет сокращения отрывных зон и ослабления ударных волн, но, вместе с этим, снижается эффективность турбулентного перемешивания.

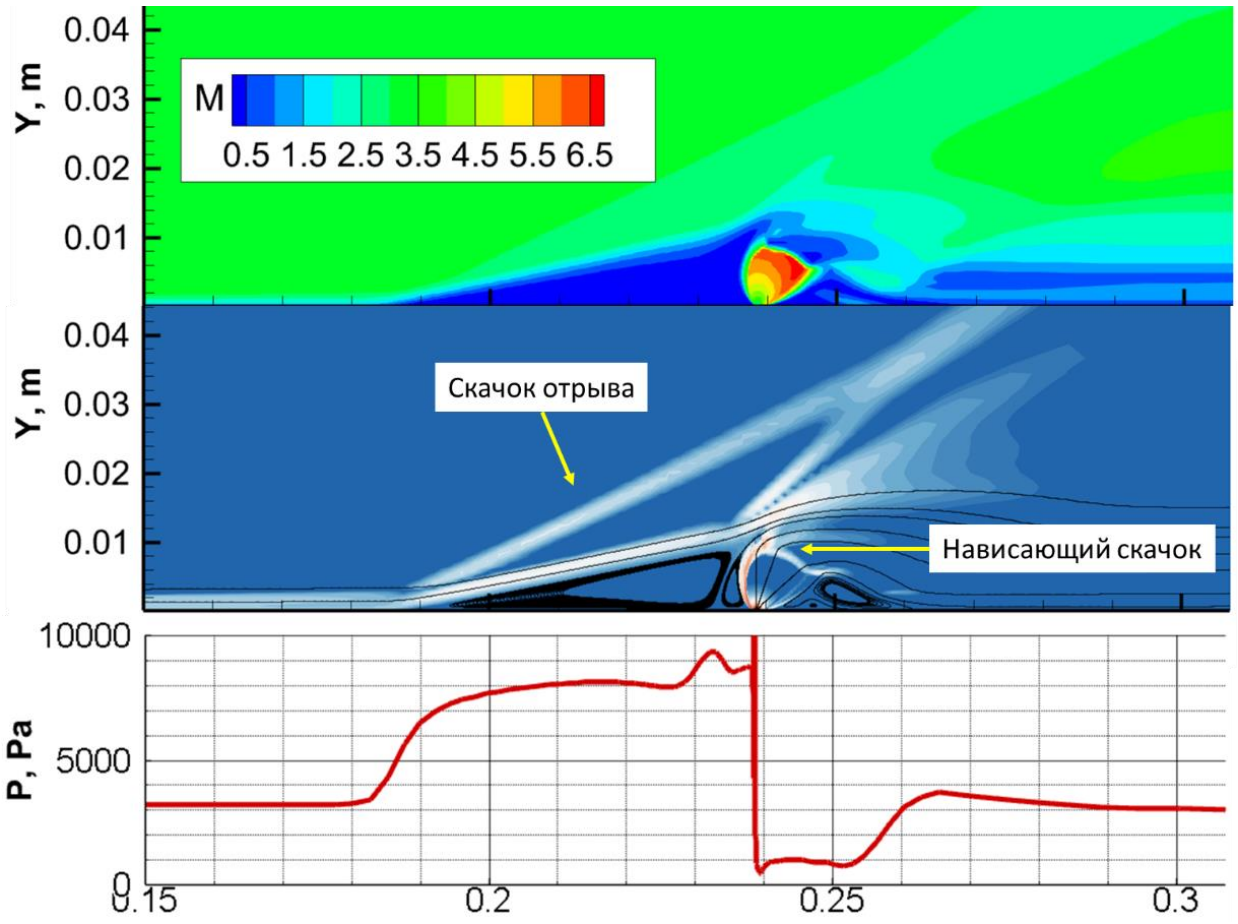


Рис. 3. Поле числа Маха, модуля градиента плотности и распределение давления вдоль пластины для варианта $P_j/P_\infty = 63.5$

ЛИТЕРАТУРА

1. Huang W. Transverse jet in supersonic crossflows //Aerospace Science and Technology. – 2016. -Vol. 50. – № 6. – P. 183-195.

2. Spaid F.W. A study of the interaction of gaseous jets from transverse slots with supersonic external flows // AIAA Journal. – 1968. – Vol. 6. – № 2 – P. 205-212.

3. Smirnov E.M., Zaitsev D.K., Smirnovsky A.A, Kolesnik E.V., Pozhilov A.A. Assessment of several advanced numerical algorithms implemented in the CFD code SINF/Flag-S for supercomputer simulations // Supercomputing Frontiers and Innovations. – 2024. – Vol. 11. – № 2. – P. 14-31.

УДК 536.46:544.3:661.48

Е.В. Садикова[1,2], Д.С. Пашкевич[1,2], Т.А. Федорова[1,2]
[1]Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого[(*)]
[2]ООО "Аврора Кемикалс"

ПОСТРОЕНИЕ КИНЕТИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ ФТОРИРОВАНИЯ ЭТИЛЕНА И ФТОРЭТАНОВ ТРИФТОРИДОМ КОБАЛЬТА

Фторирование этилена и фторэтанов трифторидом кобальта CoF_3 является одним из способов получения гексафторэтана C_2F_6 (далее ГФЭ), который широко используют для травления кремния при производстве микропроцессоров. В России производство ГФЭ отсутствует, что делает разработку научных основ отечественной технологии актуальной задачей.

При синтезе ГФЭ этилен фторируют CoF_3 при температуре 200-400 °С:

$$H_2C{=}CH_{2,газ}+10CoF_{3,тв} \rightarrow F_3C\text{-}CF_{3,газ}+4HF_{газ}+10CoF_{2,тв}–1.19\ МДж. \quad (1)$$

Тепловой эффект (1) достаточно высок и адиабатический разогрев продуктов реакции без учета их диссоциации достигает 1035 К при начальной температуре исходных веществ 300 К.

Термодинамическими расчетами было показано, что ГФЭ в условиях синтеза является веществом термодинамически не равновесным – в термодинамически равновесной смеси веществ присутствует единственный фторуглерод тетрафторметан CF_4 во всем реальном диапазоне изменения температуры [1]. При температуре выше 400-450 °С углеродная связь во фторэтанах подвергается фторированию с технологически неприемлемой скоростью. Поэтому фторирование целесообразно проводить в стационарном тепловом режиме, отводя выделяющееся тепло из зоны реакции.

Кроме того, расчетами было показано, что трифторид кобальта в условиях проведения (1) не газифицируется и не диссоциирует с образованием фтора. Таким образом, (1) является процессом топохимическим, т.е. протекает через стадию адсорбции фторируемых газов на поверхности частиц фторидов кобальта.

Для исследования теплового состояния реактора для реализации (1) с помощью численного моделирования необходимо знание кинетических моделей фторирования этилена и фторэтанов трифторидом кобальта, которые не удалось обнаружить в литературе. Целью данной работы является построение указанных моделей на основе литературных данных по скорости фторирования указанных веществ в изотермических условиях [2].

На основании данных по скорости фторирования этилена и фторэтанов [2-3] были построены зависимости $\ln k = f(T^{-1})$ для начальных участков кривых зависимости глубины превращения от времени, когда глубиной превращения исходных веществ можно пренебречь, для процессов фторирования этилена (табл.1–2 [2]), трифторэтанов (табл. 2 [2]) и пентафторэтана (табл. 2 [3]), рис. 1. На этом рисунке имеют место две группы прямых с существенно различными углами наклона – 1-4 и 5-6. Прямые 1-4 соответствуют процессам водородзаместительного фторирования фторэтанов, а кривые 5-6- фторированию этилена.

Результаты расчета значений энергии активации и предэкспоненциального множителя для процессов 1-6 по модели реакции нулевого порядка представлены в табл. 1.

Анализ значений энергии активации, позволил сделать предположение, что в исследуемой реагирующей системе протекают два процесса, существенно различающиеся кинетическими параметрами:

$$H_2C{=}CH_{2,газ}+HF_{газ} \rightarrow H_3C\text{-}CH_2F_{газ}+51\ кДж, \quad (2)$$

(*) Е.В. Садикова, sadikova_ev@mail.ru

$$H_3C\text{-}CH_2F_{газ}+10CoF_{3,тв} \rightarrow F_3C\text{-}CF_{3,газ}+5HF_{газ}+10CoF_{2,тв}–1.24\ МДж. \quad (3)$$

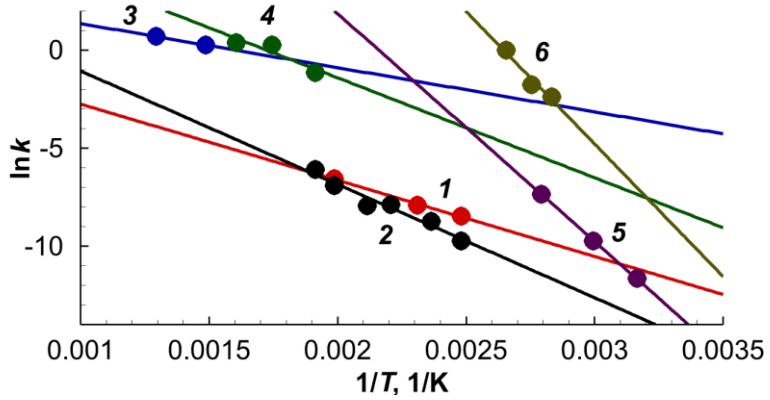


Рис. 1. Зависимости ln*k*=f(1/*T*) для процесса фторирования трифторидом кобальта ПФЭ (*1*– 130–230°С, 100 кПа, tgα=3883; *2*– 130–250°С, 50 кПа, tgα=5779, *3*– 400–500 °С, 3 кПа, tgα=2250); фторирования трифторэтанов (*4*– 250–350°С, 3 кПа, tgα=5097); этилена (*5*– 43–85°С, 100 кПа, tgα=11616, *6*– 80–105°С, 3 кПа, tgα=12859)

Табл. 1. Значения энергии активации E и предэкспоненциального множителя $к_0$ для процессов фторирования этилена, трифторэтанов и пентафторэтана, рассчитанные по литературным данным для различных интервалов температуры ΔT и начальных давлений фторируемых веществ P_0

№	Процесс	ΔT, °С	P_0, кПа	E, кДж·моль$^{-1}$	$к_0$, с$^{-1}$
1	Фторирование пентафторэтана	130–230	100	32.2	2.39
2	Фторирование пентафторэтана	130–250	50	48.0	119
3	Расходование пентафторэтана при фторировании этилена	400–500	3	18.7	36.6
4	Расходование трифторэтанов при фторировании этилена	250–350	3	42.4	6.75×10^3
5	Расходование этилена при фторировании этилена	43–85	100	96.5	7.86×10^{10}
6	Расходование этилена при фторировании этилена	80–105	3	106.8	5.42×10^{14}

Для процесса (2) характерно значение энергии активации 100 кДж/моль. Необходимо отметить, что фторид водорода обычно присутствует на трифториде кобальта в адсорбированном состоянии, т.к. CoF_3 получают из CoF_2 фторированием анодным газом электролитического производства фтора, в котором содержится 5-6 об. % фторида водорода. Таким образом, (2) может протекать и до начала водородзаместительного фторирования (3), которое сопровождается образованием HF.

Для (3) значение энергии активации меняется от 19 до 48 кДж/моль, что позволяет предположить, что лимитирующей стадией (3) является перенос фтора через слой дифторида кобальта к поверхности частицы, на которой протекает фторирование адсорбированного газа.

В диапазоне изменения давления от 3 до 100 кПа безразмерная скорость водородзаместительного фторирования фторэтанов зависит от давления неоднозначно. В диапазоне 50–100 кПа скорость фторирования растет пропорционально росту давлению в степени 0.5. В тоже время для расчета скорости реакции при давлении 100 кПа по моделям, полученным при 3 кПа, необходимо вводить поправочный множитель $(100000/3000)^{-1,75}$. Т.е. безразмерная скорость фторирования увеличивается в указанном диапазоне изменения давления со снижением начального давления фторэтана.

Авторы [2, 3] указывают на то, что адсорбция фторида водорода на поверхности частиц фторидов кобальта существенно влияет на скорость водородзаместительного фторирования, особенно при температуре ниже 200 °С. Вероятно, что неоднозначная зависимость скорости водородзаместительного фторирования от давления связана с конкурирующим влиянием адсорбции HF, который может и блокировать поверхность и выступать катализатором целевой реакции, и фторэтанов на поверхности частиц.

Обычно процесс (1) проводят при давлении порядка 0,1 МПа. Поэтому при учете влияния расходования фторэтанов в кинетическом уравнении целесообразно использовать функцию торможения вида $(1-\eta)^{0,5}$ для нулевого порядка реакции по CoF_3, где η – безразмерная глубина превращения фторируемого фторэтана.

Разработанные кинетические модели могут быть использованы для расчетного анализа теплового состояния реактора по синтезу ГФЭ фторированием этилена трифторидом кобальта с целью определить область изменения параметров, в которой развитие теплового взрыва и локализация зоны реакции в форме волны фильтрационного горения исключены.

Работа выполнена при поддержке гранта РНФ № 24-91-18003.

ЛИТЕРАТУРА

1. Садикова Е.В., Пашкевич Д.С., Капустин В.В. Термодинамический анализ термостабильности трифторида кобальта / Материалы Всероссийской конференции «Неделя науки ФизМех». 1-5 апреля 2024 г., г. Санкт-Петербург. Россия. – С.451–452.
2. Pashkevich D.S., Kostyaev R.A. Desorption of Reaction Products in Fluorination of Ethylene with Cobalt Trifluoride // Russian Journal of Applied Chemistry. – 1994. – V.67, № 10. – P.1426-1430.
3. Kostyaev R.A.., Pashkevich D.S. Role of Hydrogen Fluoride and Cobalt Difluoride in Fluorination of Hydrocarbons with Cobalt Trifluorid // Russian Journal of Applied Chemistry. – 1994. V.67, № 12. – P.1759-1764.

УДК 536.24

А.В. Семенюта, А.С. Стабников
Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого(*)

ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ КИПЕНИЯ НЕДОГРЕТОЙ ВОДЫ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ ПРОГРАММНЫХ ПАКЕТОВ ANSYS FLUENT И ANSYS CFX

Введение. Тепловыделяющие сборки (ТВС) ядерных реакторов представляют собой конструкции, состоящие из тепловыделяющих элементов (ТВЭЛ) – цилиндрических стержней, охлаждаемых теплоносителем (водой). При моделировании ТВС необходимо решить задачу продольного обтекания пучка ТВЭЛ, которое может сопровождаться фазовым переходом. Для таких течений выделяется несколько режимов: от однофазного потока жидкости до однофазного потока пара. Так, до достижения жидкостью температуры насыщения теплообмен между ней и ТВЭЛ осуществляется только за счет теплопроводности, а при достижении этой температуры начинается поверхностное кипение. При этом основная масса жидкости еще недогрета до температуры насыщения, поэтому данный режим называется пузырьковым кипением недогретой жидкости, а основным механизмом передачи тепла от ТВЭЛ становится парообразование. По мере увеличения паросодержания большая часть объема оказывается занята паром, а жидкость остается только в тонком слое у стенки. При высыхании этой жидкостной пленки основной механизм теплопередачи вновь сменяется на теплопроводность, но уже между ТВЭЛ и паром, из-за чего коэффициент теплоотдачи резко

(*) А.В. Семенюта, alsemenyuta86@gmail.com

падает (это явление носит название кризиса теплоотдачи), что приводит к возрастанию температуры стержней и может привести к аварии [1]. Таким образом, для достижения большей эффективности реакторов и сохранения безопасности их эксплуатации, конструкторы стремятся реализовать охлаждение за счет кипения недогретой жидкости, не допуская при этом кризиса теплоотдачи. Это делает моделирование подобных течений важной и актуальной задачей.

Задача о течении в канале с обогреваемыми стенками с учетом кипения сложна и может решаться с помощью различных подходов. В инженерной практике распространено использование одномерных кодов, в которых не учитываются особенности реальной геометрии ТВС. В последнее время для описания кипения недогретой жидкости все чаще используются CFD расчеты [2], в которых для моделирования теплообмена при кипении используется модель RPI (Rensselaer Polytechnic Institute) [3]. Формулировка этой модели чрезвычайно сложна, а ее использование сопряжено со значительными вычислительными трудностями. Целью настоящей работы является анализ возможностей этой модели, реализованной в коммерческих вычислительных кодах Ansys Fluent и Ansys CFX, в рамках решения модельной задачи о течении жидкости в круглой вертикальной трубе с обогреваемой стенкой. Эта задача хорошо исследована экспериментально. В данной работе постановка задачи соответствует условиям эксперимента [4].

Постановка задачи. Рассматривается осесимметричное течение в круглой вертикальной трубе с диаметром D = 15.4 мм и длиной L = 2 м. На стенке трубы задавались условия прилипания и непроницаемости, а также постоянный тепловой поток $5.7 \cdot 10^5$ $^{\text{Вт}}/_{\text{м}^2}$. На входной границе задавался массовый расход 900 $^{\text{кг}}/_{\text{м}^2 \cdot \text{с}}$ с постоянной температурой на 58.2 К меньше температуры кипения. На выходной границе задавалось постоянное давление.

Для описания двухфазного течения используется модель взаимопроникающих континуумов, в рамках которой в каждой точке расчетной области одновременно решаются уравнения для каждой из фаз, а взаимодействие между ними описывается при помощи объемных источников в этих уравнениях. Учитывались следующие межфазные силы: сила сопротивления (модель Ishii-Zuber [5]), турбулентная дисперсия (модель Burns et al. [6]) и турбулентное взаимодействие (модель Sato [7]), а остальные силы не принимались во внимание. Для моделирования теплообмена и кипения на стенке используется модель RPI, в рамках которой предполагается, что тепло передается от стенки к жидкости с помощью трех механизмов: теплопроводность между жидкостью и стенкой, парообразование, а также теплопроводность между стенкой и относительно холодной водой, заполняющей центры парообразования после отрыва пузырька.

Для замыкания уравнений Рейнольдса используется стандартная *k*-ε модель с масштабируемыми пристенными функциями.

Из литературы (см., например, [8]) известно, что при моделировании кипения недогретой жидкости с использованием модели взаимопроникающих континуумов и RPI модели зачастую не удается достичь сеточной сходимости. Более того, отмечается, что измельчение сетки по нормали к стенке неблагоприятно влияет на сходимость итераций, поэтому рекомендуется использовать сетки с первым пристеночным шагом, соответствующем значению $\Delta y^+ \approx 50$ в переменных закона стенки. В рассматриваемой задаче этой рекомендации соответствует сетка с шагом $\Delta y = D/40$.

Для прояснения этого вопроса в настоящей работе расчеты проводились на сетках с постоянными шагами и различным количеством узлов: 150x10, 150x20, 150x40, 150x80, 150x160 и 300x20 (первое число соответствует количеству ячеек в направлении потока, а второе – в поперечном направлении).

Результаты. Несмотря на то, что с измельчением сетки по нормали к стенке сходимость ухудшалась, в конечном итоге удалось получить сошедшиеся по итерациям решения для всех

построенных сеток с использованием обоих коммерческих расчетных кодов. Результаты расчетов показали, что решение не зависит от шага сетки в продольном направлении. Влияние шага сетки в поперечном направлении представлено на рис. 1. При использовании пакета Ansys Fluent не удается достичь сеточной сходимости, измельчение сетки приводит к смещению точки начала кипения вверх по потоку и увеличению объемной доли пара. Решения, полученные с использованием Ansys CFX, практически не различаются между собой.

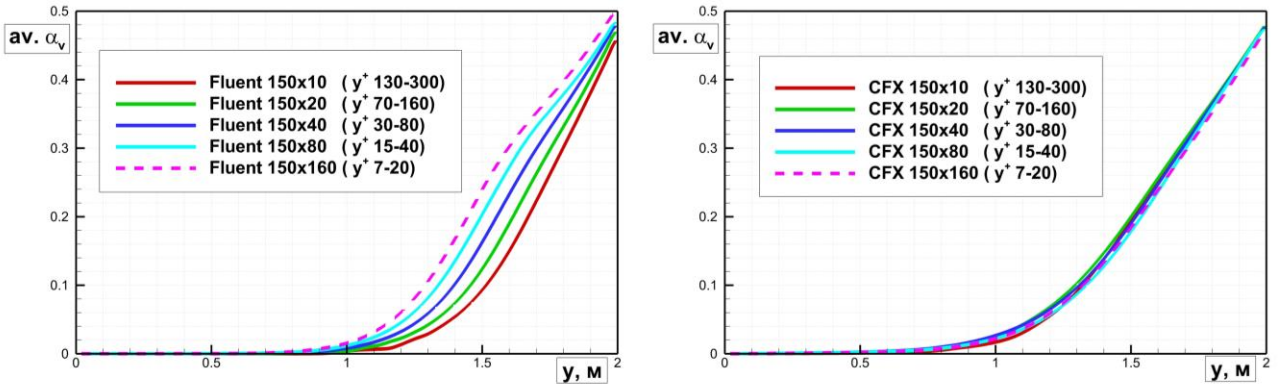


Рис. 1. Сравнение распределений осредненной по сечению объемной доли пара от продольной координаты, полученной в расчетах на разных сетках при помощи Ansys Fluent и Ansys CFX

Ввиду отсутствия сеточной сходимости в результатах, полученных с использованием Ansys Fluent, сравнение с экспериментальными данными [4] проводилось только для решения, полученного с использованием Ansys CFX. Из рисунка 2, на котором представлено сравнение расчетного распределения осредненной по сечению объемной доли пара с результатами эксперимента, видно, что расчет предсказывает начало кипения выше по потоку и более высокое содержание пара, чем в экспериментальном исследовании.

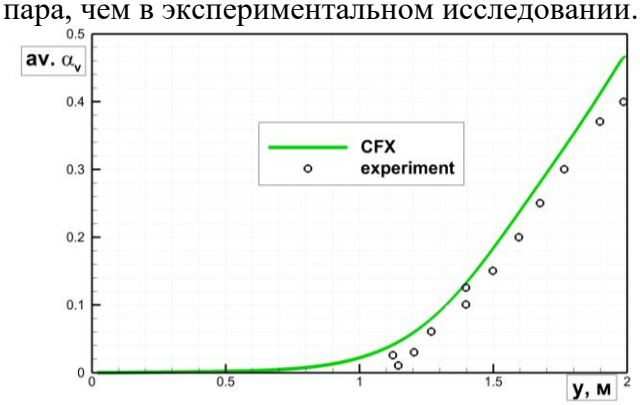


Рис. 2. Сравнение распределения осредненной по сечению объемной доли пара от продольной координаты, полученной в расчете с использованием Ansys CFX, с экспериментальными данными

Заключение. В работе проведены расчеты модельной задачи о течении жидкости в круглой вертикальной трубе с обогреваемой стенкой с использованием вычислительных кодов Ansys Fluent и Ansys CFX. Исследование сеточной зависимости показало, что измельчение сетки в направлении по нормали к стенке оказывает влияние на сходимость внутренних итераций. При использовании пакета Ansys Fluent не удалось достичь сеточной сходимости, в то время как решения, полученные с использованием Ansys CFX, практически не зависят от используемой сетки. Сравнение с экспериментом показало, что в расчете с использованием Ansys CFX начало кипения находится выше по потоку, а объемная доля пара выше, чем в эксперименте, на всем протяжении трубы.

ЛИТЕРАТУРА
1. Кириллов П.Л., Богословская Г.П. Краткая история исследований кризиса теплообмена в России и за рубежом (очерки о проблеме и четырех ученых) – Обнинск: АО «ГНЦ РФ ФЭИ», 2019. – 38 с.
2. Wang M.J., Wang Y.J., Tian W.X., Qiu S.Z., Su G.H. Recent progress of CFD applications in PWR thermal hydraulics study and future directions // Annals of Nuclear Energy. – 2021. – Vol. 150.
3. Kurul N., Podowski M. On the modeling of multidimensional effects in boiling channels / Proceedings of the 27th National Heat Transfer Conference. – Minneapolis, 1991. – P. 30-40.
4. Бартоломей Г.Г., Чантурия В.М. Экспериментальное исследование истинных паросодержаний при кипении недогретой воды в вертикальных трубах // Теплоэнергетика. – 1967. – № 2. – С. 80-83.
5. Ishii M., Zuber N. Drag coefficient and relative velocity in bubbly, droplet or particulate flows // AIChE J. – 1979. – Vol. 25. – P. 843-855.
6. Burns A., Frank T., Hamill I., Shi J.M. (2004). The Favre Averaged Drag Model for Turbulent Dispersion in Eulerian Multi-Phase Flows / In Proceedings of the 5th International Conference on Multiphase Flow. – Yokohama, 2004. – P. 1-17.
7. Sato Y., Sadatomi M., Sekoguchi K. Momentum and heat transfer in two-phase bubble flow // International Journal of Multiphase Flow. – 1981. – Vol. 7. – P. 167-190.
8. Yang S., Ren B., Yang L., Chen C., Lu Q., Wei Z. Investigation of the Impact of Near-Wall mesh size on the Transition from Microscopic Wall Boiling Mechanism to Macroscopic Multiphase-CFD Models // Applied Thermal Engineering. – 2024. – Vol. 244.

УДК 519.672

А.А. Смирнов, Ю.М. Циркунов
БГТУ «ВОЕНМЕХ» им. Д.Ф. Устинова(*)

АНАЛИЗ ПРИМЕНИМОСТИ МОДЕЛЕЙ ГОРЕНИЯ ДЛЯ ИССЛЕДОВАНИЯ ФИЗИКО-ХИМИЧЕСКИХ ПРОЦЕССОВ В КАМЕРАХ СГОРАНИЯ ЭНЕРГЕТИЧЕСКИХ УСТАНОВОК

В условиях санкций и остро необходимого импортозамещения российская промышленность уделяет особое внимание разработке собственных энергетических установок. Разработка и изготовление газовых турбин входит в перечень приоритетных направлений проектов технологического суверенитета Российской Федерации. Создание энергетических установок большой и малой мощности требуют подробного исследования сложных газодинамических и физико-химических процессов в камерах сгорания турбомашин. Компьютерное моделирование и анализ течений с помощью современных численных методов является общепринятым подходом в современных исследованиях и разработках в современном энергомашиностроении и, в частности, в турбостроении.

Цель работы заключалась в проведении сравнительного анализа существующих подходов к моделированию физико-химических процессов в камерах сгорания энергетических установок.

Важнейшим компонентом моделирования процессов в камерах сгорания энергетических установок является выбор модели горения и наиболее значимых химических реакций. В литературе известно несколько моделей горения. В работе приводится сравнение основных моделей горения с использованием пакета ANSYS Fluent [1] и обосновывается выбор модели частично предварительно перемешанной смеси. Модель является комбинацией модели предварительно не перемешанной и предварительно перемешанной смеси [2]. Частичное предварительное смешение возникает в том случае, когда окислитель и горючее, попадая в область, в которой происходит окисление, смешиваются неравномерно. При этом компоненты

(*) А.А. Смирнов, smirnov_aan@voenmeh.ru

топлива и компоненты, заполняющие область впрыска, являются предварительно смешанными. Данная особенность течения характерна для камер сгорания газовых турбин и авиационных двигателей. Обычно используется механизм GRI-Mech 3.0, учитывающий кинетику окисления метана, с участием 53 компонентов и 325 реакций [3]. Механизм включает основные реакции горения, реакции образования NO и других компонентов. Характерное число Рейнольдса в рассматриваемых течениях имеет порядок 10^4 и, следовательно, течение во всех случаях является турбулентным.

В данной работе рассматриваются особенности, преимущества и недостатки основных моделей горения (концепция диссипации вихря; модель диссипации вихря; модель частично предварительно перемешанной смеси и модель конечной скорости химической реакции), получивших широкое распространение для моделирования процессов горения в камерах сгорания энергетических установок различного назначения. Подробно анализируется кинетика горения метана с учетом особенностей химических реакций. Формируется математическая модель и численно исследуется процесс струйного истечения, смешения и горения метана в камере сгорания. Приводится сравнение результатов численных расчетов при использовании различных моделей горения с данными, полученными в ходе реального эксперимента. Дополнительно анализируется влияние подходов к моделированию турбулентности на получаемые результаты. Рассматриваются два основных подхода – RANS и LES. Сформулирован вывод об ограничениях использования рассмотренных моделей горения и методов моделирования турбулентности для исследования физико-химических процессов в камерах сгорания энергетических установок. Показаны достоинства модели частично предварительно перемешанной смеси для моделирования процесса горения и преимущество использования метода LES для моделирования турбулентности в сопряженных задачах о течениях с физико-химическими превращениями.

В первом случае была принята модель течения, основанная на осредненных уравнениях Навье – Стокса. Для замыкания использовалась двухпараметрическая стандартная $k-\varepsilon$ модель турбулентности, которая, как показывает анализ литературы (например, [4]), дает хорошее согласие результатов расчетов с экспериментальными данными по распределению параметров вдоль оси струи. Дополнительно анализировалось влияние изменения коэффициентов модели на получаемый результат. Течение считалось осесимметричным, использовался Density Based алгоритм [1]. Во втором случае для моделирования турбулентных течений использовался метод моделирования крупных вихрей.

Вычислительная область включала в себя области для подачи горючего и окислителя в цилиндрическую камеру сгорания. Диаметр входной границы для подачи горючего равняется $d_{гор}$ = 4,57 мм. Зона для подачи окислителя сформирована множеством форсунок с минимальным интервалом. Эквивалентный диаметр области составляет $d_{ок}$ = 210 мм.

Граничные условия задавались в соответствии с параметрами эксперимента, описанного в [5]. Во входной области подачи горючего задавалась скорость газообразного горючего (Velocity-Inlet) u_{inlet} = 100 м/с с заданным соотношением компонент (m_{CH_4} = 0,33; m_{O_2} = 0,15 и m_{N_2} = 0,52), начальная температура исходных компонент была принята равной T_{inlet} = 320 К. В выходном отверстии на дне камеры сгорания, имитирующем форсунки, задавалась скорость газообразного окислителя (Velocity-Inlet) u_{inlet} = 5,4 м/с с заданным соотношением и начальной температурой исходных компонент (m_{H_2O} = 0,15; m_{O_2} = 0,12 и m_{N_2} = 0,73) T_{inlet} = 1350 К. На стенках камеры сгорания производные от всех параметров задавались равными нулю ("мягкие" граничные условия) ввиду значительной удаленности стенок от реагирующего потока. На выходной границе в начальный момент времени были заданы параметры окружающего пространства: давление (Pressure-Outlet) $p_\infty = 10^5$ Па и температура T_∞ = 300 К. В случае использования осредненных уравнений Навье-Стокса на оси симметрии в меридиональной плоскости задавались условия симметрии; использовалась

структурированная сетка 1500 x 500 (1500 ячеек в продольном направлении) с общим количеством ячеек 750 тыс. При использовании метода моделирования крупных вихрей размер сетки составил 155,3 млн. ячеек.

В результате систематических численных расчетов были получены поля всех газодинамических параметров, включая температуру, концентрации горючего и окислителя, компонент продуктов сгорания. На рис. 1 и 2 представлены поля температуры и концентрации метана при моделировании течения методом LES.

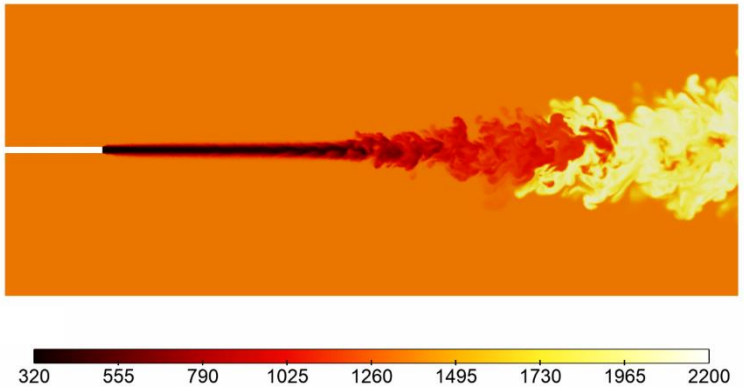


Рис. 1. Поле температуры

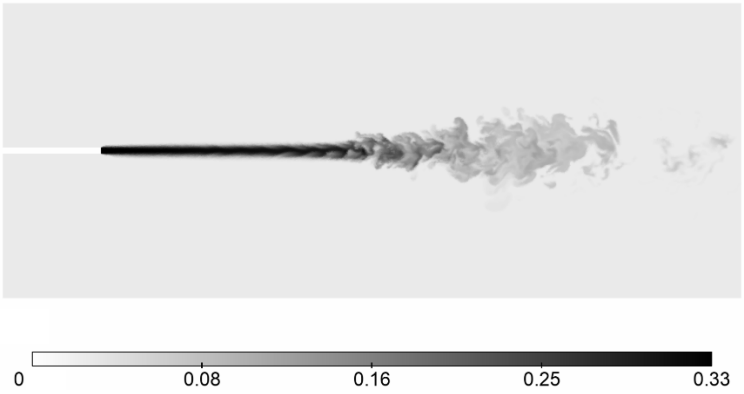


Рис. 2. Поле концентрации CH_4

На рис. 3 показано распределение температуры вдоль оси при использовании RANS-подхода с различными моделями турбулентности и модели частично предварительно перемешанной смеси. Там же приведены экспериментальные данные [5].

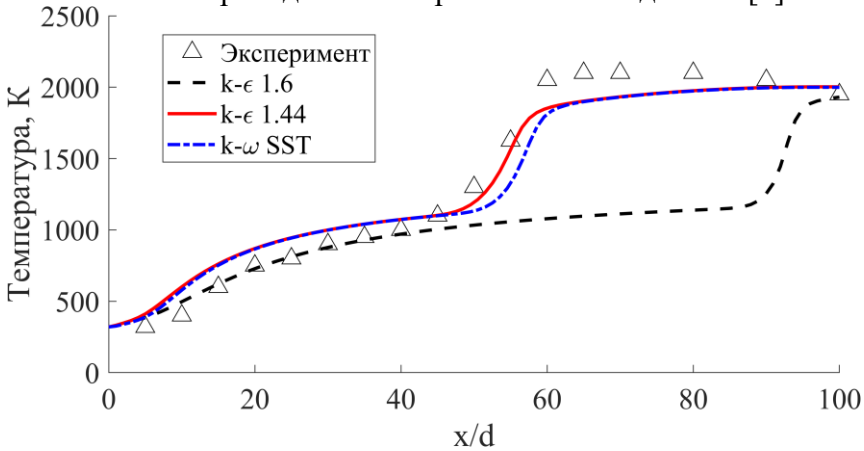


Рис. 3. График распределения температуры вдоль оси струи

В результате выполненного исследования выявлено преимущество использования метода LES для моделирования турбулентного течения и горения в камере сгорания энергетических установок. Найдено, что при использовании RANS-подхода наилучшее согласие с экспериментальными данными дает модель частично предварительно перемешанной смеси горючего и окислителя.

ЛИТЕРАТУРА

1. ANSYS Fluent Theory Guide // ANSYS, Inc., 275 Technology Drive Canonsburg, PA 15317, November 2013.
2. Варнатц Ю., Маас У., Диббл Р. Горение. Физические и химические аспекты, моделирование, эксперименты, образование загрязняющих веществ / Пер. с англ. Г.Л. Агафонова. Под ред. П.А. Власова. - М.: ФИЗМАТ ЛИТ, 2003. - 352 с.
3. G.P. Smith, D.M. Golden, M. Frenklach, N.W., Moriarty, B. Eiteneer, M. Goldenberg, C.T. Bowman, R.K. Hanson, S. Song, W.C. Gardiner Jr., V.V. Lissianski, and Z. Qin, GRI Mech 3.0, 1999.
4. Фишер Ю. В., Щеляев А. Е. Верификация расчетных характеристик сверхзвуковых турбулентных струй // Компьютерные исследования и моделирование. – 2017. – Т. 9, № 1. – С. 21–35.
5. Cabra R. Turbulent jet flames into a vitiated coflow // Technical report № NASA/CR—2004-212887, University of California, Berkeley, 2004.

УДК 536.2

Д.А. Усов, Н.В. Кутузова, С.И. Мезенцев
Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого(*)

ИССЛЕДОВАНИЕ ВЛИЯНИЯ ХАРАКТЕРИСТИК СЕЧЕНИЯ ЕДИНИЧНОГО КАНАЛА НА ЭФФЕКТИВНОСТЬ ТЕПЛООБМЕННОЙ НАСАДКИ

Введение. С течением времени спрос на энергию, как на важный рабочий ресурс, увеличивается. Одним из предложений являются рекуперативные вентиляционные системы. Они закрывают потребность в проветривании образовательных учреждений и жилых домов. Следствием недостатка кислорода может являться сниженная работоспособность, ухудшение работы органов и даже развитие гипоксии.

Необходимость соблюдения параметров микроклимата придало актуальность рекуператорам на рынке вентиляционных систем. Рекуператор является децентрализованным приточно-вытяжным устройством и зачастую устанавливается в квартиры и офисные помещения. Энергосберегающим элементом рекуператора является теплообменная насадка. Ее предназначение состоит в уменьшении тепловых потерь за счет сменяющихся циклов работы в процессе притока и вытяжки воздуха, позволяющих аккумулировать и отдавать тепловую энергию. Важную роль в эффективности работы теплообменной насадки играют характеристики сечения единичного канала, конкретно соотношение размеров геометрии, охватывающей форму канала.

В данной работе проведено исследование влияние типа и конфигурации сечения канала на коэффициент теплоутилизации регенеративной теплообменной насадки.

Основная часть. Регенеративная теплообменная насадка представляет собой цилиндр с каналами различной формы. На рис. 1 представлен пример керамической насадки длинной и диаметром 140 мм и 150 мм соответственно. В расчетах рассматривается единичный канал, представленный в увеличенном масштабе на рис. 1.

(*) Д.А. Усов, usov.da@edu.spbstu.ru

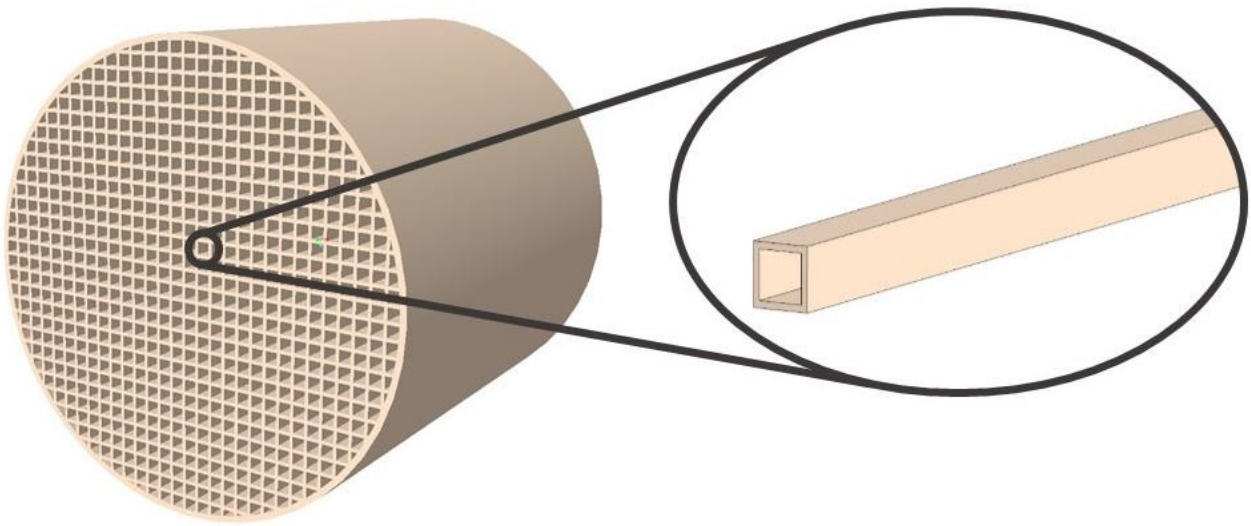


Рис. 1. Керамическая теплообменная насадка

Расчетная модель на рис. 2 представляет собой единичный канал длиной 150 мм и внешним эквивалентным диаметром 4.5 мм. Внутренний эквивалентный диаметр варьировался от 1.5 до 4.0 мм. Поток воздуха был принят ламинарным, где числа Рейнольдса для эквивалентных диаметров, соответствующих эквивалентным диаметрам квадратного поперечного сечения, принимали значения от 318 до 848. Скорость потока газа (воздуха) 2.8 м/с, перепад температур составлял 30°C [1].

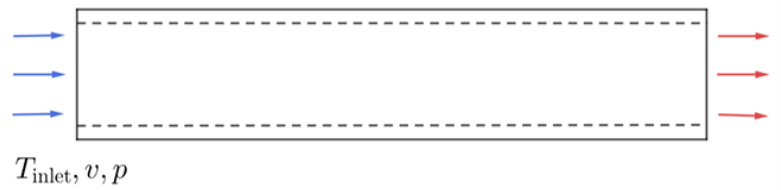


Рис. 2. Схема к постановке сопряженной задачи теплообмена при течении воздуха в единичном канале

В настоящей работе по исследованию влияния характеристик сечения единичного канала на эффективность теплообменной насадки рассматривалось четыре различных типа сечения: системы «квадрат + квадрат», «квадрат + круг», «гексагон + гексагон», «гексагон + круг». Данные конфигурации представлены на рис. 3.

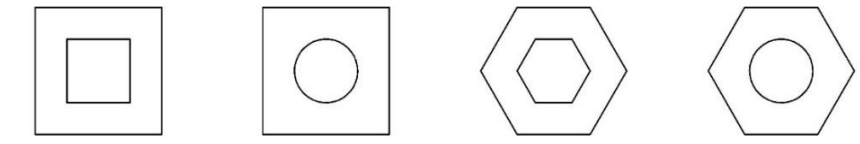


Рис. 3. Системы поперечных сечений единичного канала

Непосредственно сами процессы расчетов были осуществлены в программном обеспечении ANSYS Fluent версии 2024 R1 с предварительным построением структурированных сеток [2]. На данном этапе исследовательской работы фундаментом для построения сеток были гексагональные элементы, где осуществлялось их сгущение к границе раздела сред в виде воздуха и керамики соответственно. Количество элементов, используемых при расчетах, для каждой системы поперечных сечений единичного канала, представленных

на рис. 3, составляют следующие диапазоны: для системы «квадрат + квадрат» от 61250 до 68972, для системы «квадрат + круг» от 62571 до 66731, для системы «гексагон + гексагон» от 61000 до 66000 и для системы «гексагон + круг» от 62800 до 68050 элементов.

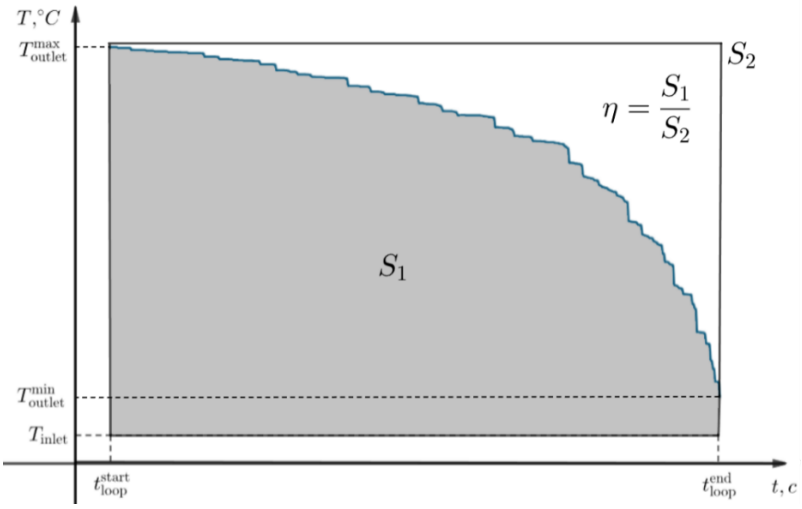


Рис. 4. Методика расчета коэффициента теплоутилизации

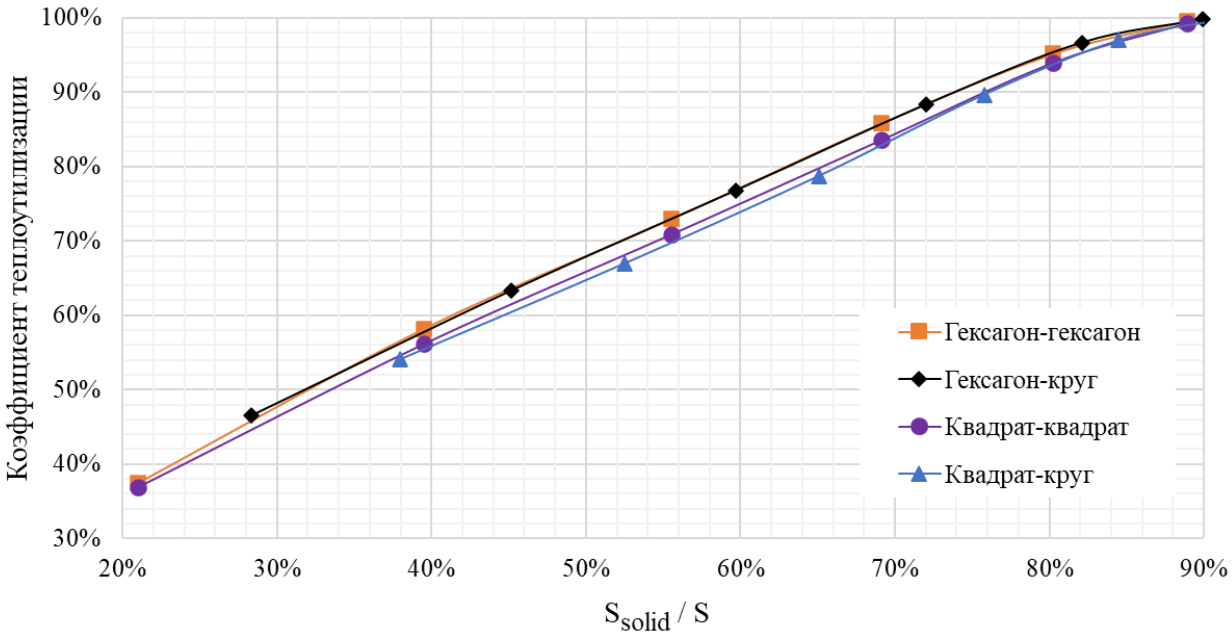


Рис. 5. Зависимость коэффициента теплоутилизации от отношения площади поперечного сечения материала к площади общего поперечного сечения для различных типов сечения

Эффективность теплообменной насадки определяется его коэффициентом теплоутилизации [3], вычисление которого определяется отношением площадей, схематически показанных на рис. 4.

В ходе проведения исследований была определена зависимость коэффициента теплоутилизации от отношения площади поперечного сечения материала к площади общего поперечного сечения для различных типов сечения. Данная зависимость отображена на рис. 5.

Заключение. В результате проведенных исследований получена зависимость коэффициента теплоутилизации от отношения площади поперечного сечения материала к площади общего поперечного сечения для различных типов сечения; установлено, что при варьировании внутреннего эквивалентного диаметра тип сечения гексагон-гексагон имеет наибольший коэффициент теплоутилизации, а тип сечения квадрат-круг – наименьший.

ЛИТЕРАТУРА
1. Жукаускас А.А. Конвективный перенос в теплообменниках. – М.: Наука, 1982. – 472 с.
2. Федорова Н. Н., Вальгер С. А., Данилов М. Н., Захарова Ю. В. Основы работы в ANSYS 17. - М: ДМК Пресс, 2017. - 210 с.
3. Аристов Ю. И., Мухин В. А. Новый подход к регенерации теплоты и влаги в системе вентиляции помещений II. Прототип реального устройства // Инженерно-физический журнал. – 2006. – Т. 79(3). – С. 151-157.

УДК 536.46:661.48

Т.А. Федорова[1], Д.С. Пашкевич[1,2]
[1]Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого(*)
[2]ООО «Новые химические продукты»

ИСПОЛЬЗОВАНИЕ ЧИСЛЕННОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ ПРИ РАЗРАБОТКЕ МЕТОДОЛОГИИ МАСШТАБИРОВАНИЯ РЕАКТОРА ТИПА ТУННЕЛЬНОЙ ГОРЕЛКИ ДЛЯ РЕАЛИЗАЦИИ ПРОЦЕССА ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ ГЕКСАФТОРИДА УРАНА С ВОДОРОДСОДЕРЖАЩИМИ ВЕЩЕСТВАМИ И КИСЛОРОДОМ В РЕЖИМЕ ГОРЕНИЯ

Масштабирование технологического оборудования представляет собой важный этап промышленной реализации любого процесса, на котором необходимо решать вопросы, связанные с мощностью производства, стабильностью работы, требованиям к конечному продукту, безопасностью и экономической эффективностью. Физически обоснованное масштабирование позволяет минимизировать риски, связанные с разработкой промышленных решений (конструкции оборудования и технологических режимов) на основе имеющихся экспериментальных данных, полученных в лабораторных условиях или на пилотных установках, а также оптимизировать затраты на изготовление промышленного оборудования и его эксплуатацию.

Так, для процесса реконверсии UF_6 при его взаимодействии с метаном или водородом и кислородом в режиме горения с использованием реактора типа туннельной горелки

$$UF_{6_{\text{газ}}} + 1.5CH_{4_{\text{газ}}} + 2.5O_{2_{\text{газ}}} \rightarrow UO_{2_{\text{тв}}} + 6HF_{\text{газ}} + 1.5CO_{2_{\text{газ}}} - 1056 \text{ кДж}, \quad (1)$$

$$UF_{6_{\text{газ}}} + 3.4H_{2_{\text{газ}}} + 1.2O_{2_{\text{газ}}} \rightarrow UO_{2_{\text{тв}}} + 6HF_{\text{газ}} + 0.4H_2O - 583 \text{ кДж} \quad (2)$$

были проведены физические эксперименты [1] на пилотной установке, в результате которых было показано, что в диапазоне изменения расхода UF_6 1-7 г/с для (2) и 3 г/с для (1) фронт горения стабилен и состав продуктов близок к указанному в (1-2).

Для успешного переноса полученных результатов на промышленный уровень, когда расход UF_6 будет в десятки раз больше, чем в пилотных экспериментах, необходимо воспроизводство в промышленном реакторе ряда условий, реализованных в пилотном реакторе.

Основным фактором стабильной работы реактора типа туннельной горелки является исключение срыва фронта пламени при превышении локальной скоростью потока скорости турбулентного распространения пламени. Расчет последнего параметра для (1-2) затруднен. Поэтому было предложено в качестве параметра для оценки стабильности фронта пламени в промышленном аппарате использовать максимальную локальную скорость потока, при которой процесс был стабилен при опытно-промышленной реализации. При промышленной

(*) Т.А. Федорова tan.fyodorova2014@yandex.ru

реализации максимальная локальная скорость потока не должна быть выше значения этого параметра в успешных пилотных экспериментах.

Кроме этого, известно, что в реакторе типа туннельной горелки фронт пламени стабилизируется в зоне обратных токов горячих продуктов реакции, рециркулирующих к корню факела, поэтому при масштабировании длина промышленного реактора должна быть больше длины зоны обратных токов и средняя температура потока рециркуляции не должна быть ниже, чем при пилотных испытаниях с учетом выбранного способа стабилизации пламени.

Также известно, что скорость турбулентного распространения пламени увеличивается с увеличением числа Рейнольдса потока. Поэтому для промышленного реактора число Рейнольдса должно быть не менее, чем для пилотного аппарата.

Факторами, определяющими возможность получения состава продуктов процесса, близкого к составу в (1-2), являются максимальная температура в зоне реакции, степень турбулентности потока и время пребывания вещества при температуре выше 1150 К. При указанной температуре происходит смена знака изменения энергии Гиббса для реакции фторирования диоксида урана фторидом водорода. В промышленном реакторе эти величины не должны быть ниже, чем при успешных пилотных испытаниях.

Также важными параметрами являются удельная производительность зоны реакции и максимальная длина изоповерхности глубины превращения UF_6 на уровне 99%.

Разделение твердых и газообразных продуктов (1-2) целесообразно проводить при среднемассовой температуре потока порядка 1150 К для исключения протекания реакции фторирования диоксида урана фторидом водорода при охлаждении потока.

Для термостабилизации стенки реактора большое значение имеет максимальная мощность теплового потока из зоны реакции и ее осевая координата.

Вышеперечисленные параметры практически невозможно измерить в процессах (1-2) экспериментально в связи с высокой коррозионной активностью фторида водорода и фторидов урана. Поэтому, целесообразно использовать математическое моделирование для получения полей скорости, температуры, степени турбулентности, функции тока и др. в реакторе типа туннельной горелки.

Авторами была разработана и верифицирована на основе экспериментальных данных математическая модель процессов диффузионного турбулентного горения (1-2) [2], с помощью которой рассчитали следующие значения параметров потока в пилотном реакторе, лежащие в основе масштабирования промышленного реактора:

- максимальная скорость потока в реакторе для расхода UF_6 3 г/с и использовании CH_4 – 48.6 м/с;
- максимальная скорость потока в реакторе для расхода UF_6 7 г/с и использовании H_2 – 119.4 м/с, прямо пропорциональна расходу UF_6;
- длина зоны обратных токов – 0.4 м, слабо зависит от расхода UF_6;
- средняя температура рециркулирующего потока – порядка 500 К;
- максимальное число Рейнольдса 14978 для H_2 при расходе UF_6 7 г/с и 20457 для CH_4 при расходе UF_6 3 г/с;
- максимальная температура в зоне реакции – 2199 К для CH_4 и 1930 К для H_2, слабо зависит от расхода UF_6;
- время пребывания вещества при температуре выше 1150 К – 25 мс для CH_4 при расходе UF_6 3 г/с и порядка 1.4 мс для реакции с H_2 при расходе UF_6 7 г/с;
- максимальная степень турбулентности потока – 9.2 % для CH_4 и 14.9 % для H_2 при расходе UF_6 7 г/с;
- удельная производительность зоны реакции – 380 кг/с·м^3 для H_2 при расходе UF_6 7 г/с и 24 кг/с·м^3 для CH_4 при расходе UF_6 3 г/с;

- осевая координата реактора x_{T1150}=0.4 м для CH_4 и x_{T1150}=0.2 м для H_2, слабо зависит от расхода UF_6;
- максимальный тепловой поток из зоны реакции при расходе UF_6 3 г/с и использовании CH_4 – 51 кВт/м^2;
- максимальный тепловой поток из зоны реакции при расходе UF_6 7 г/с и использовании H_2 – 52 кВт/м^2, прямо пропорционален расходу;
- осевая координата точки максимального теплового потока – 0.3 м, слабо зависит от расхода;
- осевая координата реактора $x_{\eta 99}$=0.095 м для H_2, $x_{\eta 99}$=0.17 м для CH_4 и слабо зависит от расхода.

На рис. 1 представлены поля температуры для реакций (1-2).

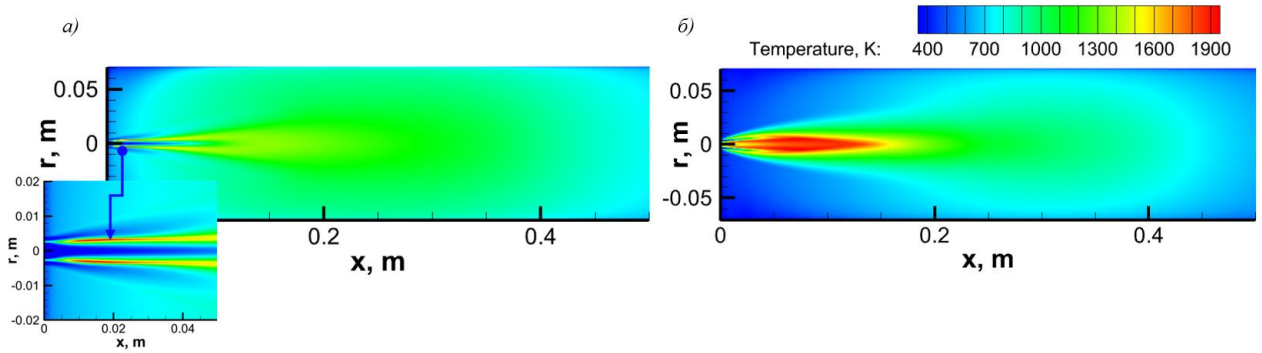


Рис. 1. а) поле температуры для реакции (1) при расходе UF_6 7 г/с;
б) поле температуры для реакции (2) при расходе UF_6 3 г/с

В табл. 1 представлены результаты расчета скорости распространения турбулентного пламени для стехиометрических смесей водорода и кислорода, и метана и кислорода, рассчитанные по литературным данным [3], при различных числах Рейнольдса.

Табл. 1. Зависимость скорости распространения турбулентного пламени от числа Рейнольдса

Re	v_t, **м/с**	
	H_2+O_2	CH_4+O_2
5000	215	57
10000	303	80
15000	370	98
20000	427	113

Значения максимальной скорости потока в пилотном реакторе типа туннельной горелки, полученные с помощью математического моделирования, существенно ниже рассчитанных по [3] скоростей распространения турбулентного пламени для метан-кислородной и водород-кислородной смесей. Это позволяет предположить, что критические скорости потока, при которых происходит отрыв пламени, в экспериментах на пилотном реакторе достигнуты не были.

В [4] приведены значения температуры продуктов (1) и (2), полученные с помощью термодинамического расчета с поправкой на тепловое излучение твердой фазы в предположение, что гетерогенный факел теряет 40% тепла излучением – 2082 и 1800 К соответственно. Расхождения этих значений со значениями максимальной температуры в зоне реакции, полученными при математическом моделировании, составили 5% для реакции с метаном и 7% для реакции с водородом.

ЛИТЕРАТУРА
1. Pashkevich D. S., Zimin A. R., Alekseev Yu. I. et al. Obtaining hydrogen fluoride during the interaction of uranium hexafluoride with methane and oxygen in a combustion regime// J. Eng. Phys. Thermophys. – 2025. – Vol. 98. – №1. – P. 153–161.
2. Fedorova T. A., Pashkevich D. S., Popov P. A., Talalov V. A. Numerical study of the influence of the method of feeding of reactants to the reactor on the interaction of uranium hexafluoride with methane and oxygen in a combustion regime//J. Eng. Phys. Thermophys – 2025. – Vol. 98. – №1. – P. 144–152.
3. Снегирев А. Ю. Основы теории горения. – СПб.: Изд-во Политехн. ун-та, 2014. – 352 с.
4. Pashkevich D. S., Zimin A. R., Kapustin V. V., and Petrov V. B., Obtaining hydrogen fluoride during the interaction of uranium hexafluoride and oxygen in a combustion regime. Thermodynamic analysis// J. Eng. Phys. Thermophys. – 2021. – Vol. 94. – №. 4. – P. 963–971.

УДК 533.9.03

Р.Р. Хозин[1,2], Д.В. Лещев[2], А.А. Смирновский[1,2]
[1]Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого(*)
[2]ООО “Софт-Импакт”

ВЛИЯНИЕ ГЕОМЕТРИИ ПОДЛОЖКИ И КОНЦЕНТРАЦИИ CH_4/ H_2 НА ОДНОРОДНОСТЬ ОСАЖДЕНИЯ АЛМАЗА МЕТОДОМ MPCVD

Введение. Плазмохимическое осаждение из газовой фазы в смеси CH_4/H_2 является одним из перспективных методов получения алмазных покрытий для широкого спектра приложений [1, 2]. Установки MPCVD спроектированы таким образом, чтобы энергия электромагнитной волны 2.45 ГГц была локализована у подложки, что позволяет обеспечить существование плотной СВЧ плазмы. Локализация плазмы над подложкой приводит к нагреву газа до 2500°C и образованию CH_3 и H, ответственных за рост алмаза. Концентрация и диффузионный поток частиц на подложку определяется распределением температуры, которая зависит от давления и поглощенной в плазме мощности. Поскольку размеры реактора (24 см на 20 см) сопоставимы с длиной волны (12 см), изменения в его геометрии могут вызывать существенное изменение процессов MPCVD. Увеличение высоты держателя приводит к смещению пика напряженности электрического поля к краям подложки, вызывая локализацию плазмы и снижение температуры в центре реактора. Это приводит к перераспределению мольной доли CH_3 и H в камере реактора и, следовательно, изменению диффузионных потоков радикалов, скорости и однородности осаждения алмаза.

Постановка задачи. Настоящая работа посвящена изучению влияния ключевых параметров MPCVD на процесс синтеза алмазных пленок и является продолжением исследований [3]. Рассмотренные режимы работы реактора охватывали: мощность 2–5 кВт, давление 100–200 Торр, а также вариацию доли CH_4 в подаваемой газовой смеси от 1% до 40%. Проведена валидация разработанной модели осаждения алмаза посредством сопоставления с данными численного моделирования [5].

Метод решения задачи. Исследование выполнено методом численного моделирования в рамках приближении сплошной среды с использованием специализированного программного обеспечения, реализующего решения сопряженных задач тепломассопереноса, физики плазмы, кинетики химических реакций и электромагнитных взаимодействий. В качестве основного объекта моделирования выступает химический реактор из работы [4], где также исследовалось влияние высоты держателя на процесс осаждения алмаза.

Процесс MPCVD и конструкция реактора. Процесс роста начинается с введения CH_4 и

(*) Р.Р. Хозин, rostislav.hozin@gmail.com

H_2 в реактор, после чего происходит активация реагентов в плазме. Активные радикалы переносятся к растущей поверхности, где происходят химические и диффузионные процессы, приводящие к образованию алмаза и других форм углерода. Через диссоциацию H_2 при высоких температурах и столкновениях молекул с электронами, в плазме образуется атомарный водород, который превращает CH_4 в активные радикалы. В центре камеры реактора расположена молибденовая подложка с карманом, в который помещена алмазная затравка диаметром 24 мм. Камера реактора отделена от системы коаксиальных волноводов кварцевыми стенками, что обеспечивает проникновение электромагнитной волны от источника в область затравки.

Анализ результатов моделирования. Результаты моделирования показали, что увеличение высоты держателя изменяет распределение электрического поля, снижая его пиковые значения в центре и усиливая их у краев, что приводит к локализации плазмы и росту скорости ионизации газовой смеси (рис. 1). Эти изменения приводят к уменьшению тепловыделения в центральной зоне, снижая температуру и скорость диссоциации газов, что подтверждается снижением мольной доли CH_3 и H над подложкой.

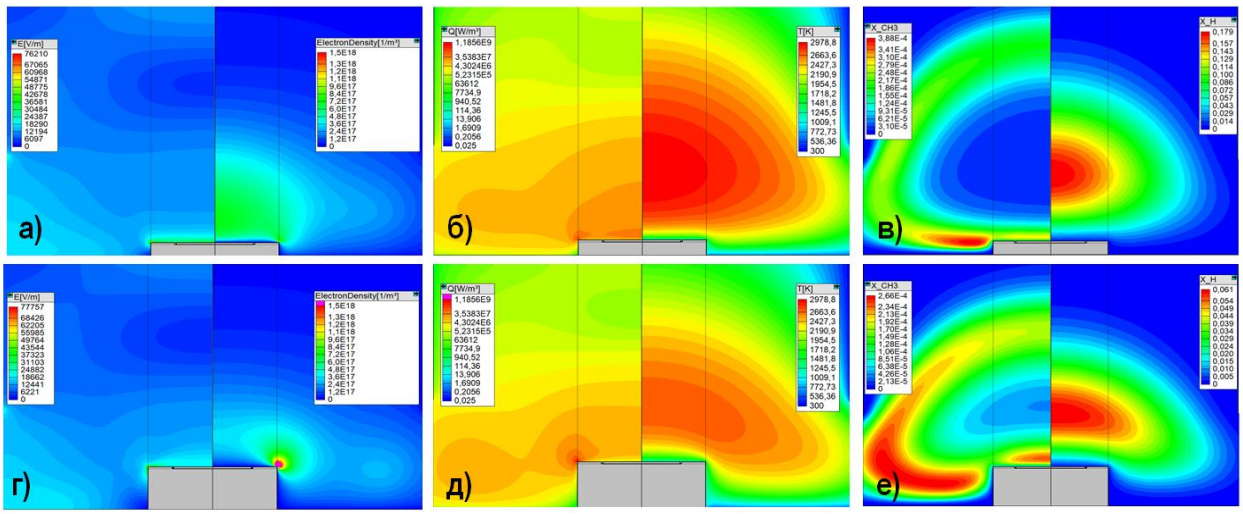


Рис. 1. Основные распределения при высоте держателя 5 мм (верх) и 15 мм (низ). Левая сторона: а) напряженность электрического поля, б) тепловыделение, в) доля CH_3; правая сторона: г) концентрация электронов, д) температура, е) доля H.

Формирование двух пиков концентрации CH_3 — над подложкой и у стенок реактора — приводит к перестройке диффузионных потоков, направленных к областям с минимальной концентрацией, усиливая краевой эффект осаждения. Из рис. 2 видно, что увеличение высоты держателя приводит к сглаживанию профиля концентрации CH_3 у поверхности и смещению пика скорости роста от центра к краю подложки.

В диапазоне давлений 100–200 Тор и мощностей 2–5 кВт увеличение высоты держателя приводит к снижению скорости роста, и комбинация высокого давления (180 Тор) и мощности (5 кВт) с высотой 10–15 мм обеспечивает наибольшую однородность профиля осаждения с локализацией краевого эффекта на масштабе 1-2 мм от края подложки (рис. 3). Установлено, что при 5% содержании метана в газовой смеси достигается оптимальная однородность, тогда как изменение соотношения CH_4/H_2 приводит к ее увеличению.

Валидация используемой модели. Результаты моделирования были валидированы с использованием данных из работы [5]. Проведенный анализ показал качественное и количественное согласование с экспериментами: порядки величин для ключевых параметров соответствуют литературным данным (рис. 4). Наилучшее совпадение наблюдается для концентрации CH_3. Использование реактора с упрощенной геометрией [5] позволило подтвердить корректность используемой модели.

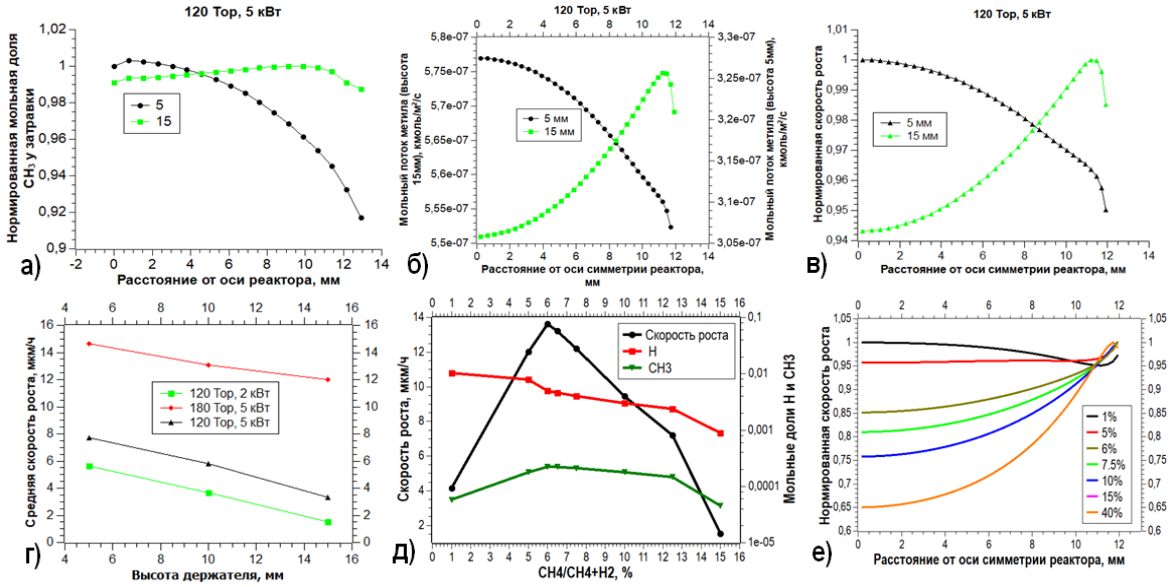


Рис. 2. Влияние высоты подложки на а) распределение мольной доли метила над подложкой, б) мольный поток метила на затравку, в) нормированную скорость роста; скорость роста при разных: г) давлении и мощности, д) составе газовой смеси: е) профиль осаждения алмаза при разном составе.

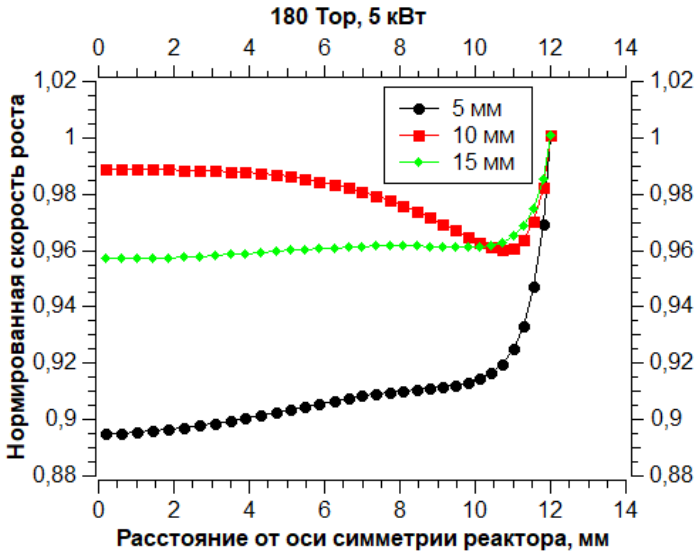


Рис. 3. Нормированная скорость роста алмазной поверхности при давлении 180 Торр и мощности 5 кВт (5% метана в смеси CH_4 и H_2) в зависимости от высоты держателя

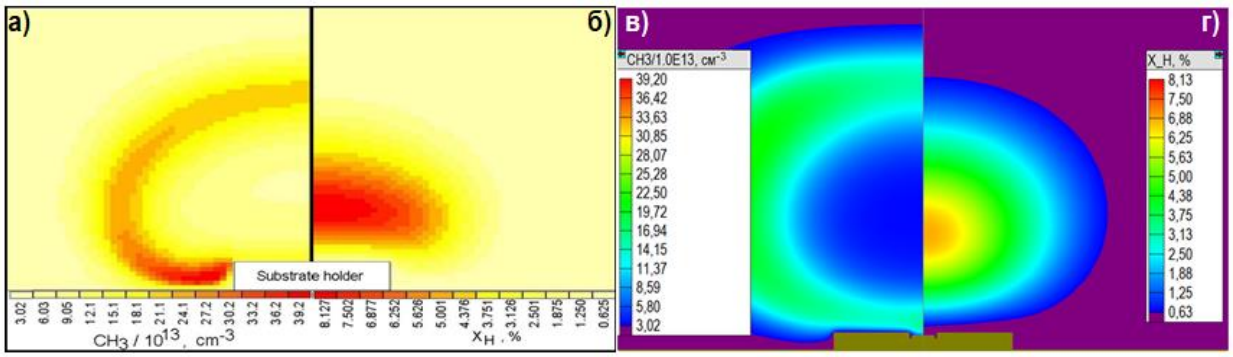


Рис. 4. Пространственное распределение концентрации ключевых радикалов: а) CH_3 и б) H (данные из работы [5]); в) CH_3 и г) H (результаты моделирования)

Выводы. Выявлена высокая чувствительность профиля роста к соотношению CH_4/H_2 и высоте держателя, которые определяют положение пика скорости роста на затравке. Установлены оптимальные условия работы реактора, позволяющие достигать скорости роста алмаза в 12 мкм/ч при локализации краевого эффекта у края подложки. Результаты моделирования демонстрируют хорошее согласие с данными [5].

ЛИТЕРАТУРА

1. Хмельницкий Р.А., Талипов Н.Х., Чучева Г.В. Синтетический алмаз для электроники и оптики / Хмельницкий Р.А. – М.: Издательство ИКАР, 2017. – 228 стр., илл.
2. Большаков А. П. и др. Синтез монокристаллов алмаза в СВЧ-плазме // Прикладная физика.– 2011. – №6. – С.104-110.
3. Хозин Р.Р., Лещев Д.В, Горбачев Ю.Е. Влияние расхода газовой смеси CH_4/H_2 на скорость роста алмаза методом плазмохимического осаждения из газовой фазы / Неделя науки ФизМех : сборник материалов Всероссийской научной конференции, 1–5 апреля 2024 г. –СПб. : ПОЛИТЕХ-ПРЕСС, 2024. – С.471-473.
4. Cuenca J.A., Mandal S., Thomas E.L.H., Williams O.A. Microwave plasma modelling in clamshell chemical vapour deposition diamond reactors // Diamond and Related Materials. – 2022. – Vol. 124. – P. 108917.
5. Mankelevich Y.A., Ashfold M.N.R., Ma J. Plasma-chemical processes in microwave plasma enhanced chemical vapor deposition reactors operating with CH_4/Ar gas mixtures // Journal of Applied Physics. – 2008. – Vol. 104. – № 11. – P. 113304.

УДК 621.438.2

П.В. Чайка, Ю.М. Циркунов
Балтийский государственный технический университет «ВОЕНМЕХ» им. Д.Ф. Устинова(*)

ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ГАЗОДИНАМИКИ ОСЕВОЙ ТУРБИНЫ И ИССЛЕДОВАНИЕ ВЛИЯНИЯ ВЕЛИЧИНЫ РАДИАЛЬНОГО ЗАЗОРА НА ХАРАКТЕР ТЕЧЕНИЯ

Целью настоящего исследования являлась разработка расчетной модели газотурбинного двигателя, обеспечивающей качественное и количественное соответствие экспериментальным данным. В рамках работы проводилось комплексное исследование, включающее изучение сеточной сходимости, анализ влияния различных моделей турбулентности, величины радиального зазора рабочей лопатки и скорости вращения на распределение КПД и угла выхода потока по высоте канала. Особое внимание уделялось изучению общей картины течения и ознакомлению с областью применения газотурбинных двигателей различной конструкции.

В ходе исследования была создана расчетная модель газовой турбины в программном комплексе FineTurbo. Оценка сеточной сходимости проводилась на основе анализа распределений КПД и угла выхода потока по высоте канала в сечении экспериментальных измерений. Расчет выполнялся в стационарной постановке с решением системы уравнений RANS для термически совершенного, вязкого и сжимаемого рабочего тела. Моделирование осуществлялось для одного межлопаточного канала с периодическими граничными условиями. На интерфейсах ротор-статор применялось граничное условие Mixing Plane. В рамках работы были применены различные модели турбулентности: k-ε, Спаларта-Аллмараса, EARSM и SST с расширенным пристеночным моделированием, на трех различных сетках. Проведенный сравнительный анализ моделей турбулентности включал изучение графиков

(*) П.В. Чайка, shpvladimirovna@gmail.com

зависимости угла выхода потока и КПД от координаты, а также исследование общей картины течения газа и характера потока между лопатками.

В ходе исследования проведен детальный анализ характеристик потока в трех характерных сечениях – на 10%, 50% и 90% высоты лопатки. Выполнено сравнение решений, полученных с использованием модели турбулентности SST на грубой и двух измельченных расчетных сетках. Результаты показали, что качественная картина течений на средней и наиболее подробной сетках практически идентична (рис. 1).

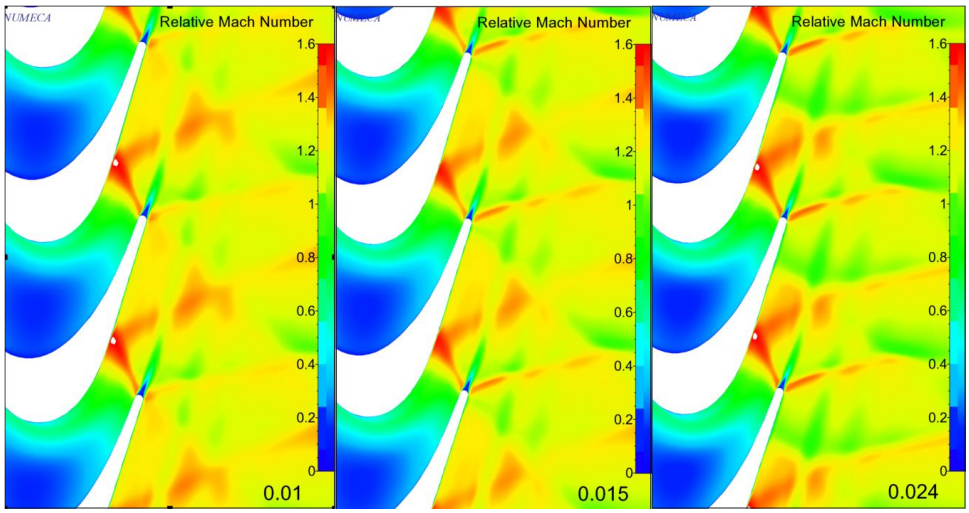


Рис. 1. Картина течения на грубой и двух измельченных сетках

При сопоставлении расчетных значений КПД турбины с экспериментальными данными для всех исследуемых моделей установлено максимальное отклонение в пределах 7% (рис. 2). Характер течения во всех моделях демонстрирует схожесть, за исключением EARSM, которая показывает наилучшее соответствие экспериментальным данным, но при этом демонстрирует меньшую точность в разрешении структуры течения.

Анализ полученных результатов выявил тенденцию: наилучшее согласование решения наблюдается при высоких оборотах турбины, в то время как при снижении скорости вращения увеличивается расхождение между расчетной моделью и экспериментальными данными. Оптимальным был признан минимальный радиальный зазор, обеспечивающий максимальный КПД.

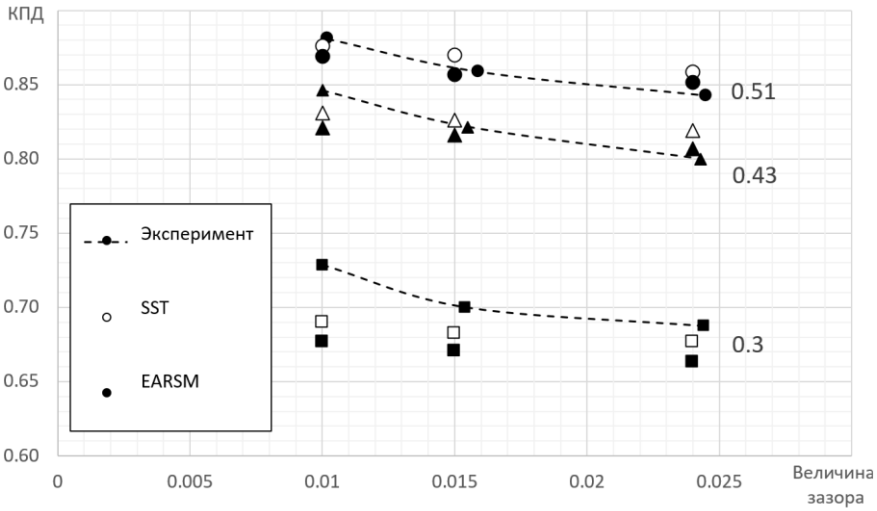


Рис. 2. Зависимость КПД от частоты вращения

С точки зрения оценки аэродинамических характеристик двигателя и его узлов (массового расхода воздуха, степени повышения полного давления, коэффициента полезного действия), как правило, достаточно стационарных аэродинамических расчетов с использованием интерфейсов типа «поверхность смешения» (Mixing Plane), но так как в действительности процесс взаимодействия между неподвижными и подвижными лопаточными венцами является сугубо нестационарным, из-за перемещения лопаток рабочего колеса относительно лопаток сопловых аппаратов, было решено провести дополнительные исследования с условием Non Reflecting. Интегральные параметры на ротор-статор интерфейсе представлены в табл. 1.

Табл. 1. Интегральные параметры на интерфейсе ротор-статор

	Mixing Plane	Non Reflecting 1D	Non Reflecting 1D	Non Reflecting 2D 6 h	NLH 0 h
Inlet G, kg/s	4.2031	4.1965	4.1900	4.1891	4.1904
Outlet G, kg/s	4.1918	4.2016	4.1926	4.1914	4.2086
Inlet T, K	343.6545	344.7454	344.1296	343.6602	343.6620
Outlet T, K	343.2613	344.5078	343.7667	344.0144	344.3237
Inlet T*, K	399.8937	399.7573	399.8372	399.8366	399.3216
Outlet T*, K	399.9891	399.9061	399.9272	399.9261	399.8946

Заключение. Проведено исследование влияния радиального зазора рабочей лопатки на характеристики осевой трансзвуковой одноступенчатой турбины. В ходе работы выполнен анализ сеточной сходимости, влияния различных моделей турбулентности, и условия на ротор-статор интерфейсе проведено сопоставление расчетных данных с экспериментальными результатами. Установлено, что характер течения во всех моделях, за исключением EARSM, имеет схожие характеристики, а условие, заданное на ротор-статор интерфейсе, не имеет существенного влияния на картину течения, в рамках данной задачи.

ЛИТЕРАТУРА

1. Иноземцев А.А., Основы конструирования авиационных двигателей и энергетических установок/ Иноземцев А.А., Нихамкин М.А. Том 5 М.: Машиностроение, 2008. - 190 с.

2 Кампсти, Н. Аэродинамика компрессоров Текст. / Н. Кампсти.- М.: Мир, перевод под ред. Ф. Ш. Гельмедова, 2000,-37 с.

3. Сахин В.В. Устройство и действие энергетических установок. Кн. 2. Газовые турбины. Теплообменные аппараты: учебное пособие / В.В. Сахин; Балт. гос. техн. ун-т. – СПб., 2015. – 133 с

4. Жирицкий, Г.С. Газовые турбины двигателей летательных аппаратов.2-е изд. перераб. и доп. / Г.С. Жирицкий, В.И. Локай, М.К Максутова. М.: Машиностроение, 1971. С. 154-164 с.

УДК 629.12

Е.В. Шапков, Н.В. Тряскин
Санкт-Петербургский государственный морской технический университет(*)

ИССЛЕДОВАНИЕ ГИДРОДИНАМИЧЕСКИХ ХАРАКТЕРИСТИК РОТОРНО-ВИНТОВОГО ДВИЖИТЕЛЯ, ЧАСТИЧНО ПОГРУЖЕННОГО В ВОДУ

Введение. Эксперты отмечают перспективное соединение трассы Северного морского пути с Байкало-Амурской и Транссибирской магистралями за счет создания новых логистических маршрутов, в том числе на внутренних водных путях Крайнего Севера. Предыдущий опыт эксплуатации показывает, что для эффективного передвижения по указанным районам целесообразно применение амфибийных машин с частично погруженными роторно-винтовыми движителями (РВД, также «шнек»). Вместе с тем информация о характеристиках работы РВД в режиме частичного погружения носит ограниченный характер и является труднодоступной.

В настоящей работе представлены результаты исследования характеристик работы роторно-винтового движителя, частично погруженного в воду, выполненного в программном пакете вычислительной гидродинамики OpenFOAM. Дополнительно представлены основные результаты предыдущих исследований по тематике гидродинамических характеристик роторно-винтового движителя, выполненные авторами ранее.

Обзор предыдущих исследований. Значительный вклад в изучение характеристик РВД при его работе на различных основаниях, в том числе в воде, внес Б.Н. Коул [1]. С вниманием к фундаментальным результатам работы [1] был выполнен современный анализ гидромеханических особенностей работы роторно-винтового движителя в безграничной жидкости [2]. Применяя ключевые положения теории крыла к элементу винтовой линии шнека было показано, что упор последнего формируется за счет перепада давлений на засасывающей и нагнетающей поверхностях винтовой линии движителя. В свою очередь, сопротивление плохообтекаемого РВД, представляющем собой цилиндр конечной длины, расположенный поперек потока, формируется за счет гидродинамического следа («спутной струи») за движителем, содержащим интенсивные концевые вихри [2]. Отмечен значительный вклад сил вязкостной природы в формирование гидродинамических реакций движителя. Здесь необходимо сказать, что негативное сопротивление РВД и, как следствие, его низкий КПД в сравнении с традиционными гребными винтами в полной мере компенсируется полезной плавучестью движителя, и характерными особенностями эксплуатации вездеходных амфибий с РВД.

В работе [3] выполнено параметрическое исследование гидродинамических характеристик РВД в безграничной жидкости: реализовано численное моделирование методом CFD ряда прототипов с различными углами наклона винтовой линии, габаритной длиной и высотой винтовой линии шнека. Выполнено сравнение получаемых результатов с эмпирическим прогнозом, предложенным Б.Н. Коулом [1], которое показало количественное и качественное согласование представленных результатов. Выявленное влияние габаритной длины движителя позволяет заключить, что ее уменьшение приводит к заметному росту гидродинамической эффективности РВД (КПД); увеличение угла наклона винтовой линии шнека приводит к ощутимому росту его гидродинамических упора и момента. Высота винтовой линии оказывает незначительное влияние на характеристики работы шнека в воде, а ее окончательное (проектное) значение должно регламентироваться вопросами прочности при работе роторно-винтового движителя на более жестких опорных основаниях, в том числе на ледовом покрове.

(*) Е.В. Шапков, egorshapkov@yandex.ru

Работа роторно-винтового движителя, частично погруженного воду. Практический опыт эксплуатации шнекоходных амфибий в воде однозначно показывает, что последние работают преимущественно в режиме частичного погружения в воду (пересекая свободную поверхность) (рис. 1) [4].



Рис. 1. Пример эксплуатации шнекохода, частичное погружение движителей в воду

В отечественной практике давно предложено оценивать негативное влияние аэрации движителя на его параметры работы в воде через модель водно-воздушной эмульсии с применением коэффициента аэрации $k_{\text{Аэр}}$, формула (1), [5]. Однако, практическое применение такого подхода ограничено ввиду исключительно концептуального его описания, и отсутствия количественных оценок величины $k_{\text{Аэр}}$, входящей в (1), [6].

$$\rho_{\text{Эм}} = k_{\text{Аэр}} \cdot \rho_{\text{Вод}}, \quad (1)$$

где $\rho_{\text{Эм}}$ – плотность водно-воздушной эмульсии; $k_{\text{Аэр}}$ – коэффициент аэрации; $\rho_{\text{Вод}}$ – плотность воды.

Вышесказанное актуализирует цель настоящей работы, в которой реализовано моделирование работы РВД, частично погруженного в воду, с акцентом на количественную оценку влияния степени погружения на гидродинамические характеристики движителя (оценка величины $k_{\text{Аэр}}$).

Краткое описание расчетной модели. Моделирование работы роторно-винтового движителя, как в безграничной жидкости, так и с разделом сред («вода-воздух»), а именно моделирование течения жидкости реализовано в программном пакете вычислительной гидродинамики OpenFOAM. Течение жидкости описывается нестационарными осредненными по Рейнольдсу уравнениями Навье-Стокса и неразрывности (uRANS) с применением универсальной двухпараметрической модели турбулентности Ментера *k-omega* SST. Вращение РВД реализовано методом скользящей сетки (sliding mash); раздел сред моделируется с помощью модифицированного метода VoF. В работе [2] подробно представлены начальные и граничные условия для выполнения моделирования, а также исследование сеточно-независимого решения, результаты которого показали, что для проведения серийных расчетов достаточно сетки размером ~3,5 млн ячеек (y^+=90-250).

Результаты. В настоящем разделе представлены узловые выводы, сформулированные по результатам анализа численного моделирования работы роторно-винтового движителя, частично погруженного в воду. Рассмотрены несколько характерных случаев погружения шнека в воду: *h/R*=0,3-1. Последнее, а также режимы работы движителя в воде, соответствуют практическому опыту эксплуатации шнекоходов в воде [3, 4].

Визуализация эволюции свободной поверхности (картины брызго- и волнообразования) показывает, что с ростом числа *Re* (рост относительной поступи *J*) жидкость начинает

«обволакивать» движитель, покрывая все большую поверхность РВД собой (уменьшение объема воздуха на поверхности шнека), приближая обтекание последнего к случаю сплошной жидкости (без воздушных пустот) (рис. 2).

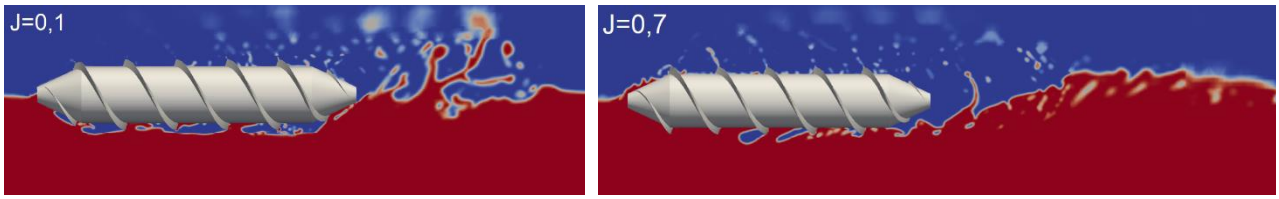


Рис. 2. Визуализация обтекания модели РВД, *h/R*=0,5

Отмеченный эффект оказывает влияние на так называемые «кривые действия» роторно-винтового движителя, вызывая их некоторое постоянство (незначительное изменение) на режимах высокой нагрузки. В свою очередь, в зависимости от степени погружения движителя в воду (величины *h/R*), последний может потерять в полезной тяге от 80% до 10% (аналог коэффициента $k_{\text{Аэр}}$). Необходимо подчеркнуть, что на указанную количественную оценку $k_{\text{Аэр}}$ также влияет режим работы движителя (величина относительной поступи *J*). Вышесказанное необходимо учитывать при проектировании современных амфибийных машин с роторно-винтовыми движителями.

ЛИТЕРАТУРА

1. Cole B.N. Inquiry into amphibious screw traction / B.N. Cole // Proceedings of the Institute of Mechanical Engineers. – 1961. – Vol. 75. – № 19.
2. Шапков Е.В., Тряскин Н.В., Андрюшин А.В. Анализ работы роторно-винтового движителя в воде. Морские интеллектуальные технологии. 2024. № 1 часть 1, С. 59—65. DOI: 10.37220/MIT.2024.63.1.006.
3. Шапков Е.В., Тряскин Н.В. Параметрическое исследование гидродинамических характеристик роторно-винтового движителя. Морские интеллектуальные технологии. 2024. № 3 часть 1, С. 49—55. DOI: 10.37220/MIT.2024.65.3.022.
4. Колотилин В.Е., Михеев А.В., Береснев П.О., Беляев А.М., Папунин А.В., Макаров В.С., Зезюлин Д.В., Беляков В.В., Куркин А.А. Статистическая модель выбора геометрических параметров, массово-инерционных и мощностных характеристик транспортно-технологических машин на роторно-винтовых движителях // Труды Нижегородского государственного технического университета им. Р.Е. Алексеева № 3(110). Наземные транспортные системы. – Нижний Новгород. – 2015. – С. 156 – 208.
5. Согин, А.В. Исследование движения роторно-винтовой машины (РВМ) по воде / А.В. Согин, В.А. Шапкин // Известия высших учебных заведений. Машиностроение. – 2006. – № 5. – С. 54-64.
6. Карасева, С.А. Особенности функционирования роторно-винтовых движителей амфи бийных машин в качества водоходных / С.А. Карасева, В.С. Макаров, Д.Ю. Малахов // Труды НГТУ им. Р.Е. Алексеева. – 2021. – № 4. – С. 90-99.

СОДЕРЖАНИЕ

СЕКЦИЯ "ФИЗИКА КОНДЕНСИРОВАННЫХ СРЕД И НАНОСТРУКТУР"

Мороз А.Ю., Каасик В.П. Поляризация фотокристаллизующихся стекол, содержащих Ag^{+} и Ce^{3+}…… 3

Поленок Е.Д., Ушанов В.И., Чалдышев В.В. Локализованный плазмонный резонанс наночастиц Bi в матрице GaAs, усиленный брэгговской дифракцией…… 6

Лямкин Н.А., Иванов Д.А. Численный расчет плотности состояний и концентрации дырок в валентной зоне кубических кристаллов……..…… 9

Стрижкин Д.А., Карасев К.П., Карасев П.А. Возможности молекулярно-динамического моделирования для анализа облучения кластерными ионами…….. 12

Цуй Ч., Кан Г., Щербак С.А., Журихина В.В. Генерация второй гармоники в ионообменных стеклах…… 15

Ненашева К.В., Терпицкий А.Н. Оптическая нелинейность в дендритных структурах……..……..……..……..…… 18

Ремеле В.Е., Кузьмин М.В. Использование электронной оже-спектроскопии для количественного анализа процессов формирования границ раздела и морфологии тонких пленок……..……..…….. 21

Шелых Г.И., Руль Н.И., Таранец К.Б., Бараев Н.Т. Андреевские молекулы с отрицательной корреляционной энергией…… 24

Рачеев И.С., Годяев М.В., Тетенькин И.С., Кабурнеев В.Е. Особенности роста и пострostовых операций объемных кристаллов Ga_2O_3……..…….. 27

Некрасов А.С., Золотарев В.В., Орешко И.В., Казакова А.Е., Пихтин Н.А. Поверхностно-излучающий полупроводниковый лазер с резонатором на основе двумерного фотонного кристалла…… 30

Бузыкин А.Г., Стародубцева К.В., Белик П.А., Карцев Д.Д., Морозов М.И. Управление смачиваемостью полимерных пленок GPOSS-PDM методом лазерной абляции…….. 33

Горшков А.А., Могунов Я.А., Калашникова А.М. Первое экспериментальное наблюдение динамики намагниченности в магнитной MAX-фазе…….. 36

Матвеева Т.Г. Фрактальный характер температурных свойств наноструктур…….. 39

Брулев А.И., Дубровин Р.М., Давыдов В.Ю., Писарев Р.В. Комбинационное рассеяние света на магнонах при спин-ориентационном переходе $\Gamma_4 \leftrightarrow \Gamma_2$ в редкоземельном ортоферрите……. 42

СЕКЦИЯ "ФИЗИКА АТОМНОГО ЯДРА И ЭЛЕМЕНТАРНЫХ ЧАСТИЦ"

Шахов М.В., Рощупкин С.П. Квантовая запутанность состояний конечных частиц в процессе рождения электрон-позитронной пары и электрона при столкновении ультрарелятивистских электронов с сильной электромагнитной волной……. 45

Гуньков П.С., Геллер Д.П., Козловский С.С., Бердников Я.А. Сравнительный анализ моделирования спектров рентгеновской трубки методом Монте-Карло в различных программах…… 48

Шапаев Д.С., Бердников Я.А., Ларионова Д.М. Факторы ядерной модификации адронов в d+d столкновениях при энергиях $\sqrt{s_{NN}}$=13,5 и 27 ГэВ…….. 50

Круашвили Д.В., Лобанов А.А., Бердников Я.А. Рождение заряженных пионов в столкновениях продольно поляризованных протонов при энергиях $\sqrt{S_{pp}}$ = 200 и 510 ГэВ…… 53

Филатов Г.В., Кравченко П.В., Кравцов П.А., Бочин Б.В. Прецизионное измерение положения катодных проволок в системе пропорциональных камер высокого давления

в эксперименте по измерению зарядового радиуса протона в упругом электрон-протонном рассеянии…….. 56
Комарова С.Д., Банников Е.В., Котов Д.О. Плоскость реакции в p+Au столкновениях для измерения эллиптического потока…… 59
Трушков Д.А., Ларионова Д.М., Бердников Я.А. Методы определения центральности ядерных столкновений и их применимость к эксперименту SPD…… 62
Стариков М.А., Бердников Я.А. Простой способ визуализации совмещения поперечного сечения пучка протонов с мишенью циклотрона…… 65
Бабаков Д.А., Серов В.Д., Рощупкин С.П., Дубов В.В. Аннигиляция электрон-позитронной пары в мюон-антимюон в сильном электромагнитном поле…….. 67
Анцупов С.М., Бердников Я.А., Котов Д.О. Возбужденные нейтральные K-мезоны в ядро-ядерных столкновениях……... 69
Басиров К.Н., Банников Е.В., Бердников Я.А. Потери энергии кварков и глюонов в Cu+Au столкновениях при энергии $\sqrt{s_{NN}} = 200$ ГэВ…….. 71
Борисов И.И., Банников Е.В., Котов Д.О. Энергетические потери партонов в U+U взаимодействиях при энергии $\sqrt{s_{NN}} = 193$ ГэВ……. 74
Кох Д.В., Бердников Я.А. Анализ возможности применения полилактидов в качестве основного конструкционного материала фильтрующих модулей…… 77
Лобанов А.А., Бердников Я.А., Никитченко В.И. Предсказание асимметрии заряженных пионов в столкновениях поляризованных протонов с помощью генеративных алгоритмов машинного обучения……... 79

СЕКЦИЯ "ФИЗИКА ПЛАЗМЫ И КОСМОСА"

Голубев М.Н., Кислицын П.А., Иванчик А.В. Сверхтонкие переходы в атомах и вращательные переходы в молекулах Ранней Вселенной как возможный источник спектральных искажений реликтового излучения…… 83
Романов Д.К., Бобаков А.В., Кириченко А.Ю., Карпова А.В., Шибанов Ю.А., Зюзин Д.А. Исследование кандидата в миллисекундные пульсары в тесной двойной звездной системе, связанного с гамма-источником 4FGL J2054.2+6904…… 85
Елатонцев В.А., Рощупкин С.П., Дубов В.В. Резонансное рассеяние ультрарелятивистских электронов на позитронах в сильном электромагнитном поле: канал A…..…… 88
Мулюков И.Р., Полетаева А.Г., Кавеева Е.Г., Сениченков И.Ю., Рожанский В.А. Динамическое моделирование кодом SOLPS-ITER разряда с излучающей X-точкой в установке ASDEX-UPGRADE……..…… 91
Верязов М.М., Зюзин Д.А., Карпова А.В., Кириченко А.Ю., Шибанов Ю.А. Исследование природы оптического и рентгеновского двойника гамма-источника 4FGL J1824.2+1231..……..…… ..…….. 95
Головнев А., Климова С.А., Вандеев В.П., Семенова А.Н. Пертурбативный анализ обобщения пятипараметрической симметрично телепараллельной теории гравитации… 98
Башкатов С.О., Сергеев В.Ю., Кутеев Б.В. Снижение тока убегающих электронов во время срыва разряда с помощью инжектируемого коллектора в токамаке масштаба ITER…….. 100
Кучеров Г.А., Павлов А.К., Меркулова А.Ю., Белоусов Д.В. Накопление и рекомбинация радикалов как источник энергии для активных процессов в ледяных телах Солнечной системы……. 103
Лебедева М.А., Кропотина Ю.А. Моделирование солнечного ветра вблизи лунной магнитной аномалии……... 106

Белоус Ф.В., Солоха В.В., Ткаченко Е.Е., Яшин А.Ю. Моделирование пилинг-баллонной неустойчивости для токамака Глобус-М2 с помощью машинного обучения……... 108
Матросова Д.Б., Кропотина Ю.А. Гибридное моделирование натекания солнечного ветра на лунные магнитные аномалии…….. 112
Шохин Т.Д., Чариков Ю.Е., Шабалин А.Н. Предвестники солнечных вспышек в УФ излучении……. 114
Иванов И.А., Остряков В.М. Влияние солнечных супервспышек на перераспределение изотопа ^{14}C в атмосфере Земли……... 116

СЕКЦИЯ "ФИЗИКА ПРОЧНОСТИ И ПЛАСТИЧНОСТИ МАТЕРИАЛОВ"

Седова Ю.С. Испытания кольцевых образцов котельных труб: анализ диаграмм деформирования на основе моделей водородной хрупкости…….. 120
Беликова Ю.А. Механизм формирования интерметаллических фаз при длительном температурном старении в литом жаропрочном сплаве HP40NbTi…… 123
Ермолаева Ю.В., Красницкий С.А., Гуткин М.Ю. Температурные зависимости критической длины трещины в керамике α-Al_2O_3……. 126
Петров Д.А., Гуткин М.Ю. Напряжения несоответствия в слоистых нанопроволоках… 129
Наумов Д.К., Шевчук Р.Э., Гуткин М.Ю., Красницкий С.А., Смирнов А.М. Расчет упругой энергии малых икосаэдрических частиц в рамках численного и аналитического подходов……..... 132
Троцкая Д.В., Филиппов С.А. Разработка методики электрохимической полировки образцов из жаропрочного сплава…… 135
Ковалев И.А., Колесникова А.Л., Гуткин М.Ю. Дислокационная релаксация напряжений в цилиндрическом квантовом кольце вблизи свободной поверхности…..... 138

СЕКЦИЯ "БИОМЕХАНИКА"

Бахметьев С.С., Груздев И.Е. Моделирование усталостного разрушения дистального сухожилия двуглавой мышцы плеча…….. 141
Гуляева В.А., Суслова И.Б. Применение вейвлет-преобразования для исследования моделей сердечного ритма матери и плода как частотно-модулированных сигналов…… 144
Груздев И.Е., Плотников А.Н. Конечно-элементное моделирование усталостного разрушения сухожилия клювовидно-плечевой связки при импинджмент-синдроме плеча…… 147
Иванов С.Д., Антонова О.В. Моделирование процесса сворачивания баллона для ангиопластики…… 150
Иванов Н.А., Гатаулин Я.А., Юхнев А.Д., Зайцев Д.К., Орлов С.В. Численное моделирование динамики жидкости в частично заполненном контейнере, расположенном на орбитальном шейкере……. 153
Корчагин А.П., Охотников А.О., Антонова О.В., Охотников О.И. Численное моделирование распространения желчи вдоль двенадцатиперстной кишки с учетом движения стенки…… 156
Кабин Н.А., Антонова О.В. Применение модели материала Огдена для описания механического поведения митрального клапана…….. 159
Мочалова О.О., Гатаулин Я.А., Смирнов Е.М. Численное исследование течения кровеимитирующей жидкости в моделях типовых конфигураций при экстраанатомическом шунтировании…… 162

Жулего Я.В., Гатаулин Я.А., Смирнов Е.М. Численное исследование структуры трехмерного течения в модели артериовенозной фистулы……. 165
Кокшарова Е.И., Юхнев А.Д., Смирнов Е.М., Рева В.А. Экспериментальное исследование структуры течения в модели временного протеза кровеносного сосуда изогнутой формы……. 168

СЕКЦИЯ "МНОГОМАСШТАБНОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ПЕРЕНОСА И КОНВЕРСИИ ЭНЕРГИИ"

Алешина М.А., Грекова Е.Ф. Преломление в упругой линейной редуцированной изотропной среде Коссера на упругом основании……..... 172
Алферова П.С., Грекова Е.Ф. Распространение волн в редуцированной среде Коссера с учетом малой анизотропии особого вида…… 175
Бутузова Е.С., Ляжков С.Д. Перенос тепловой энергии в одномерном бесконечном линейном кристалле на упругом основании…….. 178
Груздев И.Е. Построение системы уравнений для энергетических характеристик волнового уравнения с вязким трением……... 181
Дроздов С.О., Кривцов А.М. Динамика энергии в электромагнитном поле……..... 183
Капшуков Л.М. Энергетическая динамика тонкого нерастяжимого кольца…… 186
Кедров А.А., Кузькин В.А. Распространение гауссового волнового пакета в цепочке Гука…… 188
Кедров А.А., Щербинин С.А. Исследование устойчивости нелинейной колебательной π-моды в возмущенной цепочке Тоды…… 191
Кривцова А.А. Движение энергетического центра возмущения в неоднородной среде…. 194
Работинский А.Д., Грекова Е.Ф. Свободные волны в средах без симметрии отражения.. 197
Семенин Д.А., Фролова К.П. Определение эффективной теплопроводности материала с неидеальными контактами на границе раздела фаз……..... 200
Шелехов Н.Э. Численный анализ локализованных колебаний тонкого нерастяжимого кольца…… 203

СЕКЦИЯ "МЕХАНИКА И ПРОЦЕССЫ УПРАВЛЕНИЯ"

Авдонюшкин Д.В., Семенов А.С. Моделирование процесса роста перовскитной фазы в тонкой сегнетоэлектрической пленке……. 206
Адамович А.Э., Савиковский А.В., Гордеев А.Н., Фрейдин А.Б. Анализ влияния взаимодействия краевых трещин на устойчивость их прямолинейного роста…… 209
Антуфьев Д.В., Лукин А.В., Попов И.А. Синтез нелинейных электроупругих моделей пониженного порядка для нано- и микроссистем на базе метода конечных элементов… 212
Асылгужин А.Р., Лукин А.В. Продольный удар груза по стержню на упругом основании.. 215
Баккар М.М., Мхемид-Дбес А.А., Семенов А.С. Влияние режимов термомеханического воздействия на статическую и циклическую прочность лопатки газовой турбины……... 218
Булгаков А.Н., Гультяев В.И., Алексеев А.А., Широков А.Н. Моделирование процессов сложного деформирования стали 45 в двухмерных опытах в пространстве деформаций по ломаным траекториям……. 221
Галяутдинова А.Р., Зиновьева Т.В. Контактные напряжения в кольце роликоподшипника, ослабленного водородом…….. 224
Дегилевич Е.А., Смирнов А.С. Моделирование троса крана методами многотельной динамики…… 227
Исаев К.О., Науман Д.С., Лобачев М.И. Разработка методики перехода в зону сниженной магнитной индукции для уравновешенных слоев квазибессиловой системы.. 230

Князев О.А., Смирнова Н.А. Параметрический регулятор в системе стабилизации слабодемпфированного осциллятора…….. 233
Кожанова П.А., Фрейдин А.Б. Моделирование поверхностного роста в сферически-симметричной задаче…… 236
Комарова Т.С., Грищенко А.И. Идентификация параметров материала для реономных микромеханических моделей неупругого деформирования монокристаллических сплавов на никелевой основе……... 239
Муслимов А.П., Лапотышкин А.В. Автоматическая система регулирования зазора гидростатических направляющих токарного станка…… 242
Лобачев М.И. Исследование нестационарных процессов в одномерных квазибессиловых магнитах…….. 244
Макаров Д.А., Далматов И.И., Назарова Е.Д., Упоров П.А. Исследование влияния параметров геометрии на эффективность глушителя шума двигателя внутреннего сгорания…….. 247
Мамин А.В., Антонова О.В. Численное моделирование падения деформируемых оболочек в воду на основе метода Лагранжа-Эйлера……. 250
Мирошников Н.А., Шагниев О.Б. Математическое моделирование процессов управления ориентацией платформы Стюарта с шестью гидроцилиндрами…….. 253
Мухин Д.С., Семенов А.С. Экспериментальное исследование прочности образцов из полилактида, изготовленных на основе аддитивных технологий…… 256
Пашковский Д.М. Термоупругость Грина-Нагди для материала с микроструктурой…… 259
Попов И.А., Лукин А.В., Удалов П.П. Об устойчивости дрейфа положения равновесия проводящего кольца в переменном магнитном поле…… 262
Привалов И.В., Штукин Л.В. Исследование динамики многобалочного микрорезонатора…… 265
Ряпосов Н.А., Грищенко А.И. Моделирование немонотонного термомеханического нагружения корсетных поликристаллических образцов для термоусталостных испытаний…….. 268
Садовченко Е.А., Жмайло М.А., Черновол Е.М. Разработка упругопластической модели материала костного блока с разрушением…….. 271
Садыхов О.Б., Лукин А.В., Попов И.А. Свободные колебания кольцевого резонатора твердотельного волнового гироскопа при наличии возмущений…… 274
Свистов В.Е., Упоров П.А., Назарова Е.Д. Конечно-элементное моделирование и исследование свойств акустических метаструктур…… 277
Селин В.А., Лукин А.В., Попов И.А. Разработка методики синтеза компактных системных моделей резонансных МЭМС датчиков…….. 280
Смирнов С.А., Беляев А.К. Среднее поле случайной волны, распространяющейся в среде со скрытой периодичностью…… 284
Смирнова Е.К., Фролова К.П., Бессонов Н.М. Моделирование упруго-пластических течений с учетом изменения разгруженной конфигурации…….. 287
Тынышов Э.Б., Муслимов А.П. Разработка автоматической системы контроля износа сверла путем регулирования его подачи на автоматических линиях…….. 290
Федоренко Р.В., Лукин А.В. Анализ влияния упрочнения на диаграмму приспосабливаемости термоциклически нагружаемого сосуда под давлением……. 292
Фролов М.М., Савиковский А.В., Семенов А.С. Методы расчета траектории трещины при хрупком разрушении: прямой подход и теория фазового поля……. 295
Ходырева Е.В., Фролова К.П., Бессонов Н.М. Решение задач термо- и массоупругости на основе изменения разгруженной конфигурации…… 299

СЕКЦИЯ "ПРИКЛАДНАЯ МАТЕМАТИКА"

Кочетков И.Д., Зайцева Н.И. Моделирование и оптимизация системы рекуперации энергии в электрическом транспорте……. 302
Гольдберг А.А., Елисеев А.А. Поиск оптимальных параметров геодезического алгоритма расстановки крепежных элементов……. 305
Красников Р.А., Титова М.В. Различные подходы к ускорению быстрого градиентного метода в применении к решению задач сборки……. 309
Петухов Д.А., Фролов М.Е. Адаптивные алгоритмы решения плоских задач линейной теории упругости с несколькими материалами на основе элементов Равьяра – Тома нулевого и первого порядков…… 312
Афанасьев А.В., Баженов А.Н. Метод Тейла-Сена. Интервальный анализ…… 315
Бабахина С.А., Баженов А.Н. Применение интервальных арифметик для обработки и анализа сигналов томсоновского рассеяния…… 319
Корпусова С.Д., Баженов А.Н. Применение матрицы отношений для построения гистограммы и нахождения моды интервальной выборки…… 322
Яворук Т.О., Баженов А.Н. Решение задачи линейной регрессии в случае двойного оценивания ошибок исходных данных…… 325
Карасев В.А., Герасимов Е.И., Чуканов В.С., Пчицкая Е.И. Нейросетевой метод определения положения, характеристик и поведения мыши…… 328
Умнов С.А., Герасимов Е.И., Чуканов В.С., Пчицкая Е.И. Обнаружение патологий с помощью оценки активности нейронных ансамблей гиппокампа мышей построением манифолдов…… 330
Пучкин И.А., Чуканов В.С., Васильев А.А. Моделирование реалистичного освещения в широком цветовом диапазоне…….. 332
Гребнев Г.А., Чуканов В.С., Васильев А.А. Использование нейросетей для повышения FPS путем генерации кадров…… 334
Крылова Е.О., Смирнова Д.С., Пчицкая Е.И., Чуканов В.С. Алгоритмическое моделирование дендритов на основе статистических характеристик…….. 337
Липс Е.К., Смирнова Д.С., Пчицкая Е.И., Чуканов В.С. Разработка метода оценки наличия закономерностей в пространственной организации дендрита нейрона…… 340
Пестряков Д.Д., Новиков Ф.А. Язык PLATO как способ записи автоматически проверяемых доказательств теорем с использованием онтологий…… 344
Моторный Н.Е., Новиков Ф.А. Использование языка Python как декларативного DSL описания PlantUML диаграмм…….. 347
Волгузов А.Ю., Родионова Е.А. Оптимизация выбора признаков в задачах классификации и анализе экспрессии генов…… 350
Двас П.Г., Родионова Е.А. Предметно-объектная инверсия в применении к задачам смешанного целочисленного нелинейного программирования (MINLP)…… 353
Бакшеев В.Е., Заяц О.И. Исследование приоритетной системы обслуживания с детерминированным выталкивающим механизмом и рандомизированной профилактикой канала обслуживания……. 355
Маликов И.М., Козлов К.Н. Предсказание фенотипа растений на основе генотипа с использованием трансформеров…….. 358
Чибышев Т.А., Козлов К.Н. Разработка и сравнение классификаторов изображений колоний ПСКЧ……... 361
Усиков А.А., Лагунова М.В. Аналитическая математика в алгоритме трассировки лучей.. 363
Аптуков М.И., Кожевников В.А. Разработка программы настройки температурного режима работы серверов VEGMAN с применением алгоритмов оптимизации…….. 367

Желудев К.И., Елисеев А.А. Оптимизация положения деталей при сборке авиационных конструкций……... 371
Рябоконь А.А., Божокин С.В., Шохин Т.Д. Логистическая аппроксимация системы неравноотстоящих точек……... 375
Тырыкин Я.А., Козлов К.Н. Моделирование продуктивности нута на основе искусственных изображений и сверточных нейронных сетей…….. 378
Воротников А.А., Новиков Ф.А. Система хранения онтологий как ядро интеллектуальной образовательной среды……. 381
Скворцов В.С., Золин И.М., Пчицкая Е.И. NeuroRAG: мультиагентный ИИ ассистент нейробиолога…….. 384

СЕКЦИЯ "ГИДРОАЭРОДИНАМИКА, ГОРЕНИЕ И ТЕПЛООБМЕН"

Абакарова М.А., Кравченко Д.С., Кустова Е.В. Моделирование обтекания цилиндра сверхзвуковым потоком с локальным энерговложением…….. 388
Адиатуллин В.Р., Галаев С.А., Иванов Н.Г., Рис В.В. Численное моделирование взаимодействия встречных пристенных струй в прямоугольной полости……... 391
Акунец М.В., Гарбарук А.В. Анализ применения нейронных сетей и метода генетического программирования для повышения точности RANS-моделирования турбулентных течений…….. 394
Андрейко С.В., Павлов А.В., Бобылев П.Г., Митяков В.Ю. Исследование влияния ограничителя потока охлаждающей жидкости на теплообмен при кипении в большом объеме……. 397
Байнов А.П., Гарбарук А.В., Матюшенко А.А. Численное исследование влияния толщины и вогнутости профиля крыла с волнообразной передней кромкой на его аэродинамические характеристики…….. 399
Баранов В.А., Абрамов А.Г. Применение графовых нейронных сетей для предсказания характеристик пульсирующего течения вязкой жидкости в канале……. 402
Баранов В.А., Пашкевич Д.С., Федорова Т.А. Применение методов машинного обучения для моделирования максимальной температуры в зоне реакции гексафторида урана, метана и кислорода в режиме горения……. 405
Белов К.И., Монахов Н.А., Лапушкина Т.А. Исследование эффекта уменьшения числа Маха падающей ударной волны при использовании быстродействующего клапана на ударной трубе……. 409
Васильев А.А., Булович С.В. Математическая модель термоакустического двигателя Стирлинга с нагрузкой в виде линейного генератора…… 412
Габараев А.Н., Булович С.В. Расчет нестационарных внутренних течений вязкого газа в приближении узкого канала……. 415
Голубков В.Д., Гарбарук А.В. Валидация метода определения положения ламинарно-турбулентного перехода в пограничных слоях с неоднородностями поверхности, основанного на глобальном анализе устойчивости…… 418
Дегтярев Н.Д. Численное моделирование крылового профиля с газодинамическим элементом управления…….. 421
Демо И.О., Хлопушин Д.И., Смирновский А.А. Численное моделирование термоупругих напряжений, возникающих в тонкой пластине при воздействии на нее лазерным излучением……. 423
Еропов А.С., Смирнов Е.М. Развитие турбулентной свободной конвекции у внезапно нагреваемой вертикальной пластины с локальными интенсификаторами теплообмена в виде наклонных ребер……... 427

Забелло К.К., Гарбарук А.В. Решение задачи о монополе методом решеточных уравнений Больцмана…… 430
Кафиева К.К., Засимова М.А. Исследование влияния эффектов плавучести на движение вихревой структуры, формирующейся при импульсной подаче струи в затопленное пространство…….. 433
Князев С.А., Сероштанов В.В., Гусаков А.А. Влияние стержней-турбулизаторов на течение и теплообмен вблизи цилиндра…….. 436
Коекин В.Ю., Булович С.В. Оптимизация работы роторно-лопастной машины по холодильному циклу…….. 439
Кондратьев Л.Д., Булович С.В. Моделирование термогазодинамических процессов в сегменте теплового блока акустического двигателя Стирлинга…… 442
Конин Д.Ю., Пулин А.Г., Талабира И.Ю., Модестов В.С., Попович А.А. Повышение коэффициента глубины охлаждения в каналах лопаток газовых турбин с помощью ТПМП решетчатых структур…… 445
Корскова Т.С., Засимова М.А. Численное исследование течения в вентилируемом пространстве при стационарной подаче приточной струи и нестационарной, организованной за счет использования осциллятора……. 448
Кучиев Д.Ю., Смирновский А.А. Оценка применимости различных RANS моделей к расчету свободной конвекции в слое с объемным тепловыделением…….. 451
Максимов Д.А., Колесник Е.В. Программная реализация равновесной модели влажного водяного пара в коде SINF/FLAG-S и ее применение для расчета трансзвуковых течений 454
Монахов Н.А., Попов П.А. Анализ применимости одномерного подхода к расчету течения в ударной трубе с отражающим соплом…… 457
Неянин В.Ю., Талалов В.А. Обработка сигналов микрокалориметра при пиролизе…….. 460
Пашкевич Д.С., Олисов М.А., Капустин В.В. Термодинамический анализ процесса регенерации фтора из полифторида аммония……. 463
Орлов Ф.А., Монахов Н.А., Попов П.А., Белов К.И. Влияние свойств рабочего газа на точность калибровки датчиков теплового потока с помощью отраженной ударной волны……. 466
Орлов Ф.А., Монахов Н.А., Попов П.А., Белов К.И. Расчетно-экспериментальное исследование теплообмена за отраженной ударной волной в одноатомном и молекулярном газе……. 470
Осадчий Д.С., Колесник Е.В., Попов П.А. Расчетно-экспериментальное исследование обтекания осесимметричных тел сверхзвуковым потоком…… 473
Паксялин Н.С., Щур Н.А. Исследование обтекания крылового профиля, машущего в однородном набегающем потоке с ненулевым средним углом атаки…….. 476
Петров А.А., Китанина Е.Э. Численное моделирование ламинарного течения и теплообмена в витых трубах квадратного сечения……. 479
Пожванюк К.Ю., Булович С.В. Математическое моделирование течения слабосжимаемой жидкости в щелевом зазоре роторно-лопастной машины…… 482
Попова Д.К., Кортиков Н.Н. Применение метода гармонического баланса при моделировании нестационарных процессов в охлаждаемой ступени турбины…….. 485
Романов А.С., Галаев С.А. Локальные особенности течения и теплообмена в оребренных каналах, типичных для систем охлаждения рабочих лопаток газовых турбин…… 488
Рябикова А.И., Бабич Е.В., Колесник Е.В. Численное исследование двумерного взаимодействия сверхзвукового потока вязкого газа со струей, вдуваемой с поверхности пластины…… 491
Садикова Е.В., Пашкевич Д.С., Федорова Т.А. Построение кинетических моделей фторирования этилена и фторэтанов трифторидом кобальта…….. 495

Семенюта А.В., Стабников А.С. Численное моделирование кипения недогретой воды с использованием программных пакетов ANSYS Fluent и ANSYS CFX…… 497
Смирнов А.А., Циркунов Ю.М. Анализ применимости моделей горения для исследования физико-химических процессов в камерах сгорания энергетических установок…… 500
Усов Д.А., Кутузова Н.В., Мезенцев С.И. Исследование влияния характеристик сечения единичного канала на эффективность теплообменной насадки…… 503
Федорова Т.А., Пашкевич Д.С. Использование численного моделирования при разработке методологии масштабирования реактора типа туннельной горелки для реализации процесса взаимодействия гексафторида урана с водородсодержащими веществами и кислородом в режиме горения…….. 506
Хозин Р.Р., Лещев Д.В., Смирновский А.А. Влияние геометрии подложки и концентрации CH_4/H_2 на однородность осаждения алмаза методом MPCVD…… 509
Чайка П.В., Циркунов Ю.М. Численное моделирование газодинамики осевой турбины и исследование влияния величины радиального зазора на характер течения…… 512
Шапков Е.В., Тряскин Н.В. Исследование гидродинамических характеристик роторно-винтового движителя, частично погруженного в воду…….. 515

НЕДЕЛЯ НАУКИ ФИЗМЕХ

Сборник материалов
Всероссийской научной конференции

31 марта – 4 апреля 2025 года

Налоговая льгота – Общероссийский классификатор продукции
ОК 005-93, т. 2; 95 3004 – научная и производственная литература

Подписано в печать 27.11.2025. Формат 60×84/16. Печать цифровая.
Усл. печ. л. 33,0. Тираж 32. Заказ 5463.

Отпечатано с готового оригинал-макета,
предоставленного редакционной коллегией конференции,
в Издательско-полиграфическом центре Политехнического университета.
195251, Санкт-Петербург, Политехническая ул., 29.
Тел.: (812) 552-77-17; 550-40-14.