



# НЕДЕЛЯ НАУКИ ФИЗМЕХ

# Сборник материалов Всероссийской научной конференции

# 3-7 апреля 2023 года





# ПОЛИТЕХ-ПРЕСС

Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого

2023

Министерство науки и высшего образования Российской Федерации

САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ ПОЛИТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ ПЕТРА ВЕЛИКОГО

Физико-механический институт

# НЕДЕЛЯ НАУКИ ФИЗМЕХ

Сборник материалов Всероссийской научной конференции

3-7 апреля 2023 года



ПОЛИТЕХ-ПРЕСС Санкт-Петербургский

политехнический университет Петра Великого

Санкт-Петербург 2023 УДК 51;53 ББК 22 H42

**Неделя науки ФизМех** : сборник материалов Всероссийской научной конференции, 3–7 апреля 2023 г. – СПб. : ПОЛИТЕХ-ПРЕСС, 2023. – 400 с.

В сборник включены статьи студентов, аспирантов, молодых ученых и сотрудников СПбПУ, университетов, научных организаций и предприятий Санкт-Петербурга, России, зарубежных стран, принятых на секционные заседания конференции «Неделя науки ФизМех». Статьи отражают современный уровень научно-исследовательской работы участников конференции в области прикладной математики, физики и механики.

Представляет интерес для специалистов в различных областях знаний, для учащихся и работников системы высшего образования и Российской академии наук.

Редакционная коллегия Физико-механического института СПбПУ: *М. Е. Фролов* (директор института), *Я. А. Гатаулин* (отв. ред.), *Е. М. Смирнов*, *Н. Г. Иванов*, *Е. Е. Журкин*, *С. А. Щербак*, *И. А. Шаров*, *Н. Ю. Золоторевский*, *А. Н. Баженов*, *А. С. Семёнов*, *С. А. Галаев*, *А. С. Мурачёв*, *Б. С. Тёрушкин* 

Печатается по решению Совета по издательской деятельности Ученого совета Санкт-Петербургского политехнического университета Петра Великого.

> © Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого, 2023

ISBN 978-5-7422-8334-8

## СЕКЦИЯ «ФИЗИКА ПРОЧНОСТИ И ПЛАСТИЧНОСТИ МАТЕРИАЛОВ»

УДК 539.561

Ю.С. Седова<sup>1,2</sup>, Н.М. Бессонов<sup>2</sup> <sup>1</sup>Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого, <sup>2</sup>Институт проблем машиноведения РАН<sup>(•)</sup>

## ПРИМЕНЕНИЕ МОДИФИЦИРОВАННОЙ МОДЕЛИ ВОДОРОДНОЙ ХРУПКОСТИ К ОПИСАНИЮ РАЗРУШЕНИЯ УПРУГО-ПЛАСТИЧЕСКОГО МАТЕРИАЛА

Введение. Чрезвычайно важной и актуальной задачей инженерной практики является учет и прогнозирование влияния водорода на механические характеристики материалов. В присутствии в составе этого вещества значительно ухудшаются многие свойства металлов, в их числе прочность, пластичность, ударная вязкость и трещиностойкость [1].

На сегодняшний день существует несколько подходов к описанию разрушительного воздействия водорода. Одним из наиболее широко распространенных и общепризнанных является механизм усиленной водородом декогезии НЕDE, впервые предложенный Ориани [2]. Для верификации модели было проведено множество экспериментальных испытаний [3] на металлических образцах, искусственно наводороженных в растворе электролита, как правило, методом катодной поляризации. Однако результаты последних исследований показали, что такая процедура приводит к формированию водородного скин-эффекта [4,5] – феномен, который до сих пор в модели НЕDE не учитывался. Кроме того, анализ фрактур [6] позволил обнаружить на поверхности излома образцов сменяющиеся области хрупкого и вязкого разрушений; количественного объяснения этому эффекту пока не было предложено.

Модификация классической модели описания водородной хрупкости. В настоящем исследовании мы модифицировали классический механизм усиленной водородом декогезии, чтобы расширить пределы его применимости и устранить неточности и несоответствия, отмечаемые авторами по результатам производимых на его основе численных расчетов [7].

В традиционной концепции модель HEDE включает в себя несколько основных составляющих: определяющие уравнения сплошной среды; уравнение для перераспределения водорода внутри твердого тела; зависимость водородной деградации когезионных параметров и когезионный закон.

Для выполнения численного расчета предложен рекуррентный алгоритм [2]. Предполагается, что трещина в образце, нагруженном внешним воздействием, будет сохранять свою конфигурацию до тех пор, пока упругие напряжения  $\sigma_{el}$ , действующие в вершине трещины, не превысят величину когезионных  $\sigma_{Zc}$ , связывающих ее берега между собой. Это условие может быть нарушено за счет ослабления когезионных напряжений, вызванного сосредоточением водорода в окрестности вершины. В таком случае произойдет рост трещины с образованием новой свободной поверхности. Последнее неизбежно повлечет за собой очередное перераспределение водорода с увеличением его концентрации вблизи трещины, в результате чего описанный процесс может повторяться вновь и вновь.

В разработанном нами подходе учитывается, что изменение удельной поверхностной энергии влияет не только на величину когезионных напряжений, но и отражается на значении критического коэффициента интенсивности напряжений (КИН),  $K_{Ic}$ . Таким образом, предлагается на каждом шаге рекуррентной численной процедуры отслеживать выполнение не только когезионного критерия разрушения по величине напряжений ( $\sigma_{el} < \sigma_{Zc}$ ), но и силового критерия Ирвина ( $K_I < K_{Ic}$ ).

<sup>&</sup>lt;sup>(•)</sup> Ю.С. Седова, sedova.yus@mail.ru

<sup>&</sup>lt;sup>(\*)</sup> О.В. Боровская, borovskayaod@mail.ru

Другой не менее важной отличительной чертой нашего подхода является то, что мы исследовали влияние водородного скин-эффекта на поведение насыщенного водородом образца при нагружении. Начальные и граничные условия модели были установлены в соответствии со значениями экспериментальных данных. Кроме этого, мы выполнили обобщение модели водородной хрупкости HEDE и распространили ее на случай упругопластического материала.

В данной работе с использованием модифицированной модели HEDE была исследована задача о трехточечном изгибе образца трубной стали X70 прямоугольного поперечного сечения с надрезом с одной стороны (рис. 1), насыщенного водородом. Для реализации предложенного метода был использован собственный разработанный программный алгоритм, написанный на языке C++. С его помощью были получены характеристики напряженно-деформированного состояния тела и параметры распространения трещины.



Рис. 1. Конечно-объемная модель; начальные и граничные условия

*Результаты численного исследования.* Результаты моделирования показали, что при нагружении на поверхности металлического образца, содержащего водород, мгновенно образуется микротрещина. Ее инициирование связано с выполнением хрупкого декогезионного критерия разрушения, вызванного высоким содержанием вещества в скинслое.

Далее развитие разрушения сопровождается увеличением инкубационного периода распространения трещины на одно межузловое расстояние конечно-объемной модели, однако затем эта тенденция сменяется уменьшением данного интервала. Такая перемена объясняется тем, что на начальной стадии все определяется временем диффузии водорода, которому необходимо подойти под действием внутренних напряжений к текущей вершине трещины и вызвать нарушение когезионного или силового критерия разрушения. В то же время, по мере распространения разрушения трещина достигает критического размера, при котором в материале возникает высокий уровень упругих напряжений и величина действующего КИНа становится столь велика, что дальнейший ее рост становится возможным без участия водорода (при его фоновой концентрации). Помимо этого, обнаружено, что в силу наблюдаемого «отставания» диффузионных потоков водорода его проникновение вглубь материала оказывается сильно ограничено.

В ходе проведения исследования нами был установлен важный факт, свидетельствующий о том, что при разрастании до определенной степени в вершине трещины зарождается локальная зона пластических деформаций, которая получает дальнейшее развитие по мере распространения разрушения. Данный феномен способен вызвать смену характера разрушения с хрупкого механизма на вязкий. Таким образом, моделирование, выполненное на основании модифицированной модели HEDE и с учетом экспериментальных данных о скин-эффекте насыщения водородом, позволило впервые описать образование двух характерных областей разрушения на поверхности излома образца.

Отметим также, что за основу параметров используемой модели были взяты сведения, приводимые в экспериментальной работе [8]. По итогу выполнения моделирования было зафиксировано не только качественное, но и количественное соответствие размеров площадок хрупкого и вязкого разрушений с данными, демонстрируемыми в этой работе.

Заключение. Предложен новый метод описания вызванного водородом разрушения металлических образцов под действием внешней нагрузки. За основу подхода взята классическая модель усиленной водородом декогезии HEDE. Учтены экспериментальные данные о скин-эффекте искусственного наводораживания металлов.

С использованием модифицированной модели получено конечно-объемное решение задачи о трехточечном изгибе образца, насыщенного водородом. По результатам моделирования установлено, что трещина зарождается с поверхности образца, свидетельствуя о начале хрупкого разрушения. Далее по мере продвижения она способна развиваться самостоятельно, без участия водорода (при его фоновом содержании) в силу отставания скоростей перераспределения вещества, а также возрастающего уровня действующих в материале напряжений. На дальнейшем этапе происходит смена характера разрушения и его протекание по пластическому механизму. Ширина площадки водородной хрупкости будет определяться главным образом уровнем внешней нагрузки, и ее размер порядок превышать толщину поверхностного скин-слоя может на водорода, присутствующего в материале на начальный момент испытания.

Таким образом, именно в сильной неравномерности в распределении содержания водорода, формирующейся в результате искусственного насыщения металлов, состоит главная причина двойственного характера разрушения образцов. Это должно учитываться как при проведении экспериментальных испытаний материалов, так и при выполнении численных расчетов поведения деталей и конструкций, содержащих водород.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Maruschak P.O., Panin S.V., Chausov M.G., Bishchak R.T., Polyvana U.V. Effect of long-term operation on steels of main gas pipeline. Reduction of static fracture toughness // J. Nat. Gas Sci. Eng. – 2017. – V. 38. – P. 182–186.

2. Oriani R.A. A mechanistic theory of hydrogen embrittlement of steels // Berichte der Bunsengesellschaft für physikalische Chem. – 1972. – V. 76(8). – P. 848–857.

3. Bond G.M., Robertson I.M., Birnbaum H.K. The influence of hydrogen on deformation and fracture processes in high-strength aluminum alloys // Acta Metall. – 1987. – V. 35(9). – P. 2289–2296.

4. Martinsson Å., Sandström R. Hydrogen depth profile in phosphorus-doped, oxygen-free copper after cathodic charging // J. Mater. Sci. – 2012. – V. 47(19). – P. 6768–6776.

5. Polyanskiy V.A., Belyaev A.K., Alekseeva E.L., Polyanskiy A.M., Tretyakov D.A., Yakovlev Yu.A. Phenomenon of skin effect in metals due to hydrogen absorption // Continuum Mech. Thermodyn. – 2019. – V. 31(6). – P. 1961–1975.

6. Troiano A. R. The role of hydrogen and other interstitials in the mechanical behavior of metals // Metallography, Microstructure & Analysis. 2016. Vol. 5. No. 6. Pp. 557–569.

7. Sedova, Yu., Polyanskiy, V., Bessonov, N. Features of applying HEDE model to description of the destruction of materials induced by hydrogen // APM. Proceedings of the XLVIII ISSC "Advanced Problems in Mechanics", 2020, St. Petersburg, Russia. – BS.: Springer Nature Switzerland AG. – 2022. – pp. 202-219.

8. Peral L. B., Zafra A., Fernández-Pariente I., Rodríguez C., Belzunce J. Effect of internal hydrogen on the tensile properties of different CrMo(V) steel grades: Influence of vanadium addition on hydrogen trapping and diffusion // International Journal of Hydrogen Energy. 2020. Vol. 45. No. 41. Pp. 22054–22079.

О.Д. Боровская<sup>2</sup>, Э.А. Ушанова<sup>1,2</sup>, С.Н. Петров<sup>1,2</sup> <sup>1</sup>Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого <sup>2</sup> НИЦ "Курчатовский институт" - ЦНИИ КМ "Прометей" им. И.В. Горынина<sup>(\*)</sup>

# РЕКОНСТРУКЦИЯ ПЕРВИЧНОГО АУСТЕНИТНОГО ЗЕРНА В СТАЛЯХ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ ПАКЕТА МТЕХ МАТLAB НА ОСНОВЕ ДАННЫХ EBSD

Введение. Стали бейнитно-мартенситного класса широко используются во многих отраслях производства, они должны обладать определенными физико-механическими свойствами, обеспечивающими надежность их службы. Свойства сталей во многом зависят от структуры высокотемпературной фазы – так, размер зерен аустенита влияет на пластичность, ударную вязкость и предел текучести превращенной структуры. Реконструкция первичных аустенитных зерен (ПАЗ) позволяет оценить их размеры, а, следовательно, и качество превращенной структуры.

В данной работе реконструкция ПАЗ была выполнена с помощью двух методов обработки данных, полученных с помощью дифракции обратно рассеянных электронов (EBSD – Electron Backscatter Difraction). Оба метода реализованы с помощью программного пакета MTEX Matlab. Результаты реконструкции ПАЗ с помощью экспресс-методов сравнивались с результатами, полученными используемым в настоящее время в ряде работ [1] методом вакуумного травления, включающим нагрев, полиморфное превращение и высокотемпературную выдержку.

Выявление ПАЗ на основе данных о превращенной структуре возможно благодаря кристаллогеометрическим соотношениям при γ-α превращении. Применяются ориентационные соотношения (ОС) Курдюмова-Закса, Нишиямы-Вассермана, Гренингера-Трояно [2].

В рамках первого экспресс-метода среди всех границ зерен превращенной структуры исследуемого участка образца выделялись границы, имеющие углы разориентировки от 20°до 50°[3]. Такой выбор основан на том, что вне этого интервала находятся границы зерен, образовавшиеся из одного исходного зерна.

Второй метод был реализован в пакете MTEX Matlab с помощью функции parentGrainReconstructor (pGR), позволяющей восстанавливать ПАЗ в мартенсите. В основе данной функции так же лежат ОС.

Материал и методика проведения исследований. В работе исследована сталь 09ХН2МД мартенситно-бейнитного класса. Шлифы стандартного металлографического качества были электрополированы в хлорно-спиртовом электролите при помощи установки «LectroPol-5».

После подготовки образцов произведено картирование с помощью двулучевого сканирующего микроскопа "TESCAN LYRA3", анализ полученных EBSD-данных осуществлен с помощью пакета MTEX Matlab, позволяющего моделировать различные кристаллографические структуры. Размер зерна измерен с помощью системы анализа изображений для металлургии ThixometPro методом секущих. В окрестностях участка картирования были нанесены метки с использованием ионно-оптической системы микроскопа. Далее образец был подвергнут термическому травлению в вакууме с целью выявления границ аустенитной структуры и сопоставления полученных границ с

<sup>&</sup>lt;sup>(\*)</sup> О.В. Боровская, borovskayaod@mail.ru

результатами восстановления вышеуказанными методами. Травление выполнено при температуре 1020 °С в течение 600 секунд с помощью дилатометра DIL 805.

Результаты экспериментов и их обсуждение. Выявление границ ПАЗ в стали бейнитно-мартенситного класса 09ХН2МД показало, что выявленные вакуумным травлением аустенитные границы не совпадают с границами, построенными на основе экспресс-метода и функции pGR. Наложение границ, выявленных экспресс-методом на изображение микроструктуры того же участка после вакуумного травления картин приведено на рис.1.



Рис. 1. Восстановленные границы бывшего аустенитного зерна в образце стали 09ХН2МД наложенные на снимок границ, полученных методом термического травления

На рис. 2 представлены карты восстановленных зерен аустенитной структуры для участка шлифа, представленного на рис. 1. Выявленные экспресс-методом границы наложены на эти изображения черными линиями. Границы зерен, выявленные функцией pGR с использованием ОС Курдюмова-Закса (рисунок 2-а) и ОС Нишиямы-Вассермана (рис. 2-б) преимущественно совпадают с границами ПАЗ, полученными экспресс-методом (рис.2-в).

Отсутствие хорошей корреляции границ аустенитной структуры, выявленных экспрессметодом и функцией pGR, с результатами вакуумного травления свидетельствует о слабом наследовании структуры в данной стали при  $\alpha \rightarrow \gamma$  превращении в процессе нагрева образца для вакуумного травления.

На основе реконструированных границ с разориентировками от 20° до 50° и ПАЗ, восстановленных функцией pGR была проведена оценка размеров зерен с помощью программы ThixometPro и шкал оценки из ГОСТ [4].

В образце стали 09ХН2МД средний размер зерен, рассчитанный на основе первого метода, составил 15,9 мкм, что соответствует 8,5 баллам по ГОСТ. ПАЗ, восстановленные функцией pGR, имели средний размер 11 мкм, что соответствует 9,5 баллам. Обе оценки указывают на то, что сталь является мелкозернистой.

Экспресс-метод, восстанавливающий границы с разориентировками от 20° до 50°, дает завышенную оценку среднего размера зерна, что связано с тем, что выделяются не все границы ПАЗ. Функция pGR позволяет реконструировать ПАЗ на основе ОС более подробно. Однако после применения данной функции следовала постобработка результатов, заключающаяся в объединении аустенитных зерен с малыми углами разориентировки, что могло внести погрешности в результаты измерений. Тем не менее, оба метода показали, что исследованные стали являются мелкозернистыми.



Рис. 2. Границы ПАЗ в стали 09ХН2МД, восстановленные с помощью pGR: а) ОС Курдюмова-Закса; б) ОС Нишиямы-Вассермана; в) границы ПАЗ, полученные экспресс-методом

Заключение. В сталях бейнитно-мартенситного класса ПАЗ выявлены частично, поскольку превращение протекает по смешанному механизму, и реконструкция на основании кристаллографического соотношения при  $\gamma \rightarrow \alpha$ -превращении оказывается затруднена. В стали мартенситно-бейнитного класса доля восстановленных ПАЗ больше при использовании функции pGR, чем при выявлении границ с разориентировками в диапазоне от 20° до 50°. Результаты реконструкции на основе EBSD-данных в бейнитно-мартенситной стали практически не совпадают с результатами вакуумного травления, что свидетельствует о слабом наследовании структуры в данной стали.

Реконструкция ПАЗ в пакете MTEX Matlab позволяет произвести оценку среднего размера зерна как с помощью выявления границ в диапазоне от 20° до 50°, так и с помощью функции parentGrainReconstructor.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Зисман А.А., Сошина Т.В., Хлусова Е.И. Выявление бывших аустенитных зерен и анализ кинетики метадинамической рекристаллизации аустенита низкоуглеродистой стали в условиях горячей прокатки // Письма о материалах. - 2012 г. - 2(1) – С. 3-8.

2. Теория термической обработки металлов. Учебник. Изд.3-е, испр. и доп. Новиков И.И. М., «Металлургия», 1978, 392 стр.

3. Петров С.Н., Пташник А.В. Экспресс-метод определения границ бывшего аустенитного зерна в сталях бейнитно-мартенситного класса по локальным ориентировкам превращенной структуры // Металловедение и термическая обработка металлов. - 2019 г. - 5 - С. 15-21.

4. ГОСТ 5639-82. Стали и сплавы. Методы выявления и определения величины зерна.

Д.А. Петров<sup>1</sup>, М.Ю. Гуткин<sup>1,2,3</sup>, А.Л. Колесникова<sup>2,3</sup>, А.Е. Романов<sup>3</sup> <sup>1</sup>Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого<sup>(•)</sup> <sup>2</sup>Институт проблем машиноведения РАН <sup>3</sup>Университет ИТМО

# ЭНЕРГИЯ КРАЕВОЙ ДИСЛОКАЦИИ В УПРУГОМ ШАРЕ

Аналитические решения краевых задач теории упругости о дислокациях необходимы для изучения дефектной структуры и механизмов релаксации напряжений в нано- и микросистемах. Польза таких решений заключается в возможности оценить изменение энергии системы при наличии некоторой предполагаемой конфигурации дефектов, что позволяет сделать вывод о возможности существования такой конфигурации. Однако аналитические решения, если их удается получить, нередко имеют довольно сложный вид, включающий, например, бесконечные функциональные ряды, интегралы, зависящие от параметров и координат, а также специальные функции. С одной стороны, это может усложнить вычисление упругой энергии, заключающееся в интегрировании упругого потенциала по объему системы, а с другой – иногда именно вид решения может помочь упростить задачу. Так, например, в плоских задачах о дислокациях решение часто приводится в напряжениях в виде производных от функции Эри, что в итоге позволяет вовсе исключить из расчетов интегрирование (см., например, [1]). В настоящей работе рассмотрены особенности вычисления энергии краевой дислокации, соосной упругому шару со свободной поверхностью *S*, модулем сдвига *G* и коэффициентом Пуассона  $\nu$  (рис. 1).

Решение для этого случая было получено ранее в [2], оно имеет вид  $u^{\scriptscriptstyle +} = u^{\scriptscriptstyle \infty} + u$ . Вектор  $u^{\scriptscriptstyle \infty}$  – это решение для прямолинейной краевой дислокации в бесконечной среде [3]:

$$u_x^{\infty} = b \left[ \frac{\varphi}{2\pi} + \frac{\sin 2\varphi}{8\pi(1-\nu)} \right]; \ u_y^{\infty} = -\frac{b}{8\pi(1-\nu)} [2(1-2\nu)\ln r + 1 + \cos 2\varphi]; \ u_z^{\infty} = 0 \quad (1)$$

где *b* – модуль вектора Бюргерса. Вторая часть решения имеет вид  $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{U} + (R^2 - R_0^2)\nabla\Psi$ , причем функции  $\boldsymbol{U}$  и  $\Psi$  представлены в виде рядов по шаровым функциям:

$$U_{x} = \sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{R}{R_{0}}\right)^{n} A_{n} P_{n}^{2}(q) \sin 2\varphi ; U_{y} = \sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{R}{R_{0}}\right)^{n} \left(B_{n} P_{n}(q) - A_{n} P_{n}^{2}(q) \cos 2\varphi\right)$$

$$U_{z} = \sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{R}{R_{0}}\right)^{n} C_{n} P_{n}^{1}(q) \sin \varphi ; \Psi = \frac{1}{R_{0}} \sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{R}{R_{0}}\right)^{n-1} H_{n} P_{n-1}^{1}(q) \sin \varphi$$
(2)

$$A_n = -\frac{Db}{2G} \frac{(1+(-1)^n)(2n+1)\big((n+2)(2n-1)\nu^2 - (n-3)(n+1)\nu - (4n+1)\big)}{2(n+2)(n+1)n(n-1)\big(n(n-1) + 1 + \nu(2n-1)\big)}$$
(3)

$$B_n = \frac{Db}{2G} \frac{(1+(-1)^n)(2n+1)\big((n-2)(2n-1)v^2 - (n-3)(n-1)v + 1\big)}{2(n+1)n\big(n(n-1) + 1 + v(2n-1)\big)}$$
(4)

$$C_n = -\frac{Db}{2G} \frac{(1+(-1)^n)(2n+1)(n-2)(1-\nu)(1+\nu(2n-1))}{(n+1)n(n-1)(n(n-1)+1+\nu(2n-1))}$$
(5)

$$H_n = \frac{Db}{2G} \frac{(1+(-1)^n)(2n+1)(1+\nu(n-1))}{2(n-1)n(n(n-1)+1+\nu(2n-1))}$$
(6)

где  $D = G/[2\pi(1-\nu)], q = \cos \theta, P_n(q)$  – полиномы Лежандра,  $P_n^m(q)$  – присоединенные полиномы Лежандра [4].

<sup>&</sup>lt;sup>(•)</sup> Д.А. Петров, petrov3.da@edu.spbstu.ru

Важной особенностью решения u, которой мы воспользуемся далее, является то, что соответствующий ему вектор напряжения  $P_R = \sigma \cdot e_R$  выражается в виде [5]:

$$\boldsymbol{P}_{\boldsymbol{R}} = \frac{2G}{R} \left( \boldsymbol{\Pi} + (R^2 - R_0^2) \boldsymbol{R} \cdot \nabla \nabla \Psi \right)$$
(7)

причем вектор **П**, как и **U**, представлен рядами по шаровым функциям:

$$\Pi_{x} = \sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{R}{R_{0}}\right)^{n} \tilde{A}_{n} P_{n}^{2}(q) \sin 2\varphi ; \ \Pi_{y} = -\sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{R}{R_{0}}\right)^{n} \tilde{A}_{n} P_{n}^{2}(q) \cos 2\varphi$$

$$\Pi_{z} = \sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{R}{R_{0}}\right)^{n} \tilde{C}_{n} P_{n}^{1}(q) \sin \varphi$$

$$\tilde{A}_{n} = \frac{Db}{2G} \frac{(1+(-1)^{n})(2n+1)}{(n-1)n(n+1)(n+2)}; \ \tilde{C}_{n} = -\frac{\nu Db}{2G} \frac{(1+(-1)^{n})(2n+1)}{n(n+1)}$$
(9)

Следует отметить, что вектор **П** возникает в ходе решения краевой задачи и потому не требует отдельного вывода.

Упругая энергия вычисляется по формуле:

$$W = \iiint_{V/V_{core}} w \, dV = \frac{1}{2} \iiint_{V/V_{core}} \sigma^{\scriptscriptstyle +} : \varepsilon^{\scriptscriptstyle +} \, dV = \frac{1}{2} \iiint_{V/V_{core}} (\sigma^{\scriptscriptstyle \infty} + \sigma) : (\varepsilon^{\scriptscriptstyle \infty} + \varepsilon) \, dV \tag{10}$$

где V – объем системы,  $V_{core}$  – объем, содержащий ядро дислокации (геометрически это цилиндр радиуса  $r_c$ ),  $\sigma^{\iota}$  – тензор напряжений,  $\varepsilon^{\iota}$  – тензор деформаций. Раскрывая скобки в выражении (10) и учитывая то, что  $\sigma^{\infty}$  :  $\varepsilon = \sigma : \varepsilon^{\infty}$ , получим

$$W = \frac{1}{2} \iiint_{V/V_{core}} \boldsymbol{\sigma}^{\infty} : \boldsymbol{\varepsilon}^{\infty} \, dV + \iiint_{V/V_{core}} \boldsymbol{\sigma}^{\infty} : \boldsymbol{\varepsilon} \, dV + \frac{1}{2} \iiint_{V/V_{core}} \boldsymbol{\sigma} : \boldsymbol{\varepsilon} \, dV \tag{11}$$

Первый интеграл в выражении (11) содержит только элементарные функции, которые можно явно проинтегрировать (см. результат ниже в выражении (16)). Второй интеграл в (11) можно преобразовать, используя стандартную процедуру, включающую теорему Гаусса и уравнения равновесия [5]:

$$\iiint_{V/V_{core}} \boldsymbol{\sigma}^{\infty} : \boldsymbol{\varepsilon} \, dV = \iiint_{V/V_{core}} \boldsymbol{\sigma}^{\infty} : (\nabla \boldsymbol{u})^{s} \, dV = \iint_{S} \boldsymbol{e}_{\boldsymbol{R}} \cdot \boldsymbol{\sigma}^{\infty} \cdot \boldsymbol{u} \, dS - \iint_{S_{core}} \boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{\sigma}^{\infty} \cdot \boldsymbol{u} \, dS$$
(12)

где  $S_{core}$  – поверхность цилиндра  $V_{core}$ , n – нормаль к нему. Заметим, что вблизи линии дислокации вектор u непрерывен (в отличие от  $u^{\infty}$ ), что позволяет сделать оценку

$$\iint_{S_{core}} \boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{\sigma}^{\infty} \cdot \boldsymbol{n} \, dS = \int_{-R_0}^{R_0} dz \int_{0}^{2\pi} \left( \boldsymbol{u}_0(z) + \boldsymbol{O}(r_c) \right) \cdot \boldsymbol{\sigma}^{\infty} \cdot \boldsymbol{n} r_c \, d\varphi$$

$$= \int_{-R_0}^{R_0} dz \, \boldsymbol{u}_0(z) \cdot \left( \int_{0}^{2\pi} \boldsymbol{\sigma}^{\infty} \cdot \boldsymbol{n} r_c \, d\varphi \right) + \int_{-R_0}^{R_0} dz \int_{0}^{2\pi} bO(r_c/R_0) Db \, d\varphi$$
(13)

где  $u_0$  – значение вектора u на оси z, и учтено, что  $\sigma^{\infty} = O(Db/r)$ . Интеграл в скобках в выражении (13) равен нулю в силу условия равновесия, а вторым слагаемым будем пренебрегать, считая  $r_c$  малой величиной по сравнению с радиусом шара  $R_0$ .

Аналогичные рассуждения можно провести и для третьего интеграла в выражении (11). Если еще учесть, что на свободной поверхности *S* выполняется соотношение  $e_R \cdot \sigma^{\infty} = -e_R \cdot \sigma$ , то выражение (11) можно упростить

$$W = \frac{1}{2} \iiint_{V/V_{core}} \boldsymbol{\sigma}^{\infty} : \boldsymbol{\varepsilon}^{\infty} \, dV - \frac{1}{2} \iint_{S} \boldsymbol{e}_{\boldsymbol{R}} \cdot \boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{u} \, dS = \frac{1}{2} \iiint_{V/V_{core}} \boldsymbol{\sigma}^{\infty} : \boldsymbol{\varepsilon}^{\infty} \, dV - \frac{1}{2} \iint_{S} \frac{2G}{R_{0}} \boldsymbol{\Pi} \cdot \boldsymbol{U} \, dS \quad (14)$$

где в последнем равенстве было использовано выражение (7). Векторы  $\Pi$  и U представлены рядами по шаровым функциям, которые на сфере образуют ортогональную систему функций [4], что значительно упрощает интегрирование:

$$\iint_{S} \mathbf{\Pi} \cdot \mathbf{U} \, dS = 2\pi R_0^2 \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(n+1)n}{2n+1} \Big( (n+2)(n-1)2A_n \tilde{A}_n + C_n \tilde{C}_n \Big) \tag{15}$$

Окончательное выражение для упругой энергии имеет вид

$$W = Db^2 R_0 \left( \ln \frac{R_0}{r_c} - g(\nu) \right); \ \frac{W}{2R_0} = \frac{Db^2}{2} \left( \ln \frac{R_0}{r_c} - g(\nu) \right)$$
(16)

где g(v) – числовая функция, график которой построен на рис. 2. Величина  $W/2R_0$  имеет смысл средней погонной энергии. Для случая дислокации в бесконечном цилиндре радиуса  $R_0$  выражение для погонной энергии имеет такой же вид, но функция g(v) отличается (рис. 2). Сравнение показывает, что снижение средней погонной энергии за счет учета поверхности шара составляет величину порядка энергии ядра дислокации, причем это снижение примерно в полтора раза больше, чем в случае дислокации в цилиндре.



Рис. 1. Краевая дислокация в шаре



Рис. 2. График функции *g*(*v*) для шара и для цилиндра

Вывод выражения (16) для энергии дислокации в упругом шаре, представленный в настоящей работе, опирается на полученные в ходе решения краевой задачи векторы **П** и U, а также на свойства шаровых функций. При этом не требуется работа с отдельными компонентами тензора напряжений  $\sigma$  или тензора деформаций  $\varepsilon$ , выражения для которых довольно громоздки.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Dundurs J. Elastic interaction of dislocations with inhomogeneities // Mathematical Theory of Dislocations, Ed. by T. Mura. – New York: A.S.M.E., 1969. – P. 70-115.

2. Петров Д.А., Гуткин М.Ю., Колесникова А.Л. Краевая дислокация в упругом шаре // Неделя науки ФизМех : Сборник статей Всероссийской научной конференции, Санкт-Петербург, 04–09 апреля 2022 года. – 2022. – С. 143-145.

3. Де Вит Р. Континуальная теория дисклинаций – М.: Мир, 1977. – 208 с.

4. Гобсон Е.В. Теория сферических и эллипсоидальных функций. – М.: Издательство иностранной литературы, 1952. – 476 с.

5. Лурье А.И. Теория упругости. – М.: Наука, 1970. – 940 с.

# КРИТИЧЕСКИЕ УСЛОВИЯ ФОРМИРОВАНИЯ ДИСЛОКАЦИЙ НЕСООТВЕТСТВИЯ В ГЕТЕРОСТРУКТУРАХ НА ОСНОВЕ ОКСИДА ГАЛЛИЯ С ОРТОРОМБИЧЕСКОЙ И ТРИГОНАЛЬНОЙ КРИСТАЛЛИЧЕСКОЙ СТРУКТУРОЙ

В последние годы гетероструктуры на основе широкозонного полупроводника оксида галлия Ga<sub>2</sub>O<sub>3</sub> все чаще применяются в устройствах силовой электроники, в фотодетекторах для ультрафиолетовой области спектра, в высокомощных радиочастотных устройствах, заменяя традиционные кремниевые полупроводники [1]. Одним из преимуществ Ga<sub>2</sub>O<sub>3</sub> является возможность его получения в различных полиморфных формах, что позволяет использовать разнообразные материалы подложки при росте гетероструктур. Особый к(є)-фаза интерес вызывают α-И  $Ga_2O_3$ , для пленок которых характерна псевдогексагональная структура, схожая с кристаллической структурой типа «вюрцит» нитридов металлов III группы, что открывает возможность взаимной интеграции этих материалов в единое высокоэффективное устройство [2].

Характеристики полупроводниковых устройств напрямую зависят от качества приборных гетероструктур, физические свойства которых зависят не только от их химического состава, но и от наличия упругих деформаций, геометрии сопряжения фаз, а также от присутствия дефектов. Контроль упругих деформаций позволяет добиться лучшего кристаллического качества в таких гетероструктурах путем снижения плотности дефектов, и, как следствие, позволяет получать гетероструктуры с прогнозируемыми физическими свойствами. Таким образом, настоящее исследование посвящено определению критических **условий** формирования дислокаций несоответствия (ДH) в гетероструктурах α-Ga<sub>2</sub>O<sub>3</sub>/α-Al<sub>2</sub>O<sub>3</sub>, κ-Ga<sub>2</sub>O<sub>3</sub>/α-Al<sub>2</sub>O<sub>3</sub> и к-Ga<sub>2</sub>O<sub>3</sub>/κ-Al<sub>2</sub>O<sub>3</sub> с учетом анизотропии полиморфных форм оксида галлия.

Критическая толщина пленки (значение толщины пленки, больше которого выгодно образование ДН) рассматриваемых гетероструктур определялась согласно подходу Мэтьюза-Блэйксли по следующей формуле [3]:

$$h_{c} = \frac{b_{\parallel}^{2} + b_{\perp}^{2} + (1 - \nu)b_{s}^{2}}{\varepsilon_{m}(1 + \nu)8\pi b_{\parallel}} \ln\left(\frac{2h_{c}}{r_{0}}\right),$$
(1)

где  $\varepsilon_m$  – параметр, описывающий упругую деформацию, обусловленную несоответствием параметров кристаллических решеток материалов подложки и пленки; v – коэффициент Пуассона;  $b_{\parallel}$  и  $b_{\perp}$  – проекции краевой компоненты вектора Бюргерса ДН параллельно и перпендикулярно гетерогранице соответственно,  $b_s$  – винтовая компонента вектора Бюргерса ДН;  $r_0$  – радиус ядра ДН.

Один из способов контроля упругих деформаций в пленке гетероструктуры – использование подложек с различными кристаллографическими плоскостями роста. В этом случае параметр  $\varepsilon_m$  зависит от кристаллографической ориентации роста гетероструктуры, т.е. от угла  $\vartheta$  между нормалями к поверхности пленки и к кристаллографической плоскости (001). Для гетероструктуры  $\alpha$ -Ga<sub>2</sub>O<sub>3</sub>/ $\alpha$ -Al<sub>2</sub>O<sub>3</sub> эта зависимость принимает следующий вид:

<sup>&</sup>lt;sup>(•)</sup> А.М. Смирнов, Andrei.smirnov@niuitmo.ru

$$\mathcal{E}_{m} = \frac{a_{\alpha-Al_{2}O_{3}}c_{\alpha-Al_{2}O_{3}} - \sqrt{(a_{\alpha-Ga_{2}O_{3}}c_{\alpha-Al_{2}O_{3}})^{2}\cos^{2}\vartheta + (a_{\alpha-Al_{2}O_{3}}c_{\alpha-Ga_{2}O_{3}})^{2}\sin^{2}\vartheta}{\sqrt{(a_{\alpha-Ga_{2}O_{3}}c_{\alpha-Al_{2}O_{3}})^{2}\cos^{2}\vartheta + (a_{\alpha-Al_{2}O_{3}}c_{\alpha-Ga_{2}O_{3}})^{2}\sin^{2}\vartheta}};$$
(2)

для гетероструктуры к-Ga<sub>2</sub>O<sub>3</sub>/α-Al<sub>2</sub>O<sub>3</sub>:

$$\varepsilon_{m} = \frac{a_{\alpha-Al_{2}O_{3}}\sqrt{3}c_{\alpha-Al_{2}O_{3}} - \sqrt{(b_{\kappa-Ga_{2}O_{3}}c_{\alpha-Al_{2}O_{3}})^{2}\cos^{2}\vartheta + 3(a_{\alpha-Al_{2}O_{3}}c_{\kappa-Ga_{2}O_{3}})^{2}\sin^{2}\vartheta}}{\sqrt{(b_{\kappa-Ga_{2}O_{3}}c_{\alpha-Al_{2}O_{3}})^{2}\cos^{2}\vartheta + 3(a_{\alpha-Al_{2}O_{3}}c_{\kappa-Ga_{2}O_{3}})^{2}\sin^{2}\vartheta}}$$
(3)

при наклоне гетероструктуры относительно кристаллографического направления [100] в пленке,

$$\varepsilon_{m} = \frac{a_{\alpha-Al_{2}O_{3}}c_{\alpha-Al_{2}O_{3}} - \sqrt{(a_{\kappa-Ga_{2}O_{3}}c_{\alpha-Al_{2}O_{3}})^{2}\cos^{2}\vartheta + (a_{\alpha-Al_{2}O_{3}}c_{\kappa-Ga_{2}O_{3}})^{2}\sin^{2}\vartheta}}{\sqrt{(a_{\kappa-Ga_{2}O_{3}}c_{\alpha-Al_{2}O_{3}})^{2}\cos^{2}\vartheta + (a_{\alpha-Al_{2}O_{3}}c_{\kappa-Ga_{2}O_{3}})^{2}\sin^{2}\vartheta}}$$
(4)

при наклоне гетероструктуры относительно кристаллографического направления [010] в пленке; и для гетероструктуры к-Ga<sub>2</sub>O<sub>3</sub>/к-Al<sub>2</sub>O<sub>3</sub>:

$$\varepsilon_{m} = \frac{b_{\kappa-Al_{2}O_{3}}c_{\kappa-Al_{2}O_{3}} - \sqrt{(b_{\kappa-Ga_{2}O_{3}}c_{\kappa-Al_{2}O_{3}})^{2}\cos^{2}\vartheta + (b_{\kappa-Al_{2}O_{3}}c_{\kappa-Ga_{2}O_{3}})^{2}\sin^{2}\vartheta}}{\sqrt{(b_{\kappa-Ga_{2}O_{3}}c_{\kappa-Al_{2}O_{3}})^{2}\cos^{2}\vartheta + 3(b_{\kappa-Al_{2}O_{3}}c_{\kappa-Ga_{2}O_{3}})^{2}\sin^{2}\vartheta}}$$
(5)

при наклоне гетероструктуры относительно кристаллографического направления [100] в пленке,

$$\varepsilon_{m} = \frac{a_{\kappa-Al_{2}O_{3}}c_{\kappa-Al_{2}O_{3}} - \sqrt{(a_{\kappa-Ga_{2}O_{3}}c_{\kappa-Al_{2}O_{3}})^{2}\cos^{2}\vartheta + (a_{\kappa-Al_{2}O_{3}}c_{\kappa-Ga_{2}O_{3}})^{2}\sin^{2}\vartheta}}{\sqrt{(a_{\kappa-Ga_{2}O_{3}}c_{\kappa-Al_{2}O_{3}})^{2}\cos^{2}\vartheta + (a_{\kappa-Al_{2}O_{3}}c_{\kappa-Ga_{2}O_{3}})^{2}\sin^{2}\vartheta}}$$
(6)

при наклоне гетероструктуры относительно кристаллографического направления [010] в пленке, где *a*, *b* и *c* – параметры кристаллической решетки α-Ga<sub>2</sub>O<sub>3</sub>, κ-Ga<sub>2</sub>O<sub>3</sub>, α-Al<sub>2</sub>O<sub>3</sub> или кAl<sub>2</sub>O<sub>3</sub>.Упругие константы и параметры кристаллических решеток, используемые в расчетах, приведены в работах [4-6].

На рисунке 1 даны зависимости рассчитанной критической толщины пленки Ga<sub>2</sub>O<sub>3</sub> h<sub>c</sub> от угла наклона гетероструктуры 9 относительно кристаллографического направления подложки [2110] или [100] (рис. 1а) и относительно кристаллографического направления подложки [1100] или [010] (рис. 16) для гетероструктур α-Ga<sub>2</sub>O<sub>3</sub>/α-Al<sub>2</sub>O<sub>3</sub>, к-Ga<sub>2</sub>O<sub>3</sub>/α-Al<sub>2</sub>O<sub>3</sub> и к-Ga<sub>2</sub>O<sub>3</sub>/κ-Al<sub>2</sub>O<sub>3</sub>. В случае гетероструктуры к-Ga<sub>2</sub>O<sub>3</sub>/α-Al<sub>2</sub>O<sub>3</sub>, упомянутые выше зависимости имеют особенность: наличие двух ориентаций гетероструктуры [ $\vartheta \sim 26^{\circ}$  (рис. 1a) и  $\vartheta \sim 28^{\circ}$ (рис. 1б)], при которых образование ДН энергетически невыгодно, поскольку параметр  $\varepsilon_m$ принимает нулевое значение. При  $9 = 90^{\circ}$  формирование ДН становится невозможным для всех рассмотренных гетероструктур, поскольку при такой ориентации гетероструктуры отсутствует компонента вектора Бюргерса ДН, способствующая снижению упругой энергии системы в процессе релаксации [2,5,7]. При использовании подложек Al<sub>2</sub>O<sub>3</sub> *r*-типа гетероструктуры к-Ga<sub>2</sub>O<sub>3</sub>/α-Al<sub>2</sub>O<sub>3</sub> более устойчивы к образованию ДН, чем гетероструктуры  $\alpha$ -Ga<sub>2</sub>O<sub>3</sub>/ $\alpha$ -Al<sub>2</sub>O<sub>3</sub> и к-Ga<sub>2</sub>O<sub>3</sub>/ $\kappa$ -Al<sub>2</sub>O<sub>3</sub> при  $\vartheta$  < 35°; при  $\vartheta$  > 35° наиболее устойчивой гетероструктурой к образованию ДН является гетероструктура к-Ga<sub>2</sub>O<sub>3</sub>/к-Al<sub>2</sub>O<sub>3</sub>. В случае подложек Al<sub>2</sub>O<sub>3</sub> s-типа устойчивость гетероструктуры зависит не только от ориентации роста, но и от ориентации вектора Бюргерса. При  $\vartheta$  < 15° гетероструктуры к-Ga<sub>2</sub>O<sub>3</sub>/к-Al<sub>2</sub>O<sub>3</sub> наиболее устойчивы к образованию ДН; при 15° < 9 < 42° гетероструктуры к-Ga<sub>2</sub>O<sub>3</sub>/α-Al<sub>2</sub>O<sub>3</sub> наиболее устойчивы к образованию ДН; при  $9 > 42^{\circ}$  устойчивость гетероструктур α-Ga<sub>2</sub>O<sub>3</sub>/α-Al<sub>2</sub>O<sub>3</sub> и к-Ga<sub>2</sub>O<sub>3</sub>/α-Al<sub>2</sub>O<sub>3</sub> к образованию ДН меняется в зависимости от ориентации вектора Бюргерса ДН.

Из анализа зависимостей на рис. 1 следует, что наибольший интерес с точки зрения возможности получения высококачественных слоев Ga<sub>2</sub>O<sub>3</sub> представляют гетероструктуры к-Ga<sub>2</sub>O<sub>3</sub>/ $\alpha$ -Al<sub>2</sub>O<sub>3</sub>, поскольку при использовании подложек  $\alpha$ -Al<sub>2</sub>O<sub>3</sub> с традиционными (*a*- и *m*-тип) и экзотическими [(1017), (1016), (2111), (2119) и др.] плоскостями роста, можно добиться роста пленок к-Ga<sub>2</sub>O<sub>3</sub> с низкой плотностью ДН на границе раздела гетероструктуры.



Рис. 1. Зависимости критической толщины пленки Ga<sub>2</sub>O<sub>3</sub> *h<sub>c</sub>* от угла наклона θ для различных гетероструктур. Рассмотрены случаи наклона гетероструктуры относительно кристаллографических направлений [2110] или [100] (а) и [1100] или [010] (б). Сплошные кривые соответствуют гетероструктуре к-Ga<sub>2</sub>O<sub>3</sub>/α-Al<sub>2</sub>O<sub>3</sub>, пунктирные кривые – гетероструктуре к-Ga<sub>2</sub>O<sub>3</sub>/κ-Al<sub>2</sub>O<sub>3</sub>, штрих пунктирные – гетероструктуре α-Ga<sub>2</sub>O<sub>3</sub>/α-Al<sub>2</sub>O<sub>3</sub>. Схематичное изображение гетероструктуры и ориентация вектора Бюргерса *b* ДН даны на вставке под графиками. ЛД – линия дислокации

Таким образом, в результате настоящего исследования получены зависимости критической толщины пленки Ga<sub>2</sub>O<sub>3</sub> от кристаллографического направления роста гетероструктуры. Показано влияние особенностей кристаллического строения полиморфных форм Ga<sub>2</sub>O<sub>3</sub> на условия формирования ДН.

Работа выполнена при поддержке Российского научного фонда (грант № 21-79-00211).

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Stepanov S.I., Nikolaev V.I., Bougrov V.E., Romanov A.E. Gallium oxide: properties and applications – A review // Revews on Advanced Matererials Science. – 2016. – Vol. 44. – P 63-86.

2. Smirnov A.M., Kremleva A.V., Sharofidinov Sh.Sh., Romanov A.E. Misfit stress relaxation in wide bandgap semiconductor heterostructures with trigonal and hexagonal crystal structure // Journal of Applied Physics. – 2022. – Vol. 131. – P. 025301.

3. Freund L.B. Dislocation mechanisms of relaxation in strained epitaxial films // MRS Bulletin. -1992. - Vol. 17. -P.52-60.

4. Smirnov A.M., Ivanov A.Yu., Kremleva A.V., Sharofidinov Sh.Sh., Romanov A.E. Stress relaxation due to dislocation formation in orthorhombic  $Ga_2O_3$  films on  $Al_2O_3$  substrates // Reviews on Advanced Materials Technologies. – 2022. – Vol. 4. – P. 1-6.

5. Smirnov A.M., Kremleva A.V., Sharofidinov Sh. Sh., Bougrov V.E., Romanov A.E. Stress-strain state in  $\alpha$ -Ga<sub>2</sub>O<sub>3</sub> epitaxial films on  $\alpha$ -Al<sub>2</sub>O<sub>3</sub> substrates // Applied Physics Express – 2020. – Vol. 13. – P. 075502.

6. Smirnov A.M., Kremleva A.V., Ivanov A.Yu., Myasoedov A.V., Sokura L.A., Kirilenko D.A., Sharofidinov Sh.Sh., Romanov A.E. Stress-strain state and piezoelectric polarization in orthorhombic Ga2O3 thin films depending on growth orientation // Materials and Design. – 2023. – Vol. 226. – P. 111616. 7. Smirnov A.M., Kremleva A.V., Sharofidinov Sh.Sh., Bougrov V.E., Romanov A.E. Misfit stress relaxation in  $\alpha$ -Ga<sub>2</sub>O<sub>3</sub>/ $\alpha$ -Al<sub>2</sub>O<sub>3</sub> heterostructures via formation of misfit dislocations // Physics of the Solid State. – 2021. – Vol. 63. – P. 915-922.

#### УДК 53.081

# О.Ю. Курапова<sup>1,2</sup>, И.В. Смирнов<sup>1</sup>, Е.Н. Соловьева<sup>2</sup>, Я.В. Конаков<sup>3</sup>, В.Г. Конаков<sup>2,3</sup> <sup>1</sup>Санкт-Петербургский государственный университет <sup>2</sup>Санкт-петербургский политехнический университет Петра Великого <sup>3</sup>Институт проблем машиноведения РАН<sup>(•)</sup>

# МЕХАНИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА И ФАЗООБРАЗОВАНИЕ АЛЮМИНИДОВ НИКЕЛЯ С ДОБАВЛЕНИЕМ ВОССТАНОВЛЕННОГО ОКСИДА ГРАФЕНА (Al-Ni-rGO)

Известно, что высокоупорядоченные интерметаллические соединения Ni-Al являются перспективными материалами для различных конструкционных применений при повышенных температурах и для электрохимического преобразования энергии [1,2]. Было показано [3,4], что алюминиды никеля, образующиеся в системе Al-Ni, обладают большей температурой плавления, меньшей плотностью, лучшей стойкостью к окислению, более низкой температурой перехода от пластичного к хрупкому состоянию, а также низкими затратами на изготовление. Однако, низкая прочность и ограниченное сопротивление ползучести являются основными недостатками, препятствующими практическому применению подобных интерметаллидов.

В последнее время графен и его производные успешно используются в качестве эффективной добавки для регулирования свойств различных материалов с металлическими и керамическими матрицами [5]. Упрочнение интерметаллических соединений графеном представляется особенно перспективным из-за возможного решения проблемы хрупкости, являющейся основным недостатком алюминидов никеля. Основываясь на данном подходе, с использованием модифицированной технологии порошковой металлургии проведено изготовление композитов, полученных на основе системы Al-Ni с добавлением восстановленного оксида графена (reduced graphene oxide - rGO) [6,7]. Полученные порошковые смеси измельчали в планетарной мельнице в атмосфере азота (планетарная мельница Pulverisete-6, 300 об/мин в течение 30 и 60 мин и 450 об/мин в течение 30-210 мин с шагом 30 мин, с 2-минутными обратными циклами, остаточное давление кислорода 10<sup>-3</sup> атм). Были выбраны следующие оптимальные условия измельчения композитных порошков: скорость измельчения 450 об/мин и время измельчения 210 мин. Полученные порошки уплотняли методом холодного прессования (одноосное давление, 12,5 т, 15 мин). Образцы диаметром 25 мм и высотой 9 мм были изготовлены путем отжига в вакуумной печи при 600 °С в течение 1 часа с последующим охлаждением до комнатной температуры вместе с печью. Составы изготовленных композитов приведены в таблице 1.

Изучение полученных материалов показало, что они характеризуются значительной фазовой неоднородностью. Для композитов с низким содержанием nNi можно выделить две основные фазы: по результатам электронной рентгеновской спектроскопии они могут быть отнесены к чистому алюминию и Al<sub>3</sub>Ni, что соответствует полученным рентгеноструктурным данным. Наряду с этим в структуре присутствуют отдельные области, состоящие из нескольких кольцеобразных слоев (рис. 1,b). Согласно полученным данным,

<sup>&</sup>lt;sup>(•)</sup> Я.В. Конаков, kyav@ipme.ru

центральная часть соответствует чистому никелю (точка 1, рис. 1,b), внутренний окружающий слой – соединению  $Al_3Ni_2$  (точка 2, рис. 1,b) и внешний окружающий слой -  $Al_3Ni$  (точка 3, рис. 1,b) соответственно. Следовательно, концентрация никеля постепенно уменьшается от сердцевины круга к внешней поверхности, что представляет собой зарождение интерметаллического соединения через промежуточную стадию образования  $Al_3Ni_2$ .

Таблица 1. Состав и наименование образцов

Состав,	95Al-	90Al-	84Al-	77Al-	69Al-	60Al-	49Al-	36Al-	20Al-
мол.%	5nNi	10nNi	16nNi	23nNi	31nNi	40nNi	51nNi	64nNi	80nNi
Состав, вес.%	90Al-	80Al-	70Al-	60Al-	50Al-	40Al-	30Al-	20Al-	10Al-
	10nNi	20nNi	30nNi	40nNi	50nNi	60nNi	70nNi	80nNi	90nNi
Содержание	0.5								
rGO, вес.%									
Образец	5nNi	10nNi	16nNi	23nNi	31nNi	40nNi	51nNi	64nNi	80nNi



Рис. 1. a,b) Снимки СЭМ композита 16nNi-rGO при различном разрешении; c,d) Снимки СЭМ композита 31nNi-rGO при различном разрешении.



Рис. 2. a,b) Снимки СЭМ композита 51nNi-rGO при различном разрешении; c,d) Снимки СЭМ композита 80nNi-rGO при различном разрешении.

Когда содержание никеля достигает 31 мол.% (композит 31nNi-rGO, рис. 1,с,d), общее количество центров зарождения интерметаллических соединений уменьшается. В структуре композитов присутствует больше пор и трещин. Размер зерен значительно варьируется от 5 до 30 мкм. Увеличение содержания nNi до 51 мол.% приводит к общим изменениям структуры композита. Многофазный композит состоит из крупных зерен, окруженных сферическими частицами никеля в межзеренном пространстве. Подобные структурные особенности характерны также для композитов с содержанием Ni 64 и 80 мол.%. Также, увеличение содержания Ni приводит к увеличению толщины межзеренных границ.

Неоднородная структура полученных композитов привела к их хрупкости. Таким образом, для полноценных механических испытаний удалось использовать только два образца: 16nNi-rGO и 80nNi-rGO. Диаграммы напряженно-деформированного состояния, полученные для композитов 16nNi-rGO и 80nNi-rGO, показаны на рис. 3,а.



Рис. 3. а) Диаграммы напряжения-деформации, полученные для 16nNi-rGO и 80nNi-rGO; b) Значения твердости композитов по Виккерсу

Разрушение обоих образцов происходит на стадии упругой деформации. Композит 80nNi-rGO обладает наивысшей прочностью на разрыв и умеренным относительным удлинением, составляющим  $\sigma_c = 212\pm19$  МПа и  $\varepsilon_c = 0,19\pm0,02\%$ . Модуль Юнга композита составляет 110,5±12,9 ГПа. 16nNi показал примерно в 3 раза меньшую прочность на разрыв (79±3 МПа), но примерно в два раза более высокое относительное удлинение (0,43±0,06%). Значения твердости композитов по Виккерсу значительно варьируются в зависимости от фазового состава (рис. 3,b). Действительно, твердость композитов 5nNi-rGO и 16nNi-rGO, содержащих Al в качестве основной фазы и Al<sub>3</sub>Ni в качестве вторичной фазы, составляет 51±6 HV0.3 и 73±19 HV0.3. Твердость композитов 23nNi-rGO, 64nNi-rGO и 80nNi-rGO близка и составляет ~190-200 HV0.3. 31nNi-rGO. В тоже время 40nNi-rGO и 51nNi-rGO обладают превосходной твердостью 297±28 HV0.3, 561±121 HV0.3 и 640±118 HV0.3. Однако, пористость этих композитов обусловила низкую прочность на разрыв.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Hadef F. Synthesis and disordering of B2 TM-Al (TM= Fe, Ni, Co) intermetallic alloys by high energy ball milling: A review //Powder Technology. – 2017. – Vol. 311. – P. 556-578.

2. Rößner L., Armbrüster M. Electrochemical energy conversion on intermetallic compounds: a review //ACS Catalysis. – 2019. – Vol. 9. – №. 3. – P. 2018-2062.

3. Jozwik P., Polkowski W., Bojar Z. Applications of Ni3Al based intermetallic alloys—current stage and potential perceptivities //Materials. – 2015. – Vol. 8. – №. 5. – P. 2537-2568.

4. Okamoto H. Al-Ni (aluminum-nickel) //Journal of Phase Equilibria and diffusion. – 2004. – Vol. 25. – №. 4. – P. 394.

5. Chen W., Yang T., Dong L., Elmasry A., Song J., Deng N., Elmarakbi A., Liu T., Lv H.B., Fu Y.Q. Advances in graphene reinforced metal matrix nanocomposites: Mechanisms, processing, modelling,

properties and applications //Nanotechnology and Precision Engineering. – 2020. – Vol. 3. – №. 4. – P. 189-210.

6. Kurapova O.Y., Smirnov I.V., Solovieva E.N., Konakov Y.V., Lomakina T.E., Glukharev A.G., Konakov V.G. The intermetallic compounds formation and mechanical properties of composites in the ni-al system //Materials Physics & Mechanics. -2022. - Vol. 48. - No. 1. - P. 136-146.

7. Kurapova O.Y., Smirnov I.V., Solovieva E.N., Konakov Y.V., Glukharev A.G., Konakov V.G. Tensile properties, hardness and phase formation of the nickel aluminides based composites doped with reduced graphene oxide (Al-Ni-rGO) //Journal of Alloys and Compounds. – 2022. – Vol. 928. – P. 166912.

УДК 539.4, 539.3

Д.И. Садыков<sup>1, 2</sup>, Т.С. Орлова<sup>1,2</sup>, А.Е. Медведев<sup>1</sup>, М.Ю. Мурашкин<sup>1</sup> <sup>1</sup> Физико-технический институт имени А. Ф. Иоффе РАН <sup>2</sup> Национальный исследовательский университет ИТМО<sup>(•)</sup>

#### ВЛИЯНИЕ ПАРАМЕТРОВ УЛЬТРАМЕЛКОЗЕРНИСТОЙ СТРУКТУРЫ НА ЭФФЕКТЫ УПРОЧНЕНИЯ ОТЖИГОМ И УВЕЛИЧЕНИЯ ПЛАСТИЧНОСТИ ДЕФОРМАЦИЕЙ В A1

Введение. Алюминий (Al) и сплавы на его основе широко применяются в электротехнической промышленности благодаря высокой электропроводности и легкости. Ключевым недостатком этих материалов, является их относительно низкая прочность. Эффективным способом повышения прочности, в соответствии с известным соотношением Холла-Петча, является формирование в них ультрамелкозернистых (УМЗ) структур методами интенсивной пластической деформации (ИПД). Однако, высокая прочность УМЗ материалов, как правило, сопровождается их низкой пластичностью, что не приемлемо при практическом применении.

В работе [1], впервые, на УМЗ технически чистом (ТЧ) Al, структурированном совмещенной прокаткой (ARB), было обнаружено два новых эффекта. Эффект упрочнения отжигом (ЭУО), после отжига при T = 150 °C, t = 0.5 h, а также эффект увеличения пластичности деформацией (УПД), после проведения небольшой дополнительной деформации методом холодной прокатки (CR), отожженного УМЗ ТЧ Al. Авторы объясняют данные эффекты изменением количества источников дислокаций в теле зерен, при отжиге и после дополнительной деформации. Позднее в [2] подобные эффекты, но значительно большие по величине, были обнаружены в УМЗ ТЧ Al, структурированном методом кручения под высоким давлением (HPT). Авторы объясняют данные эффекты изменением (TЗ) после проведения отжига (T = 150 °C, t = 1 h) и последующей небольшой (0.25 оборота) дополнительной деформации методом HPT. Для более глубокого понимания физической природы этих эффектов и определения ключевых микроструктурных параметров, ответственных за их проявление и величину, в настоящей работе исследовались различные УМЗ структуры, полученные разными методами ИПД.

*Методика*. В данной работе исследовался ТЧ Al (99.7Al-0.22Fe-0.07Si wt%). УМЗ структурирование проводилось методами HPT (P = 6 GPa, n = 10 оборотов, состояние HPT), равноканального углового прессования (4 цикла по маршруту B<sub>C</sub>, состояние ECAP) и комбинацией ECAP и CR (на 90 %, состояние ECAP+CR). Часть УМЗ образцов отжигалась при T = 150 °C, t = 1 h (AN). Часть отожженных образцов подвергалась дополнительной деформации на 6.5 и 15.5% методом CR (состояния ECAP+CR+AN+CR(6.5%) и ECAP+CR+AN+CR(15.5%)) и на 0.25 оборота HPT (состояние HPT+AN+0.25HPT).

<sup>&</sup>lt;sup>(•)</sup> Д.И. Садыков, dinislames@mail.ru

Микроструктура исследовалась методами просвечивающей электронной микроскопии (ПЭМ), рентгеноструктурного анализа (РСА), дифракции обратно рассеянных электронов (ДОРЭ). Механические свойства изучались путем одноосного растяжения с постоянной скоростью деформации (5×10<sup>-4</sup> s<sup>-1</sup>), а также путем измерения микротвердости по методу Виккерса.

*Результаты эксперимента*. Исследование зависимости микротвердости от времени отжига для всех УМЗ структур ТЧ Аl показало, что ЭУО проявляется вне зависимости от способа структурирования. Для HPT структуры он составил ~ 21%, для ECAP и ECAP+CR 4% и 7% соответственно. В связи с тем, что значения микротвердости до отжига в состояниях ECAP+CR и HPT близки, а также с учетом большей величины ЭУО в состоянии ECAP+CR, по сравнению с состоянием ECAP, дальнейшие исследования были проведены на структурах HPT и ECAP+CR.

На рис. 1 приведены деформационные кривые УМЗ A1 в различных состояниях, структурированных методом ECAP+CR и HPT.



Рис. 1. Деформационные кривые УМЗ Al, структурированного методом ECAP+CR (a) в состояниях: 1 – ECAP+CR, 2 – ECAP+CR+AN, 3 – ECAP+CR+AN+CR(6.5%), 4 – ECAP+CR+AN+CR(15.5%); и методом HPT (b) в состояниях: 1 – HPT, 2 – HPT+AN, 3 – HPT+AN+0.25HPT

ЭУО в структуре ECAP+CR составил ~ 9% для предела текучести ( $\sigma_{0.2}$ ) и ~ 7.6% для предела прочности ( $\sigma_{UTS}$ ) при небольшом падении пластичности с 12.9% до 9.6%. В НРТ структуре ЭУО составил 88% для  $\sigma_{0.2}$  и ~ 31% для  $\sigma_{UTS}$  при катастрофическом падении пластичности с ~23% до ~1%. Проведение дополнительной деформации CR на 6.5%, привело к проявлению эффекта УПД в структуре ECAP+CR. Пластичность увеличилась с 9.6% до 11%, при небольшом уменьшении предела текучести (~ 6%). Увеличение степени дополнительной деформации методом CR до 15.5% не привело к увеличению величины эффекта УПД и даже несколько снизило величину пластичности с 11% до 8%. В случае структуры HPT, дополнительная деформация на 0.25 оборота HPT, привела к значительному УПД-эффекту: пластичность увеличилась более чем в 20 раз (до  $\delta \sim 23\%$ ) по сравнению с отожженным состоянием (табл. 1).

На рис. 2 приведены типичные ПЭМ изображения, полученные для УМЗ Al структурированного HPT и ECAP+CR в различных состояниях. В структуре, полученной методом ECAP+CR, во всех состояниях, наблюдается характерная вытянутая форма зерна. В теле зерен присутствует развитая дислокационная структура. В структуре, полученной методом HPT, напротив, наблюдаются зерна преимущественно равноосной формы, дислокации в теле зерен отсутствуют, поэтому дислокационная плотность, определенная методом PCA, относится, наиболее вероятно, преимущественно к ГЗ и приграничным областям. Согласно результатам, полученным методом ДОРЭ, во всех состояниях, вне зависимости от способа ИПД, наблюдается преимущественно большеугловая структура ГЗ.

Табл. 1. Физико-механические характеристики УМЗ Al, структурированного методами ECAP+CR и HPT, в различных состояниях.

Состояние	$\sigma_{0.2}$ , MPa	$\sigma_{ m UTS}$ , MPa	$\delta$ , %	
ECAP+CR	167±7	197±5	12.9±1.4	
ECAP+CR+AN	182±15	212±5	9.6±2.0	
ECAP+CR+AN+CR (6.5%)	171±6	203±5	10.7±1.2	
ECAP+CR+AN+CR (15.5%)	169±13	193±5	8.4±0.88	
HPT	112±10	191±5	23.1±0.1	
HPT+AN	211±6	251±5	1.0±0.2	
HPT+AN+0.25HPT	122±6	182±5	22.5±1.7	



Рис. 2. Типичные ПЭМ-изображения полученныя для УМЗ Al в состояних: а – ECAP+CR, b – HPT, с – ECAP+CR+AN, d – HPT+AN, е – ECAP+CR+AN+CR(6.5%), f – HPT+AN+0.25HPT

Выводы. Эффекты УО и УПД проявляются во всех УМЗ структурах ТЧ АІ вне зависимости от способа ИПД-структурирования, однако, в разной степени. Анализ микроструктуры показал, что основной параметр, отличающийся в зависимости от способа структурирования – плотность дислокаций и способ их распределения в зеренной структуре. Таким образом, можно сделать вывод, что для достижения наибольшей величины данных эффектов необходимо обеспечить введение дислокаций при дополнительной деформации непосредственно в ГЗ и в приграничные области.

Впервые была получена уникальная комбинация высокой прочности (~210 MPa), высокой электропроводности (~62 %IACS), функциональной пластичности (8–10 %) и термостабильности (до 150 °C) для УМЗ ТЧ Al, структурированного методом ECAP+CR и отожженного при 150 °C, 1 h.

Работа выполнена при поддержке РНФ (грант № 22-19-00292).

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Huang X., Hansen N., Tsuji N. Hardening by annealing and softening by deformation in nanostructured metals // Science – 2006. – Vol. 312. – № 5771. – P. 249-251.

2. Mavlyutov A.M., Latynina T.A., Murashkin M.Y., Valiev R.Z., Orlova T.S. Effect of annealing on the microstructure and mechanical properties of ultrafine-grained commercially pure Al // Phys. Solid State. –  $2017. - Vol. 59. - N_{\odot} 10. - P. 1970-1977.$ 

#### УДК 539.42

И.Д. Гесин<sup>1</sup>, Е.Е. Дамаскинаская<sup>2</sup>, В.Л. Гиляров<sup>2</sup> <sup>1</sup>Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого<sup>(•)</sup> <sup>2</sup>Физико-технический институт им. А.Ф. Иоффе

# МОДЕЛИРОВАНИЕ АКУСТИЧЕСКОЙ ЭМИССИИ ПРИ РАЗРУШЕНИИ ГЕТЕРОГЕННЫХ МАТЕРИАЛОВ С ПОМОЩЬЮ МЕТОДА ДИСКРЕТНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ

Многочисленные эксперименты, в которых исследовалось развитие разрушения в горных породах [1, 2, 6, 4], посвящены поиску признаков приближающегося катастрофического разрушения (в случае лабораторных образцов – образование магистральной трещины). Однако до сих пор физические механизмы, управляющие переходом от «неопасного» делокализованного образования трещин к ускоренному локализованному процессу, остаются невыясненными [5; 6]. В связи с этим, мы решили обратиться к компьютерному моделированию, предполагая, что численные эксперименты позволят выявить факторы, существенным образом влияющие на развитие процесса.

В данной работе предпринята попытка построения компьютерной модели разрушения, базирующейся на методе дискретных элементов и позволяющей связать внутренние процессы с макроскопическим проявлениями.



Рис. 1. Метод дискретных элементов а — модель DEM b — частицы, соединенные связями с — разрушенный образец

Метод дискретных элементов (DEM - Discrete element method [7]) (рис. 1a) является альтернативой методам, основанным на моделях континуальной механики. Его основное отличие состоит в возможности явно имитировать появление трещин без перестроения модели. Эта особенность следует из изначальной дискретности используемой модели. В

<sup>&</sup>lt;sup>(•)</sup> И.Д. Гесин, gesin.id@edu.spbstu.ru

работе была использована модель связанных частиц (bonded particle model – BPM [8]). В ВРМ материал представляется как совокупность частиц, которые имитируют зерна поликристаллического материала (рис. 1b). Частицы соединяются связями, которые межзеренных Связи моделируются являются аналогом границ. деформируемыми цилиндрами, поведение которых описывается при помощи механики деформируемого твердого тела. Разрушение связей соответствует появлению трещин. В качестве материалов, из которых состояли сферические зерна и связи между ними (межзеренные границы), использовались материалы с механическими параметрами, соответствующими различным минералам и горным породам: гранит, кварц, ортоклаз, олигоклаз, стекло, низкомодульные материалы. При нагружении образца, в результате смещения частиц относительно друг друга, на связях возникают силовые факторы (силы и моменты), которые создают напряжения, приводящие к разрушению связей.

Расчеты производились в свободно распространяемом пакете программ MUSEN [9]. Моделировались образцы цилиндрической формы (h=20мм, d=10мм). Трение на контактах между частицами и поверхностями плит, а также на контактах между частицами было описано с помощью модели Герца-Миндлина [10]. Одноосное сжатие образца производилось при помощи двух плит, имитирующих действие пресса: нижняя плита была неподвижна, а верхняя перемещалась с заданной скоростью (рис. 1а).

Эксперимент заканчивался, когда образец разрушался (разделялся на части) (рис. 1с). В процессе эксперимента через равные промежутки времени – интервал сохранения данных – записывался большой набор механических параметров, который использовался для дальнейшего анализа.

В работе предложен способ моделирования аналога параметров (время излучения, координата, амплитуда) сигналов акустической эмиссии (AE). В компьютерном эксперименте формируется файл, содержащий время разрушения одиночных связей и их координаты. Разработан алгоритм кластеризации разрушенных связей, реализованный на Python.



Рис. 2. Зависимости напряжения (черная кривая) и активности АЕ (синяя кривая): а - лабораторный эксперимент, b - компьютерное моделирование

На рис. 2 показаны диаграммы нагружения, полученные в лабораторном эксперименте по деформированию образца метапесчаника (рис.2а) и в компьютерном эксперименте (2b). Подробно постановка лабораторного эксперимента и его результаты описаны в [11]. Видно, что зависимости напряжения от времени, а также характер активности АЕ, качественно подобны. Это позволяет говорить об адекватности предложенной модели реальному процессу.

Модель позволяет исследовать зарождение и рост отдельных дефектов. На рис.3 показана эволюция очага разрушения (магистральной трещины).



Рис. 3. Эволюция очага разрушения. (a): t=0.038 s; (b): t=0.039s; (c): t=0.040s; (d): t=0.042s. Каждая точка – разрушенная связь.

Таким образом, построена модель гетерогенных материалов, которая адекватно описывает некоторые особенности их разрушения в тех случаях, когда основные процессы протекают по границам зерен. Предложен способ моделирования параметров сигналов акустической эмиссии. Модель может быть использована как инструмент для исследования эволюции дефектной структуры.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Lockner D. A., Byerlee J. D., Kuksenko V., Ponomarev A. & Sidorin A. Quasi-static fault growth and shear fracture energy in granite // Nature. – 1991. – 350. – P. 39- 42.

2. Hamiel Y., Katz O., Lyakhovsky V., Reches Z., Fialko Yu. Stable and unstable damage evolution in rocks with implications to fracturing of granite // Geophys. J. Int. – 2006. – 167. – P. 1005-1016.

3. Xinglin Lei and Shengli Ma Laboratory acoustic emission study for earthquake generation Process // Earthq Sci. – 2014. – 27. 6. – P 627-646.

4. Tal Y., Goebel T., J-P Avouac Experimental and modeling study of the effect of fault roughness on dynamic frictional sliding // Earth and Planetary Science Letters. – 2020. – 536. – 116133.

6. Carpinteri A., Chiodoni A., Manuello A., Sandrone R. Compositional and microchemical evidence of piezonuclear fission reactions in rock specimens subjected to compression tests // Strain. 2011. 47, P. 282-292.

7. Lei X. Evolution of b-Value and Fractal Dimension of Acoustic Emission Events During Shear Rupture of an Immature Fault in Granite // Applied Sciences. – 2019. – 9. 12. – P. 2498

8. Cundall P.A. A computer model for simulating progressive largescale movements in blocky rock systems. // In: Proceedings of the Symposium of International Society of Rock Mechanics, v.1, Nancy: France; 1971. Paper No. II-8.

9. Potyondy D.O., Cundall P.A. Abonded-particle model for rock // Int. J. Rock Mech. Min. Sci. – 2004. – 41, – P. 1329–1364.

10. Dosta M., Skorych V. MUSEN: An open-source framework for GPU-accelerated DEM simulations // SoftwareX. -2020. - 12. - 100618.

11. Hertz H. Über die Berührung fester elastischer Körper // Journal die reine und angewandte Mathematik. – 1882. – 92. – P. 156-171

12. Damaskinskaya E., Hilarov V., Panteleev I., Korost D., Frolov D. Statistical Regularities of a Main Crack Formation in Rocks. Acoustic Emission and X-Ray Computed Microtomography. В книге (сборнике): THE 5TH INTERNATIONAL CONFERENCE "TRIGGER EFFECTS IN GEOSYSTEMS" Springer Proceedings in Earth and Environmental Sciences, p.: 23-32 2019.

# Л.И. Гузилова<sup>1</sup>, А.С. Гращенко<sup>2</sup>, П.Н. Бутенко<sup>1</sup>, В.И. Николаев<sup>1</sup> <sup>1</sup>Физико-технический институт им. А.Ф. Иоффе РАН <sup>2</sup>Институт проблем машиноведения РАН<sup>(•)</sup>

## МЕХАНИЧЕСКИЕ И ТРИБОЛОГИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА ЭПИТАКСИАЛЬНЫХ СЛОЕВ ОКСИДА ГАЛЛИЯ

Оксид галлия (Ga<sub>2</sub>O<sub>3</sub>) – широкозонный полупроводниковый материал (E<sub>g</sub> – 4.7-5.2 эВ), кристаллы и полупроводниковые слои которого уже применяются при производстве прототипов диодов Шоттки, полевых транзисторов, УФ-фотодетекторов и газовых датчиков [1]. Оптические и электрические свойства данного материала изучены достаточно полно, в отличии от их механических и трибологических свойств. Кроме того, при исследовании прочностных уделяется характеристик оксида галлия большее внимание его термостабильной фазе β-Ga<sub>2</sub>O<sub>3</sub>[2-7]. Измерения твердости и модуля упругости поверхностей (100), (010) и ( $\overline{2}01$ ) объемных кристаллов  $\beta$ -Ga<sub>2</sub>O<sub>3</sub> демонстрируют ярко выраженную анизотропию: значения твердости Н составляют от 6-12 ГПа, а модуль упругости Е (201) 225-234 ГПа [6,7]. Работы по изучению метастабильных полиморфов α-Ga<sub>2</sub>O<sub>3</sub> и ε(κ)-Ga<sub>2</sub>O<sub>3</sub> пока ограничиваются лишь расчетами [8,9].

Целью данной работы было получение систематических данных о деформации и механических характеристиках эпитаксиальных слоев оксида галлия трех модификаций: α-Ga<sub>2</sub>O<sub>3</sub> (0001), β-Ga<sub>2</sub>O<sub>3</sub> ( $\overline{2}$ 01), ε(κ)-Ga<sub>2</sub>O<sub>3</sub> (001), и сравнение их между собой.

В работе исследовались эпитаксиальные слои Ga<sub>2</sub>O<sub>3</sub>, полученные в процессе хлоридной газовой эпитаксии на сапфировые подложки базисной (0001) ориентации. Для получения данных о механических характеристиках (твердость, модуль упругости) Ga<sub>2</sub>O<sub>3</sub> использовался метод наноиндентирования.



Рис. 1. Кривые нагрузка (F) - глубина проникновения (h) индентора в приповерхностную область эпитаксиальных слоев α--Ga2O3 (a) и ε(к)-Ga2O3 (b) при различных нагрузках на индентор, и СЭМ-изображения поверхностей эпитаксиальных слоев α--Ga2O3 (б) и ε(к)-Ga2O3 (г) после снятия нагрузки 100 и 40 мH, соответственно

<sup>&</sup>lt;sup>(•)</sup> Л.И. Гузилова, luba-guzilova@yandex.ru

Из кривых нагружения (рис. 1) по методу Оливера-Фарра [10] вычислены значения твердости Н и модуля упругости Е для метастабильных  $\alpha$ -Ga<sub>2</sub>O<sub>3</sub> (0001) и  $\varepsilon(\kappa)$ -Ga<sub>2</sub>O<sub>3</sub> (001), которые составили 18.7 и 283.4 ГПа, и 17.5 и 256.1 ГПа соответственно. Твердость метастабильных полиморфов оказалась существенно выше, чем у термостабильного  $\beta$ -Ga<sub>2</sub>O<sub>3</sub> (H ~ 6.2 ГПа для плоскости (010), и ~ 12.5 ГПа для плоскости ( $\overline{2}01$ )), что объясняется более плотной упаковкой кристаллической структуры  $\alpha$ - и  $\varepsilon(\kappa)$ -Ga<sub>2</sub>O<sub>3</sub>. При этом значение модуля Юнга у Ga<sub>2</sub>O<sub>3</sub> оказалось наименьшим, Е ~ 234 ГПа в направлении перпендикулярном плоскости (100) и 230 ГПа плоскости ( $\overline{2}01$ ).

Как видно из СЭМ-изображений (рис. 1,6,г), на поверхности  $\alpha$ -фазы происходит образование двух видов трещин: трещины связанной с кристаллографией по плоскостям спайности (1010), и трещин, выходящих из углов отпечатка. Кроме того, наблюдалось распространение трещин из углов отпечатка по всей исследуемой поверхности, что, вероятно, связано с релаксацией напряжений, возникших во время роста. Также это можно объяснить тем, что нагрузка на индентор 100 мН является критической для этого типа образцов. При максимальной нагрузке на индентор 50 мН подобных процессов не наблюдалось. В случае же  $\varepsilon(\kappa)$ -Ga<sub>2</sub>O<sub>3</sub> трещины имели меньшую длину, что мы связываем также со структурным качеством слоев.

В дополнение к наноиндентированию, была впервые предпринята попытка оценить износостойкость слоев оксида галлия в экспериментах по сухому трению (рис. 2). Эксперимент осуществлялся в возвратно-поступательном режиме с использованием модели «сфера на плоскости», испытания приводились при трех нагрузках: 1,2,5 H, в качестве контртела использовался сапфировый шар с диаметром 4 мм. Коэффициент износа k вычислялся по модели Арчарда [11] по объему «истертого» материала и общей длине пробега (50 м). Параметры трибологических испытаний: амплитуда 6 мм, общая длина пробега 1=50 м, кол-во циклов n=4167, максимальная скорость перемещения зонда 5.65 см/сек.



Профили сечений перпендикулярных следу износа при нагрузке на зонд 1 Н



Рис. 2. Следы износа эпитаксиальных слоев α- и β-Ga<sub>2</sub>O<sub>3</sub> и их профили поперечного сечения при нагрузке на контртело 1 Н

Визуальная оценка ширины следов износа (рис. 2), полученных при нагрузке на контртело при 1 H, по СЭМ-изображениям продемонстрировала, что слой альфа-фазы обладает большей сопротивляемостью к истиранию, чем бета-фаза. Данные профилометра и коэффициенты износа, рассчитанные по модели Арчарда, подтверждают данный факт. Таким образом, испытания трением продемонстрировали, что метастабильный α-полиморф обладает более высокими трибологическими характеристиками. Так, коэффициент износа слоев (в экспериментах с сапфировым контртелом) α-полиморфа ниже, чем у слоев термостабильного

β-полиморфа ( $2.3 \cdot 10^{-4}$  мм<sup>3</sup>/H·м) и составляет  $4.6 \cdot 10^{-6}$  мм<sup>3</sup>/H·м, что может ставить его в ряд высоко-износостойких материалов среди полупроводников. Коэффициенты трения слоев α-фазы ниже, чем для слоев β-Ga<sub>2</sub>O<sub>3</sub> (0.06 и 0.07 соответственно), при этом для обоих полиморфов они низки по сравнению с большинством материалов.

Таким образом, в работе было экспериментально установлено:

1. Значения твердости Н метастабильных фаз  $\alpha$ - и  $\epsilon(\kappa)$ -Ga<sub>2</sub>O<sub>3</sub> превосходят эти значения для термостабильной  $\beta$ -Ga<sub>2</sub>O<sub>3</sub> во всех кристаллографических направлениях, что мы связываем с более плотной упаковкой кристаллической решетки  $\alpha$ - и  $\epsilon(\kappa)$ -Ga<sub>2</sub>O<sub>3</sub>.

2. При сухом трении в паре с сапфиром при равных условиях слои  $\alpha$ -Ga<sub>2</sub>O<sub>3</sub> менее подвержены износу (истиранию), чем  $\beta$ -Ga<sub>2</sub>O<sub>3</sub>. Коэффициент износа k для  $\alpha$ -Ga<sub>2</sub>O<sub>3</sub> составляет 4.6·10<sup>-6</sup> мм<sup>3</sup>/H·м, что сравнимо по порядку с коэффициентом износа сапфира 10<sup>-6</sup> мм<sup>3</sup>/H·м [12]. Высокое сопротивление износу позволяет рассматривать  $\alpha$ -Ga<sub>2</sub>O<sub>3</sub> для возможных применений в качестве защитного покрытия. Преимуществом перед сапфиром ( $\alpha$ -Al<sub>2</sub>O<sub>3</sub>) является существенно более низкая температура его синтеза и нанесения на подложку.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Higashiwaki M.  $\beta$ -Gallium Oxide Devices: Progress and Outlook // Physica Status Solidi (RRL). – 2021. – V. 15(11). – P. 2100357.

2. Wu Y.Q., Gao S., Huang H. The deformation pattern of single crystal  $\beta$ -Ga2O3 under nanoindentation // Materials Science in Semiconductor Processing. 2017. V. 71. P. 321–325.

3. Zhou H., Wei J., Shen J., Xu Y., Zhang J. Study on the Size Effect of Single Crystal Gallium Oxide During the Nanoindentation Process // Journal of Advanced Manufacturing Systems. – 2021. - V. 20(03). – P. 575-587.

4. Gao P., Tan B., Yang F., Li H., Bian N., Sun X., Liu M., Wang R. Influence of diamond wire saw slicing parameters on (010) lattice plane beta-gallium oxide single crystal wafer // Materials Science in Semiconductor Processing. – 2021. – V. 133. – P. 105939.

5. Xu Y., Zhou H., Zhang J., Ren X., Zhang C. Experimental Study of Micro Scale Mechanics Behavior of Cleavable Gallium Oxide Crystals // China Mechanical Engineering. – 2022. – V. 33(18). – P. 2234-2240.

6. Okada S., Kudou K., Higashi I. Growth of  $\beta$ -Ga2O3 Single Crystals by the Tin-Flux Method // Nippon Kagaku Kaishi. - 1991. - N. 10. - P. 1426-1430. (In Japanese)

7. Víllora E.G., Arjoca S., Shimamura K., Inomata D., Aoki K.  $\beta$ -Ga2O3 and single-crystal phosphors for high-brightness white LEDs and LDs, and  $\beta$ -Ga2O3 potential for next generation of power devices // Proc. of SPIE. - 2017. - V. 8987. - P. 89871U.

8. Smirnov A.M., Kremleva A.V., Sharofidinov Sh.Sh., Romanov A.E. Misfit stress relaxation in wide bandgap semiconductor heterostructures with trigonal and hexagonal crystal structure // Journal of Applied Physics. - 2022. - V. 131. - P. 025301.

9. Smirnov A.M., Kremleva A.V., Ivanov A.Yu., Myasoedov A.V., Sokura L.A., Kirilenko D.A., Sharofidinov Sh.Sh., Romanov A.E. Stress–strain state and piezoelectric polarization in orthorhombic Ga2O3 thin films depending on growth orientation // Materials & Design. – 2023. – V. 226. – P. 111616.

10. Oliver W.C. Measurement of hardness and elastic modulus by instrumented indentation: Advanced in understanding and refinements to methodology // Journal of Material Research. - 2004. - V. 19(1). - P. 3-20. 11. Archard J.F. Contact and Rubbing of Flat Surfaces // J. Appl. Phys. - 1953. - V. 24(8). - P. 981.

26

12. Norton A.D., Falco S., Young N., Severs J., Todd R.I. Microcantilever investigation of fracture toughness and subcritical crack growth on the scale of the microstructure in Al2O3 // Journal of the European Ceramic Society. - 2015. - V. 35(16). - P. 4521-4533.

УДК 539.3

Д.С. Михеев<sup>1</sup>, М.Ю. Гуткин<sup>1,2,3</sup>, А.Л. Колесникова<sup>2,3</sup>, А.Е. Романов<sup>3</sup> <sup>1</sup>Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого<sup>(\*)</sup> <sup>2</sup>Институт проблем машиноведения РАН <sup>3</sup>Университет ИТМО

## НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННОЕ СОСТОЯНИЕ И МЕХАНИЗМЫ ЕГО РЕЛАКСАЦИИ В СФЕРИЧЕСКОЙ КОМПОЗИТНОЙ НАНОЧАСТИЦЕ С ЯДРОМ В ФОРМЕ УСЕЧЕННОГО ШАРА

Разработка, исследование и применение композитных наночастиц образуют обширные области на переднем крае развития современных нанотехнологий. В частности, особый интерес представляют композитные наночастицы «ядро-оболочка» [1-3]. типа Неоднородность фазового состава таких частиц приводит к появлению остаточных упругих деформаций И напряжений, вызванных несоответствием решетки И разными коэффициентами теплового расширения компонентов. Механизмы релаксации напряжений несоответствия включают образование дислокаций несоответствия вокруг ядра, призматических и скользящих петель дислокаций в оболочке, трещин в ядре или в оболочке, отслоение ядра от оболочки и смещение ядра из центра частицы [4, 5]. Приближенные расчеты [5] показали, что образование на границе раздела ядра и оболочки круговой призматической дислокационной петли энергетически более выгодно, чем другие способы релаксации напряжений. В последние годы был предложен ряд теоретических моделей для расчета критических условий возникновения таких петель [5-8]. Однако все эти расчеты были выполнены для сферических частиц с центрированными сферическими ядрами, хотя на практике частицы «ядро-оболочка» могут принимать и другие формы [1-3]. В работе [9] была решена граничная задача теории упругости для усеченного сферического включения, находящегося в осесимметричном положении в упругом шаре с теми же изотропными упругими постоянными (рис. 1).



Рис. 1. Схема частицы ядро-оболочка в форме усеченного шара, находящейся внутри шара большего размера

<sup>&</sup>lt;sup>(\*)</sup>Д.С. Михеев, ds.mikheev@mail.ru

Релаксация остаточного напряжения в такой частице осуществляется за счет образования призматической петли на границе ядра и оболочки. В настоящей работе исследована возможность образования не одной, а нескольких взаимодействующих друг с другом дислокационных петель. Все расчеты проводились для полусферического ядра. Для случая нескольких петель мы имеем следующий энергетический критерий зарождения п дислокационных призматических петель на границе ядра и оболочки наночастицы:

 $\Delta W < 0$ , где  $\Delta W = \sum_{i=1}^{n} W_{di} + \sum_{i=1}^{n} W_{inti} + \sum W_{jk}$ , где  $W_{di}$  – собственная энергия призматической дислокационной петли под номером і в упругом шаре;  $W_{inti}$  – энергия взаимодействия призматической дислокационной петли под номером і с полем напряжения несоответствия в наночастице,  $W_{jk}$  – энергия взаимодействия между призматическими дислокационными петлями под номерами ј и k. Метод расчета  $W_{jk}$  подробно рассмотрен в работе [10]. Кроме того, мы считаем, что расстояние между петлями не должно превышать значения d, которое вычисляется по формуле  $d = b/\varepsilon^*$ , где b это вектор Бюргерса призматической дислокации,  $\varepsilon^*$  – это величина несоответствия. Для примера, если частица имеет размеры a = 100b и  $\varepsilon^* = 0.1$ , то максимальное количество петель, которые могут расположиться в такой частице, равно девяти, если a = 100b и  $\varepsilon^* = 0.03$  – то в такой частице может зародиться всего три петли (Рис. 2).



Рис. 2. Зависимость изменения энергии  $\Delta W$ от соотношения  $R_0/a$  для значений  $\varepsilon^* = 0.03$ (а) и  $\varepsilon^* = 0.1$  (b) и различного числа петель для частицы размера a = 100b.

Полученные результаты показывают, что с ростом несоответствия энергетически выгодно образование большего количества петель. При этом наиболее неустойчивыми к образованию петель дислокаций несоответствия оказываются наночастицы, в которых радиус ядра составляет 0.75 от внешнего радиуса наночастицы. Также для любого возможного количества петель находится состояние системы, для которого зарождение такого количества петель будет энергетически оптимально.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. De Mello Donega C., Synthesis and properties of colloidal heteronanocrystals // Chem. Soc. Rev. -2020 - Vol. 40, -P. 1512-1546.

2. Zhang N., Liu S., Xu Y.J., Multi-Shelled CeO2 Hollow Microspheres as Superior Photocatalysts for Water Oxidation // Nanoscale – 2012 – Vol. 4, – P. 2227-2238.

3. Liu X., Iocozzia J., Wang Y., Noble Metal–Metal Oxide Nanohybrids with Tailored Nanostructures for Efficient Solar Energy Conversion // Photocatalysis and Environmental Remediation Energy Environ. Sci. – 2017 – Vol. 10, – P. 402-434.

4. Trusov L.I., Tanakov M.Yu., Gryaznov V. G., et al., Relaxation of elastic stresses in overlayed microcrystals // J. Cryst. Growth - 1991 - Vol. 114, - P. 133-140.

5. Gutkin M.Yu., Nanomechanics of Stress Relaxation in Composite Low-Dimensional Structures // Int. J. Eng. Sci. – 2012 – Vol. 61 P. 59-74.

6. Gutkin M.Yu., Kolesnikova A.L., Krasnitckii S.A., et al., Misfit dislocation loops in composite core-shell nanoparticle // Phys. Solid State – 2014 – Vol. 56 – P. 723-730.

7. Gutkin M.Yu., Smirnov M.A., Initial stages of misfit stress relaxation through the formation of prismatic dislocation loops in GaN–Ga2O3 composite nanostructures // Phys. Solid State -2016 – Vol. 58 P. 1611-1621.

8. Gutkin M.Yu., Krasnitckii S.A., Smirnov M.A., et al., Generation of Misfit Dislocations in a Core-Shell Nanowire Near the Edge of Prismatic Core Phys. // Solid State – 2015 – Vol. 57 – P.1177-1182.

9. Gutkin M.Yu., Kolesnikova A.L., Mikheev D.S., et al., Misfit stresses and their relaxation by misfit dislocation loops in core-shell nanoparticles with truncated spherical cores// Eur J Mech A Solids -2020 -Vol. 85 - 103967.

10. Krasnitckii A.S., Smirnov A.M., Gutkin M.Y. Pair interaction of coaxial circular prismatic dislocation loops in elastic solids with spherical surfaces. // Materials Physics and Mechanics. – 2020 Vol. 44. No. 1. – P.116-124.

УДК 620.172.2

Е.Д. Назарова<sup>1</sup>, М.М. Пегливанова<sup>1,2</sup>, В.Ю. Филин<sup>1</sup>, А.В. Ларионов<sup>1</sup> <sup>1</sup>НИЦ "Курчатовский институт" ЦНИИ КМ "Прометей"<sup>(\*)</sup> <sup>2</sup>Санкт-Петербургский государственный университет

# ПОЛУЧЕНИЕ ИСТИННОЙ ДИАГРАММЫ НАГРУЖЕНИЯ НА ОСНОВЕ ИСПЫТАНИЙ НА РАСТЯЖЕНИЯ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ ЧИСЛЕННЫХ МЕТОДОВ

При проведении численных расчетов упругопластических тел возникает необходимость задавать истинную диаграмму нагружения материала, представляющую напряжений от интенсивности собой зависимость интенсивности деформаций. Экспериментальное определение этой зависимости, проводимое на образцах, испытываемых на растяжение, ограничено условиями одноосного напряженного состояния. Для решения задач, в которых присутствуют пластические деформации, превышающие деформацию равномерного удлинения, этого недостаточно. В связи с этим, в настоящей работе была

<sup>&</sup>lt;sup>(\*)</sup>Е.Д. Назарова, nazarova42@list.ru

предпринята попытка получить истинную диаграмму нагружения судостроительных сталей путем аппроксимации с использованием экспериментальных данных и численных методов. Численное решение, полученное на первом этапе итерационного процесса, верифицируется экспериментальными данными, полученными на реальном образце. На втором этапе параметры аппроксимации корректируются, и этот процесс повторяется до момента получения удовлетворительной аппроксимации.

Для получения свойств материала (предел текучести и т.д.) проводят испытания на растяжение [1-2]. Для этого применяются испытательные разрывные машины, а также может использоваться экстензометр, измеряющий удлинение образца, измеряемое на некоторой базе l<sub>p</sub> [3-4]. Эти испытания позволяют получить зависимость нагрузки P от перемещений Δ. Поскольку при нагрузке, меньшей максимальной, выполнятся условие одноосного напряженного состояния, т.е. первые главные напряжения и деформации по Мизесу  $\sigma_1$  и  $\epsilon_1$ равны интенсивностям напряжений  $\sigma_i$  и  $\varepsilon_i$ , можно построить требуемую зависимость  $\sigma_i$  от  $\varepsilon_i$ по формулам  $\varepsilon_i = \ln(1 + \Delta/b)$  и  $\sigma_i = P/F_0 * \exp(\varepsilon_i)$ , где  $F_0$  – площадь исходного рабочего сечения образца. Вопрос о продлении этой зависимости для больших значений деформаций остается открытым, поскольку в связи с появлением шейки  $\sigma_i \neq \sigma_1$  и  $\varepsilon_i \neq \varepsilon_1$ . Такие работы проводились с использованием различных гипотез вязкого разрушения [5]. Использование экстензометра не всегда возможно – например, когда малые размеры образца не позволяют установить датчик или, напротив, значительные размеры и удлинение, получаемое в ходе испытаний, превышают возможности этого датчика. В этих случаях приходится обходиться данными о перемещении захватов испытательной машины. При этом измеряемые перемещения  $\Delta$  увеличиваются за счет влияния зазоров и упругой податливости системы образец – машина.

Результаты испытаний могут быть представлены лабораторией в следующем виде: по оси ординат могут быть

• приложенная нагрузка P, ее необходимо будет далее перевести в  $\sigma_{\scriptscriptstyle \rm H3M}$  по формуле  $\sigma_{\scriptscriptstyle \rm H3M}$  = P/F0,

 напряжения σ<sub>изм</sub>, отнесенные к начальной площади рабочего сечения образца F<sub>0</sub>, по оси абсцисс могут быть

• перемещения траверса или поршня  $\Delta$ , значения необходимо перевести в удлинение по формуле  $\delta = \Delta/l_p$ , где  $l_p$  - полная длина рабочей части образца между галтелями,

• удлинение δ.

Перемещение, полученные по показаниям экстензометра d, значения необходимо перевести в удлинение по формуле  $\delta = d/l_0$ , где  $l_0$  - начальное расстояние между ножками датчика. Таким образом, если испытания проводились без применения экстензометра, полученную зависимость  $\sigma_{\rm H3M}$  ( $\delta$ ) следует преобразовать в зависимость  $\sigma_i$  ( $\varepsilon_i$ ). Поскольку априори полагается упругопластическое поведение металла, производятся следующие операции:

• Учет люфтов системы образец - машина. Зрительно очерчиваются границы линейноупругого участка. На данном участке исключается начальная часть, носящая явно нелинейный характер. На оставшейся части проводится линейная аппроксимацию наиболее удобным методом. Находится абсцисса точки нулевого значения этой аппроксимации  $\delta_0$ . Зависимость  $\sigma_{\text{изм}}$  ( $\delta$ ) преобразуется в зависимость  $\sigma_{\text{изм}}(\delta_1)$ , где  $\delta_1 = \delta - \delta_0$ .

• Учет податливости системы образец – машина. Из литературных данных или иных источников принимается значение модуля Юнга Е. Зрительно определяется предел пропорциональности  $\sigma_{_{\rm ИЗM}}^{Y}$ , соответствующий последней точки линейной части диаграммы.

Податливость системы 
$$\lambda$$
 рассчитывается, как  $\lambda = \frac{\delta_1^Y - \frac{\sigma_{u_{3M}}'}{E}}{\sigma_{u_{3M}}^Y}$ . Зависимость  $\sigma_{_{H3M}}(\delta_1)$ 

преобразуется к виду  $\sigma_{_{H3M}}(\delta_2)$  путем преобразования абсциссы j-той точки по формуле  $\delta_2^{j} = \delta_1^{j} - \lambda \sigma_{_{H3M}}^{j}$ .

• Масштабирование. Поскольку значение максимального удлинения по замеру и максимальное значение δ<sub>2</sub> диаграмме различны, ветвь диаграммы после максимума нагрузки корректируется таким образом, чтобы последняя точка соответствовала удлинению, замеренному на образце.

Если испытания проводились с экстензометром и шейка образовалась в пределах его базы, все вышеперечисленные мероприятия не являются необходимыми и записанная диаграмма уже соответствует зависимости σ<sub>изм</sub>(δ<sub>2</sub>).

•Получение истинных значений напряжений  $\sigma_i$  и деформаций  $\varepsilon_i$ . Деформации  $\varepsilon_i$  рассчитываются по формуле  $\varepsilon_i = \ln(1 + \delta_2)$ . Определяется деформация равномерного растяжения  $\varepsilon_i^b$  как деформация, соответствующая максимальному значению напряжений. На возрастающей ветви справедливо соотношение  $\sigma_i = \sigma_{\mu_{3M}} \exp(\varepsilon_i)$ .

• Аппроксимация диаграммы. Если вышеописанные операции являются тривиальными, то аппроксимация диаграммы для значений ε<sub>i</sub>, превышающих значение равномерной деформации ε<sub>i</sub><sup>b</sup>, представляет сложную задачу. Предлагается следующая методика:

Выбирается небольшой участок диаграммы слева от  $\varepsilon_i^{b}$ . Проводится аппроксимация этих значений некоей функцией. В данном случае использовалась зависимость  $\sigma_i = A((\varepsilon_i + C)\frac{E}{A})^n$ . Величина А в первом приближении берется равной  $\sigma^Y$ , n – равномерному удлинению  $\varepsilon_i^{b}$ , величина С подбирается таким образом, чтобы обеспечить касание диаграммы  $\sigma_i(\varepsilon_i)$  с функцией аппроксимации. Точки, рассчитанные по этой зависимости, являются продолжением диаграмм для  $\varepsilon_i > \varepsilon_i^{b}$ . Поскольку данная последовательность преобразований создавалась для применения в конечно-элементном комплексе ANSYS Mechanical, количество характерных точек диаграммы не должно превышать 20.

Численным методом производится решение задачи, моделирующей испытания на растяжение с использованием полученных свойств материала. Используется известный критерий вязкого разрушения – Кокрафта-Лэтэма-Оха [6]. Полученные результаты сопоставляются с экспериментальными данными, после чего корректируются коэффициенты аппроксимационной функции – и снова решается численная задача, до тех пор, пока не будет достигнуто удовлетворительное совпадение расчета с экспериментом.



31

Полученную зависимость  $\sigma_i(\varepsilon_i)$  можно использовать для моделирования задач с большими пластическими деформациями. На рис.1 приведен пример проверки корректности разработанной истинной диаграммы нагружения.

Выводы. Описана пошаговая методика обработки результатов испытаний на растяжение. Предложен оригинальный метод получения истинной диаграммы для деформаций, превосходящих деформацию равномерного растяжения. Данная последовательность преобразований создавалась для применения в конечно-элементном комплексе ANSYS Mechanical и неоднократно использовалась при решении задач с большими пластическими деформациями.

Разработанная методика повышает точность результатов за счет учета особенностей плато текучести. Она также позволяет использовать любые имеющиеся исходные экспериментальные данные по растяжению образца. Методика универсальна для любой марки стали.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. ГОСТ 1497-84.

2. CTO-07516250-255-2009.

3. Сакевич В. Н., Федосеев Г. Н. Механика деформирования и разрушения : практикум для лабораторных и практических занятий – Витебск : УО "ВГТУ", 2020. – 177 с.

4. Порошин В.Б. Конструкционная прочность – Челябинск: Издательский центр Юургу, 2019. – 335 с.

5. Абакумов А.И., Сафронов И.И, Смирнов А.С., Арабей А.Б., Есиев Т.С., Яковлев С.Е., Порошков А.В., Обыденнов Е.Н. Расчетно-экспериментальное исследование испытания падающим грузом высокопрочной трубной стали х100 (к80) // Проблемы прочности и пластичности. – 2021 – Т. 83, № 3 – С. 17-25.

6. Смирнов Е.Н., Богачев Д.И., Скляр В.А. К вопросу критериальной оценки нарушений сплошности непрерывного слитка при его деформировании на стадии неполной кристаллизации // Сборник материалов конференции «Современные проблемы горно-металлургического комплекса. Наука и производство», 2019, С. 4-11.

#### СЕКЦИЯ «ФИЗИКА КОНДЕНСИРОВАННЫХ СРЕД И НАНОСТРУКТУР»

УДК 538.931

# О.С. Плешаков<sup>1</sup>, С.А. Щербак<sup>1,2</sup> <sup>1</sup>Академический университет им. Ж.И. Алферова <sup>2</sup>Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого<sup>(•)</sup>

## МОДЕЛИРОВАНИЕ ИОННОГО ТРАНСПОРТА В СТЕКЛАХ В ПРОЦЕССЕ ТЕРМОЭЛЕКТРИЧЕСКОЙ ПОЛЯРИЗАЦИИ

Введение. Термоэлектрическая поляризация (ТЭП) стекла является перспективным инструментом для изготовления структур интегральной и дифракционной оптики, в частности, волноводов [1] и генераторов второй гармоники [2], а также микрофлюидных устройств [3]. В процессе поляризации к образцу стекла, разогретому до температуры активации ионной подвижности, прикладывается постоянное электрическое поле, под действием которого из субанодной области происходит дрейф катионов, содержащихся в стекле. Последующее охлаждение образца под приложенным напряжением приводит к «заморозке» локально-неравновесного распределения катионов, сформировавшегося в результате дрейфа, за счет снижения их подвижности.

В данной работе построена модель дрейфа ионов в стекле в процессе поляризации в так называемом режиме «открытого анода», приводящего к инжекции частиц из окружающей среды в стекло. Рассмотрен случай одного типа ионов в составе стекла (Na<sup>+</sup>) и одного типа инвазивных ионов (H<sup>+</sup>), имеющих меньшую подвижность.

Моделирование. Численная модель была построена с помощью программного обеспечения COMSOL Multiphysics. Решалась нестационарная одномерная задача дрейфадиффузии ионов совместно с уравнением Пуассона, объемный заряд при этом определялся концентрациями подвижных ионов и зарядом «немостиковых» (с которыми связываются подвижные катионы) атомов кислорода. При моделировании использовались следующие параметры: температура 250 °C, подвижность ионов натрия  $\mu_{Na}=10^{-15}$  [4], подвижность ионов водорода  $\mu_{\rm H}=10^{-3}\mu_{\rm Na}$  [5], подвижность и коэффициент диффузии связаны соотношением Эйнштейна с постоянной Хавена равной 1, напряжение на аноде U=1000 В, толщина образца L=1 мм, исходная концентрация ионов натрия в стекле  $C_0=6.9\cdot10^{27}$  м<sup>-3</sup>, площадь образца S=1 см<sup>2</sup>. Схема модели показана на рис. 1.



Рис. 1. Схема модели процесса ТЭП: а) в начальный (а) и произвольный (б) момент времени

В результате численного решения указанной задачи были получены координатные зависимости концентраций ионов и пространственного заряда, временные зависимости ионного тока, полного прошедшего и «замороженного» (накопленного в процессе поляризации) зарядов. Характерный профиль концентраций катионов представлен на рис. 2а. Профили концентрации обоих типов ионов имеют достаточно резкий перепад, образующий фронт области поляризации стекла. На границе этой области формируется

<sup>&</sup>lt;sup>(•)</sup> С.А. Щербак, sergeygtn@yandex.ru

нескомпенсированный отрицательный заряда «пустых» (не связанных с катионами) немостиковых атомов кислорода. Заряд распределен в очень узкой области пространства шириной порядка нескольких нанометров. После охлаждения стекла этот заряд оказывается «заморожен», как показано на нижнем графике рис. 2а.

Сравнение абсолютных значений сформированного (накопленного) в стекле таким образом заряда и заряда, прошедшего через стекло в процессе поляризации, иллюстрируется рис. 26. Как видно, прошедший заряд ожидаемо возрастает со временем, тогда как накопленный — убывает. Кроме того, характерные значения накопленного заряда (микрокулоны) оказались на порядки меньше значений полного прошедшего заряда (десятые кулона).



Рис. 1.а) Профиль концентраций катионов в стекле и область пространственного заряда, б) сравнение накопленного и прошедшего зарядов

Сравнение с аналитическими формулами. Для аналитического рассмотрения этих процессов ранее была предложена модель эквивалентной электрической цепи [6], где поляризованная (1) и неполяризованная (2) области стекла были представлены как последовательные сопротивления  $R_1$  и  $R_2$ , соответственно,  $R_{1,2}=\rho_{1,2}d_{1,2}S^{-1}$ ,  $\rho_{1,2}$  – удельные сопротивления областей,  $\rho_{1,2}$  связаны с подвижностью соответствующих носителей следующим образом:  $\rho_{1,2}=(eC_0\mu_{1,2})^{-1}$  причем толщина  $d_1$  и, следовательно, сопротивление поляризованной области зависит от прошедшего заряда,  $d_1(t)=Q(t)(C_0eS)^{-1}$ . Недостатком такого подхода является невозможность нахождения сформированного заряда.

В данной работе предлагается рассматривать формирование объемного заряда как его накопление на конденсаторе, представленным поляризованной областью стекла и включенным в цепь параллельно сопротивлению  $R_1$ . Эквивалентная схема представлена на рис. 3.



Рис. 3. Эквивалентная электрическая схема, соответствующая процессу ТЭП

Уравнения Кирхгофа для данной цепи имеют вид:

$$\begin{cases} I_2 = I_C + I_1 = I; \\ I_1 R_1 + I R_2 = U. \end{cases}$$
(1)

При этом ток на конденсаторе  $I_c$  по определению будет равен производной искомого накопленного заряда  $q_c$  по времени:

$$I_C = \frac{dq_c}{dt} = \frac{d(CU_{R_1})}{dt} = \varepsilon \varepsilon_0 \rho_1 \frac{dI_1}{dt}.$$
 (2)

Величина  $\varepsilon \varepsilon_0 \rho_1$  в (2) характеризует время зарядки конденсатора, которое при данных параметрах порядка ~0.01 с, что пренебрежительно мало по сравнению с характерным временем процесса ТЭП, составляющего десятки минут [6]. Это позволяет считать конденсатор заряженным в каждый момент времени на протяжении всего процесса, что, в свою очередь, позволяет принять  $I_c = 0$  в (1). Тогда выражения для полного ионного тока I(t) и прошедшего заряда Q(t) запишутся без изменений относительно работы [6]:

$$Q(t) = \frac{-R_2 S^2 e C_0}{\rho_1} + \sqrt{\left(\frac{R_2 S^2 e C_0}{\rho_1}\right)^2 + \frac{2U S^2 e C_0}{\rho_1}t},$$
(3)

$$I(t) = \frac{dQ(t)}{dt} = \frac{U}{R_2} \left( 1 + \frac{2U\rho_1}{R_2^2 S^2 e C_0} t \right)^{-\frac{1}{2}},\tag{4}$$

а накопленный заряд  $q_c(t)$  будет пропорционален полному ионному току I(t):

$$q_c(t) = \varepsilon \varepsilon_0 \rho_1 I(t). \tag{5}$$

Сравнение полученных аналитически функций и численного моделирования продемонстрировано на рис. 4. Показана хорошая сходимость полученных аналитически зависимостей с результатами численного моделирования.



Рис. 4. Полученные аналитически зависимости и результаты численного моделирования

Заключение. Впервые аналитически описан электрический заряд, накопленный в образце стекла в процессе его термической поляризации в режиме открытого анода. Полученные аналитические зависимости с высокой точностью совпали с результатами проведенного численного моделирования задачи дрейфа-диффузии методом конечных элементов. Также показано, что заряд, накопленный в процессе поляризации, на много порядков меньше суммарного заряда ионов, прошедших через образец.

Работа выполнена при поддержке Министерства науки и высшего образования РФ (государственное задание FSRM-2023-0009).

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Liu K., Pun E.Y.B. Buried ion-exchanged glass waveguides using field assisted annealing, IEEE Photon. Technol. Lett. 17 (2005) 76–78.

2. Reshetov I. V. et al. To the issue of the second harmonic generation in poled silicate glasses //Journal of Physics: Conference Series. – IOP Publishing, 2020. – T. 1695. –  $N_{2}$ . 1. – C. 012131.

3. Reduto I. et al. Relief micro-and nanostructures by the reactive ion and chemical etching of poled glasses //Optical Materials Express.  $-2019. - T. 9. - N_{\odot}. 7. - C. 3059-3068.$ 

4. Mehrer H., Imre A. W., Tanguep-Nijokep E. Diffusion and ionic conduction in oxide glasses //Journal of Physics: Conference Series. – IOP Publishing, 2008. – T. 106. – № 1. – C. 0120

5. Oven R. Analytical model of electric field assisted ion diffusion into glass containing two indigenous mobile species, with application to poling //Journal of Non-Crystalline Solids. - 2021. - T. 553. - C. 120476.
6. Scherbak S. A. et al. Poling of Glasses Using Resistive Barrier Discharge Plasma //Materials. - 2022. - T. 15. - №. 23. - C. 8620.
И.В. Решетов<sup>1,2</sup>, Г. Кан<sup>2</sup>, С.А. Щербак<sup>1,2</sup>, В.В. Журихина<sup>1,2</sup>, А.А. Липовский<sup>1,2</sup> <sup>1</sup>Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого<sup>(•)</sup> <sup>2</sup>Академический университет им. Ж.И. Алферова

## УСИЛЕНИЕ СИГНАЛА ВТОРОЙ ОПТИЧЕСКОЙ ГАРМОНИКИ ПОСЛЕ ДОПОЛНИТЕЛЬНОЙ ЭЛЕКТРОПОЛЕВОЙ ОБРАБОТКИ СИЛИКАТНОГО СТЕКЛА, ПОДВЕРГНУТОГО ПОЛИНГУ

Термический полинг стекол известен уже несколько десятилетий [1-3]. Процедура термического полинга заключается в приложении постоянного электрического напряжения к двум металлическим электродам, между которыми зажат нагретый образец стекла. По истечении некоторого времени образец охлаждают до комнатной температуры, а затем снимают приложенное напряжение. В результате проведенного процесса в образце формируется неравновесное состояние, в основном характеризующееся двумя изменениями – образованием объемного заряда [4,5] и ориентацией различных дипольных структур (полярных молекул, дефектов, нанокристаллитов) [6,7]. Одним из следствий этих изменений является нарушение исходной изотропии приповерхностной области стекла и возникновение в ней нелинейных оптических эффектов, в частности, генерация второй оптической гармоники (ГВГ). Однако, до сегодняшнего дня однозначно не выяснено, какой именно микроскопический механизм ответственен за появление нелинейности – электрическое поле объемного заряд или дипольный момент ориентированных диполей [8-10]. В настоящей работе показано, что в многокомпонентном силикатном стекле, подвергнутом термическому полингу, превалирующим механизмом ГВГ является ориентация диполей.

В работе использовалось многокомпонентное силикатное стекло марки *Menzel*, состав которого приведен в табл. 1.



Табл. 1. Состав стекла Menzel в вес. %

Рис. 1. Схема установки для *in-situ* измерения усиления сигнала ВГ в процессе дополнительной электрополевой обработки образца стекла, предварительно подвергнутого термическому полингу

<sup>&</sup>lt;sup>(•)</sup> И.В. Решетов, reshetov\_iv@spbstu.ru

Термический полинг проводился в воздушной атмосфере и в вакууме (~ 2·10<sup>-5</sup> мм.рт.ст.) при температуре 300 °C и напряжении 800 В в течение 30 мин. В качестве электродов использовались пластинки из нержавеющей стали размером 15х15 мм<sup>2</sup>.

После термического полинга образец подвергался дополнительной электрополевой обработке при *in-situ* измерении сигнала второй гармоники (ВГ) под углом падения лазерного луча 63°. Для этого образец стекла зажимался между двумя прозрачными (в видимой и ИК областях) пленками оксида индия-олова (*ITO*) толщиной 100 нм, напыленными на пластины стекла размером 75х25 мм<sup>2</sup>. Затем на *ITO*-электроды подавалось постоянное электрическое напряжение 1500 В. На рис. 1 представлена схема эксперимента, а на рис. 2 – измеренные динамические зависимости усиления сигнала ВГ.



Рис. 2. Усиление сигнала ВГ при угле падения лазерного луча 63° в процессе дополнительной электрополевой обработки образца стекла, предварительно подвергнутого термическому полингу

Из рис. 2 следует, что на образце исходного стекла, не подвергнутого полингу, усиления сигнала ВГ не наблюдается. При дополнительном электрополевом воздействии на образец стекла, предварительно подвергнутый термическому полингу, сигнал ВГ насыщается, что означает, что система стремится к квазиравновесному состоянию. Время достижения квазиравновесия при комнатной температуре составляет ~20 мин. При насыщении сигнал ВГ от образца, предварительно подвергнутого термическому полингу в вакууме, возрос примерно в 2 раза, а от образца, предварительно подвергнутого термическому полингу в термическому полингу в воздушной атмосфере – в 25 раз.

Подобное поведение не может быть объяснено проникновением в стекло дополнительных электрических зарядов из атмосферы, усиливающих электрическое поле, или смещением заряженных частиц внутри стекла, расширяющим область нелинейности, так как комнатной температуры не достаточно для активации ионного дрейфа в стекле (энергия активации дрейфа катионов  $Na^+$  составляет ~1 эВ и выше для других катионов). Таким образом, можно сделать вывод, что усиление сигнала ВГ связано с ориентацией дипольных структур. Этими структурами не могут быть адсорбирующиеся из атмосферы в процессе дополнительного электрополевого воздействия заряженные частицы или полярные молекулы, так как в этом случае динамика усиления ВГ была бы одинаковой в случае термического полинга в воздушной атмосфере и в вакууме. Различие этих динамик

свидетельствует о том, что сигнал ВГ генерируют дипольные структуры, проникшие в стекло в процессе термического полинга из воздушной атмосферы.

Работа выполнена при поддержке Минобрнауки РФ, проект FSRM-2023-0009.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Carlson D.E. Ion Depletion of Glass at a Blocking Anode: I, Theory and experimental results for alkali silicate glasses // J. Am. Ceram. Soc. – 1974. – Vol. 57. – P. 291-294.

2. Lepiensky C.M., Giacometti J.A., Leal Ferreira G.F., Freire F.L., Achete C.A. Electric field distribution and near-surface modifications in soda-lime glass submitted to a DC potential // J. Non. Cryst. Solids. – 1993. – Vol. 159. – P. 204-212.

3. Lo N.T., Nguyen H.N., Dao N.L., Hoang M.S. Combination of nonlinear optical properties in thermally poled germanotellurite glass-ceramics // Int. J. Appl. Glas. Sci. – 2022. – Vol. 13. – P. 235-243.

4. Bergot M.-V., Farries M.C., Fermann M.E., Li L., Poyntz-Wright L.J., Russel P.S.J., Smithson A. Generation of permanent optically induced second-order nonlinearities in optical fibers by poling // Opt. Lett. – 1988. – Vol. 13. – P. 592-594.

5. Stolen R.H., Tom H.W.K. Self-organized phase-matched harmonic generation in optical fibers // Opt. Lett. – 1987. – Vol. 12. – P. 585-587.

6. Rao K.J., Elliott S.R. Distribution of ionic charge carriers and migration barriers in binary alkali silicate glasses // Proc. Indian Acad. Sci. – 1994. – Vol. 106. – P. 903–911.

7. Mukherjee N., Myers R.A., Brueck S.R.J. Dynamics of second-harmonic generation in fused silica // J. Opt. Soc. Am. B. – 1994. – Vol. 11. – P. 665-669.

8. Kazansky P.G., Russel P.S.J. Thermally poled glass: frozen-in electric field or oriented dipoles? // Opt. Commun. – 1994. – Vol. 110. – P. 611-614.

9. Chen H.Y., Lin H.Y. Thermal poling induced second-order optical nonlinearity in phosphosilicate glass thin films // J. Mod. Opt. – Vol. 66. – P. 2053-2062.

10. Le Calvez A., Freysz E., Ducasse A. A model for second harmonic generation in poled glasses // Eur. Phys. J. D. – 1998. – Vol. 1. – P. 223-226.

## СЕКЦИЯ «ПРИКЛАДНАЯ МАТЕМАТИКА»

УДК 537.868

В.В. Давыдов<sup>1,2,3</sup>, Р.В. Давыдов<sup>1,3</sup>, А.А. Гольдберг<sup>1</sup>, К.Д. Кочетков<sup>1</sup> <sup>1</sup>Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого<sup>(•)</sup> <sup>2</sup>Санкт-Петербургский государственный университет телекоммуникаций им. проф. М. А. Бонч-Бруевича <sup>3</sup>Всероссийский научно-исследовательский институт фитопатологии

# ИССЛЕДОВАНИЕ ХАРАКТЕРА РАСПРОСТРАНЕНИЯ ЛАЗЕРНОГО ИЗЛУЧЕНИЯ В ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЙ КЮВЕТЕ АНДЕРСОНА

В современном мире при проведении научных исследований, промышленном производстве, экологическом мониторинге важным элементов становится надежный экспресс-контроль [1-7]. Применение экспресс-контроля необходимо для получения достоверной информации о состоянии среды в месте проведения пробы для принятия адекватного решения [2, 8-9]. Кроме того, необходимо в дальнейшем получить подтверждение выявленного отклонения в пробе на приборах высокого разрешения. В этом случае проведенные измерения в экспресс-режиме не должны внести в пробу среды необратимых изменений, которые изменят ее состав и физическую структуру [2]. С учетом этих условий количество методов и приборов для экспресс-контроля ограниченно [1, 2, 6]. Одним из приборов, который позволяет проводить экспресс-контроль состояния жидких сред с высокой точностью в месте взятия пробы, является рефрактометр. Высокие требования к проведению экспериментов, изготовление сложных сред, например, медицинских суспензий или лекарств для ввода в вены, требует измерений показателя преломления n<sub>m</sub> жидкой среды с высокой точностью в большом диапазоне изменения значений. Дифференциальный рефрактометр на основе кюветы Андерсона, для измерений в которой используется эталонная жидкость, один из возможных вариантов решения данных задач экспресс-контроля. Проблема проведения измерений n<sub>m</sub> с погрешностью 0.0001 в широком диапазоне изменения связаны с отсутствием соотношений между различными параметрами в конструкции рефрактометра и кюветы Андерсона. Это существенно ограничивает применение данного типа рефрактометра.

На рис. 1 представлено распространение лазерного излучения в кювете Андерсона и после выхода из нее до фоточувствительного сенсора фотодиодной линейки (сенсор расположен на расстоянии e от стенки кюветы). Использование фотодиодной линейки для регистрации лазерного излучения в рефрактометрах является в настоящее время оптимальным решением. В разработанной нами конструкции дифференциального рефрактометра [10] в отличие от ранее используемых для определения значения  $n_m$  предлагается использовать измеренное значение L (смещением максимума лазерного излучения на фотодиодной линейке от места ввода у на стенку кюветы Андерсона лазерного излучения). Погрешность измерения  $\delta n_m$  в данном случае будет определяться обеспечением регистрации максимума лазерного излучения на одном фоточувствительном сенсоре. Для обеспечения минимального значения  $\delta n_m$  необходимо установить зависимость между изменением L на фотодиодной линейке от параметров кюветы Андерсона, расстояния e, а также значений  $n_m$  и  $n_s$ . Для вывода уравнения и последующей проверки математических соотношений в контрольных точках, описание характера изменения смещения лазерного излучения на фотодиодной линейке было разделено на 4 части:  $L_1$ ,  $L_2$ ,  $L_3$  и  $L_4$  (фрагмент A,

<sup>&</sup>lt;sup>(•)</sup> А.А. Гольдберг, artemiy.goldberg@mail.ru

рис. 2). Для лазерного излучения в рассмотренном фрагменте A (рис. 2) можно записать соотношения между параметрами кюветы, позволяющие в дальнейшем выразить значения  $L_1$ ,  $L_2$ ,  $L_3$  и  $L_4$  через параметры кюветы Андерсона, расстояние e, а также значения показателей преломления эталонной  $n_s$  и исследуемой  $n_m$  жидкой среды.



Рис. 2. Кювета Андерсона и распространение лазерного излучения. Фрагмент А обозначает область, для которой выполняется вывод соотношения для определения *n<sub>m</sub>* 



Рис. 3. Фрагмент А, для которого выводится соотношение для определения n<sub>m</sub>

Выводится следующее соотношение для L:

$$\begin{split} \mathbf{L} &= \mathbf{L}_{1} + \mathbf{L}_{2} + \mathbf{L}_{3} + \mathbf{L}_{4} = \sin\alpha_{1} \Biggl( d\Biggl( 1 - \frac{\mathbf{n}_{s} \cos\alpha_{1}}{\sqrt{n_{q}^{2} - n_{s}^{2} \sin^{2}\alpha_{1}}} \Biggr) + \Biggl( \sqrt{n_{m}^{2} - n_{s}^{2} \sin^{2}\alpha_{1}} - \mathbf{n}_{s} \cos\alpha_{1} \Biggr) \times \\ &\times \Biggl( \frac{e}{\sqrt{n_{a}^{2} - \sin^{2}\alpha_{1} \left( n_{m}^{2} - n_{s}^{2} \sin^{2}\alpha_{1} + n_{s}^{2} \cos^{2}\alpha_{1} - 2n_{s} \cos\alpha_{1} \sqrt{n_{m}^{2} - n_{s}^{2} \sin^{2}\alpha_{1}} \right)} + \\ &+ \frac{d_{1}}{\sqrt{n_{q}^{2} - \sin^{2}\alpha_{1} \left( n_{m}^{2} + n_{s}^{2} \cos^{2}\alpha_{1} - n_{s}^{2} \sin^{2}\alpha_{1} - 2n_{s} \cos\alpha_{1} \sqrt{n_{m}^{2} - n_{s}^{2} \sin^{2}\alpha_{1}} \right)} + \\ &+ \frac{K_{1}}{\cos\alpha_{1} \sqrt{n_{m}^{2} - n_{s}^{2} \sin^{2}\alpha_{1}} + n_{s} \sin^{2}\alpha_{1}} \Biggr) \Biggr) \end{split}$$
(1)

Далее для вывода аналитического соотношения  $n_m$  (через параметры системы d, L,  $n_s$ , e,  $K_l$ ,  $d_l$ ,  $n_q$ ,  $\alpha_l$ ) (1) приводится к следующему виду:

$$\frac{A\sin\alpha_{1}}{f_{2}} = \frac{e}{\sqrt{n_{a}^{2} - f_{2}^{2}}} + \frac{d_{1}}{\sqrt{n_{q}^{2} - f_{2}^{2}}} + \frac{K_{1}}{f_{2}tg\alpha_{1} + n_{s}}, \left(\sqrt{n_{m}^{2} - n_{s}^{2}\sin^{2}\alpha_{1}} - n_{s}\cos\alpha_{1}\right)\sin\alpha_{1} = f_{2}$$
(2)

После различных преобразований разности левой и правой частей соотношения (2), его можно привести к полиному 12-й степени от  $f_2$  ( $f_2$  – это функция от  $n_m$ ), при его решении относительно  $f_2$  (нахождение корней полинома, то есть решение уравнения  $P(f_2) = 0$ ) получить соотношение для  $n_m$  через параметры системы.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Grebenikova N.M., Davydov R.V., Rud V.Yu. Features of the signal registration and processing in the study of liquid flow medium by the refraction method // Journal of Physics: Conference Series. -2019. -Vol. 1326 (1). - P. 012012

2. Davydov V.V. Determination of the Composition and Concentrations of the Components of Mixtures of Hydrocarbon Media in the Course of its Express Analysis // Measurement Techniques. – 2020. – Vol. 62 (2). – P. 1090-1098.

3. Nalimov A.G., Kozlova E.S. Inversion of the longitudinal component of spin angular momentum in the focus of a left-handed circularly polarized beam // Computer Optics. – 2020. – Vol. 44(5). – P. 699–706.

4. Kuzmin M. S., Rogov S. A. On the use of a multi-raster input of one-dimensional signals in twodimensional optical correlators // Computer Optics. – 2019. – Vol. 43 (3). – P. 391-396.

5. Zhukov A.E., Moiseev E.I., Nadtochii A.M., Zubov F.I., Maximov M.V. The Effect of Self-Heating on the Modulation Characteristics of a Microdisk Laser // Technical Physics Letters. – 2020. – Vol. 46 (6). – P. 515–519.

6. Marusina M.Y., Fedorov A.V., Prokhorovich V.E., Tkacheva N.V., Mayorov A.L. Development of Acoustic Methods of Control of the Stress-Strain State of Threaded Connections // Measurement Techniques. – 2018. – Vol. 61 (3). – P. 297–302.

7. Kruzhalov S.V., Vologdin V.A. Concerning some features of studying the flow of liquid media by a Doppler method // Journal of Optical Technology (A Translation of Opticheskii Zhurnal). – 2017. – Vol. 84 (8). – P. 568–573.

8. Myazin N.S., Smirnov K.J., Logunov S.J. Spectral characteristics of InP photocathode with a surface grid electrode // Journal of Physics: Conference Series. – 2017. – Vol. 929 (1). – P. 012080.

9. Marusina M.Y., Karaseva E.A. Automatic segmentation of MRI images in dynamic programming mode Asian Pacific // Journal of Cancer Prevention. – 2018. – Vol. 19 (10). – P. 2771–2775.

10. Karabegov M.A. On certain information capabilities of analytical instruments // Measurement Techniques. - 2012. - Vol. 54 (10). - P. 1203-1212

Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого<sup>(•)</sup>

## УЧЕТ ЯВЛЕНИЯ АДГЕЗИИ ПРИ РЕШЕНИИ КОНТАКТНОЙ ЗАДАЧИ

Введение. Адгезия – важное составляющее явление множества физических и технологических процессов [1]. Одним из таких является процесс сборки деформируемых конструкций, имеющий большую практическую значимость и в ряде случаев существенно зависящий от адгезивных явлений, требующий их учета и анализа. Моделирование подобного процесса должно в свою очередь учитывать упругую составляющую взаимодействия, условия контакта упругих тел, и, кроме того, составляющую адгезии. Одной из моделей адгезии, позволяющей учесть все перечисленные условия является модель Фремо [2, 3], описанию и анализу которой применительно к сборке конструкций посвящена настоящая работа.

Описание используемой модели. Рассмотрим постановку динамической контактной задачи линейной теории упругости для двух тел, редуцированную на интерфейс контактного взаимодействия, в дискретном виде [4, 5]

$$\begin{cases} M\ddot{u} + B\dot{u} + Ku = f, & Au \le g\\ u(0) = u_0, & \dot{u}(0) = v_0 \end{cases}$$
(1)

Здесь u- вектор нормальных перемещений в узлах пространственной дискретизации для двух тел, M, B, K, f- матрицы масс, демпфирования и жесткости и вектор узловых сил исследуемой системы, полученные дискретизацией контактной задачи. Отметим, что K и f исходя из построения агрегируют в себе граничные условия задачи теории упругости. Последнее неравенство системы определяет условия непроникновения контактной задачи (здесь g - начальный зазор). Кроме того, данная задача дискретизацией по времени сводима к серии задач квадратичного программирования [5]

$$\frac{1}{2}u_t^T D u_t - c_t^T u \xrightarrow[Au \le g]{} min$$
<sup>(2)</sup>

на каждом шаге по времени  $t = 0 \dots T$ . Здесь D – обобщенная матрица жесткости, c – обобщенный вектор сил. Такая постановка позволяет автоматически учитывать все остальные условия на границе контакта – условия отсутствия растягивающих сил и условия дополняющей нежесткости [5, 6]. Для учета адгезивной составляющей в рамках модели Фремо на контактной поверхности вводится сила адгезии  $\Psi$ , так, что

$$\begin{cases}
\Psi_{i} = C(g - Au)_{i}\beta_{i} \\
\dot{\beta}_{i} = -\frac{1}{b}[C(g - Au)_{i}^{2}\beta_{i} - w]^{+}
\end{cases}$$
(3)

где i – индекс узла дискретизации, а  $[x]^+ = \frac{x+|x|}{2}$ .  $\beta \in [0,1]$  называется интенсивностью адгезии, C – жесткостью адгезивного контакта, w – пределом энергии декогезии, b – вязкостью адгезии [2]. Тогда, используя неявный метод Эйлера, задачу (2) можно переписать в виде

$$\begin{cases} \frac{1}{2}u_t^T D u_t - (c_t + \Psi_t)^T u \xrightarrow{Au \leq g} min \\ \Psi_{i,t} = C(g - A u_{i,t})\beta_{i,t} \\ \beta_{i,t} = \beta_{i,t-1} - \frac{1}{b} \Big[ C(g - A u_{i,t})^2 \beta_{i,t} - w \Big]^+ \Delta t \end{cases}$$

$$(4)$$

<sup>&</sup>lt;sup>(•)</sup> А.О. Колосков, koloskovao2001@gmail.com

На каждом шаге по времени эту задачу можно рассматривать как задачу о неподвижной точке  $(u_t, \Psi_t)$  и решать ее с использованием разделенного подхода [7, 8], разбивая на две подзадачи - контактную задачу с известными силами адгезии и шаг неявного метода Эйлера с известными перемещениями, - решая каждую с использованием специализированных инструментов, итеративно обменивающихся информацией до достижения сходимости.

Согласно (3), сила адгезии  $\Psi$  пропорциональна величине текущего зазора g - Au и интенсивности адгезии  $\beta$ . В свою очередь, интенсивность адгезии может только убывать, причем скорость ее убывания также пропорциональна величине зазора и ее (интенсивности) значению в текущий момент. Механически модель можно описать введением дополнительных упругих волокон на разделе двух тел, сопротивляющихся их отдалению, и при этом имеющих свойство разрываться. В этой интерпретации интенсивность адгезии  $\beta$  характеризует количество целых волокон, а сила адгезии  $\Psi$  локально действует аналогично одномерной силе упругости. Отдельно заметим, что данная модель является эволюционной и потому не может быть встроена в модель статической контактной задачи. Кроме того, модель описывает эволюцию декогезии, или отклеивания, и не учитывает механику приклеивания.

Жесткость адгезивного контакта *C* в контексте модели с волокнами характеризует одновременно упругую жесткость и хрупкость волокон. Так, при достаточно малом параметре *C* силы адгезии малы, при этом интенсивность адгезии не убывает, и все волокна остаются целыми. При увеличении *C* с возрастанием возникающих сил ускоряется процесс разрыва волокон, вплоть до предельного случая, когда моментальный разрыв сопровождается большим сопротивлением. В отношении влияния параметра предела энергии декогезии *w* модель можно интерпретировать как упругопластическую – при малом зазоре имеем  $\dot{\beta}_l = 0$  и зависимость  $\Psi(g - Au)$  линейна до момента  $C(g - Au)^2\beta = w$ , который можно считать пределом пластичности. Параметр вязкости *b* определяет скорость разрыва нитей.

Постановка вычислительного эксперимента. Для демонстрации возможностей исследуемой модели адгезии были рассмотрены два модельных примера - одномерный колебательный процесс с липким препятствием и одномерный колебательный процесс двух тел с липким контактом. В первом эксперименте (рис. 1.а) мячик массой m на пружине жесткостью k покоится в положении y = B, находясь в контакте с липким препятствием. В начальный момент времени мячик оттягивается в положение  $y = y_0 < B$  и отпускается с нулевой начальной скоростью. Во втором эксперименте рассматриваются два мячика равной массы на пружинках одинаковой жесткости, расположенных в состоянии покоя, показанном на Рисунке 1.б. В начальный момент времени первый мячик оттягивается в положение  $y^{(1)} = y_0^{(1)} < y_0^{(2)}$  и отпускается с нулевой начальной скоростью. В обоих экспериментах предполагается  $\beta_0 = 0$ , а процесс прилипания реализуется условием  $\beta \mid_{Au=g} = 1$ . Тогда для первой задачи можем записать

$$\begin{cases} m\ddot{y} - k(B - y) = \Psi, & y \le B\\ \dot{\beta} = -\frac{1}{b} [C(B - y)^2 \beta - w]^+, & \Psi = C(B - y)\beta^2\\ y(0) = y_0, & \dot{y}(0) = 0, & \beta(0) = 0, & \beta|_{B-y=0} = 1 \end{cases}$$
(5)

Аналогичную постановку можно записать и для второй задачи.

Для сведения задач к виду (4) использовался обобщенный -метод [7]. Стоит отметить, что обыкновенная аппроксимация  $\ddot{y}$  конечной разностью в данных задачах приводит к значительному накоплению численной ошибки и неудовлетворительному результату.

Разделенный подход был реализован на основе метода простой итерации с условием выхода  $\Delta \Psi < \varepsilon$ . Время расчета для первой задачи равнялось 60 секундам, для второй - 15 секундам.



Рис. 1. Иллюстрации к постановкам а) первой задачи; б) второй задачи

Анализ результатов. На рис. 2 представлено поведение исследуемых динамических характеристик, - траектории (синим), скорости (зеленым) и сил адгезии (красным), - в колебательных процессах первой и второй задачи для различных значений параметрова жесткости адгезии *C*. Заметно, что в обеих задачах процесс ведет себя как процесс без учета адгезии как для малой (рис 2.а, г), так и для большой (рис 2.в, е) жесткости адгезии, так как для большой жесткости время действия сил адгезии стремится к нулю. Кроме того, следует отметить, что стационарный режим, соответствующий полному прилипанию (рис 2.б, д) наблюдается на сравнительно небольшом интервале параметра жесткости – в большинстве случаев сохраняются остаточные колебания.



Рис. 2. Результаты расчета динамических характеристик: а) І-я задача, малая жесткость; б) І-я задача, случай приклеивания; в) І-я задача, большая жесткость; г) ІІ-я задача, малая жесткость; д) ІІ-я задача, случай приклеивания; е) ІІ-я задача, большая жесткость

Заключение. Изложен подход к моделированию явления адгезии в ходе сборки конструкций, основанный на адаптации модели Фремо. Дано описание соответствующей схемы численного решения, в основе которой лежит разделенный подход. Полученные результаты численного решения модельных задач поддаются физическому объяснению, что позволяет надеяться на успешное применение предлагаемого подхода для решения практических задач.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Sauer R. A survey of computational models for adhesion // The Journal of Adhesion. -2016. -Vol. 92(2). -P. 81-120.

2. Raous M. Quasistatic Signorini problem with Coulomb friction and coupling to adhesion // CISM Courses and Lectures. – 1999. – Vol. 384. – P. 101-178.

3. Frémond M. Phase Change in Mechanics // Lecture Notes of the Unione Matematica Italiana. – 2012.– Vol. 48(2). – P. 109-114.

4. Wriggers, P. Computational contact mechanics // Springer, 2006.

5. Vasiliev, A., Minevich, O., Lapina, E., Shinder, J., et al. A Novel Approach to Dynamic Contact Analysis in the Course of Aircraft Assembly Simulation // Proceedings of the AeroTech Digital Summit. – 2021.

6. Stefanova, M., Minevich, O., Baklanov, S., Petukhova, M., et al. Convex Optimization Techniques in Compliant Assembly Simulation // Optimization and Engineering. – 2020. – Vol. 21(2). – P. 1665-1690.

7. Eliseev, A., Lupuleac, S., Grigor'ev, B., Shinder, J., et al. Numerical Simulation of Aircraft Assembly Process with Presence of Sealant // SAE Int. J. Adv. & Curr. Prac. in Mobility. – 2021.

8. Küttler, U., Wall, W. Fixed-point fluid-structure interaction solvers with dynamic relaxation // Computational Mechanics. – 2008. – Vol. 43. – P. 61-72.

УДК 519.61

Д.Д. Пестряков<sup>1</sup>, А.Н. Баженов<sup>1,2</sup>

<sup>1</sup>Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого<sup>(•)</sup> <sup>2</sup>Физико-технический институт им. А. Ф. Иоффе РАН

## РЕГУЛЯРИЗАЦИЯ ЗАДАЧ В АНАЛИЗЕ ДАННЫХ С ИНТЕРВАЛЬНОЙ НЕОПРЕДЕЛЕННОСТЬЮ ДЛЯ ДОСТИЖЕНИЯ СОВМЕСТНОСТИ В СИЛЬНОМ СМЫСЛЕ

Введение. Задача восстановления зависимостей является одной из основных задач статистики. Чаще всего данные для этой задачи представляются в виде  $(x_{1m}, x_{2m}, ..., x_{nm}, y_m)$ , где  $x_{im} \in \mathbb{R}, i = 1..n$  – входные значения, а  $y_m \in \mathbb{R}$  – выходное значение, m – номер измерения.

Если эти данные получены вследствие некоторого эксперимента, при повторном проведении эксперимента соответствующие измерения могут отличаться друг от друга. Это связано с погрешностью измерений. При этом, построенные зависимости также будут отличаться.

Чаще всего погрешность является ограниченной. Тогда можно перейти к рассмотрению интервальной выборки, где каждый ее элемент представлен конечными интервалами, внутри которых содержится истинное значение. Назовем каждое такое измерение брусом неопределенности. А в качестве решения задачи восстановления зависимости предъявлять коридор совместных зависимостей. То есть, семейство зависимостей, совместных с данными задачи.

Обзор литературы. В литературе [1-2] устоялись следующие термины. Под накрывающим брусом понимается брус, который гарантированно содержит истинные значения измеряемых величин входных и выходных переменных функциональной зависимости. Выборка является накрывающей, если все или большинство ее брусов являются накрывающими. Зависимость называется совместной с выборкой, если она пересекает каждый брус неопределенности данной выборки.

Методы восстановления функциональных зависимостей для случая накрывающей выборки и случая, когда выборка ненакрывающая, но содержит неопределенность только в выходном аргументе (то есть, входные аргументы являются вещественными числами) хорошо изучены и представлены, в том числе в [1-2]. Однако возникают задачи, для которых выборки являются ненакрывающими или же заранее неизвестно, что они накрывающие, а также содержат неопределенность во входном аргументе. Важным частным случаем данной задачи является построение зависимости, *совместной* с исходными данными *в сильном смысле*. То есть, значения функциональной зависимости целиком находятся внутри

<sup>&</sup>lt;sup>(•)</sup> Д.Д. Пестряков, pestryakovdanil@mail.ru

коридоров, задаваемых интервалами зависимой переменной при всех значениях ее независимых переменных из соответствующих им интервалов [2].

Цели и задачи работы. Методы регуляризации таких задач плохо изучены, поэтому представляют особый интерес. В случае, когда во входном аргументе отсутствует неопределенность, можно использовать метод варьирования неопределенностей [2]. То есть, расширять брусы неопределенности до достижения совместности с некоторой зависимостью. В данной работе исследуются модификации данного метода для достижения совместности в сильном смысле для брусов с интервальной неопределенностью во входном аргументе.

Исходные данные. Данная работа выполнена с использование данных, описывающих работу шагового двигателя. Шаговые двигатели широко распространены в промышленности, они исследовались, в частности, в экспериментальной работе [3]. Интерес представляет построение модели, прогнозирующей поведение шагового двигателя в точках неполного шага. Исходные данные представлены в табл. 1.

Номер	Bремя (ms)	Положение вала	Номер	Bремя (ms)	Положение вала	
измерения						
			измерения			
1	[59240; 59348]	[397,005; 400,995]	8	[34520; 34630]	[402,975; 407,025]	
2	[23820; 23924]	[413,920; 418,080]	9	[16770; 16880]	[415,910; 420,090]	
3	[41800; 41912]	[405,960; 410,040]	10	[16110; 16228]	[417,900; 422,100]	
4	[59110; 59228]	[395,015; 398,985]	11	[34080; 34196]	[411,930; 416,070]	
5	[35500; 35618]	[403,970; 408,030]	12	[49860; 49978]	[398,995; 403,005]	
6	[17660; 17772]	[414,915; 419,085]	13	[51300; 51412]	[396,010; 399,990]	
7	[63970; 64086]	[388,050; 391,950]	14	[42580; 42696]	[404,965; 409,035]	

Табл. 1. Исходные данные

Методы исследования. В методе варьирования неопределенностями мы должны расширить исходные брусы. Однако расширять их до бесконечности не имеет смысла. Таким образом, нужно поставить некие разумные ограничения на весовые коэффициенты. В ходе работы были поставлены и с помощью пакета прикладных программ MATLAB были решены следующие задачи оптимизации:

$$\begin{cases} mid(\mathbf{y}_{i}) - \omega_{i} * rad(\mathbf{y}_{i}) \leq \beta_{1} + \beta_{2} * \frac{\mathbf{x}_{i}}{\mathbf{x}_{i}} \leq mid(\mathbf{y}_{i}) + \omega_{i} * rad(\mathbf{y}_{i}) \\ mid(\mathbf{y}_{i}) - \omega_{i} * rad(\mathbf{y}_{i}) \leq \beta_{1} + \beta_{2} * \frac{\mathbf{x}_{i}}{\mathbf{x}_{i}} \leq mid(\mathbf{y}_{i}) + \omega_{i} * rad(\mathbf{y}_{i}) \\ \sum_{i=1}^{n} \omega_{i} \rightarrow min \\ \omega_{i} \geq 1, i = 1 \dots n, \beta_{1} \bowtie \beta_{2} - ? \end{cases}$$

$$(1)$$

$$\begin{cases} mid(\mathbf{y}_{i}) - \omega_{i} * rad(\mathbf{y}_{i}) \leq \beta_{1} + \beta_{2} * \frac{\mathbf{x}_{i}}{\mathbf{x}_{i}} \leq mid(\mathbf{y}_{i}) + \omega_{i} * rad(\mathbf{y}_{i}) \\ mid(\mathbf{y}_{i}) - \omega_{i} * rad(\mathbf{y}_{i}) \leq \beta_{1} + \beta_{2} * \frac{\mathbf{x}_{i}}{\mathbf{x}_{i}} \leq mid(\mathbf{y}_{i}) + \omega_{i} * rad(\mathbf{y}_{i}) \\ \sum_{i=1}^{n} rad(\mathbf{x}_{i}) * \omega_{i} \rightarrow min \\ \omega_{i} \geq 1, i = 1 \dots n, \beta_{1} \lor \beta_{2} - ? \end{cases}$$

$$(2)$$

 $\begin{cases} mid(\mathbf{y}_{i}) - \omega_{i} * rad(\mathbf{y}_{i}) \leq \beta_{1} + \beta_{2} * mid(\mathbf{x}_{i}) - \gamma_{i} * \beta_{2} * rad(\mathbf{x}_{i}) \leq mid(\mathbf{y}_{i}) + \omega_{i} * rad(\mathbf{y}_{i}) \\ mid(\mathbf{y}_{i}) - \omega_{i} * rad(\mathbf{y}_{i}) \leq \beta_{1} + \beta_{2} * mid(\mathbf{x}_{i}) + \gamma_{i} * \beta_{2} * rad(\mathbf{x}_{i}) \leq mid(\mathbf{y}_{i}) + \omega_{i} * rad(\mathbf{y}_{i}) \\ i = 1..n \\ \sum_{i=1}^{n} \gamma_{i} * \omega_{i} \rightarrow min \end{cases}$ (3)

 $\omega_i \geq 1, \gamma_i \geq 1$  ,  $i=1\dots n,\ \beta_1$ и  $\beta_2$  находятся по МНК для центров брусов

$$\begin{cases} mid(\mathbf{y}_{i}) - \omega_{i} * rad(\mathbf{y}_{i}) \leq \beta_{1} + \beta_{2} * \frac{\mathbf{x}_{i}}{\mathbf{x}_{i}} \leq mid(\mathbf{y}_{i}) + \omega_{i} * rad(\mathbf{y}_{i}) \\ mid(\mathbf{y}_{i}) - \omega_{i} * rad(\mathbf{y}_{i}) \leq \beta_{1} + \beta_{2} * \frac{\mathbf{x}_{i}}{\mathbf{x}_{i}} \leq mid(\mathbf{y}_{i}) + \omega_{i} * rad(\mathbf{y}_{i}) \end{cases} i \notin mode$$

$$\begin{cases} \underline{y_m} \leq \beta_1 + \beta_2 * \underline{x_i} \leq \overline{y_m} \\ \underline{y_m} \leq \beta_1 + \beta_2 * \overline{x_i} \leq \overline{y_m} \\ \sum_{i=1}^n rad(x_i) * \omega_i \to min \end{cases}$$
(4)  
$$\omega_i \geq 1, i \notin mode \text{ (индексы брусов, содержащих интервальную моду), } \beta_1 \text{ и } \beta_2 - ?$$

Качество построенной модели оценивалось с помощью следующего функционала качества:  $T(w) = \sum_{w_i \in w} \frac{w_i}{n}$ , где w – вектор полученных весов, n – число измерений. Функционалы качества для задач (1)-(4) равны 1.3109, 1.3109, 1.3194, 5.1086 соответственно. Отметим, что в задаче (3)  $\gamma$  является единичным вектором, поэтому функционал качества приведен только для вектора  $\omega$ . На рис. 1 приведена геометрическая интерпретация решения задачи (4) для первых 9 измерений.



Рис. 1. Геометрическая интерпретация решения задачи (4)

Выводы. Исходя из значений функционала качества, можно сделать вывод, что решения задач (1)-(3) для исходных данных близки друг к другу. И так как в задаче (3) вектор  $\gamma$  единичный, то возникает гипотеза, что расширение неопределенности во входном аргументе только ухудшает решение.

Совокупность параметров регрессии для задачи (4) составляют величины  $\beta_1 = 4.1622e + 02$ ,  $\beta_2 = -9.1817e - 06$ , а для задачи (3), к примеру,  $\beta_1 = 4.2786e + 02$ ,  $\beta_2 = -5.3744e - 04$ . Меньший наклон прямой в (4) связан с тем, что мода встречается лишь в 4 из 14 брусов и имеет радиус 0.16.

Чем чаще встречается мода, тем меньше брусов пришлось бы растягивать. Однако, исходя из геометрических соображений, количество прямых, которые могли бы пройти через моду, стало бы меньше. Тогда часть брусов можно было бы принять в качестве выбросов.

Если же мода достаточно широка по ординате, но встречается редко, то количество прямых, которые могли бы пройти через моду, увеличилось бы, что также вытекает из геометрических соображений. Таким образом, задачу (4) имеет смысл рассматривать, если мода встречается часто или имеет широкий размах по ординате.

Замечание. Из совместности в сильном смысле вытекает, что регрессионная прямая должна пройти через обе вертикальные границы каждого бруса. Если взять один брус, то чем шире его границы по ординате, тем больше комбинаций параметров регрессии можно для него рассмотреть.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Баженов А.Н. Примеры обработки измерений постоянной величины в анализе данных с интервальной неопределенностью. – СПб., 2023. – 106 с.

2. Баженов А.Н., Жилин С.И., Кумков С.И., Шарый С.П. Обработка и анализ данных с интервальной неопределенностью. РХД. Ижевск. 2022. – 227 с.

3. Ермаков Н.В., Баженов А.Н., Смирнов А.Н., Толстяков С.Ю. Стенд для испытаний шаговых двигателей. Приборы и техника эксперимента. 2021. – №1. – С. 151-152.

УДК 004.932

Д.В. Сердюков, К.Н. Козлов

Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого<sup>(•)</sup>

## АВТОПРОГРАММИРОВАНИЕ И АННОТИРОВАНИЕ СЦЕНАРИЕВ ОБРАБОТКИ ИЗОБРАЖЕНИЙ В БИОИНФОРМАТИКЕ

Введение. Применение методов обработки изображений в биоинформатике приобретает все большую значимость в современных исследованиях. Однако, создание, изменение и последующее использование пользовательских сценариев обработки изображений часто являются трудоемкими и сложными задачами, которые требуют значительных знаний в области программирования и анализа изображений.

Проблемы при использовании сценариев обработки изображений. Пользовательские сценарии обработки изображений в биоинформатике могут содержать множество операторов, таких как фильтры, сегментация, морфологические операции, выравнивание и прочие. Такие сценарии могут быть созданы на основе различных фреймворков, например:

• ImageJ – свободно распространяемый фреймворк с открытым исходным кодом, который имеет множество плагинов для анализа и обработки изображений в биологических и медицинских приложениях [3].

• CellProfiler — еще один свободно распространяемый фреймворк с открытым исходным кодом, который разработан для автоматизации анализа изображений клеток и тканей [4].

• BioImageXD — фреймворк с открытым исходным кодом для обработки, анализа и визуализации трехмерных биологических изображений [5].

• OpenCV — это один из наиболее распространенных фреймворков для обработки изображений в целом, в том числе и в биоинформатике [6].

• ProStack — платформа для обработки и анализа изображений. Она реализует различные методы обработки изображений в виде отдельных модулей, которые могут быть объединены в сложный сценарий обработки изображений с помощью графического интерфейса пользователя [7].

На сегодняшний день существует проблема быстрой адаптации сценариев, которые создаются вручную, под новые изображения, это происходит из-за невозможности стандартизации процесса сбора данных [1]. Очень часто на схожих изображениях одного и того же образца, например глаза дрозофилы, запущенный сценарий выдаст совершенно

<sup>&</sup>lt;sup>(•)</sup> Д.В. Сердюков, serdyukov2.dv@spbstu.ru

разные результаты. Потому что данные для исследования подготавливаются вручную, существуют погрешности оборудования и прочие факторы, которые непосредственно влияют на качество результата. Почти все современные фреймворки стремятся к использованию графического интерфейса, что может быть неудобно для быстрого редактирования сценария или его запуска на выделенном сервере. Создание системы, которая сможет представить сценарий обработки изображения в удобном для редактирования виде, а также сможет автоматически генерировать пояснения для каждого оператора: что он делает и как взаимодействует с другими, могло бы значительно ускорить и упростить процесс обработки изображений.

Цели и задачи системы. Цель данной работы заключается в разработке системы, которая сможет на основе сценария автоматически генерировать программный код для задач обработки биологических изображений, предоставляя поясняющие аннотации, чтобы помочь пользователям понять сгенерированный код, обмениваться ими с коллегами, использовать как основу в публикациях. Одной из основных задач нашей системы является упрощение процесса изменения и доработки таких сценариев, что является не менее трудоемким и сложным процессом, чем их создание. Также, немаловажной задачей является преобразование последовательного набора операторов, описанных в сценарии, к параллельному виду для ускорения обработки изображений.

Архитектура и описание работы системы. Система использует локальную базу данных, где собрана необходимая информация о каждом операторе. На данный момент в базу включены все операторы из ProStack и несколько основных из ImageJ и OpenCV. В перспективе, при наличии информации о большем числе операторов, система сможет принимать решение об использовании более оптимального варианта. На основе данной базы формируется библиотечный файл, методы которого вызываются из исполняемых файлов.

В качестве входных данных система будет получать изображения, которые требуется обработать, и сценарий их обработки. После чего сценарий поступает на модуль чтения, где он преобразуется в связный ациклический граф, каждый узел которого представляется в программе как объект класса Node (рис. 1), а вместе узлы представлены в виде двусвязного списка.

Node
+ num_node: int + in_nodes + out_nodes + serial_num: int
+eq(self, other):

Рис. 1. Диаграмма класса Node

Исполняемый код, создаваемый в процессе работы, проверяет согласованность входных и выходных данных, количество параллельных операций и порядок их выполнения, в основе этого лежит алгоритм топологической сортировки [8]. Также существует механизм оптимального управления параллельными потоками, как на уровне реализуемой программы, так и на уровне используемых библиотек или другого программного обеспечения. Стоит отметить, что код сценария представляется в кратком и емком виде, это делает его легким для понимания, снижает риск ошибок при ручной настройке параметров под новые данные. После завершения формирования файла с исполняемым кодом формируется дополнительный текстовый файл с аннотацией к сценарию. Предполагается, что данный файл является основой для создания связного текста с использованием современных генеративных модели класса GPT-3.5 [2].

Заключение. Несмотря на значимость методов обработки изображений, существующие решения для обработки изображений не могут быстро адаптироваться под разные изображения, проблема автоматического аннотирования сценария и вовсе оставалась без внимания. Наша система предлагает эту функциональность, а также дополнительные возможности, такие как параллельный запуск сценариев и генерация связного текста. В целом, разработка системы для автоматической генерации кода и аннотации к сценариям обработки изображений в биоинформатике позволяет значительно ускорить процесс исследований и снизить затраты на их проведение.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Kozlov K. N., P. Baumann, J. Waldmann, и M. G. Samsonova. «TeraPro, a System for Processing Large Biomedical Images». Pattern Recognition and Image Analysis 23, вып. 4 (декабрь 2013 г.): 488–97. https://doi.org/10.1134/S105466181304007X.

2. ChatGPT3.5 - a large language model for natural language processing // OpenAI URL: <u>https://openai.com/blog/chatgpt</u> (дата обращения: 02.02.2023).

3. ImageJ – official page // ImageJ URL: https://imagej.nih.gov/ij/ (дата обращения: 04.10.2022)

4. CellProfiler – cell image analysis software // CellProfiler URL: <u>https://cellprofiler.org/about</u> (дата обращения: 04.10.2022)

5. BioImageXD – official page // BioImageXD URL: https://www.bioimagexd.net/ (дата обращения: 04.10.2022)

6. OpenCV – Open Source Computer Vision // OpenCV URL: <u>https://docs.opencv.org/4.7.0/da/df6/tutorial\_py\_table\_of\_contents\_setup.html</u> (дата обращения: 04.10.2022)

7. ProStack - a platform for image processing and analysis // SourceForce URL: <u>https://sourceforge.net/projects/prostack</u> (дата обращения: 20.07.2022)

8.АлгоритмтопологическойсортировкиКана//TechieDelightURL:https://www.techiedelight.com/ru/kahn-topological-sort-algorithm(дата обращения: 20.11.2022)

УДК 51-76

В.А. Михальчук, К.Н. Козлов

Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого<sup>(•)</sup>

## РАЗРАБОТКА МОДЕЛИ УЧЕТА ГЕОГРАФИЧЕСКИХ И ГЕНЕТИЧЕСКИХ ФАКТОРОВ ДЛЯ ПРОГНОЗИРОВАНИЯ ФЕНОТИПИЧЕСКИХ ПРИЗНАКОВ РАСТЕНИЙ С ПОМОЩЬЮ ДЕКАРТОВА ГЕНЕТИЧЕСКОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

*Введение*. В последнее время в биоинформатике все чаще применяют методы машинного обучения к анализу биологических данных, например, используя генетическое программирование для решения задач символьной регрессии.

Предсказание фенотипа растения по климату и генотипу – очень важная задача современной агрономии. Такие прогнозы помогают селекционерам выводить новые сорта, обладающие нужными им качествами. Основной метод таких предсказаний – регрессионный анализ. Символьная регрессия – перспективный вид регрессионного анализа, позволяющий получать более качественные модели путем увеличения пространства поиска и подбора

<sup>&</sup>lt;sup>(•)</sup> В.А. Михальчук, valy378@gmail.com

аналитического вида функции с помощью некоторого метода оптимизации. Используя метод грамматической эволюции, в работах [1] и [2] были построены модели времени цветения нута, важного сельскохозяйственного растения. Время цветения является важным фенотипическим признаком, связанным с продуктивностью.

В работе [3] был предложен другой подход к построению функции регрессии – декартово генетическое программирование. Для прогнозирования фенотипа по климатическим данным с помощью символьной регрессии важно иметь возможность использовать в регрессионной функции константы, ограничивающие такие предикторы как, например, температуру. Однако, в распространенных реализациях этого метода либо отсутствует поддержка констант вообще, либо эти константы реализованы в виде «эфемерных констант», применение которых для некоторых задач затруднительно.

*Цель* настоящей работы – применить декартово генетическое программирование для создания модели предсказания фенотипических признаков нута, предложив и реализовав при этом решение проблемы внедрения констант.

Данные. В качестве данных для обучения модели были взяты различные признаки для образцов нута с Кубанской опытной станции ВИР и Астраханской опытной станции ВИР, посаженных в 2016, 2017 и 2022 годах. Данные признаки включают в себя № каталога ВИР, происхождение, дату посева, начала всходов, полных всходов, начала цветения, полного цветения, конца цветения, начала созревания, полного созревания, различные характеристики цветка, стебля, куста. Климатические данные были загружены из NNDC Climate Data on-line.

*Методы*. CGP-Library — это кроссплатформенная реализация декартова генетического программирования, разработанная так, чтобы быть простой в использовании и в то же время легко расширяемой [4]. В этой библиотеке используются частный случай схемы декартова генетического программирования, которая представлена в виде вычислительного графа.

В настоящей работе предложен и реализован подход для учета констант, путем введения новых элементарных операций и сохранения массива констант размера наших входных данных для каждой хромосомы.

Во время очередной мутации хромосомы будем изменять константы  $C_k$  по формуле:  $C_k = sigmoid(t_k),$ где вспомогательная переменная  $t_k$ определяется как  $t_k := t_k + \alpha * Uniform(-1,1)$ , Uniform(-1,1) – равномерное распределение из отрезка [-1,1]. Параметр α отвечает за величину мутации константы. Так же задаются начальные значения для  $t_k$  и параметры сигмоиды (сдвиг по оси у и масштаб). Заметим также, что композиция функций лишь усложняет формулу, а если к тому же известно, что в искомой формуле находится комбинация некоторых законов по отдельности, то композиция таких законов будет иметь мало смысла. Поэтому при мутации хромосомы предложенный алгоритм следит, куда подставляется переменная – если она подставляется в интересующий наш закон, то эта переменная не должна приходить из другой функции. Таким образом значительно упрощается вид получаемых формул.

Для построения модели на данных по нуту в качестве целевой переменной была взята разница между полным созреванием и началом всходов (в днях). Были выбраны следующие примитивы: сложение, разность, умножение, деление, х-С, 1/(х-С), где С - константа.

*Результаты*. Была проведена кросс-валидация. Для начала была выделена 1/7 часть от всех данных, предназначенная для валидации. Далее оставшиеся данные разбивались на 4 части и каждый раз удерживалась одна часть для тестирования, а остальные части выступали в роли обучающей выборки. Такие разбиения проводились 10 раз.

Были построены распределения ошибок на обучающей и тестовой выборке. Для проверки гипотезы о наличии переобучения алгоритма был применен критерий Манна-Уитни, который опроверг данную гипотезу на уровне 10% (p-value=0.24). Лучшая модель показала следующий результат. R<sup>2</sup> на тестовой выборке:0.61, средняя ошибка на тестовой выборке: 3.5 дня, максимальная ошибка на тестовой выборке: 11 дней, средняя ошибка на обучающей выборке: 5 дней, средняя ошибка на валидационной части: 4.4 дня, максимальная ошибка на валидационной части: 14 дней.

Обсуждение результатов. В результате проведенной работы было показано, что метод декартова генетического программирования с предложенными улучшениями действительно решает задачу символьный регрессии для предсказания фенотипических признаков нута, находя при этом не только итоговую формулу, но и константы. По результатам кроссвалидации была выбрана наилучшая модель со средней ошибкой на тестовых данных 3.5 дня, что является неплохим результатом. Однако, есть возможности и для улучшения результата. В частности, было замечено, что данная модель слабо учитывает происхождение образцов нута – включение данного признака может значительно улучшить предсказание. Чтобы учитывать данный признак, предлагается следующая идея – итоговая модель ищется как сумма средней модели (полученной с помощью текущего подхода) и произведения двух моделей, одна из которых будет включать в себя только погодные признаки, а другая – признаки происхождения.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Ageev A., Aydogan A., Bishop-von Wettberg E., Nuzhdin S.V., Samsonova M., Kozlov K. Simulation Model for Time to Flowering with Climatic and Genetic Inputs for Wild Chickpea // Agronomy. – 2021. – P. 1389 - 1392

2. Kozlov K., Singh A., Berger J. et al. Non-linear regression models for time to flowering in wild chickpea combine genetic and climatic factors // BMC Plant Biol. – 2019. – P. 94 - 96

3. Miller J.F. Cartesian Genetic Programming: Its Status and Future // Genetic Programming and Evolvable Machines. – 2020. – Vol.21. – P. 129-198

4. Turner A.J., Miller J.F. Introducing A Cross Platform Open Source Cartesian Genetic Programming Library // The Journal of Genetic Programming and Evolvable Machines. – 2014. – P.89-94

УДК 519.248

В.Е. Бакшеев, О.И. Заяц

Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого<sup>(•)</sup>

# ИССЛЕДОВАНИЕ ВЛИЯНИЯ ПРОФИЛАКТИКИ В ПРИОРИТЕТНЫХ СИСТЕМАХ ОБСЛУЖИВАНИЯ С ДЕТЕРМИНИРОВАННЫМ ВЫТАЛКИВАЮЩИМ МЕХАНИЗМОМ

С развитием теории массового обслуживания (ТМО) появилась возможность исследовать более сложные системы с различными модификациями. В последнее время большое внимание уделяется системам, допускающим периодические отключения каналов обслуживания. При этом различают как катастрофические неконтролируемые отказы, полностью выводящие систему из строя, так и временные, сознательно вводимые отключения на профилактику (или же прогулки, каникулы) каналов обслуживания, обозначаемые английским термином vacation.

С практической точки зрения весьма интересна задача эффективного использования такого рода простоев системы. В настоящей работе рассматривается случай, когда периоды профилактики системы обслуживания начинаются в моменты ее полного освобождения от требований и продолжаются некоторое случайное время. Целью работы является исследование влияния такой дисциплины обслуживания на поведение системы [1-3].

<sup>&</sup>lt;sup>(•)</sup> В.Е. Бакшеев, yaming2110@gmail.com



Рис. 1. Схема СМО класса  $\overline{M_2}/M/1/k/f_2^2/V_M$ 

Исследуется система, принадлежащая к классу  $\overline{M_2}/M/1/k/f_2^2/V_M$  по стандартной нотации Д. Кендалла [4] в модификации Г.П. Башарина [5] и Б.Доши [6]. Ее общая схема представлена на рисунке 1. Требования первого типа имеют абсолютный приоритет, если по окончанию профилактики новых требований не пришло, система уходит на новую профилактику, которая может повторяться многократно.

С помощью метода производящих функций [7] для рассматриваемой СМО были найдены финальные вероятности состояний. С их помощью можно получить такие наиболее важные для практических задач характеристики, как вероятности потерь обоих типов требований, а также вероятность проведения профилактики.

Вероятности потери требований обоих типов слабо зависят от факта наличия профилактики. В основном число потерь определяется степенью загруженности системы. Графики вероятностей потери требований представлены на рис. 2.

На рис. 3 изображена зависимость вероятности проведения профилактики от суммарной интенсивности прихода требований, а также от интенсивности самой профилактики.



Рис. 2. Вероятность потери требований первого и второго типа в зависимости от интенсивностей прихода требований обоих типов



Рис. 3. Вероятность проведения профилактики в зависимости от загрузки системы и интенсивности проведения профилактики

Можно отметить ряд характерных особенностей представляемых графиков:

- 1. Если интенсивность проведения профилактики равна нулю, то единожды зайдя на профилактику, система с нее уже не выйдет, а потому вероятность проведения профилактики будет равна единице.
- 2. Если интенсивность проведения профилактики близка к нулю, а загрузка системы меньше единицы, то наблюдается плавное нелинейное уменьшение вероятности проведения профилактики с ростом общей загрузки.
- 3. Если интенсивность проведения профилактики отлична от нуля, а загрузка системы меньше единицы, то имеем близкое к линейному уменьшение вероятности профилактики с ростом общей загрузки.
- 4. Загрузка системы, близкая к единице, влечет нелинейное уменьшение вероятности профилактики с ростом общей загрузки.
- 5. При загрузке системы, большей единицы, вероятность проведения профилактики стремится к нулю.

Рассмотренная в данной работе модификация СМО является практически значимой, а ее исследование является важной прикладной задачей. Получен ряд важных результатов, которые могут найти применение при расчете реальных систем. Показано, что метод производящих функций, использовавшийся ранее для других систем [7], сохраняет свою силу и при профилактических остановках системы.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Вишневский В. М. Теоретические основы проектирования компьютерных сетей. — М.: Техносфера, 2003. — 512 с.

2. Заяц О.И., Заборовский В.С., Мулюха В.А., Вербенко А.С. Управление пакетными коммутациями в телематических устройствах с ограниченным буфером при использовании абсолютного приоритета и вероятностного выталкивающего механизма. Часть 1 // Программная инженерия.— 2012. — № 2. — С. 22—27.

3. Заяц О.И., Заборовский В.С., Мулюха В.А., Вербенко А.С. Управление пакетными коммутациями в телематических устройствах с ограниченным буфером при использовании абсолютного приоритета и вероятностного выталкивающего механизма. Часть 2 // Программная инженерия.— 2012. — № 3. — С. 21—29.

4. Кендалл Д. Стохастические процессы, встречающиеся в теории очередей, и их анализ методом вложенных цепей Маркова // Математика. — 1959. — Т. 3, № 6. — С. 97—111.

5. Башарин Г. П. Некоторые результаты для системы с приоритетом // Массовое обслуживание в системах передачи информации. М.:Наука. — 1969. —С. 39—53.

6. Doshi B. Queueing systems with vacations - a survey // Queueing systems. —1986. —Vol. 1, no. 1. — P. 29–66.

7. Ильяшенко А. С. Модели и метод исследования приоритетных систем массового обслуживания с вероятностным выталкивающим механизмом. Кандидатская диссертация. — СПб: СПбГПУ, 2015. — 150 с.

С.В. Божокин, А.А. Рябоконь, Т.Д. Шохин Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого<sup>(•)</sup>

## ИССЛЕДОВАНИЕ СПЕКТРАЛЬНЫХ СВОЙСТВ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ ГАУССОВСКИХ ПИКОВ ПРИ МОДЕЛИРОВАНИИ ТУРБУЛЕНТНОСТИ СЕРДЕЧНОГО РИТМА

Введение. Турбулентность сердечного ритма (HRT - Heart Rate Turbulence) - краткосрочные флуктуации длительностей RR-интервалов ритма сердца, вызванных единичными преждевременными сердечными сокращениями – экстрасистолами. Одна из важных задач современной медицины – выявление на ранних стадиях угрожающих жизни пациентов эффектов, таких как аритмии сердца или фибрилляции желудочков и предсердий. Стандартный способ диагностики – мониторирование ЭКГ по Холтеру для выявления показателей HRT: начало турбулентности (*TO* - Turbulence Onset) и наклон турбулентности (*TS* - Turbulence Slope). Однако при использовании данных показателей не учитывается продолжительность самой экстрасистолы  $RR_{ext}$  и продолжительность компенсаторной паузы  $RR_{cp}$ .

*Цель исследования*. Применить теорию вейвлетов для нахождения количественных параметров описания нестационарной последовательности гауссовских пиков, учитывающих нарушение периодичности между пиками, на примере моделирования турбулентности сердечного ритма.

Методы исследования. По требованиям стандарта ВСР все переходные процессы должны быть удалены из ритмограмм. Однако именно в переходных этапах часто содержится наиболее ценная информация о динамике изменения работы сердца. Поэтому применяется метод непрерывного вейвлет-преобразования (СWT) для анализа динамики изменений спектральных свойств нестационарного сигнала.

Была предложена модель нестационарного сигнала, представляющая собой суперпозицию отдельных гауссовских пиков одинаковой амплитуды, центры которых расположены в произвольные моменты времени t[n], n = 0,1,2..., N (рис. 1). Для такой модели с сильным нарушением периодичности следования гауссовских пиков получено аналитическое выражение для непрерывного вейвлетного преобразования (рис. 2). Предполагается, что сердечный ритм, обладающий турбулентностью, может быть описан данной моделью, где центры гауссовских пиков на временной шкале совпадают с истинными моментами ударов сердца t[n+1] = t[n] + RR[n+1], где RR[n+1]- интервалы между ударами сердца. Рассматриваются различные виды нестационарных сигналов, состоящих из гауссовских пиков, соответствующие разным моделям нарушения нормального сердечного ритма.

Результаты исследования. С помощью непрерывного вейвлетного преобразования вычислена функция Fmax(t), описывающая поведение локальной частоты во всем промежутке времени, содержащем экстрасистолу и компенсаторную паузу (рис. 3). Усредненные по времени характеристики Fmax(t) сравниваются с такими традиционными параметрами *HRT*, как начало турбулентности (*TO*) и наклон турбулентности (*TS*). Предлагаемый метод расчета Fmax(t) может быть применен для анализа нестационарной ритмограммы для пациентов, страдающих аритмиями сердца, сердечной недостаточностью или фибрилляцией желудочков сердца и предсердий.

<sup>&</sup>lt;sup>(•)</sup> Рябоконь А.А., ryabokonaa@mail.ru



Рис. 1. Зависимость от времени Z(t) сигнала, представляющего собой сумму четырнадцати гауссовских пиков, имеющих одинаковую форму, расположенных в моменты времени так, чтобы интервалы времени между пиками совпадали с RR-интервалами сердечного ритма с выраженной экстрасистолией. Интервал между пиками 3 и 4 представляет саму экстрасистолу RR<sub>ext</sub>, интервал между пиками 4 и 5 представляет компенсаторную паузу RR<sub>ср</sub>



Рис. 2. Зависимость CWT  $|V(v, t)|^2$  от частоты v, Hz и времени t, s для последовательности гауссовских пиков сигнала Z(t) (рис. 1)



Рис. 3. Форма кривой максимальной частоты Fmax(t), характеризующая протяженность экстрасистолы и наличие компенсаторной паузы

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Божокин, С.В. Введение в теорию непрерывного вейвлетного преобразования. СПб., Книжное издательство «Страта», http://www.strata.spb.ru, 2020, — 160 с.

2. Божокин, С.В. Основы теории обработки биомедицинских сигналов : учеб. пособие / С.В. Божокин, И.Б. Суслова. — СПб. : Изд-во Политехн. ун-та, 2016. – 152 с.

3. Диагностика и лечение фибрилляции предсердий [Текст] : уч. пособие / Под ред. Э. М. Идова; ФГБОУ ВО УГМУ Минздрава России. — Екатеринбург : Изд-во УГМУ, 2017. — 64 с.

4. Мурашко, В. В., Струтынский, А. В. Электрокардиография: учебн. пособие. – 17-е изд. – Москва: МЕДпресс-информ, –2021. – С. 138–171.

5. Соколова, А.А. Метод и алгоритмы обработки электрокардиосигнала для выявления эпизодов желудочковых экстрасистол: автореф. дис. ... канд. тех. наук : 05.11.17 / Соколова Анастасия Александровна; СПбГЭТУ «ЛЭТИ». - Санкт-Петербург, 2019.

6. Acharya, U.R., M. Sankaranarayanan, M., Nayakc, J., Xiang, Ch., Tamura, T.//Automatic identification of cardiac health using modeling techniques: A comparative study. Information Sciences. – 2008. –V.178.– P.4571–4582.

7. Filos, Dimitrios et al. //Beat-to-beat P-wave morphology as a predictor of paroxysmal atrial fibrillation. Computer methods and programs in biomedicine. -2017. -V. 151 -P. 111-121.

8. Kim, J, Min, S.D, Lee, M.// An arrhythmia classification algorithm using a dedicated wavelet adapted to different subjects. Biomed. Eng. Online. -2011. -V.20. -P.56 - 56.

9. Serhal, H., Abdallah, N, Marion, J.M., Chauvet, P., Oueidat, M., Humeau-Heurtier, A.// Overview on prediction, detection, and classification of atrial fibrillation using wavelets and AI on ECG. Comput. Biol. Med. –2022.–V. 142, P105168.

## Т.О. Яворук<sup>1</sup>, А.Н. Баженов<sup>2,3</sup> <sup>1</sup>Университет ИТМО<sup>(•)</sup> <sup>2</sup>Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого <sup>3</sup>Физико-технический институт им. А. Ф. Иоффе РАН

## ИНТЕРВАЛЬНАЯ АППРОКСИМАЦИЯ СЕМЕЙСТВА ФУНКЦИЙ КЛАССА СИГМОИД

*Введение*. Переходные процессы возникают в различных прикладных областях, часто данные их описывающие имеют неопределенность, возможно сравнимую со значениями самих параметров. Для таких задач требуется как можно более точная оценка параметров описывающей кривой.

Работа посвящена исследованию и сравнению подходов к аппроксимации переходных процессов, относящихся к семейству функций класса сигмоид, с использованием методов интервального анализа.

Первый подход основан на сведении задачи к линейному виду: в его рамках решались подзадачи определения множества точек, относящихся к переходному и стационарным состояниям. Второй подход основан на оценке параметров кривизны и амплитуды сеточным интервальным методом Кравчика и его модификацией – бицентрированным методом [1].

Постановка задачи. Существуют различные функции семейства сигмоид, будем рассматривать следующий вид функции:

$$f(x; a, b, c, d) = \frac{a(x-c)}{|x-c|+b} + d,$$

где параметры a — амплитуда, b — кривизна, c, d — сдвиги по осям Ox и Oy.

Необходимо получить оценку аппроксимации для данных, которые представляют собой некоторый набор точек, подходящий под переходный процесс вида сигмоиды, при этом по оси *0y* известна неопределенность, выражаемая в качестве интервала:

 $y_i = f(x_i; a, b, c, d) + \delta, \qquad \delta \in \left[-\overline{\delta}, \overline{\delta}\right], i = 1, 2, ..., n$ 

Представим формулировку задачи в виде интервальной системы линейных алгебраических уравнений (ИСЛАУ):

$$\begin{cases} f(x_1) = [y_1 - \overline{\delta}, y_1 + \overline{\delta}] \\ \dots \\ f(x_n) = [y_n - \overline{\delta}, y_n + \overline{\delta}] \end{cases}$$

Эту систему также можно представить в виде F(x) = 0.

*Линеаризация задачи*. Представим переходный процесс в виде трех последовательных частей: первый стационарный  $(i_1 \in \{1, 2, ..., l\},$  переходный  $(i_2 \in \{l + 1, l + 2, ..., r - 1\})$  и второй стационарный процессы  $(i_3 \in \{r, r + 1, ..., n\})$ .

Для определения точек, относящихся к переходному процессу, используем метод наименьших квадратов для определения некоторых значений параметров  $(a_{fit}, b_{fit}, c_{fit}, d_{fit})$ . Отнесем к переходному процессу те точки, между которыми угол наклона сигмоиды больше некоторого порога  $k_{min}$ , близкого к нулю. Оставшиеся точки относятся к соответствующим стационарным процессам, для их интервальной аппроксимации используется известный алгоритм оценки констант с совместными данными: находим моду пересечения интервалов [2]. В итоге получим два интервала:  $s_1 = [\underline{s_1}, \overline{s_1}], s_3 = [\underline{s_3}, \overline{s_3}]$  (на рис.1 они представлены светло-синим цветом).

<sup>&</sup>lt;sup>(•)</sup> Т.О. Яворук, tatianaiavoruk@gmail.com

Переходный процесс аппроксимируется коридором совместности [3]: всевозможные прямые, которые могут быть проведены через выбранные интервалы. При построении добавим в переходные точки еще два интервала:  $t_l = [\overline{s_1}, +\infty], t_r = [\underline{s_3}, +\infty]$ , положение по оси Ох соответствует точкам  $x_l, x_r$ .

*Методы Кравчика* [1] представляют собой итерационные процедуры. Классический метод:

$$X^{k+1} \leftarrow X^k \cap K(X^k, \tilde{x}^k), \tilde{x}^k = mid X^k,$$

где  $K(\mathbf{X}, \tilde{\mathbf{x}}) \coloneqq \tilde{\mathbf{x}} - \Lambda F(\tilde{\mathbf{x}}) + (I - \Lambda \mathbf{L})(\mathbf{X} - \tilde{\mathbf{x}}), \Lambda = (mid(F'))^{-1}$ ,  $\mathbf{L}$  – интервальная матрица Липшица.

Бицентрированная модификация включает в себя дополнительные вычисления, подробнее см. [1].

Величины смещений «центров»:

$$p_{ij} = cut\left(\frac{mid\left(\mathbf{\Phi'}_{ij}(\mathbf{X})\right)_{i}}{rad\left(\mathbf{\Phi'}_{ij}(\mathbf{X})\right)_{i}}, [-1; 1]\right), i, j = 1, 2, \dots, n,$$

где  $\Phi'_{ij}(X)$  -интервальная оценка производной  $\frac{\partial \Phi_i}{\partial x_i}$  отображения  $\Phi(x) = x - \Lambda F(x)$ ,

$$cut(x, x) := \begin{cases} \overline{x}, & \text{если } x > \overline{x} \\ \underline{x}, & \text{если } x < \underline{x} \\ x, & \text{иначе.} \end{cases}$$

Смещенные центры имеют следующий вид:  $\check{x} = midX - pradX$ ,  $\hat{x} = midX + pradX$ .

Бицентрированный оператор Кравчика имеет следующий вид:

$$K_{bic}(X) = K(X, \check{X}) \cap K(X, \pounds)$$

Итерационная процедура имеет аналогичный вид, что и для классического метода Кравчика. В данной работе используются сеточные версии методов.

*Результаты*. Для линейного подхода результаты показаны на рис. 1. При генерации значений  $\delta$  использовалось равномерное распределение U[-1,3;1,3].



Рис. 1. Интервальная аппроксимация сигмоиды с помощью линеаризации – результаты на наборе данных с параметрами:  $a = 1,5; b = 0,9; c = 0; d = 1; \overline{\delta} = 1,3; k_{min} = 0.02.$ 

В данном случае мы получили оценку в виде множества, в котором может находится сигмоида.  $s_1 = [-0,57; -0.13], s_3 = [2,3; 2,49]$ . Отсюда найдем внутренние и внешние оценки параметра амплитуды  $a \in [2.43,3.06] = s_3 - s_1$ , сдвиг по оси  $Oy \ d \in [0.87,1.18] = \frac{1}{2}$  параметр сдвига по оси Ox можно оценить с помощью области пересечения бруса  $[x|1, x_n] \times$ 

d (на рис.1 – зеленая линия) и интервальной границей множества решений, откуда на  $c \in [-2.2; 1, 11]$ . Заметим, что это – внутренняя оценка и параметр зависит от значения параметра d. Верхнюю границу для параметра кривизны можно оценить с помощью угла наклона прямых интервального оценивания, которые находятся на пересечении с зеленой областью (рис. 1)  $0 < b \leq 3,23$ .

Воспользуемся методами Кравчика, для получения более точных оценок параметров амплитуды и кривизны (рис. 2). Количество разбиений N = 100 на множестве  $[0,7] \times [0,7]$ .



Рис. 2. Оценка параметров амплитуды и кривизны, с применением методов Кравчика. Зеленым показана внутренняя оценка множества параметров, желтым – внешняя.

Заключение. Линейный подход не использует «вид» сигмоиды, прост в реализации и с его помощью довольно просто оценить параметры сдвигов и амплитуды. Заметим так же, что кривая, построенная с помощью МНК, находится вне коридора допустимых значений.

Для более точных оценок параметра кривизны лучше использовать методы Кравчика: они дают внутреннюю и внешнюю оценку, но являются медленными. С выбранными параметрами классический и модифицированный методы дали одинаковые результаты.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Maminov A.D., Posypkin M.A., Shary S.P. Reliable bounding of the implicitly defined sets with applications to robotics. Procedia Computer Science, 2021 г.

2. Баженов А.Н., Жилин С.И., Кумков С.И., Шарый С.П. «Обработка и анализ интервальных данных»

- Москва--Ижевск: НИЦ <<Регулярная и хаотическая динамика>>, 2023, с.374. (готовится к печати) 3. Шарый С.П., Шарая И.А. Распознавание разрешимости интервальных уравнений и его приложения к анализу данных, Вычислительные технологии, Том 18, № 3, 2013 г.

Ли Жуйци<sup>1</sup>, А.Н. Баженов<sup>1,2</sup>

<sup>1</sup>Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого <sup>(•)</sup>

<sup>2</sup>Физико-технический институт им. А. Ф. Иоффе РАН

### ИСПОЛЬЗОВАНИЕ ТВИННЫХ АРИФМЕТИК В АНАЛИЗЕ ИНТЕРВАЛЬНЫХ ДАННЫХ

Введение. Интервальный анализ — это классический инструмент, который используется для гарантированного решения нелинейных уравнений. Показано, что его можно использовать для построения надежных нелинейных оценок состояния динамических систем.

Развитие методов и инструментов интервального анализа привело к необходимости новых структур данных. Эти структуры нужны для описания математических объектов на основе интервалов, но более гибких, позволяющих описывать различные виды неопределенности.

Французские математики разрабатывают подход к обращению функций от твинов и решение систем уравнений. Алгоритм SIVIA подходит для решения нелинейных зависимых задач восстановления с интервальными неопределенностями во входных, так и выходных переменных. Кроме того, она может учитывать различные типы совместности параметров с данными. Таким образом, в настоящее время весьма востребованы исследования задач с твинами, поиски новых постановок.

Алгоритм SIVIA. Поскольку точное представление множеств в общем случае не поддается обработке, эффективным и легко реализуемым представлением является рассмотрение интервалов и их многомерных расширений: векторов интервалов, также называемых ящиками. Мы обозначаем интервалы и интервальные векторы жирными строчными буквами. Набор всех (закрытых) реальных интервалов [a,b], где $a \le b$  будет обозначаться символом IR. Так же символ  $IR^N$  будет обозначать набор всех N-мерных интервальных векторов.  $c_1(x_1,...,x_n) \le 0 \dots c_m(x_1,...,x_n) \le 0, x_i \in d_i \forall i \in \{1,...,n\}$ . где области удовлетворяют условию  $d_i \in IR$ , и обозначим через X множество решений этой задачи.

С помощью алгоритма обращения множеств SIVIA [1] можно найти аппроксимацию X тремя объединениями S, N, E п-мерных интервальных блоков со свойствами  $S \subseteq X \subseteq S \cup E$ и  $X \cap N = \emptyset$ , которые образуют разбиение интервального поля  $d_1 \times \cdots \times d_n$ . Максимальная ширина блоков в множестве E (и, следовательно, точность аппроксимации) определяется параметром  $\varepsilon > 0$  как частью входных данных.

Обращения множества - это характеристика множества:  $X = \{x \in \mathbb{R}^n \lor f(x) \in Y\} = f^{-1}(Y)$ , Для любого  $Y \in \mathbb{R}p$ , для любой функции f, допускающей функцию включения [f](.) из $I\mathbb{R}^n \to I\mathbb{R}^m$  [1,2], являющуюся  $I\mathbb{R}$  множеством действительных интервалов, и выбором критерия включения [t] определяется:

 $[t](\mathbf{x}) = \begin{cases} true & if[f]([\mathbf{x}]) \subset Y, \\ false & if[f]([\mathbf{x}]) \cap Y = \emptyset \\ undecided & otherwise. \end{cases}$ 

Алгоритм (1) описывает классическую реализацию алгоритма SIVIA.

<sup>&</sup>lt;sup>(•)</sup>Ли Жуйци, li995186428@gmail.com

Вход  $[x], \varepsilon, Y, [f]$ Выход L<sup>clear</sup>, L<sup>dark</sup> Алгоритм Инициализируем  $L = \{ [x] \}, L^{clear} = \emptyset, L^{dark} = \emptyset;$ WHILE  $(L \neq \emptyset)$  DO Снимаем со стека L брус и записываем его в [x]; IF $([f]([x]) \subset Y)$  THEN кладем [x] в  $L^{clear}$ ; ELSE IF( $[f]([x]) \cap Y = \emptyset$ ) THEN кладем [x] в  $L^{dark}$ ; ELSE IF  $(width([x]) > \varepsilon)$  THEN делим [x] пополам перпендикулярно его наибольшей стороне; кладем два получившихся бруса в L; END IF END WHILE

*Твинная арифметика.* Введем основные понятия твинной арифметики, следуя [1]. Твины вводятся с целью одновременного получения внешних и внутренних оценок множества значений функции. Твином назовем пару интервалов  $T = (X_l, X). X_l \in I(R) \cup \{\emptyset\}, X \in I(R). (X, X) = X$  вырожденный твин. Оценить неизвестный интервал *I* твином — значит найти такой твин  $T = (X_l, X)$  что  $X_l \subseteq I \subseteq X$ . "Внешней длины твина  $T \lor V X \lor u$  "внутренней длины твина"  $|T|_l = X_l \lor$ . Основными свойствами, которым должны удовлетворять все операции вводимой арифметики твинов, являются следующие:  $X \subseteq I \to X \subseteq TX \subseteq T_1 \land Y \subseteq T_2 \to X^\circ Y \subseteq T_1^\circ T_2$ , гдеои  $\diamond$ , соответственно, любая унарная и любая бинарная операции.



Рис. 1.  $X = f^{-1}([y])$  С помощью классических интервалов

Рассмотрим задачу обращения множества $X = f^{-1}([y])$ , где[y] = [0,4]. Мы предполагаем, что f не определено, а знаем мы только то, что для всех x,  $f(x) \in [f](x) = (x_1 - [a_1])^2 + (x_2 - [a_2])^2$ , у нас есть[f](x) =,где  $f^{-(x)=min(x_1-[a_1])^2+(x_2-[a_2])^2}$ ,  $f^{+(x)=min(x1-[a_1])^2+(x_2-[a_2])^2}$ . Дано:  $\varepsilon = 0.1$ и брус[x] = ([-2,4], [-3,5]). Теперь получаем рисунок в результате работы алгоритма SIVIA.

Красные брусы – чистая зона Х;

- Голубые брусы темная зона  $Rn \setminus X$ ;
- Желтые брусы участки, о которых ничего не известно.



Зона общения: рассмотрим p меток m(i), расположенных на позициях  $(m_1(i), m_2(i))$ , заданных в таблице, и робота на позиции  $x = (x_1, x_2)$ .

i	1	2	3	4	5	6	7
$m_1(i)$	$1\pm0.5$	$5\pm0.5$	$5\pm0.5$	$-2 \pm 0.5$	8± 0.5	$-6 \pm 0.5$	4± 0.5
$m_2(i)$	$3\pm0.5$	$-3 \pm 0.5$	$6\pm0.5$	$-5 \pm 0.5$	$1\pm0.5$	$-5 \pm 0.5$	-1±0.5

Табл.1. Расположение меток.

Робот может связываться с меткой m(i), если его расстояние до метки меньше, чем 10 м, т. е. если || x - m(i) || < 10; если || x - m(i) || > 10, Связь невозможна. На рис. 1 есть 4 позиции 1 – 4 из табл. 1, на рис. 2 есть 7 позиций 1 – 7 из табл. 1.

Голубая область соответствует зоне, где робот не может связываться со всеми метками. Красная область соответствует зоне, где робот может связываться со всеми метками. Мы обнаружили, что при увеличении числа метки площадь красной области уменьшается.

Заключение. С использованием твинной арифметики решена задача расчета положения подводного робота, произведено выделение областей «полутень, светлой и темной» зон. В перспективе применение твинных арифметик и методов для анализа данных с интервальной неопределенностью нацелено на получение одновременно внутренних и внешних оценок множеств решений для представления данных и результатов вычислений.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Jaulin L. and Walter E. Set inversion via interval analysis for nonlinear bounded-error estimation. Automatica, vol. 29(no. 4):1053–1064, 1993.

2. Баженов А. Н. Интервальный анализ. Основы теории, практические применения и учебные примеры [Электронный ресурс] : учебное пособие / А. Н. Баженов. – Санкт-Петербург, 2020.

3. Ли Жуйци. Алгоритм SIVIA.

/ URL: https://github.com/Li-Rui-QI/diplom.git

4. Ли Жуйци. Реализация твинной арифметики в нотации В.М. Нестерова.

/ URL: https://github.com/Li-Rui-QI/twins.git

## СЕКЦИЯ «ГИДРОАЭРОДИНАМИКА, ГОРЕНИЕ И ТЕПЛООБМЕН»

УДК 519.6:533.6.011

Е.В. Бабич, Е.В. Колесник Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого<sup>(•)</sup>

## ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ СВЕРХЗВУКОВОГО ПОТОКА ВЯЗКОГО ГАЗА С УСТАНОВЛЕННЫМ НА ПЛАСТИНЕ ЗАТУПЛЕННЫМ ТЕЛОМ ПРИ РАЗЛИЧНЫХ УГЛАХ НАТЕКАНИЯ

Введение. Активное развитие сверхзвуковых технологий предполагает решение проблемы эффективной тепловой защиты элементов высокоскоростных летательных аппаратов. В частности, интенсивному аэродинамическому нагреву подвергаются области крепления цилиндрических деталей к поверхности обтекаемого тела [1], что приводит к существенному росту температуры, изменению формы тела и характеристик материала, таких как прочность и упругость. В подобных течениях возникают сложные явления вязконевязкого взаимодействия, характеризующиеся формированием системы скачков и волн уплотнения; образованием перед препятствием протяженной отрывной области с системой подковообразных вихрей; высокой неоднородностью локального теплообмена и т.д. Задачи данного класса, рассматриваемые с середины прошлого века, остаются актуальными и в настоящее время, т.к. даже для объектов с упрощенной геометрией имеется множество аспектов, требующих более детального изучения. Исследователями наиболее часто рассматривается модельная задача об обтекании вязким газом установленного на пластине симметричного препятствия (рис. 1*a*), при этом поток натекает на тело под нулевым углом атаки [1-4]. Вместе с тем, в условиях обтекания реальных конфигураций угол атаки связан с направлением движения объекта, что свою очередь приводит к изменению картины течения. В настоящей работе, которая является продолжением численных исследований [4], представляются результаты расчетов сверхзвукового обтекания установленного на пластине затупленного тела при различных углах натекания потока; изучается влияния угла (в диапазоне от 0 до  $20^{\circ}$ ) на конфигурацию вихревой структуры в передней отрывной области, а также на картину локального теплообмена.



Рис. 1. а) Расчетная область; b) обобщенная схема течения в области перед обтекаемым телом

Постановка задачи и методика исследования. Характеристики набегающего на тело потока определяются следующим набором безразмерных параметров: числом Маха, М<sub>∞</sub>, числом Рейнольдса, построенном по диаметру затупления, Re<sub>D</sub>, температурным фактором,

<sup>(•)</sup> Е.В. Бабич, lll.helen.lll@mail.ru

 $T_{\rm w}/T_{\infty}$ , а также свойствами газа: числом Прандтля, Pr, и показателем адиабаты,  $\gamma$ . Представленные ниже результаты получены для следующих значений определяющих параметров, обеспечивающих реализацию полностью ламинарного режима течения:  $M_{\infty} = 5$ ,  $Re_D = 4 \cdot 10^3$ , Pr = 0.71,  $T_{\rm w}/T_{\infty} = 2.6$ ,  $\gamma = 1.4$ .

Расчеты проведены для следующей геометрической конфигурации: симметричное препятствие с диаметром затупленной части D (рис.1*a*), установлено на пластине на расстоянии на расстоянии  $L_{\text{plate}} = 30D$  от переднего края пластины и на расстоянии  $L_{\text{side}} = 10D$  от ее бокового края. В высоту и длину тело считается полу бесконечным (размеры расчетной области H = 5D и  $L_{\text{f}} = 5.5D$ ). Обтекание тела проводилось при следующем наборе углов атаки  $\alpha = [0^{\circ}, 5^{\circ}, 10^{\circ}, 15^{\circ}, 20^{\circ}].$ 

Решались полные трехмерные уравнения Навье-Стокса для термически и калорически совершенного газа. Зависимость коэффициента вязкости от температуры определялась формулой Сазерленда. На входной границе расчетной области задавался однородный поток, на поверхности тела и пластины, которые поддерживались при постоянной температуре T<sub>w</sub> – условие прилипания. На верхней границе задавались неотражающие граничные условия, на выходе – условие нулевого градиента. Для выполнения расчетов использовался конечнообъемный «неструктурированный» программный код SINF/Flag-S, разрабатываемый в Физико-механическом институте СПбПУ. Аппроксимация конвективных потоков на гранях контрольных объемов проводилась по схеме AUSM второго порядка точности. Для проведения расчетов (на сетке, состоящей из ~20 МЛН ячеек) использовались вычислительные суперкомпьютерного Санкт-Петербургского ресурсы центра политехнического университета Петра Великого (www.scc.spbstu.ru).

Результаты и обсуждение. Результаты расчетов с варьированием угла атаки  $\alpha$  показали, что при увеличении угла толщина пограничного слоя в сечении X/D = const неоднородна: поперечная составляющая вектора скорости потока приводит к дополнительному росту пограничного слоя в направлении оси Y и появлению максимума толщины, движущегося вдоль линии тока, выходящей из угла P (рис. 2).



Рис. 2. Поле локального числа Маха в нескольких сечениях *x* = *const* и линия тока набегающего потока (случай α = 15°)

Более толстый пограничный слой отрывается раньше (рис. 3), а из-за ненулевого угла наклона потока седловая точка отрыва (saddle point of separation – *S*) смещается в сторону. Несимметричность проявляется и в распределении теплового потока на поверхности пластины: с наветренной стороны теплообмен более интенсивный. Вблизи подветренной стороны тепловой поток меньше, т.к. там формируется отрывная область, в которой подковообразные вихри (интенсифицирующие теплообмен) постепенно вырождаются.

Согласно изображенной на рис. 1*b* обобщенной схеме, поле течения может характеризоваться следующими величинами [4]: относительным расстоянием головного скачка уплотнения до тела (*B/D*), высотой расположения «тройной точки» ( $h_{\rm tp}/D$ ), являющейся точкой пересечения головного скачка уплотнения и первого косого скачка, длиной отрывной области (*L*<sub>s</sub>/*D*) и количеством явно выраженных подковообразных вихрей (*N*vortex). Анализ данных характеристик, полученных по результатам расчетов обтекания тела

под различными углами атаки (табл. 1), показывает, что с увеличением угла  $\alpha$  длина отрывной области и размеры подковообразных вихрей увеличиваются, что приводит к подъему тройной точки (рис. 4*a*). Заметное отличие этих параметров в случае  $\alpha \ge 15^{\circ}$  связано с тем, что при таких углах атаки максимум толщины пограничного слоя доходит до тела, и вся картина обтекания приподнимается. Отметим также, что интенсивность косых скачков уплотнения при увеличении угла натекания падает, что приводит к меньшему изгибу фронта головного скачка к поверхности тела, а, следовательно, и уменьшению максимума теплового потока на линии лобового столкновения (табл. 1).



Рис. 3. Поле числа Стэнтона и поверхностные линии тока: *a*)  $\alpha = 0^{\circ}$ , *b*)  $\alpha = 15^{\circ}$ 



Рис. 4. Ударно-волновая картина в лобовой плоскости при α = 15° и распределение числа Стэнтона на лобовой линии на теле при разных углах атаки

таол. 1. Ларактеристики течения, рассчитанные при различных углах атаки о											
α, °	St	N <sub>vortex</sub>	<i>B</i> / <i>D</i> ×10	$h_{ m tp}/D$	$L_{\rm S}/D$	α, °	St	N <sub>vortex</sub>	<i>B</i> / <i>D</i> ×10	$h_{ m tp}/{ m D}$	$L_{\rm S}/D$
0	0.151	4	2.68	1.82	3.95	15	0.138	4	2.95	2.12	5.62
5	0.153	4	2.69	1.84	4.04	20	0.136	4	3.20	2.27	5.63
10	0.148	4	2.74	1.89	4.09						

Заключение. Результаты расчетов с варьированием угла атаки а показали, что чем больше угол атаки, тем в меньшей степени проявляются эффекты вязко-невязкого взаимодействия: на пластине и на обтекаемом теле уменьшается уровень теплового потока, косые скачки уплотнения становятся менее интенсивными, отрывная область увеличивается, а подковообразные вихри на подветренной стороне тела вырождаются.

Работа выполнена при финансовой поддержке гранта Президента Российской Федерации для государственной поддержки молодых российских ученых – кандидатов наук, MK-3435.2022.1.1.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Korkegi R.H. Survey of viscous interactions associated with high Mach number flight // AIAA Journal. –  $1971. - Vol. 9. - N_{2} 5. - P. 771-784.$ 

2. Tutty O.R., Roberts G.T., Schuricht P.H. High-speed laminar flow past a fin-body junction // Journal of Fluid Mechanics. – 2013. – Vol. 737. – P. 19-55.

3. Mortazavi M., Knight D. Simulation of Hypersonic-Shock-Wave–Laminar-Boundary-Layer Interaction over Blunt Fin // AIAA Journal. – 2019. – Vol. 57. – № 8. – P. 3506-3523.

4. Колесник Е.В., Смирнов Е.М. Численное исследование вихревых структур и теплообмена при сверхзвуковом обтекании области сопряжения затупленного тела и пластины // Журнал технической физики. – 2020. – Т. 90. – № 2. – С. 185-192.

УДК 519.6:533.6.011

## Е.В. Бабич, Е.В. Колесник Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого<sup>(•)</sup>

## ТЕСТИРОВАНИЕ РЯДА СХЕМ С КВАЗИОДНОМЕРНОЙ РЕКОНСТРУКЦИЕЙ ПЕРЕМЕННЫХ ДЛЯ РАСЧЕТА КОНВЕКТИВНЫХ ПОТОКОВ НА ЗАДАЧЕ О ВЗАИМОДЕЙСТВИИ УДАРНОЙ ВОЛНЫ С ВИХРЕМ

Введение. Одной из актуальных задач газовой динамики является изучение особенностей формирования и развития турбулентных сверхзвуковых течений. Такие задачи возникают, например, при сходе вихревого жгута с крыла сверхзвукового самолета, при вхождении космических объектов в плотные слои атмосферы Земли, а также при развитии газодинамических неустойчивостей вблизи контактной поверхности двух сред, движущихся ускоренно [1,2]. Эти задачи, как правило, весьма сложны и для их решения могут потребоваться вихреразрешающие подходы. При этом численные схемы должны обладать такой диссипацией, чтобы подавить нефизические осцилляции вблизи разрывов, но при этом не подавлять моделируемые турбулентные вихри. Для тестирования потенциально пригодных схем часто используется модельная задача о взаимодействии между ударными волнами и вихрями [3]. Такой тип взаимодействия встречается во многих приложениях и является одной из фундаментальных проблем аэрогазодинамики [1-2].

*Цель* данной работы – изучение влияния схемы для расчета конвективных потоков на мелкомасштабные особенности течения, возникающие при взаимодействии ударной волны с вихрем, а также оценка эффективности использования схем повышенной точности с квазиодномерной реконструкцией переменных [4] для решения задач данного типа.

Программное средство и рассматриваемые схемы. Тестовые расчеты проводились с использованием конечно-объемного «неструктурированного» программного кода SINF/Flag-S, разрабатываемого в Физико-механическом институте СПбПУ. Для вычисления конвективных потоков на грани расчетной ячейки применялись методы, основанные на точном или приближенном решении задачи Римана о распаде произвольного разрыва (Годунова, Роу, HLL, HLLC), и методы, реализующие расщепление вектора потоков (семейство схем AUSM). Для повышения порядка точности реконструкция переменных на грани контрольного объема проводилась по квазиодномерной схеме второго порядка точности (TVD схема с применением ограничителя van Albada для монотонизации решения), а также по схеме WENO-5, имеющей для гладких решений на равномерной сетке пятый порядок точности. Преимущество схем семейства WENO, которые на данный момент считаются наиболее эффективными схемами для расчета задач с разрывами [4], состоит в

<sup>(•)</sup> Е.В. Бабич, lll.helen.lll@mail.ru

том, что они позволяют сочетать повышенную точность на гладких решениях и ограничивать генерацию осцилляций на разрывах.

Постановка задачи и вычислительные аспекты. Для тестирования схем выбрана задача о взаимодействии ударной волны с изоэнтропическим вихрем, которая была предложена А.В. Родионовым в качестве верификационной на Девятой российской конференции «Вычислительный эксперимент в аэроакустике и аэродинамике» [3]. Расчетная область (рис. 1*a*) представляет прямоугольник [-1, 1]×[0, 1], систему координат *хОу* связывают с ударной волной, фронт которой в начальный момент времени t = 0 неподвижен и расположен в сечении  $x_S = 0$ , а центр двумерного изоэнтропического вихря находится в точке с координатами (-0.5, 0.5). Рабочей средой является совершенный газ с показателем адиабаты  $\gamma = 1.4$ . Задача определяется следующими параметрами:  $M_S = u_x/c = 3$  – ударно-волновое число Маха, характеризующее интенсивность ударной волны ( $u_x$  – скорость потока перед волной, c – скорость звука),  $M_V = V_m/c = 0.8$  – вихревое число Маха, характеризующее интенсивность вихря ( $V_m$  – максимальная скорость на профиле),  $r_0 = 0.075$  – эффективный радиус вихря. Профиль скорости вихря задается следующей формулой

$$V(r) = V_m(r/r_0) \exp\left\{\frac{1 - (r/r_0)^2}{2}\right\}, \ r = \sqrt{(x - x_V)^2 + (y - y_V)^2}.$$
 (1)

На верхней и нижней границах области задается условие симметрии, на левой границе задается сверхзвуковой втекающий поток, а на правой границе – дозвуковой вытекающий поток при заданном давлении. Расчет проводится до момента времени  $t = t_1 = 1.5/u_{x1}$  ( $u_{x1}$  – скорость фонового потока перед фронтом ударной волны), обеспечивающего полное прохождение вихря через ударную волну и его последующее значимое продвижение в продольном направлении. Расчетная сетка состоит из квадратных ячеек размера  $h \times h$ . В данной работе рассматривалась последовательность сгущающихся сеток с шагом h = 1/200, 1/400, 1/500, 1/600.

*Результаты.* На рис 1*b* показана численная шлирен-визуализация «эталонного» (референсного) решения, которое получено по схеме Роу с использованием наиболее подробной сетки (h = 1/600) в момент времени  $t_1$ . При приближении вихря к фронту ударной волны последний искривляется, а вихрь, пройдя через фронт, сильно искажается и порождает акустические волны, некоторые из которых превращаются в слабые ударные волны. Ядро вихря разбивается ударной волной на две части: первая имеет то же направление вращения, что и исходный вихрь, а вторая, менее интенсивная, вращается в противоположную сторону.



Рис. 1. *а*) Схема расчетной области, *b*) численная шлирен- визуализация для расчета по схеме Роу на сетке с шагом h = 1/600 в момент времени  $t_1$ 

Для оценки эффективности методов расчета конвективных потоков вычислялся критерий интегральной ошибки расчета в области  $\Omega$  (0.24 < x < 0.4, 0.46 < y < 0.62), определяемый по формуле [3]:

$$\varepsilon = \sqrt{\frac{\sum_{i=i_1}^{i_2} \sum_{j=j_1}^{j_2} \left(\rho_{i,j} - \rho_{i,j}^{ref}\right)^2}{(i_2 - i_1)(j_2 - j_1)}} \times \frac{100\%}{\rho_2},$$
(2)

где значения  $\rho$  и  $\rho^{\text{ref}}$  с индексами (i,j) – средние по ячейке значения плотности в расчете и в эталонном решении; индексы  $i_1$ ,  $i_2$  соответствуют абсциссам центров начальной и конечной ячеек области  $\Omega$ , а  $j_1$ ,  $j_2$  – их ординатам.

По результатам сравнения значений интегральной ошибки расчета для различных методов вычисления конвективных потоков (табл. 1) можно заключить, что схема Роу дает минимальную ошибку. Менее точными оказываются более диссипативные схемы (HLL), а также схемы семейства AUSM, хотя они порождают меньше численных осцилляций, которые заметны вблизи фронта ударной волны (рис. 2). Вместе с тем, стоит отметить, что отличие ошибки є между всеми схемами составляет не более 1%.

Табл. 1. Интегральная ошибка  $\varepsilon$ , полученная в расчетах на сетке h = 1/200 с использованием различных схем

Метод	ε, %	Метод	ε, %
Roe	5.597	AUSM+	6.103
HLLC	5.704	AUSM+up	6.194
Godunov	5.785	AUSM	6.222
AUSMD	6.055	HLL	6.526
Roe (WENO-5)	2.321	AUSM (WENO-5)	3.246



ис. 2. численная шлирен-визуализация: сравнение результатов расчетов, выполненных на сетке с h = 1/200, с использованием TVD схемы (*a-f*) и схемы WENO-5 (*g-h*)

Результаты расчетов по схеме повышенной точности показали, что в случае использования схемы WENO-5 интегральная ошибка (2) оказалась примерно в 2 раза

меньше, чем по схемам второго порядка (табл. 1). При расчете по схеме WENO-5 разрешается больше мелкомасштабных особенностей течения (рис. 2(*g*-*h*)), профиль вихря становится более отчетливым и приобретает конфигурацию аналогичную эталонному решению (рис. 1*b*).

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Delery J., Horowitz E., Leuchter O., Solignac J. Fundamental Studies on Vortex Flows // La Recherche Aerospatiale (English ed.). – 1984. – P. 1-24.

2. Settles G.S., Cattafesta L.N. Supersonic shock wave/ vortex interaction // NASA CR-192917. - 1993.

3. Родионов А.В. Взаимодействие ударной волны с вихрем: тестовая задача для методов сквозного счета // Вычислительный эксперимент в аэроакустике и аэродинамике: Сборник тезисов девятой российской конференции, Светлогорск, Калининградской области. – 2022. – С. 318–319.

4. Бахвалов П. А., Козубская Т. К. Схема EBR-WENO для решения задач газовой динамики с разрывами на неструктурированных сетках // Препринты ИПМ им. М. В. Келдыша. – 2017. – С. 32.

### УДК 532.5

Д.В. Борисов<sup>1</sup>, В.В. Калаев<sup>2</sup> <sup>1</sup>Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого<sup>(•)</sup> <sup>2</sup> ООО «Софт-Импакт»

## ПРИМЕНЕНИЕ STR *k*-є МОДЕЛИ ДЛЯ МОДЕЛИРОВАНИЯ ТУРБУЛЕНТНОГО ТЕПЛО-И МАССООБМЕНА В ТИГЛЯХ УСТАНОВОК ДЛЯ ВЫРАЩИВАНИЯ КРИСТАЛЛОВ МЕТОДОМ ЧОХРАЛЬСКОГО

Введение. Выращивание кристаллов из расплава является основным методом получения полупроводниковых материалов [1,2]. Для получения кристаллов высокого качества необходимо контролировать тепло- и массоперенос в расплаве. В тиглях промышленного диаметра течение расплава является турбулентным. Наиболее точным методом моделирования турбулентности является прямое численное моделирование (DNS, Direct Numerical Simulation), нацеленное на разрешение всех пространственно-временных масштабов [3]. Однако данный метод не применим в промышленных расчетах из-за требуемого большого количества вычислительных ресурсов. Наиболее экономичным методом на сегодняшний день является RANS подход. Однако RANS модели вихревой вязкости неправильно предсказывают турбулентные тепловые и массовые потоки [4]. Основной причиной этого является неучет анизотропии турбулентного переноса. Для преодоления недостатков моделей вихревой вязкости нами ранее была разработана STR k- $\epsilon$  модель. В данной работе представляются методика и результаты валидации STR k- $\epsilon$  модели для расчета турбулентной конвекции расплава кремния с привлечением данных, полученных ранее в работе [5] на основе метода ILES (Implicit Large Eddy Simulation).

Описание модели. STR k-є представляет собой RANS модель турбулентности, включающую уравнения переноса кинетической энергии турбулентности k и скорости ее диссипации є. Для моделирования тензора рейнольдсовых напряжений используется гипотеза STR (Stress Tensor Reconstruction), учитывающая различные факторы анизотропии, а именно приповерхностную анизотропию, анизотропию за счет влияния градиента осредненного течения и анизотропию за счет действия сил плавучести [5]. Приповерхностная анизотропия учитывается по двуслойной модели, задействующей колмогоровский масштаб длины вблизи поверхности и турбулентный масштаб длины на

<sup>&</sup>lt;sup>(•)</sup> Д.В. Борисов, dmitriy.borisov@softimpact.ru
некотором ее отдалении. Для моделирования турбулентных потоков используется обобщенная гипотеза градиентной диффузии (GGDH, Generalized Gradient Diffusion Hypothesis). Граничное условие по *k* на свободной поверхности расплава учитывает поверхностную генерацию Марангони.

Результаты расчетов и обсуждение. При геометрических и граничных условиях, ранее использованных в ILES вычислениях, были проведены расчеты турбулентной конвекции расплава с использованием моделей STR k-є и k-є модели Чена [6], с добавлением в нее генерации за счет плавучести. На рис. 1 приведено сравнение распределений температуры, модуля скорости и кинетической энергии турбулентности, полученные в ILES и RANS расчетах. Распределение температуры, предсказываемое STR моделью, хорошо согласуется с данными ILES, при этом модель Чена заметно занижает перепад температуры в расплаве, что может быть связано с завышенной турбулентной теплопроводностью. В подкристалльной области обе модели предсказывают нисходящее течение, в то время как распределение модуля скорости на периферии расплава лучше предсказывается STR моделью. Область максимума кинетической энергии турбулентности в модели STR расположена в окрестности свободной поверхности расплава, что хорошо коррелирует с результатами ILES. Это связано с поверхностной генерацией за счет эффекта Марангони, которая учитывается в граничном условии по *k* на свободной поверхности расплава. Модель Чена предсказывает максимум в окрестности тройной точки «расплав-кристалл-тигель» за счет сдвиговой генерации, вызванной вращением кристалла.



Рис. 1. Распределения температуры, модуля скорости и кинетической энергии турбулентности, полученные в ILES и RANS расчетах

На рис. 2а приведено сравнение нормальных и сдвиговых рейнольдсовых напряжений. За счет учета фактора, вызывающего приповерхностную анизотропию, модель STR предсказывает падение ортогональной компоненты к стенке тигля и кристалла, а также к свободной поверхности, что согласуется с результатами ILES расчета. Особенности в распределении сдвигового напряжения в окрестности перехода горизонтальной части поверхности в вертикальную также вызваны приповерхностной анизотропией. В Чена неправильно предсказывает распределения противоположность этому модель напряжений. отметить, что распределение сдвигового нормальных Также можно напряжения, полученное по модели Чена, качественно не коррелирует с результатами ILES.



Рис. 2. Распределения характеристик турбулентности, полученные в ILES и RANS расчетах; а) рейнольдсовых напряжений; б) компонент вектора турбулентного теплового потока; в) сдвиговой генерации и генерации за счет силы плавучести

На рис. 26 приведены распределения компонент вектора турбулентного теплового потока. Обобщенная гипотеза градиентной диффузии в модели STR позволяет предсказать падание вертикальной компоненты потока к свободной поверхности, что коррелирует с результатами ILES. Значения турбулентной вязкости на свободной поверхности, сопоставимые со значениями в объеме, приводят к предсказанию ненулевой вертикальной компоненты потока в модели Чена. Можно отметить, что обе модели занижают горизонтальную компоненту потока под свободной поверхностью.

Для правильного предсказания тенденций по ключевым характеристикам от ростовых параметров, таких как зависимость концентрации кислорода в кристалле от угловой скорости вращения тигля и скорости прокачки аргона, необходимо правильно предсказывать перенос кинетической энергии турбулентности, который определяется, в том числе, генерационными слагаемыми, а именно генераций за счет градиента осредненного течения и генераций за счет силы плавучести. На рис. 2в приведены сравнения сдвиговой генерации и генерации за счет силы плавучести в ILES и RANS расчетах. По данным ILES видно, что сдвиговая генерация принимает как положительные, так и отрицательные значения, которые в свою очередь будут приводить к диссипации *k*. Модель STR предсказывает знакозависимость сдвиговой генерации за счет учета анизотропии рейнольдсовых напряжений. При этом модель Чена, использующая гипотезу Буссинеска для моделирования рейнольдсовых напряжений, предсказывает лишь неотрицательные значения генерации, что не коррелирует с данными ILES. Генерация за счет плавучести также лучше предсказывается моделью STR.

Заключение. Проведена валидация STR k-є модели путем сравнения результатов расчетов турбулентной конвекции расплава с данными ILES. Показано преимущество модели STR по сравнению с широко известной моделью Чена в предсказании осредненных полей скорости, температуры и кинетической энергии турбулентности, а также одноточечных корреляций второго порядка – тензора рейнольдсовых напряжений и вектора турбулентного потока тепла.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Vegad M., Bhatt N. M. Review of some aspects of single crystal growth using Czochralski crystal growth technique, Procedia Technol. – 2014 – Vol. 14 – P. 438–446.

2. Wagner C., Friedrich R. Direct numerical simulation of momentum and heat transport in idealized Czochralski crystal growth configurations, Int. J. Heat Fluid Flow – 2004 – Vol. 25 Issue 3 – P. 431–443.

3. Борисов Д. В., Калаев В. В. Сравнительная оценка RANS-моделей турбулентности с изотропной вязкостью для расчета конвекции расплава кремния в установках выращивания кристаллов // Научнотехнические ведомости СПбГПУ. Физико-математические науки. 2022. Т. 15. № 3. С. 28–42. DOI: https://doi.org/10.18721/ JPM.15303.

4. Raufeisen A., Breuer M., Botsch T., Delgado A. DNS of rotating buoyancy- and surface tension-driven flow // Int. J. Heat Mass Transf. 51 – 2008 – Vol. 51 – Issues 25–26 – P. 6219–6234.

5. Kalaev V., Borisov D., Smirnov A. A modified hypothesis of Reynolds stress tensor modeling for mixed turbulent convection in crystal growth // J. Cryst. Growth – 2022. – Vol. 580 – 126464. – https://doi.org/10.1016/j.jcrysgro.2021.126464.

6. Chien K.-Y. Predictions of channel and boundary-layer flows with a low-Reynolds number turbulence model // American Institute of Aeronautics & Astronautics (AIAA) Journal. – 1982 – Vol. 20. No. 1. – P. 33–38.

УДК 532.52

А.А. Васильев, С.В. Булович Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого<sup>(•)</sup>

## МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ДВИЖЕНИЯ ЗАРЯЖЕННЫХ МИКРОКАПЕЛЬ В ЭЛЕКТРИЧЕСКОМ ПОЛЕ

Введение. Микрокапельная химия – новое и активно развивающееся направление в химии, предполагающее проведение химических реакций в микро- и нанокаплях. В текущий момент одной из перспективных систем генерации заряженных микрокапель с помощью электрораспыления является система с транспортным противоэлектродом, описанная в работе [1]. Для эффективной реализации преимуществ перед другими системами необходимо иметь модельные представления о движении заряженных микрокапель в электрических и газодинамических полях, которые позволят оптимизировать параметры работы системы.

Постановка задачи. В работе рассматривается траекторная задача для счетного количества заряженных частиц в электрических и газодинамических полях. Электрическое поле формируется за счет разности потенциалов на электродах по схеме игла – кольцо, расположенных в одной плоскости. Диаметр противоэлектрода принимается равным 15, 18, 21 мм. Жидкость подается через круглый капилляр, диаметром 0.2 мм. В условиях электроспрея [2], на срезе капилляра формируется конус Тейлора, вершина которого является источником заряженных микрокапель. В отсутствие других сил дрейфовое движение капель происходило бы в радиальном направлении от вершины конуса Тейлора к противоэлектроду в форме кольца. Изменение направления их движения вызывается газодинамическим воздействием. Для этого используется кольцевая струя газа, пересекающая траекторию дрейфового движения заряженных капель. Источник струи смещен по отношению к срезу капилляра для жидкости на 0.4 мм, что приводит к формированию кольцевой пристенной газовой струи с высотой щели 0.2 мм. Протяженность капиллярных каналов от источников газа и жидкости 20 мм и 20.4 мм соответственно. Принятая геометрия обладает осевой симметрией и позволяет получить решение задачи в осесимметричной постановке.

<sup>&</sup>lt;sup>(•)</sup>С.В. Булович, bulovic@yandex.ru

Граничными условиями служат задание разности потенциалов на электродах, давление и температура газа на входе в кольцевой капилляр, расход и температура жидкости на входе капилляр круглой формы, давление и температура в окружающем пространстве. В качестве значений для последних величин использовались характеристики атмосферы. Считалось, что капли оседают на твердых поверхностях или покидают расчетную область.

Математическая модель. Математическое моделирование совокупности происходящих процессов проводилось при помощи «конечно-объемного» программного пакета ANSYS Fluent. Для нахождения характеристик кольцевого струйного потока решались осредненные по Рейнольдсу уравнения Навье-Стокса в нестационарной осесимметричной постановке с использованием k- $\omega$  SST модели турбулентности для двухкомпонентной среды. Одна из компонент – «воздух», вторая – вещество испаряющейся капли в газообразном состоянии. Значение интенсивности турбулентности на входных границах было принято равным 5%, а отношение турбулентной вязкости к молекулярной значение, TVR, – 10.

Для определения характеристик дисперсной среды использовался Лагранжево-Эйлеров подход. Рассматривалась динамика объекта переменной массы, что позволило учитывать процесс испарения капель. Источником капель служила вершина конуса Тейлора. На всех твердых ограничивающих поверхностях и проницаемых границах расчетной области задавалось условие исчезновения капель.

Распределение потенциала и компоненты напряженности электрического поля получены в результате решения задачи Лапласа для потенциала. Для учета воздействия силы Кулона на заряженные частицы разработана и использована соответствующая пользовательская функция, UDF, для программного пакета ANSYS Fluent. Верификация программного модуля была проведена для условий опыта Милликена. Размерность расчетной сетки ~140 тысяч ячеек.

*Результаты и обсуждение.* Газодинамическая структура потока для всех рассмотренных случаев представлена кольцевой пристенной недорасширенной струей. Расширение струи происходит за счет внутреннего поперечного градиента давления, при этом скорость газа в струе достигает сверхзвуковых значений. Развитие кольцевой струи в продольном направлении происходит со смыканием слоев смешения. В области от торцевой части капиллярной конструкции до точки смыкания, на оси симметрии, существует рециркуляционная зона с более низким давлением газа, чем в окружающей атмосфере. В результате этого на положение точки смыкания влияют два процесса: поджатие струи к оси симметрии по причине разности статических давлений внутри и вне кольцевой струи и расширение слоев смешения за счет сил вязкости.

На рис. 1 представлены линии равного значения осевой компоненты скорости для кольцевой струи при значении избыточного давления в камере 4 и 1 атм.

После определения характеристик газодинамического воздействия на частицы возникает задача обеспечения такое сочетание силы Кулона и силы Стокса, чтобы капля покинула зону рециркуляции, но оставалась бы в границах струйного течения. Для этого есть два механизма регулирования: изменять размеры кольцевого противоэлектрода или варьировать разность электрических потенциалов.

В работе проведено параметрическое исследование влияния диаметра транспортного противоэлектрода на траекторию движения заряженных капель. В большей мере увеличение диаметра противоэлектрода в системе «игла-кольцо» приводит к ослаблению электрического поля, соответственно, к уменьшению значений компонент напряженности. В гораздо меньшей мере изменение диаметра кольца противоэлектрода воздействует на газодинамические характеристики струйного течения. Механизм влияния, согласно третьему закону Ньютона, проявляется в учете силы Стокса как источникового слагаемого в уравнении количества движения. Перераспределение положения капельного облака в межэлектродном пространстве приводит к незначительным изменениям характеристик кольцевой струи. В результате, для варианта, когда напряженность электрического поля тем или иным способом уменьшена, возможно пропорциональное снижение давления подачи газа, приводящее к уменьшению значения силы Стокса.



Рис. 1 Изолинии осевой компоненты скорости при двух значения избыточного давления в камере: 1 – 4 атм; 2 – 1 атм.

На рис. 2 представлены картины квазистационарного распространения частиц для трех значений диаметра кольца противоэлектрода и двух вариантов разности давлений. Разность потенциалов для всех вариантов оставалась постоянной и равной 5000 В. Баланс между количеством капель, поступающих в расчетную область, и ее покидающих, не остается постоянным, но в каждом расчете отклонение от среднего значения происходит в небольших пределах.



Рис. 2. Картины распространения частиц разного диаметра в момент времени t = 0.008 с.

Можно отметить, что при выбранном значении диаметра кольца противоэлектрода, например, равном 15 мм, можно получить все варианты управления положения капельного облака в пространстве. В частности, при подаче газа в кольцевой капилляр с избыточным давлением  $\Delta p = 1$  атм сила Кулона превалирует над силой Стокса, изменяя траекторию движения заряженных капель в сторону транспортного противоэлектрода. При  $\Delta p = 4$  атм влияние силы Стокса оказывается более существенным. Часть капель покидает струю, но большинство частиц изменяет траекторию в направлении распространения струйного потока.

Для случаев d = 18 мм и d = 21 мм, при  $\Delta p$  = 1 атм, наблюдается запирание частиц в рециркуляционной зоне. При этом можно наблюдать эффект, связанный с сингулярностью напряженности электрического поля в окрестности острых кромок. Проявляется это в том, что капли в этой области испытывают большие ускорения, приводящие к неочевидным траекториям движения вне границы струи.

# ЛИТЕРАТУРА

1. Kuleshov D.O., Mazur D.M., Gromov I.A. et al. Study of the Aniline and Acetone Condensation Reaction under Electrospray Ionization Conditions // Journal of Analytical Chemistry Vol.75, №13 – 2020. – P. 1647–1652.

2. Коженков, В.И. Исследования в области электрогидродинамического распыления жидкости // Науч.-исслед. физ.-хим. ин-т им. Л. Я. Карпова – дисс. канд. хим. наук : 02.00.04 – М. – 1975 – Р. 22.

УДК 532.5.013.4

В.Д. Голубков, Е.К. Владимиров, А.В. Гарбарук Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого<sup>(•)</sup>

# ИССЛЕДОВАНИЕ УСТОЙЧИВОСТИ ПОГРАНИЧНОГО СЛОЯ НА КРЫЛОВОМ ПРОФИЛЕ НА ОСНОВЕ ЛИНЕЙНОЙ ТЕОРИИ

Введение. Задача определения положения ламинарно-турбулентного перехода (ЛТП) на крыловых профилях имеет важное практическое значение, поскольку положение ЛТП существенно влияет на их интегральные аэродинамические характеристики [1]. В случае естественного перехода для этой цели традиционно используется метод е<sup>N</sup>. В рамках этого метода для волн Толлмина-Шлихтинга (ТШ) вычисляется продольное распределение показателя роста наиболее неустойчивых возмущений (N-фактора, [2]) и на его основе определяется положение ЛТП. Как правило, для нахождения распределения N-фактора используется линейная теория устойчивости в рамках одномерных уравнений в предположении, что течение является параллельным [3]. Альтернативным подходом, активно развивающимся в последние годы, является глобальный анализ устойчивости (ГАУ) решений полных двумерных уравнений Навье-Стокса, автоматически учитывающий непараллельность течения [4]. Настоящая работа посвящена сравнению этих двух подходов для пограничного слоя на плоской пластине и на крыловом профиле.

Анализ устойчивости пограничного слоя на плоской пластине. Одномерный анализ устойчивости в параллельном приближении сводится к численному решению уравнения Орра-Зоммерфельда (ОЗ) для одномерного профиля продольной скорости U(y) в каждом сечении x для волн ТШ различной длины [2]. Результатом решения уравнения ОЗ для профилей в каждом сечении является зависимость скорости роста N-фактора  $\frac{dN}{dx}(x,\omega)$  от

<sup>&</sup>lt;sup>(•)</sup> В.Д. Голубков, golubkovvd@gmail.com

координаты x и частоты волн ТШ  $\omega$ . По этому распределению можно найти N-фактор для отдельных частот  $N_{\omega}(x) = \int_{0}^{x} \max\left(\frac{dN}{dx}(x',\omega), 0\right) dx'$  и искомую величину  $N(x) = \max_{\omega}(N_{\omega}(x))$ .

В рамках ГАУ рассматривается устойчивость решений полных двумерных уравнений Навье-Стокса. При этом проводится решение задачи на собственные значения для якобиана правой части этих уравнений. Полученные собственные числа отражают временное изменение амплитуды возмущений (скорость роста и частоту), а соответствующие им собственные вектора – их пространственное распределение. Обработка собственных чисел и векторов позволяет извлечь распределения  $N_{\omega}(x)$  и N(x) (подробное описание ГАУ и процедуры обработки приведено в [5]).

Пример применения ГАУ для пограничного слоя на плоской пластине при числе Рейнольдса Re =  $3 \cdot 10^6$  и числе Маха M = 0.05 приведен на рис.1 и рис.2. В частности, на рис.1а представлены полученные в результате решения спектральной задачи собственные числа, а на рис.16 – пример собственного вектора, соответствующего безразмерной частоте  $\omega_i = 87$ . Полученное из этого собственного вектора распределение  $N_{\omega}(x)$  приведено на рис.2а, а рис. 26 иллюстрирует процедуру получения зависимости N(x). Наконец, на рис.2с приведено сравнение распределений N-фактора, полученных в рамках ГАУ и параллельного анализа, которое свидетельствует о близости результатов, обеспечиваемых этими двумя подходами. При этом одномерный подход незначительно занижает величину N-фактора по сравнению с ГАХ.



Рис. 1. Собственные числа, полученные при решении задачи ГАУ для пограничного слоя на плоской пластине (а) и пример собственного вектора при ω<sub>i</sub> = 87 (б)



Рис. 2. Зависимость  $N_{\omega}(x)$  при  $\omega_i = 87$  (а), построение огибающей N(x) (б) и сравнение N(x), полученного в рамках ГАУ и в рамках одномерного подхода.

Анализ устойчивости пограничного слоя на крыловом профиле. Сравнение представленных выше подходов проводилось на примере расчета неустойчивости ТШ в пограничном слое на верхней части крылового профиля, обтекаемого под углом атаки -1° при числе Рейнольдса  $\text{Re} = 1.8 \cdot 10^6$  и числе Maxa M = 0.05 (рис.3). В этом случае пограничный слой развивается вдоль криволинейной поверхности при наличии продольного градиента давления.



Собственные числа и вектора (рис.4), полученные в рамках ГАУ для крылового профиля, качественно согласуются с собственными числами и векторами для плоской пластины. Однако, в отличие от плоской пластины, полученные в результате их обработки зависимости  $N_{\omega}(x)$  оказываются монотонно возрастающими как для ГАУ (рис.5а), так и для параллельного анализа устойчивости (рис.5б). Сравнение зависимостей N(x), полученных двумя подходами (рис.5в), свидетельствует о близости их результатов, при этом, как и в случае пограничного слоя, одномерный подход несколько занижает величину N-фактора по сравнению с ГАУ. Эта ошибка, по всем видимости, является систематической и вызвана нарушением предположения о параллельности потока, лежащего в основе одномерного подхода.



Рис. 4. Собственные числа, полученные при решении задачи ГАУ для крылового профиля (a) и пример собственного вектора при ω<sub>i</sub> = 89(б)



Рис. 5. Построение огибающей *N*(*x*) для ГАУ (а) и одномерного подхода (б) и их сравнение (в).

Заключение. Проведено сравнение распределения N-фактора, полученного в рамках одномерного подхода, с результатами ГАУ для двух пограничных слоев (на плоской пластине и на поверхности крылового профиля). Оба подхода дали близкие результаты, при этом одномерный подход несколько занижает величину N-фактора по сравнению с ГАУ. Это различие, скорее всего, связано с нарушением предположения параллельности потока, использовавшегося при выводе уравнения в одномерном подходе.

Работа выполнена при поддержке РНФ (грант № 22-11-00041).

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Schmid P.J., Henningson D.S., Stability and Transition in Shear Flows (Applied Mathematical Sciences, v.142). Springer, 2011. 556 p. ISBN: 978-1-4613-0185-1. <u>https://doi.org/10.1007/978-1-4613-0185-1\_9</u>

2. Van Ingen J. L., A Suggested Semi-Empirical Method for the Calculation of the Boundary Layer Transition Region, Univ. of Technology, Rept. UTH1-74, Delft, The Netherlands, 1956.

3. Boiko A.V., Dovgal A.V., Grek G.R., Kozlov V.V., Physics of Transitional Shear Flows: Instability and Laminar-Turbulent Transition in Incompressible Near-Wall Shear Layers. Springer, 2012. 300 p. ASIN: 9400724977.

4. Theofilis V. Global Linear Instability // Annual Review of Fluid Mechanics. 2011. V. 43. P. 319-352, 2011. <u>https://doi.org/10.1146/annurev-fluid-122109-160705</u>.

5. Беляев К.В. и др. Применение глобального анализа устойчивости для расчета характеристик волн Толлмина-Шлихтинга в пограничном слое на плоской пластине // Научно-технические ведомости СПбГПУ. Физико-математические науки. 2023. Т. 16. № 1.1. С. 218–224.

УДК 536.243

А.А. Зуев<sup>1,2</sup>, А.Г. Абрамов<sup>1</sup>, В.В. Калаев<sup>2</sup> <sup>1</sup>Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого <sup>2</sup>ООО «Софт-Импакт»<sup>(•)</sup>

# ПРИМЕНЕНИЕ ИСКУССТВЕННОЙ НЕЙРОННОЙ СЕТИ ДЛЯ КОРРЕКЦИИ ФРОНТА КРИСТАЛЛИЗАЦИИ ПРИ ЧИСЛЕННОМ МОДЕЛИРОВАНИИ ТЕПЛООБМЕНА В УСТАНОВКАХ МЕТОДА ЧОХРАЛЬСКОГО

Введение. Изучение процессов тепломассопереноса в целях улучшения характеристик полупроводниковых кристаллов при их выращивании из расплавов представляет собой комплексную наукоемкую задачу, имеющую выраженный практический интерес. Одним из высоко востребованных способов организации ростового процесса является метод Чохральского. Объективные трудности проведения экспериментов ПО изучению свободноконвективного течения и теплообмена в расплаве обусловили широкое применение методов и реализующих их пакетов вычислительной гидродинамики в качестве основного инструментария для получения содержательной информации о полях скорости, температуры и концентрации примесей. Потребность в значительных вычислительных ресурсах и неприемлемая для инженерной практики длительность расчетов при использовании вихреразрешающих подходов, а также ограниченные возможности RANS-моделей подталкивают исследователей к разработке новых расчетных методик. В условиях бурного роста популярности технологий и методов машинного обучения определенные надежды связываются с их применением для улучшения качества предсказания значимых характеристик течения и теплообмена, а также для уменьшения вычислительных затрат.

В данной работе изучаются возможности применения искусственных нейронных сетей (ИНС) для «корректировки» результатов численного моделирования глобального

<sup>(•)</sup> A.A. 3yeB, andrey.zuev@softimpact.ru

теплообмена и кристаллизации в установке метода Чохральского с акцентом на улучшение качества описания геометрии фронта кристаллизации. Производится попытка с приемлемой точностью предсказать с помощью ИНС влияние эффектов конвективного теплопереноса в расплаве на распределение теплового потока из расплава в направлении кристалла.

Постановка задачи. Стационарные расчеты по проблеме выполнялись для ростовой установки EKZ 1300 [1] в осесимметричной постановке с помощью программного пакета CGSim (Crystal Growth Simulator), разработанного и развиваемого в компании «Софт-Импакт». Расчеты течения расплава в тигле проводились модулем Flow Module в составе CGSim по методу RANS на основе оригинальной STR-к модели турбулентности [2], базирующейся на модифицированной гипотезе Буссинеска, которая позволяет учитывать анизотропию тензора рейнольдсовых напряжений. Использовалась сопряженная постановка задачи, учитывающая теплообмен с опорой тигля и кристаллом. Массовые параметрические расчеты выполнялись для получения исходных данных для обучения ИНС.

Модулем basic CGSim рассчитывался глобальный теплообмен в полной ростовой установке с RANS-моделированием течения в зоне расплава, при этом использовалась встроенная модель турбулентности с одним уравнением (модель Вольфштейна). Зафиксированная здесь форма фронта кристаллизации была получена в Flow Module. Целью этих расчетов было получение дополнительных тепловых потоков (ДТП), которые учитывают влияние на фронт кристаллизации турбулентной конвекции. На основе рассчитанных зависимостей ДТП от радиуса кристалла была обучена заимствованная из открытых источников ИНС, реализованная на языке Python с использованием фреймворка машинного обучения PyTorch.

Корректировка фронта кристаллизации. Корректировка фронта кристаллизации выполнялась на основе значения скорости роста кристалла  $V_{crys}$ . Геометрия фронта подбирались такой, чтобы  $V_{crys}$  была постоянной по всей длине интерфейса кристаллрасплав. Расчет скорости роста на интерфейсе проводился с помощью соотношения:

$$V_{crys}|n_x|\rho_{crys}\,\Delta H = Q_{crys} + Q_{melt}\,(1)\,,$$

где  $n_x$  – косинус угла между вертикальной осью и нормалью к фронту кристаллизации,  $\rho_{crys}$ – плотность кристалла,  $\Delta H$  – скрытая теплота кристаллизации,  $Q_{crys}$ ,  $Q_{melt}$  – тепловые потоки из кристалла в расплав и в обратном направлении.  $Q_{melt}$  можно представить в виде  $Q_{melt} = Q'_{melt} + \Delta Q_{melt}$ , где  $Q'_{melt}$  – тепловой поток, полученный при моделировании диффузии в расплаве без расчета движения жидкости,  $\Delta Q_{melt}$  – ДТП, который учитывает вклад эффектов конвективного переноса тепла в расплаве. Значения ДТП были получены при проведении расчетов глобального теплообмена в basic CGSim с зафиксированным «эталонным» фронтом кристаллизации, определенном в результате расчетов с применением Flow Module. Формула для вычисления ДТП записывается как

$$\Delta Q_{melt} = V_{crys} |n_x| \rho_{crys} \Delta H - \left(Q_{crys} + Q_{melt}\right) (2)$$

Некоторые вопросы использования экспериментальных данных и введения поправки к потокам для улучшения моделирования дефектов в кристалле обсуждены в работе [3].

Архитектура нейронной сети. Представленный метод позволяет изменять форму интерфейса только при наличии экспериментальной информации или данных расчетов. Возможности метода были расширены за счет привлечения ИНС прямого распространения, состоящей из входного слоя, двух скрытых слоев по 100 нейронов каждый и выходного слоя. Входными данными для ИНС являлись высота кристалла, скорость роста, скорости вращения кристалла и тигля, вертикальный и горизонтальный перепады температуры и радиальные координаты интерфейса, а на выходе получались ДТП в заданных координатах. В качестве функции активации использовалась ReLu, обучение сети выполнялось с помощью

алгоритма Adam, применялась функция ошибки MSE. Таким образом, ИНС позволяет задействовать поправку теплового потока для расчета геометрии фронта кристаллизации в условиях, для которых отсутствуют экспериментальные или расчетные данные.

Методические исследования. Важный аспект касался изучения сеточной зависимости расчетов в basic CGSim. В несошедшемся по сетке решении добавление ДТП не приводило к приемлемому согласию с эталонным фронтом. В ходе исследований была обнаружена зависимость распределения ДТП от размера первой ячейки в горизонтальном направлении на интерфейсе у тройной точки (точка на границе кристалла, расплава и газовой фазы), показанная на рис. 1. Установлено, что этот размер должен составлять не более 0.1 мм.





Рис. 2. Радиальные распределения ДТП для исходной и сглаженной геометрии интерфейса

Следует отметить также, что результаты работы ИНС оказались крайне чувствительными к гладкости и предсказуемости обучающих данных. Небольшие геометрии фронта кристаллизации, обусловленные возмущения вычислительными особенностями Flow Module, вызывали сильные изменения в распределении ДТП. Эта проблема решалась путем предварительного сглаживания геометрии интерфейса полиномом пятой степени по методу наименьших квадратов. Первые две константы полинома выбирались исходя из условия совпадения границы интерфейса с исходной. На рис. 2 показаны радиальные распределения ДТП, полученные для исходной и сглаженной геометрий интерфейса.

Результаты основных расчетов. В основной серии расчетов изучались возможности повышения качества предсказания геометрии фронта кристаллизации на промежуточных позициях по высоте кристалла и при изменении скорости вращения тигля (предсказываемая высота не входила в обучающую выборку, процесс обучения проводился для каждой высоты отдельно). На рис. За сравниваются геометрии фронтов, полученных в расчетах в Flow Module, в basic CGSim (basic) без моделирования течения в расплаве с использованием ДТП, предсказанных ИНС (ML), и в basic CGSim при расчете течения в расплаве на основе модели турбулентности Вольфштейна. На рис. Зб приведено аналогичное сравнение, но для измененной скорости вращения тигля, при которой не производилось обучение ИНС. Как видно, задействование ИНС позволяет кардинальным образом улучшить качество моделирования геометрии фронта кристаллизации.



Рис. 3. Сравнение геометрии фронтов кристаллизации в промежуточных позициях по высоте интерфейса а) при базовой и б) при измененной скорости вращения тигля (не использовавшейся при обучении ИНС)

Заключение. Представлены и обсуждены результаты исследования возможностей применения ИНС для улучшения предсказания геометрии фронта кристаллизации в промышленной установке выращивания кристаллов кремния по методу Чохральского. Сравнение геометрий фронтов, рассчитанных модулем Flow Module, с фронтами, полученными в расчетах глобального теплообмена модулем basic CGSim с задействованием предсказанного нейросетью дополнительного теплового потока, призванного учесть эффекты турбулентной конвекции, показало существенное улучшение результатов относительно варианта расчетов с применением встроенной в basic CGSim RANS-модели турбулентности.

#### ЛИТЕРАТУРА

Evstratov I.Yu., Kalaev V.V., Zhmakin A.I., et al. Modeling analysis of unsteady three-dimensional turbulent melt flow during Czochralski growth of Si crystals // J. Cryst. Growth. 2001. Vol. 230(1-2). P. 22.
Borisov D., Artemyev V., Kalaev V., et al. Advanced approach for oxygen transport and crystallization front calculation in Cz silicon crystal growth // J. Cryst. Growth. 2022. Vol. 583. Article ID: 126493.
Sabanskis A., Pläte M., Sattler A., et al. Evaluation of the performance of published point defect parameter sets in cone and body phase of a 300 mm Czochralski silicon crystal // Crystals. 2021. Vol. 11(5). P. 460.

УДК 536.331

В.А. Игнатенко<sup>1,2</sup>, В.А. Талалов<sup>1</sup> <sup>1</sup>Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого<sup>(•)</sup> <sup>2</sup>ООО «Софт-Импакт»

# СРАВНИТЕЛЬНЫЙ АНАЛИЗ МОДЕЛЕЙ ИЗЛУЧЕНИЯ, РЕАЛИЗОВАННЫХ В ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫХ ПАКЕТАХ ОБЩЕГО И СПЕЦИАЛЬНОГО НАЗНАЧЕНИЯ

Введение. В установках с высокими температурами, более 1000К, основным каналом теплопереноса является излучение, так как тепловой поток пропорционален четвертой степени температуры. Примером таких установок могут служить реакторы для газофазной эпитаксии полупроводниковых монокристаллов (ГФЭ-реакторы). При таких условиях особую значимость приобретает точный расчет излучения, для которого широко применяется метод конфигурационных факторов. Однако данный метод не предназначен для

<sup>&</sup>lt;sup>(•)</sup> В.А. Игнатенко, viktor.ignatenko@softimpact.ru

учета прохождения радиационного потока через полупрозрачные материалы. Также дополнительные ограничения на модели накладывает необходимость учета зеркального отражения и зависимости коэффициента поглощения материала от длины волны (модель несерого тела). Наиболее часто для расчета излучения в упомянутых реакторах используют метод дискретных ординат, как, например, в работе [1]. В данной работе рассмотрены модели дискретных ординат, Монте-Карло и дискретного переноса. Для расчетов использовался программный пакет ANSYS Fluent и пакет CGSim (Crystal Growth Simulator), разработанный и развиваемый в компании «Софт-Импакт».

Направленное излучение. В качестве тестовой была взята задача с параболическим зеркалом. Если в фокус параболы поместить источник излучения, а сразу после параболы – приемник, то на приемнике можно ожидать увидеть равномерное распределение потока излучения за параболой и затем резкий спад потока до нуля при пересечении параболы. На рисунке 1 представлена расчетная сетка для данной задачи, а также результаты, полученные в программе ANSYS Fluent с помощью моделей Монте-Карло и дискретных ординат. Модель дискретных ординат заключается в решении полевого дифференциального уравнения, и для него вводят схемы дискретизации I и II порядков точности. Видно, что модель Монте-Карло ведет себя ожидаемым образом, а модель дискретных ординат показывает нефизичные экстремумы. При этом результаты, полученные с методом дискретных ординат второго порядка точности, сильнее отклоняются от ожидаемых, чем с первым порядком.



Рис. 1. а) Расчетная сетка, б) тепловой поток на пластине для методов дискретных ординат I порядка точности, дискретных ординат II порядка и метода Монте-Карло

Полупрозрачные среды. В полупрозрачных средах существенный вклад в задачу теплообмена вносит учет коэффициента поглощения. В данной работе рассмотрены свойства кварца ge-124, который широко используется при производстве ГФЭ реакторов. Коэффициент поглощения для него представлен на рисунке 2а. Типичная температура излучателя составляет 1000°С в реакторах с резистивным нагревом и 3000°С в реакторах с ламповым нагревом. При таких температурах наибольшая мощность излучения сосредоточена в окрестности длины волны 1мкм. В этой области коэффициент поглощения кварца меняется значительно, поэтому особое значение приобретает выбор параметров и методики кусочно-постоянной аппроксимации данного коэффициента. Зависимость точности получаемого решения исследовалось на квазиодномерной задаче: между двумя разнонагретыми параллельными пластинами помещен кварц. Рассчитывается тепловой поток, падающий на холодную пластину. В программе Fluent задавалась трехмерная геометрия, в то время как в программе CGSim – двумерная осесимметричная, из-за особенностей этой программы.

На рис. 26 представлены расчетные данные для отнормированный тепловой поток на холодную пластину в зависимости от количества кусочно-постоянных участков. На графике представлены результаты для модели Монте-Карло (МС), дискретных ординат (DO) и дискретного переноса (DTRM). Видно, что результаты, полученные с помощью различных моделей, совпадают с удовлетворительной точностью. Видно также, что результаты сильно зависят от количества участков, выбранных при локальном осреднении коэффициента поглощения.



Рис. 2. Коэффициент поглощения кварца (а) и зависимость теплового потока от количества кусочнопостоянных участков при аппроксимации коэффициента поглощения (б)

При осреднении коэффициента поглощения важно учитывать его сугубо нелинейное распределение. Исходя из его физического смысла, более правильным представляется осреднять на коэффициент поглощения, а обратную к нему величину. На рисунке 3 представлено сравнение результатов, полученных при разных способах осреднения. Данные получены при расчетах в программе ANSYS Fluent. Видно, что при осреднении обратной величины, результаты значительно слабее отличаются друг от друга, чем при осреднении коэффициента поглощения напрямую.



Рис. 3. Зависимость теплового потока при разных способах локального осреднения коэффициента поглощения

Далее был исследован вопрос выбора количества и места разбиений для осреднения коэффициента поглощения. Исследование проводилось с помощью метода DO. Выбранные диапазоны и соответствующие им средние значения коэффициента поглощения можно видеть в таблице 1. Здесь  $\lambda_L$  – левая граница диапазона длин волн, для которого проводилось осреднение,  $\alpha$  – коэффициент поглощения.

1		2		3		4		5	
$\lambda_L  \mu$ м	α, 1/м	$\lambda_L  \mu M$	α, 1/м	$\lambda_L \mu M$	α, 1/м	$\lambda_L  \mu M$	α, 1/м	$\lambda_L  \mu M$	α, 1/м
0	0.026	5 0	0.0088	0	0.0088	0	0.0206	0	0.0088
2.5	25.16	3 1	0.3863	1	0.3863	2	0.8775	1	0.2213
4	100	2.5	25.163	2.5	13.481	2.5	13.481	1.5	0.4743
		4	1000	3	44.432	3	44.432	2	0.8775
				4	1000	4	1000	2.5	7.6217
								2.7	27.655
								3	28.028
								3.5	107.45
								4	1000

Табл. 1. Наборы коэффициентов поглощения

На рисунке 4 показано отличие теплового потока на холодной пластине от референсного теплового потока, полученного на пятом наборе. Данные приведены для трех температур горячей пластины, которые соответствуют характерным температурам излучателя при резистивном (1300К) и ламповом (3000К) нагревах, а также для промежуточной температуре (1900К). Видно, что при количестве разбиений более 3 (варианты № 2, 3, 4) отличие составляет не более 5%. Однако оптимальным по точности и вычислительным затратам можно признать вариант 3, при котором отличие составляет не более 3%. Из графика можно заметить, что погрешность увеличивается с уменьшением температуры. Это объясняется тем, что при более низкой температуре максимум планковского излучения смещается в область резкого изменения коэффициента поглощения, где погрешность аппроксимации с помощью кусочно-постоянной функции меньше. Также можно заметить, что для более высоких температур излучателя важно поставить точку разбиения, соответствующую  $\lambda = 1$ мкм.



Рис. 4. Сравнение тепловых потоков в зависимости от варианта аппроксимации коэффициента поглощения

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Hirako A., Ohkawa K. Effect of thermal radiation and absorption in GaN-MOVPE growth modeling on temperature distribution and chemical state // Journal of Crystal Growth – 2005. – vol. 276 – p. 57–63.

И.А. Игнатьев, В.В. Рис

Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого<sup>(•)</sup>

# ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ТУРБУЛЕНТНОГО ТЕЧЕНИЯ И ТЕПЛООБМЕНА В КАНАЛЕ С ОРЕБРЕННОЙ СТЕНКОЙ

Введение. Один из известных способов интенсификация теплообмена в каналах оребрение внутренних стенок [1]. Каналы с внутренним оребрением применяются в системах воздушно-конвективного охлаждения лопаток газовых турбин [2, 3] и в воздухоподогревателях, использующих солнечную радиацию [4]. Каналы охлаждения лопаток и каналы солнечных воздухоподогревателей всегда проектируются в расчете на турбулентный режим течения воздуха в диапазоне значений числа Рейнольдса от  $10^4$  до  $10^5$ . При меньших значениях этого параметра теплообмен становится слабым, при больших – резко возрастают гидравлические потери и недопустимо снижается энергетическая эффективность. Для упомянутых устройств обобщенная форма поперечного сечения каналов – прямоугольная с плоскими поверхностями стенок. Отношение ширины канала, *W*, к высоте, Н, может меняться от величины порядка единицы (в лопатках газовых турбин) до величин порядка нескольких десятков (в воздухоподогревателях). Длина каналов по отношению к поперечному размеру варьируется также в широких пределах: сравнительно короткие каналы длиной порядка 10...15 калибров характерны для лопаток, а каналы длиной, достигающей нескольких десятков калибров, образуют проточную часть воздухоподогревателей. Ребра на стенках каналов могут иметь различную конфигурацию, но предпочтительны оказываются ребра прямоугольного сечения, загромождающие проточную часть не более, чем на 10%, и установленные периодически под углом к направлению потока в канале. Шаг установки ребер обычно десятикратно превосходит их толщину, а угол установки относительно продольной оси канала составляет от 90 до 45 градусов.

Постановка задачи. В качестве прототипа оребренного канала с исследованными теплогидравлическими характеристиками выбрана модель канала, для которой в работе [5] содержатся достаточно документированные экспериментальные данные. Режимные параметры течения и теплообмена также соответствуют исследованным в [5]. В настоящей работе рассматривалось турбулентное течение воздуха с постоянными свойствами в канале, поперечное сечение которого имеет ширину W = 150 мм и высоту H = 100 мм (рис. 1). Ребра квадратного сечения  $e \times e = 10 \times 10$  мм<sup>2</sup> периодически установлены на одной из широких стенок, шаг ребра – P = 100 мм. Ребра наклонены на угол 60° относительно оси канала. Принята модель развитого течения и установившегося теплообмена, поэтому задача решается в периодической постановке на участке канала длиной P. На всех стенках задана температура  $T_w = 293$  К, среднемассовая температура воздуха -  $T_b = 333$  К. Величина температурного фактора  $T_b/T_w = 1,14$  не противоречит принятому допущению о постоянстве свойств воздуха. Свойства воздуха определены при температуре  $T_b$ , число Прандтля равно 0,7. Число Рейнольдса, определенное как  $Re = U_b D_h/v$  ( $U_b$  – среднерасходная скорость,  $D_h$  – гидравлический диаметр), менялось в расчетах от  $5 \times 10^4$  до  $2 \times 10^5$ .

Целевые параметры моделирования - коэффициент гидравлического сопротивления оребренного канала  $\lambda = (D_h/P) (\Delta p / \rho U_b^2)$ , где  $\Delta p$  - перепад давления между сечениями канала, отстоящими на расстоянии *P*, а также локальное и среднее числа Нуссельта  $Nu = [q_w/(T_w - \rho u_b^2)]$ 

<sup>&</sup>lt;sup>(•)</sup> И.А. Игнатьев, ignatyevival@yandex.ru

 $T_{\rm b}$ ] $D_{\rm h}/\lambda_{\rm a}$  и  $Nu_{\Sigma} = [q_{\rm w\Sigma}/(T_{\rm w} - T_{\rm b})]D_{\rm h}/\lambda_{\rm a}$ , где  $q_{\rm w}$  и  $q_{\rm w\Sigma}$  – локальный и средний тепловые потоки на стенке. Увеличение сопротивления и интенсификация теплоотдачи, вызванные оребрением, оценивались относительно экспериментальных данных для гладких каналов, аппроксимированных эмпирическими формулами Никурадзе и Сукомела:

$$\lambda_{\rm s} = 0.0032 + 0.221/Re^{0.237}$$
 и  $Nu_{\rm s} = 0.022Re^{0.8}Pr^{0.43}$ .





Рис.1. Оребренная стенка канала и расчетная область.

Рис. 2. Картина течения при Re = 10<sup>5</sup>: (а) - поле продольной скорости и линии тока в поперечном сечении, (б) вихрь, возникший за ребром.

Вычислительные и методические аспекты. Расчетная область, ограниченная красными линиями, показана на рис. 1 (течение направлено вдоль оси у). Расчеты со вторым порядком точности выполнены в пакете ANSYS Fluent 19.3. Турбулентное течение рассмотрено как в среднем стационарное. Турбулентные характеристики рассчитывались по k- $\omega$  SST модели. Использована квазиструктурированная расчетная сетка, состоящая из 850 000 гексаэдральных ячеек. Среднее значение координаты стенки для ближайшеой к твердой поверхности расчетной точки при максимальном значении Re не превысило 0.5.

Выбор и валидация модели турбулентности, а также вычислительной процедуры выполнены путем расчета развитого течения и стабилизированной теплоотдачи в гладком канале той же геометрии и при тех же значениях режимных параметров, что и для оребренного канала. Расхождение данных расчетов с данными по формулам Никурадзе и Сукомела не превысило 5% по сопротивлению и 1% по теплоотдаче во всем диапазоне числа Re.

Результаты расчетов. На рис. 2 представлена картина течения при  $Re = 10^5$ . В канале наблюдаются две стационарных вихревых структуры: (1) сгенерированный наклонными ребрами канальный вихрь, ориентированный вдоль канала и охватывающий большую часть поперечного сечения (рис. 1а), и (2) вихрь вблизи оребренной стенки, который сходит с верхней кромки ребра вблизи одной боковой стенки канала и распространяется поперек канала к другой боковой стенке, где сносится вверх канальным вихрем (рис. 1б).

На рис. З показаны распределения трения и теплоотдачи на гладкой части оребренной стенки. Значения коэффициента трения  $C_f$  (рис. 3a) отнесены к значениям  $C_{fs}$ , полученным с использованием формулы Никурадзе. Локальные значения числа Nu (рис. 3б) отнесены к значению числа  $Nu_s$ , рассчитанного по формуле Сукомела [5]. Предельные линии тока (рис. 3a) показывают, как меняет картину пристенного течения вихрь, сходящий с ребра. Сопоставляя линии тока и распределения трения и теплоотдачи, можно заключить, что основу интенсификации теплоотдачи составляет вихрь, сходящий с кромки ребра и распространяющийся на межреберном участке оребренной стенки.

В табл. 1 сведены данные о гидравлических потерях ( $\lambda$ ) и средней теплоотдаче на гладкой части оребренной стенки (Nu) и на всей поверхности канала ( $Nu_{\Sigma}$ ). Данные для

оребренного канала отнесены к данным, рассчитанным по формулам Никурадзе ( $\lambda_s$ ) и Сукомела ( $Nu_s$ ) для гладкого канала. Нельзя не отметить, что рассматриваемый способ интенсификации теплообмена представляется достаточно энергозатратным, т.к. рост теплоотдачи для всех *Re* менее, чем в два раза, сопровождается ростом сопротивления в 5...7 раз.



Рис. 3. Re = 10<sup>5</sup>: (a) – предельные линии тока и нормированный коэффициент трения на гладкой части оребренной стенки, (б) – нормированная теплоотдача.

$Re \times 10^{-5}$	0.5	1.0	1.5	2.0
λ	0.097	0.100	0.100	0.108
$\lambda/\lambda_s$	4.87	5.84	6.37	7.33
Nu	179.8	326.8	460.3	581.0
Nu/Nu <sub>s</sub>	1.64	1.72	1.75	1.75
$Nu_{\Sigma}$	150.0	271.7	383.8	487.2
$Nu_{\Sigma}/Nu_{s}$	1.42	1.48	1.51	1.50

Табл. 1. Данные расчетов при разных значениях числа Рейнольдса

Сопоставляя полученные данные с данными эксперимента для сравнительно короткого оребренного канала [5], отметим следующее. В [5] для диапазона числа Re от  $1 \times 10^5$  до  $2 \times 10^5$  значения коэффициента потерь почти постоянны ( $\lambda_s \cong 0.1$ ) и близки к полученным нами величинам  $\lambda$ . Вместе с тем в расчетах получено заметное отличие относительного увеличения теплоотдачи на гладкой части оребренной стенки ( $Nu/Nu_s$ ) по сравнению с экспериментом. В эксперименте отношение  $Nu/Nu_s$  при увеличении числа Re уменьшается от 1.9 до 1.7, а по нашим данным увеличивается от 1.6 до 1.8. Это расхождение может объясняться коротким участком развития теплообмена в экспериментальном канале.

Работа выполнена при поддержке Российского научного фонда, грант 23-29-00094.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Калинин Э.К., Дрейцер Г.А., Ярхо С.А. Интенсификация теплообмена в каналах. Москва: Машиностроение, 1990. – 208 с.

2. Иванов М.Я. Высокотемпературные газовые турбины. Москва: Торус пресс, 2010. 304 с.

3. Han J.-C., Dutta S., Ekkad S. Gas turbine heat transfer and cooling technology, 2nd edition. Publ. by Taylor & Francis Group. 2013. 865 p.

4. Dwivedi M.K., Choudhary M. Effect of various rib geometries on the heat transfer and friction characteristics of solar air heater: A Review // Materials Today: Proceedings, 63, 2022, pp. 272–282.

5. Байбузенко И. Н. Совершенствование воздушно-конвективных систем охлаждения лопаток турбин с внутриканальным оребрением для энергетических газотурбинных установок большой мощности: дис. канд. техн. наук: 05.04.12. – МГТУ им. И. Э. Баумана, Москва, 2019 – 155 с.

#### УДК 621.412

# В.Ю. Коекин, С. В. Булович Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого<sup>(•)</sup>

# МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ТЕПЛОФИЗИЧЕСКИХ ПРОЦЕССОВ В РОТОРНО-ЛОПАСТНОМ ДВИГАТЕЛЕ С ВНЕШНИМ ПОДВОДОМ ТЕПЛА НА ОСНОВЕ МЕТОДА СОСРЕДОТОЧЕННЫХ ПАРАМЕТРОВ

Поиск нетрадиционных источников энергии вызывает интерес к двигателям с внешним подводом тепла, преимущество которых состоит в возможности использования тепловой энергии разного рода. В работе рассматривается роторно-лопастной двигатель с внешним подводом тепла (РЛДВПТ) [1]. Конструкция двигателя была предложена свыше 100 лет назад, но только в начале нынешнего века удалось [2] реализовать эффективный кулачковый механизм, когда движение одной лопастной пары относительно другой обеспечивает сжатие и расширение для полостей между лопастями.

Двигатель работает по замкнутому термодинамическому циклу. Как и в двигателе Стирлинга в РЛДВПТ организовано циклическое сжатие и расширение рабочих камер при различных уровнях температуры. В цилиндрическом корпусе РЛДВПТ (рис. 1а) соосно расположены два ротора, каждый из которых соединен с двумя противоположными лопастями 7,9 и 8,10. Роторы с лопастями разделяют пространство внутри корпуса на четыре камеры 1 – 4. Циклическое изменение объемов камер происходит за счет возвратно-поворотного относительного движения лопастей. При вращении ротора происходит коммутация и газообмен камер 1 – 4 с горячим 5 и холодным 6 теплообменником через окна, расположенные на ободе корпуса. Окно входа в горячий теплообменник обозначено углами  $\beta_{11}$  и  $\beta_{12}$ .



Рис. 1. Схема роторно-лопастного двигателя и РV диаграмма

<sup>&</sup>lt;sup>(•)</sup> В.Ю. Коекин, koiokin@mail.ru

Кулачковый механизм обеспечивает разную угловую скорость вращения лопастей, что приводит к тому, что угловое положение торцевых плоскостей, ограничивающих, например, первую камеру, задается следующими соотношениями [3]:

$$\varphi_{1}(\alpha) = \alpha - \frac{1}{2} \left( \frac{\pi}{2} + \left( \frac{\pi}{2} - \psi_{\min} \right) \cos(2\alpha) - \psi_{\Pi} \right),$$
  
$$\varphi_{2}(\alpha) = \alpha + \frac{1}{2} \left( \frac{\pi}{2} + \left( \frac{\pi}{2} - \psi_{\min} \right) \cos(2\alpha) - \psi_{\Pi} \right),$$

где  $\alpha$  – угловая координата поворота вала,  $\varphi_1$  – положение задней торцевой плоскости,  $\varphi_2$  – положение передней торцевой плоскости,  $\psi_{min}$  – минимальный угол между осями поршней,  $\psi_{\Pi}$  – угловой размер лопастей. Положение торцевых плоскостей в остальных камерах также однозначно устанавливается по заданным угловым размерам.

Простейшая методика определения мощностных характеристик двигателя следует из анализа индикаторной диаграммы. При этом реальный цикл заменяется расчетным с идеализацией происходящих процессов [4]. Моделью следующего уровня сложности является метод сосредоточенных параметров [5], основанный на представлении всех термодинамических характеристик рабочего тела в каждой из секций двигателя в виде узловых значений.

Система уравнений, использованная нами при выполнении расчетов, для камер (1) и теплообменников (2) состоит из уравнения баланса массы, уравнения энергии и уравнения состояния.

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} (V_i \rho_i) = \dot{m}_{in(out)} \\ \frac{d}{dt} (c_v V_i \rho_i T_i) = c_p \dot{m}_{in(out)} T_{in(i)} - p_i \frac{dV_i}{dt} \quad (1), \\ p_i = \rho_i R_{gas} T_i \end{cases} \begin{cases} \frac{d}{dt} (V_i \rho_t) = \dot{m}_{in} + \dot{m}_{out} \\ \frac{d}{dt} (c_v V_i \rho_t T_t) = h (T_{w,t} - T_t) V_t + c_p (\dot{m}_{in} T_{in} + \dot{m}_{out} T_t) \quad (2), \\ p_t = \rho_t R_{gas} T_t \end{cases}$$

где  $V_{i(t)}$  – объем *i*-й камеры и *t*-го теплообменника,  $\rho_{i(t)}$ ,  $p_{i(t)}$ ,  $T_{i(t)}$  – плотность, давление и температура рабочего тела в *i*-й камере и *t*-м теплообменнике,  $R_{gas}$  – индивидуальная газовая постоянная,  $\dot{m}$  – массовый поток между *i*-й камерой и контактирующим с ней теплообменником. В уравнение баланса энергии для теплообменника добавляется слагаемое с объемным тепловыделением, h – коэффициент объемной теплоотдачи. Допускается ситуация, когда теплообменник может одновременно контактировать с двумя камерами.

Потоки массы между коммутирующими емкостями определяются по изоэнтропическим формулам для идеального газа [6]. Величина потока массы зависит от размера окна контакта и от отношения давлений в камере и теплообменном аппарате. На всех ограничивающих стенках камер предполагается условие адиабатичности, протечки отсутствуют. Приведенная система уравнений решается численно методом Эйлера. Параметры, использованные при сравнительных расчетах, приведены в табл.1.

При применении индикаторной методики расчета перемещение рабочего тела в теплообменные аппараты трактуется как изохорный процесс (рис. 16, линия b-с и d-a) и описывается двумя состояниями до и после контакта. Численное решение системы дифференциальных уравнений позволяет получить более подробную информацию. Решение, полученное по методике сосредоточенных параметров (линии 1-2 и 4-5) при адиабатическом расширении или сжатии, полностью совпадает с аналитическими выражениями по индикаторной диаграмме (a-b, c-d). Процесс перемещения рабочего тела в горячий теплообменник (2-3) и обратный процесс, наполнения емкости (3-4), происходят с конечной скоростью. При этом изменение давления в камере определяется двумя факторами. С одной стороны скоростью изменения объема камеры и размером по угловой координате отверстия

окна коммутации. В частности, этим обусловлен рост давления в камере, которое в некоторый момент превышает значение давления в горячем теплообменнике. С другой стороны, возможна ситуация (не реализованная в данном расчете), когда перетекание газа из камеры в горячий теплообменник будет сопровождаться запиранием потока. При коммутации камеры с холодным теплообменником, из-за большего размера окон, изменение давления происходит по линии (5-6) и (6-1).

таол. т. параметры дынателя				
Расчет в индикаторных	Метод сосредоточенных параметров			
параметрах				
В каче	стве рабочего тела используется воздух.			
Угловые размеры: $\psi_{min} = 54.1^{\circ}$ , у	$w_{II} = 52^{\circ}$ . Ширина лопасти $w_{II} = 0.12 m$ ; радиус обода корпуса $R_{II} = 0.12 m$ ; радиус обода корпуса корпуса ко			
125 <i>мм</i> ; радиус роторов $R_1 = 50$ <i>мм</i>	и. Суммарный объем камер $V_k = 2 \cdot 10^{-3} M^3$ . Угловая скорость ротора			
$\omega = 10\pi  pad/c.$				
Объем теплообменников много	Нагреватель и холодильник имеют конечные размеры: $V_h = 1 M^3$ ,			
больше объема рабочих камер.	$V_c = 1 M^3$ . Угловые размеры окон: $\beta_{11} = 64^\circ, \beta_{12} = 88.9^\circ, \beta_{21} = 91.1^\circ,$			
	$\beta_{22} = 116^{\circ}, \beta_{31} = 216.95^{\circ}, \beta_{32} = 268.9^{\circ}, \beta_{41} = 271.1^{\circ}, \beta_{42} = 323.05^{\circ}.$			
Температура нагревателя и	Температура нагревателя и охладителя: $T_h = 635.24K, T_c =$			
охладителя: $T_h = 603.15K$ , $T_c =$	276.17К. Коэффициент объемной теплоотдачи в теплообмен-			
300.15К. Температура рабочего	никах $h=100Bm/m^3 \cdot K$ . При массе рабочего тела в системе			
тела в теплообменнике равна	М=3.525кг реализуется установившийся режим работы с			
температуре теплообменника.	давлением в охладителе и нагревателе $p_c = 10^5 \Pi a$ и $p_h =$			
Давление в охладителе состав-	$4.08 \cdot 10^5 \Pi a$ , при этом температура газа в нагревателе и			
ляет $p_c = 10^5 \Pi a$ .	охладителе составляет 603.15К и 300.15К, что соответствует			
	параметрам индикаторного расчета.			

Табл. 1. Параметры двигателя

Опираясь на оценку площади замкнутой фигуры в PV диаграмме (Рис. 1б) можно сделать вывод, что учет деталей газообмена камер 1 – 4 с горячим теплообменником происходит с совершением положительной работы на валу двигателя. Мощность двигателя (4), полученная методом сосредоточенных параметров, отличается от мощности, полученной в расчете в индикаторных параметрах, на величину около 6% (табл. 2).

$$N = A \cdot n_i \cdot \frac{\omega}{2\pi} \qquad (4),$$

где *А* – работа за цикл, *n<sub>i</sub>* – количество камер.

Табл. 2. Мощностные характеристики

_	Расчет в индикаторных	Метод сосредоточенных	
	параметрах	параметров	
Работа за цикл А, Дж	38	40.4	
Мощность N, Вт	760	808	

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Гринев Д. В. Конструктивные схемы и принцип работы роторно-лопастных машин // Вестник ПсковГУ. Сер. Экономические и технические науки. – 2014. – С. 142 - 150.

2. Пат. №2374526 Российская Федерация, МПК F16H 24/04. Механизм для преобразования движения/ [Ю. Н. Лукьянов и др.]; патентообладатель Государственное образовательное учреждение высшего профессионального образования «Псковский государственный политехнический институт». -№2007136002/11; заявл. 01.10.2007; опубл. 10.04.2009, Бюл. № 33. 12 с.

3. Кинематический анализ рычажно-кулачкового механизма преобразования движения для роторнолопастного двигателя с внешним подводом тепла / Гринев Д. В., Донченко М. А., Журавлев Ю. Н., Клейн В. Ф. // Технологии и технические средства механизированного производства продукции растениеводства и животноводства: Сб. науч. тр., Выпуск 80 СПб.: СЗНИИМЭСХ, 2008. – С. 247–255.

4. Расчет и проектирование роторно-лопастной машины с внешним подводом теплоты: Монография / [Ю. Н. Журавлев и др.]. – Псков: ПГУ, 2012. – 72 с.

5. Анализ методов расчета параметров рабочих процессов в поршневых двигателях Стирлинга / Семенов С. Н., Перминов А. Л., Лукьянов Ю. Н., Тихонов С. И. // Вестник ПсковГУ. Сер. Технические науки. –2016. –С. 20 -27.

6. Расходные характеристики отверстий и длинных трубок при течении сжимаемого газа : метод. указания / сост.: Е. В. Колесник, С. В. Булович, В. В. Григорьев. – СПб.: ПОЛИТЕХПРЕСС, 2020. – 47 с.

УДК 621.412

В.Ю. Коекин, С. В. Булович Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого<sup>(•)</sup>

# ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ТЕРМОГАЗОДИНАМИКИ РОТОРНО-ЛОПАСТНОГО ДВИГАТЕЛЯ С ВНЕШНИМ ПОДВОДОМ ТЕПЛА

Повышение интереса к двигателям с внешним подводом тепла, вызванное их универсальностью по отношению к источнику тепловой энергии, приводит к необходимости разработки методики математического моделирования и проведению исследований, на основе полученной модели, протекающих в двигателе термогазодинамических процессов. Одним из перспективных двигателей такого типа является роторно-лопастной двигатель с внешним подводом тепла (РЛДВПТ) [1], который и рассматривается в данной работе.

Двигатель состоит из цилиндрического корпуса, где соосно расположены два ротора (рис. 1), каждый из которых соединен с двумя диаметрально расположенными лопастями (7,9 и 8,10). Роторы с лопастями разделяют пространство внутри корпуса на четыре камеры (1–4). Специальный кулачковый механизм обеспечивает вращение лопастей с разной угловой скоростью [2], которое приводит к их периодическому сближению и отдалению и вызывает циклическое изменение объемов камер. При коммутации камеры с нагревателем (5) или охладителем (6) через окна, расположенные на ободе корпуса, возникает массообмен, приводящий, в конечном счете, к заполнению камер рабочим телом с разным начальным давлением и температурой. В этом случае циклическое сжатие газа с низкой температурой и расширение газа в камере с высокой температурой происходит с совершением работы.

Цель настоящей работы заключалась в применении методов вычислительной гидродинамики к исследованию термогазодинамики РЛДВПТ.

При постановке расчетов использовались следующие определяющие параметры [3]: угловая скорость ротора  $\omega = 10\pi \ pad/c$ ; минимальный угол между осями поршней  $\psi_{min} = 54.1^{\circ}$ ; угловой размер лопастей  $\psi_{II} = 52^{\circ}$ ; ширина лопасти  $w_n = 0.12m$ ; радиус обода корпуса  $R_1 = 125m$ , радиус ротора  $R_2 = 50m$ ; суммарный объем камер  $V_k = 2.10^{-3}m^3$ ; объем нагревателя  $V_h = 1m^3$ ; объем холодильника  $V_c = 1m^3$ ;  $\beta_{ij}$  – угловое положение начала (*j*=1) и конца (*j*=2) *i*-го окна ( $\beta_{II} = 64^{\circ}, \beta_{I2} = 88.9^{\circ}, \beta_{2I} = 91.1^{\circ}, \beta_{22} = 116^{\circ}, \beta_{3I} = 216.95^{\circ}, \beta_{32} = 268.9^{\circ}, \beta_{4I} = 271.1^{\circ}, \beta_{42} = 323.05^{\circ}$ ); температура нагревателя:  $T_{w,h} = 635.24K$ ; температура холодильника  $T_{w,c} = 276.17K$ ; полная масса рабочего тела  $M=3.525\kappa_2$ .

<sup>(•)</sup> В.Ю. Коекин, koiokin@mail.ru





Рис. 1. Схема роторно-лопастного двигателя

Рис. 2. Расчетная сетка

Численное моделирование на основе уравнений Навье-Стокса проводилось с применением пакета ANSYS Fluent 2021 R2. Для корректного сравнения полученных данных с результатами по методу сосредоточенных параметров [4], расчетная область, имеющая протяженность 120*мм* в направлении оси *z*, была описана одной ячейкой в этом направлении. Количество элементов структурированной четырехугольной сетки (рис. 2) в плоскости *ху* было переменно и составляло порядка 12000 ячеек.

При изменении объемов камер возникает необходимость в перестроении расчетной сетки. Для этого используется метод динамического наслоения, суть которого заключается в манипуляции со слоем ячеек, примыкающим к движущейся границе. Если его угловой размер превосходит заданную максимальную величину, происходит дробление. Операция слияния ячеек проводится, когда угловой размер слоя, примыкающего к границе, меньше минимальной заданной величины. Для предотвращения возникновения отрицательных объемов необходимо выбирать шаг по времени таким, чтобы движущаяся граница перемещалась на расстояние меньшее минимального заданного размера ячейки. Для рассмотренного варианта шаг по времени составлял  $2 \cdot 10^{-5} c$ .

Коммутация движущихся рабочих камер и неподвижных теплообменников обеспечивалась при помощи создания сеточных интерфейсов на контактирующих границах.

Моделировалось ламинарное течение вязкого сжимаемого газа. В качестве рабочего тела использовался воздух. Начальные поля давления и температуры во всех элементах двигателя задавались на основе предварительного расчета методом сосредоточенных параметров. Полученные начальные значения соответствуют установившемуся режиму работы. На всех стенках ставилось условие адаибатичности. Условие прилипания ставилось на всех стенках, кроме поверхностей, перпендикулярных оси *z*. Предполагается отсутствие протечек.

Моделирование теплообмена в нагревателе и охладителе было выполнено по упрощенной методике и реализовано путем задания коэффициента объемной теплоотдачи. Для этого в уравнение баланса энергии, с помощью пользовательской функции, добавляется слагаемое вида  $S_h = h(T_{w,t} - T)$ . Коэффициент объемной теплоотдачи в теплообменниках был принят равным  $h = 100Bm/m^3 \cdot K$ .



Рис. 3. Циклическое изменение температуры (а) и давления (б) в первой камере

Полученные в результате расчета зависимости среднемассового значения температуры и давления от времени в первой камере двигателя за один цикл представлены на рис. 3. При анализе происходящих процессов можно выделить несколько стадий. Первый такт – сжатие (0.6с – 0.625с) – сопровождается адиабатическим повышением давления и температуры в камере. Фаза перетекания рабочего тела в нагреватель (0.625c - 0.65c) характеризуется истечением из камеры переменного объема. Расход газа определяется отношением давлений и переменным размером окна перекрытия. Дозвуковой режим течения приводит к быстрому выравниванию давления в камере. Зависимость температуры от времени имеет различия в результатах по методике сосредоточенных параметров и при численном интегрировании системы уравнений Навье-Стокса. В фазе наполнения камеры рабочим телом из нагревателя (0.65с – 0.675с) температура повышается до максимального значения. В конце этого процесса температура, вместе с давлением, начинает снижаться, что связано, с одной стороны, с увеличением размера камеры, а с другой стороны – с уменьшением размера окна контакта камеры и теплообменника и, соответственно, уменьшением массового расхода. Далее происходит такт адиабатического расширения нагретого рабочего тела (0.675*c* - 0.7*c*). В фазе выпуска рабочего тела в охладитель (0.7*с* – 0.75*с*) давление и температура быстро понижаются до уровня значений в охладителе. При наполнении камеры из охладителя (0.75с -0.8*c*) термодинамические величины держатся на постоянном уровне.

Следует отметить, что, в отличие от расчета по методике сосредоточенных параметров, в решении двумерной задачи различимы возмущения давления и температуры в камере при

ее контакте с теплообменниками. Это поведение термодинамических функций можно объяснить волновыми процессами, если рассматривать камеру как резонатор переменного объема и изменяемой площадью проходного сечения.



Интегральные характеристики роторно-лопастного двигателя более консервативны по отношению к сопоставляемым методам моделирования. В частности, работа, совершаемая за цикл (рис. 4), полученная при расчете в пакете Fluent составляет 39.7Дж, а по методу сосредоточенных параметров – 40.4Дж. Разница составляет менее 2%. Таким образом, интегральные результаты, полученные разными методами моделирования термогазодинамических процессов, хорошо согласуются между собой.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Гринев Д. В. Конструктивные схемы и принцип работы роторно-лопастных машин // Вестник ПсковГУ. Сер. Экономические и технические науки. - 2014. - С. 142 -150.

2. Кинематический анализ рычажно-кулачкового механизма преобразования движения для роторнолопастного двигателя с внешним подводом тепла / Гринев Д. В., Донченко М. А., Журавлев Ю. Н., Клейн В. Ф. // Технологии и технические средства механизированного производства продукции растениеводства и животноводства: Сб. науч. тр., Выпуск 80 СПб.: СЗНИИМЭСХ, 2008. – С. 247– 255.

3. Расчет и проектирование роторно-лопастной машины с внешним подводом теплоты: Монография / [Ю. Н. Журавлев и др.]. - Псков: ПГУ, 2012. – 72 с.

4. Анализ методов расчета параметров рабочих процессов в поршневых двигателях Стирлинга / Семенов С. Н., Перминов А. Л., Лукьянов Ю. Н., Тихонов С. И. // Вестник ПсковГУ. Сер. Технические науки. –2016. –С. 20 -27.

# А.В. Масюкевич<sup>1</sup>, Н.А. Монахов<sup>1</sup>, Е.В. Бабич<sup>2</sup>, Е.В. Колесник<sup>1, 2</sup> <sup>1</sup>Физико-технический институт им. А.Ф. Иоффе РАН<sup>(•)</sup> <sup>2</sup>Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого,

# ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ УДАРНОЙ ВОЛНЫ С ТРЕХМЕРНЫМИ ПРЕПЯТСТВИЯМИ

Введение. Несущие поверхности и рули управления являются неотъемлемыми элементами современной авиационной техники. Исследование взаимодействия пограничного слоя и выступающих затупленных элементов высокоскоростных летательных аппаратов является одной из важных задач прикладной и фундаментальной газодинамики. Формирующиеся в таком течении ударные волны взаимодействуют с пограничными слоями, развивающимися вдоль обшивки аппарата, что приводит к сложной существенно трехмерной течения. Экспериментальное исследование картине таких задач, как правило, осуществляется на аэродинамических трубах длительного действия [1-3]. Однако наиболее полным образом условия аэротермодинамики реального полета в атмосфере удается воспроизвести при использовании установок импульсного действия (см., например, [4-6]). Одним из возможных способов исследования взаимодействия ударной волны с трехмерными препятствиями является размещение тела на стенке ударной трубы в камере низкого давления, в этом случае реализуется обтекание исследуемого тела спутным потоком за падающей ударной волной. Такая постановка позволяет исследовать явления, происходящие при взаимодействии отошедшей ударной волны и формирующегося на внутренней стенке ударной трубы пограничного слоя.

*Целью* настоящей работы является экспериментальное исследование ударно-волновой картины течения при обтекании цилиндра, установленного на стенке ударной трубы, спутным сверхзвуковым потоком за падающей ударной волной.

Оборудование методика исследования. Экспериментальное u исследование проводилось на прямоугольной ударной трубе ФТИ им. А.Ф. Иоффе (рис. 1a) со следующими характеристиками: длина камеры высокого давления составляет 1.08 м, камеры низкого давления 10 м, внутреннее сечение 150х50 мм. Измерение скорости падающей ударной волны вблизи места установки модели проводится с помощью ДВУХ пьезоэлектрических датчиков давления, расположенных на расстоянии 730 мм друг от друга. Регистрация сигналов датчиков осуществляется с помощью цифрового осциллографа TDS-2024С с временным разрешением 10 мкс; погрешность измерения скорости ударной волны не превышает 5%. Измерения давления в камере ударной трубы проводится с помощью датчика InstruTech CVG101GC, с погрешностью 10%. В экспериментах рабочим газом являлся воздух, а в качестве толкающего использовался гелий.

В работе исследовалось обтекание круглого цилиндра, который установлен вертикально в центральном сечении ударной трубы (рис. 1б). Основными параметрами, определяющими характер взаимодействия ударной волны с пограничным слоем, являются число Маха спутного потока и число Рейнольдса, построенное по характерному размеру обтекаемой модели. При этом форма и отношение размеров модели к размерам канала существенным образом влияет на структуру, возможность установления и длительность стационарного обтекания. Для оценки значений параметров, при которых реализуется стационарное обтекание модели сверхзвуковым спутным потоком, в экспериментах варьировалось начальное давление в камере низкого давления и диаметр цилиндра. В табл. 1

<sup>&</sup>lt;sup>(•)</sup> А.В. Масюкевич, 79313165906@yandex.ru

приведены начальные условия экспериментов и параметры спутного потока газа, рассчитанные по идеальной теории ударной трубы с учетом реальных свойств газа. В экспериментах проводилась теневая фотосъемка области течения вблизи сочленения стенки трубы и цилиндра, а также регистрировалось давление в нескольких точках в области перед цилиндром (датчики давления расположены на расстоянии 850 мм (P1), 120 мм (P2) и 75 мм (P3) от лобовой точки цилиндра).



Рис. 1. Внешний вид прямоугольной ударной трубы ФТИ им. А.Ф. Иоффе (а); закрепленный в центральном сечении ударной трубы цилиндр, расположенный в поле зрения теневой системы (б)

Режим	D, мм	<b>Р</b> <sub>1</sub> , торр	$M_1$	M <sub>2</sub>	ρ <sub>2</sub> , кг/м <sup>3</sup>	u <sub>2</sub> , м/с	Т2, К	µ₂, мкПа∙с	$Re/10^{4}$
1	12	100	2.83	1.32	0.572	733	737	34.5	14.5
2		10	4.47	1.61	0.073	1224	1390	50.6	2.1
3	6	100	2.83	1.32	0.572	733	737	34.5	7.3
4		10	4.47	1.61	0.073	1224	1390	50.6	1.1

Табл. 1. Начальные условия экспериментов и параметры спутного потока

*Результаты*. На рис. 2 представлены осциллограммы давления, зарегистрированные в режиме 1 и 2 (табл. 1). Горизонтальной линией показано рассчитанное по одномерной теории значение давления за падающей ударной волной. Первый скачок давления на приведенных осциллограммах соответствует прохождению падающей ударной волны, второй скачок давления соответствует движущейся против потока отраженной от цилиндра ударной волны. Движение в обратном направлении вызвано взаимодействием ударной волны со стенками трубы.



Рис. 2. Осциллограммы давления для режима 1 (а) и 2 (б)

Отметим, что для режима 1 сразу после первого скачка наблюдается падение уровня давления (рис. 2a), вызванное приходом отраженной от торца камеры высокого давления

волны разрежения, которая обгоняет падающую ударную волну. В случае же режима 2 существует промежуток времени, в течение которого реализуется обтекание цилиндр стационарным спутным потоком (рис. 2б).

Теневые фотографии, показанные на рис. 3, иллюстрируют ударно-волновую картину течения. При взаимодействии отраженной от поверхности тела ударной волны с пограничным слоем на нижней стенке трубы наблюдается образование лямбда-конфигураций. Наблюдаемое уширение фронта ударной волны на начальном этапе взаимодействия вызвано ее цилиндрической формой. Видно, что при обтекании цилиндра диаметром 12 мм картина нестационарная для обоих режимах (рис. 3, верхний ряд). Движение отраженной волны вверх по потоку вызвано взаимодействием волны с боковыми стенками, при котором волна из цилиндрической трансформируется в прямую. Аналогичная картина наблюдается в случае цилиндра диаметром 6 мм и  $M_2=1.6$  (режим 4) наблюдается квазистационарная картина обтекания до момента времени 150 мкс от момента прихода падающей ударной волны к цилиндру.



Рис. 3. Теневые картины для режимов 1 – 4 (а – г). На картинах тело расположено справа

Заключение. Полученные результаты показывают применимость используемой ударной трубы для исследования взаимодействия ударной волны с трехмерным препятствием. Выбраны режимы работы ударной трубы и диаметр цилиндра, при которых наблюдается стационарное обтекание модели спутным потоком. На основе высококачественных теневых фотографий, позволяющих визуализировать детали ударно-волнового взаимодействия, проанализирована картина течения вблизи области сочленения цилиндра и стенки ударной трубы.

Работа выполнена при финансовой поддержке гранта РНФ № 23-29-00286.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Tutty O.R., Roberts G.T., Schuricht P.H. High-speed laminar flow past a fin-body junction // Journal of Fluid Mechanics. – 2013. – Vol. 737. – P. 19-55.

2. Combs C. S. et al. Investigating unsteady dynamics of cylinder-induced shock-wave/transitional boundary-layer interactions // AIAA journal. – 2018. – T. 56. – №. 4. – C. 1588-1599

3. Lindorfer S. A. et al. Scaling of cylinder-generated shock-wave/turbulent boundary-layer interactions // Shock Waves. – 2020. – T. 30. – №. 4. – C. 395-407.

4. Itoh H., Mizoguchi M. Method for visualizing viscous interaction in hypersonic low-density flows using electrical discharge // Journal of Spacecraft and Rockets.  $-2017. - T. 54. - N_{\odot}. 1. - C. 225-232.$ 

5. Reynier P. Survey of high-enthalpy shock facilities in the perspective of radiation and chemical kinetics investigations // Progress in Aerospace Sciences. – 2016. – T. 85. – C. 1-32.

6. Gu S., Olivier H. Capabilities and limitations of existing hypersonic facilities // Progress in Aerospace Sciences. – 2020. – T. 113. – C. 100607.

#### УДК 544.3, 536.46, 661.48

М.А. Олисов, Д.С. Пашкевич, А.А. Плетнев, В.В. Капустин, А.Р. Зимин Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого<sup>(•)</sup>

### РАСЧЕТНОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ ТЕРМОДИНАМИЧЕСКИ РАВНОВЕСНОГО СОСТАВА ВЕЩЕСТВ В СИСТЕМЕ ЭЛЕМЕНТОВ В-F-H-O-C

Введение. Трифторид бора находит широкое применение в современной промышленности – его используют при производстве изотопов В-10 для ядерного топливного цикла и В-11 для микроэлектроники, в качестве катализатора в органическом синтезе и др. Производство BF<sub>3</sub> в мире достигает 5000 тонн в год. Основным промышленным методом получения BF<sub>3</sub> является фторирование  $B_2O_3$  или борной кислоты фторидом водорода, часто получаемым in situ из CaF<sub>2</sub> и H<sub>2</sub>SO<sub>4</sub> при температуре около 200 °C за время порядка единиц часов [1].

При получении B-10 и B-11 трифторид бора после стадии изотопного разделения гидролизуют в присутствии CaCO<sub>3</sub> и получают H<sub>3</sub>BO<sub>3</sub>. Образующийся при этом CaF<sub>2</sub> складируют на полигонах промышленных отходов, тем самым выводя фтор из технологического цикла [2].

Поскольку АО «ТВЭЛ» планирует увеличение производства BF<sub>3</sub> и B-10 в России, становится актуальной задача разработки научных основ регенерации фтора из BF<sub>3</sub> и замыкания процесса производства изотопов бора по фтору.

Регенерацию фтора из фторидов, кроме фторидов щелочных и щелочноземельных металлов, целесообразно проводить гидролизом при взаимодействии фторида с водородсодержащим веществом и  $O_2$  в режиме горения так, чтобы основным фторсодержащим продуктом указанного процесса являлся НF [3]. Показано [4], что состав продуктов процесса горения при переработке UF<sub>6</sub> близок к термодинамически равновесному при температуре порядка 2000 К.

Методика и результаты расчетов. Известно, что  $BF_3$  подвергается гидролизу с образованием HF. В литературе сообщается, что состав продуктов гидролиза определяется условиями реакции. Поэтому в рамках построения модели реакции нами были проведены расчеты зависимостей изменения энергии Гиббса от температуры для реакций гидролиза  $BF_3$  с образованием  $HBO_2$ ,  $B_2O_3$ , FBO без избытка воды в продуктах реакции. Также были рассчитаны термодинамически равновесные составы веществ при гидролизе  $BF_3$  в зависимости от температуры с помощью собственного расчетного кода и коммерческих кодов «АСТРА-4» и "Chemical WorkBench". Было показано, что для получения HF в качестве основного фторсодержащего вещества гидролиз целесообразно проводить при температуре выше 1500 К.

<sup>&</sup>lt;sup>(•)</sup> М.А. Олисов, misha.olisov@yandex.ru

Для достижения указанной температуры можно проводить процесс регенерации фтора из BF<sub>3</sub> в виде HF по схеме:

 $BF_{3 ra3} + x_1 CH_4 ra3 + x_2 O_2 ra3 \rightarrow$ 

 $\rightarrow y_1 FBO_{ra3} + y_2 B_2 O_{3 ra3} + y_3 HBO_2 + y_4 HF_{ra3} + y_5 H_2 O_{ra3} + x_1 CO_{2 ra3} + \dots$ (1)

В (1) тепловыделение составляет величину порядка 500 кДж, а адиабатическая температура продуктов реакции – порядка 2000-3000 К для различных значений x<sub>i</sub> и y<sub>i</sub>.

Для системы элементов B-F-H-O-C с помощью кода «АСТРА-4» были рассчитаны термодинамически равновесные составы веществ в зависимости от температуры для различных значений x<sub>1</sub> и x<sub>2</sub>. Результаты расчетов представлены на рис. 1 и 2.



Рис. 1. Концентрация компонентов С (моль.%) в термодинамически равновесной смеси веществ в системе элементов B-F-C-O-H (x<sub>1</sub> = 1 и x<sub>2</sub> = 2 в (1)) в зависимости от температуры Т



Рис. 2. Концентрация компонентов С (моль.%) в термодинамически равновесной смеси веществ в системе элементов B-F-C-O-H (x<sub>1</sub> = 5 и x<sub>2</sub> = 10 в (1)) в зависимости от температуры Т

Для значений  $x_1=1$ ,  $x_2=2$  при температуре выше 2000 К степень регенерации фтора в виде 78%-й плавиковой кислоты составила 75%. Основными борсодержащими веществами в этих условиях являются HBO<sub>2</sub> (27% в пересчете на исходный бор) и FBO (73%).

Для значений x<sub>1</sub>=5, x<sub>2</sub>=10 (избыток воды) при температуре выше 2000 К степень регенерации фтора в виде 25%-й плавиковой кислоты составила 90%. Основными борсодержащими веществами в этих условиях являются HBO<sub>2</sub> (77%) и FBO (23%).

Фториды и фториды-оксиды углерода в термодинамически равновесной смеси отсутствуют.

Из результатов проведенных расчетов следует, что при температуре ниже 1500 К FBO превращается в (FBO)<sub>3</sub>, который при температуре ниже 1200 К разлагается с образованием  $B_2O_3$  и BF<sub>3</sub>. Это подтверждается данными [5]. Т.о., BF<sub>3</sub>, который образуется из (FBO)<sub>3</sub> при охлаждении потока на выходе из реактора типа «туннельная горелка», можно направить в рецикл на взаимодействие с CH<sub>4</sub> и O<sub>2</sub> в режиме горения в этот же реактор, предварительно разделив его с CO<sub>2</sub>.

При температуре ниже 1500 К в смеси продуктов процесса горения будет протекать реакция фторирования борной кислоты фторидом водорода. Поэтому эту смесь целесообразно охлаждать с возможно более высокой скоростью. Характерное время охлаждения потока продуктов процесса (1) от 1500 К до 573 К при  $x_1=5$ ,  $x_2=10$ , производительности 10 кг<sub>BF3</sub>·час<sup>-1</sup> в трубе диаметром 50 мм с температурной стенки 450 К составляет величину порядка  $10^{-1}$  с. Т.о., реакцией фторирования борной кислоты фторидом водорода при их охлаждении ниже 1500 К до разделения при конденсации борной кислоты, вероятно, можно пренебречь. Это подтверждается результатами [4].

Заключение. Таким образом, практически полная регенерация фтора из BF<sub>3</sub> гидролизом в виде HF при температуре выше 2000 К термодинамически не запрещена. Указанная температура может быть достигнута при взаимодействии BF<sub>3</sub> с CH<sub>4</sub> и O<sub>2</sub> в режиме горения.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Патент RU 2671345 С2. Российская Федерация, МПК С01В 7/19. Способ производства фтороводорода: № 2017100030: заявл. 02.07.2015: опубл. 30.10.2018 / А. Сасатани, Т. Киносита, Т. Йосимура, А. Табути, М. Имото. – 29 с.

2. Патент RU 194053 U1. Российская Федерация, МПК B01D 59/28, C01B 35/00. Установка для получения изотопа бор-10: № 2019123102: заявл. 22.07.2019: опубл. 26.11.2019 / Л.А. Лебедев. – 10 с.

3. Пашкевич Д.С. Регенерация фтора в форме фторида водорода из пламени летучих фторосодержащих отходов в пламени водородосодержащего топлива и ксилородосодержащего окислителя // Химическая физика. - 2019. - Т.38. № 11. - С. 23-33.

4. Пашкевич Д.С., Зимин А.Р., Капустин В.В., Петров В.Б. Получение фторида водорода при взаимодействии гексафторида урана с водородом и кислородом в режиме горения. Термодинамический анализ // Инженерно-физический журнал. - 2021. - Т. 94. № 4. - С. 987-995.

5. Siegel, B. / The oxyhalides of the III-B elements // Inorganica Chimica Acta Reviews. 2 - December 1968 - 137–146 p. doi:10.1016/0073-8085(68)80019-1.

Д.С. Осадчий<sup>1,2</sup>, А.В. Махнов<sup>1,2</sup>, Е.В. Колесник<sup>1,2</sup> <sup>1</sup>Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого<sup>(•)</sup> <sup>2</sup>Физико-технический институт имени А.Ф. Иоффе Российской академии наук

# ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ СВЕРХЗВУКОВОГО ЛАМИНАРНОГО ОБТЕКАНИЯ ТЕЛ ВРАЩЕНИЯ ПОТОКОМ ВЯЗКОГО ГАЗА

Исследование структуры течения в задачах обтекания высокоскоростным потоком вязкого газа различных геометрических конфигураций имеет широкое практическое применение для решения инженерных задач в аэрокосмической отрасли. Для практических приложений наиболее важными характеристиками обтекания являются динамические и тепловые нагрузки, поскольку эти параметры важно учитывать при конструировании. Вместе с тем, даже при обтекании модельных конфигураций, например, тел вращения, как правило, возникает сложная структура течения, которая характеризуется наличием системы скачков уплотнения, отрывных областей, что приводит к существенно неоднородному распределению давления и теплового потока по обтекаемой поверхности. Поэтому одной из важных для практики задач является возможность надежного предсказания характеристик течения с помощью численных методов. Использование численного моделирования в задачах данного класса часто сопряжено с высокой чувствительностью получаемого результата как к сеточному разрешению, так и к выбору и настройкам используемой численной схемы; при этом отдельный интерес представляет тестирование возможностей открытых свободно-распространяемых кодов. В настоящей работе представлены результаты численного моделирования обтекания сверхзвуковым потоком вязкого газа двух тел вращения: конуса и двойного конуса (геометрия показана на рис. 1); отметим, что эти «представительные» модельные задачи широко используются для тестирования и валидации СFD-кодов [1-3]. Расчеты проведены с использованием свободно распространяемого конечно-объемного CFD-кода Eilmer, который входит в пакет GDTk (Gas Dynamics Toolkit), разрабатываемый в Университете Квинсленда (Австралия). Код ориентирован на расчет течений сжимаемого газа, в том числе с возможностью учета реальных свойств газа и химических реакций. Результаты расчетов сопоставляются с результатами, полученными по прошедшему многолетнюю апробацию конечно-объемному «неструктурированному» коду SINF/Flag-S, разрабатываемому в Физико-механическом институте СПбПУ, а также с известными аналитическими и экспериментальными данными [1, 3].

Численное моделирование проводилось на основе решения уравнений Навье-Стокса для термически и калорически совершенного газа с коэффициентом вязкости, зависящим от температуры по закону Сазерленда. Рабочим газом является азот (число Прандтля Pr = 0.7, показатель адиабаты  $\gamma = 1.4$ ). Представленные ниже результаты получены с использованием схем семейства "AUSM" для расчета невязких составляющих потоков второго порядка аппроксимации по пространству (в обоих кодах).



Рис. 1. Схема обтекания конуса (а) и двойного конуса (b) сверхзвуковым набегающим потоком.

*(a)* 

<sup>&</sup>lt;sup>(•)</sup> Д.С. Осадчий, danos2001@mail.ru

Первый тест представляет собой сверхзвуковое обтекание конуса с углом полураствора  $\alpha = 30^{\circ}$  при числе число Маха  $M_{\infty} = 5$  (рис. 1*a*). Длина образующей конуса составляет L = 0.034 м, число Рейнольдса (на единицу длины)  $\text{Re}_{\infty}[1/\text{M}] = 4.72 \cdot 10^{6}$ . Поверхность конуса поддерживается при постоянной температуре  $T_{w} = 300$  K, температурный фактор  $T_{w}/T_{\infty} = 0.576$ . Расчеты проведены на серии квазиструктурированных измельчающихся сеток, параметры которых приведены в табл. 1, указано общее количество ячеек сетки ( $N_{\text{cell}}$ ) и размер первой пристенной ячейки ( $\Delta_1$ ).

(	Обтекание конуса	l	Обтекание двойного конуса			
	$N_{\rm cell}$	$\Delta_1$ , mm		$N_{\rm cell}$	$\Delta_1$ , mm	
mesh 1	4250	0.1	mesh 1	8192	0.023	
mesh 2	11760	0.05	mesh 2	32768	0.011	
mesh 3	26880	0.02	mesh 3	131072	0.005	
mesh 4	30240	0.01				

Табл. 1. Параметры расчетных сеток

На рис. 2 показаны распределения коэффициента давления и коэффициента теплового потока по поверхности конуса [1]:

$$C_P = \frac{p - p_{\infty}}{1/2\rho_{\infty}V_{\infty}^2}, \qquad \qquad C_H = \frac{q_{wall}}{1/2\rho_{\infty}V_{\infty}^3}$$

По данным на рис. 2а видно, что даже с использованием самой грубой сетки (при расчетах по двум кодам) наблюдается хорошее согласие рассчитанного коэффициента давления с аналитической оценкой [3]. Распределение теплового потока, полученного в расчетах на серии измельчающихся сеток (на рис. 2 приведены данные, полученные по коду SINF/Flag-S) показывают весьма высокую чувствительность предсказываемого теплового потока к пространственному разрешению, особенно вблизи носика конуса. В целом, решения, полученные с использованием сеток «mesh 3» и «mesh 4», достаточно близки при x/L > 0.4.



Рис. 2. Распределения коэффициента давления (*a*) и коэффициента теплового потока (*b*) вдоль поверхности конуса. Теоретические данные по *C*<sub>p</sub> представлены в работе [3].

Постановка второй тестовой задачи основана на данных работы [1], где исследовалось обтекание двойного конуса с углами полураствора первого и второго конусов, равными 25° и 55°, соответственно (рис. 1*b*); длины образующих обоих конусов равны между собой и составляют L = 9.17 см. Набегающий поток, в соответствии с [1], характеризуется следующими значениями: число Маха  $M_{\infty} = 12.49$ , число Рейнольдса  $\text{Re}_{\infty} [1/\text{M}] = 1.82 \cdot 10^4$ , температурный фактор  $T_w/T_{\infty} = 2.894$ . Поверхность конуса поддерживается при постоянной температуре  $T_w = 295.8$  К. Расчеты выполнены на трех квазиструктурированных сетках, параметры которых приведены в табл. 1.

На рис. 3 показаны поля модуля градиента плотности (численная шлиренвизуализация), полученные в расчетах с использованием кода SINF/Flag-S на трех сетках. Видно, что разрешение сложной ударно-волновой структуры, формирующейся в области соединения конусов, существенно зависит от сеточного разрешения. В частности, на сетке «mesh 1» волновые структуры вблизи области отрыва выглядят достаточно сильно сглаженными численной диффузией, а эффекты отражения косых скачков вблизи поверхности второго конуса (отчетливо видны на рис. 3с), не воспроизводятся.

На рис. 4 показаны распределения коэффициенты давления и теплового потока вдоль поверхности двойного конуса.



Рис. 3. Поля модуля градиента плотности, полученные в расчетах на трех сетках: (a) mesh 1, (b) mesh 2, (c) mesh 3.



Рис. 4. Распределения коэффициенты давления (*a*) и теплового потока (*b*) вдоль поверхности двойного конуса. Экспериментальные данные представлены в работе [1].

Следует отметить (рис. 4), что даже в случае наиболее подробной из используемых сеток «mesh 3» пространственного разрешения недостаточно для получения сеточнонезависимого решения. При этом положение точки отрыва, полученное в расчете на сетке «mesh 3», оказывается достаточно близким к экспериментальному.

Величины пиков давления и теплового потока на поверхности второго конуса заметно завышены по сравнению с экспериментом, что также отмечается и в других исследованиях [1] и, предположительно, связано с использованием модели совершенного газа. Сопоставление результатов, полученных с использованием кода SINF/Flag-S и Eilmer на сетке «mesh 2» показало, что распределения коэффициентов давления и теплового потока, а также положение точки отрыва достаточно близки друг к другу.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. MacLean M., Holden M. Validation and Comparison of WIND and DPLR Results for Hypersonic, Laminar Problems / 42nd AIAA Aerospace Sciences Meeting and Exhibit. Reno, Nevada, 2004. AIAA-Paper 2004-0529. 2. Holden M.et al. Experimental Studies in the LENS Supersonic and Hypersonic Tunnels for Hypervelocity Vehicle Performance and Code Validation / 15th AIAA International Space Planes and Hypersonic Systems and Technologies Conference. Dayton, Ohio, 2008. AIAA-Paper 2008-2505.

3. Краснов Н. Ф. Аэродинамика тел вращения. - Издание 2-е, переработанное и дополненное. — М.: Машиностроение, 1964. — 573 с.

УДК 532.517

# А.Д. Подмаркова, М.А. Засимова

Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого<sup>(•)</sup>

# ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ НЕИЗОТЕРМИЧЕСКОГО СТРУЙНОГО ТЕЧЕНИЯ, ВОЗНИКАЮЩЕГО ПРИ ДЫХАНИИ ЧЕЛОВЕКА

Одной из актуальных технических проблем является разработка Введение. персонализированных систем вентиляции, обеспечивающих индивидуальную подачу свежего воздуха в зону дыхания. Необходимо учитывать сложную трехмерную структуру течения внутри вентилируемого помещения, возникающую при взаимодействии окружающей среды и находящегося в этом помещении человека. На структуру течения в помещении может оказывать влияние дыхание человека, что зачастую не учитывается в проводимых экспериментальных и численных исследованиях. Так, в [1] в условиях перемешивающей вентиляции проведены экспериментальные измерения полей скорости и температуры в помещении, в котором находился сидящий тепловой манекен, при этом дыхание манекена не учитывалось. В то же время имеется ряд исследований, в которых моделировался процесс дыхания, см., например, [2,3]; чаще всего рассматривались задачи со стационарной подачей воздуха из ноздрей и/или рта манекена или человека. В [3] на основе экспериментов для группы людей (25 человек с разной площадью поверхности носа и рта) обобщены результаты измерений модуля скорости и направления выдыхаемой воздушной струи, даны оценки угла раскрытия струи; данные [3] взяты за основу при постановке задачи в настоящей работе.

Постановка задачи и параметры течения. Рассматривается обтекание теплового манекена (модели человека) в вентилируемом помещении (рис. 1a) со следующими геометрическими характеристиками: длина помещения (размер вдоль оси x) L = 2.44 м, высота (размер вдоль оси y) – H = 2.46 м, ширина (размер вдоль оси z) – W = 1.2 м.

<sup>&</sup>lt;sup>(•)</sup> А.Д. Подмаркова, ann.podmarkova@mail.ru

Однородный поток воздуха поступает в помещение с постоянной скоростью через всю поверхность одной из торцевых стенок (в плоскости x = 0), обозначенной как «вход». На противоположной от входа стене расположены два круглых выходных отверстия, центрированных в поперечном направлении и имеющих одинаковый диаметр  $d_{out} = 0.25$  м. Центры нижней и верхней окружностей отстоят от пола и потолка соответственно на расстояние 0.6 м. Сидящий тепловой манекен находится на расстоянии 0.7 м от входного сечения. Геометрические характеристики манекена следующие: ширина w = 0.545 м, высота h = 1.4 м (рис. 1г). Рассматривается дыхание через нос; модель ноздрей представляет собой два параллельных канала, диаметр которых равен d = 8мм, длина 80 мм (рис. 1б). Угол наклона каналов,  $\alpha$ , принят равным 50 градусам (рис. 1в).

Задача определяется следующими граничными условиями. Во входном сечении залается однородное значение скорости:  $V_{\rm in} = 0.27 \, {\rm M/c}$ (соответствует помешения  $V_{\rm in} = 0.01 \, {\rm m/c}$ (свободноконвективный перемешивающей вентиляции) или режим. вынужденное течение практически отсутствует). Температура поступающего в помещение воздуха принята равной 20.4 °C. На выходных отверстиях задаются мягкие граничные условия. Стенки помещения теплоизолированные. Поверхность манекена поддерживается при постоянной температуре  $T_{\rm w} = 34$  °C.

Рассмотрены три постановки задачи: в первом случае на входных сечениях ноздрей задается скорость, равная  $V_{\rm br} = 0$ , что соответствует отсутствию дыхания; во втором моделируется истечение стационарной струи из ноздрей манекена с постоянной скоростью  $V_{\rm br} = 4.8$  м/с; в третьем случае рассматривается подача имитирующей вдох и выдох импульсной струи, описываемой по синусоидальному закону  $V_{\rm br} = 4.8 \, {\rm sin}(0.5 \pi {\rm t})$  м/с, один цикл вдоха-выдоха составляет 4 с. Температура выдыхаемого воздуха для всех вариантов принята равной температуре поверхности манекена  $T_{\rm br} = 34$  °C.

Теплофизические свойства воздуха считаются постоянными:  $\rho = 1.225 \text{ кг/м}^3$ ,  $C_p = 1006 \text{ Дж/кг·K}, \lambda = 0.0242 \text{ Bt/m·K}, \mu = 1.789 \cdot 10^{-5} \text{ кг/м·c}, \beta = 0.00339 \text{ 1/K}.$ 

Математическая модель. Неизотермическое нестационарное течение воздуха в помещении моделировалось путем решения нестационарных осредненных по Рейнольдсу уравнений Навье-Стокса (URANS подход) с использованием стандартной *k*- $\varepsilon$  модели турбулентности. На входной границе интенсивность турбулентности задавалась равной 6%, а отношение турбулентной вязкости к молекулярной – 10. Эффекты плавучести учитывались в приближении Буссинеска.

Вычислительные аспекты. В расчетах использовались неструктурированные сетки, состоящие из полиэдральных элементов, общей размерностью 600 тыс. ячеек для вариантов без учета дыхания и 11 млн ячеек для вариантов с имитацией дыхания манекена. Сгущение сеток осуществлялось к твердым поверхностям комнаты и манекена; для вариантов с моделями дыхания сгущение осуществлялось и в области дыхания (см. рис. 1в). Численное решение получено с помощью коммерческого гидродинамического пакета ANSYS Fluent 19.3 с привлечением ресурсов суперкомпьютерного центра «Политехнический» (при решении задач использовались от 28 до 280 ядер). Дискретизация пространственных и временных производных выполнена со вторым порядком точности.

*Результаты.* При перемешивающем режиме вентиляции для вариантов с учетом и без учета модели дыхания за манекеном формируется обширная отрывная зона, в которой воздух прогревается на 2°С, под действием силы плавучести отрывная зона смещается к потолку помещения. В случае свободноконвективного режима тепловой факел формируется над манекеном, тепловой факел инициирует вторичное течение в области перед манекеном. В этом случае возникает стратификация температуры по высоте, вблизи потолка воздух прогревается на 3°С. Для варианта расчета с перемешивающим режимом течения без учета
модели дыхания имеются экспериментальные данные [1]. Результаты расчетов согласуются с экспериментальными по данным скорости и температуры.



Рис. 1. а) Геометрия расчетной области; б) фрагмент геометрии вблизи лица; в) фрагмент расчетной сетки в центральном сечении вблизи лица; г) геометрические характеристики теплового манекена

В работе исследовалось также влияние дыхания на глобальную структуру течения в вентилируемом помещении. При стационарной подаче воздуха из ноздрей нагретые струи на расстоянии четырех калибров вниз по потоку сливаются в одну струю, колеблющуюся относительно своей оси с периодом, равным 7.3 с. Из-за воздействия на выдыхаемую струю вентиляционного потока, набегающего со входа, дальнобойность струи в случае перемешивающего режима вентиляции ниже (34 см), чем в свободноконвективном режиме (51 см). Кроме того, в случае перемешивающего режима вентиляции струя под воздействием набегающего потока отклоняется к полу на 5° относительно направления подачи струи. В свободноконвективном режиме выдыхаемая плавучая струя, напротив, отклоняется на 7° вверх, к потолку помещения.

На рис. 2 показаны поля модуля скорости вблизи теплового манекена в разные моменты времени для модели дыхания с нестационарной (синусоидальной) подачей струй, показан вариант с перемешивающим режимом вентиляции.



Рис. 2. Поля модуля скорости для варианта с перемешивающей вентиляцией (V<sub>in</sub> = 0.27 м/с) и импульсной струей за один цикл вдоха-выдоха в последовательные моменты времени

При выдохе, в моменты времени t = 0...2 с, две струи из ноздрей, как и по результатам со стационарной моделью дыхания, сливаются в одну струю на небольшом удалении от манекена. Вблизи туловища в момент времени t = 0.5 с формируется рециркуляционная область (рис. 2), размеры которой в моменты времени t = 1...3 с увеличиваются. В момент времени t = 3 с рециркуляционная область практически исчезает, а при  $t \ge 3.5$  с поле скорости похоже на рассчитанное без модели дыхания. Максимальная протяженность струи составила 34 см на пике выдоха.

В целом в работе показано, что нестационарная модель дыхания позволяет качественно описать весь цикл дыхания (вдох и выдох) и учесть локальные изменения полей вблизи поверхности манекена. В дальнейшем будет исследовано влияние модели дыхания на решение задачи о распространении углекислого газа от манекена.

Работа выполнена при поддержке РФФИ (грант № 20-58-18013).

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Nielsen P.V., Hyldgaard C.E., Melikov A.K., Andersen H., Soennichsen M., Personal exposure between people in a room ventilated by textile terminals – with and without personalized ventilation // HVAC&R Research. – 2007. – P. 635-643.

2. Angelova R.A., Mijorski S., Markov D., et al. Analysis of metabolic CO2 concentration field in a small mechanically ventilated occupied enclosure // AIP Conference Proceedings. – 2019. – P. 7.

3. Gupta J.K., Lin C.H., Chen Q. Characterizing exhaled airflow from breathing and talking // Indoor Air. – 2010. – P. 31-39.

УДК 532.517

А.Д. Подмаркова, М.А. Засимова, Н.Г. Иванов Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого<sup>(•)</sup>

## ИССЛЕДОВАНИЕ ВОЗДУХОРАСПРЕДЕЛЕНИЯ В ВЕНТИЛИРУЕМОЙ КЛИМАТИЧЕСКОЙ КАМЕРЕ С ТЕПЛОВЫМ МАНЕКЕНОМ

Введение. В последнее время активно разрабатываются методики, направленные на оценку параметров теплового комфорта и улучшение условий пребывания для находящихся в помещении людей. Для получения качественной базы данных эксперименты должны проводиться в контролируемых условиях. Экспериментальные методы исследования включают использование климатических камер и тепловых манекенов. Климатическая камера – это лабораторная камера, позволяющая воспроизвести воздействие климатических факторов на находящиеся внутри объекты. Исследования, проводимые в данных камерах, зачастую выполняются в изотермических условиях [1], гораздо реже в неизотермических [2]. Даже в отсутствие нагревательных элементов, находящиеся в плохо проветриваемых помещениях люди нагревают окружающую среду, что необходимо учитывать при проведении экспериментальных и численных исследований.

Цель работы – оценить воздухораспределение в климатической камере [3] в отсутствие загромождающих элементов и при их наличии, а также изучить влияние на глобальную структуру течения режима нагрева теплового манекена. На основе полученных данных в дальнейшем планируется поставить уточненный расчет, включающий моделирование процесса дыхания, и сопоставить результаты с новыми экспериментальными данными, полученными в Софийском техническом университете.

<sup>&</sup>lt;sup>(•)</sup> А.Д. Подмаркова, ann.podmarkova@mail.ru

Условия эксперимента. В эксперименте изучалось трехмерное течение воздуха в климатической камере с сидящим тепловым манекеном, показанной на рис. 1а. Измерения полей скорости и температуры воздуха в разных частях камеры проводились при помощи термоанемометрических двухканальных датчиков. Число Рейнольдса, построенное по диаметру входного канала и значению входной скорости, достигало  $1.3 \times 10^4$ . Измерения проводились в контролируемых изотермических условиях. На рис. 2а показано расположение точек, в которых проводились измерения скорости внутри климатической камеры, расположенных на разной высоте и на разном удалении от теплового манекена. Протяженность времени измерения 10 мин с интервалом записи в 0.2 с.

Геометрические характеристики климатической камеры. Геометрия камеры показана на рис. 16. Климатическая камера разделена на две области решетчатым полом. Рабочая часть, в которой размещают загромождающие элементы, такие как стол, стул, тепловой манекен, имеет высоту, равную H = 2.23 м, ее поперечные размеры практически одинаковы и равны L = 1.89 м (в плоскости x) и W = 1.9 м (в плоскости z). Расстояние между решетчатым полом и полом камеры составляет  $h_{\text{floor}} = 0.39$  м. В пространство под решетчатым полом через два круглых приточных отверстия, диаметр которых одинаков и равен  $d_{\text{in}} = 0.2$  м, поступает воздух. Под потолком размещены четыре одинаковых квадратных выходных отверстия, их ширина и высота равны  $L_{\text{out}} \times L_{\text{out}} = 0.25 \times 0.25$ м. Тепловой манекен имеет следующие геометрические размеры: высота манекена – 1.32 м, ширина – 0.52 м.

Вычислительные аспекты. Нестационарное течение воздуха в климатической камере моделировалось путем решения нестационарных осредненных по Рейнольдсу уравнений Навье-Стокса (URANS подход) с использованием RNG k- $\varepsilon$  модели турбулентности. Уровень турбулентности на входе определялся интенсивностью турбулентности I = 5% и отношением турбулентной вязкости к молекулярной, TVR = 10. Эффекты плавучести учитывались в приближении Буссинеска. В расчетах использовались сетки с гексагональными элементами (пустая климатическая камера) и сетки с полиэдральными элементами (при наличии теплового манекена внутри рабочей части климатической камеры). Сетки построены в сеточном генераторе ICEM CFD, их общая размерность варьируется от 0.6 до 2 млн ячеек. Расчеты проведены в гидродинамическом пакете ANSYS Fluent 19.3 с использованием ресурсов СКЦ «Политехнический» (*scc.spbstu.ru*), максимально задача распараллеливалась на 56 ядер. Дискретизация пространственных и временных производных выполнена со вторым порядком точности. Шаг по времени задавался равным 0.1 с. Для получения осредненных величин накапливалась статистика протяженностью 2000 с.

*Граничные условия.* Воздух поступает в климатическую камеру через два параллельных круглых канала, расположенных в нижней части (рис. 1а), в соответствии с условиями эксперимента со скоростью равной  $V_{\rm in} = 1.6$  м/с. На выходах задаются мягкие граничные условия. Сидящий за столом манекен отстоит от плоскости x = 0 на расстояние, равное 0.4 м. Для имитации выравнивающей решетки, разделяющей климатическую камеру на две области, в расчете задавался локализованный перепад давления (условие «porous-jump»):  $\Delta p = 0.5C_2\rho V^2 \cdot H_{\rm layer}$ , где  $C_2$  – коэффициент сопротивления,  $0.5\rho V^2$  – скоростной напор,  $H_{\rm layer}$  – толщина слоя. Значения коэффициента сопротивления определялись из геометрических характеристик решетчатого пола и рассчитывались по [4]. Для случая неизотермической постановки задачи стенки помещения считаются теплоизолированными. Поверхность манекена поддерживается при постоянной температуре, равной  $T_{\rm m} = 34$  °C.



Рис. 1. а) Геометрия расчетной области; б) вид климатической камеры и теплового манекена

Результаты. Для валидации вычислительной модели на первом этапе проводилось экспериментальными измерениями. полученными Софийском сопоставление с в техническом университете. На рис. 2 приведены профили скорости в различных сечениях по высоте камеры (рис. 2а). Полученные в ходе расчетов результаты сопоставляются с экспериментальными измерениями для случая пустой климатической камеры. Как в расчете, так и по результатам экспериментальных измерений, поле скорости в верхней части климатической камеры на удалении от входных каналов и решетчатого пола достаточно однородно. Показано, что расчетные данные удовлетворительно коррелируют с результатами измерений, однако, предварительно выбранное число экспериментальных точек недостаточно для описания локальных неоднородностей поля скорости (например, рис. 26, сечение В-В).



Рис. 2. а) Расположение точек, где проводились измерения; б) профили скорости в разных сечениях

Две истекающие из каналов струи в центре камеры сливаются в одну общую струю, которая достигает противоположной стенки, после чего растекается по бокам вдоль нее. Эффект объединения струй хорошо виден вблизи решетчатого пола по полям скорости на рис. За. При прохождении потоком решетчатого пола получаемые значения скорости в рабочей части камеры падают в 10 раз по сравнению с входным значением скорости.



Рис. 3. Поля модуля скорости в разных сечениях климатической камеры: a) пустая камера, б) камера с манекеном – изотермическая постановка; в) неизотермическая постановка

Была проведена также оценка степени влияния режима нагрева теплового манекена на получаемую структуру течения. На рис. 3 приведены поля скорости для изотермических (рис. 3б) и неизотермических условий (рис. 3в). Вдоль стенки, за спиной манекена, наблюдается восходящая к потолку струя (рис. 3б). Подобное также наблюдалось для пустой климатической камеры (рис. 3а). За счет нагрева поверхности манекена над головой манекена образуется тепловой факел, что приводит к существенному увеличению значений скорости в восходящей струе (рис. 3в).

Работа выполнена при поддержке РФФИ (грант № 20-58-18013).

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Thysen J.H., van Hooff T., Blocken B., Heijst G.J.F. CFD simulations of two opposing plane wall jets in a generic empty airplane cabin: comparison of RANS and LES // Building and Environment. – 2021. – P. 22. 2. Kosutova K., van Hooff T., Blocken B. CFD simulation of non-isothermal mixing ventilation in a generic enclosure: impact of computational and physical parameters // International Journal of Thermal Sciences. – 2018. – P. 344 – 357.

3. Angelova R.A., Mijorski S., Markov D., Stankov P., Velichkova R., Simova I. Numerical modelling of the draught rate in a mechanically ventilated climate chamber // Journal of physics. – 2021. – Р. 7 4. Идельчик И.Е. Справочник по гидравлическим сопротивлениям // Изд.: Машиностроение. – 1975. – 559 с.

УДК 533.6.011.34

Д.К. Попова<sup>1,2</sup>, Н.Н. Кортиков<sup>1</sup> <sup>1</sup> Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого<sup>(•)</sup> <sup>2</sup> АО "ОДК - Климов", Россия

### УПРАВЛЕНИЕ ТЕМПЕРАТУРНЫМ СОСТОЯНИЕМ И ПОТЕРЯМИ В СТУПЕНИ ГАЗОВОЙ ТУРБИНЫ РЕГУЛИРОВКОЙ ПОЛОЖЕНИЯ ФОРСУНОК КАМЕРЫ СГОРАНИЯ

Введение. Постоянный рост температуры газа на входе в турбину приводит к необходимости обеспечения работоспособности элементов ГТД, подверженных воздействию высоких температур газа. Из всех элементов высокотемпературного тракта в наиболее напряженных условиях работает лопаточный аппарат турбины [1,2]. Оптимизация систем

<sup>(•)</sup> Д.К. Попова, daria well96@mail.ru

охлаждения для получения равномерного распределения температуры по профилю лопатки и снижения термических напряжений требует совершенствования методов расчета теплового состояния лопаток, в том числе численного моделирования.

*Целью* данной работы является уменьшение температурной неоднородности на рабочих лопатках газовой турбины (уменьшение температурной сепарации) и связанное с ним уменьшение потерь кинетической энергии в ступени за счет регулировки положения форсунок камеры сгорания (*clocking effect*).

Постановка задачи и вычислительные аспекты. Расчет газодинамических процессов в турбинной ступени был проведен в программном комплексе STAR CCM+ (17.06.007-R8) в трехмерной постановке. Решалась система уравнений Навье-Стокса, осредненных по Рейнольдсу, описывающая нестационарное течение совершенного сжимаемого газа с переменной динамической вязкостью (Sutherland's Law), постоянной теплоемкостью и теплопроводностью. Применялся решатель (Coupled) со вторым порядком точности. В качестве модели турбулентности выбрана модель Ментера k-ω SST с поправкой на кривизну линий тока.

Расчетная модель состоит из двух областей, содержащих по одному сектору: один межлопаточный канал для статорной области и два канала для роторной с учетом периодичности на их боковых границах. Рассматриваемая ступень (ступень ЛПИ) состоит из 24 сопловых лопаток (ZS=24) и 48 рабочих лопаток (ZR=48). Эпюры параметров, передаются через границы между венцами по технологии TRS (метод скользящих сеток). Расчетная сетка содержала 1.3 миллиона призматических ячеек.

Было рассмотрено три положения форсунок камеры сгорания относительно межлопаточного канала соплового аппарата: центр форсунки вблизи корыта лопатки (PS), по центру межлопаточного канала (CC) и вблизи спинки лопатки (SS) (рис. 1).



Рис. 1 Положения форсунок относительно соплового аппарата: а) вблизи корытной части лопатки (PS); б) по центру межлопаточного канала (CC); в) вблизи спинки лопатки (SS)

На входе в расчетную область задано граничное условие типа Stagnation Inlet (давление и температура торможения), осевое направление скорости, отношение турбулентной вязкости к молекулярной TVR=10. На выходе из расчетной области задано условие типа Pressure Outlet и значение параметра TVR=10.

*Результаты расчетов.* На рисунке 2 дано сравнение изменения во времени плотности теплового потока на поверхности лопатки, полученного из результатов расчета (кривая 1), с опытными данными [3] (кривая 2), которое показывает их удовлетворительную согласованность (расхождение не превышает 10%). На рисунке 3 представлено распределение расчетных и опытных данных для осредненного по времени теплообмена по обводу рабочей лопатки. Отмечается их существенное расхождение для корытной части рабочей лопатки, которое достигает 15%.







Рис. 3 Теплообмен на поверхности рабочей лопатки (форсунка напротив входной кромки сопловой лопатки)

Исходя из уравнения теплового баланса для плоской стенки, при задании граничных условий третьего рода на разных поверхностях пластины было получено выражение для отношения температур на противоположных поверхностях пластины:

$$\frac{t_{\kappa o p}}{t_{cn}} = \frac{1 + \frac{\alpha_{cn}\delta}{\lambda} \left( 1 + \frac{t_c}{t_{cn}} \left( \frac{\alpha_{\kappa o p}}{\alpha_{cn}} - 1 \right) \right)}{1 + \frac{\alpha_{cn}\delta\alpha_{\kappa o p}}{\lambda \alpha_{cn}}}$$
(1),

где t – температура (°C),  $\alpha$  – коэффициент теплоотдачи от поверхности тела к окружающей среде (Bт/м^2\*K),  $\lambda$  – коэффициент теплопроводности материала тела (Bт/м\*K),  $\delta$  – характерный размер тела (м).

В таблице 1 приведены значения отношения (осредненного по поверхности лопатки) чисел Нуссельта на корыте и спинке, а также отношение температур на корыте лопатки и спинке для всех вариантов расчета; приводятся также опытные данные, полученные при натурных условиях работы турбинной ступени, когда форсунки располагались по центру межлопаточного канала соплового аппарата.

T C 1 D				1
Тарл Г Величина те	мпературной сепаr	лании в зависимости от	расположения (	noncvhok
	mepulyphon cenu	Judin p Saphenmoeth of	puenonomennin	popeynor

	DS	55	CC	Опытные
	15	20	cc	данные
$Nu_{kop}/Nu_{cm}$	1.49	1.42	1.39	
$t_{\kappa op}/t_{c\pi}$	1.026	1.023	1.021	1.074

Отношения температур, полученные по формуле (1), показывают удовлетворительное согласие с экспериментальными данными, неопределенность составляет не более 5%. Эффект температурной сепарации имеет свой минимум при расположении форсунки по центру межлопаточного канала соплового аппарата.

Коэффициент потерь в венцах турбины определялся с помощью энергетического коэффициента по формуле (2) для статорной части, и по формуле (3) для рабочего колеса. В формулах индекс 0 соответствует входному сечению в сопловой аппарат, индекс 1 – интерфейсу между ротором и статором, индекс 2 - выходу из рабочего колеса.





Рис. 5. Распределение потерь по радиусу для роторной части ступени

Потери минимальны при расположении форсунки вблизи корыта лопатки соплового аппарата. При расположении форсунок камеры сгорания по центру межлопаточного канала или вблизи спинки лопатки потери кинетической энергии в сопловом аппарате (рис. 4) возрастают на 5.9% и 9.3% соответственно, в рабочем колесе – на 1.0% и 1.2% соответственно (рис. 5).

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Тепловая защита лопаток турбин/ Б.М. Галицейский, В.Д. Совершенный, В.Ф. Формалев, М.С. Черный.; Под редакцией Б.М. Галицейского. - М.: Изд-во МАИ, 1996 - 356с.

2. Теплопередача в охлаждаемых деталях газотурбинных двигателей/ В.И. Локай, М.Н. Бодунов, В.В. Жуйков, А.В. Щукин; 2-е изд. перераб. и доп. М.: Машиностроение. 1993. - 288с.

3. Shang T., Guenette G.R., Epstein A.H., Saxer A.P. The influence of inlet temperature distortion on rotor heat transfer in a transonic turbine. 31st AIAA/ASME/SAE/ASEE Joint Propulsion Conference and Exhibit. 1995. AIAA 95-304. 11p.

УДК 532.517

А.А. Ручкина, М.А. Засимова Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого<sup>(•)</sup>

## ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ВЕНТИЛЯЦИОННОГО ТЕЧЕНИЯ В САЛОНЕ ПАССАЖИРСКОГО САМОЛЕТА

Введение. Численное моделирование вентиляционных потоков является необходимым на этапе разработки и проектирования систем вентиляции салонов пассажирских самолетов. На основе результатов численного моделирования можно детально оценить параметры и качество микроклимата. Внутри салона в общем случае реализуется сложная нестационарная

<sup>&</sup>lt;sup>(•)</sup> А.А. Ручкина, ruchkina.aa@edu.spbstu.ru

структура течения, вызванная неустойчивостью приточных струй, взаимодействующих между собой и с загромождающими салон предметами. Существенным является наличие пассажиров, вблизи которых за счет действия сил плавучести формируется подъемное течение: сформированное человеком свободноконвективное течение взаимодействует с вынужденноконвективным, созданным вентиляционной системой. Прежде чем решать задачу, включающую все перечисленные особенности, полезно решить эталонные тестовые задачи с хорошо документированными граничными условиями и данными измерений. Настоящая работа основывается на данных теста [1,2], в котором были проведены PIV (Particle Image Velocimetry) измерения скорости течения воды в модели салона самолета. Принятые в настоящих расчетах геометрические характеристики и режимные параметры соответствуют экспериментальным условиям [1, 2].

Постановка задачи. Рассматривается течение несжимаемой жидкости в модели участка салона самолета (рис. 1а) со следующими геометрическими характеристиками: ширина салона (размер вдоль оси x) – 30H, высота (размер вдоль оси y) – 20H, длина участка (размер вдоль оси z) – 70H, здесь H = 10 мм – характерный линейный размер. В модели салона имеются загромождения, имитирующие багажные полки. Модель симметрична относительно центральной плоскости, поэтому расчеты выполнены в области, включающей половину салона (рис. 1а). Подача вентиляционных струй в модель салона осуществляется либо через щелевое припотолочное отверстие (вариант #1, рис. 1а), расположенное над багажными полками, либо через щелевое отверстие, расположенное под багажными полками (вариант #2), высота щелевых отверстий одинаковая и равна H. К приточным отверстиям подведены плоские сужающиеся каналы, высота каналов до сужения равна 3H. Жидкость покидает область через выходное щелевое отверстие высотой 2H, расположенное вблизи пола.



Рис. 1. а) Геометрия расчетной области; поля модуля скорости, полученные в 2D расчетах (стандартная k-є модель турбулентности), варианты б) #1 и в) #2

Физические свойства воды полагаются постоянными: плотность  $\rho = 998.2$  кг/м<sup>3</sup>, коэффициент вязкости  $\mu = 9.74 \times 10^{-4}$  кг/м·с. Задача определяется следующими граничными условиями. Однородный поток воды поступает в модель салона через сужающийся канал, значение скорости на входе в канал 0.101 м/с. Число Рейнольдса, вычисленное по высоте приточного отверстия H и средней скорости U<sub>in</sub> = 0.303 м/с на его срезе составило 3100, что соответствует натурным условиям воздухораспределения в салоне пассажирского самолета. На выходной границе задан постоянный уровень избыточного давления. В центральной плоскости, перпендикулярной оси х, задавалось условие симметрии. Задача решалась в 2D и 3D постановках. В 3D расчетах на торцевых границах, перпендикулярных оси z, также задавались условия симметрии. Остальные границы – твердые стенки, на которых задано условие прилипания.

*Математическая модель*. Моделирование течения осуществлялось посредством решения осредненных по Рейнольдсу уравнений Навье-Стокса (RANS подход) с использованием стандартной k-є, а также k-є RNG и k-ω SST моделей турбулентности. На входной границе задавалась интенсивность турбулентности, равная 15%.

Вычислительные аспекты. В расчетах использовались построенные в ICEM CFD квазиструктурированные сетки, состоящие из элементов общей размерностью от 13 до 800 тыс. ячеек для 2D расчетов и 800 тыс. ячеек для 3D расчетов. Сгущение сеток осуществлялось к входным границам и к твердым поверхностям. В 2D постановке выполнено исследование сеточной чувствительности решения, в итоге показано, что исходное решение, полученное на сетке 13 тыс. ячеек, изменяется слабо с увеличением размерности сетки. Численное моделирование выполнено с помощью коммерческого гидродинамического пакета ANSYS Fluent 2019. Дискретизация пространственных и временных производных выполнена со вторым порядком точности. Для всех расчетов получены сошедшиеся по невязкам стационарные решения.

Результаты расчетов. Структура 2D течения, формирующаяся в модели салона самолета при различном расположении приточных отверстий, показана на рис. 16, в. При использовании припотолочных приточных отверстий формируется обширная зона рециркуляционного движения, занимающая всю рассматриваемую половину салона самолета (рис. 1б); значения скорости в рабочей зоне (там, где находятся пассажиры) составляют около 25% от U<sub>in</sub>. При подаче струй из щелевых отверстий, расположенных под полками (рис. 1в), В рассматриваемой области формируются багажными две рециркуляционные зоны: низкоскоростная застойная зона над приточным отверстием, значения скорости в которой не превышают 10% от Uin, и рециркуляционная область в рабочей зоне, средние значения скорости в которой составляют около 40% от U<sub>in</sub>.



Рис. 2. а) Положение сечений; расчетные (2D, стандартная k-є модель) и экспериментальные распределения вертикальной компоненты скорости для вариантов б) #1 и в) #2

В [1,2] представлены полученные экспериментально профили скорости в горизонтальных сечениях модели салона самолета, положение которых показано на рис. 2а. На рис. 26, в приведены профили вертикальной компоненты скорости для вариантов #1 и #2 в этих сечениях. Полученные в расчетах данные в целом согласуются с экспериментальными, локальные различия наблюдаются в областях максимумов скорости – данные расчета здесь заметно выше экспериментальных.

Для вариантов #1 и #2 проведены расчеты с использованием трех моделей турбулентности, полученные в расчетах профили скорости в горизонтальных сечениях показаны на рис. За,б. Данные, полученные с использованием стандартной k-є и k-є RNG

моделями турбулентности, различаются слабо. Локальные различия этих профилей скорости с профилями, полученными с использованием k- $\omega$  SST модели, наблюдаются в областях соударения плоских струй, подаваемых из приточных отверстий. Так, на рис. За для варианта #1 различия в профилях скорости можно отметить в сечении у/H = 0.9, для варианта #2 (рис. 36) – в сечении у/H = 0.6. В целом можно отметить слабое влияние используемой в расчетах модели турбулентности.

Интерес представляет сравнение решений, полученных в 2D и 3D постановках. Соответствующие распределения вертикальной компоненты скорости в горизонтальных сечениях салона самолета, полученные для вариантов #1 и #2, показаны на рис. 3в,г. Профили скорости, полученные в 2D и 3D постановках, совпадают между собой, то есть расчетное поле течения однородно в третьем направлении.



Рис. 3. Распределения вертикальной компоненты скорости, полученные а,б) в 2D постановке с использованием различных моделей турбулентности и в,г) в 2D и 3D постановках (стандартная k-є модель); варианты расчета а,в) #1 и б,г) #2

Заключение. В работе представлены данные 2D и 3D численного моделирования течения в тестовой модели салона пассажирского самолета при подаче приточных струй из плоских щелевых отверстий, расположенных над и под багажными полками. Полученная в 3D расчетах картина течения однородна вдоль модели салона. Рассчитанные поля скорости в целом согласуются с доступными из литературы результатами измерений. Представлены данные о влиянии на решение модели турбулентности и размерности расчетной сетки. В дальнейшем планируется выполнить расчеты, моделирующие распространение углекислого газа из точечного источника, с целью оценки эффективности вентиляции в вариантах с разным расположением приточных струй.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Thysen J-H., Hooff T., Blocken B., Heijst G.J.F. PIV measurements of opposing-jet ventilation flow in a reduced-scale simplified empty airplane cabin // European Journal of Mechanics - B/Fluids. 2022. Vol. 94. P. 212-27.

2. Thysen J-H., Hooff T., Blocken B., Heijst G.J.F. CFD simulations of two opposing plane wall jets in a generic empty airplane cabin: comparison of RANS and LES // Building and Environment. 2021. Vol. 205. 108174. P. 1-22.

А.С. Савельев

Санкт-Петербургский государственный университет (•)

### ОБОБЩЕННАЯ МОДЕЛЬ ПОУРОВНЕВЫХ КОЭФФИЦИЕНТОВ СКОРОСТИ ХИМИЧЕСКИХ РЕАКЦИЙ

При решении таких задач высокоскоростной аэродинамики как моделирование входа в атмосферы планет и расчет тепловой защиты летательных аппаратов важную роль играет корректное описание неравновесных химических реакций и процессов релаксации внутренней энергии. Точность получаемых решений зависит как от надежности используемых вычислительных алгоритмов, так и от детальности описания процессов, происходящих в окружающей газовой среде.

Современный уровень развития вычислительных технологий позволяет реализовывать не только достаточно простые однотемпературные и многотемпературные модели химического взаимодействия, но и более точные поуровневые, учитывающие колебательное и электронное возбуждение молекул. Для решения представленной задачи существуют различные теоретические модели: модель Маррона-Тринора [1] для диссоциации, модель Алиата [2] для обменных реакций, модель Старика [3] для широкого класса энергетических переходов. К сожалению, ни одна из представленных моделей не обладает универсальностью для описания коэффициентов скорости химических реакций, имея свои преимущества и недостатки. Так, модели Маррона-Тринора [1] и Алиата [2] позволяют учесть приоритетный порядок протекания реакций из высокоэнергетических состояний молекулы, но не позволяют учесть энергетический вклад партнера по столкновению и продуктов реакции. Модель Старика [3], напротив, позволяет учесть энергетические состояния всех участников реакции (как колебательные, так и электронные), но не позволяет учитывать приоритетного порядка. Предшествующие исследования [4-6], основанные на сравнении результатов квазиклассических траекторных расчетов с результатами, получаемыми при теоретических расчетах, показали, что учет каждого из данных аспектов является существенным. Чтобы устранить имевшийся пробел, было принято решение вывести формулу, учитывающую как полный набор энергетических состояний всех участников реакции, так и преимущественный порядок протекания реакций с высокоэнергетических состояний.

В качестве отправной точки, как и в работе Алиата, нами были взяты идеи, предложенные Кнабом [7], и получившие дальнейшее развитие в [2, 4-6]: мы выводим общее выражение для поуровневых коэффициентов скорости реакции с учетом колебательного и электронного возбуждений, как реагентов, так и продуктов. Пошаговый алгоритм вывода формулы для случая учета только колебательного возбуждения всех участников реакции представлен в [8]. В настоящем исследовании используется представление коэффициентов скорости, предложенное в работе [3], основанное на использовании функции Хевисайда, позволяющей представить формулу в более компактном виде. Для поуровневых коэффициентов скорости реакции диссоциации или обмена  $k_{V_r \to V_p}^{ex,dis}$  получаем выражение:

$$k_{V_r \to V_p}^{ex,dis} = B(T) \cdot exp\left(-\frac{\Delta E_{V_r \to V_p} \theta\left(\Delta E_{V_r \to V_p}\right)}{k} \left(\frac{1}{T} + \frac{1}{U}\right)\right), \quad E_{V_r \to V_p} = E_a + E_p - E_r, \quad (1)$$

где k — постоянная Больцмана, T — температура газа, U — параметр модели, учитывающий преимущественный порядок протекания реакции из высокоэнергетических состояний,  $E_a$  — энергия активации прямой реакции,  $\theta$  — функция Хевисайда.

<sup>&</sup>lt;sup>(•)</sup> А.С. Савельев, aleksey.schumacher@gmail.com

Функция B(T) вычисляется по формуле:

$$B(T) = \frac{\kappa^{eq}(T)}{\sum_{V_{r}^{*}, V_{p}^{*}} \left[ exp\left( -\frac{\Delta E_{V_{r} \to V_{p}} \theta(\Delta E_{V_{r} \to V_{p}})}{k} \left( \frac{1}{T} + \frac{1}{U} \right) \right) \prod_{l=1}^{M_{r}} n_{V_{r,l}^{*}}^{eq} \right]},$$
(2)

где  $k^{eq}(T)$  — равновесный коэффициент скорости реакции в форме Аррениуса,  $M_r$  — число реагентов,  $n_{V_{r,l}^{eq}}^{eq}$  — приведенное равновесное распределение Больцмана *l*-го реагента по электронной и колебательной энергии при температуре *T*.

Представленная обобщенная модель сочетает в себе преимущества существующих, устраняя при этом основные известные недостатки. Благодаря выбору параметра  $E_a$ , предложенная модель может быть использована как для реакций диссоциации, так и для реакций обмена. Использование параметра U позволяет описывать преимущественный порядок протекания реакций из высокоэнергетических состояний (в данной работе мы рассматриваем только температурную зависимость U) и подгонять величину коэффициентов скорости реакций к существующим данным траекторных расчетов QCT. Предложенная формула может быть использована как для столкновений молекула-молекула, так и молекула-атом (включая многоатомные молекулы) и учитывает колебательное и электронное возбуждение атомов для всех частиц, участвующих в реакции.

Рассмотрим частные случаи уравнения (1). Прежде всего, легко заметить, что выражение очень похоже на приведенное в [3]. Есть, однако, два отличия: 1) в модели [3] в определении  $E_a$  присутствует функция максимума, которая отсутствует в нашей модели; 2) в нашей модели появляется параметр U, отвечающий за преимущественное протекание реакций из высокоэнергетических состояний. В пределе  $U = \infty$ , и наша формула сводится к формуле из [3] за исключением максимума в  $E_a$ . Стоит отметить, что обе модели, хотя и имеют компактную и удобную форму, достаточно требовательны в вычислительном отношении по сравнению с формой, приведенной в [6, 8].

Если рассматривать колебательно-электронное возбуждение только одного реагента  $(r_l)$  и пренебречь электронным возбуждением атомов, то  $\Delta E_{V_r \to V_p} = E_a - E_{r_1}$ , и уравнение (1) можно легко свести к поуровневым коэффициентам скорости обменных реакций из работы [2] с поправкой нормирующего множителя, описанной в работе [6].

Наконец, если рассматривать реакцию диссоциации с учетом только колебательного возбуждения распадающейся молекулы, то 1)  $E_a = D$  (D— энергия диссоциации); 2)  $\Delta E_{V_r \to V_p} = \Delta E_i = D - \varepsilon_i$ ; 3) все  $\theta(\Delta E_i) = 1$ ; 4) суммирование ведется только по колебательным состояниям диссоциирующей молекулы; 5) учитывается только колебательное распределение диссоциирующей молекулы. После таких упрощений получается широко известная формула Маррона—Тринора [1].

На основе поуровневых коэффициентов, полученных по представленной формуле, мы всегда может получить многотемпературные коэффициенты скорости реакций. Для этого необходимо провести осреднение уравнения (1), умножая его на неравновесные колебательные распределения обоих реагентов, и затем провести суммирование по всем колебательным состояниям реагентов и продуктов.

Таким образом, в данной работе представлена универсальная модель для расчета коэффициентов скорости химических реакций с учетом колебательного и электронного возбуждения всех тяжелых частиц, участвующих в реакции.

Работа выполнена при финансовой поддержке СПбГУ (НИР "Машинное обучение в задачах неравновесной аэромеханики", id проекта 94034084)

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Marrone P., Treanor C. Chemical Relaxation with Preferential Dissociation from Excited Vibrational Levels // Physics of Fluids – 1963 Vol. 6 – P. 1215–1221

2. Aliat. A. State-to-state dissociation-recombination and chemical exchange rate coefficients in excited diatomic gas flows // Physica A. – 2008. – Vol. 387. – P. 4163-4182.

3. Arsentiev I.V., Loukhovitski B.I., Starik A.M. Application of state-to-state approach in estimation of thermally nonequilibrium reaction rate constants in mode approximation // Chemical Physics – 2012. – Vol. 398. – P. 79-80

4. Kustova E., Nagnibeda E., Oblapenko G., Savelev A., Sharafutdinov I.. Advanced Models for Vibrational-Chemical Coupling in Multi-temperature Flows // Chemical Physics – 2016. – Vol. 464. – P. 1-13

5. Kunova O., Kustova E., Savelev A.. Generalized Treanor--Marrone model for state-specific dissociation rate coefficients // Chemical Physic Letters – 2016. – Vol. 659. – P. 80-87

6. Kustova E.V., Savelev A.S., Kunova O.V. Rate Coefficients of Exchange Reactions Accounting for Vibrational Excitation of Reagents and Products // AIP Conference Proceedings – 2018. – Vol. 1959. – P. 060010

7. Knab O., Frühauf H.H., Messerschmid E.W.. Theory and Validation of the Physically consistent Coupled Vibration-Chemistry-Vibration Model // Journal of Thermophysics and Heat Transfer – 1995. – Vol. 9(2). – P. 219-226

8. Kustova E., Savelev A., Armenise I. State-Resolved Dissociation and Exchange Reactions in  $CO_2$  Flows. // The Journal of Physical Chemistry A: Molecules, Clusters, and Aerosols – 2019. – Vol. 123(49). – P. 10529-10542

#### УДК 536.37

Е.В. Садикова, А.А. Плетнев Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого<sup>(•)</sup>

## РАСЧЕТНЫЙ АНАЛИЗ ТЕМПЕРАТУРНОГО СОСТОЯНИЯ ТВЭЛОВ В БАССЕЙНЕ ВЫДЕРЖКИ ЭНЕРГОБЛОКА № 4 БЕЛОЯРСКОЙ АЭС ПРИ ЗАПРОЕКТНЫХ АВАРИЯХ

В работе методом численного моделирования исследованы стационарные поля температур в элементах конструкции бассейна выдержки (БВ), предназначенного для длительного «мокрого» хранения отработавшего ядерного топлива реакторов типа БН-800 [1] в условиях запроектной аварии, связанной с внезапным осушением БВ. Полное осушение вследствие так называемой «большой течи», может произойти в результате экстремальных внешних или внутренних воздействий: землетрясение, взрыв, падение конструкций и т.д. Поскольку последствия такой аварии несут значительный риск для людей и окружающей среды, необходимо заранее предусмотреть меры по смягчению (ослаблению) этих последствий даже в том случае, когда исходное событие (или цепь событий) крайне маловероятно. В таких случаях широко применяются методы численного моделирования [2,3].

Математическая модель для расчета полей температур в элементах конструкции БВ была построена в пакете прикладных программ ANSYS Fluent. В модели учтены сложная геометрия исследуемых объектов (твэлов, тепловыделяющих сборок (TBC), чехла для TBC и т.д.), а также все основные особенности происходящих в них процессов тепломассообмена: неравномерное по высоте внутреннее тепловыделение твэлов, зависимость коэффициента теплопроводности материалов от температуры, естественная конвекция воздуха в полостях и зазорах, тепловое излучение. Расчеты были выполнены для различных граничных условий и значений остаточного тепловыделения TBC. Все исходные данные для расчетов были получены от специалистов АО «Атомпроект» (г. Санкт-Петербург).

<sup>&</sup>lt;sup>(•)</sup> Е.В. Садикова, sadikova\_ev@mail.ru

Доступные нам вычислительные ресурсы не позволяли произвести расчет сразу всего отсека БВ, заполненного 24 чехлами с ОТВС, поэтому задача была разделена на три этапа.

Первая часть исследования выполнена для одной ОТВС, состоящей из 127 твэлов, помещенной в защитную оболочку чехла (стальную трубу Ø133×3 мм), для трех значений мощности остаточного тепловыделения: 3,31; 5,26 и 11,18 Вт/твэл. Для этих условий была определена зависимость стационарной температуры поверхности максимально нагретого твэла от заданной (фиксированной) температуры оболочки ОТВС, которая варьировались в диапазоне от 50 до 800 °C с шагом 150 °C, что позволило для каждого случая найти максимально допустимую температуру поверхности оболочки ОТВС – 773, 717 и 638 °C, соответственно, при которой поверхность оболочки твэлов не перегреется сверх допустимого предела 800 °C (рис. 1).



Рис. 1. К определению максимально допустимой температуры оболочки ТВС

Вторая часть исследования выполнена для одного чехла, включающего в себя 54 трубы  $\emptyset 133 \times 3$  с одной ОТВС в каждой. По соображениям симметрии и с целью экономии вычислительных ресурсов расчетная область была уменьшена до сектора в 90 ° в поперечном сечении и до размера 900 мм по высоте (рис. 2). С этой же целью реальная геометрия ОТВС внутри каждой трубы, которая подробно моделировалась на первом этапе, была заменена эквивалентным источником внутреннего объемного тепловыделения. Естественная конвекция воздуха в пространстве между трубами рассчитывалась с использованием приближения Буссинеска и  $k - \omega$  SST модели турбулентности. По результатам стационарного тепловыделения (3,3 и 5,26 Вт/твэл) температура боковой поверхности чехла не должна превышать 614 и 430 °C, соответственно.



Рис. 2. Стационарное поле температуры в чехле с ОТВС. Расчет при температуре на боковой поверхности чехла 350 °С и мощности тепловыделения 3,31 Вт/твэл

Расчет показал, что в условиях рассмотренной запроектной аварии при значении тепловой мощности 11,18 Вт/твэл невозможно обеспечить безопасный температурный режим ОТВС в чехле, поскольку необходимая для этого температура боковой поверхности чехла становится отрицательной.

В дальнейшем представленные выше и аналогичные результаты будут использованы для выполнения третьей части исследования – расчета и анализа нестационарных полей температуры в части отсека №3 бассейна выдержки, состоящей из восьми чехлов с ОТВС (рис. 3).



Рис. 3. Отсек №3 (вид сверху) бассейна выдержки для ОЯТ реактора БН-800. Цветной рамкой обведена часть отсека, выбранная для моделирования.

Для третьего этапа исследования построена геометрия и расчетная сетка, выполнены предварительные тестовые расчеты. Планируется рассмотреть несколько вариантов расстановки чехлов с различным тепловыделением в отсеке и два варианта работы вентиляции: 1) принудительная (расход воздуха  $3 \cdot 10^4$  м<sup>3</sup>/ч на отсек); 2) естественная (расход воздуха  $1,5 \cdot 10^3$  м<sup>3</sup>/ч на отсек).

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Росэнергоатом/Станции и проекты/Сайт Белоярской АЭС [сайт].URL: https://www.rosenergoatom.ru/stations\_projects/sayt-beloyarskoy-aes/

2. Безбородов А.Н., Меркулов В.В. Теплофизический анализ и анализ ядерной безопасности бассейна выдержки при аварии с полным длительным обесточиванием АЭС. – Национальный исследовательский центр «Курчатовский институт», г. Москва, Россия, 2015.

3. Осипов А.А. Моделирование аварийных процессов с нарушением теплоотвода в хранилище отработавшего ядерного топлива РБМК. Автореферат диссертации на соискание ученой степени кандидата технических наук. Москва, 2020.

## РАСЧЕТ ТОКСИЧНОСТИ ВЫХЛОПНЫХ ГАЗОВ ДВИГАТЕЛЯ ВНУТРЕННЕГО СГОРАНИЯ, РАБОТАЮЩЕГО НА ПРОПАН-БУТАНОВОЙ СМЕСИ С ДОБАВКОЙ ВОДОРОДА

В современном мире большое внимание уделяется экологии, ставится задача минимизировать выбросы парниковых газов, планируется постепенный переход с углеводородного топлива на водород. Однако, горение водорода происходит при более высоких температурах, чем природного газа, и уменьшение содержания окислов углерода в выхлопе может сопровождаться ростом содержания окислов азота [1].

С целью выявления зависимости адиабатной температуры горения и содержания вредных примесей в выхлопе от состава топливной смеси и недостатка или избытка окислителя, в данной работе был проведен расчет токсичности выхлопных газов двигателя внутреннего сгорания, работающего на газовом топливе.

Для базового расчета была выбрана «зимняя» пропан-бутановая смесь с объемным содержанием компонентов 95% пропана на 5% бутана. Затем проводились расчеты для смесей пропан-бутанового топлива и водорода с объемным содержанием водорода 20, 40, 50 и 60%. В расчете использовался коммерческий код «АСТРА-4», основанный на поиске максимума энтропии смеси веществ [2].

Проведенные расчеты показали, что адиабатная температура практически не изменялась при увеличении процентного содержания в смеси водорода; прирост при изменении доли водорода от нуля до 60% составил в среднем около 1%. При этом температура существенно зависела от коэффициента избытка воздуха (табл.1), достигая наибольшего значения при  $\alpha$ =1,0. Понижение температуры при недостатке окислителя объясняется тем, что в реакцию не вступила часть топливной смеси, следовательно, уменьшился тепловой эффект реакции, а понижение температуры при избытке окислителя можно объяснить тем, что часть теплоты реакции затрачивается на нагрев избыточного воздуха.

	Адиабатическая температура реакции $T_{ad}$ , К				
Доля водорода в топливной смеси, %	<i>α</i> =1,2	<i>α</i> =1,0	a=0,8		
0	2110,7	2342,0	2175,2		
20	2114,3	2345,2	2180,8		
40	2119,7	2350,1	2189,4		
50	2123,8	2353,8	2195,8		
60	2129,4	2358,9	2204,6		

Табл. 1. Зависимость адиабатической температуры реакции от коэффициента избытка воздуха и объемного содержания водорода в смеси

Таким образом, можно заключить, что добавление водорода к пропан-бутановой смеси не ведет к сколько-нибудь существенному увеличению термического КПД двигателя, поскольку не увеличивается средняя температура подвода теплоты. В то же время, нет и

<sup>&</sup>lt;sup>(•)</sup> Е.М. Ротинян, rotinian@yandex.ru

опасности перегрева стенок двигателя и воспламенения смазки. Коэффициент избытка воздуха целесообразно выбирать близким к единице.

Результаты расчетов показали также, что из оксидов азота в выхлопе присутствуют в значимых количествах только монооксид NO, диоксид  $NO_2$  и закись азота  $N_2O$ , а также монооксид CO и диоксид углерода  $CO_2$ . Были рассчитаны объемные концентрации этих веществ в зависимости от доли водорода в топливной смеси и от коэффициента избытка воздуха, которые приведены в табл. 2,3,4.

	Содержание оксида азота (II) NO					
	в продукт	ах сгорания, объем	ная доля			
Доля водорода						
в топливной	<i>α</i> =1,2	<i>α</i> =1,0	$\alpha=0,8$			
смеси, %						
0	0,37583·10 <sup>-2</sup>	0,16882.10-2	0,22045.10-4			
20	0,37807.10-2	0,16958.10-2	0,22894.10-4			
40	0,38154.10-2	0,17073·10 <sup>-2</sup>	$0,24257 \cdot 10^{-4}$			
50	0,38411.10-2	0,17154.10-2	0,25301.10-4			
60	0,38765.10-2	0,17263.10-2	$0,26795 \cdot 10^{-4}$			

Табл. 2. Объемная концентрация монооксида азота

	Таб	л. 3	5. (	Объемная	концен	грация	монооксила	углерода
--	-----	------	------	----------	--------	--------	------------	----------

	Содержание монооксида углерода СО						
	в продукт	в продуктах сгорания, объемная доля					
Доля водорода							
в топливной	<i>α</i> =1,2	<i>α</i> =1,0	<i>α</i> =0,8				
смеси, %							
0	0,28089·10 <sup>-3</sup>	0,55514·10 <sup>-2</sup>	0,63475.10-1				
20	0,28118·10 <sup>-3</sup>	0,55046·10 <sup>-2</sup>	0,62160.10-1				
40	0,28117·10 <sup>-3</sup>	$0,54252 \cdot 10^{-2}$	0,60084.10-1				
50	0,28077.10-3	0,53610.10-2	0,58518.10-1				
60	0,27962·10 <sup>-3</sup>	0,52643·10 <sup>-2</sup>	0,56313·10 <sup>-1</sup>				

Табл. 4	. Объемная	концентр	ация диок	сида у	глерода
---------	------------	----------	-----------	--------	---------

	Содержание диоксида углерода СО2				
	в продукт	ах сгорания, объем	ная доля		
Доля водорода					
в топливной	<i>α</i> =1,2	<i>α</i> =1,0	<i>α</i> =0,8		
смеси, %					
0	0,98288.10-1	0,11082	0,72634.10-1		
20	0,95689·10 <sup>-1</sup>	0,10774	0,70238.10-1		
40	0,91648.10-1	0,10298	0,66560.10-1		
50	0,88654.10-1	$0,9458 \cdot 10^{-1}$	0,63870.10-1		
60	0,84511.10-1	$0,94599 \cdot 10^{-1}$	0,60201.10-1		

Рассчитанные концентрации сравнивались с предельно допустимыми концентрациями (ПДК). ПДК были приняты по нормам Евро-6: на км пробега выброс *x*, г/км окислов азота NO<sub>x</sub> до 0.06 г/км и CO до 1.0 г/км в бензиновых двигателях, и до 0.08 г/км NO<sub>x</sub> и 0.5 г/км CO в дизелях [3]. Процедура вспомогательных расчетов, позволяющих провести указанное сравнение, заключалась в следующем.

Известно, что средний расход бензина на 100 км пробега - от 10.5 до 20 литров, возьмем 20 литров. Расход пропан-бутана, по данным источников, на 15-20% больше, чем бензина, а метана - примерно столько же, как бензина. Предполагая, что добавка водорода не увеличивает расхода топлива, примем для нашей смеси расход 24 литра на 100 км, следовательно, расход на км пробега 0.24 литра=0.24·10<sup>-3</sup> м<sup>3</sup>/км [4].

В число параметров равновесного состава смеси, вычисляемых АСТРОЙ-4, входит число молей продуктов реакции на килограмм рабочего тела M (изменялось от 35.1 до 37.8), моль/кг и удельный объем смеси, также на 1 кг рабочего тела, v (от 0.154 до 0.173), м<sup>3</sup>/кг, что позволяет найти общее число молей продуктов реакции на кубический метр:

$$M'=M/v$$

(1)

По формуле (1) рассчитывается максимальное значение:

 $M' = M_{max} / v_{min} \approx 37.8 / 0.154 \approx 245.5$  моль/м<sup>3</sup>.

Для идеально-газовых составляющих объемная доля r равна мольной, следовательно, умножая объемную долю той или иной вредной примеси на число молей смеси M', получим число молей примеси в смеси продуктов реакции, также в моль/м<sup>3</sup>. Умножив полученное значение на молярную массу, г/моль, получим содержание примеси в одном кубометре выхлопных газов, г/м<sup>3</sup>. Умножив на расход топлива на км пробега Q, м<sup>3</sup>/км, получим искомое значение выброса.

$$x = r \cdot M' \cdot \mu \cdot Q \tag{2}$$

$$x_{NO} = 0,4 \cdot 10^{-2} \cdot 245,5$$
 моль/м<sup>3</sup> · 30 г/моль · 0,24 · 10<sup>-3</sup> м<sup>3</sup>/км = 7,07 · 10<sup>-3</sup> г/км  $\approx$  0,007 г/км.  
 $x_{CO} = 0,635 \cdot 10^{-1} \cdot 245,5$  моль/м<sup>3</sup> · 28 г/моль · 0,24 · 10<sup>-3</sup> м<sup>3</sup>/км = 104,8 · 10<sup>-3</sup> г/км  $\approx$  0,1 г/км  $x_{CO2} = 0,11082 \cdot 245,5$  моль/м<sup>3</sup> · 44 г/моль · 0,24 · 10<sup>-3</sup> м<sup>3</sup>/км = 287,3 · 10<sup>-3</sup> г/км  $\approx$  0,3 г/км.

Как видно, рассчитанные значения выбросов ниже, чем требует норма Евро-6.

Необходимо отметить далее, что при  $\alpha$ =0,8, кроме резкого роста объемной доли монооксида углерода в продуктах сгорания, расчет показал также появление аммиака  $NH_3$  и несгоревшего водорода в выхлопе. Таким образом, режим горения смеси при любом соотношении пропан-бутана и водорода и коэффициенте избытка воздуха  $\alpha$  < 0,8 не может быть рекомендован, исключая моменты запуска двигателя [5].

С целью выявления оптимального коэффициента избытка окислителя были проведены дополнительные расчеты. Расчет проводился при объемной доле водорода 20, 40 и 60 %. В всех случаях значение оптимального коэффициента избытка воздуха оказалось одинаковым и составило  $\alpha_{\text{опт}} = 0.98$ . Результаты представлены в табл. 5.

Доля водорода в	Оптимальный коэффициент	Максимальная адиабатическая				
топливной смеси, %	избытка воздуха $lpha_{ m ont}$	температура реакции, <i>T</i> <sub>ад max</sub> , К				
20	0,98	2351,1				
40	0,98	2356,2				
60	0,98	2365,2				

Табл. 5. Оптимальный коэффициент избытка воздуха

По результатам проведенных расчетов сделаны следующие выводы:

- добавка водорода в пропан-бутановую смесь повышает адиабатическую температуру реакции не более чем на 1%;
- 2) с увеличением доли водорода в топливной смеси содержание *CO* и *CO*<sub>2</sub> в выхлопе слабо падает, а содержание *NO* слабо растет;
- содержание всех вредных примесей существенно увеличивается в режимах с недостатком окислителя, однако не превышает норм Евро-6.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Башкин В.Н. Прогноз глобального потребления энергии и изменения климата / В.Н. Башкин, Р.В. Галиулин, Р.А. Галиулина // Территория Нефтегаз. 2013 г. № 4. С. 94-98.

2. Трусов Б.Г., Моделирование химических и фазовых равновесий при высоких температурах Астра 4. Руководство пользователя ПК. МГТУ им. Баумана, 1991г, 40 с.

3. Экологический стандарт Евро 6 (2014) для легковых автомобилей и коммерческого транспорта — 459/2012/ЕС и 2016/646/ЕU.

4. Грехов Л.В. Топливная аппаратура и системы управления дизелей: учебник для вузов / Л.В. Грехов, Н.А. Иващенко, В.А. Марков. – М.: Легион-Автодата, 2005. – 344 с.

5. Автомобильные системы нейтрализации отработавших газов. URL: https://os1.ru/article/7556-avtomobilnye-sistemy-neytralizatsii- otrabotavshih-gazov. Дата обращения 05.05.2019 г.

УДК 532.517

Е.Д. Степашева, М.А. Засимова Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого<sup>(•)</sup>

## ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ АВТОКОЛЕБАТЕЛЬНОГО РЕЖИМА ТЕЧЕНИЯ ПРИ ПОДАЧЕ ПЛОСКОЙ СТРУИ ВОЗДУХА В ТЕСТОВОЕ ВЕНТИЛИРУЕМОЕ ПОМЕЩЕНИЕ

Введение. В современном технологическом обществе люди проводят все большее количество времени в ограниченных помещениях: в жилых и производственных зданиях, в наземном и воздушном транспорте. Для создания комфортных условий в помещениях используются системы вентиляции, задача которых состоит в обеспечении комфортного микроклимата. Микроклимат помещений определяется множеством параметров, таких как температура, скорость и относительная влажность воздуха, объемная концентрация вредных веществ в воздушной среде (например, углекислого газа) и др. Существенное влияние на эффективность вентиляции отказывает реализуемый в помещении режим течения. Системы вентиляции и кондиционирования часто формируют многоструйную подачу воздуха, при этом, как показано в работах [1, 2], в некоторых случаях, могут формироваться автоколебания приточных струй. Нестационарный режим течения может оказывать существенное влияние на интенсивность теплосъема с нагретых поверхностей технических устройств.

В работе рассматривается модельная задача об истечении плоской воздушной струи в ограниченное пространство (полость). Постановка задачи соответствует условиям изотермического эксперимента [2]. Результаты численного моделирования наблюдавшегося в [2] автоколебательного режима течения приведены ранее в [3]. В настоящей работе для тех же значений режимных параметров исследовано влияние количества приточных струй на структуру течения и теплообмен в вентилируемой полости.

Постановка задачи. Рассматривается распространение воздушной струи в полости, геометрия которой показана на рис.1 а. Длина полости L = 50 см, ширина и высота полости равны H = 20 см. Одна из торцевых границ полости открыта, на этой границе размещено щелевое сопло, высота узкого сечения которого равна  $h_0 = 0.01$  см. На поверхности узкого сечения имеются приточные отверстия. В варианте #1, соответствующем условиям [2, 3], воздух поступает в полость через щелевое отверстие шириной H, совпадающей с шириной полости. В вариантах #2 и #3 подача воздуха осуществляется через два и три последовательно размещенных прямоугольных отверстия шириной  $H_0/5$  (рис. 1 в)

<sup>&</sup>lt;sup>(•)</sup> Е.Д. Степашева, stepasheva.ed@gmail.com

соответственно. Для всех вариантов на срезе сопла задавался однородный профиль скорости,  $V_{\rm in} = 6$  м/с, что соответствует числу Рейнольдса  $Re = \rho h_0 V_{\rm in} / \mu = 4 \times 10^3$ . Со стороны открытой границы полости присоединен дополнительный объем (рис. 1 б), на одной из границ которого (отмечена красной штриховой линией) задан постоянный уровень нормированного давления, на остальных границах задано условие симметрии.

Расчеты проводились в изотермической, соответствующей условиям эксперимента [2], и неизотермической постановках. В неизотермической постановке стенки полости поддерживались при постоянной температуре  $T_w = 310$  К, температура холодной приточной струи была задана равной  $T_{in} = 300$  К.

Математическая модель и вычислительные аспекты. Моделирование турбулентного течения осуществлялось на основе решения нестационарных осредненных по Рейнольдсу уравнений Навье-Стокса, для замыкания которых использовалась k- $\omega$  SST модель турбулентности. Уровень характеристик турбулентности на входной границе определяется интенсивностью турбулентности Tu = 14% и отношением турбулентной вязкости к молекулярной  $\mu_t/\mu = 6.2$ . Учет сил плавучести осуществлялся в рамках приближения Буссинеска. В систему определяющих уравнений входит уравнение баланса энергии.

Использовались построенные в пакете ICEM CFD сетки с гексагональными ячейками, число ячеек варьировалось от 2 до 6 млн. Показано, что решение, полученное на сетке 2 млн ячеек, слабо зависит от дальнейшего увеличения размерности сетки. Шаг по времени задавался равным 0.01 с. Расчеты выполнены в пакете ANSYS Fluent 19.3. Дискретизация пространственных и временных производных была выполнена со вторым порядком точности. Для проведения расчетов использовались ресурсы СКЦ Политехнический (www.scc.spbstu.ru).



Рис. 1. а) Геометрия полости и изоповерхность скорости (V<sub>in</sub>/4), построенная для варианта #3, б) общий вид расчетной области, в) входные отверстия для вариантов #1 – #3

Результаты расчетов. Для варианта #1 при истечении плоской воздушной струи в полости, В соответствии с экспериментальными данными [2], формируются крупномасштабные периодические автоколебания. Струя поочередно отклоняется к верхней и нижней стенкам полости. Структура полученного течения является двумерной: поля скорости в трансверсальных сечениях совпадают, некоторые отличия можно отметить вблизи боковых стенок полости на расстоянии, не превышающем  $h_0$ . Для вариантов #2 и #3 при подаче двух и трех струй в полость течение сохраняет автоколебательный характер (рис. 1 а): струи как единое целое за период колебаний соударяются с нижней и верхней стенками полости.

На рис. 2 а-б для варианта #1 показана эволюция скорости в точках мониторинга  $P_1$  и  $P_2$ , расположенных на расстоянии  $12h_0$  от среза сопла. Точка  $P_1$  расположена на расстоянии  $4h_0$  от нижней стенки полости, точка  $P_2$  расположена вблизи оси сопла. Полученная в расчетах эволюция скорости, регистрируемая в точке  $P_2$ , достаточно хорошо согласуется с данными эксперимента [2] по амплитуде и частоте колебаний. Значения скорости,

фиксируемые мониторинга Р<sub>1</sub>, по данным В точке расчетов оказались выше Частота колебаний струи определялась экспериментальных. по данным Фурьепреобразования зависимости скорости от времени, частотный спектр, построенный по данным в точке P<sub>1</sub> показан на рис. 2 в. Основная частота колебаний для варианта #1 составила 0.6 Гц, что соответствует данным [2]. Следует отметить, что при переходе к неизотермической постановке задачи амплитуда колебании скорости в точках мониторинга не изменяется, частота колебаний незначительно увеличивается (на 4%).



Рис. 2. Эволюция скорости в точках мониторинга а) P<sub>1</sub> и б) P<sub>2</sub>, полученная в расчетах и в эксперименте [2]; в) Фурье-преобразование расчетных данных (вариант #1)

На рис. 3 приведена эволюция скорости в точках мониторинга  $P_1$  и  $P_2$  для вариантов #1 - #3. Частота автоколебаний при истечении в полость одной, двух и трех струй практически совпадает и равна 0.6 Гц. С увеличением числа приточных отверстий крайнее положение точки прилипания струи к верхней и нижней стенкам полости смещается по направлению к противоположной от входа торцевой стенке полости. Соответственно, с увеличением числа приточных отверстий в точке мониторинга  $P_1$ , расположенной вблизи стенки полости (рис. 3 а), амплитуда колебаний скорости снижается. В точке мониторинга, расположенной вблизи оси струи (рис. 3 б), амплитуда колебаний скорости практически не изменяется.



Рис. 3. Эволюция скорости в точках мониторинга а) P<sub>1</sub> и б) P<sub>2</sub>, полученная для вариантов #1 – #3

Переход от одной к нескольким приточным струям оказывает существенное влияние на теплоотдачу от стенок полости. При подаче одной струи (вариант #1) за счет большего расхода воздуха обеспечивается интенсивная теплоотдача от стенок полости. В таблице 1 приведено осредненное во времени и по различным стенкам полости значение числа Нуссельта  $Nu = q_w h_0 / (T_w - T_{in}) \lambda$ .

Dopuout			Λ	lu	
Бариант	гасход, л/с	Верхняя	Нижняя	Торцевая	Боковые
#1	12	6.57	6.50	6.21	5.49
#2	4.8	3.06	3.33	3.67	3.07
#3	7.2	4.25	3.91	4.36	4.36

Табл. 1. Интегральная теплоотдача от стенок полости

При подаче воздуха через два отверстия (вариант #2) расход воздуха минимален, наблюдается уменьшение теплоотдачи от стенок полости примерно в два раза в сравнении с вариантом #1. Для варианта #3 среднее значение *Nu* от стенок полости меньше на 35% по сравнению с данными для варианта #1. Таким образом, существенное влияние на теплоотдачу оказывает расход подаваемого в полость воздуха, а не число приточных отверстий.

Исследование выполнено при поддержке гранта РНФ № 22-29-00224.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Zasimova M., Ivanov N., Smirnov E., Markov D., Stankov P. Air distribution in a classroom at various supply diffuser operation modes // Proc. of 6th International Symposium on Environment-Friendly Energies and Applications (EFEA), Sofia, Bulgaria. 2021. P. 1-6.

2. Mataoui A., Schiestel R., Salem A. Flow regimes of interaction of a turbulent plane jet into a rectangular cavity: experimental approach and numerical modelling // Flow, Turbulence and Combustion. 2001. Vol 67. P. 267-304.

3. Ivanov N., Zasimova M., Stepasheva E., Kudryavtseva V. CFD modeling of a self-oscillatory airflow regime in the test ventilated room with plane supply opening // E3S Web of Conferences. 2022. Vol. 356. 04020. 4 p.

УДК 533.661

А.О. Уманский Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого<sup>(•)</sup>

### ОПРЕДЕЛЕНИЕ АЭРОДИНАМИЧЕСКИХ ХАРАКТЕРИСТИК ЛОПАСТИ ВЕРТОЛЕТА ПРИ ВЗАИМОДЕЙСТВИИ СО СПУТНОЙ СТРУЕЙ В 2.5D ПОСТАНОВКЕ

Моделирование аэродинамики работы (концепции) несущего винта во многом определяет качество винтовой машины и его аэродинамических характеристик. Формирование следа и его сворачивание в вихри представляет собой сложный трехмерный процесс, который происходит во время аэродинамического обтекания лопастей и профилей [1,2]. След за каждой лопастью представляет собой непрерывный слой завихренности, который быстро сворачивается на небольшом расстоянии в один (чаще всего) или несколько завихрений [3]. Взаимодействие лопасти со спутной струей происходит, когда спутная струя от лопасти несущего винта, проходит вблизи следующей за ней лопасти, что приводит к импульсным изменениям нагрузки на лопасти, увеличивает нагрузку на пилотов и затраты на техническое обслуживание [4,5].

Численное моделирование течения около винта вертолета в полной постановке связано с высокими вычислительными затратами и низкой вычислительной эффективностью. В связи с этим требуется поиск упрощенных моделей, которые могут быть использованы на первых этапах проектирования винта вертолета. Выходом в данном случае может стать развертка цилиндрического сечения для перехода к плоской задаче, в таком случае задача может быть решена в 2D или 2.5D постановке.

Моделирование задачи в 2.5D постановке предполагает вытягивание 2D модели в пролетном направлении и получение узкой секции лопасти. Такая модификация позволяет достичь реалистичного воспроизведения трехмерных разделенных вихрей при больших углах атаки лопасти, в частности в работе [6] показано, что 2D модель не является адекватной для прогнозирования нестационарных структур потока с крупномасштабными

<sup>&</sup>lt;sup>(•)</sup> А.О. Уманский, alex\_umanskij997@mail.ru

отрывными зонами вокруг аэродинамических крыльев при относительно больших углах атаки.

В настоящее время мощности расчетных станций позволяют использовать методы вычислительной гидродинамики, основанные на решении уравнений Навье-Стокса с использованием конечных (контрольных) объемов. Для стационарной постановки в работе используются усредненные по Рейнольдсу уравнения Навье-Стокса (RANS), замкнутые моделью турбулентности SST, описание модели приведено в [7]. Для оценки вклада от нестационарности потока используется нестационарная постановка с масштабно-адаптивным моделированием SAS-SST. Метод предложен Ментером и Егоровым [8], его преимуществом является возможность динамического разрешения малых структур в нестационарном RANS моделировании, что приводит к LES-подобной неустойчивости в нестационарных областях потока.

Численное моделирование проводилось в Ansys-CFX, в 2D и 2.5D постановках. Для возможности проведения валидации расчетов был выбран стандартный профиль NACA-23012. В качестве рабочей среды используется воздух при стандартных условиях, моделируется как несжимаемый газ (число Маха в расчетах < 0.3). Скорость входного потока подбиралась из значения числа Рейнольдса равного 3.15 · 10<sup>6</sup>. Для валидации численной модели используются экспериментальные данные по обдувке одиночного профиля, приведенные в [9], на рис.1а приведена постановка задачи. Валидация проводится для случая расчетов в стационарной постановке с моделью турбулентности SST.



Рис. 1. Постановки задачи обтекания а) одного профиля; б) двух профилей

На рис. 2 представлены рассчитанные зависимости коэффициентов подъемной силы и сопротивления от угла атаки, наложенные на экспериментальные зависимости, а также распределения скорости и давления вокруг профиля при различных углах атаки. Рассчитанные коэффициенты показывают хорошее совпадение с экспериментальными данными, что говорит о корректности численной модели. По распределениям скорости вокруг профиля можно видеть, что при больших углах атаки (12°, 17°) появляется динамический срыв потока.

На рис. 3 приведены результаты расчетов одиночного профиля при угле атаки 7° с использованием моделей турбулентности SST и SAS-SST. Можно видеть, что даже при угле атаки меньшем, чем необходим для динамического срыва, присутствуют различия двух рассчитанных полях течения вокруг профиля. Основными отличиями являются рециркуляция на верхней поверхности профиля и ярко выраженные колебания кинетической энергии турбулентности в следе для модели SAS-SST.



Рис. 2. 1) Зависимость коэффициентов подъемной силы и сопротивления от угла атаки; 2) Распределения для различных углов атаки: а – давления; б – скорости



Рис. 3. 1) Распределения для модели SST: а – скорости, б – турбулентной кинетической энергии; 2) Распределения для модели SAS-SST: а – скорости, б – турбулентной кинетической энергии

В стационарной постановке была произведена серия расчетов по обтеканию 2-х профилей NACA-23012 при углах атаки 1-го - 0° ... 30°, 2-го профиля – 9°, постановка задачи приведена на рис. 16. На рис. 4.1 приведены рассчитанные зависимости коэффициентов подъемной силы и силы сопротивления на 2-м профиле от угла атаки первого профиля. Можно видеть общее падение коэффициента подъемной силы, а при угле 10° начинается его существенное падение, связанное с эффектом динамического срыва потока с первого профиля. На рис.4.2 приведены распределения скорости и давления для угла атаки первого профиля 9°, на рис.4.3 – для угла атаки 1-го профиля 25°. Можно видеть существенное падение интенсивности как зоны сжатия под 2-м профилем, так и снижения интенсивности зоны разряжения над ним, вследствие взаимодействия со спутной струей от 1-го профиля. Наблюдается существенное увеличение интенсивности вихревого следа при повышении угла атаки 1-го профиля. Наблюдается существенное увеличения интенсивности зоны разряжения за первой лопастью приводит к падению коэффициента сопротивления на второй лопасти.



Рис. 4. 1) Зависимость коэффициентов подъемной силы и силы сопротивления на 2-м профиле от угла атаки 1-го профиля; 2) Распределение скорости и давления для углов атаки 1-го профиля – 9°, 2-го – 9°; 3) Распределение скорости и давления для углов атаки 1-го профиля – 25°, 2-го – 9°

В ходе данной работы численно исследована задача о взаимодействии позади идущей лопасти со спутной струей от передней лопасти. Произведены оценки эффективных характеристик задней лопасти от угла атаки передней. Проведено качественное сравнение расчетов при использовании моделей турбулентности SST и SAS-SST. В ходе валидации было показано, что расчетная процедура дает корректные результаты, коррелирующие с экспериментальными данными.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Wayne Johnson. Helicopter theory / ed. Princeton University Press. New Jersey, 1980.

2. Conlisk A.T. Modern helicopter rotor aerodynamics // Progress in Aerospace Sciences. 2001. Vol. 37, №5.

3. Gordon L.J. Principles of helicopter aerodynamics. Second edition. New York: Cambridge University Press, 2006.

Leishman J., Bhagwat M., Ananthan S. The Vortex Ring State as a Spatially and Temporally Developing
 Wake Instability // Journal of the American Helicopter Society. 2004. Vol. 49. P. 160–175.

6. Gao H., Hu H., Wang Z.J. Computational Study of Unsteady Flows around Dragonfly and Smooth Airfoils at Low Reynolds Numbers // 46th AIAA Aerospace Sciences Meeting and Exhibit. Reston, Virigina: American Institute of Aeronautics and Astronautics, 2008.

7. Menter F.R. Two-equation eddy-viscosity turbulence models for engineering applications // AIAA Journal. 1994. Vol. 32, № 8. P. 1598–1605

8. Menter F., Egorov Y. A Scale Adaptive Simulation Model using Two-Equation Models // 43rd AIAA Aerospace Sciences Meeting and Exhibit. Reston, Virigina: American Institute of Aeronautics and Astronautics, 2005

9. John V. Becker. High-speed wind-tunnel tests of the NACA 23012 // NASA Report . - 1941. - P. 15.

Т.А. Федорова<sup>1</sup>, Д.С. Пашкевич<sup>1</sup>, П.А. Попов<sup>2</sup>

 $^1 \text{Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого}^{(\bullet)} \\ ^2 \Phi$ изико-технический институт имени А.Ф.Иоффе

## ВЛИЯНИЕ МОДЕЛИ ТУРБУЛЕНТНОСТИ НА РЕЗУЛЬТАТЫ ЧИСЛЕННОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ ПРОЦЕССА ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ ГЕКСАФТОРИДА УРАНА С МЕТАНОМ И КИСЛОРОДОМ В РЕЖИМЕ ГОРЕНИЯ

На сегодняшний день в мире накоплено более 2 миллионов тонн гексафторида урана, обедненного по изотопу U-235 (ОГФУ), побочного продукта процесса изотопного обогащения урана. Одним из методов переработки ОГФУ с получением товарных продуктов является его взаимодействие с метаном и кислородом в режиме горения [1]:

 $UF_{6_{\Gamma_{43}}} + 1.5CH_{4_{\Gamma_{43}}} + 2.5O_{2_{\Gamma_{43}}} \rightarrow UO_{2_{TB}} + 6HF_{\Gamma_{43}} + 1.5CO_{2_{\Gamma_{43}}} - 1056$  кДж. (1)

Данный метод, целевыми продуктами которого являются фторид водорода и оксиды ядерно-чистого урана, позволит не только замкнуть ядерный топливный цикл по фтору, но и использовать UO<sub>x</sub> при производстве МОКС-топлива.

Одним из направлений работ является создание математической модели, позволяющей рассчитывать поля параметров процесса (1) для масштабирования и конструирования промышленного реактора типа «туннельная горелка».

В [2] описана модель процесса (1), включающая уравнения движения, неразрывности, переноса кинетической энергии турбулентности, переноса удельной скорости диссипации кинетической энергии турбулентности, диффузии, переноса интенсивности излучения, энергии. Для расчета скорости химической реакции использовалась модель дробления вихрей, а в качестве модели турбулентности - k-ω SST, которую обычно применяют при описании струйных турбулентных течений. Модель реализована в программном комплексе «Ansys Fluent 2019 R3».

Наиболее распространенными в инженерных расчетах моделями турбулентности являются k-ε standard, k-ω SST и SST-transition. Модели различаются описанием турбулентной вязкости – различным функциональным выражением связи между турбулентной вязкостью и энергией турбулентности и скоростью ее диссипации.

В данной работе проведено исследование влияния указанных моделей турбулентности на результаты расчета полей параметров при использовании модели [2] и программного комплекса «Ansys Fluent 2019 R3». Расчеты проводились для реактора типа «туннельная горелка», описанного в [1] (диаметр реактора 142 мм; диаметр осевого канала форсунки – 4 мм, внутренний диаметр кольцевого канала – 6 мм, внешний – 8 мм; температура стенки реактора и исходная температура компонентов составляли 353 К; метан подавался по осевому каналу, по кольцевому – смесь кислорода и ОГФУ, расход ОГФУ - 3 г/с).

В табл. 1 приведены некоторые характеристики процесса (1), полученные в результате расчетов – максимальная температура в зоне реакции  $T_{max}$ , продольная координата максимума температуры  $x_{Tmax}$ , продольная координата сечения реактора, в котором среднемассовая температура потока снижается до 1000 К  $x_{T=1000}$ , максимальное значение теплового потока из зоны реакции  $Q_{max}$ , максимальное значение радиационного потока из зоны реакции  $Q_{radmax}$ , доля радиационного потока в общем тепловом потоке  $\omega$ , продольная координата сечения реактора, в котором глубина конверсии ОГФУ достигает 99%  $x_{\eta_{99}}$ , эффективная теплопроводность потока  $\lambda_{effmax}$  в сечении реактора, в котором тепловой поток из зоны реакции максимален.

<sup>&</sup>lt;sup>(•)</sup> Т.А. Федорова, tan.fyodorova2014@yandex.ru

На первом этапе проводилось сравнение получаемых результатов с результатами, приведенными в [2] для случая k- $\omega$  SST модели турбулентности, с итоговым заключением об их хорошем совпадении.

Параметр	$k - \omega SST[2]$	$k - \omega SST$	SST transition	$k - \epsilon$ standard	$\Delta_{\rm cn}$ , %
$T_{max}$ , K	2294	2054	2016	2091	3
<i>х<sub>Ттах</sub>,</i> м	-	0.012	0.014	0.040	48
$x_{T=1000, M}$	~0.4	0.31	0.31	0.34	6
<i>Q<sub>max,</sub></i> кВт/м <sup>2</sup>	~58	51.09	51.19	48.08	4
<i>х<sub>Qmax</sub>,</i> м	~0.25	0.26	0.26	0.27	3
$\lambda_{eff,max}$ , Вт/(м · К)	-	10.38	10.36	9.03	8
$Q_{rad_{max}}$ , к $BT/M^2$	~13	9.6	9.7	9.3	2
$\omega_{rad}$	0.224	0.170	0.186	0.177	3
$x_{\eta_{99}}$ , М	-	0.0526	0.0457	0.0356	25

Табл. 1. Отдельные результаты численного исследования полей параметров процесса (1) с использованием математической модели [2] при различных моделях турбулентности

На втором этапе расчеты проводились для всех указанных выше моделей турбулентности, и было установлено следующее:

• максимальная температура в зоне реакции составляет 2000-2100 К, что хорошо коррелирует с результатами термодинамических оценок, приведенных в [1];

• Т<sub>тах</sub> реализуется на расстоянии 1-4 см от устья форсунки;

• среднемассовая температура потока 1000 К достигается на расстоянии 30-35 см от устья форсунки;

• максимальный тепловой поток из зоны реакции составляет около 50 кВт/м<sup>2</sup> на расстоянии 26-27 см от устья форсунки;

- эффективная теплопроводность в области Q<sub>max</sub> составляет 9-10 Вт/(м<sup>2</sup>К);
- максимальный радиационный тепловой поток составляет 17-19% от Q<sub>max</sub>;
- глубина конверсии ОГФУ 99% достигается на расстоянии 3-5 см от устья

форсунки.

Для большинства рассчитанных параметров (кроме  $x_{Tmax}$  и  $x_{\eta_{99}}$ ) различие в их значениях, зависящих от выбранной модели турбулентности, не превышает 10%. Т.о., для этих параметров выбор модели турбулентности из трех перечисленных не имеет принципиального значения.

Для k-ω SST и SST-transition различие значений всех параметров из таблицы 1 не превышает 14%. Т.о., эти две модели практически идентичны для рассмотренной задачи.

Значительное различие в результатах расчета для SST-моделей и k-є standard было получено лишь для x<sub>Tmax</sub> (48%) и x<sub>199</sub> (25%).

На рис. 1 приведены поля температуры, полученные при использовании трех перечисленных моделей. Из приведенных данных следует, что поля подобны для SST-моделей. Для k-ε standard наблюдается существенное отличие. Если при использовании SST-моделей тепловыделение, связанное с протеканием химической реакции, скорость которой, согласно принятым в [2] допущениям, лимитируется турбулентной диффузией, начинается непосредственно за устьем форсунки, то для k-ε standard зона реакции отступает от устья форсунки примерно на 2 см. Кроме того, температура порядка 2000 К для k-ε standard реализуется в гораздо большем объеме, чем в двух других моделях.

Числа Рейнольдса для осевой и кольцевой струй на срезе форсунки составляют 6000 и 9000 при выборе скорости струи в форсунке и диаметра реактора в качестве характерных

величин. Известно, что критическое значение числа Рейнольдса для истечения затопленной струи не превышает 10. Т.о., поток на входе в реактор турбулентный и характерный минимальный размер турбулентного вихря составляет величину порядка 10<sup>-4</sup>-10<sup>-3</sup> м, что существенно меньше, чем расстояние от среза форсунки до области, где температура потока начинает повышаться, для k-є standard. Для выбранной кинетической (диффузионной) модели это представляется противоречивым. Более обоснованными с точки зрения кинетики смешения струй представляются результаты, полученные с использованием k-ω SST и SSTtransition. Это подтверждается и литературными данными, в которых k-є standard рекомендуют использовать для моделирования течений c полностью развитой турбулентностью.



Рис. 6. Стационарное поле температуры в реакторе для разных моделей турбулентности: a)  $k - \epsilon$  standard, б)  $k - \omega$  SST, в) SST transition, г)  $k - \omega$  SST вблизи входной границы расчетной области д)  $k - \epsilon$  standard вблизи входной границе расчетной области, е) SST transition вблизи входной границы расчетной области

При проведении расчетов было установлено также, что затраты машинного времени при использовании k-ω SST на 50% ниже, чем при использовании SST-transition. Поэтому для дальнейших расчетов по моделированию полей параметров процесса (1) целесообразно использовать модель k-ω SST.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Пашкевич Д.С., Алексеев Ю.И., Мухортов Д.А.Получение фторида водорода при взаимодействии гексафторида урана с водородом и кислородом в режиме горения. Эксперимент // Инженернофизический журнал. 2021. Т.94, №5.

2. Popov P.A., Talalov V. A., Pashkevich D. S. Numerical simulation of the interaction of uranium hexafluoride with methane and oxygen in turbulent flame // Journal of Physics: Conference Series. 1697 (2020) 012226.

### РАСЧЕТЫ КАВИТАЦИОННОГО ОБТЕКАНИЯ ГИДРОПРОФИЛЯ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ ПАКЕТА ANSYS FLUENT

Введение. Явление кавитации оказывает существенное влияние на поля течения и характеристики гидропрофилей. В процессе движения в жидкости образуются так называемые каверны – полости, заполненные газом. Образование каверн во многом зависит от падения давления ниже уровня давления насыщенных паров. Однако известны случаи [1], когда кавитация не возникает при падении давления ниже уровня, характерного насыщенного пара.

Образующиеся на поверхности обтекаемого тела пузырьки пара могут схлопываться, в результате чего сильно повышается местная температура и давление. В результате развитие кавитации оказывает негативное действие на поверхность обтекаемого тела и приводит к ее разрушению.

К настоящему времени проведено обширное количество исследований кавитационных течений в самых различных областях – от задач биофизики до судостроения, в частности исследования кавитационного обтекания гидропрофилей. В данной работе рассматривается задача обтекания гидропрофиля с целью тестирования модели кавитации и сопоставления полученных данных с экспериментальными. Постановка задачи аналогична используемой в экспериментальном исследовании R.W.Kermeen [2].

Постановка задачи. Рассматривается обтекание гидропрофиля Вальхнера №7 в кавитационной трубе (длина рабочей части L=1500мм, высота H=355мм, хорда профиля l=83.82мм), установленного под углом атаки 6°. Расчеты проведены в плоской постановке. Режим течения определяется числом кавитации  $K = (p_{inf} - p_v) / (\rho V_{in}^2/2)$ , которое может быть изменено за счет входной скорости потока. В данных расчетах число Рейнольдса составляет  $Re = \rho V_{in} l / \mu = 1.3 \times 10^6$ .

Математическая постановка. Предварительные расчеты показали, что при углах атаки  $\alpha$  больше определенного значения устанавливается режим течения с отрывом пограничного слоя, отрыв и образующаяся кавитационная каверна пульсируют квазипериодически. Нестационарность может наблюдаться и в следе за обтекаемым профилем. Исходя из этого, представляемые расчеты проведены в нестационарной постановке. Решается система уравнений Навье-Стокса, осредненных по Рейнольдсу. Для замыкания системы используется модель турбулентности Spalart-Allmaras (далее S-A) [3]. На входе задается отношение турбулентной вязкости к молекулярной  $\mu_{\tau} / \mu = 1$ . Значение шага по времени задано равным 5x10<sup>-4</sup>с. Расчеты выполнены на коде ANSYS Fluent 2021 R2.

Для описания двухфазной среды (жидкость – пар) используется подход Эйлера, основанный на модели взаимопроникающих континуумов. Двухфазная среда рассматривается как смесь с общим для обеих компонент полем скорости и непрерывным распределением плотности. Модель кавитации определяет характеристики источника в уравнении переноса массы пара, которые описывают рост и схлопывание пузырьков. Использована модель кавитации Zwart-Gerber-Belamri (далее ZGB) [4], которая основана на упрощенном уравнении Рэлея-Плессе, описывающим рост единичного пузырька газа в объеме жидкости.

<sup>&</sup>lt;sup>(•)</sup> А.В. Федотов, fedotov.91201@gmail.com

Для проведения расчетов построены псевдоструктурированные сетки, существенно сгущенные к поверхности профиля (рис. 1), которые обеспечивает среднее значение  $y^+ < 0.2$ . Общее количество ячеек варьируется от 50 до 500 тысяч ячеек для сеток разной степени детализации. Для построения сеток использован сеточный генератор ANSYS ICEM CFD 21.2.



Рис. 1. а) Общий вид расчетной сетки; б) фрагмент расчетной сетка вблизи профиля

*Результаты расчетов*. Проведен ряд расчетов при K = 0.794. Методические расчеты с целью исследования сеточной зависимости решения выполнены на трех сетках, каждая последующая получена уменьшением линейного размера ячейки вдали от профиля в 2 раза. Измельчение сетки приближает результаты расчетов к экспериментальным (табл.1).

Сетка	Ячеек по обводу профиля	Всего ячеек	Коэффициент	Отклонение
Сетка 1	308	47 200	0.77	-15%
Сетка 2	620	126 500	0.79	-13%
Сетка 3	1240	500 200	0.83	-8.8%

Табл.1. Результаты методических расчетов

Рассмотрим картины течения. Формирующиеся у спинки профиля кавитационная каверна и отрывная зона изображены на рис.2. На рис.3 показаны скалярные распределения объемной доли пара в различные моменты времени *t* в рамках одного периода колебания кавитационной каверны. Видно, что с течением времени форма и размер паровой каверны существенно изменяется.



Рис. 2. Мгновенное распределение объемной доли пара с нанесенными линиями тока

В соответствии с нестационарностью кавитационных явлений изменяются и силовые характеристики. Сопоставление эволюции действующих на профиль сил (рис.4, слева) с объемом каверны  $V_{vap}$  (рис.4, справа) показывает, что к моменту увеличения  $V_{vap}$  сила сопротивления  $F_D$  резко снижается, а подъемная сила  $F_L$  увеличивается. В таблице 2

приведено сравнение полученных на сетке 3 коэффициентов сил с экспериментальными значениями.



Рис. 4. Изменение подъемной силы, силы сопротивления и объема каверны за один период

	Коэффициент	Коэффициент сопротивления, <i>С</i> <sub>D</sub>	
	подъемной силы, $C_L$		
Расчеты	0.83	0.076	
Эксперименты [2]	0.91	0.084	

Табл. 2.	Сопоставление	полученных	данных	с экспер	оиментальными	значениями,	сетка 3	
		2	/ /	1		,		

Заключение. Проведены расчеты кавитационного обтекания гидропрофиля Вальхнера №7, установленного под углом атаки 6°. Показана нестационарность картины течения и его интегральных характеристик. Полученные расхождения между расчетными и экспериментальными данными указывают на целесообразность дальнейшего проведения расчетов в других режимах для сопоставления данных с экспериментальными значениями [2], а также, возможно, тестирования других моделей кавитации и моделей турбулентности, доступных в используемом гидродинамическом коде.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Knapp R.T., Daily J.W., Hammit F.G. Cavitation. McGraw-Hill, New-York. 1970.

2. Kermeen R.W. Water tunnel tests of NACA 4412 and Walchner profile 7 in noncavitating and cavitating flows // Rep. No 47-5, 1956

3. Spalart P.R. and Allmaras S.R. A one-equation turbulence model for aerodynamic flows // Le Recherche Aerospatiale. -1994. -n 1. -P. 5-21

4. Zwart P.J., Gerber A.G., Belamri T. A two-phase flow model for predicting cavitation dynamics // Fifth International Conference on Multiphase Flow. – 2004. – Yokohama, Japan.

Ю.В. Шерстобоев<sup>1,2</sup>, В.В. Калаев<sup>2</sup>, В.В.Тимофеев<sup>2</sup>, Н.Г. Иванов<sup>1</sup> <sup>1</sup>Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого <sup>2</sup>ООО «Софт-Импакт»<sup>(•)</sup>

# ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ТРЕХМЕРНОЙ СВОБОДНОЙ КОНВЕКЦИИ ЖИДКОГО МЕТАЛЛА В КВАДРАТНЫХ И КУБИЧЕСКИХ ПОЛОСТЯХ

Введение. Численное моделирование свободно-конвективных течений представляет большой интерес во многих областях науки и техники. Задачи подобного рода имеют высокую значимость как в фундаментальных исследованиях (атмосферные явления, движение в мантии Земли и т. д.), так и в практических приложениях (конвекция расплава при выращивании монокристаллов, конвекция в металлургических процессах и т. д.). Одной из канонических задач свободной конвекции является задача о конвекции в квадратной полости с разнонагретыми вертикальными стенками. Даная задача является хорошо изученной для числа Прандтля, соответствующего воздуху (Pr = 0.71). Например, результаты численного моделирования данной задачи представлены в работах [1, 2]. Для схожей задачи в трехмерном случае для значения числа Прандтля, соответствующего воздуху, также имеются высококачественные численные данные [3]. Однако, несмотря на простоту постановки этих задач, до сих пор существуют пробелы в аккуратных, сеточно-независимых численных данных для двумерной и трехмерной конвекции низкопрандтлевых жидкостей. В частности, в литературе почти нет данных о ламинарной конвекции расплавленного железа (Pr = 0.1) в квадратной каверне и кубической полости. Результаты моделирования двумерной конвекции при Pr = 0.1 в квадратной каверне с разнонагретыми вертикальными стенками для нескольких чисел Рэлея приведены в работе [4], однако, в данной работе не представляются результаты исследования сеточной сходимости решения. В работе [5] приведены результаты моделирования конвекции расплавленного железа в кубе с разнонагретыми вертикальными стенками для числа  $Ra = 10^6$ , что соответствует нестационарному режиму течения. Таким образом, в литературе имеется очень мало данных о конвекции железа в квадратной и кубической полостях.

В настоящей работе представляются результаты численного решения задачи о ламинарном свободно-конвективном течении расплавленного железа в квадратной каверне и кубической полости с двумя разнонагретыми вертикальными стенками. Для проведения расчетов использовался конечно-объемный неструктурированный гидродинамический пакет CVDSim3D, обшего назначения разрабатывающийся 000 «Софт-Импакт» в (http://www.softimpact.ru). В состав данного пакета входит сеточный генератор, строящий сетки Вороного – неструктурированные вычислительные сетки, основанные на диаграмме Вороного [6]. Такие сетки обладают двумя важными для гидродинамических расчетов свойствами: во-первых, центры любых двух соседних ячеек находятся на одинаковом расстоянии от грани, разделяющей их, во-вторых, отрезок, соединяющий центры любых двух ячеек, перпендикулярен разделяющей их грани. Пример диаграммы Вороного, а также сетки Вороного, построенной в кубе, приведен на рис. 1. Для демонстрации возможности получения сеточно-независимого решения с использованием неструктурированных сеток Вороного с использованием CVDSim3D были также проведены дополнительные расчеты на структурированных гексагональных сетках. Также была проведена кросс-верификация полученного решения с результатами, полученными с применением модуля Flow Module пакета CGSim, использующего структурированные гексагональные сетки.

<sup>&</sup>lt;sup>(•)</sup> Ю.В. Шерстобоев, yuri.sherstoboev@str-soft.com



Рис. 1. А) Пример диаграммы Вороного для некоторого множества точек; Б) пример сетки Вороного, построенной в кубе

Постановка задачи и вычислительные аспекты. На рис. 2(A) и 2(Б) приведен вид расчетной области и граничные условия для задачи о конвекции в квадратной каверне и кубической полости, соответственно. В качестве граничных условий на левой стенке задается постоянная температура  $T_c$ , на правой – также постоянная температура  $T_h > T_c$ . Горизонтальные стенки и (в трехмерной постановке) две другие вертикальные стенки полагаются адиабатическими. В обоих случаях жидкость находится в условиях гравитационного поля  $\vec{g}$ .



Рис. 2. Геометрия расчетной области и граничные условия для случая А) квадратной каверны и Б) кубической полости

Свободно-конвективное течение в рассматриваемых конфигурациях определяется двумя критериями подобия: числом Прандтля Pr = 0.1, что соответствует расплавленному железу и числом Рэлея  $Ra=g\beta(T_2-T_1)H^3Pr/v^2$ , которое в настоящих расчетах принималось равным  $Ra = 10^3$ ,  $5 \cdot 10^3$ ,  $10^4$ ,  $5 \cdot 10^4$ ,  $10^5$ ,  $5 \cdot 10^5$  (только 2D),  $10^6$  (только 2D). Характерным перепадом температуры является разность  $\Delta T=T_h-T_c$ , а масштабом скорости – т. н. скорость плавучести  $V_b=(g\beta\Delta TH)^{0.5}$ .

Как уже упоминалось, при проведении основных расчетов использовались неструктурированные сетки Вороного, внешний вид которых в двумерном случае приведен на рис. 3(А), а срез сетки в центральном сечении в трехмерном случае – на рис.3(Б). Кроме сеток Вороного при моделировании течения в кубической полости также использовались структурированные гексагональные сетки, примерный внешний вид которых приведен на рис. 3(В). В случае расчетов, выполненных с использованием CVDSim3D, для аппроксимации конвективных и диффузионных членов уравнений переноса использовались

схемы второго порядка. При выполнении расчетов с помощью CGSim конвективные слагаемые аппроксимировались по схеме третьего порядка, диффузионные – четвертого.



Рис. 3. Пример вычислительных сеток A) Вороного в 2D конфигурации, Б) Вороного в 3D конфигурации, B) структурированных гексагональных

*Результаты расчетов.* На рис. 4 приведены поля нормированных температуры и модуля скорости в центральном сечении куба, полученные при  $Ra = 10^3$ ,  $10^4$ ,  $10^5$ . Аналогичные поля в двумерном случае выглядят практически тождественно. На представленном рисунке видно как меняется течение при увеличении числа Рэлея: при небольших значениях Ra течение сосредоточено в центре расчетной области и слабо влияет на поле температуры, а при увеличении Ra наиболее интенсивное течение сосредотачивается вблизи изотермических стенок. При этом в месте наиболее быстрого течения образуются тонкие пограничные температурые слои, в то время как в центре куба имеет место некая стратификация изолиний температуры.



Рис. 4. Поля нормированных температуры (сверху) и модуля скорости (снизу) в центральном сечении куба

На рис. 5(А) приведен график, демонстрирующий сеточную сходимость численного решения задачи о конвекции в кубе, построенный по результатам расчетов при использовании сеток Вороного и гексагональных структурированных сеток, для случая Ra = 10<sup>5</sup>. Видно, что картины сеточной сходимости, полученные при использовании сеток двух типов, крайне схожи между собой, что говорит о возможности использования сеток Вороного для получения качественных сеточно-независимых результатов.

На рис. 5(Б) приведена зависимость числа Нуссельта от числа Рэлея, полученная в ходе данной работы, а также корреляционные зависимости, построенные с использованием полученных в ходе численных расчетов результатов.



Рис. 5. А) демонстрация сеточной сходимости при использовании сеток Вороного и структурированной гексагональной сетки, Б) зависимость числа Нуссельта от числа Рэлея

Ra	Nu, 2D,	Nu, 2D,	Nu, 2D, [4]	Nu, 3D,	Nu, 3D,
	CVDSim3D	Flow Module	, ,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,	CVDSim3D	Flow Module
$10^{3}$	1.116	1.116	-	1.065	1.069
$5 \cdot 10^{3}$	1.734	1.743	-	1.532	1.547
$10^{4}$	2.126	2.134	2.067	1.912	1.916
$5 \cdot 10^4$	3.257	3.271	3.256	3.104	3.135
$10^{5}$	3.925	3.941	3.918	3.785	3.791
$5.10^{5}$	6.066	6.092	6.023	-	-
$10^{6}$	7.318	7.346	7.236	-	-

Табл. 2. Зависимость числа Нуссельта от числа Рэлея: общее сравнение

В табл. 1 приведены значения интегрального числа Нуссельта, полученные в ходе расчетов по коду CVDSim3D, в сравнении с результатами моделирования в Flow Module, а также в сравнении с данными работы [4]. По приведенным значениям видно, что отличия величин Nu, полученных при использовании разных вычислительных пакетов, а также полученных другими авторами, составляют величины меньше 1%, что говорит о корректности полученных данных.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. De Vahl Davis G. Natural convection of air in a square cavity: A benchmark numerical solution // Int. J. Numerical Methods in Fluids. Vol. 3, 1983, pp. 249-264.

2. Markatos N.C., Pericleous K.A. Laminar and turbulent natural convection in an enclosed cavity // Int. J. Heat Mass Transfer. Vol. 27, Issue 5, 1984, pp. 755-772.

3. Tric E., Labrosse G., Betrouni M. A first incursion into the 3D structure of natural convection of air in a differentially heated cubic cavity, from accurate numerical solutions // Int. J. Heat Mass Transfer. Vol. 43, 2000, pp. 4043-4056.

4. Bawazeer S., Mohamad A.A., Oclon P. Natural convection in a differentially heated enclosure filled with low Prandtl number fluids with modified lattice Boltzmann method // Int. J. Heat Mass Transfer. Vol. 143, 2019, 118562.

5. Mramor K., Vertnik R., Šarler B. Application of the local RBF collocation method to natural convection in a 3D cavity influenced by a magnetic field // Engineering Analysis with Boundary Elements. Vol. 116, 2020, pp. 1–13.

6. Voronoi G.F. Nouvelles applications des paramètres continus à la théorie de formes quadratiques // Journal für die reine und angewandte Mathematik. Vol. 134, 1908, pp. 198–287.
# СЕКЦИЯ «ФИЗИКА АТОМНОГО ЯДРА И ЭЛЕМЕНТАРНЫХ ЧАСТИЦ В ФУНДАМЕНТАЛЬНЫХ И МЕДИЦИНСКИХ ИССЛЕДОВАНИЯХ»

УДК 539.12

# Е.В. Банников, Ю.М. Митранков, Я.А. Бердников Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого<sup>(•)</sup>

# ЭЛЛИПТИЧЕСКИЙ ПОТОК *π*<sup>0</sup> МЕЗОНОВ В Сu+Au ВЗАИМОДЕЙСТВИЯХ ПРИ ЭНЕРГИИ 200 ГэВ

Введение. Свойства кварк-глюонной плазмы (КГП) [1] изучаются с помощью исследования наблюдаемых событий при столкновениях ядер. Одна из ключевых экспериментально наблюдаемых особенностей – азимутальная анизотропия рождения адронов в ядро-ядерных столкновениях. Количественной характеристикой азимутальной анизотропии в импульсном пространстве является эллиптический поток. Величина эллиптического потока показывает, насколько преобладает движение рожденных в ядро-ядерных столкновениям. Эллиптические потоки для  $\pi^0$  мезонов в симметричной тяжелой системе Au+Au были измерены ранее [2]. Измерение эллиптических потоков для  $\pi^0$  мезонов в асимметричной тяжелой системы столкновений на величину эллиптического потока. Благодаря тому, что выходы  $\pi^0$  мезонов измеримы при больших значениях поперечного импульса

 $(p_T > 5 \ \Gamma \Rightarrow B/c)$ , измерение эллиптического потока для  $\pi^0$  мезонов позволяет исследовать свойства КГП в широком диапазоне по поперечному импульсу.

*Цели и задачи работы.* Целью данной работы является изучение свойств КГП, образующейся в асимметричной системе столкновений Cu+Au при  $\sqrt{s_{NN}} = 200$  ГэВ. Задача работы заключается в измерении эллиптических потоков для  $\pi^0$  мезонов как функции от их поперечного импульса и центральности.

*Методика измерения*. Данные для приведенного анализа были получены на эксперименте ФЕНИКС в 2012 году [3].

Эллиптический поток количественно определяется вторым коэффициентом разложения Фурье распределения рожденных частиц  $v_2$ , который равен среднему косинусу двойного азимутального угла ( $\varphi$ ) по отношению к плоскости реакции ( $\Psi$ ). Измерение выходов  $\pi^0$ мезонов проводилось в канале распада  $\gamma\gamma$ . Для регистрации фотонов использовался электромагнитный калориметр EMCal [4]. Центральность событий определялась с помощью числа заряженных частиц, регистрируемых детектором BBC [5]. Значения эллиптического потока определялись в восьми диапазонах по центральности (0-10%, 10-20%, 20-30%, 30-40%, 40-50%, 50-60%, 0-20% и 20-60). Интервал по поперечному импульсу для измерения эллиптического потока зависит от количества событий, происходящих в конкретной центральности. В центральностях 0-20% и 20-60% количество событий оказалось больше, что позволило измерить эллиптические потоки для  $\pi^0$  мезонов в 15 диапазонах по  $p_T$  в интервале 1.0 – 14.0 ГэВ/с. Для остальных центральностей эллиптический поток измерялся в 13 диапазонах по поперечному импульсу в интервале 1.0 – 10.0 ГэВ/с.

В данном анализе использовалось два метода измерения эллиптического потока. Первый метод – «метод вычитания» [6], использовался при больших значениях  $p_T > 5 \Gamma \Im B/$ 

<sup>&</sup>lt;sup>(•)</sup> Е.В. Банников, bannikov.ev.21@gmail.com

с, а второй – «метод аппроксимации инвариантной массы» [7], применялся при низких значениях поперечного импульса.

Идея первого метода заключается в извлечении значений  $v_2$  из аппроксимации функцией косинуса распределения величины выходов  $\pi^0$  мезонов в зависимости от их азимутального угла относительно плоскости реакции ( $\varphi - \Psi$ ). Для этого в каждом диапазоне по  $p_T$  и центральности строились распределения выходов пар -квантов по инвариантной массе в шести диапазонах по углу  $\varphi - \Psi$  в интервале от 0 до  $\pi/2$ , и в каждом диапазоне определялись выходы  $\pi^0$  мезонов (dN). Значение эллиптического потока извлекалось из аппроксимации полученного распределения выходов  $\pi^0$  мезонов по азимутальному углу с помощью функции  $dN/(\varphi - \Psi) = N(1 + 2v_2 \cos[2(\varphi - \Psi)])$ , где N – нормировочная константа [8].

«Метод аппроксимации инвариантной массы» позволяет извлекать значения эллиптических потоков для  $\pi^0$  мезонов из аппроксимации зависимости эллиптического потока пар -квантов от инвариантной массы ( $v_2^{nap}(M_{uHB})$ ). Для этого, как и в «методе вычитания» строились спектры для пар -квантов, но уже во всем диапазоне по азимутальному углу ( $N_{nap}(M_{uHB})$ ). Эллиптический поток аналогично спектру пар -квантов состоит из сигнала  $\pi^0$  мезонов ( $v_2^{curнan}$ ) и фона ( $v_2^{\phi o H}$ ). Для отделения сигнала  $\pi^0$  мезонов от фона определяется доля пар фотонов сигнала ( $N_{curнan}(M_{uHB})$ ) от  $N_{nap}(M_{uHB})$ . Значение  $v_2^{curнan}$ извлекается из аппроксимации распределения  $v_2^{nap}(M_{uHB})$  следующей функцией:

$$v_2^{\text{пар}}(M_{\text{инв}}) = v_2^{\text{сигнал}} N_{\text{сигнал}} / N_{\text{пар}}(M_{\text{инв}}) + v_2^{\text{фон}} (1 - N_{\text{сигнал}} / N_{\text{пар}}(M_{\text{инв}})),$$
(1)

где значение  $v_2^{\phi_{OH}}$  определяется с помощью квадратичной параметризации.

Полученные с помощью обоих методов значения эллиптических потоков корректировались на величину разрешения плоскости реакции [9], так как разрешение по углу ограничено из-за конечного числа частиц.

В результате были получены значения эллиптических потоков для  $\pi^0$  мезонов как функции от их поперечного импульса и центральности в столкновениях Cu+Au при энергии 200 ГэВ.

*Результаты.* На рис. 1 представлены значения эллиптических потоков для  $\pi^0$  мезонов как функции от их  $p_T$  в системе столкновений Cu+Au в 15 диапазонах по поперечному импульсу в интервале  $1.0 - 14.0 \ \Gamma$ эB/с в диапазонах 0-20% (а) и 20-60% (б) по центральности. Для изучения зависимости величины эллиптического потока для  $\pi^0$  мезонов от системы столкновений на рис. 1 приведены значения  $v_2$  для  $\pi^0$  мезонов в симметричных столкновениях Au+Au [2] в аналогичных диапазонах по  $p_T$  и центральности.

Значения  $v_2$  для  $\pi^0$  мезонов, масштабированные на эксцентриситет ( $\varepsilon_2$ ) и кубический корень от числа ядер-участников ( $N_{yq}^{1/3}$ ) в столкновениях Cu+Au и Au+Au приведены на рис. 1 для центральности 0-20% (в) и 20-60% (г). Из рисунка 1 видно, что величины эллиптических потоков для  $\pi^0$  мезонов различны в разных системах столкновений, а значения  $v_2/\varepsilon_2 N_{yq}^{1/3}$  для  $\pi^0$  мезонов в Cu+Au и Au+Au совпадают с учетом неопределенностей.

Полученное распределение эллиптического потока для  $\pi^0$  мезонов по поперечному импульсу в столкновениях Cu+Au в 13 диапазонах по  $p_T$  в интервале 1.0 – 10.0 ГэВ/с в остальных шести диапазонах по центральности представлено на рис. 2 (а). Распределение значений  $v_2/\varepsilon_2 N_{yq}^{1/3}$  в столкновениях Cu+Au по поперечному импульсу приведено на рис. 2 (б). Как видно из рис. 2, значения эллиптических потоков зависят от величины области перекрытия ядер, а полученные значения  $v_2/\varepsilon_2 N_{yq}^{1/3}$  совпадают с учетом неопределенностей во всех диапазонах по центральности.



Рис. 1. Зависимость коэффициента  $v_2$  (а, б) и значений  $v_2/\varepsilon_2 N_{yq}^{1/3}$  (в, г) для  $\pi^0$  мезонов от поперечного импульса, измеренные в столкновениях Cu+Au и Au+Au в области 0-20% и 20-60% по центральности



Рис. 2. Зависимость коэффициента  $v_2$  (а) и значений  $v_2/\varepsilon_2 N_{y^4}^{1/3}$  (б) для  $\pi^0$  мезонов от поперечного импульса, измеренные в столкновениях Cu+Au в шести диапазонах по центральности

Выводы. В данной работе были получены значения эллиптических потоков для  $\pi^0$  мезонов в столкновениях Cu+Au при энергии 200 ГэВ. Были описаны и применены два метода измерения значений  $v_2$ .

Было обнаружено, что значения  $v_2/\varepsilon_2 N_{yq}^{1/3}$  для  $\pi^0$  мезонов совпадают с учетом неопределенностей в Cu+Au и Au+Au столкновениях, а также в разных диапазонах по центральности. Следовательно, геометрия и размеры системы столкновений не влияют на значения  $v_2/\varepsilon_2 N_{yq}^{1/3}$  для  $\pi^0$  мезонов.

Кроме того, полученные значения эллиптических потоков для  $\pi^0$  мезонов при больших поперечных импульсах ( $p_T > 5 \ \Gamma \Rightarrow B/c$ ) отличны от нуля, что может быть объяснено энергетическими потерями партонов в КГП [10].

#### ЛИТЕРАТУРА

1. R. Seto // Act. Phys. Pol. - 2005. - Vol. B36. P.525.

2. A. Adare et al. (PHENIX Collab.) // Phys. Rev. C. – 2013. – Vol. 88.- P.064910.

3. A. Adcox et al. (PHENIX Collab.) // Nucl. Instrum. Methods A. -2003. -Vol. 499. -P.469.

4. L. Aphecetche et al. (PHENIX Collab.) // Nucl. Instrum. Methods A. -2003. -Vol. 499.-P.521.

5. A. Adare et al. (PHENIX Collab.) // Phys. Rev. C. -2008. -Vol. 78. -P.044902.

6. S. Afanasiev et al. (PHENIX Collab.) // Phys. Rev. C. -2008. -Vol. 80. -P.024909.

7. N. Borghini and J.-Y. Ollitrault //Phys. Rev. C. -2004. -Vol. 70. -P.064905.

8. J. Barrette et al. (PHENIX Collab.) // Phys. Rev. C . -1997. -Vol.56. -P.2336.

9. A. Poskanzer and S. Voloshin // Phys. Rev. C. -1998. -Vol. 58. -P.1671.

10. M. Oldenburg // Proceedings of the 14th Topical Conference on Hadron Collider Physics . – 2002. – P. 215.

Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого<sup>(•)</sup>

# МОДЕЛЬНЫЕ РАСЧЕТЫ ДЛЯ ОПИСАНИЯ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ ПОТОКОВ <br/> $\phi$ МЕЗОНОВ В СТОЛКНОВЕНИЯХ ТЯЖЕЛЫХ ИОНОВ

Введение. сильновзаимодействующей квантовой Формирование материи хромодинамики – кварк глюонной плазмы (КГП) – было обнаружено в столкновениях тяжелых релятивистских ядер, таких как ядра меди, золота и урана при энергиях коллайдера RHIC в эксперименте PHENIX [1, 2]. Одним из основных свойств КГП является ее текучесть, проявление поведения присущего почти идеальной жидкости [3]. Быстрое расширение горячей и плотной материи КГП получило название «коллективного потока» и хорошо моделями релятивистской гидродинамики. Эллиптический описывается поток  $v_2$ собой азимутальную анизотропию второго представляет порядка В импульсном распределении частиц, родившихся в столкновении релятивистских ядер. Сравнение экспериментально измеренных эллиптических потоков частиц с предсказаниями моделей, включающих релятивистскую гидродинамику, среди которых наиболее распространенной является модель iEBE-vishnu [4], позволяет произвести физическую интерпретацию экспериментальных результатов и определить параметры КГП как почти идеальной жидкости.

Цели и задачи работы. Целью настоящей работы является физическая интерпретация экспериментальных результатов по рождению  $\phi$  мезонов в столкновениях Cu+Au при энергии  $\sqrt{s_{NN}} = 200$  ГэВ и U+U при энергии  $\sqrt{s_{NN}} = 193$  ГэВ. В задачи работы входит сравнение эллиптических потоков для  $\phi$  мезонов, измеренных в эксперименте PHENIX, с расчетами, выполненными с помощью программного пакета iEBE-vishnu.

Методика исследования. Программный пакет iEBE-vishnu предназначен для моделирования столкновений тяжелых релятивистских ядер. Горячая и плотная ядерная материя, образовавшаяся во взаимодействии тяжелых ионов, со временем расширяется и остывает, что в рамках модели iEBE-vishnu описывается с помощью релятивистской вязкой гидродинамики. В данной работе было использовано значение удельной сдвиговой вязкости  $\eta/s = 1/(4\pi)$  [3]. На втором этапе моделируется процесс взаимодействий адронов, образованных в столкновении, так называемый адронный каскад.

Эллиптические потоки  $v_2$  для адронов по определению равны

$$v_2 = \langle \cos(2(\varphi - \psi_n)) \rangle,$$

где  $\varphi$  – азимутальный угол частицы, а  $\psi_n$  – азимутальный угол плоскости реакции, определяемой как плоскость, образованная осью пучка и прицельным параметром столкновения ядер [3]. Геометрическим параметром столкновения ядер является центральность [4], отражающая степень перекрытия взаимодействующих ионов (наименьшая центральность характеризуют лобовые столкновения).

Значения эллиптических потоков были рассчитаны в данной работе с помощью программного пакета iEBE-vishnu для четырех классов по центральности столкновений Cu+Au при энергии  $\sqrt{s_{NN}} = 200$  ГэВ и для наиболее центральных столкновений U+U при энергии  $\sqrt{s_{NN}} = 193$  ГэВ.

<sup>&</sup>lt;sup>(•)</sup> Ю.М. Митранков, mitrankovy@gmail.com

Экспериментальные значения эллиптических потоков для  $\phi$  мезонов в столкновениях Cu+Au при энергии  $\sqrt{s_{NN}} = 200$  ГэВ и U+U при энергии  $\sqrt{s_{NN}} = 193$  ГэВ, используемые в данной работе, были измерены с помощью детектора PHENIX на коллайдере RHIC [4].

Результаты. На рис. 1 представлено сравнение значений эллиптический потоков  $v_2$  для  $\phi$  мезонов в зависимости от поперечного импульса  $p_T$ , измеренных в эксперименте PHENIX, с расчетами, выполненными с помощью программного пакета iEBE-vishnu a) - c) в четырех классах по центральности столкновений Cu+Au при энергии  $\sqrt{s_{NN}} = 200$  ГэВ и d) в столкновениях U+U при энергии  $\sqrt{s_{NN}} = 193$  ГэВ. В рассматриваемых системах во всех центральностях и на всем диапазоне по поперечному импульсу, измеренные в эксперименте значения  $v_2$  для  $\phi$  мезонов согласуются с расчетами, выполненными в рамках модели релятивистской вязкой гидродинамики iEBE-vishnu с удельной сдвиговой вязкостью  $\eta/s = 1/(4\pi)$ .



Рис. 1. Сравнение значений эллиптических потоков  $v_2(p_T)$  для  $\phi$  мезонов, измеренных в a) - c) четырех классах по центральности столкновений Cu+Au при энергии  $\sqrt{s_{NN}} = 200 \ \Gamma$ эВ и d) столкновениях U+U при энергии  $\sqrt{s_{NN}} = 193 \ \Gamma$ эВ в эксперименте PHENIX, с предсказаниями гидродинамической модели iEBE- vishnu с удельной вязкостью  $\eta/s = 1/(4\pi)$ .

Выводы. В ходе работы были выполнены расчеты эллиптических потоков для  $\phi$  мезонов четырех классов по центральности столкновений Cu+Au при энергии  $\sqrt{s_{NN}} = 200$  ГэВ и для наиболее центральных столкновений U+U при энергии  $\sqrt{s_{NN}} = 193$  ГэВ с помощью программного пакета iEBE-vishnu и проведено их сравнение эллиптическими потоками для  $\phi$  мезонов, полученными в эксперименте PHENIX. В работе показано, что величины эллиптических потоков для  $\phi$  мезонов в столкновениях Cu+Au при энергии  $\sqrt{s_{NN}} = 200$  ГэВ и U+U при энергии  $\sqrt{s_{NN}} = 193$  ГэВ, измеренных в эксперименте PHENIX, количественно описываются расчетами, выполненными с помощью вязкой гидродинамической модели iEBE-vishnu с удельной сдвиговой вязкостью  $\eta/s = 1/(4\pi)$ .

## ЛИТЕРАТУРА

1. Adcox K., Adler S.S., Aizama M., et al. (PHENIX Collaboration). PHENIX detector overview // Nucl. Instr. Meth. Phys. Res. A. – 2003. – Vol. 499. – I. 2-3. – P. 469-479.

2. Adcox K. et al. Formation of dense partonic matter in relativistic nucleus-nucleus collisions at RHIC: Experimental evaluation by the PHENIX Collaboration // Nucl. Phys. A - 2005. – Vol. 757. – P. 184.

3. Heinz U.W., Snellings R. Collective flow and viscosity in relativistic heavy-ion collisions // Annu. Rev. Nucl. Part. Sci. – 2013. – Vol. 63. – P. 123-151.

4. Митранков Ю.М., Бердников А.Я. Эллиптические потоки  $\phi$  мезонов в столкновениях тяжелых ионов // Сборник аннотаций докладов Всероссийской научной конференции Неделя Науки ФизМех. – 2022. – С. 10.

УДК 532.517

М.М. Митранкова, Я.А. Бердников Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого<sup>(•)</sup>

## ИСПОЛЬЗОВАНИЕ МУЛЬТИФАЗНОЙ ТРАНСПОРТНОЙ МОДЕЛИ АМРТ ДЛЯ ОПИСАНИЯ ПРОЦЕССОВ РОЖДЕНИЯ Ф МЕЗОНОВ В ЛЕГКИХ СИСТЕМАХ СТОЛКНОВЕНИЙ

Введение. Наблюдение коллективных эффектов при изучении рождения легких адронов в сильно асимметричных системах столкновений релятивистских ядер, таких как p+Al, p+Au, d+Au и <sup>3</sup>He+Au при энергии  $\sqrt{s_{NN}} = 200$  ГэВ в эксперименте PHENIX [1], дает основания предполагать возможность формирования в них сильновзаимодействующей ядерной материи – кварк-глюонной плазмы (КГП) [2, 3]. Установлено, что признаки образования КГП проявляются слабее во взаимодействиях более легкой системы p+Al, чем во взаимодействиях  $p/d/^{3}$ He+Au [4, 5]. До сих пор вопрос о минимальных условиях, достаточных для образования КГП, остается открытым. Две версии мультифазной транспортной модели АМРТ [6] позволяют проводить расчет экспериментальных наблюдаемых спектров рождения  $\phi$  мезонов в предположениях отсутствия или наличия КГП в системе столкновения релятивистских ядер. Для интерпретации экспериментально измеренных результатов по рождению  $\phi$ -мезонов необходимо провести их сравнение с предсказаниями двух версий модели АМРТ.

Цели и задачи работы. Целью настоящей работы является изучение особенностей рождения  $\phi$  мезонов в столкновениях *p*+Al, *p*+Au, *d*+Au и <sup>3</sup>He+Au при энергии  $\sqrt{s_{NN}} = 200$  ГэВ в области малых быстрот ( $|\eta| < 0.35$ ). В задачи работы входит сравнение инвариантных спектров рождения  $\phi$  мезонов, измеренных в эксперименте PHENIX, с расчетами, выполненными с помощью программного пакета AMPT в конфигурациях «по умолчанию» и «плавление струн».

Методика исследования. Программный пакет АМРТ предназначен для моделирования четырех основных этапов развития системы взаимодействия релятивистских ядер: начальных условий, партонных взаимодействий, процесса адронизации партонов и адронных взаимодействий. Программный пакет АМРТ представлен в конфигурациях «по умолчанию» и «плавление струн». В конфигурации «по умолчанию» только жесткие партоны участвуют в партонном каскаде и для моделирования адронизации используется фрагментационный механизм Лунда [7]. Таким образом можно описать эволюцию системы взаимодействия релятивистских ядер в предположении отсутствия КГП. Напротив, в конфигурации «плавление струн» воссоздается фаза с партонными степенями свободы, то есть КГП, путем

<sup>&</sup>lt;sup>(•)</sup> М.М. Митранкова, mashalario@gmail.com

включения в партонный каскад дополнительно мягких партонов (так называемое «плавление мягких струн»), а также использование рекомбинационного механизма адронизации [8].

Экспериментальные наборы данных, используемые в данной работе, были получены в циклах столкновений *p*+Al, *p*+Au, *d*+Au и <sup>3</sup>He+Au при энергии  $\sqrt{s_{NN}} = 200$  ГэВ с помощью детектора PHENIX на коллайдере RHIC [9, 10]. Измерения выходов  $\phi$  мезонов проводились по каналу распада на два разнозаряженных *K* мезона.

На основании рассчитанного с помощью модели AMPT числа  $\phi$  мезонов, сгенерированных в столкновении (выхода мезонов), в рассматриваемых системах столкновений, были рассчитаны инвариантные спектры рождения по поперечному импульсу согласно формуле:

$$\frac{1}{2\pi p_T}\frac{d^2N}{dp_Tdy} = \frac{1}{2\pi p_T}\frac{1}{N_{\text{событий}}}\frac{N(\Delta p_T)}{\Delta p_T\Delta y},$$

где  $p_T$  – поперечный импульс мезона;  $\Delta p_T$  – интервал по поперечному импульсу; y – быстрота;  $N(\Delta p_T)$  – выход  $\phi$  мезонов;  $N_{\text{событий}}$  – полное число анализированных событий в выбранном диапазоне центральности.



Рис. 1. Сравнение инвариантных спектров рождения  $\phi$  мезонов по поперечному импульсу  $p_T$ , измеренных в столкновениях p+Al, p+Au, d+Au и <sup>3</sup>He+Au при энергии  $\sqrt{s_{NN}} = 200$  ГэВ в области малых быстрот в эксперименте PHENIX, с расчетами, выполненными с помощью программных пакета AMPT в конфигурации а) «по умолчанию» и б) «плавление струн». На рисунках с) и d) показаны отношения значений экспериментально измеренных инвариантных спектров рождения  $\phi$  мезонов к результатам расчетов, выполненных с помощью пакета AMPT в конфигурации «по умолчанию» и «плавление струн» соответственно. Инвариантные спектры по поперечному импульсу помножены на степени десяти для наглядности.

Результаты. На рис. 1 а), б) представлено сравнение инвариантных спектров рождения  $\phi$  мезонов по поперечному импульсу  $p_T$  в столкновениях p+Al, p+Au, d+Au и <sup>3</sup>He+Au при энергии  $\sqrt{s_{NN}} = 200 \ Gamma Ga$ 

Выводы. В ходе работы были выполнены расчеты инвариантных спектров рождения  $\phi$  мезонов по поперечному импульсу в столкновениях p+Al, p+Au, d+Au и <sup>3</sup>He+Au при энергии  $\sqrt{s_{NN}} = 200$  ГэВ с помощью программного пакета АМРТ в конфигурациях «по умолчанию» и «плавление струн» и проведено их сравнение с инвариантными спектрами по поперечному импульсу, полученными в эксперименте PHENIX. Рождение  $\phi$ -мезонов в столкновениях  $p/d/^{3}$ He+Au при энергии  $\sqrt{s_{NN}} = 200$  ГэВ может быть описано с учетом образования кварк-глюонной плазмы, в то время как рождение  $\phi$ -мезонов в столкновениях p+Al при той же энергии может быть описано без учета фазы КГП.

### ЛИТЕРАТУРА

1. Adcox K., Adler S.S., Aizama M., et al. (PHENIX Collaboration). PHENIX detector overview // Nucl. Instr. Meth. Phys. Res. A. – 2003. – Vol. 499. – I. 2-3. – P. 469-479.

2. Adcox K. et al. Formation of dense partonic matter in relativistic nucleus-nucleus collisions at RHIC: Experimental evaluation by the PHENIX Collaboration // Nucl. Phys. A - 2005 - Vol. 757. – P. 184.

3. Schenke B., Shen C., Tribedy P. Hybrid Color Glass Condensate and hydrodynamic description of the Relativistic Heavy Ion Collider small system scan // Phys. Lett. B – 2020. – Vol. 803. – P. 135322.

4. Acharya U. et al. Measurement of  $J/\psi$  at forward and backward rapidity in p+p, p+Al, p+Au, and <sup>3</sup>He+Au collisions at  $\sqrt{s_{NN}} = 200 \text{ GeV}$  // Phys. Rev. C – 2020. – Vol. 102. – P. 014902.

5. Aidala C. et al. Nuclear-modification factor of charged hadrons at forward and backward rapidity in p + Al and p + Au collisions at  $\sqrt{s_{NN}} = 200 \text{ GeV}$  // Phys. Rev. C - 2020. – Vol. 101. – P. 034910.

6. Lin Z.-W., Ko C. M., Li B.-A., Zhang B., Pal S. A. Multi-Phase Transport Model for Relativistic Heavy Ion Collisions // Phys. Rev. C – 2005. – Vol. 72. – № 064901.

7. Andersson B., Mohanty S., Soderberg F. Parton fragmentation and string dynamics // Phys. Rep. – 1983. – Vol. 97. – I. 2-3. – P. 31-145.

8. Lee K. S., Bass S., Mueller B., Nonaka C. Hadronization via recombination // J. Phys. G. – 2009. – Vol. 36. – P. 064034.

9. Mitrankova M.M., Berdnikov Ya.A., Berdnikov A.Ya., Kotov D.O., Mitrankov Iu.M. Production of light flavor hadrons in small systems measured by PHENIX at RHIC // Physica Scripta. – 2021. – Vol. 96. – I. 8. – P. 084010.

10. Adare A. et al. Nuclear modification factors of  $\phi$  mesons in *d*+Au, Cu+Cu, and Au+Au collisions at  $\sqrt{s_{NN}} = 200 \text{ GeV}$  // Phys. Rev. C – 2011. – Vol. 83. – P. 024909.

Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого<sup>(•)</sup>

## ИДЕНТИФИЦИРОВАННЫЕ ЗАРЯЖЕННЫЕ АДРОНЫ КАК ИНСТРУМЕНТ ДЛЯ ИЗУЧЕНИЯ СВОЙСТВ КВАРК-ГЛЮОННОЙ МАТЕРИИ

Актуальность. Кварк-глюонная плазма (КГП) – состояние материи, состоящее из асимптотически свободных кварков и глюонов [1]. Одним из экспериментальных признаков формирования КГП является увеличение выходов протонов (р) и антипротонов ( $\bar{p}$ ) по сравнению с выходами мезонов в столкновениях тяжелых ионов [2]. Данный эффект впервые наблюдался экспериментом PHENIX [3] в Au+Au столкновениях при энергии  $\sqrt{s_{NN}}$ = 200 ГэВ [3] и был объяснен в рамках рекомбинационных моделей адронизации КГП [2, 4- 6].

Долгое время считалось, что в легких системах столкновений (*p*+*p*, *p*+Al, *p*+Au, *d*+Au <sup>3</sup>He+Au) условия, необходимые для образования КГП, не достигаются. Однако в 2018 г экспериментом PHENIX были получены свидетельства формирования КГП в *p/d/*<sup>3</sup>He+Au столкновениях при энергии  $\sqrt{s_{NN}} = 200$  ГэВ [7]. Одним из способов дальнейшего изучения минимальных условий, необходимых для образования КГП, является систематическое измерение выходов *p* и  $\bar{p}$ , а также выходов мезонов (в частности  $\pi^{\pm}$ ,  $K^{\pm}$ ) в легких системах столкновений (таких как *p*+Al и He+Au) и тяжелых системах столкновений (таких как Cu+Au и U+U).

В данной работе представлено сравнение измеренных авторами факторов ядерной модификации ( $R_{AB}$ ) идентифицированных заряженных адронов ( $p, \bar{p}, \pi^{\pm}, K^{\pm}$ ) со значениями  $R_{AB}$  нейтральных мезонов ( $\phi, \pi^0$ ), измеренными экспериментом PHENIX, в p+Al, <sup>3</sup>He+Au, Cu+Au столкновениях при энергии  $\sqrt{s_{NN}} = 200$  ГэВ и U+U столкновениях при энергии  $\sqrt{s_{NN}} = 193$  ГэВ.

Методика исследования. В данной работе для исследования особенностей рождения легких адронов в столкновениях релятивистских ионов A и B были измерены факторы ядерной модификации  $R_{AB}$ . Факторы ядерной модификации являются количественной характеристикой изменения процессов рождения адронов в столкновениях A + B и протонпротонных (p + p) столкновениях. Значения  $R_{AB}$  для адрона h вычисляются согласно следующей формуле:

$$R_{AB} = \frac{1}{N_{coll}} \frac{d^2 N^{A+B} / dp_T dy}{d^2 N^{p+p} / dp_T dy}$$

где  $p_T$  – поперечный импульс,  $N_{coll}$  – количество парных нуклон-нуклонных соударений в столкновении ионов A + B,  $d^2N / dp_T dy$  – инвариантные  $p_T$ -спектры адрона h, вычисленные для A + B и p + p столкновений соответственно. Отличие значений  $R_{AB}$  от единицы указывает на наличие ядерной модификации в A + B столкновении. Результаты измерения значений  $R_{AB}$  в центральных p+Al, <sup>3</sup>He+Au, Cu+Au и U+U столкновениях представлены на рис. 1.

<sup>1</sup> Выводы. В столкновениях <sup>3</sup>Не+Au, Cu+Au и U+U значения  $R_{AB}$ , измеренные для p и  $\bar{p}$   $(R_{AB}^{(p+\bar{p})/2})$ , превышают значения  $R_{AB}$ , измеренные для  $\pi^{\pm}, K^{\pm}, \phi, \pi^{0}$  мезонов в области  $p_{T} > 1.5 \Gamma$ эВ/с. В частности, значения  $R_{AB}^{(p+\bar{p})/2}$  превышают значения  $R_{AB}$ , измеренные для  $\phi$  мезона  $(R_{AB}^{\phi})$ . Учитывая близость масс  $\phi$  мезона  $(m_{\phi} = 1019 \text{ МэВ})$  и протона  $(m_{p} = 938 \text{ МэВ})$ , можно сделать вывод о том, что различия значений  $R_{AB}^{(p+\bar{p})/2}$  и  $R_{AB}^{\phi}$  при  $p_{T} > 1.5$ 

<sup>&</sup>lt;sup>(•)</sup>Д.М. Ларионова, dashalario@gmail.com

ГэВ/с обусловлены различием в процессах образования барионов и мезонов, а не зависимостью процессов образования адронов от их массы. Увеличенный выход p и  $\bar{p}$  в ядро-ядерных столкновения считается одним из признаков образования КГП и описывается в рамках рекомбинационной модели адронизации КГП [2, 5, 6].



Рис. 1. Сравнение факторов ядерной модификации ( $R_{AB}$ ), измеренных для идентифицируемых заряженных адронов ( $\pi^{\pm}$ ,  $K^{\pm}$ , p,  $\bar{p}$ ) и нейтральных мезонов ( $\phi$ ,  $\pi^{0}$ ) в p+Al, <sup>3</sup>He+Au, Cu+Au столкновениях при энергии  $\sqrt{s_{NN}}=200$  ГэВ и U+U столкновениях при энергии  $\sqrt{s_{NN}}=193$  ГэВ.

В столкновениях *p*+Al значения  $R_{AB}$ , измеренные для  $p, \bar{p}, \pi^{\pm}, K^{\pm}, \phi, \pi^{0}$ , совпадают в пределах погрешностей. При этом в диапазоне поперечных импульсов  $p_T > 1.5$  ГэВ/с значения  $R_{AB} \approx 1$  для всех рассматриваемых адронов. Данное наблюдение может указывать на то, что в центральных столкновениях *p*+Al не достигаются условия (температура и плотность энергии), необходимые для образования КГП, либо объем сформировавшейся КГП недостаточен для наблюдения увеличенного выхода барионов.

#### ЛИТЕРАТУРА

 Adox K. et al. Formation of dense partonic matter in relativistic nucleus-nucleus collisions at RHIC: Experimental evaluation by the PHENIX Collaboration// Nucl. Phys. A. – 2005. – V. 757. – P. 184-283.
Fries R., Greco V., Sorensen P. Coalescence Models For Hadron Formation From Quark Gluon Plasma // Ann.Rev.Nucl.Part.Sci – 2008. – V. 58. – P. 177-205
K. Adapar et al. PHENIX datastan suggrisms // Nucl. Instrum. Math. A. – 2002. – V. 400. – P. 460.

3. K. Adcox et al. PHENIX detector overview // Nucl. Instrum. Meth. A. - 2003. - V. 499. - P. 469.

4. Adare S. et al. Spectra and ratios of identified particles in Au+Au and d+Au collisions at  $\sqrt{s_{NN}} = 200$ GeV // Phys. Rev. C. -2013. - V. 88. - P. 024906

5. Greco V., Ko C., Lévai P. Partonic coalescence in relativistic heavy ion collisions // Phys. Rev. C. – 2003. – V. 68. – P. 034904

6. Greco V., Ko C., Lévai P. Parton Coalescence and the Antiproton/Pion Anomaly at RHIC // Phys. Rev. L. – 2003. – V. 90. – N. 20. – P. 202302

7. Aidala C. et al, Creating small circular, elliptical, and triangular droplets of quark-gluon plasma // Nature phys. -2019. - V.15. - N.3 - P. 214-220

УДК 539.12

М.В. Покидова<sup>1,2</sup>, Ю.Г. Нарышкин<sup>2</sup>, Я.А.Бердников<sup>1,2</sup> <sup>1</sup>Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого<sup>(•)</sup> <sup>2</sup>НИЦ «Курчатовский институт» – ПИЯФ, Гатчина, Россия

# СТАТИСТИЧЕСКАЯ КОМБИНАЦИЯ ПОИСКОВ НЕВИДИМЫХ РАСПАДОВ БОЗОНА ХИГГСА В ЭКСПЕРИМЕНТЕ АТЛАС

Введение. Поиск частиц темной материи (TM), является одной из актуальных задач современной физики элементарных частиц, так как стандартная модель (CM) не описывает их природу и взаимодействия с другими частицами [1]. В рамках CM предсказывается распад бозона Хиггса на четыре нейтрино, который происходит только в ~ 0,1% случаев и называется невидимым, т.к. нейтрино не могут быть обнаружены детектором на прямую [2]. Однако, некоторые расширения CM предсказывают невидимые распады бозона Хиггса на пару слабо взаимодействующих массивных частиц (Weakly Interacting Massive Particles, WIMP) [3]. Исходя из своих свойств, WIMP являются многообещающим кандидатом на роль частиц TM. Такие модели, где бозон Хиггса действует как частица-посредник между частицами TM и частицами CM называются "порталом Хиггса" и лежат в основе исследований по поиску невидимого распада бозона Хиггса на частицы TM ( $H \rightarrow$  inv) в эксперименте ATLAS [4].

*Цели и задачи работы.* Для улучшения точности полученных верхних пределов на вероятность невидимых распадов бозона Хиггса на частицы ТМ и минимизации ошибок, в эксперименте выполняется объединение результатов (комбинация), полученных в основных процессах рождения бозона Хиггса (представленных на рис. 1) [5].

*Методика исследования.* В последнем исследовании поисков невидимых распадов бозона Хиггса в эксперименте ATLAS было выполнено объединение результатов, полученных для первого ( $\sqrt{s} = 7$  ТэВ, 8 ТэВ) и второго ( $\sqrt{s} = 13$  ТэВ) периодов работы БАК, соответствующих светимости 4,9 - 19,7 и 139 - 140 фнб<sup>-1</sup> соответственно.

Так как частицы TM не регистрируются в современных детекторах непосредственно, в экспериментах на БАК такие частицы могут быть обнаружены как недостающая поперечная энергия  $E_T^{miss}$ , которая вычисляется как сумма поперечных импульсов всех заряженных частиц, взятая с обратным знаком [6]. Поэтому для каждого процесса в анализе отбирались события, конечное состояние которых характеризуется большим значением  $E_T^{miss}$  и дополнительными физическими объектами, нацеленными на определенный режим образования бозона Хиггса [5].

Основной задачей при поиске новой физики является поиск отклонений предсказаний СМ от экспериментальных данных. Для предсказаний по СМ моделирование событий происходило с использованием генераторов частиц на основе метода Монте-Карло (МК), за исключением квантово-хромодинамических (КХД) многоструйных процессов образования,

<sup>&</sup>lt;sup>(•)</sup> М.В. Покидова, marina.pokidova@cern.ch

которые используют специальную оценку на основе экспериментальных данных [5]. Для моделирования прохождения частиц через экспериментальную установку детектор были описан с помощью программы GEANT4 [7].



Рис. 1. Диаграммы Фейнмана основных процессов рождения бозона Хиггса, рассмотренных во втором периоде работы БАК

*Результаты.* Было проведено объединение результатов полученных для различных процессов рождения бозона Хигтса за первый (Run1) и второй (Run2) периоды проведения эксперимента. Верхний предел на невидимый распад бозона Хигтса был установлен в соответствии с методом максимального правдоподобия [8]. Полученный наблюдаемый (ожидаемый) верхний предел на невидимый распад бозона Хигтса составил 0,107 (0,077) при 95% доверительном интервале (рис. 2) [5].



Рис. 2. Полученная в эксперименте ATLAS комбинация верхних пределов на невидимый распад бозона Хиггса при 95% доверительном интервале

Также было проведено сравнение с результатами экспериментов по прямому поиску частиц ТМ (рис. 3), из которого следует, что ограничения на сечения, полученные в эксперименте ATLAS являются более жесткими для малых значений масс частиц ТМ (<10 ГэВ) где эксперименты, по прямому поиску имеют ограниченную чувствительность. Это позволяет говорить о взаимодополняемости экспериментов [5].



Рис. 3. Сравнение верхних пределов для сечений в зависимости от массы частицы ТМ (90% доверительный интервал) при анализе невидимых каналов распада бозона Хиггса с результатами полученными в экспериментах по прямому поиску частиц ТМ для спин-независимого сечения рассеяния WIMP на нуклоне

Заключение. В ходе поисков невидимых распадов бозона Хигтса отклонений от предсказаний СМ не обнаружено. Получен верхний предел на вероятность невидимого распада бозона Хиггса на частицы ТМ, который является наиболее строгим на данный момент. Проведено сравнение с результатами экспериментов по прямому поиску частиц ТМ.

### ЛИТЕРАТУРА

1. Басалаев А.Е., Нарышкин Ю. Г. Поиски частиц темной материи на Большом адронном коллайдере. //Научно-технические ведомости СПбГПУ. Физико-математические науки. — 2018. — С.123.

2. A. Djouadi. The Anatomy of Electro-Weak Symmetry Breaking. I: The Higgs boson in the Standard Model // Physics Reports. —2008. — Vol. 457. — P.1-216.

3. M.Kamionkowski. WIMP and axion dark matter. [Электронный ресурс] URL: <u>https://doi.org/10.48550/arXiv.hep-ph/9710467</u> (дата обращения: 1.03.2023)

4. G. Arcadi, A. Djouadi, M. Raidal. Dark Matter through the Higgs portal // Physics Reports. —2020. — Vol. 842. —P.1-180.

5. The ATLAS Collaboration. Combination of searches for invisible decays of the Higgs boson using 139 fb<sup>-1</sup> of proton-proton collision data at  $\sqrt{s} = 13$  TeV collected with the ATLAS experiment // Physics Letters B. — 2023. — Vol.842. — P.137963.

6. Trevisani N. Collider searches for dark matter (ATLAS + CMS)// Universe. —2018. —Vol 4. —P.131. 7. S. Agostinelli et al. GEANT4: A simulation toolkit. // Nucl. Instrum. Meth A. —2003. —Vol.506. —P. 250-303.

8. Cole S.R., Chu H, Greenland S. //American Journal of Epidemiology. —2014. —Vol.179. —2003. — Issue 2, P. 252–260.

## ТЕНДЕНЦИИ И ПРОБЛЕМЫ РАЗВИТИЯ СОВРЕМЕННЫХ СРЕДСТВ РАДИАЦИОННОЙ РАЗВЕДКИ МЕСТНОСТИ

Исследование направлено на анализ и систематизацию подходов к воздушной радиационной разведке местности (ВРРМ) за весь период ее существования.

Актуальность проблемы исследования определяется высокими темпами развития атомной промышленности и сложившейся геополитической ситуаций. Разработки в этой области не только способствуют повышению эффективности радиационной разведки и контроля радиационной обстановки, но и являются необходимым инструментом для решения важных глобальных проблем, связанных с ядерной безопасностью и экологией.

исслелования В качестве основных метолов были выбраны метолы библиометрического анализа и корреляционных матриц. Метод библиометрического анализа является одним из стандартных методов анализа наукометрической статистики [1]. Данный метод был выбран по причине широкой доступности данных, необходимых для анализа при высокой релевантности результата [1, 2]. Метод корреляционных матриц был выбран для статистического анализа наукометрических данных с целью выявления закономерностей в динамике публикационной активности в рамках обозначенной тематики исследования [3]. Методология исследования включает наукометрическую статистику, анализ, сравнение и обобшение.

Целью работы является выявление тенденций и перспектив развития средств ВРРМ.

Был проведен общий анализ литературы по теме радиационной разведки местности. В результате были выявлены следующие общие тенденции развития радиационной разведки местности.

- Применение беспилотных летательных аппаратов (БПЛА) для проведения воздушной радиационной разведки местности. Причинами внедрения БПЛА в системы радиационной разведки и мониторинга радиационной обстановки являются стремление обезопасить оператора системы от воздействия, ионизирующего излучение и стремление получить оперативный доступ к данным радиационной разведки на удаленных или труднодоступных участках исследуемой территории [4].

- Применение высокопроизводительной вычислительной техники, поддерживающей алгоритмы искусственного интеллекта и машинного обучения [5]. Использование подобных систем позволяет производить оперативный анализ больших объемов данных, полученных как на аппаратном уровне работы систем радиационной разведки местности, так и на уровне анализа результатов разведки и принятия решений согласно радиационной обстановке.

- Развитие детектирующих систем с целью увеличения их быстродействия, уменьшения их погрешности и оптимизации их массогабаритных характеристик [6].

Был произведен сбор наукометрической статистики по ряду тематик радиационной разведки местности за период с 2010 по 2022 год. Данные собирались по общей тематике детектирования ионизирующего излучения, а также по узким направлениям радиационной разведки: воздушная радиационная разведка, радиационная разведка с применением БПЛА, радиационная защита БПЛА. Сбор статистики производился по статьям, опубликованным на английском языке, отдельно от статей, опубликованных на русском языке, поиск проводился по ключевым словам (рис. 1).

<sup>&</sup>lt;sup>(•)</sup> Д.В. Кох, koh.dmitrij@yandex.ru



Рис. 1. Графическая визуализация статистического анализа

На основании статистики было выявлено, что научный интерес к тематике радиационной разведки местности равномерно растет. Для выявления закономерностей был применен линейный метод корреляционных матриц (табл. 1).

								Aerial	
				detection	обнаружение			radiation	Воздушная
				of	радиации с	uav		reconnais	радиационная
		radiation	обнаружение	radiation	помощью	radiation	радиационная	sance of	разведка
		detection	радиации	by UAV	бпла	protection	защита бпла	the area	местности
		мир	снг	мир	снг	мир	снг	мир	снг
radiation detection	мир	1							
обнаружение радиации	снг	-0,21	1						
detection of radiation by									
UAV	мир	-0,91	0,52	1					
обнаружение радиации с									
помощью бпла	снг	-0,63	0,71	0,85	1				
uav radiation protection	мир	-0,91	0,52	0,99	0,85	1			
радиационная защита									
бпла	снг	-0,58	0,80	0,81	0,98	0,82	1		
Aerial radiation									
reconnaissance of the	мир	-0,77	0,55	0,93	0,87	0,94	0,82	1	
Воздушная									
радиационная разведка	снг	-0,53	0,88	0,76	0,74	0,76	0,80	0,73	1

Табл. 1. Корреляционная матрица

В таблице темным цветом обозначены значения корреляционных коэффициентов близкие к +1 или -1. Подобные значения означают наличие прямой линейной корреляции и обратной линейной корреляции соответственно [7]. Исходя из результатов корреляционного анализа, можно сделать вывод о том, что интерес к применению БПЛА при радиационной разведке местности растет линейно пропорционально интересу к радиационной разведке местности. В то же время интерес к исследованию мер защиты БПЛА от ионизирующего излучения растет линейно пропорционально интересу к применению БПЛА для радиационной разведки.

Было выявлено, что главным направлением развития является переход к беспилотным системам с развитыми средствами получения и обработки информации. Активное освоение беспилотных систем BPPM ведется по двум основным путям.

Во-первых, для проведения комплексной разведки применяются крупногабаритные БПЛА вертолетного [8] и самолетного типа с широким комплексом спектрометрического и

дозиметрического оборудования на борту [9]. Развитие подобных систем ведется в направление увеличения разрешающей способности оборудования [10] и уменьшения минимального периода измерения для получения статистики.

Во-вторых, для проведения оперативной разведки [11] и проведения разведки на труднодоступных участках со сложной геометрией исследуемого ландшафта применяются легкие БПЛА самолетного и мультикоптерного типа соответственно [12]. Для подобных систем наблюдается миниатюризация детектирующего оборудования и применение высокопроизводительных слабозащищенных вычислительных систем [12]. Актуальность приобретает проблема защиты вычислительной аппаратуры от наведенных помех [10] с учетом ограничений, накладываемыми их массогабаритными характеристиками [13]. Выявленная проблема станет предметом нашего дальнейшего изучения.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Martinez-Navarro, J., Rizo-Maestre, C., &Alcaide-Muñoz, L.// Journal of Environmental Radioactivity. ---2019. ---Vol.208-209. ---P. 106003.

2. Ménétrier, L., & Guille-Escuret, G. // Scientific Reports. -2020. -Vol.10(1). -P.1-17.

3. Hair, J. F., Anderson, R. E., Tatham, R. L., & Black, W. C. Multivariate data analysis (5th ed.). Prentice-Hall, 1998.

4. VargasJ. V. C., et al.// Journal of Environmental Radioactivity. —2017. —Vol. 178-179.- P.306-317.

5. Mohammadzadeh, et al. "Radiation Monitoring Using Artificial Intelligence Techniques: A

Review."// Journal of Medical Signals and Sensors. -2019. -Vol.9(2). -P. 65-81.

6. W.-V. Wang, et al. (2020). "A Review on Radiation Detection and Spectroscopy Technologies." Sensors, 20(6): 1696.

7. Pearson, K. // Philosophical Transactions of the Royal Society of London. Series A, Containing Papers of a Mathematical or Physical Character.- 1895.- Vol. 186.- P. 71–110.

8. Sanada Y., Orita T., Torii T. //Applied Radiation and Isotopes. - 2016. - T. 118. - C. 308-316.

9. Кочетков А. Н., Герасимов А. С. Перспективные средства радиационной и химической разведки, применяемые для оснащения беспилотных летательных аппаратов //Современные техно.

обеспечения гражданской обороны и ликвидации последствий чрезвычайных ситуаций. – 2011. 1 (2). – С. 253-255.

10. Royo P. et al. An unmanned aircraft system to detect a radiological point source using RIMA software architecture //Remote Sensing. – 2018. – T. 10. – №. 11. – C. 1712.

11. Ji Y. Y. et al. Environmental Radiation Survey Using Airborne Gamma-Ray Spectrometry Based on Manned and Unmanned Aerial Vehicles //Proceedings of the Korean Radioactive Waste Society Conference. – Korean Radioactive Waste Society, 2019. – C. 347-348.

12. Hussain M. et al. Drones application scenarios in a nuclear or radiological emergency //Kerntechnik. – 2022.- Vol.87(3). - P1-11.

13. Zhang Tao, Chen Yazhou and Cheng Erwei, "Continuous wave radiation effects on UAV data link system," 2013 // Cross Strait Quad-Regional Radio Science and Wireless Technology Conference. – 2013. – pp. 321-324 (doi: 10.1109/CSQRWC.2013.6657419).

## МЕТОДЫ ВЫДЕЛЕНИЯ К\*(892) МЕЗОНОВ В АU+AU СТОЛКНОВЕНИЯХ ПРИ ЭНЕРГИИ 200 ГЭВ

Введение. Кварк-глюонная плазма (КГП) [1] – вещество в состоянии деконфайнмента, представляющее большой интерес в современной науке. Для изучения свойств КГП используются данные, полученные в детекторных системах коллайдерных установок при столкновении тяжелых ультрарелятивистских ядер. Одним из главных признаков образования КГП является увеличенный выход [2] (анти)странных кварков [3]. Данное явление можно наблюдать путем измерения факторов ядерной модификации для странных (содержащих странный кварк) частиц.  $K^*(892)$  [3] – странный мезон, время жизни которого очень мало ( $1.29 \cdot 10^{-23}$ ), из-за чего все образованные  $K^*(892)$  мезоны в результате столкновения ядер распадаются до попадания в детектор, что является одной из сложностей их выделения.

*Цели работы.* Изучение свойств КГП в столкновениях Au+Au при энергии 200 ГэВ при помощи *К*\*(892) мезонов.

Задачи работы: Разработка и применение алгоритма выделения сигнала  $K^*(892)$  мезонов при энергии  $\sqrt{S_{NN}}=200$  ГэВ для разных значений по поперечному импульсу и для разных классов событий по центральности в эксперименте PHENIX [4] на коллайдере RHIC [5]. Расчет эффективности регистрации  $K^*(892)$  мезонов для разных классов событий по центральности.

*Методика работы.* Для выделения сигнала  $K^*(892)$  мезонов были исследованы заряженные частицы, которые соответствуют его каналу распада -  $\pi^{\pm}$  и  $K^{\mp}$  мезоны. Для этого они были идентифицированы и отобраны среди зарегистрированных в различных детекторах заряженных частиц. Затем были получены распределения по инвариантной массе всех полученных пар  $(K\pi)^{\pm}$  для разных промежутков по поперечному импульсу и для разных классов событий по центральности. Из полученных распределений по инвариантной массе был вычтен комбинаторный фон при помощи метода смешанных событий [6]. Пример полученного распределения по инвариантной массе пар  $(K\pi)^{\pm}$  представлен на рис.1.

Эффективность регистрации рассчитывается по формуле:

$$\epsilon_{K^{*}(892)}(pt,c) = \frac{N_{sim,K^{*}(892)}(p_{T})}{N_{K^{*}(892)}(p_{T})} \frac{1}{\epsilon_{K}(p_{T},c)\epsilon_{\pi}(p_{T},c)}$$
(1),

где  $N_{sim,K^*(892)}(p_T)$  – количество зарегистрированных в результате проведения моделирования  $K^*(892)$  мезонов,  $N_{K^*(892)}(p_T)$  – количество смоделированных  $K^*(892)$ мезонов,  $\epsilon_K(p_T, c)$ ,  $\epsilon_{\pi}(pt, c)$  – эффективность регистрации в различных детекторах  $K^{\pm}$  и  $\pi^{\mp}$ мезонов соответственно,  $p_T$  – поперечный импульс, c – класс события по центральности.

Так как эффективность регистрации зависит от класса события по центральности, а в моделировании не учитывается эта зависимость, то был впервые применен метод получения эффективности регистрации продуктов  $K^*(892)$  мезонов с помощью известных инвариантных спектров  $K^{\pm}$  и  $\pi^{\mp}$  мезонов в системе столкновения Au+Au при энергии 200 ГэВ и полученных в данной работе спектров  $K^{\pm}$  и  $\pi^{\mp}$  без учета влияния класса события по центральности, для чего была использована формула (2)

<sup>&</sup>lt;sup>(•)</sup> С.М. Анцупов, antsupov.sm@edu.spbstu.ru

$$\epsilon_p(p_T,c) = \frac{dN_p(p_T,c)/dp_T}{dN_{orig}(p_T,c)/dp_T} \quad (2),$$

где  $dN_p(p_T,c)/dp_T$  – спектр частиц, полученный в данной работе,  $dN_{orig}(p_T,c)/dp_T$  – известный спектр тех же частиц.



Рис. 1. Пример распределения инвариантной массы пар  $(K\pi)^{\pm}$  для диапазона по поперечному импульсу 2.1 <  $p_T$  < 2.3 и для диапазона по классам событий по центральности 20 – 40%. В правом верхнем углу отображены параметры аппроксимации Брейта-Вигнера (красная сплошная линия) – ширина (Г) и середина (*M*) пика соответственно. Красной пунктирной линией отображена аппроксимация комбинаторного фона. В левом нижнем углу отображен выход *K*<sup>\*</sup>(892) на 10<sup>6</sup> событий.



Рис. 2. Эффективность регистрации К\*(892). По оси х отображен поперечный импульс, по оси у – эффективность регистрации. В правом верхнем углу отображены обозначения значков на графике, указывающие диапазон класса события по центральности

С учетом полученных значений эффективности регистрации  $K^{\pm}$  и  $\pi^{\mp}$  мезонов для разных детекторов, разных классов событий по центральности и разных промежутков по поперечному импульсу была проведена Монте-Карло генерация распада  $K^*(892)$  мезона и прохождения его продуктов распада через различные детекторы. Полученная эффективность регистрации была рассчитана по формуле (1) и представлена на рис.2.

Выводы. Сигнал  $K^*(892)$  мезонов при помощи разработанного метода удалось выделить в промежутках по поперечному импульсу 0.9-1.1, 1.1-1.4, 1.4-1.7, 1.7-1.9, 1.9-2.1, 2.1-2.3, 2.3-2.6, 2.6-2.9, 2.9-3.4, 3.4-4.0, 4.0-4.5, 4.5-5.0 ГэВ/с для классов событий по центральности 0-20%, 20-40%, 40-60%, 60-93%, 0-93% и получить эффективность регистрации  $K^*(892)$  мезонов в диапазоне по поперечному импульсу 0.9-5.0 Гэв/с для классов событий по центральности 0-20%, 20-40%, 40-60%, 60-93%.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Van Hove, Léon Charles Prudent. Theoretical prediction of a new state of matter, the "quark-gluon plasma" (also called "quark matter") // 17th International Symposium on Multiparticle Dynamics. – 1987. –

P. 801 - 818.

2. Spyridon Margetis, Karel Safarík, Orlando Villalobos Baillie. Strangeness Production in Heavy-Ion Collisions // Annual Review of Nuclear and Particle Science. – 2000. – Vol. 50. – P. 301

3. R.L. Workman et al. (Particle Data Group). Reviews of Particle Physics // Prog.Theor.Exp.Phys. - 2022. - Vol. 2020 – I. 8. - P. 083C01

4. O'Brien, Edward J. "Overview of the PHENIX Experiment" // AIP Conference Proceedings - Vol. 698, 2003. - c.745-750

5. Т. Ludlam M. Harrison и S. Ozaki. "RHIC project overview" // Nucl. Instr. Meth. A 499 – 2004 - c. 235—244.

6. D. L'Hote. "About Resonance signal extraction from multiparticle data combinatorics and event mixing methds" // Nucl. Instr. Meth. A 337 (1994) - c. 544—556.

УДК 539.12

А.Д. Селезенев, Д.О. Котов Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого<sup>(•)</sup>

# ФАКТОРЫ ЯДЕРНОЙ МОДИФИКАЦИИ η-МЕЗОНОВ В НЕ+АU СТОЛКНОВЕНИЯХ ПРИ ЭНЕРГИИ 200 ГЭВ

Введение. Основная мотивация для проведения экспериментов по столкновению тяжелых ионов при ультрарелятивистких скоростях — это изучение кварк-глюонной плазмы (КГП) [1]. КГП представляет собой особое "квазибесцветное" состояние вещества, при котором партоны (кварки и глюоны) практически не взаимодействуют друг с другом — происходит деконфайнмент [2]. Партоны переходят в состояние деконфайнмента при больших плотностях энергии, которые достигаются при столкновениях тяжелых ионов на современных ускорителях [3]. При этом, не до конца изучено образование КГП в легких системах столкновений [5], таких как <sup>3</sup>He+Au.

Образование КГП сопровождается эффектом гашения струй [4] — явление, при котором выходы частиц в тяжелых системах столкновений подавляются по сравнению с нормированными выходами в p+p взаимодействиях. Количественно данный эффект можно оценить при помощи факторов ядерной модификации — отношения выходов в тяжелой системе столкновений к выходу в системе столкновений p+p.

<sup>&</sup>lt;sup>(•)</sup> А.Д. Селезенев, artemselezenev@mail.ru

Цели и задачи работы. Целью данной работы является обнаружение образования КГП в системе столкновений <sup>3</sup>He+Au. Признаком образования КГП является наличие эффекта гашения струй. Отсюда задача работы — это измерение факторов ядерной модификации ηмезонов в системе столкновения <sup>3</sup>He+Au при энергии 200 ГэВ на нуклон в зависимости от центральности столкновения и поперечного импульса  $\eta$ -мезонов. В ходе получения факторов ядерной модификации измеряются первичные выходы  $\eta$ -мезонов, оценивается эффективность регистрации при помощи метода Монте-Карло, измеряются инвариантные спектры по поперечному импульсу  $\eta$ -мезонов. На основе полученных спектров вычисляются факторы ядерной модификации  $\eta$ -мезонов.

Методика измерения. Измерения первичных выходов  $\eta$ -мезонов производились методом инвариантной массы через канал распада  $\eta \rightarrow \gamma \gamma$ . Суть метода заключается в построении распределения по инвариантной массе пар фотонов для каждого интервала по центральности столкновения (0–88%, 0–20%, 20–40%, 40–60%, 60–88%) и для каждого интервала по поперечному импульсу (17 интервалов от 2 до 12 ГэВ/с). В результате на полученных распределениях присутствует сигнал от  $\eta$ -мезонов и фон.

Для увеличения отношения сигнал/фон используются критерии отбора пар фотонов, а именно ограничения на угол разлета пары, на расстояние между точками регистрации фотонов и на различие в энергиях фотонов.

Сигнал от η-мезонов выделяется вычитанием некоррелированного фона, полученного методом смешивания событий [6]. Примеры полученных после вычитания некоррелированного фона сигналов представлены на рис. 1. На рис. 1 видно, что на распределениях, помимо сигналов от η-мезонов, присутствует остаточный фон. Для его устранения распределения аппроксимируются функцией Гаусса и полиномом 3-й степени. Первичный выход измеряется как сумма отсчетов полезного сигнала в области по массе от 0.48 до 0.62 ГэВ/ $c^2$  минус интеграл полинома 3-й степени в этой же области.

Для нахождения реального числа частиц, рожденных в столкновении, надо оценить эффективность регистрации исследуемых частиц методам Монте-Карло.



Рис. 1. Распределения по инвариантной массе двух фотонов в столкновениях <sup>3</sup>He+Au при энергии 200 ГэВ на нуклон в классе событий по центральности 0–20% в промежутках по поперечному импульсу а) 3.5–4 ГэВ/с, б) 5.5–6 ГэВ/с, в) 10-11 ГэВ/с

Для оценки эффективности регистрации моделируется рождение η-мезонов и их распад на два фотона, для которых далее моделируется взаимодействие с моделью детектора. Эффективность регистрации рассчитывается как отношение числа частиц, полученных методикой, использованной для обработки экспериментальных данных, к числу смоделированных. На рис. 2 представлена полученная эффективность регистрации η-мезонов в столкновениях <sup>3</sup>Не+Аu при энергии 200 ГэВ на нуклон.



Рис. 2. Эффективность регистрации η-мезонов в столкновениях <sup>3</sup>He+Au при энергии 200 ГэВ на нуклон

Из первичных выходов и эффективности регистрации для каждого класса событий по центральности вычисляются инвариантные спектры, численно определяемые выражением

$$\frac{d^2 N}{2\pi p_T dp_T dy} = \frac{N_{\text{перв}}}{2\pi N_{\text{co6}} BR \ \varepsilon p_T \Delta p_T \Delta y}$$

где  $N_{\text{перв}}$ — первичные выходы,  $N_{\text{соб}}$ — число событий, BR— доля изучаемого распада ко всем возможным,  $\varepsilon$ — эффективность регистрации,  $p_T$ — поперечный импульс, y— псевдобыстрота.

Факторы ядерной модификации определяются выражением

$$R_{AB} = \frac{d^2 N_{AB}}{N_{cmon\kappa} d^2 N_{pp}},$$

где  $d^2 N_{AB}$  — инвариантные спектры частиц в столкновениях A+B,  $d^2 N_{pp}$  — инвариантные спектры частиц в столкновениях p+p[5],  $N_{\text{столк}}$ — количество попарных нуклон-нуклонных столкновений.

*Результаты.* В данной работе были выделены сигналы η-мезонов в разных классах событий по центральности в диапазоне по поперечному импульсу от 2 до 12 ГэВ/с и оценена эффективность регистрации η-мезонов в диапазоне по поперечному импульсу от 2 до 12 ГэВ/с. На основе полученных сигналов от η-мезонов и эффективности регистрации в дальнейшем возможно вычисление инвариантных спектров по поперечному импульсу η-мезонов и факторов ядерной модификации -мезонов в столкновениях <sup>3</sup>Не+Аu при энергии 200 ГэВ на нуклон для разных классов событий по центральности.

Выводы. Поскольку из распределения по инвариантной массе двух фотонов получилось выделить сигнал от  $\eta$ -мезонов, можно заключить, что инвариантные спектры и факторы ядерной модификации  $\eta$ -мезонов в столкновениях <sup>3</sup>He+Au при энергии 200 ГэВ на нуклон измеримы для разных классов событий по центральности и в диапазоне по поперечному импульсу от 2 до 12 ГэВ/с.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Shuryak E. Quantum chromodynamics and the theory of superdense matter // Physics Reports. -1980. - Vol. 61 - P. 71-158.

2. Fukushima K., Hatsuda T. The phase diagram of dense QCD // Reports on Progress in Physics. -2010. - Vol. 74 – P. 014001.

3. Adams J. et al. Experimental and Theoretical Challenges in the Search for the Quark Gluon Plasma: The STAR Collaboration's Critical Assessment of the Evidence from RHIC Collisions // Nuclear Physics A - 2005. - Vol. 757. - P. 102-183.

4. Adcox K et al. Suppression of Hadrons with Large Transverse Momentum in Central Au+Au Collisions at sqrt(s) = 130 GeV // Physical Review Letters – 2002. - Vol. 88. - P. 022301.

5. Adler S.S. et al. High Transverse momentum  $\eta$ -meson production in p+p, d+Au and Au+Au collisions at sqrt(s) = 200 GeV // Physical Review Letters – 2007. - Vol. 75. - P. 024909.

6. D. Drijard, H.G. Fischer, T. Nakada. Study of Event Mixing and Its Application to the Extraction of Resonance Signals // Nucl.Instrum.Meth.A - 1984. - Vol. 225. - P. 367-377.

УДК 539.122

# П.О. Павздерин, М.М. Митранкова Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого<sup>(•)</sup>

## ОСОБЕННОСТИ ИЗМЕРЕНИЯ ВЫХОДОВ ПРЯМЫХ ФОТОНОВ В <sup>3</sup>He+Au СТОЛКНОВЕНИЯХ ПРИ ЭНЕРГИИ $\sqrt{s_{NN}} = 200$ ГЭВ

Актуальность. Образование кварк-глюонной плазмы (КГП) в столкновениях тяжелых релятивистских ионов было многократно подтверждено косвенными наблюдаемыми эффектами – гашение адронных струй, увеличенный выход странных кварков, образование теплового излучения. Коллайдер RHIC предоставляет большой спектр систем столкновений – от малых асимметричных, таких как p+Al, p+Au, <sup>3</sup>He+Au, до систем столкновений тяжелых ядер – Cu+Au, Au+Au, U+U. Такое обилие систем взаимодействий позволяет исследовать необходимые условия образования КГП. В малых системах были обнаружены некоторые из эффектов, сигнализирующих об образовании "капель" КГП [1], однако окончательных выводов сделать нельзя [2]. Исследование рождения прямых фотонов поможет лучше понять (предположительное) образование КГП в малых системах.

Цели и задачи работы. Целью данной работы является определение всех величин, входящих в избыточное отношения (см. ниже) выхода инклюзивных фотонов и распадных фотонов в системе столкновений <sup>3</sup>He+Au при энергии  $\sqrt{s_{NN}} = 200$  ГэВ. Для достижения поставленной цели необходимо было решить задачу по измерению первичных выходов фотонов, моделированию методом Монте-Карло эффективности регистрации  $\pi^0$ -мезонов и вычислению отношения всех распадных фотонов и  $\pi^0$ -распадных фотонов.

Методика исследования. Избыточное фотонное отношение определяется как отношение числа всех зарегистрированных фотонов и числа распадных фотонов  $R_{\gamma} = \gamma^{\text{incl}}/\gamma^{\text{decay}}$ . Такая величина позволяет судить о наличии вклада прямых фотонов в общий спектр, поскольку  $\gamma^{\text{incl}} = \gamma^{\text{decay}} + \gamma^{\text{direct}}$ . На практике используют следующее представление избыточного отношения [3]:

$$R_{\gamma} = \frac{\langle \varepsilon_{\gamma} f \rangle \left( \frac{N_{\text{incl}}^{\gamma}}{N_{\text{tag}}^{\gamma}} \right)_{\text{data}}}{\left( \frac{N_{h}^{\gamma}}{N_{\pi^{0}}^{\gamma}} \right)_{\text{MC}}}.$$

В выражении для  $R_{\gamma}$  не учтена зависимость величин от поперечного импульса. Произведение в числителе представляет собой отношение числа всех зарегистрированных

<sup>&</sup>lt;sup>(•)</sup> П.О. Павздерин, pavzderin.po@edu.spbstu.ru

фотонов к числу  $\pi^0$ -распадных фотонов, а в знаменателе стоит отношение числа всех распадных фотонов к числу  $\pi^0$ -распадных фотонов. Такое представление избыточного отношения называют двойным отношением, и оно удобно для экспериментального измерения. Вместо того, чтобы измерять все источники распадных фотонов (что довольно трудно на практике), измеряются лишь  $\pi^0$ -распадные фотоны, а затем проводится Монте-Карло моделирование остальных источников распадных фотонов.

В данной работе для регистрации фотонов использовался метод внешней конверсии  $\gamma \rightarrow e^+e^-$  в веществе детектора VTX спектрометра PHENIX. Чтобы оценить количество  $\pi^0$ -распадных фотонов, конверсионным фотонам были сопоставлены в пару фотоны, зарегистрированные электромагнитным калориметром. По инвариантной массе такой пары можно восстановить количество  $\pi^0$ -мезонов, при этом одному  $\pi^0$ -мезону будет соответствовать один  $\pi^0$ -распадный фотон, входящий в выборку конверсионных фотонов. Далее была проведена оценка эффективности такой регистрации  $\pi^0$ -мезонов при условии, что один из фотонов распада был восстановлен методом внешней конверсии (рис. 1).



Рис. 1. Эффективность регистрации второго фотона распада  $\pi^0$ -мезона ( $\varepsilon_{\nu} f$ )

Спектр всех распадных фотонов был смоделирован методом Монте-Карло. Сначала были сгенерированы  $\pi^0$ -мезоны согласно их экспериментальному распределению по поперечному импульсу,  $\eta$  -мезоны были сгенерированы согласно универсальному отношению  $\eta/\pi^0$  [4]. Мезоны  $\omega$  и  $\eta'$  были сгенерированы в предположении  $m_T$ -скейлинга [5] их спектров относительно  $\pi^0$ . Далее согласно кинематике распада соответствующих частиц был получен спектр распадных фотонов, а также отношение  $N_h^{\gamma}/N_{\pi^0}^{\gamma}$  (рис. 2).

*Результаты.* В области малых поперечных импульсов в спектре прямых фотонов преобладают фотоны теплового излучения [6], поэтому сигнал  $R_{\gamma} > 1$  может быть использован в будущем для определения температуры среды, образующейся в столкновении. При  $R_{\gamma} = 1$  в области 0.8-5.0 ГэВ/с, тепловые прямые фотоны отсутствуют в спектре, что свидетельствует против образования КГП в рассматриваемой системе. На основе измеренных величин в дальнейшем будет вычислено избыточное фотонное отношение.



Рис. 2. Отношение числа всех распадных фотонов к числу  $\pi^0$ -распадных фотонов

Выводы. В работе были получены все величины, необходимые для измерения избыточного фотонного отношения  $R_{\gamma}$  в системе столкновений <sup>3</sup>He+Au при энергии  $\sqrt{s_{NN}}$  = 200 ГэВ в пределах по поперечному импульсу от 0.8 до 5.0 ГэВ/с. Избыточное отношение выше единицы может означать рождение тепловых прямых фотонов в рассматриваемой системе, а следовательно, и образование некоторой горячей среды.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. PHENIX Collaboration. Creation of quark–gluon plasma droplets with three distinct geometries // Nat. Phys.. -2019. - Vol. 15. - P. 214-220

2. Trainor T. A. QGP droplet formation in small asymmetric collision systems // EPJ Web of Conferences 235, 02006. – 2020.

3. N. J. Abdulameer et al. Low- $p_T$  direct photon production in Au+Au collisions at  $\sqrt{s_{NN}} = 39$  and 62.4 GeV // Phys. Rev. C. -2023. –Vol. 107. – P. 024914.

4. Ren Y., Drees A. Examination of the universal behavior of the  $\eta$  to  $\pi^0$  ratio in heavy-ion collisions // Phys. Rev. C. – 2023. –Vol. 104. –P. 054902.

5. Altenkämper L., Bock F., Loizides C., Schmidt N. Applicability of transverse mass scaling in hadronic collisions at energies available at the CERN Large Hadron Collider // Phys. Rev. C. – 2017. – Vol. 96. –P. 064907.

6. Gabor D. Direct real photons in relativistic heavy ion collisions // Reports on Progress in Physics. – 2020. – Vol. 4. – P.046301.

А.А. Лобанов, Ю.М. Митранков, Я.А. Бердников Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого-

## ОПРЕДЕЛЕНИЕ ЧИСЛА РАНЕНЫХ НУКЛОНОВ И ЧИСЛА БИНАРНЫХ НУКЛОН-НУКЛОННЫХ СТОЛКНОВЕНИЙ С ПОМОЩЬЮ МЕТОДОВ МАШИННОГО ОБУЧЕНИЯ

Введение. Широкое применение алгоритмов машинного обучения вызвано их хорошими результатами. Современные модели машинного обучения способны генерировать реалистичные изображения, переводить видео «налету» и писать тексты, неотличимые от написанных человеком. Вследствие этого, представляет интерес применение машинного обучения и в области физики высоких энергий.

Цели и задачи. Целью данной работы является применение многослойного перцептрона к задаче определения числа раненых нуклонов  $N_{part}$  и числа бинарных нуклон-нуклонных столкновений  $N_{coll}$  для различных сталкивающихся ядер в диапазоне начальных энергий  $\sqrt{s_{NN}}$  от 40 до 200 ГэВ. В задачи работы входит генерация столкновений ядер H, He, Cu, Au, Pb, U при начальных энергиях 40 — 200 ГэВ с шагом в 40 ГэВ с использованием РҮТНІА8/Angantyr, обучение модели многослойного перцептрона и сравнение предсказаний модели с данными, полученными при генерации.

*Методика исследования*. В качестве параметров, на основе которых модель многослойного перцептрона [1] предсказывает значения  $N_{part}$  и  $N_{coll}$ , были выбраны множественность заряженных частиц  $N_{ch}$  в интервале по псевдобыстроте  $3.1 < |\eta| < 4$  и число нейтронов  $N_{neut}$  в интервале  $5 < |\eta| < 8$ . Выбор диапазонов по псевдобыстроте обусловлен использованием в экспериментах [2]. Также модель учитывает число протонов и нейтронов в сталкивающихся ядрах и энергию в системе центра масс  $\sqrt{s_{NN}}$  [3], что позволяет работать со столкновениями разных ядер при различных энергиях.

Обучение моделей производилось на системах: p + Cu, p + U, He + Xe, He + U, Cu + Cu, Cu + Xe, Xe + Pb, Au + Au. Проверка предсказаний моделей производился на системах: p + Pb, p + Xe, p + Au, He + Cu, He + Au, He + Pb, Cu + Au, Cu + Pb, Cu + U, Xe + U, Au + Pb, Au + U, Pb + U, Xe + Xe, Pb + Pb, U + U.

Характерный для RHIC диапазон начальных энергий был взят равным  $\sqrt{s_{NN}} = 40-200$  ГэВ [2]. Обучение моделей выполнено при энергиях 40, 80, 120, 160, 200 ГэВ, а их проверка проведена при энергиях 20, 60, 100, 140, 180, 220, 240, 260 ГэВ.

Для генерации столкновений вышеперечисленных пар ядер и начальных энергиях использовалась PYTHIA8/Angantyr версии 8,307 [3]. Число сгенерированных событий равно 100000. Из каждого события были получены числа раненых нуклонов  $N_{part}$  и бинарных нуклон-нуклонных столкновений  $N_{coll}$  и множественностей заряженных частиц и нейтронов. Далее будем называть полученные значения эталонными.

Гиперпараметры (параметры, которые не определяются в ходе обучения) модели многослойного перцептрона подбирались с использованием алгоритма Tree Parzen Estimators [4] из библиотеки Optuna [5]. В результате было получено, что оптимальными параметрами являются: тройка скрытых слоев по 16, 128 и 64 нейрона соответственно с активационной функцией "ReLu", число эпох для обучения - 34, оптимизатор градиентного спуска - "Adam" [6].

Точность предсказания модели характеризовалась коэффициентом детерминации  $R^2$  [7], который определяется формулой

<sup>&</sup>lt;sup>(•)</sup> А.А. Лобанов, lobanov2.aa@edu.spbstu.ru

$$R^2 = 1 - \frac{\sum (y_i - \hat{y}_i)^2}{\sum y_i^2}$$

где y<sub>i</sub> — эталонные значения, ŷ<sub>i</sub> – значения, предсказанные моделью, N – число значений.

Чем ближе  $R^2$  к 1 (максимальному значению), тем ближе значения, предсказываемые моделью, к эталонным. Характеристикой качества предсказания многослойным перцептроном значений  $N_{coll}$  и  $N_{part}$  выступало среднее арифметическое значение их коэффициентов детерминации [8].

*Результаты.* На рис. 1 представлены значения коэффициента детерминации для модели многослойного перцептрона в зависимости от энергии и системы ядер. Чем ярче ячейка, тем больше коэффициент детерминации.

Как следует из рисунка, многослойный перцептрон показывает хорошую точность  $(R^2 > 0.9)$  при начальных энергиях, на которых проводилось обучение: 40, 80, 120, 160, 200 ГэВ.

Также на рисунке представлены значения  $R^2$  при интерполированных и экстраполированных начальных энергиях. Как видно, модель многослойного перцептрона с высокой точностью способна предсказывать значения параметров  $N_{coll}$  и  $N_{part}$ . ( $R^2 > 0.9$ ) при интерполированных энергия (60, 100, 140, 180 ГэВ) и при экстраполяции в сторону больших энергий (220, 240, 260 ГэВ). Тем не менее, при экстраполяции в сторону меньших энергий (20 ГэВ) модель не способна точно предсказывать значения параметров ( $R^2 < 0.7$ ), что может быть объяснено малыми значениями  $N_{ch}$  и  $N_{neut}$  при рассматриваемой начальной энергии в сторону меньших энергии в сравнении с основным обучаемым диапазоном.



Рис. 1. Коэффициент детерминации  $R^2$  в зависимости от системы ядер и начальной энергии (чем ярче ячейка таблицы, тем лучше модель многослойного перцептрона предсказывает значения  $N_{coll}$  и  $N_{part}$ )

Выводы. В результате работы было получено, что многослойный перцептрон может с высокой точностью предсказывать  $N_{part}$  и  $N_{coll}$  ( $R^2 > 0.9$ ) на основе  $N_{ch}$  и  $N_{neut}$  для различных систем ядер при начальных энергиях  $\sqrt{s_{NN}} = 40{-}200$  ГэВ. Также полученная модель способна работать при энергиях больше основного диапазона (220, 240 и 260 ГэВ).

### ЛИТЕРАТУРА

1. Хайкин С. Нейронные сети. Полный курс. Пер. с англ. 2-е изд. М.: Изд-во «Вильямс», 2019. 1104 с. 2. Morrison D. P., Akiba Y., Alford O., et al., The PHENIX experiment at RHIC, Nucl. Phys. A. 638 (1–2) (1998) 565с–569с.

3. Sjöstrand T., Mrenna S., Skands P., A brief introduction to PYTHIA 8.1, Comp. Phys. Commun. 178 (11) (2008) 852–867.

4. Bergstra J., Bardenet R., Bengio Y., Kégl B. Algorithms for hyper-parameter optimization // Advances in Neural Information Processing Systems 24 (NIPS 2011). Edited by J. Shawe-Taylor, R. Zemel, P. Bartlett, F. Pereira, K. Q. Weinberger. 2011. Vol. 24. Pp. 1–6.

5. Akiba T., Sano S., Yanase T., Ohta T., Koyama M. Optuna: A next-generation hyperparameter optimization framework // Proceedings of the 25th ACM SIGKDD International Conference on Knowledge Discovery & Data Mining. 2019. Pp. 2623–2631.

6. Kingma D. P., Ba J. Adam: A method for stochastic optimization // arXiv preprint arXiv:1412.6980. 2014.

7. Barten A. P. The coefficient of determination for regression without a constant term // Heijmans R., Neudecker H. (Eds.) The practice of econometrics. International Studies in Economics and Econometrics. Vol. 15. Dordrecht: Springer, 1987. Pp. 181–189.

8. Mastelini S. M. et al. Benchmarking multi-target regression methods //2018 7th Brazilian Conference on Intelligent Systems (BRACIS). – IEEE, 2018. – C. 396-401.

УДК 532.517

А.А. Лобанов, Я.А. Бердников Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого<sup>(•)</sup>

# МОДЕЛИРОВАНИЕ ГЛУБОКОГО НЕУПРУГОГО ЭЛЕКТРОН-ПРОТОННОГО РАССЕЯНИЯ С ПОМОЩЬЮ ГЕНЕРАТИВНО-СОСТЯЗАТЕЛЬНОЙ СЕТИ

Введение. Хорошо известно, что модель генеративно-состазательной сети (ГСС) является одним из видов генеративных нейронных сетей. Данная модель состоит из двух сетей: генератора и дискриминатора. Задачей генератора является генерация величин, например, импульсов частиц, в то время как дискриминатор должен отличить результат, произведенный генератором, от некоторого эталонного. В результате такого противостояния модель ГСС способна генерировать реалистичные результаты (см., например, [1]). Вследствие этого, представляет интерес применение данной модели для создания различных генераторов событий в области физики элементарных частиц.

Цели и задачи. Целью данной работы является применение ГСС с дополнительными и измененными параметрами для генерации конечного состояния электрона в глубоком неупругом электрон-протонном рассеянии при различных начальных энергиях. В задачи работы входит генерация глубоко неупругого электрон-протонного рассеяния с использованием РҮТНІА8, обучение модели ГСС и сравнение предсказаний распределений физических величин, выдаваемых моделью, с эталонными.

*Методика исследования.* В качестве величин, которые генерирует модель ГСС, были выбраны компоненты импульса конечного электрона  $p = (p_x, p_y, p_z)$ . Также была рассмотрена величина энергии пучка электрона в системе центра масс  $E_0$ , определяемая как

<sup>&</sup>lt;sup>(•)</sup> А.А. Лобанов, lobanov2.aa@edu.spbstu.ru

 $E_0 = \sqrt{s_{eN}/2}$ , где  $\sqrt{s_{eN}}$  — начальная энергия в системе центра масс. Эта величина позволяет модели ГСС работать с разными начальными энергиями. При обучении были рассмотрены энергии  $E_0 = 10, 20, 30, 40, 50$  ГэВ. Выбор энергий обусловлен их использованием в EiC [2]

Величины импульса конечного электрона были получены путем моделирования в РҮТНІА8 [3]. Количество сгенерированных событий составило 100000 для каждой из энергий E<sub>0</sub>.

Как видно из рис. 1, распределение компоненты импульса  $p_z$  имеет острый край, связанный с законом сохранения энергии. Такое распределение сложно аппроксимировать ГСС: модель будет предсказывать не физичные значения импульсов. Для решения этой проблемы, как и в работе [4], модель предсказывает не саму величину  $p_z$ , а некоторую преобразованную величину  $T(p_z)$ , определяемую как  $T(p_z) = \log(E_0 - p_z)$ . Дополнительно модель предсказывает значения  $E_e$ ,  $p_T = \sqrt{p_x^2 + p_y^2}$  и  $p_z/p_T$ , что позволяет повысить точность дискриминатора [4].

На вход генератора передается 100-мерный вектор значений, полученных из распределения Гаусса со средним равным 0 и дисперсией равной 1, и энергия пучка  $E_0$ . Генератор состоит из 6 скрытых слоев по 512 нейронов с функцией активации ReLU [5]. Выходной слой состоит из 3 нейронов с линейной функцией активации, каждый предсказывает свой признак:  $p_x$ ,  $p_y$  и  $T(p_z)$ . Также модель включает в себя лямбда слой, который рассчитывает дополнительные параметры на основе признаков, полученных из выходного слоя. Все полученные величины и энергия пучка  $E_0$  далее передаются на вход дискриминатора.

Дискриминатор состоит из 6 скрытых слоев по 512 нейронов с функцией активации ReLU [5]. Для каждого из слоев применяется так называемый "dropout layer" с коэффициентом 10% [6], использование которого помогает бороться с переобучением при классификации [7]. Выходной слой состоит из 1 нейрона с линейной функцией активации, который отражает степень уверенности дискриминатора в том, что на вход были переданы «реалистичные» величины.



Рис. 1. Распределение физических характеристик электрона в конечном состоянии:  $p_x, p_y, p_z, E, p_T, \theta$ ,  $\varphi$ ,  $x_{bj} u Q^2$ , полученные с помощью РҮТНІА8 (синий цвет) и предсказываемые моделью ГСС (оранжевый цвет), при энергии пучка  $E_0 = 30$  ГэВ. Для каждого распределения приведено соответствующее значение  $\chi^2$ 

В работе рассмотрена вассерштейновская модель ГСС с градиентным [8]. Модель обучалась 100 эпох. Оптимизатор градиентного спуска был выбран Adam [9] с шагом обучения  $10^{-4}$ ,  $\beta_1 = 0$  и  $\beta_2 = 0.9$ . На каждую итерацию обучения генератора приходилось 5 итераций обучения дискриминатора [8].

*Результаты.* На рис. 1 приведены распределения физических величин электрона в конечном состоянии:  $p_x$ ,  $p_y$ ,  $p_z$ , E,  $p_T$ ,  $\theta$ ,  $\varphi$ ,  $x_{bj}$  и  $Q^2$  [10], полученные с помощью РҮТНІА8 (синий цвет) предсказываемые моделью ГСС (оранжевый цвет), при энергии пучка  $E_0 = 30$  ГэВ. Как видно из рисунка, модель с высокой точностью предсказывает распределения близкие к полученным из РҮТНІА8. Практически для всех распределения  $\chi^2$  [11] меньше или порядка 1.

На рис. 2 приведены распределения импульсов  $p_z$  для рассеянного электрона при энергиях пучка  $E_0 = 10, 15, 20, 25, 30, 35, 40, 45, 50, 60, 70, 80, 90$  ГэВ. Как видно из рисунка, модель ГСС достаточно точно повторяет распределения, предсказанные РҮТНІА8, как при энергиях, на которых велось обучение (10, 20, 30, 40 и 50 ГэВ), так и при интерполированных значения энергии пучка (15, 25, 35, 45 ГэВ). Небольшие отклонения существуют только для относительно редких событий (порядка  $10^{-2}$  от всех событий). Также стоит отметить, что модель способна работать и с большими энергиями пучка: 60, 70, 80 и 90 ГэВ.



Рис. 2. Распределения величины  $p_z$ , полученные с помощью РҮТНІА8 (сплошная линия) и полученные с помощью модели ГСС (пунктирная линия), для разных энергий пучка. Треугольниками отмечены энергии, при которых модель обучалась

Выводы. В результате работы была получена модель ГСС, которая с высокой точностью способна предсказывать конечное состояние рассеянного электрона в диапазоне начальных энергий электрон-протонного взаимодействия  $\sqrt{s_{eN}} = 20 - 100$  ГэВ. Также модель способна работать при больших начальных энергиях, вплоть до 180 ГэВ.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Clark A., Donahue J., Simonyan K. Adversarial video generation on complex datasets [Электронный pecypc]. arXiv: <u>1907.06571v2</u>, 2019. URL: <u>https://doi.org/10.48550/arXiv. 1907.06571</u> (дата обращения: 22.03.2023).

 Accardi A., Albacete JL., Anselmino M. et al. Electron-Ion Collider: The next QCD frontier: Understanding the glue that binds us all // The European Physical Journal A. – 2016. – Vol. 52. – P. 1-100.
Sjöstrand T., Mrenna S., Skands P. A brief introduction to PYTHIA 8.1 // Computer Physics Communications. – 2008. – Vol. 178. – No. 11. – Pp. 852–867. 4. Alanazi Y., Sato N., Liu T., et al. Simulation of electron-proton scattering events by a Feature-Augmented and Transformed Generative Adversarial Network (FAT-GAN). [Электронный ресурс]. arXiv: 2001.11103v2, 2019. URL: https://doi.org/10.48550/arXiv.2001. 11103. (дата обращения: 22.03.2023).

5. Dubey A. K., Jain V. Comparative study of convolution neural network's relu and leaky-relu activation functions // Applications of Computing, Automation and Wireless Systems in Electrical Engineering, Springer Singapore. – 2018. – P. 873-880.

6. Srivastava N., Hinton G., Krizhevsky A., Slutskever I., Salakhutdinov R. Dropout: A simple way to prevent neural networks from overfitting // The Journal of Machine Learning Research. – 2014. – Vol. 15. – Pp. 1929–1958.

7. Hawkins D. M. The problem of overfitting // Journal of Chemical Information and Computer Sciences. – 2003. – Vol. 44. – No. 1. – Pp. 1–12.

8. Gulrajani I., Ahmed F., Arjovsky M., Dumoulin V., Courville AC. Improved training of wasserstein gans. arXiv:1704.00028, 2017 [Электронный ресурс]. URL: <u>https://doi.org/10.48550/arXiv.1704.00028</u> (дата обращения: 22.03.2023).

9. Kingma D. P., Ba J. Adam: A method for stochastic optimization. arXiv:1412.6980. 2014. [Электронный pecypc]. URL: <u>https://doi.org/10.48550/arXiv.1412.6980</u> (дата обращения: 22.03.2023).

10. Animalu A. O. E., Ekuma C. E. Review of Deep-Inelastic Electron-Proton Scattering: A Hadronic Mechanics Viewpoint // African J. Phys. – 2008. – Vol. 1. – P. 133-154.

11. McHugh M. L. The chi-square test of independence // Biochemia Medica. – 2013. – Vol. 23. – No. 2. – Pp. 143–149.

## УДК 539.12

Д.А. Берналь, А.А. Лобанов, Я.А. Бердников Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого.<sup>(•)</sup>

## ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПРИЦЕЛЬНОГО ПАРАМЕТРА В СТОЛКНОВЕНИЯХ ЯДЕР ЗОЛОТА ПРИ ЭНЕРГИИ 600 МЭВ С ПОМОЩЬЮ НЕЙРОННОЙ СЕТИ

Введение. Сложность в изучении столкновения ультрарелятивистских тяжелых ионов возникает из-за протекающих процессов, которые зависят от прицельного параметра столкновения ядер. Прицельный параметр b определяется как расстояние между центрами сталкивающихся ядер, выражаемый в фемтометрах. В зависимости от значений b выделяют периферийные столкновения, которые характеризуются малой передачей энергии между сталкивающимися ядрами и большим значением b, и центральные столкновения, в результате которых может образоваться так называемый 'fireball' [1] и значения b близки к 0. Однако сложность заключается в том, что нет четкой границы между данными процессами, которую можно было бы наблюдать в экспериментах [2].

В данной работе продолжено развитие метода, предложенного в [2], по применению нейронной сети для определения прицельного параметра в столкновениях тяжелых ядер золота при энергии пучка 600 МэВ/нуклон.

Цели и задачи. Целью данной работы является применение нейронной сети для определения прицельного параметра столкновения Au+Au при энергии пучка 600 МэВ/нуклон. В задачи работы входит генерация 10000 столкновения ядер золота с использованием пакета UrQMD-3.4 [3], определение оптимальной архитектуры нейронной сети и оптимальных параметров, обучение модели нейронной сети и сравнение предсказанных значений прицельного параметра со значениями, полученными с помощью UrQMD.

<sup>&</sup>lt;sup>(•)</sup> А.А. Лобанов, lobanov2.aa@edu.spbstu.ru

*Методика исследования.* В качестве наблюдаемых величин были рассмотрены: поток  $FLOW = \frac{1}{N} \sum sign(y_{ct}) \cdot p_z$ , направленность  $DIR = \frac{|\sum \vec{p_t}|}{\sum |\vec{p_t}|}$ , отношение энергий в системе центра масс  $ERAT = \frac{\sum p_t^2/2m}{\sum p_z^2/2m}$  и множественность протонов (MULT).

Нейронная сеть [4] является очень чувствительной к ее гиперпараметрам, т.е. параметрам, которые не определяются в ходе обучения сети [5]. Для нахождения гиперпараметров в данной работе был использован алгоритм Tree Parzen Estimators [6] из библиотеки Optuna [7].

Были рассмотрены такие гиперпараметры, как число слоев, число нейронов, эпох для обучения и размер батча. Число слоев определялось из диапазона 1-10, число нейронов из диапазона 4-128 для каждого слоя, число эпох из диапазона 1-50. Оптимальная архитектура считалась та, которая дает минимальное значение среднего квадрата ошибки [8]. В результате было получено, что оптимальной архитектурой является 1 слой с 64 нейронами, размер батча 4, число эпох 22. Сигмоида [9] использовалась в качестве активационной функции. В качестве оптимизатора градиентного спуска был использован Adam [10].

Далее было рассмотрено, какие наблюдаемые величины или их комбинации позволяют нейронной сети с наибольшей точностью предсказывать значения прицельного параметра. Точность предсказания характеризовалась стандартным отклонением от эталонных значений, полученных из UrQMD, определяемая согласно формуле

$$std = \sqrt{\frac{1}{N}\sum_{i}^{N} (b_{i}^{QMD} - b_{i}^{nn})^{2}},$$

где N – число сгенерированных событий,  $b^{QMD}$  – значение прицельного параметра, полученного из UrQMD,  $b^{nn}$  – значение прицельного параметра, полученного нейросетью, и средним арифметическим значением разности прицельного параметра  $b^{QMD}$  и  $b^{nn}$ . Для того, чтобы оценить, как хорошо нейронная сеть предсказывает значения b для разных событий, расчет стандартного отклонения проводился в трех диапазонах по прицельному параметру: 11.9 фм < b < 14 фм (периферийные события), 4.2 фм < b < 9.8 фм (промежуточные события) и 0 фм < b < 2.1 фм (центральные события).

Наблюдаемые	Перифе	ерийные	Промеж	уточные	Центральные	
величины	std	$b^{QMD}$ - $b^{nn}$	std	$b^{QMD}$ - $b^{nn}$	std	$b^{QMD}$ - $b^{nn}$
FLOW DIR ERAT MULT	0.55	0.2	0.49	0.07	0.41	0.25
FLOW DIR ERAT	0.52	0.26	0.48	0.02	0.53	0.33
FLOW DIR MULT	0.77	0.62	1.32	0.32	2.2	7.97
FLOW ERAT MULT	0.49	0.81	0.47	0.12	0.45	0.57
DIR ERAT MULT	0.54	0.08	0.52	0.12	0.42	0.35
FLOW DIR	0.77	0.65	1.3	0.27	2.15	7.95
FLOW ERAT	0.49	0.27	0.49	0.04	0.48	0.48
FLOW MULT	0.61	3.56	1.58	2.03	0.5	8
DIR ERAT	0.52	0.18	0.49	0.13	0.53	0.4
DIR MULT	0.8	0.96	1.29	0.38	2.04	7.79
ERAT MULT	0.49	0.22	0.47	0.11	0.45	0.27
FLOW	0.61	3.86	1.3	0.38	2.17	7.84
DIR	0.79	0.7	1.3	0.38	2.17	7.84
ERAT	0.49	0.34	0.49	0.05	0.47	0.45
MULT	0.61	3.38	1.58	2.21	0.5	8.18

Табл. 1. Зависимость значений стандартного отклонения (в фм) и среднего значения разности  $b^{QMD}$  -  $b^{nn}$  в зависимости от наблюдаемых величин

Результаты. В табл. 1 представлены значения стандартного отклонения и среднего значения разности  $b^{QMD}$  -  $b^{nn}$  в зависимости от наблюдаемых величин, на основе которых нейронная сеть предсказывала значения прицельного параметра b. Как видно из таблицы, комбинация величин ERAT, MULT дают наименьшие значения стандартного отклонения для всех типов событий (периферийных, промежуточных и центральных). Для них стандартное отклонение меньше 0.5 фм, что говорит о том, что модель с высокой точностью способна предсказывать значения прицельного параметра b. Также на это указывает то, что среднее значения разности эталонного значения b и b, предсказанного нейронной сетью порядка 0.2 фемтометра.

Выводы. Показано, что нейронная сеть с одним скрытым слоем с 64 нейронами и активационной функцией – сигмоида, позволяет предсказывать значение прицельного параметра *b* на основе наблюдаемых величин отношения энергий в системе центра масс и множественности протонов для столкновений ядер золота при энергии пучка 600 МэВ/нуклон.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Kapusta J. I. Particle production in the nuclear fireball model //Physical Review C. – 1977. – T. 16. – №. 4. – C. 1493.

2. David C., Freslier M., Aichelin J. Impact parameter determination for heavy-ion collisions by use of a neural network //Physical Review C.  $-1995. - T. 51. - N_{\odot} \cdot 3. - C. 1453$ .

3. S. A. Bass, M. Belkacem, M. Bleicher, M. Brandstetter, L. Bravina, C. Ernst, L. Gerland, M. Hofmann, S. Hofmann, J. Konopka, G. Mao, L. Neise, S. Soff, C. Spieles, H. Weber, L. A. Winckelmann, H. Stocker, W. Greiner, Ch. Hartnack, J. Aichelin and N. Amelin: Microscopic Models for Ultrarelativistic Heavy Ion Collisions Prog. Part. Nucl. Phys. 41 (1998) 225-370

4. Müller B., Reinhardt J., Strickland M. T. Neural networks: an introduction. – Springer Science & Business Media, 1995.

5. Feurer M., Hutter F. Hyperparameter optimization //Automated machine learning: Methods, systems, challenges. – 2019. – C. 3-33.

6. Ozaki Y. et al. Multiobjective tree-structured parzen estimator for computationally expensive optimization problems //Proceedings of the 2020 genetic and evolutionary computation conference. -2020. -C. 533-541.

7. Akiba T. et al. Optuna: A next-generation hyperparameter optimization framework //Proceedings of the 25th ACM SIGKDD international conference on knowledge discovery & data mining. – 2019. – C. 2623-2631.

8. Das K., Jiang J., Rao J. N. K. Mean squared error of empirical predictor. – 2004.

9. Han J., Moraga C. The influence of the sigmoid function parameters on the speed of backpropagation learning //From Natural to Artificial Neural Computation: International Workshop on Artificial Neural Networks Malaga-Torremolinos, Spain, June 7–9, 1995 Proceedings 3. – Springer Berlin Heidelberg, 1995. – C. 195-201.

10. Reddi S. J., Kale S., Kumar S. On the convergence of adam and beyond //arXiv preprint arXiv:1904.09237. - 2019.

Д.Н. Стекачева, Ю.М. Митранков, А.Я. Бердников Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого<sup>(•)</sup>

# АНАЛИЗ ПРОЦЕССОВ РОЖДЕНИЯ МЕЗОНОВ В D+D СТОЛКНОВЕНИЯХ ПРИ ЭНЕРГИИ $\sqrt{s_{_{NN}}} = 27$ ГЭВ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ ЯДЕРНО-МОДИФИЦИРОВАННЫХ ФУНКЦИЙ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ПАРТОНОВ

Введение. Одним из важных направлений исследований современной физики элементарных частиц является изучение внутренней структуры адронов, и, в частности, нуклонов. Известно, что составляющими протонов и нейтронов являются 3 валентных кварка, морские кварки, антикварки и глюоны.

Спустя более полувека после открытия партонов все еще мало известно о трехмерной и спиновой структурах нуклонов. Результаты неполяризованного рассеяния описываются с помощью функций распределения партонов  $f(x,Q^2)$ , зависящих от доли импульса нуклона x, которую имеет партон, и от квадрата 4-импульса  $Q^2$ , переданного партону в результате взаимодействия.

Среди функций распределения партонов следует выделить функции в коллинеарном приближении, зависящие от поперечного импульса, обобщенные [1] и ядерномодифицированные функции распределения партонов [2], которые включены в различные наборы функций распределения партонов, полученные множеством коллабораций [3, 4], занимающихся аппроксимацией экспериментальных данных, измеренных в жестких (для которых  $Q \ge 220$  МэВ) процессах при высоких энергиях.

*Цели и задачи работы.* Целью настоящей работы является определение влияния ядерно-модифицированных функций распределения партонов набора TUJU21 на процессы рождения мезонов  $\pi^0$ ,  $J/\Psi$ ,  $D^+$  и  $D^-$  в d+d столкновениях при энергии  $\sqrt{s_{NN}} = 27$  ГэВ.

*Методика исследования*. Функции распределения партонов  $f(x,Q^2)$  характеризуют вероятность обнаружить партон с долей импульса нуклона x с определенным квадратом 4-импульса  $Q^2$ , переданным партону в результате взаимодействия [3].

Согласно теореме факторизации [3, 5], полное сечение жесткого процесса  $\sigma_{AB\to kX}$  (A, B – адроны,  $k - \pi^0$ ,  $J / \Psi$ ,  $D^+$  или  $D^-$ , X – все остальные частицы) представимо в виде свертки функций распределения партонов сталкивающихся адронов и сечения процессов жесткого взаимодействия партонов, происходящих на малых масштабах:

$$\sigma_{AB \to kX} = \int dx_a \int dx_b f_a^A(x_a, Q^2) f_b^B(x_b, Q^2) \sigma_{ab \to kX}(x_a, x_b, Q^2)$$

где  $f_a^A(x_a, Q^2)$  и  $f_b^B(x_b, Q^2)$  – функции распределения партонов *a* и *b* внутри адронов *A* и *B*, включающие непертурбативные (то есть не рассчитываемые в теории возмущений) эффекты,  $\sigma_{ab\to kX}(x_a, x_b, Q^2)$  – полное сечение жесткого взаимодействия партонов, рассчитанное в квантовой хромодинамике (КХД).

Как было отмечено выше, существует множество наборов функций распределения партонов, которые получают путем аппроксимации экспериментальных данных и их параметризации, имеющей следующий вид [3, 4]:

$$f(x, Q_0^2) = Ax^B (1-x)^C P(x),$$

<sup>&</sup>lt;sup>(•)</sup> Д.Н. Стекачева, stekacheva.dn@edu.spbstu.ru

где P(x) может быть, в целом, любым полиномом от x или  $\sqrt{x}$  – Чебышева, Бернштейна и др., он также может быть подобран нейронной сетью [5].

В столкновениях ядер всегда присутствуют эффекты холодной ядерной материи [6], которые описываются ядерно-модифицированными функциями распределения партонов. Эти эффекты могут присутствовать и в столкновениях дейтронов: функции распределения партонов внутри нуклонов в связанном состоянии в дейтронах отличаются от функций распределения партонов в свободных нуклонах. Ядерные модификации функций распределения партонов определяются соотношением:

$$R_i^{pp(bind)} = \frac{f_i^{p(bind)}}{f_i} \,,$$

где  $f_i^{p(bind)}$  – функция распределения партонов внутри связанного протона,  $f_i$  – функция распределения партонов в свободном протоне, *i* – вид партона.

Из множества различных наборов ядерно-модифицированных функций распределения партонов был выбран набор TUJU21 [7], данные для которого взяты из экспериментов по глубоко неупругому рассеянию заряженных лептонов и пучков нейтрино на ядрах-мишенях, а также из экспериментов по рождению  $W^{\pm}$  и Z-бозонов в столкновениях протонов с ядрами *Pb*. Анализ полученных данных и их аппроксимация выполнены в порядках NLO и NNLO КХД.

Для количественного описания особенностей рождения частиц в ядро-ядерных столкновениях используется фактор ядерной модификации  $R_{pp(bind)}$  [8]. В расчетах, выполненных в настоящей работе, он определяется как отношение выхода частиц в столкновениях p+p с использованием ядерно-модифицированных функций распределения партонов в дейтронах к выходу частиц в столкновениях p+p с использованием функций распределениях распределения партонов в свободных протонах.

*Результаты*. На рис. 1 представлены факторы ядерной модификации в зависимости от поперечного импульса в столкновениях d+d при энергиях  $\sqrt{s_{NN}} = 27$  ГэВ. Они были посчитаны для мезонов  $\pi^0$ ,  $J/\Psi$ ,  $D^+$  и  $D^-$  в генераторе Pythia для набора функций распределения партонов TUJU21 с учетом их неопределенностей. Средние точки на рисунке 1 соответствуют непосредственно факторам ядерной модификации, полученным для значений функций распределения партонов, – они обозначены mean. Верхние и нижние точки соответствуют факторам ядерной модификации, полученным для суммы и разности значений функций распределений и их статистических ошибок, – они обозначены upper uncertainty и lower uncertainty соответственно

Заключение. В настоящей работе изучено влияние ядерно-модифицированных функций распределения партонов на процессы рождения мезонов  $\pi^0$ ,  $J/\Psi$ ,  $D^+$  и  $D^-$  в d+d столкновениях с использованием набора ядерно-модифицированных функций распределения партонов TUJU21 при энергии  $\sqrt{s_{NN}} = 27$  ГэВ. Во всем исследуемом диапазоне по поперечному импульсу ( $0 \div 4$ ГэВ для  $J/\Psi$ - и  $D^+$ -мезонов и  $0 \div 5$  ГэВ для  $\pi^0$ - и  $D^-$ -мезонов) факторы ядерной модификации функций распределения партонов с учетом их неопределенностей отличаются от 1, что может указывать на присутствие в d+d столкновениях эффектов холодной ядерной материи.

. Полученные результаты могут быть использованы для описания и трактовки результатов измерений выходов частиц в будущем эксперименте SPD NICA, а именно помогут отделить влияние эффектов холодной ядерной материи от влияния спиновых и других эффектов, проявляющихся в столкновениях ионов. Можно также отметить, что аналогичное моделирование столкновений можно провести в дальнейшем с другими

наборами функций распределения партонов, а также с учетом спиновых функций распределения партонов.



Рис. 1. Факторы ядерной модификации для мезонов  $\pi^0$ ,  $J/\Psi$ ,  $D^+$  и  $D^-$  в зависимости от поперечного импульса в d+d столкновениях при энергии  $\sqrt{s_{_{NN}}} = 27$  ГэВ для набора ядерномодифицированных функций распределения партонов TUJU21

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Constantinou M. et al. Parton distributions and lattice-QCD calculations: Toward 3D structure //Progress in Particle and Nuclear Physics. – 2021. – T. 121. – C. 103908.

2. Hirai M., Kumano S., Nagai T. H. Nuclear parton distribution functions and their uncertainties //Physical Review C. – 2004. – T. 70. – №. 4. – C. 044905.

3. Soper D. E. Parton distribution functions //Nuclear Physics B-Proceedings Supplements. – 1997. – T. 53. – №. 1-3. – C. 69-80.

4. Cooper-Sarkar A. M. Parton Distribution Functions for discovery physics at the LHC //arXiv preprint arXiv:2302.11788. – 2023.

5. Collins J. C., Soper D. E., Sterman G. Factorization of hard processes in QCD //Perturbative QCD. – 1989. – C. 1-91.

6. Vogt R. Cold Nuclear Matter Effects on Open and Hidden Heavy Flavor Production at the LHC //arXiv preprint arXiv:1508.01286. – 2015.

7. Helenius I., Walt M., Vogelsang W. TUJU21: NNLO nuclear parton distribution functions with electroweak-boson production data from the LHC //arXiv preprint arXiv:2112.11904. – 2021.

8. Митранкова М. М., Бердников Я. А., Бердников А. Я., Митранков Ю. М., Котов Д. О. Измерение факторов ядерной модификации φ-мезона в столкновениях протонных пучков с ядрами алюминия при энергии 200 ГэВ // Научно-технические ведомости СПбГПУ. Физико-математические науки. – 2020. – Т. 13. – № 2. – С. 152-159.

Д.Н. Куницына, Ю.М. Митранков, Я.А. Бердников Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого<sup>(•)</sup>

## РАСЧЕТ ИНКЛЮЗИВНОГО СЕЧЕНИЯ ГЛУБОКО-НЕУПРУГОГО ЭЛЕКТРОН-ПРОТОННОГО РАССЕЯНИЯ С УЧЕТОМ ВКЛАДА СКАЛЯРНОГО ДИКВАРКА

Введение. В 1987 г. в эксперименте European Muon Collaboration при рассеянии мюона на протоне было показано [1], что спин нуклона не определяется суммарным спином его валентных кварков. Данное наблюдение получило название «спиновый кризис». В настоящее время проблема формирования спина нуклонов остается нерешенной, несмотря на большое количество исследований по этой теме. В будущем, например, на коллайдере NICA, Россия (Nuclotron based Ion Collider fAcility), будут проводиться эксперименты по изучению спиновой структуры нуклонов.

Известно, что между двумя кварками могут возникать силы, имеющие характер притяжения. Это обстоятельство приводит к тому, что в барионе двухкварковая система может перейти в низкоэнергетическое связанное состояние, называемое дикварк [2]. В барионах третий кварк взаимодействует с дикварком посредством сильного взаимодействия. Соответствующая модель барионов называется кварк-дикварковая модель [2].

В данной работе изучается вклад скалярного дикварка в сечение глубоко-неупругого рассеяния электрона на протоне.

*Методика*. Формула для сечения рассеяния двух частиц со спином ½  $\sigma$  выглядит следующим образом:

$$\frac{d\sigma}{dt} = \frac{2\pi\alpha^2}{s^2} \left(\frac{s^2 + u^2}{t^2}\right),$$

где *s*, *t*, *u* – переменные Мандельштама,  $\alpha$  – постоянная тонкой структуры. С увеличением энергии налетающей частицы частица-мишень (протон) перестает вести себя как точечный объект и рассеяние налетающей частицы происходит на партонах мишени. Поэтому для описания структуры протона вводятся функции партонного распределения  $f_q^{p}(x)$ , где x – переменная Бьоркена. Обычно  $f_q^{p}(x)$  рассчитываются с помощью структурных функций, которые получают из экспериментальных данных. Партоны, образующие нуклоны, также включают глюоны, но поскольку у глюонов нет электрического заряда, они не участвуют во взаимодействиях с электроном при неупругом рассеянии электрона на нуклоне. Поэтому глюоны не влияют на структурные функции, полученные из экспериментальных данных. С учетом вышеперечисленного, сечение электрон-протонного рассеяния представимо в виде

$$\frac{d\sigma}{dt} = \frac{-2\pi\alpha^2}{xt^2} \left( \left[ \frac{t}{xs} + 1 \right]^2 + 1 \right) \sum_q e_q^2 x f_q^{p}(x).$$

где  $e_q$  – заряд кварка, q = u, d для u и d кварков, соответственно.

Дикварки могут быть скалярными (спин = 0) и векторными (спин = 1). Вследствие этого нуклонное состояние представлено SU(4)-симметрией со спиновым ароматом. В данной работе рассмотрено изоскалярно-скалярное состояние дикварка. Так как дикварк несет заряд антицвет по отношению к третьему кварку бариона, модель не противоречит стандартным схемам взаимодействия кварков. Сечение рассеяния электрона на дикварке (S) дается следующей формулой:

<sup>(•)</sup> Д.Н. Куницына, kunitsyna.dn@edu.spbstu.ru
$$\frac{d\sigma}{dt_{e^{-}s}} = \frac{4\pi\alpha^2}{s^2} \left(\frac{su}{t^2}\right).$$

В работе [4] с помощью голографической квантовой хромодинамики (КХД) были рассчитаны функции партонного распределения дикварка в протоне  $f_s$ , зависящие от переменной Бьоркена x и квадрата модуля переданного импульса  $Q^2$ . Скалярный дикварк состоит из u и d кварков, следовательно его заряд равен 1/3. Дикварк вводится в структурные функции протона как слагаемое вида

$$k \cdot \frac{1}{9} \cdot f_{\mathcal{S}}(x, Q^2),$$

где

$$k = \frac{d\sigma}{dt_{e^-s}} : \frac{d\sigma}{dt} = -2\frac{us}{u^2 + s^2}.$$

Слагаемые, соответствующие *и* и *d* кваркам, приобретают вид:

$$e_u^2(f_u(x,Q^2)-1/2f_s(x,Q^2))$$
 и  $e_d^2(f_d(x,Q^2)-1/2f_s(x,Q^2))$ .

В данной работе использован набор функций партонного распределения NNPDF2.3, который был получен на большом объеме данных в экспериментах по глубоко-неупругому рассеянию [5], а также параметризован для значений квадрата переданного импульса вокруг границы между пертурбативным и непертурбативным режимами КХД.

*Результаты.* На рис. 1 слева приведено сравнение результатов расчетов сечения электрон-протонного глубоко-неупругого рассеяния с использованием NNPDF2.3 и значений сечения полученных на эксперименте HERMES [5] в интервале по переданному импульсу от 1 до 10  $\Gamma$ эВ<sup>2</sup> и в интервале по переменной Бьоркена от 0.059 до 0.348 без учета дикварка. Значения сечений умножены на  $Q^4$  и на константу для наглядности. Экспериментальные данные и рассчитанные значения сечений не противоречат друг другу в пределах неопределенности измерений.



Рис. 1. Зависимость сечения электрон-протонного глубоко-неупругого рассеяния от Q<sup>2</sup> без учета дикварка (слева) и с учетом дикварка (справа). Расчеты представлены линиями, экспериментальные данные HERMES точками. Здесь и далее «усы» и прямоугольники обозначают статистические неопределенности и систематические неопределенности, соответственно

На рис. 1 справа представлено такое же сравнение, как на рисунке слева, но с учетом вклада скалярного дикварка. Экспериментальные данные и рассчитанные значения сечений совпадают в пределах неопределенности измерений. На рис. 1 видно, что расхождение модельных расчетов и экспериментальных данных возрастает с уменьшением модуля переданного импульса, так как  $Q^2 = 1 \Gamma \Rightarrow B^2$  – граница применимости пертурбативной КХД.

На рис. 2 и 3 показаны отношения сечений, измеренных в эксперименте к рассчитанным сечениям в зависимости от  $Q^2$  для различных *x*. Можно заметить, что отношения на рис.3 сместились ближе к 1 по сравнению с рис. 2, особенно для средних *x* из интервала 0.108–0.166. Это так же подтверждается изменением значения достигаемого уровня значимости р<sub>value</sub>. Для расчетов в кварковой модели интегральное значение p<sub>value</sub> составляет 0.06, а в кварк-дикварковой модели 0.802.



Рис. 2. Отношения экспериментальных значений сечения электрон-протонного рассеяния к рассчитанным значениям в зависимости от  $Q^2$  для различных *x* без учета вклада дикварка



Рис. 3. Отношения экспериментальных значений сечения электрон-протонного рассеяния к рассчитанным значениям в зависимости от  $Q^2$  для различных *x* с учетом вклада дикварка

Выводы. В работе проведено сравнение рассчитанных значений сечения неупругого рассеяния электронов на неполяризованных протонах с измеренными коллаборацией HERMES. Расчеты представлены в диапазонах от 1 до 10  $\Gamma$ эВ<sup>2</sup> по переданному импульсу и от 0.059 до 0.348 по переменной Бьоркена. На основе сравнительного анализа сделан вывод об улучшении сходимости модельных расчетов и результатов эксперимента HERMES при введении в рассмотрение валентного скалярного дикварка.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Ashman J. et al. A measurement of the spin asymmetry and determination of the structure function g1 in deep inelastic muon-proton scattering //Physics Letters B. – 1988. – T. 206. – № 2. – C. 364-370.

2. Santopinto E. Interacting quark-diquark model of baryons //Physical Review C. – 2005. – T. 72. – №. 2. – C. 022201.

3. Rodriguez-Aguilar B., Berdnikov Y. A. Parton Distribution Functions for diquarks based on an AdS/QCD quark-diquark nucleon model //arXiv preprint arXiv:2105.05884. – 2021.

4. Ball R. D. et al. Parton distributions with QED corrections //Nuclear Physics B. -2013. -T. 877. -N. 2. -C. 290-320.

5. Airapetian A. et al. Inclusive measurements of inelastic electron and positron scattering from unpolarized hydrogen and deuterium targets //Journal of High Energy Physics. – 2011. – T. 2011. – №. 5. – C. 1-40.

УДК 539.12

Ф.В. Степанов<sup>1</sup>, С.И. Воробьев<sup>2</sup>, А.Л. Геталов<sup>2</sup>, Г.В. Щербаков<sup>2</sup>, М. Балашою<sup>3,4</sup>, В.С. Лобин<sup>5</sup>, <sup>1</sup>Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого<sup>(•)</sup> <sup>2</sup> НИЦ «Курчатовский институт» - ПИЯФ, <sup>3</sup> Объединенный институт ядерных исследований, <sup>4</sup> Horia Hulubei National Institute of Physics and Nuclear Engineering, Bucharest, Romania, <sup>5</sup> ДИТИ НИЯУ МИФИ

# ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЕ ИССЛЕДОВАНИЕ ЭЛАСТОМЕРОВ С РАЗЛИЧНОЙ КОНЦЕНТРАЦИЕЙ НАНОЧАСТИЦ СоFe<sub>2</sub>O<sub>4</sub> С ПОМОЩЬЮ ПОЛЯРИЗОВАННЫХ МЮОНОВ

Введение. Мюонный метод исследования вещества (µSR-метод) – это мощный инструмент для изучения самого широкого диапазона свойств вещества, как в газовой фазе, так и в конденсированном состоянии. В настоящее время в России существует единственная работающая µSR-установка, расположенная на выходе мюонного канала синхроциклотрона СЦ-1000 в НИЦ «Курчатовский институт» (ПИЯФ). В данной работе µSR-метод используется для исследования магнитных свойств магнитореологических эластомеров, образцы которых были изготовлены в виде дисков диаметром 64 мм и толщиной 9 мм. В качестве матрицы использована силиконовая резина (silicon rubber (SR), Globasil AD 27 type, from Globalchimica SRL), в которую перед полимеризацией вводилась феррожидкость. **(Φ)** с 3% концентрацией магнитных наночастиц в воде Феррожидкость была ПАВ стабилизирована с использованием в качестве лодецилсульфат натрия  $CH_3(CH_2)_{11}SO_4Na$  с плотностью  $\rho = 1.01$  г/см<sup>3</sup> и лауриновой кислоты  $C_{11}H_{23}COOH$  с плотностью  $\rho = 0.88$  г/см<sup>3</sup>. Один мл феррожидкости содержал 0,17 г феррита кобальта, а на 1 г CoFe<sub>2</sub>O<sub>4</sub> приходилось 0,25 г ПАВ. Исследованный образец был синтезирован в институте технической химии УО РАН [1-5] со средним размером наночастиц D = 8,5 ± 0,1 нм.

Подготовлено два набора образцов с концентрацией 0, 5, 10 и 15% с неупорядоченной и с упорядоченной ориентацией магнитных моментов наночастиц CoFe<sub>2</sub>O<sub>4</sub>. Полимеризация образцов второго набора была поведена в магнитном поле 80 кА/м, перпендикулярном плоскости диска. Характеристики исследованных образцов приведены в таблице 1.

Эксперимент. Исследования проводились на µSR-установке [6], расположенной на выходе мюонного канала синхроциклотрона СЦ-1000 НИЦ «Курчатовский институт» - ПИЯФ. Измерялись временные спектры позитронов распада мюонов, остановившихся в образцах. Измеренные временные спектры описывались с помощью выражения:

$$N(t) = N_0 \exp(-t/\tau_{\mu}) \left[1 + a G(t)\right] + B,$$
(1)

<sup>&</sup>lt;sup>(•)</sup> Ф.В. Степанов, stepanov.fv@edu.spbstu.ru

где N<sub>0</sub> – нормировочная константа;  $\tau_{\mu}$  – время жизни мюона (2.197 мкс); *a* – асимметрия позитронов от распада мюонов, остановившихся в образце и G(t) – функция релаксации поляризации мюонов, остановившихся в образце. В – вклад от фона случайных совпадений. Величина и временная структура фона случайных совпадений (В) определялись из обработки событий начальной области спектра до t<sub>0</sub>.

Образец	Концентрация феррожидкости, %	Н, кА/м
$P_0$	0	0
$P_2$	5	0
P <sub>3</sub>	10	0
$P_4$	15	0
P <sub>2m</sub>	5	80
$P_{3m}$	10	80
$P_{4m}$	15	80

Табл. 1. Набор приготовленных образцов

Функция релаксации поляризации мюонов, остановившихся в образце G(t) во внешнем поле H, была выбрана в виде:

$$G(t) = \cos(2\pi F \cdot t + \varphi) \cdot \exp(-\lambda \cdot t)$$
(2)

В обработке основными искомыми параметрами были: а – асимметрия, λ – скорость затухания, F и φ – частота и фаза прецессии спина мюона. Все эти параметры сравнивались с аналогичными параметрами, полученными на образце меди (Cu).

На рис. 1 показано поведение асимметрии в зависимости от концентрации примеси наночастиц в образце. Видно, что проводящие свойства образцов не зависят от концентрации примеси. Во всех образцах больше половины остановившихся мюонов образуют мюоний и быстро теряют поляризацию за время меньше 9 нс.



Рис. 1. Зависимость амплитуды прецессии спина мюона от величины концентрации CoFe<sub>2</sub>O<sub>4</sub>



Рис. 2. Зависимость скорости релаксации поляризации мюона от концентрации наночастиц CoFe<sub>2</sub>O<sub>4</sub>: черные квадраты – Р образцы, синие треугольники – Рт образцы и красная точка – медный образец

Выстроенность магнитных моментов примесных наночастиц в  $P_m$  образцах не влияет на величину наблюдаемой асимметрии. На рис. 2 показано поведение параметра  $\lambda$  в зависимости от концентрации примесных магнитных наночастиц в образцах. Наблюдается устойчивый рост скорости релаксации поляризации мюонов, остановившихся в образце, по мере увеличения количества наночастиц CoFe<sub>2</sub>O<sub>4</sub> в исследуемых образцах. В образцах P<sub>m</sub> с упорядоченным состоянием магнитных моментов наночастиц наблюдается небольшое замедление роста параметра релаксации поляризации с увеличением количества примесных наночастиц.

На рис.3 показаны результаты измерения зависимости частоты прецессии спина мюона от концентрации наночастиц  $CoFe_2O_4$  при температуре 290К в магнитном поле H = 612 Гс. Видно, что диамагнитная силиконовая матрица с добавлением наночастиц  $CoFe_2O_4$  переходит в парамагнитное состояние.



Рис. 3. Зависимость частоты прецессии спина мюона от концентрации наночастиц CoFe<sub>2</sub>O<sub>4</sub> при температуре 290 К в магнитном поле H = 612 Гс: черные квадраты – Р образцы, синие треугольники – Р<sub>m</sub> образцы и красная точка – медный образец



Рис. 4. Поля на мюоне, определенные из частоты прецессии в зависимости от концентрации наночастиц CoFe<sub>2</sub>O<sub>4</sub> при температуре 290 К: черные квадраты – Р образцы, синие треугольники – Р<sub>m</sub> образцы и красная точка – медный образец

Заключение. µSR-методом было проведено исследование магнитных свойств эластомеров в зависимости от концентрации наночастиц СоFe<sub>2</sub>O<sub>4</sub> в магнитном поле 612Гс при температуре 290 К. Измерена величина магнитного поля, создаваемого однодоменными наночастицами СоFe<sub>2</sub>O<sub>4</sub>, которая увеличивается пропорционально концентрации наночастиц.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. A.V. Lebedev, S.N. Lysenko, Appl. Phys. Letters 95, 013508 (2009).

2. S.N. Lysenko, R.M. Yakushev, V.N. Strel'nikov, Yu.I. Gabdrakhimova, I.A. Borisova, Russian Journal of Applied Chemistry **83**(8), 1399 (2010).

3. A.V. Lebedev, S.N. Lysenko, J. Magn. Magn. Mater., 323, 1198 (2011).

4. R.M. Yakushev, S.N. Lysenko T.G. Tiunova et al., Colloid Journal, 75(2), 226 (2013).

5. S.N. Lysenko, A.V. Lebedev, S.A. Astaf'eva et al., Physica Scripta 95, 044007 (2020).

6. S.G. Barsov, S.I. Vorob'ev V.P. Koptev et al., Instruments and Experimental Techniques 50(6), 750(2007).

УДК 621.039

П.Р. Шаяхметова<sup>1</sup>, В.А. Бакаев<sup>1</sup>, А.М. Червяков<sup>2</sup> <sup>1</sup>Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого<sup>(•)</sup> <sup>2</sup>ГБУЗ «Санкт-Петербургский клинический научно-практический центр специализированных видов медицинской помощи (онкологический)»

# ПЛАНИРОВАНИЕ ДИСТАНЦИОННОГО ОБЛУЧЕНИЯ ПАЦИЕНТОВ МЕТОДОМ IMRT НА МЕДИЦИНСКОМ УСКОРИТЕЛЕ ЭЛЕКТРОНОВ

Введение. Данная работа посвящена методу дистанционной лучевой терапии IMRT (intencity modulated radiation therapy) лечения рака молочной железы на медицинском ускорителе электронов Varian TrueBeam с максимальной энергией тормозного фотонного

<sup>&</sup>lt;sup>(•)</sup> П.Р. Шаяхметова, polya\_sh@mail.ru

излучения 6 МэВ. IMRT – метод обратного планирования изодозного распределения с помощью модуляции поперечного распределения флюенса [1]. Модуляция распределения флюенса является трудоемкой задачей для ручного планирования, поэтому для ее реализации используются математические алгоритмы в программе оптимизации.

Программа оптимизации дозиметрического планирования. Расчет дозиметрического плана методом IMRT происходит с учетом клинических целей в процессе обратной оптимизации. Обратная оптимизация – процесс изменения параметров пучка в ходе итерации для поиска наиболее близкого решения предписанного распределения дозы. Итерация – цикл, в котором изменяются параметры пучка в связи с рассчитанной дозой. На первом этапе оптимизации рассчитывается идеальный флюенс и, исходя из идеального флюенса, программа распределяет положение лепестков коллиматора. На втором этапе программа учитывает гетерогенность тела пациента и пересчитать флюенс с ее учетом. На заключительном этапе оптимизации происходит расчет изодозного распределения с учетом технических особенностей ускорителя, параметры которого занесены в программу дозиметрического планирования. Оценка плана проводится программой оптимизации с использованием функции стоимости [2]. Функция стоимости (параметр  $C_n$  в формуле 1) – целевая функция для математического формулирования задачи плана. Таким образом, целью для оптимизации является минимизация суммы квадрата разности между предписанной и рассчитанной дозой.

$$C_n = \left[ \left(\frac{1}{N}\right) \sum_{i=1}^N W_i (D_{0i} - D_{ni})^2 \right]^{1/2}, (1)$$

где N – число дозовых точек, n – номер итерации, i – точка в теле пациента,  $D_0$  – предписанная поглощенная доза в точке i,  $D_n$  – достигнутая доза для n итерации в точке i,  $W_i$  – взвешивающий коэффициент рассматриваемой структуры, определяющий ее приоритет по сравнению с другими структурами в теле пациента для программы оптимизации.

В идеальном случае все ограничения достигнуты и  $C_n$  равно нулю. Решения, уменьшающие функцию стоимости, будут приняты оптимизатором. Оптимизация может быть остановлена, когда в последующих итерациях значение функции стоимости остаются неизменными. С введением дополнительных параметров процесс расчетов длится дольше, но достигнуть предписанных целей проще, так как появляется больше возможностей для выбора оптимального изодозного распределения.

Ход работы. В данной исследовательской работе дозиметрические планы облучения молочной железы посчитаны в системе планирования Eclipse с применением алгоритма Acuros, который используется для учета гетерогенности тела пациента. Из-за наличия гетерогенности в теле пациента изодозное распределение выглядит неравномерно и появляются локальные максимумы и минимумы дозы, которые успешно минимизируются или вовсе удаляются с помощью доступных инструментов программы оптимизации.

Оптимальным выбором облучения молочной железы являются два пучка тормозного излучения с углом разворота между осями пучков 160-200 градусов. Геометрия этих пучков зависит от анатомических особенностей пациента. При использовании более чем двух пучков происходит распространение малых доз на здоровые ткани и органы пациента. Дополнительный третий пучок используется только в случаях сложного геометрического расположения облучаемого объема и с целью сохранения критически важных органов пациента. Для дополнительного уменьшения распространения дозы на окружающие ткани в программе оптимизации плана используется инструмент NTO (normal tissue objective) [3]. Манипулировать изодозным распределением можно с помощью таких параметров NTO: начальная доза – верхнее ограничение дозы, которое не должно превышаться за пределами области PTV (planning target volume, планируемый облучаемый объем), конечная доза – минимальное ограничение дозы, шаг падения дозы от начальной до конечной и расстояние от границы PTV, за пределами которой не должна наблюдаться доза больше обозначенного

верхнего отграничения дозы. Необходимо помнить, что заданные параметры NTO должны быть технически выполнимы медицинским ускорителем.

Клинические цели являются показателем выполнения дозиметрического планирования. Выбор клинических целей определяется международными рекомендациями [4]. Смысл достижения клинических целей – уменьшение постлучевых осложнений и минимизация вероятности индуцированного рака у пациентов. В случае дозиметрического планирования облучения молочной железы в режиме фракционирования 25 фракций по 2 Гр с суммарной поглощенной дозой 50 Гр клиническими целями являются: ограничение лучевой нагрузки пациента дозой 5 Гр, ограничение максимума дозы в теле пациента, ограничение лучевой нагрузки на сердце дозой 20 Гр, если оно расположено с облучаемой стороны (строго меньше 10% объема сердца), ограничение лучевой нагрузки на легкое с облучаемой стороны дозой в 20 Гр (строго меньше 30%, рекомендовано меньше 15% объема легкого), охват РТV 95%-й изодозой должен составлять больше 95% РТV, количество 105% и 107% максимумов должно составлять соответственно менее 5% и 2% РТV.

Полученные результаты. В ходе исследовательской работы были проанализированы 11 дозиметрических планов облучения молочной железы методом IMRT в режиме фракционирования 25 фракций по 2 Гр с суммарной поглощенной дозой 50 Гр. Результаты дозиметрического планирования сведены в табл.1 и 2.

Структура	No	1	2	3	4	5
	Клинические цели	Полученные значения дозиметрического				
	для структуры	планирования				
PTV молочной	V 107% < 2%	0	0	0.01	0.00	0.00
железы	V 105% < 5%	1.33	0.63	2.11	1.11	1.27
	V 95% > 95%	98.46	97.04	96.86	98.42	99.18
Молочная железа с необлучаемой стороны	V 5 Γp < 15%	4.26	5.09	8.97	5.11	24.08
Легкое с облучаемой	Dmean < 13 Гр	7.20	9.05	8.32	7.82	7.99
стороны	V 20 Γp < 30%	11.82	16.63	15.57	15.08	15.20
	V 5 Γp < 50%	30.81	29.28	27.70	27.58	31.91

Табл. 1. Выполнение клинических целей при дозиметрическом планировании облучения тормозным излучением правой молочной железы методом IMRT для пяти клинических случаев.

Табл. 2. Выполнение клинических целей при дозиметрическом планировании облучения тормозным излучением левой молочной железы методом IMRT для шести клинических случаев.

Структура	N⁰	1	2	3	4	5	6
	Клинические цели	Полученные значения дозиметрического планирования					
	для структуры						
РТУ молочной	V 107% < 2%	0.01	0.00	0.00	0.00	0.00	0.01
железы	V 105% < 5%	0.87	2.29	0.09	2.27	1.09	0.92
	V 95% > 95%	94.60	96.55	97.24	96.39	97.03	97.51
Молочная	V 5 Γp < 15%	8.11	10.09	6.00	9.79	2.66	10.76
железа с							
необлучаемой							
стороны							
Сердце	V 20 Γp < 10%	9.48	7.83	7.56	8.31	6.89	9.64
	V 5 Гр < 35%	19.55	30.47	17.40	26.93	16.76	24.72
Легкое с	Dmean < 13 Γp	10.48	9.18	10.50	8.41	8.56	9.17
облучаемой	V 20 Γp < 30%	19.74	16.88	22.00	14.81	16.78	17.24
стороны	V 5 Γp < 50%	35.09	29.82	35.38	32.32	26.72	31.93

Из таблиц 1 и 2 следует:  $V_{107\%} < 2\%$  - объем 107% изодозой от суммарной поглощенной дозы 50 Гр должен занимать меньше 2% РТV молочной железы,  $V_{105\%} < 5\%$  - объем 105% изодозы от 50 Гр должен занимать меньше 5% РТV молочной железы,  $V_{95\%} > 95\%$  - объем 95% изодозы от 50 Гр должен занимать больше 95% РТV молочной железы.  $V_{5\Gamma p} < 15\%$  - объем дозы 5 Гр должен занимать меньше 15% необлучаемой молочной железы.  $V_{20\Gamma p} < 10\%$  – объем дозы 20 Гр должен занимать меньше 10% объема сердца,  $V_{5\Gamma p} < 35\%$  - объем дозы 5 Гр должен занимать меньше 10% объема сердца,  $V_{5\Gamma p} < 35\%$  - объем дозы 5 Гр должен занимать меньше 10% объема сердца,  $V_{20\Gamma p} < 15\%$  - объем дозы 20 Гр должен занимать меньше 15% объема сердца.  $D_{mean}$  – средняя доза,  $V_{20\Gamma p} < 15\%$  - объем дозы 20 Грей должен занимать меньше 15% объема легкого.

Выводы. В данной исследовательской работе была изучена программа оптимизации системы планирования Eclipse для дозиметрического планирования лучевой терапии методом IMRT на ускорителе электронов Varian TrueBeam. В ходе работы были проанализированы 11 клинических случаев дозиметрического планирования облучения молочной железы, из которых 5 случаев планирования облучения правой молочной железы и 6 случаев планирования облучения левой молочной железы. Во всех представленных клинических случаях с использованием средств программы оптимизации удалось выполнить клинические цели и прийти к равномерному изодозному распределению с минимальной нагрузкой поглощенной дозы на органы риска и с наименьшим накоплением дозы в здоровых тканях. В результате работы все представленные дозиметрические планы облучения молочной железы были одобрены радиотерапевтом и применены в клинической практике.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Климанов В. А. Радиобиологическое и дозиметрическое планирование лучевой и радионуклидной терапии Часть 2. Лучевая терапия пучками протонов, ионов, нейтронов и пучками с модулированной интенсивностью, стереотаксис, брахитерапия, радионуклидная терапия, оптимизация, гарантия качества. Учебное пособие // В. А. Климанов. – М.: НИЯУ МИФИ, 2011.

2. Emilie Soisson. IMRT/VMAT: Theory and Definitions // The University of Vermont, 2019.

L.Indrayani et al. "Normal tissue objective (NTO) tool in Eclipse treatment planning system for dose distribution optimization" // Polish Journal of Medical Physics and Engineering. – 2022. –Vol.28. –P.99-106.
 S.M Bentzen et al. "Quantitative Analyses of Normal Tissue Effects in the Clinic"// International journal of radiation oncology, biology, physics. – 2010. – Vol. 76 Issue 3. –P.S3-S9.

### УДК 539.12

А.А. Васильев<sup>1</sup>, И.Г. Голиков<sup>2</sup>, Ф.А. Пак<sup>1</sup>, А.И. Халиков<sup>1</sup>, И.И. Шевченко<sup>2</sup> <sup>1</sup>«Петербургский институт ядерной физики им. Б.П. Константинова» Национального исследовательского центра «Курчатовский институт» <sup>2</sup>Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого<sup>(•)</sup>

## ИСПОЛЬЗОВАНИЕ РАДИОХРОМНЫХ ДОЗИМЕТРИЧЕСКИХ ПЛЕНОК ДЛЯ ИЗМЕРЕНИЙ ПРОФИЛЯ ПУЧКА ПРОТОНОВ С ЭНЕРГИЕЙ 1000 МЭВ

Актуальность. На протонном синхроциклотроне СЦ-1000 [1] НИЦ «Курчатовский институт» – ПИЯФ с энергией протонов 1000 МэВ с 1975 по 2013 осуществляются исследования возможности применения пучка протонов в лучевой терапии [2].

Важной задачей при планировании лучевой терапии, в частности терапии протонами с энергией 1000 МэВ, является моделирование и расчет дозных полей. Для этого необходимо знать распределение дозы протонов в пучке.

<sup>&</sup>lt;sup>(•)</sup> И.И. Шевченко, shevchenko.ii@edu.spbstu.ru

Цели и задачи работы. Целью данной работы является измерения профиля пучка протонов. Ранее для экспериментального определения дозных распределений на синхроциклотроне использовали детекторы LiF диаметром 3 мм и толщиной 1 мм [3]. В настоящей работе применены радиохромные пленки. Преимущество метода заключается в более высоком пространственном разрешении.

Методика исследования. В эксперименте использовались радиохромные пленки Gafchromic ebt 2 [4]. Для определения нулевого значения проводилось сканирование пленок до облучения. На рис. 1 приведено распределение отклика сканера Epson 3200 fhoto, Q по площади необлученной пленки размером 25х25 мм. Среднее значение отклика фона – 8700, абсолютное среднеквадратичное отклонение от среднего - 130, относительное - 1,5%. Флуктуация фона является неустранимой погрешностью измерений. Параметры сканирования использовались как пленка позитив 72 dpi, цветной 48 бит, без цветокоррекции. Значения распределения отклика сканера брались из матрицы данных, построенной с помощью программы численного анализа данных и научной графики Origin рго [5]. В программе использовался инструмент построения профиля изображения/контура, который позволяет просматривать и профилировать матричные или виртуальные матричные данные на графике изображения, контурном графике.



Рис. 1. Распределение отклика сканера необлученной пленки

Для калибровки по энергии использовались шесть радиохромных пленок, облученных различными дозами (табл. 1).

Чувствительность детектора, *s*, определена как отношение отклика, *Q*, к дозе, *D*. Зависимость дозы от отклика сканера D(Q) хорошо аппроксимируется степенной функцией  $D=a\cdot Q^b$ 

Параметры *a* и *b* находились из условия минимального среднеквадратичного расхождения аппроксимации с экспериментом. Получены значения: *a*=2,04е–06; *b*=1,587; при этом среднеквадратичная относительная ошибка составила 2,7%, среднеквадратичная абсолютная ошибка 0,10 Гр. Функция с подобранными значениями параметров показана на

рис. 2. Кружками обозначены измеренные значения доз. Абсолютные и относительные расхождения аппроксимации с экспериментальными точками приведены в табл. 1.

Используя калибровочную функцию, можно сосчитать, что флуктуация фона соответствует дозе 5 мГр.

<i>D</i> , Гр	Q	<i>s</i> , 1/Гр	Δ, Γp	δ, %
45	42400	940	0,005	0,01
40	39500	980	0,02	0,05
12	18300	1520	-0,14	-1,2
10	17000	1620	0,05	0,50
4	9500	2370	0,19	4,8
2	5800	2900	-0,08	-4,3

Табл. 1. Калибровка по энергии

Для построения распределения дозы в поперечном сечении пучка протонов с энергией 1000 МэВ использована пленка размером 25х25 мм. Доза в центре пучка определена независимым образом и составила 45 Гр.



Рис. 2. Калибровка по энергии.

Распределение дозы внутри сформированного пучка принято описывать распределением Гаусса. То есть, распределение дозы в плоскости *XOZ* можно выразить в следующем виде:

$$D(x,z) = D_m \exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma_x^2} - \frac{z^2}{2\sigma_z^2}\right)$$
(1)

где  $D_{\rm m}$  – доза на оси пучка;  $\sigma$ =0,4247\**FWHM* (здесь *FWHM* – полная ширина на половине высоты распределения).

Параметры функции Гаусса *FWHMX* и *FWHMZ* определены методом максимального правдоподобия. Получены значения: *FWHMX*=8,8 мм; *FWHMZ*=9,5 мм.

Среднеквадратичное отклонение экспериментальных значений дозы от рассчитанных по формуле равно 0,81 Гр. Что составляет 1,8% от максимальной дозы. На рисунке 3 показаны расчетные и экспериментальные распределения дозы D(x) при z=0 и D(z) при x=0. Основная причина расхождения – статистическая погрешность эксперимента. Однако, на

расстоянии более *FWHM* от центра пучка наблюдается систематическое превышение функции Гаусса над экспериментальными значениями. В дальнейшем предполагается модифицировать распределение для более точного описания пучка.



Рис. 3. Расчетные и экспериментальные распределения дозы

Выводы. В работе проведены измерения профиля пучка протонов на синхроциклотроне с энергией 1000 МэВ с помощью радиохромных дозиметрических пленок. Эти пленки являются удобным инструментом для получения распределения дозы с высоким пространственным разрешением. Показано, что функция Гаусса является не совсем точной аппроксимацией распределения. Возможно, внесение поправок к этой функции улучшит точность описания пучка.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Брожик Д.С. и др. Статус медицинского протонного комплекса НИЦ «Курчатовский институт»– ПИЯФ. Препринт ПИЯФ №3045, 2020. 47 с.

2. Гранов А. М., Тютин Л.А., Шалек Р.А. и др. Сорокалетний опыт клинического применения пучка протонов с энергией 1000 МэВ на базе синхротрона Петербургского института ядерной физики им. Б.П. Константинова // Мед. физика. - 2016. - №2(70). - С. 10-17.

3. А.А. Васильев и др. «Расчет глубинных дозовых распределений, создаваемых пучком протонов с энергией 1000 МэВ при ротационном облучении».// Мед. физика. -2020 .- №4 (88). – С. 5-12.

4. Gafchromic ebt 2 Scan Handling Guide, ISP, Advanced materials 2011, Rev.1

5. Программное обеспечение для анализа данных: [Электронный pecypc] URL: https://www.originlab.com/origin (Дата обращения 03.03.2023)

## СЕКЦИЯ «ФИЗИКА ПЛАЗМЫ И КОСМОСА»

УДК 524.354.6

## УМЕНЬШЕНИЕ МОДУЛЯ СДВИГА ВНУТРЕННЕЙ КОРЫ НЕЙТРОННЫХ ЗВЕЗД ИЗ-ЗА ЭФФЕКТОВ КОНЕЧНОГО РАЗМЕРА ЯДЕР

Нейтронные звезды – уникальные «жители» нашей Вселенной, так как они являются сверхплотными, релятивистскими объектами со сверхсильными магнитными полями [1]. Их наблюдательные проявления очень богаты (см, например, [1]). Для интерпретации некоторых наблюдений нейтронных звезд привлекают модели, основанные на упругих свойствах внешних слоев нейтронных звезд – коры. Например, квазипериодические осцилляции в хвосте вспышек магнитаров связывают с торсионными (упругими сдвиговыми) колебаниями коры, возможно, модифицированными магнитным полем [2]. Напомним, кора – внешний кристаллизованный слой нейтронных звезд. В ней выделяют внешнюю кору (кристалл, в узлах которого находятся ядра, с электронным фоном) и внутреннюю кору (где присутствуют также несвязанные в ядрах нейтроны) [1].

Таким образом, изучение упругих свойств коры занимает важное место в физике нейтронных звезд. Оно возможно только на основе теоретических моделей. Кору обычно считают изотропным поликристаллом [3]. Данное предположение позволяет описывать упругие свойства только двумя независимыми модулями упругости: модулем сжатия и эффективным модулем сдвига. Первый из них легко вычисляется, если известно уравнение состояния (зависимость давления от плотности), в то время как определение эффективного модуля сдвига, описывающего отклик поликристалла при деформации без изменения объема, требует дополнительного исследования. Следует отметить, что эффективный модуль сдвига зависит от корреляций в ориентациях кристаллитов и в общем случае его нельзя однозначно вычислить, даже если известны упругие свойства отдельных кристаллитов [4]. В астрофизических приложениях обычно применяют усреднение по Фойту, которое сводится к линейной комбинации модулей упругости монокристаллов и, как можно показать, соответствует верхнему пределу на эффективный модуль сдвига [3].

Традиционно модули упругости монокристаллов и эффективный модуль сдвига рассчитывают в рамках модели кулоновского кристалла (точечные ядра на однородном фоне электронов) [5-7], известны также поправки на электронное экранирование [8-11].

Однако приближение точечных ядер является слишком грубым для наиболее глубоких слоев внутренней коры, где размеры ядер сопоставимы с расстоянием между ними [12,13]. В этой работе мы исследуем влияние конечных размеров ядер на модуль сдвига. Для простоты мы будем пренебрегать движением ядер, считая их расположенными точно в узлах решетки.

Для вычисления модуля сдвига мы применим к кристаллу деформацию, задаваемую преобразованием  $x \to x/(1+\varepsilon)^{0.5}$ ,  $y \to y/(1+\varepsilon)^{0.5}$ ,  $z \to z(1+\varepsilon)$ , где  $\varepsilon$  – параметр деформации коры. Затем рассчитаем разность плотностей энергии деформированного и начального состояний (плотность энергии деформации  $\delta e$ ) и воспользуемся известным соотношением, связывающим  $\delta e$  с модулем сдвига:

$$\delta e = \frac{3}{2}\mu\varepsilon^2. \tag{1}$$

<sup>&</sup>lt;sup>(•)</sup> Н.А. Земляков, zemnic5@gmail.com

Изменение энергии кристалла при деформации можно рассчитать, рассматривая деформацию элементарных ячеек, а значит, зная плотности энергий элементарных ячеек в начальном и деформированном состояниях, можно найти модуль сдвига по формуле (1).

Для вычисления плотностей энергии ячеек при конечном размере ядер необходимо учитывать энергию внутриядерного взаимодействия, которую мы будем описывать в рамках сжимаемой капельной модели (см, например, [12]). При ее применении для исследования свойств коры нейтронной звезды элементарные ячейки (сложный многогранник) недеформированной коры часто заменяют на сферы. По аналогии при рассмотрении деформированной коры мы будем заменять ячейки на эллипсоиды вращения, которые можно рассматривать как приближение для формы истинной ячейки в деформированном состоянии или как результат деформации исходной ячейки, аппроксимированной сферой.

Для обоснования этого приближения применим его для точечных ядер. В таком случае при деформации меняется только кулоновская энергия, ее изменение составляет

$$\delta e = \frac{9}{50} \frac{(Ze)^2}{r_c V_c} \varepsilon^2. \tag{2}$$

Здесь Ze – заряд ядра, r<sub>c</sub> и V<sub>c</sub> – радиус и объем сферической ячейки, e – элементарный заряд. Из формул (1) и (2) следует, что модуль сдвига коры равен

$$\mu = \frac{3}{25} \frac{(Ze)^2}{r_c V_c},\tag{3}$$

что с точностью до четвертого знака после запятой равно эффективному модулю сдвига однокомпонентных кулоновских кристаллов [7].

Такая высокая точность позволяет использовать описанный выше подход для исследования влияния конечных размеров ядер на модуль сдвига. Для начала предположим, что кора состоит из сферических ядер конечного размера, сохраняющих свою форму при деформации коры. Однако в этом случае прямое вычисление показывает, что изменение энергии при деформации оказывается в точности совпадающим с (2), а значит, и модуль сдвига не отличается от случая точечных ядер.

Тем не менее, как мы покажем ниже, конечный размер атомных ядер сказывается на модуле упругости. Физическая причина этого состоит в том, что при деформации коры вблизи узла решетки, где находится атомное ядро, наводится квадрупольный электростатический потенциал. Наличие внешнего квадрупольного потенциала приводит к изменению формы ядра. В этой работе мы оценим этот эффект в рамках капельной модели. Для этого предположим, что ядро приобретает форму эллипсоида вращения с полуосями  $R(1 + \varepsilon_p)$  и  $R/(1 + \varepsilon_p)^{0.5}$ , где R – радиус изначально сферического ядра, а параметр деформации  $\varepsilon_p$  будет подбираться для минимизации энергии. Вводя фактор заполнения  $u = (R/r_c)^3$ , получим общее выражения для кулоновской энергии с точностью до  $O(\varepsilon^2)$ :

$$E_{C} = \frac{3}{5} \frac{(Ze)^{2}}{R} \left(1 - \frac{1}{5}\varepsilon_{p}^{2}\right) - \frac{9}{10} \frac{(Ze)^{2}}{r_{c}} \left(1 - \frac{1}{5}\varepsilon^{2}\right) - \frac{9}{25} \frac{(Ze)^{2}}{R} u\varepsilon_{p}\varepsilon + \frac{3}{10} \frac{(Ze)^{2}}{R} u\left(1 + \varepsilon_{p}^{2}\right).$$
(4)

Из-за увеличения поверхности ядра также изменяется поверхностная энергия, которая становится равна (введено поверхностное натяжение о)

$$E_s = 4\pi\sigma R^2 \left(1 + \frac{2}{5}\varepsilon_p^2\right). \tag{5}$$

Явную зависимость от поверхностного натяжения можно исключить, воспользовавшись теоремой вириала, выполняющейся для недеформированного состояния [14]:

$$4\pi\sigma R^2 = 2\frac{3}{5}\frac{(Ze)^2}{R} \left(1 - \frac{3}{2}u^{1/3} + \frac{1}{2}u\right).$$
(6)

Комбинируя формулы (4)-(6) и произведя минимизацию по параметру  $\varepsilon_p$ , мы получаем модуль сдвига, учитывающий изменение формы ядер при деформации кристалла:

$$\mu = \frac{3}{25} \frac{(\text{Ze})^2}{r_c V_c} \left( 1 - \frac{u^{5/3}}{2 + 3u - 4u^{1/3}} \right).$$

Данное выражение отличается от формулы (3) наличием дополнительного множителя в скобках, который с увеличением фактора заполнения уменьшает модуль сдвига. В наиболее глубоких слоях коры  $u \approx 0.2$ , а значит, уменьшение модуля сдвига достигает 25% по сравнению с приближением точечных ядер.

В данной работе мы показали, что при деформации коры изменяется равновесная форма атомных ядер. Это происходит из-за наведения вблизи узлов кристаллической решетки квадрупольного потенциала и ведет к снижению модуля сдвига внутренней коры. Полученные результаты не зависят от конкретного выбора модели межнуклонного потенциала.

В недавней работе [15] было проведено численное исследование упругих коэффициентов с учетом конечных размеров атомных ядер. Расчеты были основаны на релятивистской теории среднего поля в приближении Томаса-Ферми и качественно согласуются с нашими результатами: модуль сдвига уменьшается с ростом и. Однако существуют количественные отличия. Их причиной может являться использование нами сглаженной формы ячейки для описания деформированного состояния. Мы планируем проверить это в последующих работах. Однако нельзя исключать и численной ошибки в работе [15]: предложенная в ней аппроксимация не воспроизводит хорошо известные упругие параметры кулоновских кристаллов, соответствующие пределу для точечных ядер.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Haensel P., Potekhin A., Yakovlev D. Neutron Stars 1: Equation of State and Structure. – New York: Springer, 2007. – 640 pp.

2. Kozhberov A. A., Yakovlev D. G. Deformed crystals and torsional oscillations of neutron star crust //Monthly Notices of the Royal Astronomical Society. – 2020. – Vol. 498. – P. 5149-5158.

3. Kobyakov D., Pethick C. J. Elastic properties of polycrystalline dense matter //Monthly Notices of the Royal Astronomical Society: Letters. – 2015. – Vol. 449. – P. L110-L112.

4. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Теория упругости. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2007. – 264 с.

5. Ogata S., Ichimaru S. First-principles calculations of shear moduli for Monte Carlo–simulated Coulomb solids //Physical review A. – 1990. – Vol. 42. – P. 4867-4870.

6. Baiko D. A. Shear modulus of neutron star crust //Monthly Notices of the Royal Astronomical Society. – 2011. – Vol. 416. – P. 22-31.

7. Chugunov A. I. Neutron star crust in Voigt approximation: general symmetry of the stress–strain tensor and an universal estimate for the effective shear modulus //Monthly Notices of the Royal Astronomical Society: Letters. – 2020. – Vol. 500. – P. L17-L21.

8. Baiko D. A. Screening corrections to the Coulomb crystal elastic moduli //Monthly Notices of the Royal Astronomical Society. – 2015. – Vol. 451. – P. 3055-3060.

9. Kozhberov A. A. Elastic properties of Yukawa crystals //Physics of Plasmas. - 2022. - Vol. 29. - P. 043701.

10. Horowitz C. J., Hughto J. Molecular dynamics simulation of shear moduli for Coulomb crystals //arXiv preprint arXiv:0812.2650. – 2008.

11. Chugunov A. I. Neutron star crust in Voigt approximation II: general formula for electron screening correction for effective shear modulus //Monthly Notices of the Royal Astronomical Society. – 2022. – Vol. 517. – P. 4607-4611.

12. Douchin F., Haensel P. Inner edge of neutron-star crust with SLy effective nucleon-nucleon interactions // Physics Letters B. – 2000. – Vol. 485. – P. 107–114.

13. Pearson J. M., Chamel N., Potekhin A. Y. Unified equations of state for cold nonaccreting neutron stars with Brussels-Montreal functionals. II. Pasta phases in semiclassical approximation //Physical Review C. -2020. - Vol. 101. - P. 015802.

14. Baym G., Bethe H. A., Pethick C. J. Neutron star matter //Nuclear Physics A. – 1971. –Vol. 175. – P. 225-271.

15. Xia C. J., Maruyama T., Yasutake N., Tatsumi T., Zhang Y. X. Elastic properties of nuclear pasta in a fully three-dimensional geometry //Physics Letters B. – 2023. – Vol. 839. – P. 137769.

#### УДК 523.43-1/-8

А.Ю. Меркулова<sup>1</sup>, А.К. Павлов<sup>1,2</sup>

<sup>1</sup>Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого<sup>(•)</sup> <sup>2</sup>Физико-технический институт им. А.Ф. Иоффе РАН

# ОБРАЗОВАНИЕ КЛАТРАТНЫХ СОЕДИНЕНИЙ СО<sub>2</sub>+О<sub>3</sub>+О<sub>2</sub> КАК ПРИЧИНА СЕЗОННЫХ ВАРИАЦИЙ КИСЛОРОДА В АТМОСФЕРЕ МАРСА

Введение. С помощью инструмента «The Sample Analysis at Mars» марсохода Марсианской научной лаборатории Curiosity среднегодовой состав в кратере Гейла был измерен как 95,1% углекислого газа, 2,59% азота, 1,94% аргона, 0,161% кислорода и 0,058% оксида углерода. Однако наблюдалось, что содержания некоторых из этих газов меняются до 40% в течение года из-за сезонного цикла. Азот и аргон следуют за изменениями давления, но с задержкой, что указывает на то, что перенос атмосферы от полюса к полюсу происходит в более быстром масштабе времени, чем смешивание компонентов. Было замечено, что кислород демонстрирует значительную сезонную и межгодовую изменчивость, что указывает на неизвестный атмосферный или поверхностный процесс [1].

Измерения проводились в период с 31 по 36 марсианский год, период измерений – ежедневно. По численным значениям измерений, которые предоставлены авторами [1] построен график содержания кислорода за указанный период (Рис.1). В течение весеннелетнего периода количество кислорода повышается на 30%, а к осени снижается до предсказанных модельных значений.



Рис. 1. Содержание кислорода (ppm) в течение измеряемого периода (31 – 36 марсианский год).

<sup>&</sup>lt;sup>(•)</sup>А.Ю. Меркулова, alinamer@icloud.com

Цель работы. Рассмотреть в качестве возможной причины возникновения сезонных вариаций кислорода образование клатратных соединений  $CO_2+O_3+O_2$  зимой в сезонных полярных шапках. Рассчитать количество озона, которое можно включить в клатратное соединение и сравнить с массой, которая необходима для обеспечения вариаций кислорода.

Одним из источников кислорода на Марсе является озон, согласно уравнению:

 $O_3 + hv \rightarrow O_2$ 

Клатратные гидраты – соединения включения, состоящие из молекул «хозяина», которые образуют пространственную кристаллическую решетку, и молекул - «гостей», включенных в полости этой решетки.

Каждый марсианский год до одной трети массы CO<sub>2</sub> атмосферы взаимодействует с полярной поверхностью в процессе сезонной конденсации/сублимации [2]. Зимой, когда температура падает ниже точки конденсации CO<sub>2</sub>, CO<sub>2</sub> затвердевает и накапливается в виде снега или инея в полярных регионах Марса. Весной CO<sub>2</sub> сублимируется обратно в атмосферу [3].

При атмосферном давлении на Марсе 0,6 кПа температура, при которой гидраты стабильны, составляет 152,8 К. Поскольку зимой температура поверхности на южной полярной шапке может достигать 148 К, образование клатрата с преобладанием CO<sub>2</sub> возможно зимой. Поскольку летняя температура в большинстве районов Марса намного выше 160 К, большая часть этих гидратов диссоциирует. Тем не менее, стабильные гидраты могут сохраняться в течение нескольких сезонных циклов в верхней или внутри южной части атмосферы Марса [4].

Лабораторные эксперименты показывают, что твердый диоксид углерода является эффективной ловушкой для озона при температурах до 156 К. Спектры поглощения озона при ультрафиолетовом отражении в твердом диоксиде углерода при 127 К указывают на то, что озон, наблюдаемый над полярной шапкой Марса, может быть захвачен твердым диоксидом углерода [5].

Для расчета массы озона в клатратном соединении использовалась термодинамическая модель клатрата CO<sub>2</sub>+O<sub>3</sub>+O<sub>2</sub> [6].

Массовая доля озона в гидрате вычисляется, предполагая полное заполнение ячеек молекулами CO<sub>2</sub>:

$$\omega_{O_3} = \frac{16\Theta_{O_3}M_{O_3}}{16\Theta_{O_3}M_{O_3} + 16\Theta_{O_2}M_{O_2} + 8M_{CO_2}} \cdot 100\%$$

M – молярные массы,  $\Theta_{ii}$  - заполнение клетки гостевым компонентом j в клетке типа i.

Заполняемость клетки рассчитывается, используя аналогию между адсорбцией газа в гидрате и моделью изотермической адсорбции Ленгмюра:

$$\Theta_{O_3} = \frac{C_{O_3} P_{O_3}}{1 + C_{O_3} P_{O_3} + C_{O_2} P_{O_2}}$$

Р – парциальные давления озона и кислорода, где С<sub>іj</sub> — постоянная Ленгмюра гостевого компонента ј для клетки типа i.

Предполагается, что и клетка, и гостевая молекула имеют сферическую форму, а гостевая молекула расположена в центре клетки. Тогда постоянная Ленгмюра определяется выражением:

$$C = \frac{4\pi}{k_B T} \int_{0}^{k-a} exp\left(-\frac{w(r)}{k_B T}\right) r^2 dr$$

r – расстояние от центра клетки, R — радиус клетки, если она сферическая. w(r) называется клеточным потенциалом, который рассчитывается по модели Леннарда-Джонса.

$$w(r) = 2z\varepsilon \left[ \frac{\sigma^{12}}{R^{11}r} \left( \delta^{10} + \frac{a}{R} \delta^{11} \right) + \frac{\sigma^6}{R^5 r} \left( \delta^4 + \frac{a}{R} \delta^5 \right) \right]$$
$$\delta^N = \frac{1}{N} \left[ \left( 1 - \frac{r}{R} - \frac{a}{R} \right)^{-N} - \left( 1 + \frac{r}{R} - \frac{a}{R} \right)^{-N} \right]$$

*а, є, σ–* параметры потенциальной модели Кихара, *z–* координационное число клетки. Массовая доля озона в гидрате:

 $\omega_{O_3} \approx 0,13 \%$ 

Массовая доля кислорода в гидрате:

$$\omega_{O_2} \approx 8,6.10^{-5}$$
 %

В клатрат может перейти 1/3 атмосферы CO<sub>2</sub>. Следовательно, масса озона, которую можно включить в клатрат:

$$m_{O_3} \approx 2,3 \cdot 10^{12}$$
 кг

Масса кислорода, которую можно включить в клатрат:

Для обеспечения сезонных вариаций кислорода нам необходимо  $2 \cdot 10^{18}$ мол/см<sup>2</sup> озона за марсианскую зиму ( $\geq 10^7$  сек). На поверхность Марса будет осуществляться сток озона с включением его в клатратное соединение. Накопление озона будет формироваться благодаря переносам озона из экваториальной области в полярные шапки.

Общая скорость поступления озона в сезонную полярную шапку составит:

Площадь сезонной полярной шапки, в которой замораживается СО<sub>2</sub> вместе с озоном:

$$S=3,14\cdot10^{18}$$
 cm<sup>2</sup>

Масса одной молекулы озона 8·10<sup>-26</sup> кг. Отсюда скорость поступления озона в пересчете на массу и с учетом площади:

$$v = 5 \cdot 10^4 \text{ кг/сек}$$

Необходимое количество озона для обеспечения сезонных вариаций кислорода:

Выводы. Масса озона, включенная в клатратное соединение, составляет  $2,3 \cdot 10^{12}$  кг. Приведенные оценки показывают, что данной массы хватает для обеспечения обнаруженных сезонных вариаций кислорода. При повышении температуры весной клатратное соединение диссоциирует и высвобождается сохраненный ранее озон, который немедленно под действием ультрафиолетового солнечного излучения распадается до кислорода. Следовательно, процесс образования клатратного соединения  $CO_2+O_3+O_2$  в сезонных вариаций кислорода. Данный процесс также объясняет не только повышение содержания кислорода, но и его снижение. В дальнейшем требуется подтверждение данной теории путем использования трехмерной фотохимической модели атмосферы Марса.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Trainer M. G., Wong M. H., McConnochie T. H. Seasonal Variations in Atmospheric Composition as Measured in Gale Crater, Mars. Journal of Geophysical Research: Planets, 2019, vol. 24, no. 11, pp. 3000-3024. DOI: 10.1029/2019JE006175.

2. Leighton R.B., Murray B.C. Behavior of carbon dioxide and other volatiles on Mars. Science, 1966, vol. 153, no. 3732, pp. 136-144. DOI: 10.1126/science.153.3732.136.

3. Miller S. L., Smythe W. D. Carbon Dioxide Clathrate in the Martian Ice Cap. Science, 1970, vol. 170, no. 3957, pp. 531-533. DOI: 10.1126/science.170.3957.53.

4. Herria J-M. Chassefière E. Carbon dioxide, argon, nitrogen and methane clathrate hydrates: Thermodynamic modelling, investigation of their stability in Martian atmospheric conditions and variability

of methane trapping. Planetary and Space Science, 2012, vol. 73, no. 1, pp. 376 – 386, DOI: 10.1016/j.pss.2012.07.028

5. Broida H. P., Lundell O. R., Schiff H. I., Ketcheson R. D. Is ozone trapped in the solid carbon dioxide polar cap of Mars? Science, 1970, vol. 170, no. 3965, p.1402. DOI: 10.1126/science.170.3965.1402.

6. Muromachi S., Nagashima H.D., Herri J.-M., Ohmura R. Thermodynamic modeling for clathrate hydrates of ozone. Journal of Chemical Thermodynamics, 2013, vol. 64, pp. 193-197. DOI: 10.1016/j.jct.2013.05.020

УДК 524.1-52

А.А. Щепкин<sup>1,2</sup>, А.К. Павлов<sup>1,2</sup>, Г.И. Васильев<sup>2</sup>, В.М. Остряков<sup>1,2</sup> <sup>1</sup>Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого<sup>(•)</sup> <sup>2</sup> Физико-технический институт им. А.Ф. Иоффе РАН

# ВОЗМОЖНОСТЬ МУТАЦИЙ И МАССОВЫХ ВЫМИРАНИЙ ЖИВЫХ ОРГАНИЗМОВ НА ЗЕМЛЕ ВСЛЕДСТВИЕ ВОЗДЕЙСТВИЯ БЛИЗКОЙ СВЕРХНОВОЙ ЗВЕЗДЫ

Введение. В истории Земли было много массовых вымираний живых существ, причины которых не всегда удается объяснить. Рассматриваются разные гипотезы, от падений небесных тел на Землю до сверхмощных солнечных вспышек или гамма-всплесков. Однако, не менее популярны гипотезы о вымираниях по причине взрывов близких сверхновых звезд (СН) (в радиусе до 100 пк), эффект от которых проявляется через фотонное излучение при взрыве и поток ускоренных на ударной волне (УВ) частиц, называемых космическими лучами (КЛ).

Вспышки сверхновых периодически происходят вблизи Солнечной системы. Исходя из наиболее простых оценок, в среднем в радиусе 50 пк от Солнца СН вспыхивают раз в 25 млн лет. Однако, частота таких вспышек переменна в зависимости от плотности звезд-гигантов в конкретном месте в Галактике. Так, по измерениям концентрации изотопа железа  $^{60}$ Fe в глубоководных донных отложениях было обнаружено два крупных импульса за последние 10 млн лет [1, 2]. Учитывая, что данный изотоп мог быть синтезирован только при взрыве СН, это свидетельствует о прохождении вблизи Солнечной системы звездной ассоциации гигантов, в связи с чем была повышена частота вспышек СН. Последнее событие датируется 2,5 млн лет, что совпадает с границей эпох Плиоцен-Плейстоцен, когда 36% морской мегафауны подверглось вымиранию, и началась эволюция гоминидов [3]. Однако, до сих пор точно не понятен механизм воздействия близких СН на биосферу Земли, и вообще то, насколько значимо их влияние.

В данной работе рассматривается моделирование повышения радиационного фона на Земле при воздействии космических лучей, ускоренных на УВ от взрыва сверхновой звезды с целью выяснить возможность мутаций и массовых вымираний земных организмов в этом случае.

Метод исследования. Космические лучи на 90% состоят из протонов, около 10% составляют  $\alpha$ -частицы. Энергии этих частиц при ускорении на ударных волнах могут варьироваться от 10<sup>6</sup> до 10<sup>15</sup> эВ. Поток энергии КЛ пропорционален энергии УВ, которая лежит в диапазоне  $E_{sh} = 10^{50} \div 10^{52}$  эрг. В приведенных расчетах берется  $E_{sh} = 10^{51}$  эрг.

В результате воздействия солнечной активности, спектр КЛ в районе Земли подвергается модуляции

$$J_{mod}(E,t) = J(E,t) \frac{E(E+2E_0)}{(E+\Phi)(E+\Phi+2E_0)}.$$

<sup>(•)</sup> А.А. Щепкин, tshepkin.aa@edu.spbstu.ru

где J(E,t) = [частиц/(см<sup>2</sup> \* с \* ср \* МэВ/нуклон)] – спектр КЛ вне гелиосферы, <math>E – кинетическая энергия частицы,  $E_0$  – энергия покоя частицы,  $\Phi$  – модуляционный параметр. Движение КЛ в магнитном поле Земли приводит к геомагнитному обрезанию спектра КЛ, которое заключается в том, что на геомагнитной широте  $\lambda$  существует жесткость обрезания  $R_{\lambda}$ , и если жесткость частицы  $R = pc/Ze < R_{\lambda}$ , то она отклоняется магнитным полем Земли и не попадает в атмосферу. Попавшие в атмосферу частицы производят каскад ядерных реакций, в ходе которого появляются вторичные частицы ( $\gamma, \mu^{\pm}, e^{\pm}, n, p$  и др.) и радионуклиды ( $^{14}C, ^{10}Be, ^{36}Cl, ^{3}H$  и др.). В данной работе рассматривается два канала повышения радиационного фона на Земле: прямое облучение поверхности Земли и мирового океана космическими лучами и вторичными частицами атмосферного каскада и распад радиоуглерода в биосфере Земли.

Поскольку живые организмы на 60-70% состоят из воды, то целесообразно рассмотреть ионизацию поверхности океана (до 70 м в глубину) под действием прямого облучения предполагая, что поглощение энергии частиц водой организмов будет происходить аналогично. Мощность поглощенной дозы на глубине h океана магнитной широты  $\lambda$  рассчитывалась следующим образом:

$$D(h, \lambda, t) = \pi \int J_{mod}(E, t) A(E, h) \eta(E, \lambda) dE$$

Здесь A(E,h) – поглощенная энергия на глубине h от воздействия одного протона KЛ с энергией *E*. Данная функция рассчитывалась численно в пакете Geant4.  $\eta(E,\lambda)$  –функция геомагнитного обрезания. Для расчета брались как спектры KЛ, полученные в результате численного моделирования ускорения частиц на УВ [4, 5], так и спектр галактических KЛ, приведенный в работе [6].

Также влияние на биосферу оказывает <sup>14</sup>С, поскольку углерод содержится в органических молекулах. Следовательно, радиоуглерод формирует внутреннее облучение организмов и приводит к повреждению ДНК, что однозначно повышает скорость мутаций, а при достаточно большом изотопном отношении может привести к массовым вымираниям. Отдельные экспериментальные исследования показывают, что эффективность внутреннего облучения от распада радиоуглерода с точки зрения скорости мутаций может превышать эффективность внешнего облучения в десятки-сотни раз [7, с. 598]. К тому же <sup>14</sup>С имеет наибольшую скорость образования в атмосфере Земли среди радионуклидов. Скорость образования <sup>14</sup>С в атмосфере рассчитывалась следующим образом:

$$Q(t) = \pi \int J_{mod}(E,t)Y(E)S(E)dE,$$

где Y(E) – число атомов радиоуглерода, произведенных от воздействия одной частицы КЛ, что также оценивалось в Geant4, а S(E) – функция геомагнитного обрезания, усредненная по широте  $\lambda$ . После образования в атмосфере <sup>14</sup>С окисляется до <sup>14</sup>CO<sub>2</sub> и включается в глобальный углеродный цикл [8]. Модель перемещения радиоуглерода по резервуарам представлена системой обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\frac{dN_i}{dt} = Q_i(t) - \lambda_d N_i - \sum_{j,j \neq i} \lambda_{ij} N_i + \sum_{j,j \neq i} \lambda_{ji} N_j,$$

где  $N_i$  — концентрация атомов <sup>14</sup>С в і-том резервуаре,  $\lambda_d$  — вероятность распада радиоуглерода,  $\lambda_{ij}$  — вероятность перехода радиоуглерода из -го резервуара в *j*-тый.

Результаты. Для начала рассмотрим воздействие прямого облучения. На рис. 1 приведена мощность поглощенной дозы при прямом облучении в зависимости от глубины воды для трех моделей спектров КЛ, демонстрирующих наименьшую мощность потока КЛ [6], среднюю [5] и наибольшую [4] из рассмотренных. Известно, что при накопленной дозе в 300 рад у большинства организмов наступает лучевая болезнь. При этом доза может

накапливаться в течение всего времени жизни отдельного организма. Результаты расчетов показывают, что при самом мощном потоке космических лучей массовые вымирания организмов будут происходить при взрыве СН в радиусе ~20 пк от Земли, а при взрыве в радиусе ~30 пк скорость мутаций будет повышена до ощущаемого предела с точки зрения внешних и внутренних перемен в организмах в предположении о линейной зависимости скорости мутаций от интенсивности потока КЛ. Чтобы оценить биологически эквивалентную дозу, нужно умножить полученную дозу на эффективный коэффициент качества излучения. По нашим расчетам для спектров КЛ вида  $J(E) ~ E^{-\gamma}$ ,  $\gamma = 2,2 \div 2,7$  этот коэффициент лежит в диапазоне 1,35 - 1,4.

Теперь рассмотрим эффект от <sup>14</sup>С. На рис. 2 представлены результаты расчетов мощности поглощенной дозы в биосфере в зависимости от времени с момента, когда ударная волна от взрыва достигла Земли, где  $\mu$  – величина дипольного магнитного момента Земли в единицах современного дипольного геомагнитного момента. В расчетах использовалась модель спектра КЛ, данная в работе [4]. При взрыве на расстоянии 6,5 пк радиационный фон в биосфере на несколько сотен лет будет сравним с предельно допустимым для персонала АЭС группы А.



Рис. 1. Мощность поглощенной дозы, сформированная прямым облучением, в зависимости от глубины воды со спектрами КЛ по моделям [4] (А), [5] (В) и [6] (С) для разных времен t после взрыва

и расстояний d до Земли. Черной линией изображен результат прямого облучения регулярным потоком галактических КЛ, а пунктирной линией – текущий радиационный фон от всех источников



Рис. 2. Мощность поглощенной дозы в биосфере в зависимости от времени, начиная с момента достижения ударной волной Земли при взрыве на расстоянии d = 6,5 пк (A), d = 17 пк (B) и d = 42 пк (C). Черная линия соответствует μ = 1, красная – μ = 0,1, а пунктирная – текущему фону

Вывод. Результаты моделирования показали возможность повышения радиационного фона на Земле вплоть до смертельно-опасных мощностей доз. Прямое облучение дает большой вклад в радиацию на поверхности Земли и в перемешанных слоях океана, а распад радиоуглерода также приводит к повышению фона биосфере. Необходимые условия возникновения мутаций в организмах, а также их массовых вымираний, могут быть выполнены при вспышке СН в радиусе 20-30 пк от Земли.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Wallner A. et al.. <sup>60</sup>Fe and <sup>244</sup>Pu deposited on Earth constrain the r-process yields of recent nearby supernovae // Science. – 2021. – Vol. 372. – p. 742-745.

2. Breitschwerdt D. et al.. The locations of recent supernovae near the Sun from modelling  $^{60}$ Fe transport // Nature. – 2016. - Vol. 532. – p. 73-76.

3. Melott A.L., Marinho F., Paulucci L. Hypotesis: Muon Radiation Dose and Marine Megafaunal Extinction at the End-Pliocene Supernova // Astrobiology. – 2019. - Vol. 19. – №6. – p. 825-830.

4. Zirakashvili V.N., Ptuskin V.S. Numerical simulations of diffusive shock acceleration in SNRs // Astroparticle Physics. – 2012. – Vol. 39-40. – p. 12-21.

5. Telezhinsky I. et al.. Acceleration of cosmic rays by young core-collapse supernova remnants // A&A. – 2013. – Vol. 552. – A102.

6. Mellot A.L. et al.. A Supernova at 50 pc: Effects on the Earth's Atmosphere and Biota // ApJ. -2017. - Vol. 840. - No. -105.

7. C. Busby. Aspects of DNA Damage from Internal Radionuclides // IntechOpen. – 2013. – Chapter 22.

8. Beer J., McCracken K., von Steiger R. Cosmogenic Radionuclides. Theory and Applications in the Terrestrial and Space Environments // Springer-Verlag Berlin Heidelberg. – 2012.

УДК 533.9.082.5

М.К. Буц, М.Ю. Кантор Физико-технический институт им. А.Ф. Иоффе РАН<sup>(•)</sup>

# РЕНТГЕНОВСКАЯ ДИАГНОСТИКА С ВЫСОКОЙ СКОРОСТЬЮ СЧЕТА ФОТОНОВ ДЛЯ ИЗМЕРЕНИЯ БЫСТРОЙ ДИНАМИКИ СПЕКТРОВ ТОРМОЗНОГО ИЗЛУЧЕНИЯ ПЛАЗМЫ НА ТОКАМАКЕ ФТ-2

Для исследования режимов нижнегибридного нагрева и генерации тока в высокотемпературной плазме токамака  $\Phi$ T-2 требуются измерения функции распределения электронов в широком диапазоне энергий. Это необходимо для детального изучения взаимодействия электронов с нижнегибридными волнами в плазме. Перспективным методом получения функции распределения электронов является восстановление ее из спектра тормозного излучения плазмы. Однако, время измерения спектра сильно ограничено на малом токамаке длительностью ВЧ импульса и поэтому для выполнения исследований от рентгеновского спектрометра требуется высокая выходная скорость счета импульсов, более  $10^6$  с<sup>-1</sup>, при сохранении разрешающей способности по амплитуде. Эти требования существенно превышают технические возможности лучших современных спектрометров и поэтому для токамака  $\Phi$ T-2 [1] была разработана диагностика мягкого рентгеновского излучения, позволяющая решить поставленную задачу.

Основные части измерительной системы спектральной диагностики мягкого рентгеновского излучения представлены на рис. 1. Главной частью измерительной системы является полупроводниковый дрейфовый детектор (SDD) АМРТЕК XR100 FAST SDD со штатным модулем управления и обработки сигналов PX-5. Модуль PX-5 детектирует импульсы и измеряет их амплитуды по стандартному алгоритму, основанному на трапецеидальной фильтрации импульсов отклика детектора, записываемых АЦП с частотой 80 МГц, с последующим измерением амплитуд трапецеидальных импульсов. Выходная скорость счета импульсов ограничена мертвым временем регистрации двух наложенных импульсов, однако при этом искажается форма трапециевидного импульса и растут шумы (рис. 2b). В результате выходная скорость счета импульсов остается ниже  $10^6 c^{-1}$ . Такие скорости не достаточны для решения поставленных на  $\Phi$ T-2 задач. Для уменьшения

<sup>&</sup>lt;sup>(•)</sup> М.К. Буц, misha.bucz@mail.ru

мертвого времени регистрации наложенных импульсов разработана диагностическая система, формирующая из сигналов детекторного модуля AMPTEK XR100 импульсы отклика с на 50% более коротким передним фронтом (рис. 2а). Сформированные импульсы усиливаются в двух параллельных каналах усилителя-формирователя с разными коэффициентами усиления и записываются на два АЦП с повышенной до 250 МГц частотой оцифровки. Использование двух каналов позволяет увеличить динамический диапазон измерений энергий детектируемых фотонов. Записанные сигналы преобразуются к импульсам гауссовой формы [2], число и амплитуда которых измеряется с помощью специально разработанного алгоритма [3].



Рис. 1. Схема взаимодействия основных узлов измерительной системы рентгеновского спектрометра



Рис. 4 а. Сравнение импульсных откликов модуля РХ-5 и разработанного усилителя-формирователя на ступенчатый сигнал детектора и генератора стандартной амплитуды (ГСА); b – сравнение импульсных откликов РХ-5 и усилителя формирователя, обработанных методом трапециевидной фильтрации с разной шириной трапеции

Для ограничения входного потока квантов на детектор применяется система сменных фильтров, сменных круговых диафрагм и плавно регулируемых ножевых диафрагм (рис. 3). При этом смена диафрагм и фильтров осуществляется без разгерметизации прибора. Для проведения измерений по различным хордам наблюдения прибор установлен на подвижном столе с регулируемым углом наклона.



Рис. 5. Чертеж сканирующей диагностики мягкого рентгеновского излучения.

Использованный АЦП позволяет записывать сигналы объемом до 512 Мбайт за один разряд. Для своевременной отправки данных на удаленный компьютер оператора диагностики реализована локальная сеть Ethernet со скоростью передачи данных 1 Гбит/с. Для взаимодействия с диагностикой разработан программный пакет управления, сбора и хранения данных. Полученные данные вместе с журналом измерений хранятся в базе данных на сетевом хранилище (NAS) с возможностью доступа через Интернет.

На рис. 4 показаны предварительные результаты исследования эволюции восстановленной функции распределения электронов (ФРЭ) из рентгеновских измерений по центральной хорде, выполненных в течении омического разряда с центральной плотностью  $4.2 \times 10^{13}$  см<sup>3</sup>. Средний выходной поток детектора на 30 мс составил  $2.2 \times 10^6$  с<sup>-1</sup>. Спектры накапливались в течение 1 мс. На левом рисунке показана динамика роста спектров в начале разряда, справа – динамика спада в конце. Температура, измеренная методом томсоновского рассеяния на хорде 0.7 см, составляет 550 эВ, что соответствует форме восстановленной ФРЭ. От 24 до 34 мс ФРЭ меняется внутри погрешностей.



Рис. 6. Эволюция восстановленной функции распределения электронов (ФРЭ) из рентгеновских измерений по центральной хорде в омическом разряде. Спектры накапливались в течение 1 мс, средний выходной поток на 30 мс составил 2.2 \* 10<sup>6</sup> с<sup>-1</sup>.

Разработанная диагностика позволяет измерять спектры излучения плазмы в диапазоне энергий от 0.6 кэВ – 1 МэВ при больших выходных потоках квантов – более  $10^6 c^{-1}$ . Это позволяет на порядок снизить время измерения спектра по сравнению с лучшими промышленными образцами спектрометров, что играет большую роль при работе на установках с малой длительностью разряда, а также при исследовании быстрых процессов в плазме.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Lashkul S. I. et al. Effect of the radial electric field on lower hybrid plasma heating in the FT-2 tokamak //Plasma Physics Reports. – 2001. – Vol. 27. – P. 1001-1010.

2. Kantor M. Y., Sidorov A. V. Shaping pulses of radiation detectors into a true Gaussian form //Journal of Instrumentation.  $-2019. - Vol. 14. - N_{\odot}. 01. - P01004.$ 

3. Kantor M. Y., Sidorov A. V. Detection of true Gaussian shaped pulses at high count rates //Journal of Instrumentation.  $-2020. - Vol. 15. - N_{\odot}. 06. - P06015.$ 

УДК 53.01

# В.С. Михайлов, А.Н. Зиновьев, П.Ю. Бабенко, А.П. Шергин Физико-технический институт им. А. Ф. Иоффе РАН<sup>(•)</sup>

## КОЭФФИЦИЕНТЫ РАСПЫЛЕНИЯ МАТЕРИАЛОВ РЕАКТОРА ТОКАМАК ИЗОТОПАМИ ВОДОРОДА

Проведены расчеты распыления конструкционных материалов, планируемых для использования в токамаке ИТЭР, а именно - вольфрама в качестве материала дивертора и бериллия, перспективного материала для первой стенки. В качестве налетающих частиц использовались изотопы водорода.

Расчеты были проведены с помощью разработанного нами кода, основанного на методе Монте-Карло. Мишень моделировалась набором случайно ориентированных в пространстве микрокристаллов размером в постоянную решетки (Вольфрам: 3.165Å, Бериллий: 2.286Å и 3.584Å) В расчете учитывались как первичные атомы отдачи, образованные при соударениях налетающих атомов с атомами мишени, так и вторичные атомы, создаваемые при последующих столкновениях первичных атомов отдачи при их торможении в веществе. Учитывались потери энергии частиц, связанные с торможением на ядрах и электронах. При торможении на электронах учитывалась поправка на многократность столкновений предложенная нами в работе [1]. Учитывались тепловые колебания атомов мишени. Расчет велся для комнатной температуры.

Из ранее выполненных расчетов по распылению вольфрама и бериллия наиболее надежной представляется работа [2]. В нашем коде используется более точные параметры многочастотного потенциала, а также присутствует возможность учитывать различный тип поверхностного барьера.

Коэффициент распыления зависит от состояния поверхности. Результаты расчетов представлены на рис. 1. В случае поверхности, состоящей из «острий», распыленная частица должна преодолеть сферический потенциальный барьер, и ее энергия должна превышать энергию сублимации E<sub>s</sub>.

В случае плоской поверхности (планарный барьер) энергия распыленной частицы Е должна отвечать условию  $E \cos^2 \theta > E_s$ , где  $\theta$  – угол вылета частицы. Условие отбора

<sup>&</sup>lt;sup>(•)</sup> В.С. Михайлов, chiro@bk.ru

распыленных частиц для планарного барьера является более строгим, чем условие для сферического барьера.



Рис. 1. Коэффициенты распыления для мишени из бериллия (слева) и вольфрама (справа) атомами H, D, T в зависимости от энергии налетающих атомов

На рис. 2 приведены зависимости коэффициента распыления вольфрама от угла падения пучка на мишень. Видно, что в целом, нормированные угловые зависимости носят некоторый универсальный характер. Однако при малых энергиях в случае планарного барьера наблюдается спад коэффициентов распыления при больших значениях угла падения.

Этот спад легко объяснить тем, что для планарного барьера для большей доли частиц не выполняется условие  $E \cos^2 \theta > E_s$ .



Рис. 2. Зависимость коэффициента распыления вольфрама водородом от угла падения пучка для сферического и планарного барьера. Значения нормированы на коэффициент распыления для нормального падения

Представлены результаты моделирования коэффициентов распыления вольфрама и бериллия изотопами водорода в диапазоне от энергии порога до 20 keV. Приведена зависимость коэффициентов распыления от угла падения пучка на поверхность.

Были рассчитаны средние энергии распыленных частиц вольфрама. Как видно из рис. 3, средняя энергия распыленных частиц растет с увеличением энергии налетающих частиц. С ростом массы изотопа энергия, переданная распыленным частицам, также растет, что является следствием законов сохранения энергии и импульса при столкновении. В случае планарного барьера энергия распыленной частицы больше по сравнению со случаем сферического барьера из-за более строго критерия отбора распыленных атомов по энергии



Рис. 3. Зависимость средних энергий распыленных частиц вольфрама от энергии налетающих частиц изотопа водорода. Случай расчета для сферического барьера обозначен сплошной линией, случай планарного барьера – пунктиром

На рис. 4 представлены коэффициенты отражения бериллия и вольфрама для налетающих изотопов водорода.



Рис. 4. Коэффициенты отражения для мишени из бериллия (слева) и вольфрама (справа) атомами H, D, T в зависимости от энергии налетающих атомов

Полученные нами результаты позволяют более точно оценить поступление примеси бериллия в горячую зону плазмы, что в свою очередь является важным условием для моделирования параметров плазмы во всем объеме реактора токамак. Коэффициенты отражения важны для расчета материального баланса плазмы.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Behrisch R., Eckstein W. (ed.). Sputtering by particle bombardment: experiments and computer calculations from threshold to MeV energies. – Springer Science & Business Media, 2007. – Vol. 110. 2. Зиновьев А. Н., Бабенко П. Ю. Влияние многократности соударений на измерения электронных тормозных потерь при столкновениях атомных частиц с твердым телом //Письма в Журнал экспериментальной и теоретической физики. – 2022. – Т. 115. – № 9. – С. 603-606.

УДК 523.4

К.В. Владимирова<sup>1</sup>, А.К. Павлов<sup>2</sup>, Г.И. Васильев<sup>2</sup> <sup>1</sup>Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого<sup>(•)</sup> <sup>2</sup>Физико-технический институт им. А. Ф. Иоффе РАН

# МЕТОД ДИСТАНЦИОННОГО ОПРЕДЕЛЕНИЯ СТЕПЕНИ ОБЛУЧЕНИЯ ПОВЕРХНОСТИ ЕВРОПЫ СПОСОБОМ ГАММА-СПЕКТРОСКОПИИ.

Введение. Один из четырех галилеевых спутников – Европа, в настоящее время рассматривается как одно из возможных мест в Солнечной системе, где может быть жизнь. Жизнь на этом спутнике может существовать в форме простейших организмов в подповерхностном океане, в среде, подобной антарктическому озеру Восток или подобной земным гидротермальным источникам. На данный момент прямых доказательств существования жизни на Европе не обнаружено, но к спутнику отправляют новые исследовательские экспедиции, так как наличие океана с жидкой водой под поверхностью спутника дает основания предполагать возможность наличия уцелевших биомаркеров на ледяной поверхности, которые могли попасть на нее вместе с водяным выбросом из океана спутника.

Целью работы является рассмотрение возможности дистанционного определения степени облучения поверхности Европы методом гамма-спектроскопии. Этот метод позволит зонду, отправленному в исследовательскую миссию, не приземляясь на Европу, дистанционно определить, какие области в подповерхностном слое льда спутника наименее облучены радиацией, чтобы впоследствии совершить посадку в эту локальную область и далее исследовать поверхностный лед на наличие биомаркеров.

*Актуальность*. Как отмечалось выше, Европа рассматривается в качестве одного из самых перспективных спутников для поиска внеземной жизни, так как из подповерхностного океана, вместе с выбросами водяного пара на поверхность спутника могут попасть простейшие организмы. Однако, возможные биомаркеры этих организмов могут быть разрушены радиацией.

В 2014 году с помощью телескопа Хаббл во время транзита Европы по диску Юпитера в УФ-диапазоне были зафиксированы выбросы водяного пара из гейзеров, тянущиеся шлейфом на 160-200 км в районе Южного полюса спутника. В настоящее время нет полного описания моделей, позволяющих точно оценить, как именно распределяется и оседает пар от каждого водяного выброса, какая толщина слоя замерзшего льда осаждается. В случае быстрого осаждения слоя более 10 см, можно рассчитывать на то, что большие дозы

<sup>&</sup>lt;sup>(•)</sup> К.В. Владимирова, vladimirovakri@mail.ru

радиации на такой глубине будут накапливаться долго и биомаркеры смогут сохраниться [1].

В качестве биомаркеров, свидетельствующих о наличии жизни, в основном рассматриваются органические молекулы с большим молекулярным весом. Основным фактором, препятствующим их сохранности, является интенсивная ионизирующая радиация. Ее источник – радиационный пояс Юпитера, внутри которого находится Европа [2].

Под действием радиации органические молекулы образуют радикалы. В окислительной среде их восстановление не происходит, происходит окисление, поэтому биомаркеры органические молекулы) при таких условиях деградируют посредством (сложные уменьшения молекулярного веса. Таким образом, очень важным параметром, с точки зрения обнаружения биомаркеров, является получение информации о накопленных дозах облучения на глубинах 1-10 см, которые являются технически доступными для взятия образцов зондом. Известно, что интенсивность облучения протонами и электронами в радиационных поясах является высокой и очень большие дозы радиации набираются достаточно быстро, однако, поскольку основной поток частиц в радиационном поясе находится в диапазоне от 1 до 100 МэВ, их пробег довольно небольшой, а доза радиации на глубине более 5 см будет на порядки величин меньше, чем на поверхности. В основном в радиационных поясах содержатся протоны и электроны, однако есть также ионы серы и других элементов. Они попадают в радиационные пояса Юпитера из-за вулканических извержений на Ио. Эти ионы при облучении ими поверхности Европы могут накапливаться в слое льда и служить индикатором дозы облучения.

По данным измерений в инфракрасной области на самой поверхности концентрации тяжелых элементов могут достигать 10%, но эти концентрации во льду данным методом можно определить только в очень тонком поверхностном слое (менее 1 мм). Поэтому в работе был рассмотрен метод гамма-спектроскопии, так как он позволяет определять концентрации тяжелых элементов в поверхностных слоях.

В работе предлагается метод определения дозы облучения подповерхностных слоев льда по измерениям характеристических гамма-линий возбужденных ядер, образующихся при бомбардировке поверхности спутника протонами.

Расчеты проводились с помощью Geant4 – пакета программ, разработанного в ЦЕРНе и основанного на принципе моделирования процессов взаимодействия энергичных частиц любой природы по методу Монте-Карло. Мы моделировали выход характеристических гамма-линий из подповерхностного слоя Европы, которые могли бы быть измерены на КА, находящемся на небольшой высоте, на орбите вокруг спутника.

Гамма-линии в основном образуются в ядерных реакциях захвата вторичных нейтронов  $(n, \gamma)$  По измеряемому гамма-спектру можно установить степень облученности данной области. Наши расчеты показали, что по мере роста дозы облучения, и, как следствие, роста концентрации имплантированных тяжелых элементов во льду резко повышается интенсивность характеристических линий кислорода по сравнению с чистым льдом. При наличии тяжелых элементов в процессе облучения генерируется большое количество нейтронов, что приводит к увеличению интенсивности реакций захвата нейтронов ядрами кислорода и водорода, что резко увеличивает интенсивность характеристические гамма-линии этих элементов.

Результаты расчетов представлены на рис. 1, 2, 3(a,б) в виде графиков характеристических линий гамма-излучения.

Ядерные реакции для линии 2,2 МэВ: р + n  $\rightarrow$  D +  $\gamma$ 

Для линии 3,84 МэВ:  ${}^{16}O + n \rightarrow {}^{17}O + \gamma$  $E_{\gamma} = 2,2$ 

 $p(n, \gamma)D$ 

На рис. 1 приведены характеристические линии водорода и кислорода, которые возникают при облучении чистого льда. Наиболее явно видны линии 2,2 МэВ от водорода и 3,84 МэВ от кислорода, а числа рядом с пиками характеристических линий определяют амплитуды.





Рис. 2. Характеристические линии 2,2 МэВ и 3,84 МэВ от водорода и кислорода при содержании хлора

График характеристических линий на рис. 1 целесообразно сравнить с графиками характеристических линий, полученных при облучении того же льда с примесями хлора (рис. 2), азота (рис. 3а) и серы (рис. 3б) при концентрации 1%.



Рис. 3. Характеристические линии при содержании 1% примеси: а) азота, б) серы

Как видно из графика на рис. 2, при содержании хлора, в концентрации 1% наблюдаются усиленные по сравнению с чистым льдом характеристические линии 2,2 МэВ от водорода и 3,84 МэВ от кислорода. Аналогично, усиление указанных линий наблюдается при наличии примеси азота (рис. 3а) и серы (рис. 3б), в той же концентрации.

Выводы. Показано, что при образовании слоя льда толщиной более 1 см наблюдается резкое падение скорости набора дозы радиации. Главное преимущество гамма-метода дистанционной диагностики облучения состоит в том, что если обычные методы диагностики, такие как оптическая, ультрафиолетовая и инфракрасная спектроскопия могут дать информацию о дозе радиации лишь на поверхности, гамма-спектроскопия даст облучения информацию И 0 интенсивности на глубине ло 10 см. Таким образом, исходя из полученных результатов, предложенный метод гаммаспектроскопии позволяет получить информацию о дозах облучения на глубинах до 10 сантиметров.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Pavlov A. et al. Survival of radioresistant bacteria on Europa's surface after pulse ejection of subsurface ocean water //Geosciences. – 2019. – Vol. 9. – №. 1. – Р. 9.

2. Paranicas C. et al. Europa's radiation environment and its effects on the surface //Europa. -2009. - P. 529-544.

УДК 533.9.082.74

А.Ю. Токарев, А.Ю. Яшин, К.А. Кукушкин, А.В. Петров, А.М. Пономаренко Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого<sup>(•)</sup>

# ПРИМЕНЕНИЕ МНОГОЧАСТОТНОГО ДОППЛЕРОВСКОГО ОБРАТНОГО РАССЕЯНИЯ ДЛЯ ИССЛЕДОВАНИЯ ELM НА ТОКАМАКЕ ГЛОБУС-M2

Введение. Основной режим работы токамаков – Н-мода [1], характеризуется большим градиентом давления на периферии, из-за чего возникают краевые локализованные моды (ELM), приводящие к импульсным выбросам частиц и энергии [2]. Поэтому исследование ELM является важной задачей, а наиболее сложная ее часть - измерения во внутренней области плазмы, которые возможны только бесконтактными методами, в частности, допплеровским обратным рассеянием (ДОР) [3].

Постановка эксперимента и методы исследования. В данном докладе представлены результаты использования ДОР для исследования ELM на сферическом токамаке Глобус-М2 [4]. На нем многократно были задокументированы переходы плазмы в режим улучшенного удержания, в котором и наблюдаются ELM [5]. Кроме того, на Глобус-М2 установлено большое количество различных диагностик для измерения параметров плазмы, в частности, два многочастотных рефлектометра с наклоненными антеннами для использования в режиме ДОР [6,7]. Первый позволяет зондировать плазму на четырех частотах: 20, 29, 39 и 48 ГГц, что соответствует периферийной области 0.8 <  $\rho$  < 1.1. Второй рефлектометр использует шесть частотных каналов: 50-75 ГГц с шагом 5 ГГц, что позволяет исследовать внутренние плазменные области 0.4 <  $\rho$  < 0.8. Данный метод диагностики позволяет измерять скорость флуктуаций вращения плотности И их амплитуду благодаря исследованию электромагнитного излучения, рассеянного в обратном направлении на данных флуктуациях. В линейном приближении амплитуда рассеянного излучения прямо пропорциональна величине флуктуации, фаза же содержит в себе допплеровский сдвиг из-за ее полоидального вращения, благодаря которому можно найти полоидальную скорость вращения плазмы, так как измеренная скорость содержит в себе сумму данной величины и фазовой скорости распространения флуктуаций, которой зачастую можно пренебречь [4]. Кроме того, благодаря использованию многочастотного зондирования можно получить радиальную зависимость параметров флуктуаций плотности и построить профиль скорости вращения плазмы, что и будет показано в данной работе.

Квазипериодические срывы краевых неустойчивостей в токамаках (ELM) часто проявляются в режиме улучшенного удержания. При срыве краевой неустойчивости происходит частичное разрушение транспортного барьера на границе плазмы, из-за чего происходит многократный рост тепловых нагрузок на пластины дивертора. Для описания данных процессов используется модель пилинг-баллонной (ПБ) моды, выделяющая две

<sup>&</sup>lt;sup>(•)</sup> А.Ю. Токарев, tokarev.ayu@edu.spbstu.ru

причины возникновения ELM: градиент давления со стороны слабого магнитного поля (баллонная мода) и ток, протекающий вблизи сепаратрисы (пилинг мода) [2]. Краевые неустойчивости могут быть классифицированы на более чем 5 типов, однако, наиболее распространенными являются тип-1, 2 и 3. Тип 1 считается следствием развития идеальной баллонной моды и характеризуется наибольшей разовой потерей энергии в сравнении с другими типами. Тип 2 также относится к баллонной ветви, но имеет большую частоту следования и меньшее влияние на удержание плазмы. Краевые неустойчивости типа 3 относятся к пилинг моде, развиваются при более низких значениях давления в пьедестале и приводят к меньшим потерям энергии.

На большинстве обыкновенных токамаков наблюдаются ELM 1 и 3, а также нескольких других типов. Здесь возникает отличие сферических токамаков, в частности, Глобус-М2, так как на них не наблюдается ELM 1 типа [8]. Предположительно, это связано с возникновением микротиринговых мод, которые контролируют потоки энергии, в результате чего существует максимально возможное значение температуры, а значит, и давления электронов, которое меньше необходимого для развития баллонных мод.

Результаты. Для исследований краевых локализованных мод на Глобус-М2 было решено использовать метод ДОР. В целом, присутствие ELM можно обнаруживать многими методами – с самого начала исследований для этого используются ленгмюровские и магнитные зонды, измеряется излучение  $D_{\alpha}$ , так как большие потоки частиц и энергии из плазмы обнаруживаются данными диагностиками проще всего. Сопоставляя данные, полученные с этих диагностик, в данном случае – излучение  $D_{\alpha}$ , и измерения ДОР, можно получить следующую картину, изображенную на рис. 1.



Рис. 1. а) Интенсивность излучения на линии D<sub> $\alpha$ </sub>; б) и в) модуль комплексного сигнала ДОР на частотном канале 39 ГГц и допплеровский сдвиг спектра. Разряд 41105 (Дейтериевая плазма,  $I_p = 410$  кА,  $n_e = 5 * 10^{20}$  м<sup>-3</sup>,  $P_{NBI} < 1$  МВт)

Анализируя данный рисунок, можно сделать вывод, что ДОР может использоваться для исследования краевых локализованных мод, так как модуль принятого сигнала и допплеровский частотный сдвиг обратно рассеянной электромагнитной волны сильно меняются во время ELM. Можно увидеть (рис.1, часть в), что допплеровский сдвиг фазы возрастает от около нулевого значения между ELM до 0.4 МГц во время, что соответствует увлечению скорости полоидального вращения плазмы примерно в 4 раза, до 4 км/с. Более

того, ELM проявляется на данной диагностике обычно на несколько микросекунд раньше появления вспышки на излучении  $D_{\alpha}$ , по крайней мере, для областей около 1 - 2 см (в обе стороны) от сепаратрисы.

Используя широкие возможности установленной на Глобусе-М2 ДОР, было показано, что амплитуда флуктуаций концентрации и их скорость сильно меняются во время ELM, причем имеется зависимость от радиуса (рис. 2). Для определения этой зависимости было использовано усреднение скорости вращения плазмы в промежутках между срывами (зеленая сплошная линия на рис. 2), в самом начале срыва (синяя пунктирная линия на рис. 2) и на пике срыва – соответствует максимуму излучения  $D_{\alpha}$  (красная штриховая линия на рис. 2) для каждого из каналов ДОР, и построены соответствующие профили скорости. Как видно, в периоды между срывами скорость полоидального вращения плазмы мала и не превышает значения 3 км/с на всех исследованных радиусах, в самом начале срыва она немного (1,5 – 2 раза) возрастает, а во время срыва увеличивается в 3 – 7 раз для разных радиусов.



Рис. 2. Профили скорости в разные фазы цикла ELM. Разряд 41105

Используя диагностику ДОР, также было замечено, что во время срыва часто на периферийной области плазмы возникают нитевидные структуры, называемые филаментами. Они наблюдаются в сигнале ДОР в виде последовательности когерентных вспышек, число которых во время сильных ELM может доходить до 4. Филаменты представляют собой пилинг-баллонные неустойчивости в виде нитевидных флуктуаций плотности, вращающихся в полоидальном направлении с большими скоростями, из-за чего они хорошо обнаруживаются ДОР. Свойства данных структур, наблюдавшихся на токамаке Глобус-М2, подробно описаны в работе [9].

Выводы. Суммируя вышеизложенное, можно сделать вывод, что установленная на токамаке Глобус-М2 диагностика ДОР является мощным средством для исследования краевых областей плазмы и неустойчивостей, развивающихся в них, в частности, краевых локализованных мод. В данной работе продемонстрировано, что во время них скорость полоидального вращения плазмы сильно изменяется, и могут появляться нитевидные структуры – филаменты.

Настоящая работа поддержана Министерством науки и высшего образования Российской Федерации в рамках государственного задания в сфере науки по проекту №0784-2020-0020 с использованием Федерального центра коллективного пользования "Материаловедение и диагностика в передовых технологиях" ФТИ им. А.Ф. Иоффе, включающего Уникальную научную установку "Сферический токамак Глобус-М"

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Wagner F. et al. Regime of Improved Confinement and High Beta in Neutral-Beam-Heated Divertor Discharges of the ASDEX Tokamak //Physical Review Letters. – 1982. – Vol. 49. - № 19. – P. 1408-1412. 2. Leonard A.W. Edge-localized-modes in tokamaks //Physics of Plasmas. – 2014. – Vol. 21. - № 9. –

2. Leonard A.W. Edge-localized-modes in tokamaks //Physics of Plasmas. – 2014. – Vol. 21. -  $N_{2}$  9. – 090501.

3. Conway G.D. et al. Plasma rotation profile measurements using Doppler reflectometry //Plasma Physics and Controlled Fusion. – 2004. – Vol. 46. – № 6. - P. 951-970.

4. Petrov Yu.V. et al. Overview of GLOBUS-M2 spherical tokamak results at the enhanced values of magnetic field and plasma current //Nuclear Fusion. -2022. -Vol. 62.  $-N_{\odot} 4$ . -042009.

5. Ponomarenko A. et al. First Results of the Implementation of the Doppler Backscattering Diagnostic for the Investigation of the Transition to H-Mode in the Spherical Tokamak Globus-M2 //Sensors. -2023. – Vol. 23. – No 2. – P. 830-893.

6. Bulanin V.V. et al. Doppler backscattering diagnostic with dual homodyne detection on the Globus-M compact spherical tokamak //The Review of scientific instruments. – 2021. – Vol. 92. - № 3. - 033539.

7. Yashin A.Y. et al. Doppler backscattering systems on the Globus-M2 tokamak //Journal of Instrumentation. – 2022. – Vol. 17. – C01023.

8. Solokha V.V. et al. Classification of Edge Instabilities at Globus-M2 Tokamak //Plasma Physics Reports. – 2023. - Vol. 49. - № 4. - P. 419–427.

9. Яшин А.Ю. и др. Определение параметров филаментов на сферическом токамаке Глобус-М2 с помощью метода допплеровского обратного рассеяния //Письма в журнал технической физики. – 2023. – Т. 49. – № 13. - С. 28-31.

УДК 52-17

А.Б. Сербин<sup>1,2</sup>, С.Л. Курдубов<sup>2</sup>

<sup>1</sup> Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого <sup>(•)</sup> <sup>2</sup> Институт прикладной астрономии Российской академии наук

## УЧЕТ СТРУКТУРЫ РАДИОИСТОЧНИКА ПРИ ОБРАБОТКЕ РЕЗУЛЬТАТОВ ГЕОДЕЗИЧЕСКИХ РСДБ-НАБЛЮДЕНИЙ

Введение. Многие из источников, входящих в Международную небесную систему отсчета (ICRF), имеют пространственно-протяженную структуру [1], поэтому структурная задержка является одним из факторов, влияющих на точность координат в каталогах. Однако моделирование структурной задержки на практике сталкивается со многими проблемами, такими как временная и частотная изменчивость структуры источника [2]. Поэтому, несмотря на то, что формулы, моделирующие структурную задержку, были выведены более 30-ти лет назад [3], при обработке результатов наблюдений, полученных при помощи радиоинтерферометрии со сверхдлинными базами (РСДБ), они не используются, и структурная задержка продолжает вносить искажения в параметры, определяемые при помощи РСДБ, поэтому учет структурной задержки остается актуальной проблемой.

Постановка задачи и методика исследования. В данной работе исследовалась возможность учета структуры источника по картам радиояркости, путем нахождения наименее изменчивых и наименее искаженных частей источника. Для этого использовались

<sup>&</sup>lt;sup>(•)</sup> А.Б. Сербин, serbin.ab@edu.spbstu.ru

карты радиояркости из базы данных <u>http://astrogeo.org/vlbi\_images/</u> и невязки, полученные в ходе обработки результатов ежесуточных РСДБ-наблюдений, проводимых с целью определения поправок к всемирному времени. В ходе этих наблюдений регистрируется групповая задержка, далее для тех же моментов времени определяется предвычисленная групповая задержка, затем из их разности методом наименьших квадратов определяются поправки к всемирному времени [4], в результате этого получаются невязки задержек. При определении предвычисленной групповой задержки учитываются такие параметры, как разность хода часов станций, тропосферная задержка и всемирное время. Так как задержка, обусловленная ионосферой, плохо моделируется, то в расчетах используется ионосферносвободная комбинация задержек [5, с. 115]:

$$\tau_{iono-free} = \frac{\tau_1 f_1^2 - \tau_2 f_2^2}{f_1^2 - f_2^2},\tag{1}$$

где  $f_1$  принадлежит S-диапазону радиочастот, а  $f_2$  принадлежит X-диапазону радиочастот, так как ионосферная задержка обратно пропорциональна квадрату частоты, то такая комбинация позволяет исключить ее влияние.

Результаты (1). Наблюдения проводились на базе Зеленчук-Бадары на тринадцатиметровых антеннах, в интервале частот 2.1639-2.6759 ГГц для S-диапазона и 8.0796-8.5916 ГГц для Х-диапазона. Далее т<sub>iono-free</sub> обозначена как L. Невязки, полученные за 2018 и 2019 годы, были сгруппированы по радиоисточникам, затем для каждого из них были построены зависимости этих невязок от звездного времени. В этих зависимостях была обнаружена периодичность, которая может быть объяснена влиянием структуры источника, вклад которой в групповую задержку не учитывался при определении поправок к всемирному времени, и поэтому проявился в невязках. Таким образом, невязки представляют собой ионосферно-свободную комбинацию структурных задержек и несут в себе информацию о наименее изменчивых частях источника, так как являются результатом двухлетних наблюдений.

Для дальнейших расчетов был выбран источник 0014+813, так как для него наблюдается наиболее протяженное по времени периодическое отклонение невязок от нуля и самое большое среднеквадратичное отклонение (СКО) невязок  $\sigma_0 \approx 76$  пикосекунд (далее – пс), это означает, что структура этого источника проявляется наиболее сильно. Далее при вычислениях менялись только FITS-файлы с картами в Х-диапазоне, файл с картой в S-диапазоне оставался одинаковым, и был взят за 29.07.2018.

Сравнение невязок задержек и ионосферно-свободных комбинаций структурных задержек для источника 0014+813. При сравнении графиков невязок г с графиками ионосферно-свободных комбинаций структурных задержек L, вычисленных по формулам из [3, с. 1311], заметно, что характер их зависимости от звездного времени схож, что видно на рис. 1.



Рис. 1. Графики зависимостей от звездного времени для невязок r и ионосферно-свободной комбинации L

Из приведенного выше графика видно, что карта источника может позволить построить модель структурной задержки, качественно отражающую ее поведение. Однако, модели, построенные по различным картам, разница между которыми составляет всего несколько месяцев, сильно отличаются друг от друга, это может объясняться как неточностью карт, так и изменчивостью источника.

Результаты (2). В предыдущем разделе было показано, что существующие карты не позволяют построить модель структурной задержки, которую можно было бы использовать на практике, так как зависимости, построенные по разным картам, сильно различаются. В предположении того, что наиболее яркие части источника являются наименее изменчивыми и наименее искаженными, была написана программа, находящая нижнюю границу для значений максимумов функций Гаусса, учет которых позволит максимально уменьшить СКО невязок. На первой итерации используется гауссиана с самым большим значением максимума, на каждой следующей итерации добавляется гауссиана с наибольшим значением максимума из числа гауссиан, не использованных ранее, таким образом, рассматриваются все гауссианы из каждого файла. Из табл. 1 видно, что использование гауссиан с использование тауссиан с использование тауссиан, так же существенно уменьшается разброс L на рис. 2.

$(0_1, 10_2), 400, 100, 100, 100, 100, 100, 100, 100$							
Дата получения изображения в диапазоне Х	σ <sub>1</sub> , πс	N <sub>1</sub>	σ <sub>2</sub> , пс	<i>N</i> <sub>2</sub>	$\sigma_2 - \sigma_1$ , пс		
08.04.2018	60	267	46	12	-14		
02.06.2018	47	671	46	49	-1		
29.07.2018	86	361	51	6	-35		
25.08.2018	63	360	49	14	-14		
16.10.2018	63	331	46	6	-17		
10.02.2019	59	427	47	6	-12		

Табл. 1. СКО разности r – L, при использовании отобранных гауссиан ( $\sigma_2$ , пс) и всех гауссиан ( $\sigma_1$ , пс), число использованных гауссиан – N



Рис. 2. Графики зависимостей от звездного времени для невязок r и ионосферно-свободной комбинации L

Заключение. В результате проделанной работы было показано, что существующие карты радиояркости квазаров не обладают необходимой точностью для вычисления структурной задержки, было выявлено, что использование только наиболее ярких компонент изображения источника уменьшает различие моделей структурной задержки, построенных по разным картам, следовательно, позволяет построить более точную модель структурной задержки.

Также было показано, что СКО невязок задержек, полученных в процессе обработки РСДБ-наблюдений и содержащих в себе структурную задержку, существенно уменьшается
после вычитания из них ионосферно-свободных комбинаций структурных задержек, рассчитанных по наиболее ярким компонентам изображений радиоисточников, что позволяет использовать данные невязки для построения карт радиояркости.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Xu M.H., Anderson J.M., Heinkelmann R., Lunz S., Schuh H., Wang G.L. Structure Effects for 3417 Celestial Reference Frame Radio Sources // The Astronomical Journal Supplement Series. 2019. Vol. 242, N. 1.

2. Charlot, P. Modeling Radio Source Structure for Improved VLBI Data Analysis // Interna-tional VLBI Service for Geodesy and Astrometry: General Meeting Proceedings. 2002. P. 233–242.

3. Charlot P. Radio–Source Structure in Astrometric and Geodetic Very Long Baseline Inter-ferometry // The Astronomical Journal. – 1990. Vol. 99, P. 1309–1326.

4. Губанов В.С. Обобщенный метод наименьших квадратов. Теория и применение в астрометрии. – СПб.: Наука, 1997. – 318 с.

5. Sanz Subirana J., Juan Zornoza J.M., Hernández-Pajares M. GNSS Data Processing. Volume I: Fundamentals and Algorithms. Noordwijk: ESA Communications, 2013. 238 p.

## УДК 533.9.07

И. Федоренко, В.М. Тимохин, В.Ю. Сергеев, Е.А. Ануфриев Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого<sup>(•)</sup>

# ИССЛЕДОВАНИЕ КРАЕВЫХ ЛОКАЛЬНЫХ МОД МЕТОДОМ ВИЗУАЛИЗАЦИИ С НАПУСКОМ НЕЙТРАЛЬНОГО ГЕЛИЯ НА ТОКАМАКЕ "ГЛОБУС-М2"

Филаменты – нитевидные структуры плазмы, возникающие вследствие развития пилинг-баллонной неустойчивости и составляющие пространственную структуру периферийных локализованных мод. Периферийные локализованные моды (ELM) – квазипериодические нестабильности, возникающие на периферии плазмы, приводящие к потере частиц и энергии из области удержания. Данные явления наблюдаются в плазме в режиме улучшенного удержания, H-mode [1]. Периферийная турбулентность, связанная с ELM, может оказывать пагубное влияние на удержание частиц и энергии, а связанные с ELM потоки частиц и энергии негативно влияют на состояние первой стенки и дивертора токамаков. Эти явления необходимо изучать и учитывать для успешной работы токамаков-реакторов, таких как ИТЭР [2].

Диагностика филаментов на токамаке «Глобус-М2» производилась путем визуализации с напуском нейтрального гелия. Диагностика реализована на основе уже имеющейся диагностики гелиевой спектроскопии (рис.1), предназначенной для измерения профилей электронных температуры и плотности по соотношению интенсивностей линий нейтрального гелия [3]. Возможность регистрации ELM является дополнительной функцией данной диагностики.

Важно отметить, что для наблюдения динамики процессов, связанных с филаментами, необходимо высокое пространственно-временное разрешение, т.к. характерная скорость филаментов составляет величину ~10<sup>4</sup> м/с [4], а их характерный размер - порядка нескольких сантиметров.

Диагностика представляет из себя комбинацию оптической системы, состоящей из четырехканального полихроматора с высокоскоростной камерой и системы газонапуска. Полихроматор, предназначенный для регистрации излучения линий нейтрального гелия HeI на длинах волн: 667.6, 706.5, 728.1 нм, а также континуального излучения 720 нм, состоит из

<sup>&</sup>lt;sup>(•)</sup> И. Федоренко, fedorenko.i@edu.spbstu.ru

оптической системы, разбивающей световой поток на 4 части для получения изображения рабочей области в различных спектральных линиях. Спектральное разрешение полихроматора определяется шириной полосы пропускания интерференционных фильтров и составляет величину около 1 нм. Пространственное разрешение получаемых изображений 2-3 мм.

Для выявления на изображениях струи нейтрального гелия быстрых и ярких событий, возникающих во время ELM, был разработан алгоритм получения дифференциальных изображений, позволяющий выделять быстро перемещающиеся объекты на стационарном фоне. Дифференциальное изображение получалось методом попиксельного вычитания текущей интенсивности канала полихроматора из фонового. За фоновое изображение принимался кадр, предшествующий текущему, в котором предполагалась регистрация ELM-события. На рис. 2а изображены сигналы мониторных диагностик в момент предполагаемого ELM-события, на рис. 2б и 2в изображены по три горизонтальных временных ряда кадров, соответствующих трем каналам полихроматора, при этом на рис. 2б изображены необработанные кадры, а на рис. 2в – дифференциальные изображения.



Рис. 7 (а). Трехмерная модель токамака «Глобус-М2» с встроенными компонентами диагностики параметров периферийной плазмы по соотношению линий нейтрального гелия; (б) Изображение полихроматора с наложением сепаратрисы – 174, (1) необработанный кадр, (2) дифференциальное изображение.

Видно, что за представленный временной промежуток наблюдается два соответствующих ELM всплеска сигнала  $D_{\alpha}$  в момент падения сигнала мягкого рентгена на 206.68 мс и 208.94 мс. Также видно возмущение сигнала наружного МГД зонда в те же моменты времени. На обработанных изображениях полихроматора можно наблюдать засвет верхней части изображения канала, который регистрируется в пределах одного кадра с временем экспозиции 620 мкс.

В рамках данной работы также был разработан алгоритм сопоставления изображений с магнитной конфигурацией плазмы в разряде, с помощью чего удалось оценить локализацию наблюдаемых явлений (рис. 16). Было обнаружено существенное увеличение интенсивности свечения в области внутри сепаратрисы, вытянутое вдоль нее со стороны слабого поля, в

момент предполагаемого ELM-события, а также некоторое увеличение интенсивности свечения в области за сепаратрисой со стороны слабого поля.

Отметим недостатки данной оптической системы. Основной проблемой является низкая интенсивность изображений, обусловленная в первую очередь невысоким суммарным коэффициентом пропускания фильтро-линзовой системы и малым диаметром входного зрачка (20 мм) полихроматора, не рассчитанного на работу при частотах более 1600 Гц. Также значимым недостатком являются малый угол обзора системы, не позволяющий наблюдать пространственную структуру наблюдаемых явлений. Вследствие этого не представляется возможным увеличение временного разрешения до необходимых для наблюдения динамики движения периферийных структур (~10 мкс). Для дальнейших исследований разрабатывается новая компактная светосильная оптическая система для наблюдения в видимом спектре на основе широкоугольного объектива Tamron (диаметр входной линзы - 62 мм, диапазон фокусных расстояний 18-200 мм) и высокоскоростной камеры Miro M110 с подвижным креплением к корпусу токамака. Отказываясь от статически прикрепленной к токамаку системы полихроматора в пользу камеры на подвижном креплении мы получаем возможность выбирать оптимальной области обзора. Яркость получаемых изображений будет увеличена за счет увеличения входного зрачка, а также за счет наблюдения гелиевой струи в полном видимом спектре.



Рис. 8. Пример регистрации ELM-событий. Разряд 42584. (а) Графики мониторных диагностик, сверху вниз: сигнал мягкого рентгена (15 мкм), Dα верхний купол, МГД зонд наружный.
 Вертикальные линии соответствуют началу съемки кадра (экспозиция 620 мкс, время простоя между кадрами 5 мкс); (б) необработанные кадры полихроматора, (в) обработанные (дифференциальные) изображения (яркость увеличена в 10 раз по сравнению с рис. 26)

Таким образом, представленные исследования демонстрируют принципиальную возможность наблюдения периферийных структур в плазме токамака «Глобус-M2» с помощью визуализации с напуском нейтрального гелия. Показана корреляция наблюдаемых явлений с сигналами мониторных диагностик, а также их локализация вблизи сепаратрисы, что позволяет связать их с ELM. Проведен анализ недостатков имеющейся оптической системы, с учетом чего выработаны предложения по разработке новой, специально предназначенной для регистрации ELM событий.

Работы поддержаны ГК Росатом и Минобрнауки России в рамках Федерального проекта 3 (U3), проект № FSEG-2023-0018 «Разработка и создание систем струйной и пеллет инжекции с повышенными производительностью и ресурсом»

## ЛИТЕРАТУРА

1. Wilson H. Edge localized modes in tokamaks //Fusion science and technology. – 2010. – Vol. 57. – №. 2T. – P. 174-182.

2. Sugihara M. et al. Disruption scenarios, their mitigation and operation window in ITER //Nuclear Fusion.  $-2007. - Vol. 47. - N_{\odot}. 4. - P. 337.$ 

3. Тимохин В. М. и др. Спектроскопическая диагностика периферийной плазмы токамака "Глобус-М2" с использованием инжекции нейтрального гелия //Письма в Журнал экспериментальной и теоретической физики. – 2022. – Т. 116. – №. 5. – С. 292-299.

4. Bulanin V. V. et al. The study of filaments by the Doppler backscattering method in the 'Globus-M' tokamak //Nuclear Fusion.  $-2019. - Vol. 59. - N_{\odot}. 9. - 096026.$ 

УДК 52-33

А.А. Матевосян<sup>1</sup>, Д.П. Барсуков<sup>2</sup> <sup>1</sup>Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого<sup>(•)</sup> <sup>2</sup> Физико-технический институт им. А.Ф. Иоффе РАН

# ВЛИЯНИЕ ИСКРИВЛЕНИЯ ПРОСТРАНСТВА НА МОМЕНТ ИНЕРЦИИ МАГНИТНОГО ПОЛЯ ПУЛЬСАРА

Введение. Пульсары представляют собой источники излучения, которое по характеру является импульсным и периодическим. По своей сути они являются нейтронными звездами, обладающими таким параметрами, как угловая скорость  $\Omega = 2\pi/P$ , где *P* - период вращения нейтронной звезды, и магнитное поле В. Период вращения пульсаров изменяется со временем, а именно увеличивается, и этот процесс определяется тем, что наблюдается постепенное торможение звезды и происходит уменьшение ее вращательной энергии.

Период вращения пульсаров увеличивается с характерным временным масштабом  $(10^5 - 10^7)$  лет, однако наблюдаются вариации темпа замедления на масштабах  $(1 - 10^4)$  лет [1]. Одно из возможных объяснений этого явления – прецессия нейтронной звезды, связанная с отличием тензора инерции звезды от сферического [2]. В данной работе рассматривается влияние искривления пространства на вклад магнитного поля вне звезды в ее момент инерции.

Метод исследования. Метрика Шварцшильда определяет следующий эффект: поля с высоким показателем мультипольности вблизи поверхности нейтронной звезды "усиливаются" по сравнению со значениями полей в плоском пространстве. Метрика Шварцшильда определяет внешнее гравитационное поле пульсара и имеет следующий явный вид:

<sup>&</sup>lt;sup>(•)</sup> А.А. Матевосян, matevosyan.aa@edu.spbstu.ru

$$ds^{2} = h(r)dt^{2} - \frac{dr^{2}}{h(r)} - r^{2}d\theta^{2} - r^{2}\sin^{2}\theta \,d\phi^{2},$$

где  $h(r) = 1 - \frac{r_g}{r}$  ( $r_g$  - гравитационный радиус пульсара, r - радиус самой звезды). Компоненты магнитного поля, которые модифицированы из-за наличия метрики Шварцшильда, определяются как [3]:

$$\vec{B} = B_r \vec{e_r} + B_\theta \vec{e_\theta} + B_\phi \vec{e_\phi}, z\partial e \ (\vec{e_r})^\alpha = \sqrt{h(r)} \delta_r^\alpha, \ (\vec{e_\theta})^\alpha = \frac{1}{r} \delta_\theta^\alpha, \ (\vec{e_\phi})^\alpha = \frac{1}{r\sin\theta} \delta_\phi^\alpha, \\ B_r = \sum_{lm} b_{lm} (l+1) \left(\frac{r_{ns}}{r}\right)^{l+2} f_l(r) Y_{lm}, \\ B_\theta = -\sum_{lm} b_{lm} \left(\frac{r_{ns}}{r}\right)^{l+2} \sqrt{h(r)} g_l(r) \frac{\partial Y_{lm}}{\partial \theta}, B_\phi = -\sum_{lm} b_{lm} \left(\frac{r_{ns}}{r}\right)^{l+2} \sqrt{h(r)} g_l(r) \frac{1}{\sin\theta} \frac{\partial Y_{lm}}{\partial \phi}, \\ m = c \phi_{lm} \mu_{lm} c \phi_{lm} d \phi_{lm} d$$

где  $Y_{lm}$  – сферические функции [4]. В выражениях выше упоминаются функции  $f_l(r)$  и  $g_l(r)$ , которые в свою очередь представляют собой гипергеометрические функции со следующими параметрами:

$$f_l(r) = F\left(l, \, l+2, \, 2(l+1); \, \frac{r_g}{r}\right), \, g_l(r) = F\left(l+1, \, l+2, \, 2(l+1); \, \frac{r_g}{r}\right).$$

Вследствие наличия гипергеометрических функций в выражении компонент поля в метрике Шварцшильда в случае значений г близких к  $r_g$  его полученные значения "превышают" значения поля в плоской метрике в  $10^2 - 10^3$  раз. Как будет показано далее, это превышение не оказывает особое влияние на момент инерции самого поля.

Момент импульса записывается как [5]

$$L_{A} = -\int \sqrt{-h} T_{m}^{0}(\vec{x}, t) \cdot \xi_{A}^{m} d^{3}x, A = x, y, z, \ T_{\alpha}^{0} = \frac{c}{4\pi} \frac{1}{\sqrt{h}} \left[ \vec{D} \times \vec{B} \right],$$

где  $\xi_A^m$  - компоненты вектора Киллинга [6]. Момент импульса при произвольном направлении  $\vec{\Omega}$  имеет вид:

$$L_{A} = -\frac{1}{4\pi} \int \frac{1}{h(r)} \left( \left[ \vec{r} \times \left[ \vec{r} \times \vec{\Omega} \right] \right]_{A} + \left( \vec{B} \cdot \left[ \vec{\Omega} \times \vec{r} \right] \right) \left[ \vec{r} \times \vec{B} \right]_{A} \right) r^{2} \sin \theta \, dr d\theta d\phi,$$
  
$$A = r \, \theta \, \phi$$

где  $\vec{r} = r \vec{e_r}$ ,  $A = r, \theta, \phi$ .

Где  $r = re_r$ ,  $n = r, o, \varphi$ . *Результаты.* В данной работе рассматривается случай двух равных гармоник  $b_{lm} = b_{l-m}$  и для значений  $|m| \neq 1$ . В этом случае выражение, записанное выше, принимает вид [7]:

$$\begin{split} \vec{L} &= I_f \vec{\Omega} + \delta I_f \vec{e_z} (\vec{e_z} \cdot \vec{\Omega}), \\ \delta I_f &= \frac{b_{lm}^2 r_{ns}^4}{c^2} \cdot \frac{(l+1)^2 (l^2+l-3m^2)}{(2l+3)(2l-1)} \left( \frac{2l^2+2l+3}{2l^2(l+1)^2} \cdot Q_\perp - Q_r \right), \\ Q_r &= \frac{1}{l^2} \int_0^{r_{LC}} \frac{1}{h(r)} \left( \frac{r_{ns}}{r} \right)^{2l} f_l^2(r) dr \ u \ Q_\perp &= \int_0^{r_{LC}} \left( \frac{r_{ns}}{r} \right)^{2l} g_l^2(r) dr. \end{split}$$

На рис. 1 и 2 показаны зависимость величины  $\delta I_f$  от l при m = 0 для различных значений  $r_g$  и зависимость отношения  $\delta I_f/\delta I_f \vdash_{r_g=0}$  от отношения  $r_g/r_{ns}$  при m=1 для различных значений 1 соответственно. Из рисунков видно, что "увеличение" поля в метрике Шварцшильда [3] не приводит к значительным изменениям его вклада в момент инерции, он слабо отличим от случая, в котором метрика плоская. Это связано с тем, что учет искривления пространства приводит к "увеличению" магнитного поля в 10 – 10<sup>3</sup> раз при фиксированном значении мультипольного момента на бесконечности, а при фиксированном значении поля на поверхности оно просто дополнительно уменьшается в  $10 - 10^3$  раз по Кроме того, область значительного "увеличения" мере удаления от звезды. мелкомасштабного поля мала и дает малый вклад при интегрировании по всему объему.



Рис. 1. Зависимость величины  $\delta I_f$  от l при m = 0 для различных значений  $r_g$ . На левом графике показана зависимость при постоянном поле на поверхности  $\langle B^2 \rangle$ , на правом при постоянном моменте  $b_{lm}$  на бесконечности



Рис. 2. Зависимость отношения  $\delta I_f / \delta I_f \vdash_{r_g=0}$  от отношения  $r_g / r_{ns}$  при m = l для различных значений l. На левом графике показана зависимость при постоянном поле на поверхности  $\langle B^2 \rangle$ , на правом при постоянном моменте  $b_{lm}$  на бесконечности

Выводы. В работе рассмотрено влияние искривления пространства, которое находится в метрике Шварцшильда, на момент инерции внешнего магнитного поля вращающейся звезды. Показано, что "увеличение" напряженности мелкомасштабного поля в метрике Шварцшильда по сравнению поля в случае плоского поля [3] к значительному результату не приводит: момент инерции поля практически не отличим от случая пространства плоской метрики.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Biryukov A., Beskin G., Karpov S. Monotonic and cyclic components of radio pulsar spin-down //Monthly Notices of the Royal Astronomical Society. – 2012. – Vol. 420. – №. 1. – P. 103-117.

2. Lyne A. et al. Switched magnetospheric regulation of pulsar spin-down //Science. – 2010. – Vol. 329. – No. 5990. – P. 408-412.

3. Asseo, Estelle, and David Khechinashvili. "The role of multipolar magnetic fields in pulsar magnetospheres."Monthly Notices of the Royal Astronomical Society 334.4 (2002): P. 743-759.

4. Варшалович Д. А., Москалев А. Н., Херсонский В. К. Квантовая теория углового момента. – 1975.

5. Владимиров Ю. С. Классическая теория гравитации //М: URSS. – 2009.

6. Вейнберг С. Гравитация и космология. Принципы и приложения общей теории относительности. – Рипол Классик, 1975.

7. Goglichidze O. A., Barsukov D. P., Tsygan A. I. Magnetic field inertia and rotation dynamics of radio pulsars //Monthly Notices of the Royal Astronomical Society. – 2015. – Vol. 451. – №. 3. – P. 2564-2574.

УДК 523.9

С.П. Шараг<sup>1</sup>, Г.А. Ковальцов<sup>2,3</sup>, В.М. Остряков<sup>1</sup>, <sup>1</sup>Санкт-Петербургский Политехнический ун-т Петра Великого<sup>(•)</sup> <sup>2</sup>Физико-технический институт им. А.Ф. Иоффе РАН <sup>3</sup>Национальный исследовательский ядерный университет МИФИ

# ИЗОТОПНЫЕ АНОМАЛИИ СОЛНЕЧНЫХ КОСМИЧЕСКИХ ЛУЧЕЙ

Введение. Химический состав солнечных космических лучей (СКЛ), т.е. энергичных частиц, может значительно отличаться от состава тепловой плазмы, из которой эти частицы ускоряются. Наибольшую известность в этом смысле имеют так называемые <sup>3</sup>Не-богатые события (импульсные солнечные вспышки). Эти сравнительно слабые события характеризуются также повышенным содержанием и более тяжелых элементов, их более высоким средним зарядом, избытком электронов и т.д. [1, 2]. В последние годы были также экспериментально обнаружены изотопные аномалии в подобных событиях, характеризуемые увеличением содержания изотопов различных элементов в 1.3–4.4 раза [3]. Современные модели происхождения химических аномалий связывают обычно с селективными механизмами ускорения частиц в рамках стохастического ускорения Ферми II рода, описываемого уравнением Фоккера-Планка. При этом коэффициенты пространственной и импульсной диффузии зависят от заряда (Q) и атомного номера (A) данного химического элемента.

*Целью* работы является проверка модели ускорения и утечки ионов из некоторой вспышечной области на Солнце при стохастическом ускорении, которая описывается стационарным уравнением Фоккера-Планка.

Модель ускорения и аналитические решения. Для рассмотрения изотопных особенностей в СКЛ будем исходить из уравнения Фоккера-Планка, описывающего прирост энергии частицы и ее утечку из области:

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \frac{1}{p^2} \frac{\partial}{\partial p} p^2 (ap^n) \frac{\partial f}{\partial p} - \frac{f}{T_x} \#(1)$$

здесь f - функция распределения частиц, зависящая от <math>Q и A;  $D_p = ap^n$  - коэффициент диффузии в импульсном пространстве и  $T_x = 1/bp^n$  – характерное время ухода частиц из области за счет пространственной диффузии,  $T_x \sim L^2/\pi^2 D_x$  (L – пространственный масштаб области ускорения).

Коэффициенты диффузии в координатном и импульсном пространствах (соответственно,  $D_x$  и  $D_p$ ) могут быть найдены в рамках квазилинейного подхода в теории плазмы и определяются взаимодействием волна – частица, если турбулентность представляет собой набор волн со случайными фазами. В случае Альфвеновских волн эти величины были вычислены в работе [4]:

<sup>&</sup>lt;sup>(•)</sup> С.П. Шараг, sergey.sharag34@gmail.com

$$D_{p} = ap^{n} = D_{p0} \left(\frac{Q}{A}\right)^{2-s} p^{n} \qquad (a > 0, \ n = s - 1 \text{ при } s < 2 \text{ и } n = 1 \text{ при } s \ge 2)$$
  
$$\frac{1}{T_{x}} = bp^{m} = \pi^{2} D_{x0} \left(\frac{Q}{A}\right)^{s-2} p^{m}/L \qquad (b > 0, \ m = 3 - s \text{ при } s < 2 \text{ и } m = 1 \text{ при } s \ge 2)$$
#(2)

где *s* – показатель степени в распределении плотности энергии турбулентности по волновому числу *k*. Как видно, решение будет различным при s < 2 и  $s \ge 2$ . После серии преобразований стационарного уравнения (1), которые мы здесь опускаем, оно приводится к уравнению для функции Макдональда, *K*, решением которого будет:

$$f = \begin{cases} const * p^{-\frac{s}{2}} K_{\frac{s}{2(3-s)}} \left( \sqrt{\frac{\tau_a}{\tau_e}} \frac{1}{3-s} \left(\frac{Q}{A}\right)^{s-2} E^{\frac{3-s}{2}} \right), \ s < 2 \\ \\ const * p^{-1} K_1 \left( \sqrt{\frac{\tau_a}{\tau_e}} \left(\frac{Q}{A}\right)^{s-2} E^{\frac{1}{2}} \right), \ s \ge 2 \end{cases}$$

где нерелятивистская энергия выражена в МэВ/нуклон и нормирована на 1 МэВ/нуклон (так же и, соответственно, импульс); величины  $\tau_a = p^2/D_p$  и  $\tau_e = L^2/\pi^2 D_x$  представляют собой характерные времена ускорения и утечки частиц из области, отнесенные к 1 МэВ/нуклон и Q = A = 1.

Как следует из приведенного решения (при заданных E и отношении  $\tau_a/\tau_e$ ), подстановка различных величин A позволяет изучать особенности в ускорении (и распространении) разных изотопов СКЛ, считая, что их заряды идентичны. Определим превышение содержания изотопов с массами  $A_1$  и  $A_2$  относительно их естественной распространенности (в солнечном ветре, SW) как

$$\alpha = \frac{F(A_1)/F(A_2)}{F_{SW}(A_1)/F_{SW}(A_2)} \#(4)$$

Здесь мы перешли от функции распределения по импульсам *f*, к функции распределения по энергиям *F*, согласно соотношению  $F = 4\pi p^2 (dp/dE) f$ , оставив в (4) в качестве аргумента лишь атомную массу. Положим в качестве *Q* одинаковый для разных изотопов заряд, равный его тепловому (инжекционному) значению [5], а вместо энергии подставим ее среднюю величину в интервале измерений (12–60 МэВ/нуклон [3]). Таким образом, параметрами наших расчетов будут (помимо A) величины s и отношение времен  $\tau_a/\tau_e$ , влияние которых на  $\alpha$  можно видеть на рисунке 1. При  $A_2 > A_1$  и s > 2 аргументы функции Макдональда оказываются в отношении

$$\left(\sqrt{\frac{\tau_a}{\tau_e}} \left(\frac{Q}{A_2}\right)^{s-2} E^{\frac{1}{2}}\right) < \left(\sqrt{\frac{\tau_a}{\tau_e}} \left(\frac{Q}{A_1}\right)^{s-2} E^{\frac{1}{2}}\right),$$

что приводит к обогащению более тяжелого изотопа 2 по отношению к основному изотопу 1, тогда как для s < 2 возникает обратная ситуация. Поскольку наблюдения показывают обогащение более тяжелыми изотопами, то мы рассматриваем только случай s > 2. После получения основного соотношения (4) можно попытаться сравнить наблюдаемые аномалии изотопного состава СКЛ с нашей теоретической моделью при различных фигурирующих здесь параметрах. Полученные выше решения мы применили для объяснения изотопного состава события СКЛ 20.08.2002 г. При рассмотрении массива экспериментальных данных

по всем элементам и их изотопам [3] мы записали функционал, представляющий собой сумму квадратов отклонений теоретических и экспериментальных значений для обогащений всех элементов с учетом ошибок их измерений (критерий  $\chi^2$ ). Минимум этого функционала дает наиболее вероятные значения параметров модели, при которых этот минимум достигается. Расчеты проводились для температуры в области ускорения  $10^6$  К. Наиболее вероятные параметров в рамках нашего рассмотрения получились следующими: s = 2.8 и  $\tau_a/\tau_e = 76$ .

Результаты и обсуждение. Итак, сравним наблюдаемые аномалии изотопного состава СКЛ с нашей теоретической моделью, рис. 1. Обратим внимание, что ранее подобная процедура была проделана в работах [6,7] численными методами с включением даже большего числа эффектов, происходящих с частицей при ее распространении в плазме. К ним относятся эффекты изменения заряда (во вспышечной области на Солнце [8]) и адиабатические потери энергии в межпланетной среде [9]. В этих работах также было получено ограничение на показатель s,  $s \sim 2.5-3$ , и на отношение времен,  $\tau_a/\tau_e >> 1$ . Данное рассмотрение отличается своим аналитическим (т.е., более наглядным) подходом и говорит о преобладающей важности процессов, включенных в уравнение (1), хотя дополнительные эффекты из [6, 7], несомненно, имеют место при ускорении и распространении частиц.



Рис. 1. Экспериментально измеренные обогащения в солнечном событии 20.08.2002 г. (крестики с ошибками - измерения) [3] в сравнении с расчетными величинами (полые квадраты) при параметрах *s*~2.8 и *τ<sub>a</sub>*/*τ<sub>e</sub>*= 76. По оси абсцисс отложена абсолютная масса более редкого изотопа

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Kocharov L. G., Kocharov G. E. 3 He-rich solar flares //Space science reviews. – 1984. – Vol. 38. – P. 89-141.

2. Reames D. V. Solar energetic particles: A paradigm shift //Reviews of Geophysics. – 1995. – Vol. 33. – №. S1. – P. 585-589.

3. Wiedenbeck M. E. et al. Heavy-ion fractionation in the impulsive solar energetic particle event of 2002 August 20: elements, isotopes, and inferred charge states //The Astrophysical Journal.  $-2010. - Vol. 719. - N_{\odot}. 2. - P. 1212.$ 

4. Schlickeiser R., Steinacker J. Particle acceleration in impulsive solar flares: II. Nonrelativistic protons and ions //Solar physics. – 1989. – Vol. 122. – P. 29-52.

5. Arnaud M., Raymond J. Iron ionization and recombination rates and ionization equilibrium //Astrophysical Journal, Part 1. – 1992. – Vol. 398. – P. 394-406.

6. Kartavykh Y. Y. et al. A possible enrichment of heavy and ultraheavy ions in solar energetic particle events due to a combined effect of stochastic acceleration and Coulomb losses //The Astrophysical Journal. – 2020. - Vol. 888. - No. 1. - P. 48.

7. Kartavykh Y. Y. et al. A Mechanism for the Fractionation of Isotopes in 3He-rich Solar Energetic Particle Events //The Astrophysical Journal.  $-2020. - Vol. 906. - N_{\odot}. 1. - P. 6.$ 

8. Ostryakov V. M. et al. Charge state distributions of iron in impulsive solar flares: Importance of stripping effects //Journal of Geophysical Research: Space Physics. – 2000. – Vol. 105. – №. A12. – P. 27315-27322.
 9. Kartavykh, J. J., et al. Adiabatic deceleration effects on the formation of heavy ion charge spectra in

interplanetary space. // Solar Physics. - 2005. - Vol. 227. - P.123-135.

УДК 533.9; 530.22

# В.В. Дубов, В.Д. Серов, С.П. Рощупкин Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого<sup>(•)</sup>

# РЕЗОНАНСНЫЙ ПРОЦЕСС БРЕЙТА-УИЛЛЕРА В ВЫСОКОТЕМПЕРАТУРНОЙ ЛАЗЕРНОЙ ПЛАЗМЕ

Введение. При облучении оболочки, содержащей дейтерий-тритиевую смесь (ДТ), рентгеновскими лазерами с интенсивностями порядка  $I \sim 10^{24} \div 10^{25}$  Вт/см<sup>2</sup>, эта оболочка испарится, и ДТ смесь будет эффективно сжиматься, разогреваясь до необходимых для управляемого лазерного синтеза (УЛС) температур [1,2]. При этом параллельно будет иметь место ряд процессов КЭД, модифицированных рентгеновским полем. Одним из основных таких процессов является резонансное спонтанное тормозное излучение релятивистских электронов на ионах. При этом, резонансные спонтанные гамма-кванты будут иметь строго определенную энергию и излучаться в узком конусе с начальными электронами [3-5]. Такие гамма-кванты в поле рентгеновского лазера могут резонансно рождать электрон-позитронные пары (модифицированный внешним полем процесс Брейта-Уиллера). Данный процесс может влиять на протекание УЛС.

В настоящей работе теоретически изучен процесс рождения ультрарелятивистских электрон-позитронных пар двумя жесткими гамма-квантами во внешнем поле (процесс Брейта-Уиллера, модифицированный внешним полем). Подобные процессы могут протекать резонансно [6-8].

Исходные положения. В условиях резонанса (Олейника) промежуточная виртуальная частица (электрон или позитрон) выходит на массовую оболочку и становится реальной, а исходный процесс второго порядка по постоянной тонкой структуры эффективно распадается на два последовательных процесса первого порядка [3-8]. Основным параметром при изучении такого рода процессов является классический релятивистски-инвариантный параметр

$$\eta = \frac{eF\lambda}{mc^2},\tag{1}$$

численно равный отношению работы поля над электроном на длине волны к энергии покоя электрона (*e* и *m* заряд и масса электрона, *F* и  $\lambda = c/\omega$  напряженность поля и длина волны,  $\omega$  частота). Рассматриваемый в работе случай  $\eta \gtrsim 1$  определяет сильное поле. В работе используется релятивистская система единиц  $\hbar = c = 1$ 

<sup>&</sup>lt;sup>(•)</sup>В.Д. Серов, vitalii\_serov@inbox.ru

Резонансная кинематика процесса. В сильном внешнем поле промежуточный электрон (или позитрон) может стать реальным, тогда одиночный процесс второго порядка по постоянной тонкой структуры преобразуется в последовательность двух процессов первого порядка – стимулированного лазерным полем процесса Брейта-Уиллера (вторая вершина), а затем стимулированного лазерным полем Комптон-эффекта (первая вершина) (рис. 1).

Для резонанса необходимо, во-первых, чтобы число излученных в первой вершине  $(r' \ge 1)$  и поглощенных во второй  $(r \ge 1)$  фотонов внешней волны было больше единицы. Вофотонов начальных энергии И конечных частиц должны быть вторых, ультрарелятивистскими:  $\omega_{1,2} \gg m_*$ ,  $E_+ \gg m_*$ , где  $m_*$  - эффективная энергия покоя электрона в поле волны. Помимо этого, начальные и конечные частицы должны распространяться в узком конусе ( $\theta_{j\pm} = \measuredangle(\mathbf{k}_j, \mathbf{p}_{\pm}) << 1$ , j = 1, 2;), а углы между ними и направлением внешней волны должны быть распространения большими  $(\theta_i = \measuredangle (\mathbf{k}_i, \mathbf{k}) \sim 1, \quad j = 1, 2; \quad \theta_{\pm} = \measuredangle (\mathbf{k}, \mathbf{p}_{\pm}) \sim 1; \quad \theta_1 \approx \theta_2 = \theta).$  Рассмотрение данного процесса проводится только для канала А, результаты для остальных получаются заменой импульсов.



Рис. 1 Диаграммы Фейнмана резонансного процесса рождения электрон-позитронных пар при взаимодействии двух гамма-квантов в поле сильной монохроматической электромагнитной волны, каналы A и B; каналы C и D отличаются перестановкой начальных фотонов

Анализ законов сохранения 4-квазиимпульса в каждой вершине и резонансное условие  $\tilde{q}_{-}^2 = m_*^2$  позволяют найти зависимость нормированной энергии конечного позитрона  $x_+ = E_+ / \omega_i$  от его угла вылета и числа поглощенных фотонов внешней волны

$$x_{+(r)} = \frac{\omega_2}{2\omega_i(\varepsilon_{BW(r)} + \delta_{2+}^2)} [\varepsilon_{BW(r)} \pm \sqrt{\varepsilon_{BW(r)}(\varepsilon_{BW(r)} - 1) - \delta_{2+}^2}],$$
(2)

$$\omega_i = \omega_1 + \omega_2, \quad \delta_{2+} = \frac{\omega_2}{2m_*} \theta_{2+}, \quad \omega_{BW} = \frac{(2m_*)^2}{4\omega \sin^2(\theta/2)}, \quad \varepsilon = \frac{\omega_2}{\omega_{BW}}, \quad \varepsilon_{BW(r)} = r\varepsilon; \quad (3)$$

а также зависимость нормированной энергии конечного электрона  $x_{-} = E_{-} / \omega_{i}$  от его угла вылета и числа излученных фотонов внешней волны:

$$x_{-(r')} = \frac{\omega_{l}}{2\omega_{i}(\varepsilon_{C(r')} - \delta_{l-}^{2})} [\varepsilon_{C(r')} + \sqrt{\varepsilon_{C(r')}^{2} + 4(\varepsilon_{C(r')} - \delta_{l-}^{2})}],$$
(4)

$$\delta_{1-} = \frac{\omega_1}{m_*} \theta_{1-}, \quad \omega_C = \frac{{m_*}^2}{4\omega \sin^2(\theta/2)}, \quad \varepsilon' = \frac{\omega_1}{\omega_C}, \quad \varepsilon_{C(r')} = r'\varepsilon'.$$
(5)

Отметим, что решение для энергии позитрона со знаком «-» под корнем в выражении (2) будет иметь меньшую вероятность, чем со знаком «+». Также общий закон сохранения энергии  $x_+ + x_- = 1$  накладывает связь на углы вылета конечных частиц для каждой пары значений (r, r').

*Резонансное дифференциальное сечение*. Аналитическое выражение для максимального резонансного дифференциального сечения получено стандартным образом

$$\frac{d\sigma_{r,r(max)}}{d\delta_{2+}^2} = r_e^2 C_{i\eta} R_{r,r'}(\delta_{2+}^2), \quad C_{i\eta} = \frac{128\pi\omega_i^2}{\alpha^2 \delta_{12}^2 \omega_2^2 (1+\eta^2)}, \quad R_{r,r'}(\delta_{2+}^2) = \frac{x_{+(r)} P_{(r)}(u_{2+}, v_{2+})}{1-x_{+(r)}} \frac{K_{(r')}(u_{1-}, v_{1-})}{H_{(r')}^2 (v_{1-})}.$$
 (6)

Здесь  $r_e = e^2 / m$ - классический радиус электрона,  $\alpha$ - постоянная тонкой структуры,  $\delta_{12}^2 = \theta_{12}^2 \omega_1 \omega_2 / m_*$ ,  $\theta_{12} = \measuredangle(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2) <<1$ ; спектрально-угловое распределение  $R_{r,r'}(\delta_{2+}^2)$  содержит следующие функции релятивистки-инвариантных параметров:

$$P_{(r)}(u,v) = J_r^2(\gamma_r(u,v)) + \eta^2(2u-1) \left[ \left( \frac{r^2}{\gamma_r^2(u,v)} - 1 \right) J_r^2 + J_r'^2 \right],$$
(7)

$$K_{(r')}(u,v) = -4J_{r'}^{2}(\gamma_{r'}(u,v)) + \eta^{2} \left[2 + \frac{u^{2}}{1+u}\right] (J_{r'-1}^{2} + J_{r'+1}^{2} - 2J_{r'}^{2}), \quad H_{(r')}(v) = \int_{0}^{v} \frac{du}{(1+u)^{2}} K_{(r')}(u,v).$$
(8)

На рис. 2 представлен пример графика для максимального резонансного дифференциального сечения (6) в единицах нерезонансного сечения ( $r_e^2$ ). Видно, что в случае резонанса можно ожидать превышения нерезонансного значения на 4 порядка величины.



Рис. 2. График для максимального резонансного дифференциального сечения для следующих параметров:  $\eta = 1$ ,  $I = 4,65 \times 10^{25} Bm / cm^2$ ,  $\omega = 5\kappa \beta B$ ,  $\omega_1 = 5M\beta B$ ,  $\omega_2 = 105M\beta B$ , r = r' = 1.

Заключение. В работе рассмотрен резонансный процесс рождения электронпозитронных пар двумя ультрарелятивистскими гамма-квантами во внешнем сильном поле с интенсивностями вплоть до  $10^{25}$   $Bm/cm^2$ . Детально изучена резонансная кинематика процесса. Найдена зависимость энергий конечных частиц от угла вылета позитрона. Получено и исследовано резонансное дифференциальное сечение процесса. Показано, что максимальное резонансное дифференциальное сечение во внешнем поле может значительно превышать соответствующее сечение в его отсутствии. Полученные результаты могут существенно повлиять на стабилизацию и удержание высокотемпературной лазерной плазмы в УЛС.

Исследование профинансировано Министерством науки и высшего образования РФ в рамках Программы стратегического академического лидерства «Приоритет-2030» (соглашение 075-15-2023-380 от 20 февраля 2023 г.)

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Гришина И. А., Иванов В. А., Коврижных Л. М. Актуальные направления развития исследований по физике плазмы и управляемому термоядерному синтезу в России в 2016 г // Физика плазмы. – 2017. - № 43:12. – С. 1040-1048.

2. Гуськов С. Ю. Лазерный термоядерный синтез и физика высоких плотностей энергии // Квантовая электроника. – 2022. - № 52:12. – С. 1070-1078.

3. Roshchupkin S. P., Dubov A. V., Dubov V. V., Starodub S. S. Fundamental physical features of resonant spontaneous bremsstrahlung radiation of ultrarelativistic electrons on nuclei in strong laser fields // New J. Phys. – 2022. – Vol. 24. – P. 013020.

4. Roshchupkin S. P., Dubov A. V., Starodub S. S. Radiation of High-Energy Gamma Quanta by Ultrarelativistic Electrons on Nuclei in Strong X-ray Fields // Universe. – 2022. - Vol. 8. – P. 218.

5. Roshchupkin S. P., Dubov A. V., Starodub S. S. The possibility of creating narrow beams of high-energy gamma quanta in the process of resonant spontaneous bremsstrahlung radiation of ultrarelativistic electrons on nuclei in strong electromagnetic fields // Phys. Scr. – Vol. 97. – 2022. – P. 105302.

6. Рощупкин С. П., Лебедь А. А. Эффекты квантовой электродинамики в сильных импульсных лазерных полях. – К.: Наук. Думка, 2013. – 191 с.

7. Рощупкин С. П., Ворошило А. И. Резонансные и когерентные эффекты квантовой электродинамики в сильных световых полях. – К.: Наук. Думка, 2008. – 398 с.

8. Roshchupkin S. P., et al. Resonant production of high-energy electron-positron pairs and gamma quanta in the quantum electrodynamics processes in strong laser fields // High Power Lasers and Applications: SPIE. -2021. - Vol. 11777. - PP. 40-55.

#### УДК 533.9

А.А. Широбоков, И.Ю. Веселова, Е.Г. Кавеева, В.А. Рожанский, П.С. Кудреватых Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого<sup>(•)</sup>

# ИССЛЕДОВАНИЕ ВЛИЯНИЯ ТОРОИДАЛЬНОГО ИНДУКТИВНОГО ЭЛЕКТРИЧЕСКОГО ПОЛЯ НА ТОКИ В SOL В ГЕОМЕТРИИ ИТЭР

Введение. В будущем токамаке ИТЭР на стадии срыва тока и при движениях плазменного шнура может появляться тороидальное электрическое поле индукционного типа, обеспечиваемое напряжением на обходе вплоть до 1 кВ (длина силовой линии около 36 м). Данное электрическое поле может приводить к значительному изменению профилей токов, текущих в SOL и на пластины дивертора. В свою очередь, изменение токов, текущих на пластины, может привести и к изменению тепловых нагрузок, которые, будучи слишком высокими, могут привести, например, к расплавлению пластин.

*Цель работы.* Исследовать влияние дополнительного напряжения на обходе на протекание токов в SOL в геометрии будущего токамака ИТЭР.

Аналитическая модель. Для исследования эффектов, связанных с появлением тороидального поля индукционного типа, рассмотрим магнитную трубку в SOL между двумя пластинами дивертора с дейтериевой плазмой с очень высокой проводимостью. Введем систему координат (x, y, z), причем в данном случае x – полоидальная координата, y – радиальная, z – тороидальная.

Из рассмотрения границы плазма-стенка можно получить [1], что ток, текущий на (внешнюю) пластину, имеет вид:

$$j_x = b_x e n_e \left( c_s - (1 - \gamma_e) \sqrt{\frac{T_e}{2\pi m_e}} e^{-\frac{e(\varphi - \varphi_{pl})}{T_e}} \right), \#(1)$$

<sup>&</sup>lt;sup>(•)</sup> А.А. Широбоков, shirobokov.aa@edu.spbstu.ru

где  $b_x = B_x/B$ ,  $B_x$  – полоидальное магнитное поле,  $c_s = \sqrt{\frac{T_e + T_i}{m_i}}$  – скорость звука,  $\gamma_e$  – коэффициент вторичной электронной эмиссии,  $\varphi$  – потенциал плазмы вблизи пластины,  $\varphi_{\rm pl}$  – потенциал пластины. Видно, что величина этого тока ограничена ионным током насыщения  $j_x^{sat} = b_x e n_e c_s$  в пределе  $\varphi - \varphi_{\rm pl} \to +\infty$ .

При этом в рассматриваемой модели из уравнения непрерывности  $div \vec{j} = 0$  следует, что ток внутри магнитной трубки должен сохраняться, и поэтому ток, текущий на внешнюю пластину, равен току, стекающему с внутренней пластины.

Далее, из продольного баланса сил для электронов можно получить [2], что полоидальная проекция продольного тока, текущего в объеме плазмы в отсутствие индуктивного поля, имеет вид:

$$j_{x}^{||} = \sigma_{||} b_{x}^{2} \left( \frac{1}{en_{e}} \frac{\partial n_{e} T_{e}}{h_{x} \partial x} + \frac{g_{T}}{e} \frac{\partial T_{e}}{h_{x} \partial x} - \frac{\partial \varphi}{h_{x} \partial x} \right), \#(2)$$

где  $\sigma_{||}$  - продольная проводимость,  $g_T$  – коэффициент из термосилы (равный 0.71 для дейтерия),  $h_x$  – метрический коэффициент.

Именно выражение (1) и является граничным условием для этого тока. При возникновении дополнительного напряжения  $U_{loop}$  на обходе в выражение (2) добавляется еще одно слагаемое:

$$j_{x}^{||} = \sigma_{||} b_{x}^{2} \left( \frac{1}{en_{e}} \frac{\partial n_{e} T_{e}}{h_{x} \partial x} + \frac{g_{T}}{e} \frac{\partial T_{e}}{h_{x} \partial x} - \frac{\partial \varphi}{h_{x} \partial x} \right) + \sigma_{||} \frac{U_{loop}}{h_{z}} b_{z} b_{x}, \#(3)$$

где  $h_z = 2\pi R$  – длина окружности по тору,  $b_z = B_z/B$ ,  $B_z$  – тороидальное магнитное поле.

Если напряжение U<sub>loop</sub> достаточно большое, то возникший ток будет огромным вследствие высокой проводимости горячей плазмы внутри магнитной трубки. Это, однако, невозможно, так как ток, текущий на пластины, ограничен ионным током насыщения. Следовательно, за счет изменения профиля *φ* внутри магнитной трубки, должно появиться потенциальное поле большой величины и обратного к индуктивному полю знака, которое скомпенсирует возникшее индуктивное поле и ограничит протекающий в плазме ток ионным током насыщения. Таким образом, в описанной модели при больших напряжениях обхода профиль потенциала должен быть линейным, причем вблизи внешней пластины его значение должно быть много больше плавающего, чтобы запереть все электроны, а вблизи внутренней – несколько меньше плавающего, чтобы позволить небольшому потоку электронов течь на пластину и так же обеспечить протекание ионного тока насыщения.

Если же в нашей плазме имеются холодные зоны с низкой проводимостью ( $\sigma_{||} \sim T^{3/2}$ ), например, ниже X-точки в области дивертора, то ионный ток насыщения там пропустить сложнее, и поэтому соответствующее потенциальное поле должно поменять знак, чтобы помочь протечь этому току. То есть в горячих областях будет все так же наблюдаться линейный профиль потенциала, но в холодных областях он будет уменьшаться (или увеличиваться), чтобы соответствующее потенциальное электрическое поле поменяло знак.

Моделирование ИТЭР. В качестве опорного варианта был взят расчет базового сценария ИТЭР №123063 с напуском дейтерия 1e23 ат/с, напуском неона 8.8e19 ат/с, потоком энергии 100 МВт и потоком гелия 1e20 ат/с из центральной области. Для моделирования использовался двумерный код SOLPS-ITER 3.0.8 [3]. При этом предполагалось, что срыв тока – достаточно быстрый процесс, и характерные времена перестройки электрических полей много меньше времен перестройки n, T и других параметров. Таким образом, решалось только уравнение непрерывности divj = 0, из

которого находилось необходимое распределение потенциала в плазме (остальные параметры являлись «замороженными»). Была проведена серия расчетов для различных напряжений обхода  $U_{loop} = -180 \text{ B} \div +400 \text{ B}$  – выбранный диапазон позволил получить насыщение ВАХ (зависимость полного тока, текущего на пластины, от напряжения обхода).

В результате найдено, что при появлении индуктивного поля профиль тока на пластинах заметно изменяется. А именно, при больших напряжениях обхода он приближается к ионному току насыщения, либо меняя знак при положительных напряжениях, либо не меняя знака при отрицательных напряжениях. При этом сначала происходит насыщение дальнего SOL, а уже потом – областей, близких к сепаратрисе. Полоидальное распределение потенциала при больших напряжениях обхода качественно совпало с описанным в аналитической модели. Соответствующие зависимости приведены на рис. 1.



Рис. 1. Профили моделирования ИТЕР с замороженными параметрами при различных напряжениях обхода

Помимо расчетов с замороженными параметрами плазмы с помощью SOLPS-ITER 3.0.8 был проведен расчет ИТЭР с теми же начальными параметрами разряда, при котором уже все величины менялись самосогласованно, т. е. решалась полная система уравнений, описывающая поведение плазмы с напряжением на обходе  $U_{loop} = -20$  В. Существенных изменений концентраций и температур плазмы при таком напряжении (и меньше) не найдено. Это указывает на приемлемость пренебрежения напряжением на обходе в стационарных режимах, когда это напряжение мало.

Выводы. В работе исследовано влияние индуктивного электрического поля на распределение электрического потенциала в плазме, а также на протекание токов в SOL и на диверторные пластины в геометрии ИТЭР при различных напряжениях обхода, появляющихся при движении плазменного шнура. Ток, текущий на пластины, выходит на насыщение как при больших отрицательных, так и при больших положительных напряжениях обхода. При этом для расчета соответствующей ВАХ необходимо учитывать сложную структуру электрического поля в SOL и параметры слоев вблизи пластин. В полном варианте ИТЭР с самосогласованными параметрами и напряжением на обходе -20 В (или меньше) существенной перестройки профилей не наблюдается.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Stangeby P. C. et al. The plasma boundary of magnetic fusion devices. – Philadelphia, Pennsylvania: Institute of Physics Pub., 2000. – Vol. 224. – P. 296-323.

2. Сениченков И. Ю. и др. Роль электрического поля в формировании режима отрыва плазмы токамака //Письма в Журнал технической физики. – 2018. – Т. 44. – №. 6. – С. 66-76.

3. Bonnin X. et al. Presentation of the new SOLPS-ITER code package for tokamak plasma edge modelling //Plasma and Fusion Research. – 2016. – Vol. 11. – P. 1403102-1403102.

#### УДК 533.9

П.С. Кудреватых, Н.В. Штырхунов, Е.Г. Кавеева, В.А. Рожанский, А.А. Широбоков Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого<sup>(•)</sup>

# ИССЛЕДОВАНИЕ СХЕМ С ОБРАТНОЙ СВЯЗЬЮ В КОДЕ SOLPS-ITER

Введение. Код SOLPS-ITER [1], используемый для двумерного моделирования пристеночной плазмы, состоит из двух основных частей: В2.5 и Еirene. Модуль В2.5 решает гидродинамическую систему уравнений Брагинского для плазмы; Еirene рассчитывает поведение нейтралей в пристеночной плазме кинетически методом Монте-Карло и совмещен с В2.5. Основными входными данными для расчета являются: поток энергии через внутреннюю границу расчетной области, напуск рабочего газа (дейтерия, гелия и т.п.), напуск излучающей примеси (неона, аргона, криптона и др.), альбедо на некоторых частях поверхности камеры для потока в откачку.

После того, как вышеперечисленные параметры вместе с геометрией заданы, код начинает итерационно решать уравнения переноса и находить стационарное распределения величин в плазме, к примеру: количество частиц в расчетной области, концентрация излучающей примеси на сепаратрисе и ее процент относительно рабочего газа, давление под куполом в диверторе, ток насыщения на диверторные пластины и др.

*Цель работы* — рассмотреть возможность связи выходных параметров с входными с помощью схем с обратной связью для уменьшения времени расчетов и нагрузки на кластер.

Схемами с обратной связью называются такие схемы, которые итерационно меняют входные параметры, чтобы выходные параметры расчета совпадали с заданными пользователем величинами. К примеру, в эксперименте было найдено, что процентное содержание неона на сепаратрисе было порядка процента, но напуск примеси остался неизвестен. Предполагаемая схема с обратной связью будет варьировать напуск излучающей примеси таким образом, чтобы в стационарной ситуации концентрация на сепаратрисе была равна той, что задал пользователь.

Потребность в схемах с обратной связью наиболее существенно проявляется в нелинейных зависимостях. Не ограничивая общности использования, рассмотрим конкретную задачу — зависимость полного количества частиц неона в расчете относительно его напуска, то есть  $N_{Ne} = f(\Gamma_{Puff_{Ne}})$ .

Старая схема с такой обратной связью работала по принципу линейной связи с коэффициентом  $\gamma$  между напуском на предыдущем шаге и напуском на следующем шаге:  $\Gamma_{Puff_{i+1}} = \gamma * \Gamma_{Puff_i}$ , где коэффициент  $\gamma$  определяется через отношение желаемого количества частиц к текущему, функциональные зависимости показаны на рисунке 1, где *с* – желаемое количество частиц, *x* – текущее количество частиц. Параметры  $\alpha$  и  $\beta$  в формулах задаются пользователем.

<sup>&</sup>lt;sup>(•)</sup> П.С. Кудреватых, kudrevatyhpol39@gmail.com

После небольших изменений в коде, представленная схема была испытана при моделировании токамака ТРТ. Основанием для выбора токамака ТРТ было то, что топологически ТРТ является single-null установкой с сильным тороидальным магнитным полем, моделирование которой является одной из ключевых задач на сегодняшний день. Результаты работы схемы показаны на рисунке 2. Полученные данные сигнализируют о слишком малом характерном времени реакции системы обратной связи по сравнению с установлением стационарного количества частиц, что влечет за собой периоды импульсного напуска и долгой откачки. В итоге получаем осциллирующее решение, которое не сходится к стационарному.

Исходя из проведенного опыта, схемы, которые связывают значение на текущем шаге со значением на следующем шаге, были исключены из рассмотрения, если, конечно, не дополнять их усреднением. Была разработана схема, которая основывается на уравнении баланса частиц, а именно  $\frac{dN}{dt} = \Gamma_{Puff} - \Gamma_{Pump} + \Gamma_{CORE}$ .



Рис. 1. Функциональные зависимости коэффициента γ. Ось ординат отражает коэффициент γ, ось абсцисс – количество частиц х в расчете. Фиолетовая и черные прямые показывают положения равновесия, т.е. равенство γ единице



Рис. 2. Зависимость откачки и напуска примеси от времени

В стационарной ситуации получаем, что  $\Gamma_{Puff} + \Gamma_{CORE} = \Gamma_{Pump}$ , что дает нам возможность привязать напуск к откачке через коэффициент  $\gamma$ . Так как характерное время изменения потока в откачку сравнимо с характерным временем изменения полного количества частиц, такая схема не будет иметь колебаний. Итоговая зависимость напуска от откачки имеет вид  $\Gamma_{Puff_{i+1}} = \gamma * \Gamma_{Pump_i} - \Gamma_{CORE}$ . Может показаться, что вычисления по такой схеме окажутся слишком долгими, но это не так при использовании ускоряющих схем из работы [2]. Результаты работы схемы изображены на рисунке 3.

Исследуя две схемы по среднему количеству частиц в секунду, можно сделать вывод, что первая схема демонстрирует осцилляции и отсутствие сходимости, а вторая – экспоненциально сходится к правильному решению за небольшое время. Стоит отметить, что характерное время сходимости зависит от шага расчета по времени и выбранного коэффициента ү сложным образом. Это обусловлено нелинейной зависимостью потока в откачку от полного числа частиц в расчете.



Рис. 3. Зависимость откачки и напуска примеси от времени в новой схеме

Выводы. На базе схем с обратной связью для входных параметров, используемых в кодах SOLPS5.2 [3] и SOLPS4.3 [4] была разработана аналогичная схема для кода SOLPS-ITER. В новой системе обратной связи, с учетом баланса частиц, сделаны существенные изменения, позволяющие избежать колебательных решений. Это привело к ускорению работ по выбору параметров напуска в моделировании ТРТ и других токамаков с различными топологиями и снижению нагрузки на вычислительный кластер СПбПУ.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Rozhansky V. A. et al. Simulation of tokamak edge plasma including self-consistent electric fields //Nuclear Fusion.  $-2001. - Vol. 41. - N_{\odot}. 4. - P. 387.$ 

2. Kaveeva E. et al. Speed-up of SOLPS-ITER code for tokamak edge modeling //Nuclear Fusion. – 2018. – Vol. 58. –  $N_{2}$ . 12. – P. 126018.

3. Kukushkin A. S. et al. Finalizing the ITER divertor design: The key role of SOLPS modeling //Fusion engineering and design.  $-2011. - Vol. 86. - N_{2}. 12. - P. 2865-2873.$ 

4. Rozhansky V. et al. New B2SOLPS5.2 transport code for H-mode regimes in tokamaks //Nuclear fusion. – 2009. – Vol. 49. – №. 2. – P. 025007.

Е.С. Мелихова<sup>1</sup>, А.К. Павлов<sup>2</sup>, Г.И. Васильев<sup>2</sup>

<sup>1</sup>Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого  $^{(\bullet)}$  <sup>2</sup> Физико-технический институт им. А.Ф. Иоффе РАН

# ИЗОТОПНЫЕ СЛЕДЫ АКТИВНОСТИ РАННЕГО СОЛНЦА В АТМОСФЕРАХ ПЛАНЕТ ЗЕМНОЙ ГРУППЫ

Введение. Результаты миссии Кеплер показывают, что у молодых быстро вращающихся солнцеподобных звезд класса G наблюдаются сверхмощные вспышки с энергиями более  $5*10^{34}$  эрг [1-3]. В работе [4] на основе наблюдаемой частоты событий предполагается, что в первые 700 млн лет существования Солнца в сутки происходило до 250 вспышек с энергией около  $10^{33}$  эрг и показателями степенного спектра  $\gamma$  между 2 и 2.3. При этом атмосферу Земли бомбардировал большой поток солнечных космических лучей (СКЛ), этим объясняется парниковый эффект на ранней Земле. В нашей работе рассматривается возможность изменения изотопных отношений  ${}^{13}$ С/ ${}^{12}$ С и  ${}^{15}$ N/ ${}^{14}$ N в результате ядерных реакций в верхних слоях атмосфер планет земной группы, а именно Венеры и Марса, в период высокой активности раннего Солнца. На раннем этапе их эволюции у них не было магнитного поля, что упрощает расчеты.

Изотопные отношения  ${}^{13}C/{}^{12}C$  и  ${}^{15}N/{}^{14}N$  в атмосферах планет растут в результате накопления более тяжелых изотопов в период ранней активности Солнца, так как выходы тяжелых и легких изотопов углерода и азота в ядерных реакциях близки, а исходные отношения  ${}^{13}C/{}^{12}C$  и  ${}^{15}N/{}^{14}N$  в атмосферах планет менее 0.01. На производство изотопов влияют два основных параметра активности раннего Солнца – флюенс за время накопления и форма спектра протонов (показатель спектра  $\gamma$ ). Зная значения изотопных отношений  ${}^{13}C/{}^{12}C$  и  ${}^{15}N/{}^{14}N$  в атмосферах Земли, Марса и Венеры, а также в марсианском метеорите ALH84001, можно поставить ограничения на активность раннего Солнца.

*Метод исследования.* Мы провели моделирование образования изотопов <sup>15</sup>N и <sup>13</sup>C при различных химических составах атмосфер и спектрах СКЛ с помощью GEANT4 [5]. Образование <sup>15</sup>N происходит преимущественно в реакциях скалывания: <sup>16</sup>O + n  $\rightarrow$  <sup>15</sup>N + n + p и <sup>16</sup>O + p  $\rightarrow$  <sup>15</sup>N + 2p, а также в результате радиоактивного распада образующегося изотопа <sup>15</sup>O. В атмосферах, в составе которых содержится мало кислорода, изотоп <sup>15</sup>N можно получить только захватом нейтрона на основном изотопе азота: <sup>14</sup>N + n  $\rightarrow$  <sup>15</sup>N +  $\gamma$ . Выход такой реакции значительно меньше, поэтому, в азотной атмосфере он образуется менее эффективно. Изотоп <sup>13</sup>C образуется, как в аналогичных реакциях скалывания на <sup>16</sup>O и <sup>14</sup>N, так и при распаде образующегося радиоактивного изотопа <sup>13</sup>N. Рассчитанные функции выхода <sup>13</sup>C и <sup>15</sup>N для разных атмосфер приведены на рис. 1.

В зависимости от показателя у увеличение изотопных отношений для углерода на Марсе составляет от 6.1% до 51.7% (рис.2). В результате получается значение, существенно превышающее измеренное марсоходом Curiosity (табл.1). Это может быть объяснено наличием дополнительного резервуара углекислого газа и обменными процессами с атмосферой. При увеличении у и уменьшении потока протонов величина необходимого резервуара уменьшается.

Согласно современным моделям, изотопный состав газов, захороненных в марсианском метеорите Allan Hills 84001, отражает изотопный состав ранней атмосферы Марса [6]. В пределах ошибок измерений изотопное отношение  ${}^{13}C/{}^{12}C$ , измеренное на Марсе в наши дни и измеренное в метеорите ALH84001, совпадают. Это означает, что активность раннего

<sup>&</sup>lt;sup>(•)</sup> Е.С. Мелихова, melihova.es@edu.spbstu.ru

Солнца вносила меньший вклад в это изотопное отношение уже после образования метеорита. Тогда спектры вспышек должны были быть более мягкими ( $\gamma = 2,6$ ) либо масса резервуара углерода должна быль на порядок больше.



Рис. 1. Функция выхода изотопов. а  $-{}^{13}$ С в CO<sub>2</sub>-атмосфере; b  $-{}^{15}$ N в CO<sub>2</sub>-атмосфере; c  $-{}^{13}$ С в азотной атмосфере; d  $-{}^{15}$ N в азотной атмосфере



Рис. 2. Зависимость изменения изотопных отношений  ${}^{13}C/{}^{12}C$  (A) и  ${}^{15}N/{}^{14}N$  (B) от  $\gamma$ . а – при постоянной частоте вспышек; b – при постоянном флюенсе

*Результаты* наших расчетов показывают, что за 700 млн лет изотопное отношение  $^{15}N/^{14}N$  увеличивается на десятки и сотни процентов (рис.2) при тех же предположениях о виде спектра и флюенсе протонов [4], что противоречит современному значению (табл. 1). При более мягком спектре протонов ( $\gamma = 2,5$ ) расчетные и экспериментальные отношения совпадают. Изотопное отношение  $^{15}N/^{14}N$  в метеорите ALH84001 значительно меньше, чем современное на Марсе (табл. 1). Поэтому для согласования с экспериментальными данными необходимо поставить еще более жесткие ограничения ( $\gamma = 2,9$ ). С другой стороны, если атмосфера на Марсе в период раннего активного Солнца была преимущественно азотной, то образование  $^{15}N$  резко падает из-за отсутствия эффективного канала образования.

для азотной атмосферы спектры с  $\gamma = 2.1$  и более могут быть согласованы с экспериментальными данными.

Увеличение изотопного отношения  ${}^{15}N/{}^{14}N$  на Венере за 700 млн лет активности раннего Солнца составляет от 0.16% до 0.88% (в зависимости от параметра  $\gamma$ ). Аналогично увеличение изотопного отношения  ${}^{13}C/{}^{12}C$  - от 0.005% до 0.04%. Это значительно меньше, чем неопределенность измерений изотопного отношения на Венере в наши дни [7].

Изотоп. отн.	Земля	Mapc	Венера	ALH84001
$^{15}N/^{14}N$	3.676·10 <sup>-3</sup>	5.78·10 <sup>-3</sup>	3.676·10 <sup>-3</sup>	$3.875 \cdot 10^{-3}$
$^{13}C/^{12}C$	0.01112	0.01175	0.01112	0.01175

Табл. 1. Изотопные отношения, умноженные на  $10^3$ 

*Вывод.* Высокий уровень активности раннего Солнца создает большие потоки СКЛ, которые могут эффективно производить изотопы <sup>13</sup>С и <sup>15</sup>N в ядерных реакциях в атмосфере Марса и сильно обогащать атмосферу Марса тяжелыми изотопами.

Для согласования расчетных значений изотопных отношений  ${}^{13}C/{}^{12}C$  с измеренными в современной атмосфере Марса и марсианском метеорите ALH84001 необходимо наличие большого обменного резервуара углекислого газа или более мягкие спектры СКЛ раннего Солнца, чем это предполагается в работе [4]. Для согласования расчетного и измеренного в современной атмосфере Марса отношения  ${}^{15}N/{}^{14}N$  необходимо существование преимущественно азотной атмосферы на ранних этапах эволюции Марса в период активного раннего Солнца.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Maehara H. et al. Superflares on solar-type stars //Nature. – 2012. – T. 485. – №. 7399. – C. 478-481.

2. Shibayama T. et al. Superflares on solar-type stars observed with Kepler. I. Statistical properties of superflares //The Astrophysical Journal Supplement Series.  $-2013 - T. 209 - N_{\odot} \cdot 1 - C. 5$ .

3. Notsu Y. et al. Do Kepler superflare stars really include slowly rotating sun-like stars?—Results using APO 3.5 m telescope spectroscopic observations and Gaia-DR2 data //The Astrophysical Journal.  $-2019. - T. 876. - N_{\odot}. 1. - C. 58.$ 

4. Airapetian V. S. et al. Prebiotic chemistry and atmospheric warming of early Earth by an active young Sun //Nature Geoscience.  $-2016. - T. 9. - N_{\odot}. 6. - C. 452-455.$ 

5. Allison J. et al. Recent developments in Geant4 //Nuclear instruments and methods in physics research section A: Accelerators, Spectrometers, Detectors and Associated Equipment. – 2016. – T. 835. – C. 186-225.

6. Treiman A. H., Gleason J. D., Bogard D. D. The SNC meteorites are from Mars //Planetary and Space Science. – 2000. – T. 48. – №. 12-14. – C. 1213-1230.

7. Bézard B. et al. The 12C/13C and 16O/18O ratios in the atmosphere of Venus from high-resolution 10- $\mu$ m spectroscopy //Icarus. - 1987. - T. 72. - No. 3. - C. 623-634.

А.И. Севрюкова<sup>1</sup>, Ю.А. Кропотина<sup>1, 2</sup>

<sup>1</sup> Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого<sup>(•)</sup> <sup>2</sup> Физико-технический институт им. А.Ф. Иоффе РАН

# МОДЕЛИРОВАНИЕ ЗЕРКАЛЬНОЙ НЕУСТОЙЧИВОСТИ В СОЛНЕЧНОМ ВЕТРЕ

Введение. Прямые наблюдения в солнечном ветре позволяют исследовать различные типы плазменных неустойчивостей, усиливающих электромагнитные поля, которые могут воздействовать на частицы, рассеивая и/или ускоряя их. Достаточно часто наблюдаются зеркальные структуры, для которых характерны сравнительно большие длины волн и существенные вариации амплитуды магнитного поля. Зеркальная неустойчивость может возникать вследствие поперечной к магнитному полю анизотропии температуры T<sub>1</sub>>T<sub>1</sub> [1]. Однако расчет инкремента показывает, что при этом гораздо быстрее развивается альфвеновская ионно-циклотронная неустойчивость [2]. Она приводит к уменьшению температурной анизотропии, необходимой для зеркальной неустойчивости. Таким образом, возникает вопрос о природе наблюдаемых зеркальных структур. В данной работе рассмотрено распределение ионов водорода, состоящее из максвелловской основной популяции и кольцевого распределения быстрых частиц. Такие распределения могут возникать вблизи ударных волн из-за отражения части плазмы на фронте и дальнейшего вращения в магнитном поле. Из анализа дисперсионного уравнения и при помощи кинетического моделирования приходим к выводу, что в этой ситуации будет раскачиваться зеркальная неустойчивость.

*Целью работы* является определение параметров, при которых в плазме солнечного ветра зеркальная неустойчивость доминирует над ионно-циклотронной.

Актуальность. Неустойчивости бесстолкновительной плазмы приводят к возникновению колебаний электромагнитного поля, которые в свою очередь могут рассеивать частицы, приводить к их нагреву и ускорению. В частности, процесс ускорения частиц бесстолкновительными ударными волнами в остатках сверхновых зависит от свойств электромагнитной турбулентности. Важную роль в этом процессе может играть зеркальная неустойчивость, возникающая из-за квадрупольной анизотропии ускоряющихся частиц. Возникающие колебания имеют большую длину волны и могут эффективно рассеивать быстрые частицы.

Неустойчивости плазмы неоднократно исследовались в научной литературе, как в приложении к астрофизической плазме, так и в приложении к плазме токамаков. Так, в статье [3] рассмотрена горячая дейтериево-гелиевая плазма токамака, в которой ионы гелия распределены анизотропно относительно магнитного поля (T<sub>⊥</sub>>T<sub>1</sub>). При этом может возникать электромагнитная ионная циклотронная неустойчивость. Однако авторы обнаружили, что при определенном сочетании параметров альвеновская ионно-циклотронная неустойчивость может быть подавлена, что дает шанс развития зеркальной неустойчивости.

В работах [4, 5] было показано, что ионно-циклотронная неустойчивость может быть подавлена в чисто протонной плазме в случае, когда анизотропия температуры возникает вследствие кольцевого распределения захваченных (pickup) ионов. Такие захваченные частицы могут появляться вблизи границы гелиосферы из-за перезардки нейтральной компоненты. Однако ближе к Земле кольцевые распределения также могут возникать, например, при отражении пучка ионов от фронта ударной волны. Поэтому наблюдаемые

<sup>&</sup>lt;sup>(•)</sup> А.И. Севрюкова, sevryukova201@mail.ru

околоземными обсерваториями зеркальные структуры могут быть следствием кольцевых распределений.

Методика и результаты моделирования. Для проверки этой гипотезы было при помощи открытого кода LEOPARD [6] решено дисперсионное уравнение для плазмы с гиротропным распределением частиц вида:

$$f_{r} = \frac{e^{\frac{-nv_{\parallel}^{2}}{m\beta_{\parallel}}}e^{\frac{-n(v_{\perp}-v_{r})^{2}}{m\beta_{\perp}}}n\sqrt{n}}{\pi^{\frac{3}{2}}m^{\frac{3}{2}}\sqrt{\beta_{\parallel}}\beta_{\perp}*A}}$$

$$A = e^{\frac{-nv_{r}^{2}}{\beta_{\perp}m}} + \sqrt{\frac{\pi n}{\beta_{\perp}m}}v_{r}*erfc\left(-v_{r}\sqrt{\frac{n}{\beta_{\perp}m}}\right)$$
(1)

здесь бета (β) – это безразмерная величина, отношение теплового давления к магнитному, v<sub>r</sub> – скорость движения кольца, n – плотность кольца, m – масса протона.

Рассмотрена плазма с пучком частиц с кольцевым распределением (1) на фоне максвеловского распределения фоновых частиц. Параметры были выбраны на основе наблюдательных данных: плотность кольца частиц 1,1 см<sup>-3</sup>, а фоновых 10 см<sup>-3</sup>; бета протонов 9.6, бета кольца 0.88, бета электронов 9.7; радиус кольца 18 альвеновских скоростей протонов, магнитное поле 1,6\*10<sup>-5</sup> Гс.

Было показано, что наибольший инкремент достигается в случае, когда волновой вектор к направлен к магнитному полю В под углом 25°. Графики вещественной частоты и инкремента показаны на рис. 1. Нулевая вещественная частота характерна для зеркальной неустойчивости. Таким образом, линейная теория предсказывает, что при параметрах, близких к наблюдаемым в солнечном ветре, может доминировать зеркальная неустойчивость.



Для проверки результата линейной теории было проведено моделирование неравновесной плазмы при помощи гибридного кинетического кода «Maximus», дополненного возможностью задания кольцевого распределения частиц. В результате были получены следующие карты магнитного поля и плотности (рисунок 2).

Косые структуры на картах магнитного поля и представляют собой зеркальные моды. Их длины волн и направление их волнового вектора, а также скорость роста согласуются с предсказаниями линейной теории. Плотность кольца антикоррелирует с Bz и |B|, а полная плотность нет.



Рис. 2. Магнитное поле и плотность плазмы (результаты гибридного моделирования)

*Выводы.* При помощи линейной теории и кинетического моделирования было показано, что наблюдаемые в солнечном ветре зеркальные структуры могут быть следствием кольцевых распределений, возникающих при отражении ионов от фронта ударной волны.

Часть расчетов была выполнена с использованием вычислительных ресурсов суперкомпьютерного центра Санкт-Петербургского политехнического университета Петра Великого (scc.spbstu.ru).

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Southwood D. J., Kivelson M. G. Mirror instability: 1. Physical mechanism of linear instability //Journal of Geophysical Research: Space Physics. – 1993. – Vol. 98. – №. A6. – P. 9181-9187.

2. Gary S. P. The mirror and ion cyclotron anisotropy instabilities //Journal of Geophysical Research: Space Physics. – 1992. – Vol. 97. – №. A6. – P. 8519-8529.

3. Lashmore-Davies C. N., Dendy R. O., Kam K. F. Electromagnetic ion cyclotron instability driven by a hot minority ion species with temperature anisotropy //Plasma physics and controlled fusion. – 1993. – Vol. 35. –  $N_{2}$ . 11. – P. 1529.

4. Min K., Liu K., Gary S. P. Proton velocity ring-driven instabilities and their dependence on the ring speed: Linear theory //Journal of Geophysical Research: Space Physics. – 2017. – Vol. 122. – №. 8. – P. 7891-7906.
5. Min K., Liu K. Contributions of mirror and ion Bernstein instabilities to the scattering of pickup ions in the outer heliosheath //The Astrophysical Journal. – 2018. – Vol. 852. – №. 1. – P. 39.

6. Astfalk P., Jenko F. LEOPARD: A grid-based dispersion relation solver for arbitrary gyrotropic distributions //Journal of Geophysical Research: Space Physics. – 2017. – Vol. 122. – №. 1. – P. 89-101.

# В.А. Шенявский<sup>1</sup>, И.А. Барышников<sup>2</sup>, В.В. Клименко<sup>3</sup>, А.В. Иванчик<sup>2,3</sup> <sup>1</sup>«Высшая школа экономики», Санкт-Петербург <sup>2</sup>Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого<sup>(•)</sup> <sup>3</sup>Физико-технический институт им. А.Ф. Иоффе РАН

# СПОСОБЫ ИЗМЕРЕНИЯ ТЕМПЕРАТУРЫ РЕЛИКТОВОГО ИЗЛУЧЕНИЯ ПО КОСМОЛОГИЧЕСКИМ ДАННЫМ

Введение. Свойства реликтового излучения (РИ) играют важную роль в космологии. Одно из таких свойств -- планковский спектр, характеризующийся температурой РИ  $T_{CMB}$ . Зависимость температуры  $T_{CMB}(z) \equiv T_z$  от космологического красного смещения z определяется физическими условиями во Вселенной, которые привлекают особое внимание. Для более точного определения связи  $T_z$  и z, необходимы как можно более точные методы измерения  $T_z$ . Поэтому важной задачей является поиск таких методов или улучшение старых. На сегодняшний день известны и реализованы два метода измерения температуры  $T_z$ : по эффекту Сюняева-Зельдовича (СЗ-эффект,[1]) для  $z \le 1$  и по населенностям энергетических уровней атомов и молекул, наблюдающихся в абсорбционных спектрах квазаров, для  $z \in [1.5, 3.5]$  (Klimenko et al. 2020 [2]).

В работе был исследован метод по СЗ-эффекту. В дополнение, было изучено влияние результатов метода по населенностям энергетических уровней на оценку температуры РИ. Во всех способах определялась наблюдаемая "здесь" и "сейчас" температура РИ Т<sub>0</sub>, по значениям и ошибкам которой изучались методы.

*Методы измерения.* В методе по СЗ-эффекту рассмотрено две процедуры, основанные на аппроксимации данных наблюдения и различающиеся аппроксимирующими функциями и параметрами. В первой процедуре аппроксимирующая функция (от частоты) имеет вид (1), параметры которой обозначены за  $\Theta_z$ , куда входит искомая температура  $T_z$ .

$$\Delta T_{SZ}(x,\Theta_z) = A \Big[ \theta f_1(x) - \beta + R(x,\theta,\beta) \Big]$$
  

$$x = h V_0 (1+z) / k T_z; \quad \theta = k T_e / m_e c^2 \qquad (1)$$
  

$$\Theta_z \equiv (T_z, A, \beta, T_e)$$

Например, такой способ был применен в работах Luzzi et.al 2015[3] и Hurier et al. 2014 [4]. Аппроксимация набора полученных значений  $T_z$  в рамках  $\Lambda$ CDM модели, то есть аппроксимирующая функция есть  $T_z = T_0(1 + z)$ , где  $T_0$  – температура РИ "здесь" и "сейчас", позволяет определить значения  $T_0$  по значениям  $T_z$  (по космологическим данным). Сравнивая найденное значение  $T_0$  с самой точной на сегодняшний день оценкой  $T_0 = 2.7255 \pm 0.0006$ K (Fixsen 2009 [5]), полученной не по космологическим данным, можно оценить рассматриваемую космологическую модель. Такая идея оценки моделей изложена в работе Luzzi et al. 2022 [6].

Вторая процедура, предлагаемая в настоящей работе, определяет  $T_0$ , без измерения  $T_z$ . Если рассматривать  $\Lambda$ CDM модель, то аппроксимирующая функция метода получается из формулы (1) заменой температуры  $T_z$  на выражение  $T_0(1 + z)$ . Функция тогда имеет независящий от *z* вид (2), параметры которой обозначены за  $\Theta_0$ 

<sup>&</sup>lt;sup>(•)</sup>И.А. Барышников, ilyandand@gmail.com

$$\Delta T_{SZ}(x,\Theta_0) = T_0 \tau \Big[ \theta f_1(x) - \beta + R(x,\theta,\beta) \Big]$$
  

$$x = h v_0 / k T_0; \quad \theta = k T_e / m_e c^2 \qquad (2)$$
  

$$\Theta_0 \equiv (T_0, \tau, \beta, T_e)$$

Производя множество измерений значения  $T_0$  по разным скоплениям галактик, наблюдаемые по эффекту Сюняева-Зельдовича, можно набрать статистику, усреднение которой даст более точный результат, чем для одного скопления. Второй способ также позволяет оценить по температуре  $T_0$  космологическую модель, в рамках которой строится не зависящая от красного смещения аппроксимирующая функция. Первая процедура в работе условно названа "по  $T_z$ ", вторая – "по  $T_0$ "

Метод исследования. Исследование вышеуказанных процедур проводилось с помощью моделирования параметров скоплений галактик из  $\Theta_0$  (2) и красного смещения z. По этим параметрам и формуле (2) вычислялись значения  $\Delta T_{SZ}$  на заданных частотах наблюдений, аналитическая аппроксимация которых восстанавливала значение температуры РИ и ошибку ее определения. Параметры скоплений и статистические ошибки величины  $\Delta T_{SZ}$  генерировались случайным образом в заданных интервалах их определения.

Моделирование выполнялось в рамках  $\Lambda$ CDM модели с зависимостью температуры реликтового излучения  $T_z$  от космологического красного смещения z:  $T_z = T_0(1 + z)$ , где  $T_0 = 2.7255$ K. Для исследования влияния дополнительных систем ( $z \in [1.5,3.5]$ ) на оценки температур значения z и величины  $T_z$  генерировались случайным образом в заданном интервале в рамках  $\Lambda$ CDM модели. Аппроксимации и усреднения производились с помощью метода Монте-Карло с марковскими цепями (MCMC) [7].

Результаты. В результате было обнаружено, что оценки значений  $T_0$ , полученные двумя разными процедурами метода СЗ-эффекта, начинают отличатся больше, чем на сумму стандартных отклонений  $\sigma$  по каждому методу, при повышении количества обрабатываемых скоплений или количества повторений измерения. Так, например, при однократном анализе 77 скоплений доверительные интервалы в 1 $\sigma$  двух оценок  $T_0$  пересекались, однако при 13-ти кратном анализе доверительные интервалы усредненных оценок уже не пересекались (рис. 1).



Рис. 1. Результат 13-ти кратной обработки 77-ми скоплений. Анализы различались параметрами скоплений. Черная пунктирная линия – модельное значение температуры T<sub>0</sub>. Красные точки с треугольником соответствуют методу "по T<sub>0</sub>", синие с крестиком – "по T<sub>z</sub>". Красная и синяя пунктирные линии – средние значения T<sub>0</sub>, красное и синие заполнения – доверительные интервалы оценок

Кроме того, метод "по  $T_0$ " в пределах 1  $\sigma$  восстанавливает значений в 2.7255К, что нельзя сказать про метод "по  $T_z$ ". При однократном анализе 1000 скоплений доверительные

интервалы также не пересеклись (рис. 2, точка-абсцисс "(1000)"). На рис. 2 также представлены все результаты, включая итоги исследования влияния доп. систем.



Рис. 2. Итоговые результаты. По горизонтали отложены разные измерения с условными обозначениями. Слева направо: (1х77) – однократный анализ 77 скоплений; (13х77) – 13-ти кратный анализ 77 скоплений; (1000) – однократный анализ 1000 скоплений; (1е3\_02) – 1000 дополнительных систем с ошибкой у  $T_z$  равной 0.2K; (2х1e3\_02) – предыдущие 1000 систем + 1000 скоплений, обработанные методом "по  $T_0$ "; (1е3\_005) – 1000 дополнительных систем с ошибкой у  $T_z$  равной 0.05K; (2х1e3\_02) – предыдущие 1000 систем + 1000 скоплений, обработанные методом "по  $T_0$ ". Остальные обозначения те же, что и у рис. 1

Выводы. В рамках ACDM модели метод "по  $T_z$ " не восстанавливает температуру РИ "здесь" и "сейчас" в пределах доверительного интервала 1 о. Метод "по  $T_0$ " восстанавливает. Следовательно, из двух способов более точный – "по  $T_0$ ". Кроме того, чтобы достичь (с помощью методов измерения температуры РИ по космологическим данным) лучшей на сегодняшний день точности оценки  $T_0$ , полученной не по космологическим данным в экспериментах COBE/FIRAS и WMAP:  $T_0 = 2.7255 \pm 0.0006$ K (Fixsen 2009 [5]), необходимо радикально увеличить количество и качество наблюдений скоплений Сюняева-Зельдовича и молекулярных облаков, что возможно в будущем.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Sunyaev R.A., Zeldovich Ia. B. Microwave background radiation as a probe of the contemporary structure and history of the universe // Annu. Rev. Astron. Astrophys. – 1980. – Vol. 18. – P. 537-560.

2. Klimenko V.V., Ivanchik A.V., Petitjean P., Noterdaeme P., Srianand R. Estimation of the Cosmic Microwave Background Temperature from Atomic CI and Molecular CO Lines in the Interstellar Medium of Early Galaxies // Astron. Lett. – 2020. – Vol. 46. – P. 715-725.

3. Luzzi G., Genova-Santos R.T., Martins C.J.A.P., De Petris M., Lamagna L. Constraining the evolution of the CMB temperature with SZ measurements from Planck data // J. Cosmol. Astropart. Phys. – 2015. – Vol. 2015. – P. 011-011.

4. Hurier G., Aghanim N., Douspis M., Pointecouteau E. Measurement of the  $T_{CMB}$  evolution from the Sunyaev-Zel'dovich effect // Astron. Astrophys. – 2014. – Vol. 561. – P. A143.

5. Fixsen D.J. The Temperature of the Cosmic Microwave Background. // Astrophys. J. – 2009. – Vol. 707. – P. 916-920.

6. Luzzi G., D'Angelo E., Bourdin H., De Luca F., Mazzotta P., Oppizzi F., Polenta G. Cosmology with the SZ spectrum: Measuring the Universe's temperature with galaxy clusters // EPJ Web of Conferences. – 2020. – 257. – P. 00028.

7. Foreman-Mackey D., Hogg D. W., Lang D., Goodman J. Emcee: The MCMC Hammer // Publ. Astron. Soc. Pac. – 2013. – Vol. 125. – P. 306.

В.В. Дубов, Д.В. Дорошенко, С.П. Рощупкин Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого<sup>(•)</sup>

# РЕЗОНАНСНАЯ АННИГИЛЯЦИЯ И РОЖДЕНИЕ ЭЛЕКТРОННЫХ ПАР В ВЫСОКОТЕМПЕРАТУРНОЙ ЛАЗЕРНОЙ ПЛАЗМЕ

Введение. Облучая оболочку, содержащую дейтерий-тритиевую смесь (ДТ) рентгеновскими лазерами с интенсивностями порядка  $I \sim 10^{24} \div 10^{25}$  Вт/см<sup>2</sup>, оболочка испарится и ДТ смесь будет эффективно сжиматься, разогреваясь до необходимых температур УЛС [1, 2]. При этом параллельно будут иметь место ряд процессов КЭД, модифицированных рентгеновским полем [2-4]. Одними из основных таких процессов будет резонансное спонтанное тормозное излучение релятивистских электронов на ионах [2], а также резонансное рождение такими гамма-квантами в поле ядра электрон-позитронных пар [2, 3]. Релятивистские электронные пары в поле рентгеновского лазера могут резонансное аннигилировать и рождаться, что также влияет на процесс протекания УЛС [4].

*Цель работы* – теоретически изучить процесс резонансной аннигиляции и рождения электронных пар в высокотемпературной ядерной плазме, получить условия его протекания и его вероятность.

В работе будут использованы следующие параметры:  $\eta = 1$  - параметр, численно равный отношению работы поля над электроном на длине волны к энергии покоя электрона,  $\omega = 5$  кэВ - частота лазера,  $E_{\pm} = 51$  МэВ - энергия начальной электронной пары. Также далее будет использована релятивистская система единиц  $\hbar = c = 1$ .

*Кинематика процесса*. Под действием интенсивного рентгеновского лазера рожденный при взаимодействии электронными парами гамма-квант может стать реальным, а затем родить электрон-позитронную пару (рис. 1). Такой процесс называется резонансным.



Рис. 1. Диаграмма Фейнмана резонансного процесса рождения электрон-позитронных пар при взаимодействии электронных пар в поле интенсивного лазера

Для резонанса необходимо, чтобы число излученных фотонов в первой вершине ( $r \ge 1$ ) и поглощенных фотонов во второй ( $s \ge 1$ ) было больше единицы. Во-вторых, энергии всех участвующих в процессе частиц (электронов и позитронов) должны быть ультрарелятивистскими:  $\tilde{E}_{\pm} \gg m_*, \tilde{E}'_{\pm} \gg m_*, r \neq m_* - э \phi \phi$ ективная энергия покоя электрона в поле волны. Помимо этого, начальные электрон и позитрон, как и конечные должны распространяться в узком конусе ( $\theta_i = \measuredangle(\mathbf{p}_+, \mathbf{p}_-) <<1, \quad \theta_f = \measuredangle(\mathbf{p}'_+, \mathbf{p}'_-) <<1$ ), а углы между этими частицами и направлением распространения внешней волны должны быть большими ( $\theta_{\pm} = \measuredangle(\mathbf{p}_{\pm}, \mathbf{k}) \sim 1$ ). Анализируя резонансное условие для первой вершины, получаем ключевое условие

<sup>&</sup>lt;sup>(•)</sup> Д.В. Дорошенко, luckoo@yandex.ru

$$\delta_{\eta c}^2 = \delta_{\eta c(res)}^2, \quad \delta_{\eta c(res)}^2 = 4 \left( \varepsilon_{\eta c(r)} - 1 \right) \ge 0 \tag{1}$$

где обозначено

$$\delta_{\eta c} = \frac{E_c \theta_i}{2m\sqrt{1+\eta^2}}, \quad \varepsilon_{\eta c(r)} = r\varepsilon_{\eta c}, \quad \varepsilon_{\eta c} = \frac{E_c}{E_{\eta}},$$

$$E_{\eta} = \frac{m^2 \left(1+\eta^2\right)}{\omega \sin^2 \left(\theta_+/2\right)} \approx 100 \text{ M} \Im B, \quad E_i = E_+ + E_-, E_c = \frac{4E_+E_-}{E_i}.$$
(2)

здесь  $E_{\eta}$  – характеристическая энергия процесса для начальных частиц,  $E_c$  - комбинационная энергия начальных частиц. Параметр  $\varepsilon_{\eta c(r)}$  позволяет из (2) получить ограничение на минимальное число испущенных фотонов, которое зависит от энергий начальных частиц, а также частоты внешнего электромагнитного поля:

$$r \ge r_{\min} = \left\lceil \varepsilon_{\eta c}^{-1} \right\rceil. \tag{3}$$

Введем  $x'_{+} = E'_{+}/E_{i}$  - нормированную энергию конечного позитрона, и найдем зависимость ее от угла вылета конечного позитрона относительно направления суммарного импульса  $\mathbf{p}_{i}$ , а также числа поглощенных фотонов во второй вершине:

$$x'_{+} = \frac{1}{2\left(\varepsilon_{\eta i(s)} + {\delta'_{\eta +}}^2\right)} \left[\varepsilon_{\eta i(s)} \pm \sqrt{\varepsilon_{\eta i(s)} \left(\varepsilon_{\eta i(s)} - 1\right) - {\delta'_{\eta +}}^2}\right]$$
(4)

$$\varepsilon_{\eta i(s)} = s \cdot \varepsilon_{\eta i}, \quad \varepsilon_{\eta i} = \frac{E_i}{E_\eta},$$
(5)

$$\delta_{\eta^{+}}^{\prime 2} = \frac{E_{i}^{2} \theta_{+}^{\prime 2}}{4m_{*}^{2}}, \quad \theta_{+}^{\prime} = \measuredangle \left(\mathbf{p}_{+}^{\prime}, \mathbf{p}_{i}\right), \quad \mathbf{p}_{i} = \mathbf{p}_{+} + \mathbf{p}_{-}$$
(6)

*Резонансное дифференциальное сечение.* Стандартным образом после усреднения по поляризациям начальной электрон-позитронной пары и суммирования по поляризациям конечной электрон-позитронной пары получим аналитическое выражение для максимального резонансного дифференциального сечения:

$$R_{\eta(r,s)}^{\max} = \frac{d\sigma_{\eta(r,s)}^{\max}}{d\delta_{+}^{\prime 2}} = r_e^2 D_{\eta i} F_{+(r,s)}, \quad D_{\eta i} = \frac{(4\pi)^5}{\alpha^2 B^2 (\varepsilon_{\eta c})} \left(\frac{E_c}{E_i}\right),$$

$$F_{+(r,s)} = \frac{x_{+(s)}'}{(1-x_{+(s)}')} \frac{P(u,u_r) \cdot P'(u',u_s')}{\varepsilon_{\eta c(r)} \sqrt{1-E_c / (\varepsilon_{\eta c(r)} E_i)}}, \quad B = \sum_{r=r_{\min}}^{\infty} \int_{1}^{r\varepsilon_{\eta c}} \frac{dv}{v \sqrt{v(v-1)}} P(v,u_r).$$
(7)

Функция  $P(u, u_r)$  определяет вероятность стимулированного лазерным полем обратного процесса Брейта-Уиллера, а  $P'(u', u'_s)$  – вероятность стимулированного лазерным полем процесса Брейта-Уиллера.

$$P(u, u_r) = J_r^2(\gamma_{\eta c(r)}) + \eta^2(2u - 1) \left[ \left( \frac{r^2}{\gamma_{\eta c(r)}^2} - 1 \right) J_r^2 + J_r'^2 \right],$$
(8)

$$\gamma_{\eta c(r)} = 2r \frac{\eta}{\sqrt{1+\eta^2}} \sqrt{\frac{1}{\varepsilon_{\eta c(r)}}} \left(1 - \frac{1}{\varepsilon_{\eta c(r)}}\right),\tag{9}$$



(10)

Анализ выражений (7) показывает, что максимальное резонансное дифференциальное сечение существенно превышает сечение исходного процесса в отсутствии поля. Из рис. 2 видно, что резонансное дифференциальное сечение может на восемь порядков величины превышать соответствующее сечение без внешнего поля.

Заключение. В работе рассмотрен резонансный процесс рождения электронпозитронных пар при аннигиляции электронных пар во внешнем сильном электромагнитном поле с интенсивностями порядка  $I \sim 10^{24} \div 10^{25}$  Вт/см<sup>2</sup>. Детально изучена резонансная кинематика процесса. Показано, что число испущенных (поглощенных) фотонов волны должно превышать характерный параметр, зависящий от заданных параметров установки (частоты поля, энергии частиц и углов). Получено и исследовано резонансное дифференциальное сечение процесса, которое может значительно превышать (до восьми порядков величины) соответствующее дифференциальное сечение взаимодействия электронов с позитронами. Данный процесс может существенно повлиять на процессы симметричного обжатия и нагрева дейтерий-тритиевой смеси.

Исследование профинансировано Министерством науки и высшего образования РФ в рамках Программы стратегического академического лидерства «Приоритет-2030» (соглашение 075-15-2023-380 от 20 февраля 2023 г.)

## ЛИТЕРАТУРА

1. Гуськов С. Ю. Лазерный термоядерный синтез и физика высоких плотностей энергии // Квантовая электроника. – 2022. - № 52:12. – С. 1070-1078.

2. Рощупкин С. П., Лебедь А. А. Эффекты квантовой электродинамики в сильных импульсных лазерных полях. – К.: Наук. Думка, 2013. – 191 с.

3. Roshchupkin S. P., Larin N. R., Dubov V. V. Resonant photoproduction of ultrarelativistic electronpositron pairs on a nucleus in moderate and strong monochromatic light fields // Physical Review D - 2021 - Vol. 104. - 116011.

4. Doroshenko D. V., Dubov V. V., Roshchupkin S. P. Resonant annihilation and production of high-energy electron-positron pairs in an external electromagnetic field // Modern Physics Letters A - 2020 - Vol. 35. - 2040023. Д.Д. Коробко, В.М. Тимохин, В.Ю. Сергеев Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого<sup>(•)</sup>

# ИССЛЕДОВАНИЕ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ ГЕЛИЕВОЙ СТРУИ С ВЫСОКОТЕМПЕРАТУРНОЙ ПЛАЗМОЙ ТОКАМАКА «ГЛОБУС-М2»

Спектроскопическая диагностика периферийной плазмы с инжекцией нейтрального гелия предназначена для измерений распределений электронных температуры и концентрации в периферийных областях плазменного шнура по соотношениям интенсивностей излучения в спектральных линиях нейтрального гелия [1]. Диагностика предоставляет данные о параметрах плазмы, усредненные вдоль хорд наблюдения, а размер светящейся области вдоль этих хорд определяется распределением нейтрального гелия, свойствами оптической системы и параметрами плазмы в области наблюдения. Для оценки погрешности измеренных распределений концентрации и температуры необходимо моделирование изображений полихроматора (синтетическая модель диагностики).

Главный принцип работы диагностики заключается в том, что отношения интенсивностей излучения нейтрального гелия имеют различный характер зависимости от температуры и концентрации вследствие различной зависимости эффективных сечений возбуждения электронным ударом на триплетные и синглетные уровни в атоме гелия. Это позволяет проводить одновременные измерения концентрации и температуры плазмы в одной и той же области. Так, на токамаке «Глобус-М2» в рамках данной диагностики используют отношение синглет-синглетных спектральных линий атома гелия HeI (668 нм) / HeI (728 нм),  $(1s3d(^{1}D)-1s2p(^{1}P^{0}))$  /  $(1s3s(^{1}S)-1s2p(^{1}P^{0}))$ , чувствительное к электронной плотности, а также отношение интенсивностей синглет-синглетной и синглет-триплетной линий HeI (728 нм) / HeI (706 нм), (1s3s(<sup>1</sup>S)-1s2p(<sup>1</sup>P<sup>0</sup>)) / (1s3s(<sup>3</sup>S)-1s2p(<sup>3</sup>P<sup>0</sup>)), чувствительное к электронной температуре [1]. На рис. 1 приведены эффективные сечения возбуждения атомов электронным ударом с основного уровня на верхние уровни упомянутых выше переходов и их отношения, соответствующие отношениям интенсивностей излучения, используемым для определения параметров плазмы, в зависимости от температуры. Из этих рисунков можно видеть, что при температурах ниже 10 эВ отношение слабо зависит от температуры, поэтому диагностика чувствительна к измерению температур выше 10 эВ. То же самое относится и к зависимости эффективных сечений от концентрации, нижний предел по концентрации для данной диагностики составляет 2·10<sup>18</sup> м<sup>-3</sup> [2.3].



Рис. 1. Эффективные сечения возбуждения, соответствующие измеряемым линиям, и их отношения в зависимости от электронной температуры

<sup>&</sup>lt;sup>(•)</sup> Д.Д. Коробко, korobko.dd@edu.spbstu.ru

Система инжекции, формирующая струю гелия в диверторной области токамака, состоит из быстрого пьезоклапана и длинного капилляра. Система наблюдения представляет собой четырехканальный фильтро-линзовый полихроматор ФЛИП4, расположенный от области наблюдения на расстоянии 1,2 м. Угол наблюдения составляет 40° к экваториальной плоскости токамака и 50° к оси инжекции. Тороидальный угол относительно положения капилляра равен 47°.

Интегральная интенсивность в пикселе матрицы виртуальной камеры с координатами (i, j) можно рассчитать по формуле:

$$I_{706_{i,j}} \propto \frac{1}{4\pi} \int_{LOS_{i,j}} \varepsilon_{706}(l) \cdot F_{depth\_of\_field}(l) dl, \ \#(1)$$

где  $\varepsilon_{706}(l)$  - излучательная способность в спектральной линии 706 нм на координате l вдоль хорды наблюдения;  $F_{depth_{of_{field}}}(l)$  - функция глубины резкости оптической системы. Интегрирование производится вдоль луча зрения.

В расчетах в качестве нулевого приближения предполагалось, что возбуждение на рассматриваемый уровень происходит только посредством электронного удара, а девозбуждение происходит посредством спонтанного излучения, причем излучательная способность пропорциональна населенности верхнего уровня 3s(<sup>3</sup>S):

$$\varepsilon_{706}(R,Z,\varphi) \sim n_{3s(^{3}S)} \sim n_{He}(R,Z,\varphi) n_{e}(R,Z,\varphi) \langle \sigma v \rangle_{3s(^{3}S)} (T_{e}(R,Z,\varphi)), \#(2)$$

где  $n_{He}$  – концентрация атомов нейтрального гелия,  $n_e$  – концентрация электронов,  $\langle \sigma v \rangle_{3s(^3S)}$  – эффективное сечение возбуждения атома гелия с основного уровня на уровень  $3s(^3S)$ ,  $T_e$  – температура электронов. Такой подход на самом деле пригоден лишь для осуществления простых оценок, потому что эта модель не работает во всей исследуемой области. В дальнейшем предполагается усовершенствовать расчет использованием столкновительно-излучательной модели.

Для расчета распределения нейтрального гелия использовался скейлинг газодинамического разлета газа из отверстия в вакуум [2]:

$$\rho(r,\theta) = 0.643\rho_0 \cdot \cos^2\left(\frac{\pi\theta}{2.73}\right) \cdot \left(\frac{d}{r}\right)^2 \#(3)$$

Воздействие плазмы на инжектируемую струю рассчитывалось с учетом процессов перезарядки и ионизации электронным и ионным ударом [3]. Распределение концентрации нейтрального гелия до и после учета воздействия плазмы изображено на рисунке 2.

$$\frac{dn_{He}}{dl} = -n_e \left(\sigma_{ch} + \sigma_i + \frac{\langle \sigma_e v_e \rangle}{v_b}\right) n_{He} \#(4)$$





Распределения электронных концентрации и температуры для оценки воздействия плазмы на струю (4) и расчета локальной излучательной способности (2) были взяты из расчетов кодом SOLPS-ITER, основы которого описаны в работе [4], для разряда, близкого по параметрам к разряду 40269. Параметры этого разряда были хорошо изучены диагностикой гелиевого пучка и результаты этих измерений приведены в работе [1]. Распределения концентрации и температуры приведены на рис. 3.



Рис. 3. Электронные температура и концентрация в области измерений, рассчитанная кодом SOLPS-ITER

На рис. 4 приведено полученное в ходе моделирование расчетное изображение интенсивности излучения в линии 706 нм канала полихроматора и изображение аналогичного излучения, полученного в результате эксперимента. Результат численного моделирования удовлетворительно соответствует экспериментальным данным по характерным размерам засвеченной области и ее форме, но не совпадает по местоположению ее максимума. Наблюдаемые различия могут быть связаны с грубостью модели излучения струи, погрешностью расчетов плазменных параметров и магнитной конфигурации. В дальнейшем планируется использование столкновительно-излучательной модели (СИМ) для учета большего числа процессов, дающих вклад в формирование области излучения гелия, тем самым существенно улучшив синтетическую модель диагностики.



Рис. 4. Расчетное (а) и экспериментальное изображения (б) интенсивности излучения в линии излучения нейтрального гелия 706 нм

Авторы выражают благодарность Долговой Ксении (СПбПУ) за предоставленные распределения концентрации и температуры электронов в камере токамака Глобус-М2, полученные с помощью кода SOLPS-ITER.

Работы поддержаны ГК Росатом и Минобрнауки России в рамках Федерального проекта 3 (U3), проект № FSEG-2023-0018 «Разработка и создание систем струйной и пеллет инжекции с повышенными производительностью и ресурсом».

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Тимохин В. М. и др. Спектроскопическая диагностика периферийной плазмы токамака "Глобус-М2" с использованием инжекции нейтрального гелия //Письма в Журнал экспериментальной и теоретической физики. – 2022. – Т. 116. – №. 5. – С. 292-299.

2. Zholobenko W. et al. Synthetic helium beam diagnostic and underlying atomic data // Nuclear Fusion – 2018 - Vol. 58 - 126006.

3. Schweer B. et al. Electron temperature and electron density profiles measured with a thermal He-beam in the plasma boundary of TEXTOR // Journal of Nuclear Materials. -1992 - Vol. 196-198 - P. 174-178

4. Дулов В. Г., Лукьянов Г. А. Газодинамика процессов истечения. – Новосибирск: Наука, 1984. – 234 с..

5. Wesson J., Campbell D. J. Tokamaks, fourth edition – Oxford University Press, 2011. – 812 p.

6. Rozhansky V. A. et al. Simulation of tokamak edge plasma including self-consistent electric fields //Nuclear Fusion.  $-2001. - Vol. 41. - N_{\odot}. 4. - P. 387.$ 

# СЕКЦИЯ «МЕХАНИКА И ПРОЦЕССЫ УПРАВЛЕНИЯ»

УДК 539.3

# Д.В. Авдонюшкин, А.И. Матвеева, А.Д. Новокшенов Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого<sup>(•)</sup>

# БЕЗЫТЕРАЦИОННОЕ РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ ТОПОЛОГИЧЕСКОЙ ОПТИМИЗАЦИИ С ПОМОЩЬЮ МАШИННОГО ОБУЧЕНИЯ

Введение. Сегодня активно ищут применение машинному обучению в науке. В механике наибольшую популярность набирает машинное обучения в проектировании композиционных материалов, армированных непрерывным волокном. Нейронная сеть демонстрирует успешные результаты в прогнозировании ориентации армирующих волокон [1] и дополнительно в получении оптимальной топологии матрицы и плотности волокон [2].

Литературный обзор позволил выделить направление, посвященное решению безытерационной задаче топологической оптимизации. Данный подход позволяет по входным параметрам, таким как нагрузка, граничные условия, ограничение на объем получить оптимальную топологию [3]. В работе [4] решение данной задачи осуществляется посредством сверточной нейронной сети с последующим уточнением полученной структуры при помощи генеративно-состязательной нейронной сети.

В данной работе предлагается принципиально новый подход, обеспечивающий прогноз оптимальной топологии для заданной нагрузки. Для подтверждения рациональности использования разработанного метода следует его проверить на более простых конструкциях с изотропным материалом. Это позволить определить проблемы в поведении нейронной сети и вынести новые решения на случай материала с анизотропными свойствами.

Цели и задачи работы. Целью настоящей работы является разработка альтернативного похода для решения задач топологической оптимизации с применением методов машинного обучения. В предложенном подходе рассматриваются две архитектуры нейронных сетей, проводится сравнительный анализ прогнозируемых значений с результатами расчета, выполненных с помощью метода скользящих асимптот.

Методика исследования. В данной работе были разработаны две архитектуры нейронных сетей. В структуре первой модели используется пользовательский нелинейный слой, представляющий собой сумму четырех сигмоидальных функций. Второй моделью является трехслойная нейронная сеть, построенная с помощью стандартных функций активации. Данные, используемые для обучения двух моделей, генерируются в ходе решения задачи топологической оптимизации при помощи численных методов: метода конечных элементов (ANSYS) и метода скользящих асимптот (DS Simulia Tosca Structure). Входным параметром нейронной сети является точка приложения силы, а выходным – оптимальная топология пластины. Обучение нейронной сети происходит с помощью метода обратного распространения ошибки

Качество обучения нейронной сети будет оцениваться по квадратичной норме вектора отклонений предсказанных значений проектных переменных от значений, полученных на последнем шаге оптимизации. Точность модели повышается с уменьшением величины *E*.

$$E = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^{N} e_j^2 = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^{N} (d_j - y_j)^2$$

где  $d_i$  – истинное значение,  $y_i$  – предсказанное значение.

<sup>(•)</sup> А.Д. Новокшенов, novoksh\_ad@spbstu.ru

Сравнению подлежат выходы нейронных сетей, представленных в формате вектора, имеющего двоичное представление. Единичное значение элемента матрицы предполагает наличие структурного элемента, нулевое значение – его отсутствие.

В качестве примера рассматривается изотропная квадратная пластина со стороной размером 1 см. Левая грань пластины жестко закреплена, к правой приложена сила F = 1 кН. Модуль Юнга материала пластины: E = 0.1603 МПа, коэффициент Пуассона:  $\nu = 0.32$ .

*Результаты.* Обучение нейронных сетей проводилось на наборе тренировочных данных, полученных в результате решения задачи минимизации податливости при ограничении на объемную долю в 30%. Сравнение прогнозируемых топологий упругой пластины двумя нейронными сетями и оптимальной топологии, полученной с помощью MMA (Method of moving asymptotes – метод скользящих асимптот), представлено на рис. 1-3.



Рис. 1. Оптимальная топология для силы, приложенной в точке с координатой *y* = 0.805: а) прогноз однослойной нейронной сети, б) прогноз многослойной нейронной сети, в) – результат оптимизации с помощью MMA



Рис. 2. Оптимальная топология для силы, приложенной в точке с координатой *y* = 0.625: а) – прогноз однослойной нейронной сети, б) прогноз многослойной нейронной сети, в) – результат оптимизации с помощью MMA


Рис. 7. Оптимальная топология для силы, приложенной в точке с координатой *y* = 0.185: а) прогноз однослойной нейронной сети, б) прогноз многослойной нейронной сети, в) результат оптимизации с помощью MMA

Заключение. По полученным результатам видно, что многослойная нейронная сеть прогнозирует более точное решение за счет большого количества параметров. Однако преимущество первой нейронной сети заключается в прогнозе без существенных потерь в результативности и с малым количеством параметров. Несмотря на то, что подбор начальных параметров сигмоид однослойной нейронной сети определяет точность полученной топологии из-за наличия локальных минимумов, случайный набор ненулевых параметров все также позволяет получить примерную топологию.

Успешное применение нейронной сети в задаче топологической оптимизации упругой пластины дает отличную мотивацию для продолжения исследований в данной области. Дальнейшая работа будет заключаться в усилении способности нейронной сети к обобщению на различные граничные условия и нагрузки, улучшению качеству изображения на границе материала, а также учету влияния свойств анизотропии.

Работа выполнена при поддержке РНФ (грант № 22-71-00108).

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Xu Y., Gao Y., Wu C., Fang J., Sun G., Steven G.P., Li Q. (2021). Machine learning based topology optimization of fiber orientation for variable stiffness composite structures // International Journal for Numerical Methods in Engineering. -2021. - Vol. 122. - P. 6736-6755.

2. Chandrasekhar A., Mirzendehdel A., Behandish M., Suresh K. FRC-TOuNN: Topology Optimization of Continuous Fiber Reinforced Composites using Neural Network // Computer-Aided Design. – 2023. – Vol. 156.

3. Nie Z., Lin T., Jiang H., Kara L.B. Topologygan: Topology optimization using generative adversarial networks based on physical fields over the initial domain // Journal of Mechanical Design. -2021. -Vol. 143(3).

4. Yu Y., Hur T., Jung J., Jang I.G. Deep learning for determining a near-optimal topological design without any iteration // Structural and Multidisciplinary Optimization. – 2019. – Vol. 59. – P. 787-799.

Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого<sup>(•)</sup>

## ИССЛЕДОВАНИЕ СТАЦИОНАРНЫХ ВОЛН ЛЭМБА В ОДНОРОДНОМ ИЗОТРОПНОМ УПРУГОМ СЛОЕ

Введение. В настоящее время все большее применение находят новые технологии радио- и телекоммуникации поколения 5G. Одной из особенностей работы таких устройств является применение в процессе приема, передачи и обработки информации сверхвысоких частот (СВЧ). Работа в зоне частот, превышающих значение 6 GHz – стандартное верхнее значение используемых частот предыдущих поколений [1] – значительно увеличивает спектр возможностей новых устройств, таких как осуществление передачи-приема информации на больших скоростях, меньшая задержка, более устойчивая работа, большая пропускная способность и многие другие [2-6].

Работа таких приборов осуществляется с использованием резонаторов в форме тонких пластин, в которых возбуждаются волны Лэмба. Такие волны способны обеспечивать высокую добротность передачи и приема сигнала на частотах выше 6 GHz [7]. Более того, на добротность системы также можно влиять и при помощи структуры кристаллов, из которых изготовлена пластинка [7]. Также для данных систем проводятся исследования по увеличению ширины пропускания сигнала [8].

Однако все еще существует множество нерешенный вопросов, связанных с использованием СВЧ упругих волн. К примеру, дистанции, на которых реализуемо применение новых технологий, сильно ограничено и зачастую не превышают территории одного предприятия, так как область распространения волн сильно зависит от их длин, и чем меньше это значение, тем меньше область ее распространения [3].

*Цель работы.* Целью данной работы является разработка математической модели резонатора сверхвысоких частот. Необходимо преодолеть полный путь постройки модели для выявления свойств материала, влияющих на работу резонатора.

Ход работы. Рассматривается упругий однородный изотропный слой толщиной 2*h*. Пластина считается бесконечно длинной в направлении оси  $x_1$ , толщина задана на оси  $x_3$  в диапазоне [-h, h]. Поле перемещений бегущих волн в слое может быть представлено в виде [9]:

$$\begin{cases} u_1 = \partial_1 \Phi - \partial_3 \Psi \\ u_3 = \partial_3 \Phi + \partial_1 \Psi , \end{cases}$$
(1)

где  $\partial_{\alpha} = \frac{\partial}{\partial x_{\alpha}}$  ( $\alpha = 1, 3$ ),  $\Phi, \Psi - \phi$ ункции потенциалов, которые представимы в виде:

$$\begin{cases} \Phi(x_1, x_3, t) = (A sh(v_1 x_3) + B ch(v_1 x_3))e^{ik(x_1 - ct)} \\ \Psi(x_1, x_3, t) = (C sh(v_2 x_3) + D ch(v_2 x_3))e^{ik(x_1 - ct)}, \end{cases}$$
(2)

где  $v_{\alpha} = \sqrt{k^2 - k_{\alpha}^2}$ ;  $k_{\alpha} = \frac{\omega}{c_{\alpha}}$ ,  $(\alpha = 1, 3)$ ; k – волновое число,  $\frac{1}{m}$ ; c – фазовая скорость,  $\frac{m}{s}$ ;  $\omega = k \cdot c$  – круговая частота,  $\frac{rad}{s}$ ; E – модуль Юнга,  $\nu$  – коэффициент Пуассона,  $\rho$  – плотность материала,  $c_1 = \sqrt{\frac{E(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)\rho}}$  – фазовая скорость продольных колебаний;

<sup>&</sup>lt;sup>(•)</sup> Я.К. Астапов, astapov.yak@edu.spbstu.ru

 $c_2 = \sqrt{\frac{E}{2(1+\nu)\rho}} - фазовая скорость поперечных колебаний.$ 

Система уравнений (2) позволяет найти каскад волн, пробегающих по пластине, однако данная система также позволяет смоделировать симметричные и антисимметричные волны по отдельности. В случае симметричных волн поверхности пластины движутся в противоположных направлениях, то есть, средняя линия сечения остается неподвижной; в случае антисимметричных волн – в одном направлении. Рассмотрим случай симметричных волн:

$$\begin{cases} \Phi(x_1, x_3, t) = Be^{ik(x_1 - ct)} ch(v_1 x_3) \\ \Psi(x_1, x_3, t) = Ce^{ik(x_1 - ct)} sh(v_2 x_3) , \end{cases}$$
(3)

Чтобы найти значения характеристик *k*, *c*, *ω*, воспользуемся трансцендентным уравнением:

$$\frac{\tanh\left(kh\sqrt{1-c^2/c_1^2}\right)}{\tanh\left(kh\sqrt{1-c^2/c_2^2}\right)} = \frac{\left(2-c^2/c_2^2\right)^2}{4\sqrt{1-c^2/c_1^2}\sqrt{1-c^2/c_2^2}}$$
(4)

Анализ уравнения (4) без асимптотических допущений весьма сложен, поэтому был применен численный аппарат теории продолжения решений нелинейных уравнений [10]. В результате был получен график безразмерных дисперсионных кривых, три первые формы и отношение безразмерной фазовой скорости к безразмерному волновому числу показаны на рисунке 1:



Рис. 1. Дисперсионные кривые, первые три формы и отношение фазовой скорости от волнового числа. На данном графике представлены безразмерные кривые, где  $\tilde{\omega} = \frac{\omega h}{c_2}$ ,  $\tilde{k} = kh$ ,  $\tilde{c} = \frac{c}{c_2}$ 

Согласно исследованиям Толстого и Усдина [9], при стремлении параметра  $\tilde{k}$  к нулю будет наблюдаться уменьшение фазовой скорости до значения  $c = 2\sqrt{2/3} c_2 \approx 1.6 c_2$ , что соответствует случаю движения волн с длиной волны сильно большей значения толщины. Обратный предельный случай, при котором параметр k стремится к бесконечности: при этом отношение скоростей будет асимптотически стремиться к  $c \approx 0.9194 c_2 = c_R - фазовой скорости волны Рэлея – волны на поверхности упругого пространства.$ 

Таким образом, были получены дисперсионные кривые для симметричных и антисимметричных волн. На основе данных графиков и системы уравнений (1) были построены первые две формы симметричных волн, иллюстрируемые на рис. 2.



Рис. 2. Первые две формы симметричной волны

*Выводы.* В работе выполнено построение точного аналитического решения для симметричных и антисимметричных волн Лэмба в тонких пластинках. Использованная в работе методика численного исследования дисперсионных соотношений может быть распространена на общий случай анизотропной пьезоэлектроупругой среды.

### ЛИТЕРАТУРА

1. 'What frequencies spectrum will 5G technology use and how does this compare to 4G?' // Электронный pecype URL: https://www.arrow.com/en/research-and-events/articles/what-frequency-spectrum-will-5g-technology-use-and-how-does-this-compare-to-4g

2. Shariat M., et al., 5G Radio Access above 6 GHz // Transactions on Emerging Telecommunications Technologies – 2016 - Vol. 27 - no.9 - P. 1160-1167.

3. 'Technical Guide to 6 GHz for MSPs, ISPs and SPs'//tanaza – Электронный ресурс: https://www.tanaza.com/blog/technical-guide-to-6ghz-wifi-frequency-band/

4. 'Wi-Fi 6 and Wi-Fi 6E Explained: More Bandwidth, Speed and 6 GHz' // Электронный ресурс: https://www.tomshardware.com/features/wi-fi-6-and-6e-explained

5. 'Detailed specifications of the terrestrial radio interfaces of International Telecommunications-2020 (IMT-2020)', International Telecommunication Union (ITU), Radiocommunication Sector of ITU (IRU-R) // Электронный ресурс: https://www.itu.int/dms\_pubrec/itu-r/rec/m/R-REC-M.2150-1-202202-I!!PDF-E.pdf

6. 'Концепция создания и развитие сетей 5G/IMT-2020 в Российской Федерации (Проект)' // Электронный ресурс: https://digital.gov.ru/uploaded/files/proekt-kontseptsii-sozdaniya-i-razvitiya-setej-5g-imt-2020-v-rossijskoj-federatsii.pdf?utm\_referrer=https%3a%2f%2fwww.google.com%2f

7. Lu R., Gong S., RF acoustic microsystems based on suspended lithium niobate thin films: advances and outlook // J. Micromech. Microeng. -2021 - Vol. **31** – P. 114001.

8. Yansong Yang, Liuqing Gao, Songbin Gong, X-Band miniature filters using lithium niobate acoustic resonators and bandwidth widening technique // IEEE Transaction on Microwave Theory and Techniques -2021 - P 99.

9. Новацкий В. Теория Колебаний. – М: МИР, 1975 – С. 690-695.

10. Kuznetsov Yu.A., Govaerts W., Meijer H.G.E., Al-Hdaibat B., de Witte V., Dhooge A., Mestrom W., Neirynck N., Riet A.M., Sautios B., MATCONT: Continuation toolbox for ODEs in Matlab // Электронный pecypc: https://sourceforge.net/projects/matcont/

Е.А. Буклаков<sup>1</sup>, Ж.-Н. Ру<sup>2</sup>, Е.Ф. Грекова<sup>1,3</sup>

<sup>1</sup>Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого<sup>(•)</sup> <sup>2</sup>Лаборатория Навье, Университет Густава Эйфеля, Марн-ла-Валле, Франция <sup>3</sup>Институт проблем машиноведения РАН

## МОДЕЛИРОВАНИЕ РАСПРОСТРАНЕНИЯ ВОЛН В КОГЕЗИВНЫХ ПОРОШКАХ МЕТОДОМ ДИСКРЕТНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ

Введение. Метод дискретных элементов наиболее близок к реальному эксперименту, где частицы представляют собой твердые тела, взаимодействующие по определенным законам. Получение динамических характеристик гранулированных сред представляет особый интерес, так как влияет на распространение коротковолновых возмущений. В настоящее время небольшое количество экспериментов [1,2]посвящено лишь распространению волн в неплотно упакованных сыпучих средах. Дисперсионные свойства таких сред не могут быть объяснены с точки зрения классической сплошной среды, где частица – материальная точка. Возможно, наличие вращательных степеней свободы агрегатов или характерных пустот в материале существенно влияет на распространение волн и уменьшение кинетической энергии в определенных диапазонах частот. Создание численной модели, сначала двумерной, а затем и трехмерной целесообразно для понимания волновых процессов в материале, сравнения численных результатов с экспериментом. Численные эксперименты по распространению волн в зернистых средах с использованием метода дискретных элементов в основном проводились для кристаллических упаковок, лишь в немногих работах изучаются волны в неупорядоченных упаковках [3,4].

Численный эксперимент. Деформация упаковки частиц. После создания упаковки из 1821 частицы (рис. 1) в систему вводится малое возмущение, которое имитирует воздействие внешней силы, например удар поршня, ударной волны или вибрации стенок контейнера. Возмущение приводит к деформации и перераспределению частиц в упаковке. Начальное возмущение должно быть достаточно малым, чтобы не разрушить упаковку, но достаточно большим, чтобы возбудить распространение волны. В этом исследовании возмущение было сообщено небольшой области на границе упаковки.



Рис. 1. Упаковка из 1821 частицы

В разработанной авторами программе (язык программирования Fortran), предназначенной для имитации поведения слабо когезионного порошка при

<sup>&</sup>lt;sup>(•)</sup> Е.А. Буклаков, buklakov.ea@edu.sbpstu.ru

распространении в нем волн, определялись пары взаимодействующих частиц и линеаризовались уравнения движения частиц вблизи заданного нагруженного значения. В программе используются линейные уравнения баланса сил и моментов при перемещениях и поворотах с граничными условиями, моделирующими твердые стенки справа и слева.

Чтобы исследовать, как малое возмущение распространяется в упаковке, на систему перемещающий синусоидальный импульс, левую стенку накладывается И затем останавливающий ее. Возмущение распространяется вдоль горизонтальной оси, и измеряется время, за которое фронт волны проходит почти весь образец. Разделив путь, пройденный фронтом возмущения, на время прохождения, мы получаем аппроксимацию фазовой скорости распространения волны. Предварительные результаты показывают, что продольная волна в образце имеет небольшую дисперсию, при этом скорость мало меняется в зависимости от точек наблюдения. Поперечная волна демонстрирует чрезвычайно необычное поведение с сильной дисперсией, волна перемещений сопровождается поворотной, форма возмущения меняется существенно, для некоторых частот наблюдается сильное убывание сигнала по координате. Поперечное возмущение гораздо более чувствительно к конкретному варианту упаковки.

Этот эксперимент может быть описан в рамках редуцированной модели Коссера, в которой продольная волна нечувствительна к вращательным степеням свободы частиц, а поперечная волна представляет собой сдвигово-вращательную волну с сильной дисперсией. Применимость различных моделей сплошных сред с вращающимися степенями свободы к этому эксперименту будет проанализирована в дальнейших исследованиях. В целом, результаты дают представление о поведении слабо когезионных упаковок частиц и их реакции на возмущения.



Рис. 2. Прохождение продольной волны (слева) и поперечной (справа) в двух различных упаковках через сечение, отстоящее от линии возмущения на <sup>3</sup>⁄4 длины образца. Имеется воспроизводимость прибывающего сигнала для разных упаковок

Заключение. Представлены результаты численного моделирования методом дискретных элементов для разработки модели упаковки поджатого слабокогезивного порошка в прямоугольном контейнере. Рассмотренная модель состоит из круглых частиц с линейным упругим и слабым когезионным взаимодействием. Исследовано распространение синусоидального возмущения, сообщенного подвижной левой стенке контейнера. Наши предварительные результаты показывают, что продольная волна в этом достаточно однородном и изотропном образце обладает слабой дисперсией и не сопровождается волной поворотов. Однако поперечная волна ведет себя неклассически и является волной сдвига-

вращения. В некоторых случаях поперечное возмущение меняет знак и распадается на несколько пиков, демонстрируя сильную дисперсию.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Botello F.R., Castellanos A., Tournat V. Ultrasonic probing of cohesive granular media at very low consolidation // Ultrasonics. – 2016. – T. 69. – C. 193-200.

2. Botello F.R., Castellanos A., Grekova E.F., Tournat V. Effect of the microstructure on the propagation velocity of ultrasound in magnetic powders // Ultrasonics. – 2018. – T. 82. – C. 153-160.

3. Saitoh K., Shrivastava R.K., Luding S. Rotational sound in disordered granular materials //Physical Review E.  $-2019. - T. 99. - N_{\odot} \cdot 1. - C. 012906.$ 

4. Somfai E., Roux J.-N., Snoeijer J.H., van Hecke M., van Saarloos W. Elastic wave propagation in confined granular systems // Physical Review E. – 2005. – T. 72. – № 2. – C. 021301.

5. Gilabert F.A., Roux J.-N., Castellanos A. Computer simulation of model cohesive powders: Plastic consolidation, structural changes, and elasticity under isotropic loads // Physical Review E.  $-2008. - T. 78. - N_{\odot} \cdot 3. - C \cdot 031305$ .

УДК 539.421.4

А.Н. Гордеев<sup>1</sup>, А.В. Савиковский<sup>1,2</sup>, О.В. Антонова<sup>1</sup>, А.А. Михайлов<sup>1</sup> <sup>1</sup>Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого<sup>(•)</sup> <sup>2</sup>Акционерное общество «Силовые машины - ЗТЛ, ЛМЗ, Электросила, Энергомашэкспорт»

## АНАЛИЗ ВОЗМОЖНОСТЕЙ ПРОГРАММНЫХ КОМПЛЕКСОВ ANSYS И PANTOCRATOR ПРИ ВЫЧИСЛЕНИИ ПАРАМЕТРОВ МЕХАНИКИ РАЗРУШЕНИЯ

Введение. В последние десятилетия наблюдается устойчивый рост интереса в прогнозировании надежности и долговечности промышленного оборудования. В связи с этим становится актуальным вопрос оценки индивидуального ресурса и исследования причин и характера разрушения конструкций. Во многих элементах конструкций реализуется многоосное напряженное состояние, приводящее к смешанной моде разрушения. Для подобных случаев не существует аналитического решения, либо его получение оказывается слишком сложным, с точки зрения использования математического аппарата. Ввиду этого, широкое применение получили подходы, в основе которых лежит метод конечных элементов [1]. Однако, на данный момент не существует единой универсальной методики, согласно которой пользователь может определиться с выбором программного комплекса для решения задачи механики разрушения, а также метода исследования (силовой / энергетический методы), с помощью которого осуществляется решение. В данной работе представлены результаты сравнительного анализа решений задач разрушения с использованием программных механики комплексов ANSYS И PANTOCRATOR.

Особенности вычисления J интеграла для смешанной моды нагружения. Одним из параметров механики разрушения, лежащих в основе применения соответствующего критерия разрушения, является J интеграл. В отличие от также получившего широкое распространение коэффициента интенсивности напряжений (КИН), J интеграл применим для решения неупругих задач и обладает инвариантностью по отношению к выбору контура интегрирования (доказанной в [2, 3] для случая I моды разрушения, в [4] для по II моды, в [5] для смешанной моды). Следует отметить, что в случае смешанных мод используется

<sup>&</sup>lt;sup>(•)</sup> А.Н. Гордеев, gordeevan@gmail.com

векторный J-интеграл с компонентами J<sub>1</sub> и J<sub>2</sub>. Таким образом, вычисление компонент векторного J-интеграла по бесконечно малому контуру  $\Gamma_{\varepsilon}$  в двумерном случае изотермического нагружения проводится по следующей общей формуле:

$$J_{k} = \int_{\Gamma_{\varepsilon}} \left( W^{mech} n_{k} - T_{i} \frac{\partial u_{i}}{\partial x_{k}} \right) d\Gamma, \qquad k = \overline{1,2};$$

где  $W^{mech} = \int_0^{\varepsilon} \sigma_{ij} d\varepsilon_{ij}^{mech}$  – энергия деформации,  $\varepsilon_{ij}^{mech}$  – механическая составляющая тензора деформации, совпадающая с полной деформацией  $\varepsilon_{ij}^{mech} = \varepsilon_{ij}$  в изотермическом случае,  $T_i = n_j \sigma_{ji}$  – компоненты вектора напряжения на контуре,  $u_i$  – компоненты вектора перемещений,  $n_k$  – проекции единичного вектора нормали на оси локальной системы координат, связанной с ориентацией трещины и находящейся в ее вершине (рис. 1).



Рис. 1. Выбор контура интегрирования для Ј-интеграла

Рассматривается замкнутый контур  $\Gamma$ , удаленный от вершины трещины на максимальное расстояние r, модуль которого равен длине участка берега трещины, такой что:

$$\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_C^+ \cup \Gamma_C^- \cup \Gamma_{\varepsilon} = \Gamma_1 \cup \Gamma_C \cup \Gamma_{\varepsilon}.$$

Тогда выражения для компонент J интеграла (J<sub>1</sub> и J<sub>2</sub>) имеют следующий вид:

$$J_{1} = \int_{\Gamma_{1}} \left( W^{mech} n_{1} - T_{i} \frac{\partial u_{i}^{mech}}{\partial x_{1}} \right) d\Gamma, \qquad J_{2} = \int_{\Gamma_{1}} \left( W^{mech} n_{2} - T_{i} \frac{\partial u_{i}^{mech}}{\partial x_{2}} \right) d\Gamma - \int_{\Gamma_{C}} \left( W^{mech}_{+} - W^{mech}_{-} \right) d\Gamma$$

Важно отметить, что наряду с основной частью J-интеграла в выражение для компоненты J<sub>2</sub> входит слагаемое, учитывающее вычисление скачка энергии на берегах трещины.

Объект исследования и условия нагружения. Для определения параметров механики разрушения в качестве объекта исследования выступает плосконапряженная пластина размером 40×40 мм с внедренной центральной трещиной длиной 1 мм. Конечно-элементная (КЭ) модель исследуемой пластины, со сгущением сетки в области вершин трещин, построенная с использованием 8-ми узловых КЭ, представлена на рис. 2.

Численное решение краевой задачи было получено различными методами, реализованными в КЭ программных комплексах ANSYS и PANTOCRATOR [6] для трех расчетных случаев: нормальное раскрытие; чистый сдвиг; смешанная мода нагружения.



Рис. 2. КЭ модель пластины с центральной трещиной

Результаты расчетов и выводы. В ходе работы проведен сравнительный анализ численных значений  $J_1$  и  $J_2$ , полученных в двух различных программных комплексах. Рассматривается метод эквивалентного объемного интегрирования (ЭОИ), реализованный в PANTOCRATOR, метод интеграла взаимодействия (встроенный метод CINT) и метод прямого вычисления J интеграла, реализованные в ANSYS. Результаты вычислений сравниваются с аналитическим решением и между собой. Связь между значениями КИН, полученных методом ЭОИ, и компонент вектора J интеграла определяется согласно [7].

В табл. 1 представлено сравнение численных решений при нормальном раскрытии трещины для двух случаев нагружения – мягком и жестком.

Программный	Метод	Тип	Значение,	Аналитическое	Погрешность %	
комплекс	исследования	нагружения	J, ∏а∕мм	решение, Па/мм	погрешноств, 70	
ANSYS	СІNТ (метод интеграла взаимодействия)	Мягкое	78628	78539	0,11%	
		Жесткое	78382		0,20%	
	Прямое вычисление Ј интеграла	Мягкое	78653		0,14%	
		Жесткое	78372		0,21%	
PANTOCRATOR	ЭОИ	Мягкое	78624		0,11%	
		Жесткое	78667		0,16%	
Примечание: (*) – величина перемещений, задаваемая при условии жесткого нагружения,						
определяется из расчета при мягком нагружении с умножением на коэффициент $\frac{1}{(1-v^2)^2}$ (где $v$ – коэффициент						
Пуассона), полученного из закона Гука для плоского напряженного состояния.						

Таблица 1. Сравнение результатов численного решения I моды нагружения в комплексах ANSYS и PANTOCRATOR

Таким образом, полученные результаты демонстрируют попадание в 1% интервал для каждого метода исследования, что говорит о хорошей точности полученных результатов. Также отмечается более высокое значение погрешности при жестком нагружении, что можно объяснить пренебрежением влияния перемещений на грани пластины, вследствие раскрытия трещины. Было проведено исследование сходимости значений отдельных компонент интеграла от размера КЭ и исследование влияния формы контуров

интегрирования, даны рекомендации по практическому применению контуров интегрирования.

### ЛИТЕРАТУРА

1. Зенкевич О. Метод конечных элементов в технике - М.: Мир, 1975.

2. Cherepanov G.P. The Propagation of Cracks in a Continuous Medium // Journal of Applied Mathematics and Mechanic. – 1967. – Vol. 31. – P.503-512.

3. Rice J. R. A Path Independent Integral and the Approximate Analysis of Strain Concentration by Notches and Cracks // Journal of Applied Mechanics. – 1968. – Vol. 35. – P. 379–386.

4. Eischen J.W. An improved method for computing the J2 integral // Engineering Fracture Mechanics. – 1987. – Vol. 26:5. – P. 691-700.

5. Nikishkov G.P., Atluri S.N. An equivalent domain integral method for computing crack-tip integral parameters in non-elastic, thermo-mechanical fracture // Engineering Fracture Mechanics. – 1987. – Vol. 26:6. – P. 851-867.

6. Judt P.O., Ricoeur A., Linek G. Crack path prediction in rolled aluminum plates with fracture toughness orthotropy and experimental validation // Engineering Fracture Mechanics. – 2015. – Vol. 138. – P. 33-48.

7. Семенов А.С. PANTOCRATOR – конечно-элементный программный комплекс, ориентированный на решение нелинейных задач механики // Труды V-ой Межд. конф. "Научно-технич. пробл. прогнозир. надежн. и долговечности конструкций и методы их решения". СПб.: Изд-во СПбГПУ, 2003. С. 466-480.

УДК 532.517

М.В. Иванов<sup>1</sup>, А.А. Михайлов<sup>1</sup>, О.В. Антонова<sup>1</sup>, В.А. Кузьмин<sup>2</sup> <sup>1</sup>Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого<sup>(•)</sup> <sup>2</sup>Проект «Тетрал», Санкт-Петербург

## АНАЛИЗ УПРУГОГО ПОВЕДЕНИЯ И ОПРЕДЕЛЕНИЕ ЭФФЕКТИВНЫХ ХАРАКТЕРИСТИК СЛОИСТЫХ ПАНЕЛЕЙ С ТЕТРАЭДРАЛЬНЫМ ЗАПОЛНИТЕЛЕМ

Введение. В механике сплошных сред композиционный материал, обладающий сложной микроструктурой, при численном моделировании на макроуровне часто рассматривается как однородный материал с эффективными анизотропными свойствами. Слоистые панели с тетраэдральным заполнителем [1] можно рассматривать как конструктивно анизотропный композиционный разносопротивляющийся материал [2].

Целью данного исследования является определение эффективных упругих характеристик, необходимых для описания напряженно-деформированного состояния слоистых панелей с тетраэдральным заполнителем на макроуровне.

Объектом исследования является ячейка периодичности, представленная на рис. 1.



Рис. 1. Ячейка периодичности

<sup>&</sup>lt;sup>(•)</sup> М.В. Иванов, ivanov mv2@spbstu.ru

Определение эффективных характеристик. На первом этапе была построена конечноэлементная пространственная модель ячейки периодичности, проведен анализ сходимости метода, определен необходимый и достаточный размер конечного элемента. Материал листов и заполнителя одинаковый, АМГ2, E = 71 ГПа,  $\nu = 0.3$ . Итоговая КЭ-модель приведена на рисунке 2. Моделирование производилось в программном комплексе ANSYS [3].



Рис. 2. КЭ-модель ячейки периодичности

Для определения эффективных упругих характеристик использован метод прямой гомогенизации [4]. Для определения эффективных модулей Юнга и коэффициентов Пуассона, решены три задачи растяжения в направлениях х, у и z. Схемы граничных условий показаны на рис. 3.



Рис. 3. Схемы граничных условий задач о растяжении

Для определения эффективных модулей сдвига, также были решены три задачи, но сдвига в плоскостях хz, yz, xy. Схемы граничных условий показаны на рисунке 4.



Рис. 4. Схема граничных условий задач о сдвиге

На рис. 5, в качестве примера представлено распределение эквивалентных напряжений по Мизесу для случая растяжения по оси у.



Рис. 5. Эквивалентные по Мизесу напряжения, Па (нагружение - растяжение вдоль оси у)

Эффективные упругие свойства композита, полученные после решения серии задач, представлены в табл. 1.

Эффективный модуль	Значение
<i>E</i> <sub>1</sub> *	58.6 ГПа
<i>E</i> <sup>*</sup> <sub>2</sub>	0.899 ГПа
E <sub>3</sub> *	4.53 ГПа
$\nu_{12}^*$	0.31
$\nu_{23}^*$	0.01
v <sub>32</sub> *	0.10
$\nu_{21}^*$	0.03
$\nu_{13}^*$	0.29
$\nu^*_{31}$	0.30
G <sub>12</sub>	1.03 ГПа
G*23	0.113 ГПа
G <sub>13</sub>	0.832 ГПа

Табл. 1. Эффективные упругие свойства

*Выводы.* В рамках работы подготовлена математическая модель ячейки периодичности тетраэдрального заполнителя. С помощью метода прямой гомогенизации определены эффективные упругие свойства, которые в дальнейшем могут быть использованы для моделирования поведения слоистых панелей и конструкций из них на макроуровне.

#### ЛИТЕРАТУРА

2. Патент № 2715157 С1 Российская Федерация, МПК ВЗ2В 7/00, ВЗ2В 15/00, ВЗ2В 3/12. Заполнитель с ферменной объемной структурой многослойной композитной панели: № 2019106951: заявл. 12.03.2019: опубл. 25.02.2020 / В. А. Кузьмин.

3. ANSYS, Inc. Release Notes, Release 17 – SAS IP, Inc.

4. Боровков А.И. Гомогенизация однонаправленных волокнистых и гранулированных упругих композитов / А. И. Боровков, Д. Алеман Меза // Научно-технические ведомости Санкт-Петербургского государственного политехнического университета. – 2009. – № 3(84). – С. 135-153.

<sup>1.</sup> Амбарцумян С.А., Хачатрян А.А. Основные уравнения теории упругости для материалов, разносопротивляющихся растяжению и сжатию // Инж. журн. Механика твердого тела. – 1966. – № 2. – С. 44–53.

В.С. Игумнова, А.В. Лукин, И.А. Попов

Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого<sup>(•)</sup>

## СРАВНЕНИЕ ДВУХ СИСТЕМ ФАЗОВОЙ АВТОПОДСТРОЙКИ ЧАСТОТЫ И АВТОМАТИЧЕСКОЙ РЕГУЛИРОВКИ УСИЛЕНИЯ ДЛЯ УПРАВЛЕНИЯ ПЕРВИЧНЫМИ КОЛЕБАНИЯМИ ВЫСОКОДОБРОТНОГО МЭМС-ГИРОСКОПА

Введение. Принцип работы микромеханического вибрационного гироскопа состоит в передаче механической энергии между двумя формами колебаний чувствительного элемента (ЧЭ), вызванной действием сил инерции Кориолиса. В простейшем случае ЧЭ состоит из одной подвижной массы - твердого тела на упругих подвесах - с двумя ортогональными рабочими формами колебаний. В режиме измерения угловой скорости электростатическим двигателем возбуждаются гармонические колебания по первичной оси. В линейном приближении силой Кориолиса амплитуда вызванных вторичных колебаний пропорциональна величине компоненты угловой скорости подвижного объекта вдоль оси чувствительности датчика. Высокие требования к стабильности работы резонансных чувствительных элементов микроэлектромеханических латчиков (в частности вибрационных гироскопов) приводят к необходимости применения систем управления с обратной связью, обеспечивающих постоянство амплитуды колебаний резонатора и его частотную настройку на резонанс. Первая из названных задач, как правило, решается с помощью системы автоматической регулировки усиления [1, 2]. Для решения второй задачи широкое распространение получили системы фазовой автоподстройки частоты [3, 4]. Качественное исследование динамики механически линейного резонатора при совместном действии систем АРУ и ФАПЧ выполнено в [5, 6, 7].

Постановка задачи и результаты. Схема микромеханического гироскопа (ММГ) и системы управления ФАПЧ и АРУ представлены на рис. 1.



Рис. 1. Схема ММГ и систем ФАПЧ и АРУ

Схема ФАПЧ содержит фазовый детектор, фильтр нижних частот (ФНЧ), регулятор и опорный генератор, управляемый напряжением (ГУН). Схема представляет собой замкнутую систему управления, задача которой состоит в обеспечении требуемой разности фаз между выходным сигналом преобразователя емкость-напряжение датчика перемещений резонатора и опорным сигналом ГУН. Амплитудный канал, реализующий схему АРУ, состоит из амплитудного детектора и ПИ-регулятора.

<sup>&</sup>lt;sup>(•)</sup> В.С. Игумнова, igumnovavs@mail.ru

Рассмотрим ось первичных колебаний гироскопа с учетом т.н. геометрической нелинейности, вызванной конечностью поля деформаций элементов упругого подвеса при движении подвижной массы. Математическая модель оси ПК в системе ФАПЧ-АРУ для двух рассмотренных случаев описывается следующими системами уравнений:

$$\begin{split} \ddot{\gamma} + c_{d}\dot{\gamma} + \omega_{\gamma}^{2}\gamma + \beta\gamma^{3} &= A\cos\theta & \ddot{\gamma} + c_{d}\dot{\gamma} + \omega_{\gamma}^{2}\gamma + \beta\gamma^{3} &= A\cos\theta \\ \dot{\theta} &= \omega_{0} + K_{VCO}z & \dot{\theta} &= \omega_{0} + K_{VCO}(z + K_{p}^{PLL}K_{G}(\gamma - rsin\theta)cos\theta) \\ \dot{z} &= K_{I}^{PLL}y & \dot{z} &= K_{I}^{PLL}K_{G}(\gamma - rsin\theta)cos\theta \\ \dot{y} &= \lambda^{PLL}(K_{G}\gamma\cos\theta - y) & A &= K_{p}(X_{0} - r) + B \\ \dot{B} &= K_{I}^{AGC}(X_{0} - r) & \dot{B} & \dot{B} &= K_{I}^{AGC}(X_{0} - r) \\ \dot{r} &= \lambda^{AGC}\left(\frac{\pi}{2}|\gamma| - r\right), \\ Matematuueckan modenb c оригинальной ФАПЧ & C модифицированной ФАПЧ \end{split}$$

$$(1)$$

где  $\gamma$  - амплитуда первичных колебаний (ПК),  $J_{\gamma}$  - момент инерции вокруг оси Z,  $b_{\gamma}$  - коэффициенты демпфирования системы по оси ПК,  $k_{\gamma 1}, k_{\gamma 3}$  - линейные и кубические компоненты жесткости упругого подвеса,  $c_d = b_{\gamma}/J_{\gamma}$ ,  $\omega_{\gamma}^2 = k_{\gamma 1}/J_{\gamma}$ ,  $\beta = k_{\gamma 3}/k_{\gamma 3}$ . Параметры механической системы, полученные путем математического моделирования и натурных испытаний для гироскопа разработки АО «Концерн «ЦНИИ «Электроприбор»: Q = 60000 - добротность вокруг оси Z,  $f_{\gamma}$  - собственная частота вращения вокруг оси Z. Параметры контуров ФАПЧ и АРУ:  $\theta$  - фаза ГУН ( $\omega = \dot{\theta}$  - мгновенная частота ГУН), z - сигнал управления ГУН, y - выходной сигнал фазового детектора,  $\omega_0$  - собственная (свободная) частота ГУН,  $K_{VCO}$  - пропорциональный коэффициент усиления ГУН,  $K_I^{PLL}$  - интегральный коэффициент усиления АРУ, r - оценка текущей амплитуды колебаний,  $K_p, K_I^{AGC}$  - пропорциональный и интегральный коэффициенты регулятора схемы АРУ,  $\lambda^{AGC}$  - частота полюса ФНЧ АРУ,  $X_0$  - требуемая (заданная) амплитуда стационарных колебаний.



Рис. 2. Амплитуда первичных колебаний и частоты ГУН для а) оригинальной и б) модифицированной ФАПЧ

Результаты моделирования системы при выбранных параметрах системы, которые указаны на графиках, представлены на рис. 2.

Из рис. 2 видно, что обе системы выходят на заданную частоту ГУН и амплитуду колебаний, для оригинальной системы время выхода в рабочий режим составляет 25с, а область затягивания имеет диапазон [-7 Hz; +5 Hz], в то время как для модифицированной схемы ФАПЧ время выхода составляет 0.5с и диапазон затягивания [-2 Hz; +35 Hz].

Заключение. В работе рассмотрены различные реализации систем фазовой автоподстройки частоты, работающих совместно с системой автоматической регулировки усиления для управления первичными колебаниями высокодобротного гироскопа RR-типа. Представлены выходные характеристики систем управления, а также динамика чувствительного элемента по первичной оси движения. Проведено сравнение двух систем ФАПЧ по таким характеристикам как: быстродействие и область затягивания в рабочий режим.

Работа выполнена при поддержке гранта Российского научного фонда № 21-71-10009.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Zhu H. et al. Drive mode control for MEMS gyroscopes with electrostatically tunable structure // 2013 International Conference on Manipulation, Manufacturing and Measurement on the Nanoscale. – IEEE, 2013. - C. 273-276.

2. Nesterenko T.G. et al. Amplitude control system of drive-mode oscillations of MEMS gyroscopes //IOP Conference Series: Materials Science and Engineering. – IOP Publishing, 2019. – T. 516. – №. 1. – C. 012009.

3. Wu H. et al. Stability analysis of MEMS gyroscope drive loop based on CPPLL // 2011 Asia Pacific Conference on Postgraduate Research in Microelectronics & Electronics. – IEEE, 2011. – C. 45-48.

4. Demir A., Hanay M. S Phase-locked loop based resonant sensors: A rigorous theory and general analysis framework for deciphering fundamental sensitivity limitations due to noise //arXiv preprint arXiv:1903.06497. – 2019.

5. Park S. et al. Oscillation control algorithms for resonant sensors with applications to vibratory gyroscopes //Sensors.  $-2009. - T. 9. - N_{\odot}. 8. - C. 5952-5967.$ 

6. Indeitsev D.A. et al. Nonlinear dynamics of MEMS resonator in PLL-AGC self-oscillation loop // Nonlinear Dynamics. – 2021. – T. 104. – C. 3187-3204.

7. Indeitsev D.A. et al. Analysis of imperfections sensitivity and vibration immunity of MEMS vibrating wheel gyroscope // Nonlinear Dynamics. – 2021. – T. 105. – C. 1273-1296.

А.А. Ильин

Санкт-Петербургский государственный университет (•)

## О МЕХАНОХИМИЧЕСКОЙ КОРРОЗИИ ТОРОИДАЛЬНЫХ ОБОЛОЧЕК ПОД ДЕЙСТВИТЕМ ВНУТРЕННЕГО ДАВЛЕНИЯ

Введение. В нефтегазовой и аэрокосмической промышленности получили широкое распространение тороидальные оболочки [1]. Режимы работы данных элементов конструкций предусматривают одновременное действие на них механических нагрузок и агрессивных внешних сред, которое может стать причиной механохимической коррозии [2].

Вопрос механохимической коррозии в литературе рассмотрен в основном для цилиндрических и сферических оболочек [3–7]. Тороидальные оболочки, в отличие от цилиндрических, имеют неоднородное распределение окружных напряжений вдоль поверхности [8–11], что оказывает влияние на скорость коррозионного процесса.

Данная работа посвящена оценке долговечности тороидальной оболочки, подверженной действию внутреннего давления и механохимической коррозии, скорость которой линейно зависит от максимальных главных напряжений в соответствующих точках поверхности.

Методика исследования. Изменение геометрии оболочки с течением времени рассчитывается методом Эйлера. На каждом шаге по времени задача решается при помощи метода конечных элементов (КЭ). Рассматривается двухмерная модель толстостенной оболочки в осесимметричной постановке (рис. 1а). Внутреннее давление p действует на внутреннюю поверхность, радиус которой обозначен через  $r_i$ . Внешняя поверхность (радиусом  $r_o$ ) остается свободной. Коррозия моделируется как уменьшение толщины стенки оболочки h со скоростью -dh/dt, линейно зависящей от окружных напряжений.

Внутренняя поверхность тора разбивается на сегменты одинаковой длины, при этом число элементов КЭ сетки соответствует числу сегментов. Давление прикладывается по нормали к каждому сегменту внутренней поверхности. При КЭ решении в узлах внутренней поверхности определяются окружные напряжения, по которым определяется величина истончения стенки оболочки -dh за время dt. По обновленным координатам узлов происходит перестроение геометрии внутренней поверхности оболочки. После этого, на следующем шаге по времени процедура повторяется. Долговечность оболочки определяется или временем, за которое напряжения в какой-либо точке оболочки достигнут максимального допустимого напряжения, или временем, за которое минимальная толщина стенки станет равной минимальной допустимой толщине (например, половине от начальной).

Ввиду того, что скорость коррозии зависит от величины напряжений, в тороидальной оболочке, в которой распределение окружных напряжений по сечению неоднородно, с течением времени будет наблюдаться локализация коррозионного износа. Кроме того, неоднородное распределение напряжений усугубляет проблемы устойчивости численного решения задачи. Устойчивость численного решения задач о коррозии оболочек с изначально круговыми сечениями рассматривается в работах [12,13]. Для анализа влияния временной и пространственной дискретизации на устойчивость решения проведена серия расчетов с варьированием величин шагов по времени и пространству.

*Результаты.* На рис. 16 показано распределение окружных напряжений по сечению тороидальной оболочки. Видно, что максимальные напряжения наблюдаются в точке

<sup>&</sup>lt;sup>(•)</sup> А.А. Ильин, st111425@student.spbu.ru

внутренней поверхности, наиболее близко расположенной к оси вращения тора A (точка M). Следовательно, долговечность тороидальной оболочки будет определяться напряжениями, возникающими в окрестности точки M.



Рис. 1. а) Вид геометрии и конечно-элементной сетки тороидальной оболочки, б) Распределение окружных напряжений по сечению тороидальной оболочки

На рис. 2 представлены графики роста напряжений со временем в зависимости от величины пространственного и временного шага. Анализ проводился для торообразных оболочек с большими величинами *R*, напряженное состояние которых стремится к напряженному состоянию для цилиндрической трубы. Использование оболочек такого типоразмера позволяет сравнить полученные численные результаты с аналитическим решением задачи о трубе, представленным в [3].



Рис. 2. Зависимость рассчитанной скорости роста напряжений во времени в зависимости от величины временного шага *dt* и количества КЭ вдоль поверхности, *n<sub>e</sub>*. Штриховой линией показано аналитическое решение для цилиндрической трубы, представленное в [3]

Как видно из рис. 2, при относительно небольшом количестве элементов вдоль внутренней поверхности тора,  $n_{e_i}$  и относительно больших dt вычисленная долговечность тора превышает величину, полученную аналитически для цилиндрической оболочки с таким же начальным поперечным сечением. Большой шаг по времени приводит к тому, что изменение напряжений, произошедшее за время одного шага, не учитывается, что приводит к уменьшению суммарной скорости коррозии и завышению долговечности сверх установленного теоретическим решением предела.

При уменьшении как временного, так и пространственного шага происходит быстрая потеря устойчивости решения, приводящая к занижению расчетной долговечности. Таким образом, для подобных задач проблемы выбора оптимальных расчетных параметров имеют решающее значение.

При увеличении радиуса окружности тора R долговечность тороидальной оболочки увеличивается. При достаточно больших R получаемые результаты стремятся к результатам, получаемым для цилиндрической трубы. Расчеты также показали, что при фиксированном начальном коэффициенте исчерпания несущей способности большей долговечностью обладает оболочка, нагруженная большим давлением. Это связано с тем, что при таких условиях оболочка, нагруженная большим давлением, обладает большей толщиной.

Работа выполнена при поддержке Российского научного фонда № 21-19-00100.

### ЛИТЕРАТУРА

1. Новожилов В.В. Теория тонких оболочек. – Судпромгиз, 1951. – 344 с.

2. Гутман Э.М. Механохимия металлов и защита от коррозии. – М., «Металлургия», 1981. – 232 с

3. Пронина Ю. Г. Механохимическая коррозия полого цилиндра из идеального упруго-пластического материала под действием постоянного давления. Вестник Санкт-Петербургского Университета. Серия 1: Математика, Механика, Астрономия, 2006, №3, с. 121-130.

4. Пронина Ю.Г. Оценка устойчивости упругой трубы под давлением коррозионных сред. Вестник Санкт-Петербургского Университета. Серия 10: Прикладная Математика, Информатика, Процессы Управления, 2006, № 3, с. 55-63.

5. Пронина Ю.Г. Равномерная механохимическая коррозия полой сферы из идеального упругопластического материала под действием постоянного давления. Вестник Санкт-Петербургского Университета. Серия 1: Математика, Механика, Астрономия, 2009, № 1, с. 113-122.

6. Пронина Ю.Г. Расчет долговечности упругой трубы под действием продольной силы, давления и осесимметричного нагрева в условиях равномерной коррозии. Проблемы Прочности и Пластичности, 2009, Т. 71, с.129-135.

7. Седова О.С., Пронина Ю.Г. О выборе эквивалентного напряжения в задачах о механохимической коррозии сферических элементов. Вестник Санкт-Петербургского Университета. Серия 10: Прикладная Математика, Информатика, Процессы Управления, 2016, Т. 12(2), с. 33-44.

8. Тимошенко С. П., Войновский-Кригер С. Пластинки и оболочки. – М.: Наука, 1966. – 636 с.

9. Audoly B., Pomeau Y. Elasticity and Geometry: From Hair Curls to the Non-linear Response of Shells. Oxford University Press. 2010. 597 p.

10. Jordan P. F. Stresses and deformations of the thin-walled pressurized torus //Journal of the Aerospace Sciences. – 1962. – Vol. 29. – №. 2. – P. 213-225.

11. Rossettos J.N., Sanders Jr J. L. Toroidal shells under internal pressure in the transition range //AIAA Journal. – 1965. – Vol. 3. – №. 10. – P. 1901-1909.

12. Pronina Y. An analytical solution for the mechanochemical growth of an elliptical hole in an elastic plane under a uniform remote load //European Journal of Mechanics-A/Solids. – 2017. – Vol. 61. – P. 357-363.

13. Zhao S., Pronina Y. On the stress state of a pressurised pipe with an initial thickness variation, subjected to non-homogeneous internal corrosion // E3S Web of Conferences. – EDP Sciences, 2019. – Vol. 121. – P. 01013.

У.П. Карасева<sup>1,2</sup>, А.Б. Фрейдин<sup>1,2</sup>

## <sup>1</sup>Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого<sup>(•)</sup> <sup>2</sup>Институт проблем машиноведения Российской академии наук

## РЕЛАКСАЦИЯ НАПРЯЖЕНИЙ И СТРУКТУРЫ В МОДЕЛЯХ ВЯЗКОУПРУГОГО МАТЕРИАЛА С ИЗМЕНЯЮЩИМСЯ КОЭФФИЦИЕНТОМ ВЯЗКОСТИ

Введение. В данной работе обсуждаются два процесса, связанные с релаксацией структуры материала. Один процесс порождает релаксацию напряжений. В связи с чем, например, в задачах механохимии, связанных с описанием окисления кремния [1] или литизации кремния в литий ионных батареях [2], важен учет зависимости вязкости от напряжения. Второй процесс связан с релаксацией структуры материала к равновесному состоянию после релаксации напряжений и описывается изменением параметров, характеризующих неравновесность структуры. Например, в стеклообразных материалах вязкое деформирование материалов описывается моделями с изменяющимся коэффициентом вязкости, зависящим от фиктивной температуры [3,4]. Также в расчетах иногда используется прямая зависимость вязкости от времени. Однако в данных моделях не рассматривается одновременный учет обоих процессов релаксации. В связи с этим, в данной работе проводится анализ модели с изменяющимся коэффициентом вязкости с учетом обоих процессов релаксации.

Исходные соотношения. Для стандартной модели вязкоупругого материала (материала Пойнтинга-Томпсона [5], рис. 1) исследована задача описания релаксации напряжений в условиях одноосного растяжения в моделях с переменным коэффициентом вязкости.



Рис. 1. Стандартная модель вязкоупругого материала

Девиаторы напряжений и деформаций связаны уравнением

$$\left(1 + \frac{\mu_1}{\mu_2}\right)\dot{e} + 2\frac{\mu_1}{\eta}e = \frac{\dot{s}}{2\mu_2} + \frac{s}{\eta}.$$
 (1)

Объемная деформация  $\mathcal{G}$  и гидростатическая составляющая тензора напряжений  $\sigma$  связаны законом  $\sigma = k\mathcal{G}$ . В случае одноосного нагружения  $\sigma = \sigma_0 i_1 i_1$ . Тогда из уравнения (1) следует дифференциальное уравнение, связывающее осевое напряжение  $\sigma_0$  и осевую деформацию  $\varepsilon_0$ :

$$\left(1+\frac{\mu_{1}}{\mu_{2}}\right)\eta\dot{\varepsilon}_{0}+2\mu_{1}\varepsilon_{0}=\left(\left(1+\frac{\mu_{1}}{\mu_{2}}\right)\frac{1}{9k}+\frac{1}{3\mu_{2}}\right)\eta\dot{\sigma}_{0}+\frac{2}{3}\left(\frac{\mu_{1}}{3k}+1\right)\sigma_{0}.$$
(2)

<sup>&</sup>lt;sup>(•)</sup> У.П. Карасева, u.p.karaseva@gmail.com

Релаксация напряжений исследуется при постоянной деформации

$$\mathcal{E}_0 = const.$$
 (3)

*Релаксация напряжений и структуры*. В настоящей работе проводится анализ модели, предложенной в [3], согласно которой зависимость приводится к виду

$$\lg \frac{\eta(T,T_f)}{\eta_{ne}(T,T_f)} = x \lg \frac{\eta_{eq}(T_f)}{\eta_{ne}(T,T_f)}.$$
(4)

Здесь T – температура,  $T_f$  – фиктивная температура, температура, при которой текущее состояние микроструктуры материала было бы равновесным,  $\eta_{eq}(T_f)$  и  $\eta_{ne}(T,T_f)$  – вязкость равновесного состояния при температуре  $T_f$  и добавка к равновесной вязкости, характеризующая вклад неравновесности, определяются формулами

$$\lg \frac{\eta_{eq}(T_f)}{\eta_{\infty}} = \frac{C}{T_f} \exp\left(\frac{K}{T_f}\right), \quad \lg \frac{\eta_{ne}(T,T_f)}{a} = \lg \exp\left(\frac{\Delta H}{k_1 T}\right) - BT_f \quad \text{if } x = \left(\frac{T}{T_f}\right)^p. \tag{5}$$

Здесь p, a, B, C, K – параметры материала,  $\eta_{\infty}$  – параметр модели,  $\Delta H$  – энтальпия активации,  $k_1$  – постоянная Больцмана, x характеризует степень неравновесности.

Алгоритм нахождения зависимости  $T_f$  от времени описан в [4]. Учитывая этот алгоритм и определяющее соотношение (2), получим систему уравнений для определения зависимостей от времени напряжения, фиктивной температуры и вязкости (рис. 2). Рассматривая задачу со структурой близкой к равновесию (при  $\frac{T_f - T}{T_f} <<1$ ) и вдали от

равновесия (при  $\frac{T_f - T}{T_f} \approx 1$ ), видим, что вдали от равновесной структуры напряжения

релаксируют быстрее, чем вблизи. Это связано с тем, что время релаксации напряжений пропорционально вязкости, а вдали от равновесия вязкость в начальный момент времени значительно меньше (рис. 2a). Вязкость релаксирует медленнее, когда структура вдали от равновесия, но приходит к тому же равновесному значению (рис. 2б).



Рис. 2. а) Релаксация напряжений и б) зависимость вязкости от времени

Описанная выше модель учитывает только процесс, связанный с релаксацией структуры. Для учета процесса, порождающего релаксацию напряжений, перепишем одно из выражений в (5) как

$$\lg \frac{\eta_{ne}(T,T_f)}{a} = \lg \exp\left(\frac{\Delta H - \frac{\alpha \sigma^2}{k}}{k_1 T}\right) - BT_f.$$
(6)

В этом случае релаксация напряжения проходит быстрее, так как учет напряжения уменьшает начальную вязкость (рис. 3а). Учет напряжения также влияет на эволюцию вязкости со временем. Вязкость релаксирует медленнее в начальный момент времени, пока протекает релаксация напряжений. Структура релаксирует дольше, поэтому мы видим, что вязкость в обоих случаях продолжает возрастать к равновесному значению, но эти значения немного отличаются (рис. 3б).



Рис. 3. а) Релаксация напряжений и б) зависимость вязкости от времени

*Вывод*. В модели без учета напряжения скорость релаксации напряжения зависит от близости структуры материала к равновесному состоянию. Вдали от равновесия напряжения релаксируют быстрее, так как в этом случае в начальный момент времени вязкость меньше, а время релаксации напряжений пропорционально вязкости.

Учет процесса, порождающего релаксацию напряжений, также приводит к уменьшению начальной вязкости и ускорению релаксации напряжений. Сама вязкость релаксирует медленнее изначально, но приходит к равновесному значению большему, чем в модели без учета напряжений.

Работа выполнена в рамках государственного задания Министерства науки и высшего образования Российской Федерации (тема № 121112500318-1).

#### ЛИТЕРАТУРА

 Kao D.-B., McVittie J.P., Nix W.D., Saraswat K.C. Two-dimensional thermal oxidation of silicon. II. Modeling stress effects in wet oxides // IEEE Transactions on Electron Devices. – 1988. – Vol. 35. – P. 25–37.
 McDowell, M. T., Lee, S. W., Nix, W. D., & Cui, Y. 25th anniversary article: Understanding the lithiation of silicon and other alloying anodes for lithium-ion batteries // Advanced Materials. – 2014. – 25(36). – P. 4966– 4984. 3. Mauro J. C., Allan D. C., Potuzak M. Nonequilibrium viscosity of glass // Phys. Rev. - 2009. - B 80. - 094204.

4. Guo X., Mauro J. C., Allan D. C., Smedskjaer M. M. Predictive model for the composition dependence of glassy dynamics // J. Am. Ceram. Soc. – 2018. – 101. – P. 1169–1179.

УДК 539.3, 537.226.4

А.П. Корчагин, А.С. Семенов Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого<sup>(•)</sup>

## КОНЕЧНО-ЭЛЕМЕНТНОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРОЦЕССА ПОЛЯРИЗАЦИИ СЕГНЕТОЭЛЕКТРИКА В МНОГОСЛОЙНОЙ СТРУКТУРЕ ВСЛЕДСТВИЕ ВОЗНИКНОВЕНИЯ МИКРОНАПРЯЖЕНИЙ ПРИ ОХЛАЖДЕНИИ

Введение. Тонкие сегнетоэлектрические пленки получили широкое распространение в качестве элементов памяти с высокой плотностью записи информации и быстродействием, МЭМС-системах, СВЧ-электронике, накопителях энергии. Свойства тонкого слоя сегнетоэлектрика, интегрированного в многослойную композицию, сформированную на массивной подложке, значительно отличатся от свойств объемных аналогов вследствие механического взаимодействия сегнетоэлектрического слоя с подложкой и входящими в композицию другими тонкими слоями. В работе рассматривается прямое математическое моделирование процесса поляризации сегнетоэлектрика в многослойной структуре PZT/SiO<sub>2</sub>/Si на основе микроструктурной модели вследствие возникновения неоднородных полей микронапряжений при охлаждении в процессе получения пленок.

*Целью данной работы* является исследование процесса формирования доменной структуры и поляризации многослойных пленочных структур при остывании, а также анализ влияния геометрических параметров слоев на остаточные деформации и напряжения.

Определяющие уравнения. В расчетах использовалась микроструктурная модель сегнетоэлектроупругого материала [1-4], учитывающая многофазный состав, анизотропию физико-механических свойств и диссипативный характер движения доменных стенок. Определяющие уравнения для тензора деформаций  $\varepsilon$  и вектора электрической индукции **D** имеют вид

$$\begin{cases} \boldsymbol{\varepsilon} \\ \mathbf{D} \end{cases} = \sum_{I=1}^{M} c_{I} \left( \begin{bmatrix} \mathbf{4} \mathbf{S}_{I}^{E} & \mathbf{3} \mathbf{d}_{I}^{T} \\ \mathbf{3} \mathbf{d}_{I} & \mathbf{\kappa}_{I}^{\sigma} \end{bmatrix} \circ \begin{bmatrix} \boldsymbol{\sigma} \\ \mathbf{E} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \boldsymbol{\varepsilon}_{I} \\ \mathbf{p}_{I}^{r} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \boldsymbol{\alpha}_{I} \Delta T \\ \boldsymbol{\beta}_{I} \Delta T \end{bmatrix} \right) = \left( \sum_{I=1}^{M} c_{I} \begin{bmatrix} \mathbf{4} \mathbf{S}_{I}^{E} & \mathbf{3} \mathbf{d}_{I}^{T} \\ \mathbf{3} \mathbf{d}_{I} & \mathbf{\kappa}_{I}^{\sigma} \end{bmatrix} \right) \circ \begin{bmatrix} \boldsymbol{\sigma} \\ \mathbf{E} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \boldsymbol{\varepsilon}^{r} \\ \mathbf{p}^{r} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \boldsymbol{\varepsilon}^{T} \\ \mathbf{p}^{T} \end{bmatrix}, \quad (1)$$

где **б** – тензор напряжений, **E** – вектор напряженности электрического поля,  $\boldsymbol{\epsilon}^r$  и **P**<sup>r</sup> – необратимые (реманентные, пластические) деформация и поляризация,  $\boldsymbol{\epsilon}^T$  и **P**<sup>T</sup> – температурные деформация и поляризация,  ${}^{4}\mathbf{S}_{I}^{E}$  – тензор упругих податливостей *I*-го домена,  ${}^{3}\mathbf{d}_{I}$  – тензор пьезоэлектрических коэффициентов *I*-го домена, а  $\boldsymbol{\kappa}_{I}^{\sigma}$  – тензор диэлектрических проницаемостей *I*-го домена. Объемные доли доменов  $c_{I}$  удовлетворяют условиям:

$$0 \le c_I \le 1, \qquad \sum_{I=1}^N c_I = 1$$
 (2)

и вычисляются на основе уравнений, введенных по аналогии с пластичностью кристаллов [5].

<sup>&</sup>lt;sup>(•)</sup> А.П. Корчагин, alexandr.korchagin16@gmail.com

*Результаты моделирования*, В рамках конечно-элементного (КЭ) программного комплекса PANTOCRATOR [6] получены результаты расчетов напряженно-деформированного состояния и поляризации для различных конфигураций представительных объемов трехслойных структур. Модели сегнетоэлектрических пленок включали: нижний слой подложки из кремния высотой 1500 нм, промежуточный слой оксида кремния высота которого в расчетах варьировалась в пределах от 300 нм до 500 нм и PZT пленку толщиной 500 нм. В качестве внешнего воздействия на элементарный представительный объем (ЭПО) трехслойного композита рассматривалось охлаждение на 600 °C.

На рис. 1 представлены характерные распределения полей остаточных деформаций и напряжений в трехслойной модели после охлаждения до комнатной температуры. Верхний слой РZT подвергается действию растягивающих остаточных напряжений в вертикальном напрявлении и сжимающих остаточных напряжений в горизонтальном напрявлении. Вледствие этого ориентация *с*-осей [001] тетрагональных решеток РZT-слоя формируется при охлаждении в центральной части пластины в вертикальном направлении.



Рис. 1. Распределение полей а) остаточных деформаций (в вертикальном направлении ε<sup>r</sup><sub>z</sub> [‰]) и
 б) напряжений (в горизонтальном направлении σ<sub>x</sub> [MПа]) в трехслойной модели.
 Показана ¼ часть ЭПО. Для наглядности деформированное состояние увеличено в 50 раз

Толщины слоев могут варьироваться в технологии производства сегнетоэлектрических пленок в широких пределах. На рис. 2 показаны расчетные зависимости максимальной остаточной деформации в вертикальной плоскости в зависимости от толщины промежуточного слоя SiO<sub>2</sub>, которая изменялась в вычислительных экспериментах в пределах 300–500 нм. Наблюдается заметная чувствительность (до 50 %) полученных результатов к толщине промежуточного слоя.

При проведении расчетов также варьировались размеры ЭПО в плоскости слоя. На рис. 3 представлены зависимости отношения компонент тензора напряжений в горизонтальной плоскости в зависимости от отношения сторон ЭПО, которое изменялось в вычислительных экспериментах от 1:4 до 4:1. При изменении в указанном диапазоне отношение компонент тензора напряжений увеличивается в 2 раза (напряжения вдоль увеличивающейся стороны увеличиваются). При равенстве сторон наблюдается минимум остаточной деформации. Два локальных максимума остаточной деформации достигаются при соотношении сторон близком к 2:3.



Рис. 2. Зависимости а) остаточных деформаций (в вертикальном направлении  $\mathcal{E}_{z}^{r}$  [‰]) и б) напряжений (в горизонтальном направлении  $\sigma_{x}$  [МПа]) от толщины промежуточного слоя [нм]



Рис. 3. Зависимости а) остаточных деформаций (в вертикальном направлении  $\varepsilon_{z}$ [‰]) и  $\sigma$ 

б) отношения напряжений (в горизонтальном направлении  $\frac{\sigma_y}{\sigma_x}$ ) от отношения сторон ЭПО

Заключение. В результате проведенных вычислительных экспериментов установлено значительное влияние геометрических параметров (толщин слоев и поперечных размеров) элементарного представительного объема трехслойных сегнетоэлектрических пленок на уровень и характер распределения остаточных деформаций и напряжений, возникающих в процессе изготовления пленок вследствие охлаждения слоев с различными коэффициентами теплового расширения. Для рассматриваемых условий нагружения и размеров слоев доминирующим направлением ориентации *с*-осей [001] тетрагональных решеток PZT-слоя является вертикальное.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Huber J.E., Fleck N.A., Landis C.M., McMeeking R.M. A constitutive model for ferroelectric polycrystals // J. Mech. Phys. Solids. -1999. - Vol. 47. - P. 1663-1697.

2. Семенов А.С., Бальке Х., Мельников Б.Е. Моделирование поликристаллической пьезокерамики методом конечно-элементной гомогенизации // Морские интеллектуальные технологии. – 2011. №3. С. 109–115.

3. Семенов А.С. Микромеханическая модель поликристаллического сегнетоэлектроупругого материала с учетом дефектов // Прикладная механика и техническая физика. – 2019, Т. 60, № 6, С. 173-191. 4. Семенов А.С. Микроструктурная модель сегнетоэлектроупругого материала с учетом эволюции дефектов // Научно-технические ведомости СПбГПУ. Физико-матем. науки, 2021, Т. 14, № 1., С. 32-57.

5. Семенов А.С. Вычислительные методы в теории пластичности // Изд-во СПбГПУ. 2008. 211 с.

6. Семенов А.С. PANTOCRATOR - конечно-элементный программный комплекс, ориентированный на решение нелинейных задач механики // Труды V-ой Межд. конф. "Научно-технич. пробл. прогнозир. надежн. и долговечности конструкций и методы их решения". СПб.: Изд-во СПбГПУ, 2003. C. 466-480.

УДК 534.014.4

И.А. Кравчинский<sup>1</sup>, А.С. Смирнов<sup>1,2</sup> <sup>1</sup> Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого<sup>(•)</sup> <sup>2</sup> Институт проблем машиноведения Российской академии наук

## ОПТИМИЗАЦИЯ КОЭФФИЦИЕНТОВ ВЯЗКОГО ДЕМПФИРОВАНИЯ ПРИ ГАШЕНИИ КОЛЕБАНИЙ ДВОЙНОГО МАЯТНИКА

Введение. Вопросы оптимизации пассивного гашения колебательных движений самых разнообразных манипуляторов и маятниковых систем представляют немалый практический интерес в связи с их широким использованием в качестве элементов робототехнических и биомеханических конструкций, и данным аспектам посвящен ряд публикаций [1, 2]. Особое внимание при этом привлекают задачи, в которых можно распоряжаться не одним, а несколькими диссипативными параметрами, что позволяет посредством их надлежащего выбора обеспечить наиболее эффективное подавление колебаний [3, 4]. Именно к этому направлению относится настоящая работа, в которой на примере двойного математического маятника с вязким трением в обоих его шарнирных сочленениях ставится и решается оптимизационная задача о выборе наилучших коэффициентов демпфирования.

Построение математической модели. Рассмотрим двойной математический маятник, полагая для простоты массы его концевых грузов одинаковыми и равными *m* и считая также его длины одинаковыми и равными *l*. Кроме того, будем полагать, что этот маятник испытывает действие вязкого трения в неподвижном и подвижном шарнирах с различными в общем случае коэффициентами демпфирования  $b_1$  и  $b_2$  соответственно (рис. 1). Построим сначала математическую модель движения диссипативного двойного маятника.

Принимая в качестве обобщенных координат углы  $\varphi_1$  и  $\varphi_2$  отклонения звеньев двойного маятника от вертикали, запишем кинетическую и потенциальную энергии системы для случая малых отклонений в виде следующих квадратичных аппроксимаций [1]:

$$T = \frac{1}{2}ml^{2}(2\dot{\varphi}_{1}^{2} + 2\dot{\varphi}_{1}\dot{\varphi}_{2} + \dot{\varphi}_{2}^{2}) = \frac{1}{2}\dot{\boldsymbol{\phi}}^{\mathrm{T}}\mathbf{A}\dot{\boldsymbol{\phi}}, \qquad \mathbf{A} = ml^{2}\begin{bmatrix}2 & 1\\1 & 1\end{bmatrix},$$

$$\Pi = \frac{1}{2}mgl(2\varphi_{1}^{2} + \varphi_{2}^{2}) = \frac{1}{2}\boldsymbol{\phi}^{\mathrm{T}}\mathbf{C}\boldsymbol{\phi}, \qquad \mathbf{C} = mgl\begin{bmatrix}2 & 0\\0 & 1\end{bmatrix},$$
(1)

где  $\boldsymbol{\phi} = [\varphi_1, \varphi_2]^{\mathrm{T}}$  – столбец обобщенных координат, а **A** и **C** – матрицы инерционных и квазиупругих коэффициентов соответственно. Также необходимо составить диссипативную функцию Рэлея, учитывающую наличие вязкого трения в обоих шарнирах, и она имеет вид:

$$R = \frac{1}{2} \left( b_1 \dot{\theta}_1^2 + b_2 \dot{\theta}_2^2 \right) = \frac{1}{2} \left[ b_1 \dot{\phi}_1^2 + b_2 (\dot{\phi}_2 - \dot{\phi}_1)^2 \right] = \frac{1}{2} \left[ (b_1 + b_2) \dot{\phi}_1^2 - 2b_2 \dot{\phi}_1 \dot{\phi}_2 + b_2 \dot{\phi}_2^2 \right] = \frac{1}{2} \left[ \dot{\phi}_1 + \dot{b}_2 - \dot{\phi}_2 \right] = \frac{1}{2} \dot{\phi}^T \mathbf{B} \dot{\phi}, \qquad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} b_1 + b_2 & -b_2 \\ -b_2 & b_2 \end{bmatrix},$$
(2)

<sup>&</sup>lt;sup>(•)</sup> И.А. Кравчинский, kravchinskij.ia@edu.spbstu.ru

где  $\theta_1 = \varphi_1$  и  $\theta_2 = \varphi_2 - \varphi_1$  – углы повороты в шарнирах маятника, а **B** – матрица диссипативных коэффициентов. Уравнение движения системы в матричной форме и отвечающее ему характеристическое уравнение имеют стандартный вид:

$$\mathbf{A}\ddot{\boldsymbol{\varphi}} + \mathbf{B}\dot{\boldsymbol{\varphi}} + \mathbf{C}\boldsymbol{\varphi} = 0, \qquad \det(\mathbf{A}\lambda^2 + \mathbf{B}\lambda + \mathbf{C}) = 0. \tag{3}$$

Раскрывая данный определитель с учетом формул (1) и (2), получим после ряда упрощений характеристическое уравнение четвертой степени, записанное сразу в безразмерной форме:

$$p^{4} + 2(\nu_{1} + 5\nu_{2})p^{3} + 4(1 + \nu_{1}\nu_{2})p^{2} + 2(\nu_{1} + 3\nu_{2})p + 2 = 0,$$
(4)

где использованы следующие обозначения:

$$k = \sqrt{\frac{g}{l}}, \qquad p = \frac{\lambda}{k}, \qquad \nu_1 = \frac{b_1}{2ml^2k}, \qquad \nu_2 = \frac{b_2}{2ml^2k}.$$
 (5)

Здесь k – частота малых колебаний обычного маятника длиной l, которая необходима для обезразмеривания; p – уже безразмерный корень уравнения (4); а  $v_1$  и  $v_2$  – безразмерные диссипативные коэффициенты. Видно, что коэффициенты уравнения (4) зависят лишь от величин  $v_1$  и  $v_2$ , оптимальный выбор которых и является целью дальнейшего исследования.



Рис. 1. Двойной математический маятник с вязким трением в шарнирах



Рис. 2. График зависимости степени устойчивости  $\Delta$  от двух диссипативных коэффициентов  $v_1$  и  $v_2$ 

Постановка и решение задачи оптимизации. Переходя теперь к обсуждению вопросов оптимизации, рассмотрим наиболее простой с точки зрения вычислений и часто встречающийся критерий оптимизации, основанный на максимизации степени устойчивости  $\Delta$  и успешно примененный ранее во многих оптимизационных задачах [1-4]. При этом под степенью устойчивости понимается модуль вещественной части корня характеристического уравнения (4), лежащего наиболее близко к мнимой оси (конечно, все корни при этом лежат левее мнимой оси). Это означает, что величину  $\Delta$  математически можно представить в виде:

$$\Delta = \min |\operatorname{Re} p_i|, \quad i = \overline{1,4}.$$
(6)

Далее целесообразно обратиться к численным методам исследования, которые позволят определить все четыре корня характеристического уравнения (4) при различных значениях диссипативных параметров  $v_1$  и  $v_2$ . После этого к найденным корням следует применить процедуру отыскания степени устойчивости по формуле (6), что приведет к установлению зависимости  $\Delta$  от двух переменных  $v_1$  и  $v_2$ , т. е. позволит получить функцию  $\Delta = \Delta(v_1, v_2)$ , которую затем следует максимизировать по обоим указанным переменным. Для определения точки максимума этой функции можно построить ее контурный график на плоскости  $v_1v_2$  в виде линий равного уровня (рис. 2). По этому графику легко определить точку максимума

данной функции:  $v_{1*} = 2.552$ ,  $v_{2*} = 0.591$  (для наглядности она отмечена кружком), при этом значение функции в этой точке, отвечающее наибольшей степени устойчивости, есть  $\Delta_* = 0.303$ . Отметим, что в этом случае три корня уравнения (4) будут располагаться на одной вертикали, тогда как четвертый корень будет располагаться левее них.

Выясним теперь, как изменится оптимальное решение в том случае, когда мы будем иметь возможность распоряжаться лишь одним диссипативным коэффициентом, считая другой из них заданным. Для этого проведем еще два численных эксперимента. В первом из них будем задавать значения  $v_1$  и определять для них наилучшие по принятому критерию (6) значения  $v_{2**}$ , а во втором – задавать значения  $v_2$  и определять для них наилучшие по тому же критерию значения  $v_{1**}$ . Соответствующие зависимости  $v_2 = v_{2**}(v_1)$  и  $v_1 = v_{1**}(v_2)$ приведены на рис. 3, при этом видно, что отдельные участки этих кривых совпадают. Кроме того, определим в процессе указанных двух экспериментов и наилучшие значения степени устойчивости  $\Delta$ , в результате чего получим в первом случае зависимость  $\Delta = \Delta(\nu_1)$  при  $v_2 = v_{2**}(v_1)$ , а во втором случае будем иметь зависимость  $\Delta = \Delta(v_2)$  при  $v_1 = v_{1**}(v_2)$ . Обе эти зависимости приведены на рис. 4, где по горизонтальной оси откладываются величины  $v_1$  и  $v_2$  соответственно. Остается указать координаты характерных точек на рис. 3 и 4. Так, зеленый кружок на рис. 3 отвечает значениям  $\nu_1 = 0.288$ ,  $\nu_2 = 5.755$ , при этом  $\Delta = 0.058$ , и на рис. 4 он, разумеется, превращается в два кружка с одинаковой степенью устойчивости. Голубой кружок на рис. 3 отвечает значениям  $v_1 = 4.723$ ,  $v_2 = 0.200$ , при этом  $\Delta = 0.210$ , чему на рис. 4 вновь соответствуют уже два кружка. Розовый кружок на рис. 3 лежит на пересечении кривых  $v_2 = v_{2**}(v_1)$  и  $v_1 = v_{1**}(v_2)$  с прямой  $v_1 = v_2$ , когда диссипативные коэффициенты в обоих шарнирах одинаковы. Для этого случая аналитическое решение было построено в работе [1]:  $v_1 = v_2 = \sqrt{(13\sqrt{2} + 18)/21} \approx 1.316$ ,  $\Delta = \sqrt{(5\sqrt{2} - 6)/21} \approx 0.226$ , и ему

отвечает лишь один кружок на рис. 4. Кроме того, коричневому кружку на рис. 3 и 4 отвечают значения  $v_1 = 1.307$ ,  $v_2 = 0$ ,  $\Delta = 0.153$ , а фиолетовому кружку – значения  $v_1 = 0$ ,  $v_2 = 0.364$ ,  $\Delta = 0.005$ . Наконец, черный кружок на рис. 3 отвечает глобально оптимальному варианту  $v_{1*} = 2.552$ ,  $v_{2*} = 0.591$ , для которого  $\Delta_* = 0.303$ , и на рис. 4 ему отвечают точки максимума кривых  $\Delta = \Delta(v_1)$  при  $v_2 = v_{2**}(v_1)$  и  $\Delta = \Delta(v_2)$  при  $v_1 = v_{1**}(v_2)$ .









Заключение. Резюмируя результаты решения представленной оптимизационной задачи, следует отметить их нетривиальную структуру, которая была наглядно проиллюстрирована при помощи графических зависимостей основных величин друг от друга. Эти результаты

представляют теоретический интерес в области оптимизации в теории колебаний, а также они могут найти определенное практическое применение в механике маятниковых систем.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Леонтьев В.А., Смирнов А.С., Смольников Б.А. Оптимальное демпфирование колебаний двухзвенного манипулятора // Робототехника и техническая кибернетика. – 2018. – № 2. – С. 52-59. 2. Смирнов А.С., Муравьев А.С. Оптимизация демпфирования колебаний в системах с нецелым числом степеней свободы // Вестник Санкт-Петербургского университета. Математика. Механика. Астрономия. – 2022. – Т. 9. – № 1. – С. 164-175.

3. Болотник Н.Н. Оптимизация амортизационных систем. – М.: Наука, 1983. – 256 с.

4. Смольников Б.А. Проблемы механики и оптимизации роботов. – М.: Наука, 1991. – 232 с.

### УДК 681.2-2

Н.В. Можгова, А.В. Лукин, И.А. Попов, Л.В. Штукин, О.В. Привалова Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого<sup>(•)</sup>

# НЕЛИНЕЙНАЯ ДИНАМИКА СЛАБОСВЯЗАННЫХ МИКРОБАЛОЧНЫХ РЕЗОНАТОРОВ ПРИ ПАРАМЕТРИЧЕСКОМ ЭЛЕКТРОТЕПЛОВОМ ВОЗБУЖДЕНИИ

Введение. Сильная зависимость спектральных характеристик микро-/наноэлектромеханических систем (МЭМС/НЭМС) от физических и эксплуатационных параметров, а также от параметров среды широко используется в радиочастотных переключателях, фильтрах [1], резонансных акселерометрах и гироскопах [2], а также в биохимических датчиках газа и массы [3], для которых была продемонстрирована чувствительность порядка зептограмм ( $10^{-21}$  г) [4]. В то время как первые резонансные МЭМС в основном работали в линейном режиме, в последние годы нелинейные резонаторы вызвали значительный интерес из-за их потенциала для улучшения характеристик. В частности, было показано, что устройства с параметрическим возбуждением обладают многими полезными свойствами. В наиболее изученных и широко используемых устройствах с электростатическим приводом параметрическое возбуждение колебаний достигается за счет модуляции эффективной электростатической жесткости, регулируемой напряжением. Недостатком таких систем является необходимость расположения электрода в непосредственной близости к чувствительному элементу, что понижает надежность и повышает риск реализации неустойчивости по механизму схлопывания. В данной работе параметрическое возбуждение колебаний достигается за счет пропускания переменного (гармонического) электрического тока через балку, что приводит к джоулевому электротермическому нагреву балки и генерации зависящей от времени осевой силы, модулирующей эффективную жесткость балки. Также все большее распространение в современной индустрии МЭМС находит использование коллективных динамических свойств чувствительных элементов, что позволяет улучшить выходные характеристики широкого класса датчиков физических величин. Слабая механическая связь между резонаторами позволяет использовать явление модальной локализации колебаний двух резонаторов [5].

Модель связанных микрорезонаторов. В работе рассматривается система из двух заделанных с двух сторон микробалочных резонаторов (рис. 1), связанных механически через тонкую упругую перемычку, изгибная жесткость которой много меньше изгибной жесткости резонаторов. Геометрические параметры резонаторов подобраны таким образом, что длина L и ширина b резонаторов одинаковы, а для учета неодинаковости толщин введен

<sup>&</sup>lt;sup>(•)</sup> Н.В. Можгова, mozhgova\_nv@spbstu.ru

параметр  $n_{\%} = \frac{h_2}{h_1} - 1$ . Предполагается, что  $h_{1,2} \ll L$  и что прогибы резонаторов в процессе колебаний много больше их толщин  $h_{1,2}$ , так что модель учитывает растяжение средней плоскости. Параметрические колебания возбуждаются путем неравномерного по длине и времени нагрева микробалочных элементов вследствие протекания электрического тока *J* гармонического вида (1):

$$J = \frac{V_{DC} + V_{AC} \cos \omega t}{\rho_e L},\tag{1}$$

где  $V_{DC}$  – амплитуда постоянной компоненты напряжения,  $V_{AC}$  и  $\omega$  – амплитуда и частота переменной компоненты напряжения,  $\rho_e$  – удельное сопротивление материала балки.

*Тепловая задача*. Важным предварительным этапом для параметрического анализа нелинейной динамики рассматриваемой системы является нахождение распределения температуры в объеме резонаторов.



Рис. 1. Модель слабосвязанных микрорезонаторов с иллюстрацией механизма возбуждения

Нестационарное одномерное уравнение теплопроводности по оси балки  $x \in [0, L]$ :

$$\frac{\partial^2 T(x)}{\partial x^2} - \frac{1}{\alpha} \frac{\partial T}{\partial t} = -\frac{1}{k} Q(x, t), \qquad \Gamma Y: \ T|_{x=0} = T_0, \qquad T|_{x=L} = T_0, \tag{2}$$

где  $\alpha = \frac{k}{\rho c}$  – температуропроводность, k – коэффициент теплопроводности,  $\rho$  – плотность, c – удельная теплоемкость материала, x – координата вдоль оси балки, T(x) – температура в данной точке балки,  $T_0$  – отсчетная температура, t – время,  $Q(x,t) = J^2 \rho_e$  – объемное тепловыделение в балке вследствие протекания тока.

Статическая компонента установившегося распределения температуры в балке:

$$T_s(x) = -\frac{V_{DC}^2 + \frac{1}{2}V_{AC}^2}{2k\rho_e L^2}(x^2 - Lx) + T_0$$
(3)

Установившееся гармоническое распределение температуры в балке может быть найдено в частотной области, для этого задача записывается в комплексной форме [6]:  $\tilde{T}_{4}(x, \omega) = \tilde{T}_{42}(x, \omega) + \tilde{T}_{42}(x, \omega)$ 

$$T_{d}(x,\omega) = T_{d1}(x,\omega) + T_{d2}(x,\omega)$$
  
$$\frac{\partial^{2}\tilde{T}_{d1}}{\partial x^{2}} - \sigma^{2}\tilde{T}_{d1} = -\frac{1}{k}\tilde{Q}_{d1}, \qquad \frac{\partial^{2}\tilde{T}_{d2}}{\partial x^{2}} - \sigma^{2}\tilde{T}_{d2} = -\frac{1}{k}\tilde{Q}_{d2}, \qquad (4)$$

где  $\sigma^2 = \frac{i\omega}{\alpha}$  и  $\tilde{Q}_{d1} = 2\frac{2V_{DC}V_{AC}}{\rho_e L^2}$ ,  $\tilde{Q}_{d2} = 2\frac{2^{-VAC}}{\rho_e L^2}$ .

Физическое распределение температуры при этом:

$$T_d(x,t,\omega) = Re\{\tilde{T}_{d1}(x,\omega)\exp i\omega t\} + Re\{\tilde{T}_{d2}(x,\omega)\exp 2i\omega t\}.$$
(5)

Решение гармонической задачи может быть записано с помощью функции Грина:

$$\tilde{T}_{d1,2}(x,\omega) = \frac{\alpha}{k} \int_0^L G_{X11}(x|x';\omega) \tilde{Q}_{d1,2}(x',\omega) dx',$$
(6)

где функция Грина  $G_{X11}(x|x';\omega)$  при данных граничных условиях [14]:

$$G_{X11}(x|x';\omega) = \frac{e^{-\sigma(2L-|x-x'|)} - e^{-\sigma(2L-x-x')}}{2\alpha\sigma(1-e^{-2\sigma L})} + \frac{e^{-\sigma(|x-x'|)} - e^{-\sigma(x+x')}}{2\alpha\sigma(1-e^{-2\sigma L})}$$

Полученное решение для распределения температуры в объеме резонаторов было верифицировано путем сравнения с численным решением задачи нестационарной теплопроводности в ПК COMSOL Multihysics.

*Уравнения механических колебаний*. Для вывода уравнений колебаний используется принцип Гамильтона, после ввода безразмерных параметров  $\hat{w}_{1,2} = w_{1,2}/h_1$  и  $\hat{x} = x/L$ , была получена система уравнений (7).

$$\begin{cases} \frac{\partial^{4}\widehat{w}_{1}}{\partial\hat{x}^{4}} + \frac{\partial^{2}\widehat{w}_{1}}{\partial\hat{t}^{2}} + m_{non}\delta\left(\hat{x} - \frac{1}{2}\right)\frac{\partial^{2}\widehat{w}_{1}}{\partial\hat{t}^{2}} + \mu_{non}\frac{\partial\widehat{w}_{1}}{\partial\hat{t}} - \left(N_{non,th} + 6\int_{0}^{1}\left(\frac{\partial\widehat{w}_{1}}{\partial\hat{x}}\right)^{2}d\hat{x}\right)\frac{\partial^{2}\widehat{w}_{1}}{\partial\hat{x}^{2}} + \kappa_{non}(\widehat{w}_{1} - \widehat{w}_{2})\delta\left(\hat{x} - \frac{1}{2}\right) = 0 \\ (1 + n_{\%})^{3}\frac{\partial^{4}\widehat{w}_{2}}{\partial\hat{x}^{4}} + (1 + n_{\%})\frac{\partial^{2}\widehat{w}_{2}}{\partial\hat{t}^{2}} + \mu_{non}\frac{\partial\widehat{w}_{2}}{\partial\hat{t}} - \left(N_{non,th} + 6(1 + n_{\%})\int_{0}^{1}\left(\frac{\partial\widehat{w}_{2}}{\partial\hat{x}}\right)^{2}d\hat{x}\right)\frac{\partial^{2}\widehat{w}_{2}}{\partial\hat{x}^{2}} \\ -\kappa_{non}(\widehat{w}_{1} - \widehat{w}_{2})\delta\left(\hat{x} - \frac{1}{2}\right) = 0, \end{cases}$$

$$(7)$$

где параметры введены следующим образом:

$$\hat{t} = \frac{t}{t_{sc}}, \qquad t_{sc} = \sqrt{\frac{\rho S_1 L^4}{E I_1}}, \qquad N_{non,th} = \frac{N_{th}}{N_{sc}}, \qquad N_{th} = -ES\alpha(T(x) - T_0), \qquad N_{sc} = \frac{E I_1}{L^2}, \qquad \kappa_{non} = \frac{\kappa}{\kappa_{sc}}, \\ \kappa_{sc} = \frac{E I_1}{L^3}, \qquad \mu_{non} = \frac{\mu}{\mu_{sc}}, \qquad \mu_{sc} = t_{sc} \cdot \frac{E I_1}{L^4}, \qquad m_{non} = \frac{m_p}{m_{sc}}, \qquad m_{sc} = \rho S_1 L.$$

Система (7) при помощи стандартной процедуры метода Галеркина приводится к системе ОДУ второго порядка, к которой применяется метод многих масштабов для получения систем уравнений в медленных переменных. Далее к полученным системам уравнений применяются методы теории бифуркаций [7] для продолжения установившихся режимов по параметрам амплитуд постоянной и переменной компонент напряжения, частоты возбуждения колебаний, параметра неодинаковости резонаторов, а также массе частицы  $m_n$ , осажденной на один из резонаторов.

Заключение. В результате изучения динамики параметрических изгибных колебаний в системе двух слабо связанных балочных резонаторов получена зона возможной раскачки параметрических колебаний, а также найдены амплитуды установившихся режимов для обоих резонаторов. Полученные результаты позволяют сделать вывод о том, что рассматриваемая система может быть использована в качестве чувствительного элемента микромеханического детектора массы. Измерение массы частицы предлагается производить на основе изменения амплитудных соотношений колебаний двух резонаторов при наличии массово-инерционных различий, возникающих в результате осаждения частицы на один из элементов системы.

Работа выполнена при поддержке гранта Совета по грантам Президента Российской Федерации для государственной поддержки молодых российских ученых МК-4577.2022.1.1.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Rebeiz G.M. RF MEMS: theory, design, and technology. - John Wiley & Sons, 2004.

2. Indeitsev D. A. et al. Analysis of imperfections sensitivity and vibration immunity of MEMS vibrating wheel gyroscope //Nonlinear Dynamics. – 2021. – T. 105. – C. 1273-1296.

3. Yaqoob U. et al. Highly selective multiple gases detection using a thermal-conductivity-based MEMS resonator and machine learning //IEEE Sensors Journal. – 2022. – T. 22. – №. 20. – C. 19858-19866.

4. Yang Y. T. et al. Zeptogram-scale nanomechanical mass sensing //Nano letters. – 2006. – T. 6. – №. 4. – C. 583-586.

5. Dick N., Krylov S. Parametric resonance and pattern selection in an array of microcantilevers interacting through fringing electrostatic fields //Nonlinear Dynamics. – 2021. – C. 1-21.

6. Beck J. V. et al. Heat conduction using Green's function. – Taylor & Francis, 1992.

7. Dhooge A., Govaerts W., Kuznetsov Y. A. MATCONT: a MATLAB package for numerical bifurcation analysis of ODEs //ACM Transactions on Mathematical Software (TOMS).  $-2003. - T. 29. - N_{\odot}. 2. - C.$  141-164.

УДК 539.3

И.Р. Муртазин, А.В. Емельянов, А.С. Семенов Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого<sup>(•)</sup>

# ИССЛЕДОВАНИЕ ПРОЦЕССОВ СЛОЖНОГО ПАССИВНОГО НАГРУЖЕНИЯ: МОДЕЛИРОВАНИЕ И ЭКСПЕРИМЕНТ

Введение. Моделирование и экспериментальное исследование процессов сложного неупругого деформирования материалов актуально для уточненной оценки напряженнодеформированного состояния, ресурса и запасов прочности высоконагруженных конструкций. Технологические процессы и эксплуатационные режимы зачастую происходят при многоосном немонотонном нагружении ответственных элементов конструкций. При этом материалы могут накапливать пластическую деформацию при пассивном нагружении [1, 2], которое игнорируется классической теорией пластического течения.

В рамках исследований была проведена серия экспериментов на сложное пассивное непропорциональное нагружение на никелевых трубчатых образцах. Испытание проводилось немонотонное нагружение (совместное лействие на многоосное растяжения/сжатия и кручения, Р-М опыты) на универсальной испытательной машине Instron 8850.

При моделировании процессов пассивного нагружения использовался микромеханический Рассматривался представительный подход. объем поликристаллического материала как совокупность составляющих его разориентированных кристаллитов, поведение которых описывалось определяющими уравнениями модели монокристалла Каето [3], которая реализована в программном комплексе конечноэлементного (КЭ) анализа PANTOCRATOR [4]. Получаемые распределения полей напряжений и деформаций усреднялись по представительному объему поликристалла, и в качестве сравнения с результатами испытаний представлялись зависимости кривой деформирования в осях эквивалентных напряжений и деформаций, а также осредненный отклик в пространстве осевых и сдвиговых деформаций.

Проведение эксперимента. Испытанию подвергается трубчатый образец из никеля марки НП2. Характерные размеры образца: 200×25×3.5, база датчиков кручения: 50 мм, база датчиков растяжения: 25 мм.

Процесс нагружения образца происходил в несколько этапов: образец предварительно растягивался до значения  $\sigma_{01}$ , затем осуществлялось сложное пассивное нагружение по

<sup>&</sup>lt;sup>(•)</sup> И.Р. Муртазин, murtazin\_ir@spbstu.ru

пилообразной траектории (внутри поверхности нагружения) в пространстве напряжений с последующей разгрузкой до нуля. После чего анализировалась накопленная пластическая деформация, и описанная схема нагружения повторялась с монотонно возрастающим значением предварительного нагружения. Последний этап нагружения проводился до разрыва образца.

Значения напряжений, соответствующие предварительно нагруженному состоянию для каждого этапа, равнялись соответственно 360, 400 (упругая зона), 450 (предел текучести), 500, 570 (зона текучести) МПа.

Во всех экспериментах задавался режим мягкого нагружения со скоростью 100 МПа/мин.

Изображение образца в оснастке, а также пилообразный путь нагружения представлены на рис. 1. Как видно из рис. 16, по значению касательных напряжений выдерживался постоянный шаг нагружения (30 МПа), а нормальные напряжения задавались так, чтобы путь нагружения целиком лежал внутри поверхности нагружения, определенной в соответствии с критерием Мизеса (в предположении изотропного упрочнения).



Рис. 1. а) Образец в испытательной машине Instron 8850 с датчиками кручения и растяжения, б) Пилообразный путь нагружения (10 кусочно-линейных этапов)

Сравнение результатов. Используемая в КЭ расчетах дискретная модель представительного объема поликристалла имела разбиение 3×3×3, каждая гауссова точка которого содержала по одному монокристаллу. Общее количество кристаллитов равнялось 216.

В качестве граничных условий использовались значения напряжений, удовлетворяющие описанному сценарию нагружения, включающему 51 временную точку, а также условия периодичности для противоположных граней куба с наложенной аффинной деформацией  $\varepsilon_0$ :

$$\mathbf{u}|_{s_1} = \mathbf{u}|_{s_2} + \mathbf{\varepsilon}_0 \cdot (\mathbf{r}_{s_1} - \mathbf{r}_{s_2}). \tag{1}$$

Выражение (2) характеризует изменение напряжений с ростом пластических деформаций для монокристалла в направлении [001] в соответствии с определяющими соотношениями модели монокристалла Каето [3], используемой в КЭ расчетах:

$$\sigma = \sigma_{y} + \sqrt{2}Q(1+7q) \left[ 1 - \exp\left(-\frac{\sqrt{2}b}{8}\varepsilon^{p}\right) \right] + \sqrt{2}\frac{C}{D} \left[ 1 - \exp\left(-\frac{\sqrt{2}D}{8}\varepsilon^{p}\right) \right].$$
(2)

На рис. 2 и 3 представлено сравнение результатов расчета с использованием классической теории пластического течения, а также микромеханической модели с экспериментальными данными для эквивалентных напряжений и деформаций (рис. 2) и для осевых и сдвиговых деформаций (рис. 3).



Рис. 2. Отличие прогноза теории пластического течения от экспериментальной кривой деформирования при пилообразном нагружении, требующее разработки более точных моделей



Рис. 3. Отклик материала в пространстве деформаций на пилообразное нагружение при  $\sigma_0{=}360$  и 570 МПа

На рис. 4 показаны расчетные распределения полей осевых и сдвиговых пластических деформаций в представительном объеме поликристалла на последнем этапе нагружения.



Рис. 4. Распределения полей пластических деформаций: а) осевые (слева) и б) сдвиговые (справа) в последний момент пилообразного нагружения (случай σ<sub>0</sub>=570 МПа)

Заключение. Как видно из представленных зависимостей, эффект накопления пластической деформации при пассивном нагружении наблюдается в эксперименте и при микромеханическом описании. Данный эффект игнорируется теорией пластического течения, упрощенно постулирующей упругий отклик.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Ильюшин А.А. Пластичность. Основы общей математической теории. М.: Изд-во АН СССР, 1963. 271с.

2. Зубчанинов В.Г., Гультяев В.И., Зубчанинов Д.В. // Совр. пробл. термовязкопластичности. М.: МАМИ, 2007. С. 19–24.

3. Cailletaud G.A. // International Journal of Plasticity. 8(1), 1992. P. 55-73.

4. Семенов А.С. PANTOCRATOR – конечно-элементный программный комплекс, ориентированный на решение нелинейных задач механики // Труды V Межд. конф. «Научно-технич. проблемы прогнозир. надежн. и долговечн. констр. и методы их решения». СПб.: Изд-во СПбГПУ, – 2003. – С. 466–480.

УДК 539.3, 678.01

А.П. Никишин, А.И. Грищенко Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого<sup>(•)</sup>

## ПРОГНОЗИРОВАНИЕ МЕХАНИЧЕСКИХ СВОЙСТВ КОМПОЗИТНЫХ ПУЛТРУЗИОННЫХ ПРОФИЛЕЙ НА ОСНОВЕ МЕТОДА КЭ ГОМОГЕНИЗАЦИИ

Введение. Пултрузионные профили находят применение во многих областях, таких как гражданское и промышленное строительство, обустройство мостов и переходов, инфраструктуре нефтегазовой промышленности. Пултрузионные профили обладают высокими эксплуатационными характеристиками и низкой плотностью. Технологический процесс пултрузии заключается в протягивании пропитанных полимерным связующим волокон сквозь систему фильер, что позволяет получать однонаправленные высоконаполненные композиционные детали с постоянной поперечной структурой.

*Цель работы* заключается в исследование влияния параметров однонаправленных полимерных волокнистых композиционных материалов, таких как объемная доля армирующих волокон, свойства объемных компонент композитов, на их эффективные свойства.

Механические свойства композиционных материалов на макроуровне прежде всего зависят от свойств отдельных компонент. В данной работе рассматривается задача определения эффективных упругих свойств методом конечно-элементной (МКЭ) гомогенизации, в рамках которого решаются краевые задачи теории упругости применительно к элементарному представительному объему (ЭПО). Рассматривались варианты кинематических (1) и силовых (2) граничных условий (ГУ), а также условия периодичности (3):

$$\boldsymbol{u}|_{S_u} = \boldsymbol{\varepsilon}^* \cdot \boldsymbol{r}, \#(1)$$
$$\boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{\sigma}|_{S_\sigma} = \boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{\sigma}^*, \#(2)$$
$$\boldsymbol{u}|_{S_{u_1}} = \boldsymbol{u}|_{S_{u_2}} + \boldsymbol{\varepsilon}^* \cdot (\boldsymbol{r_1} - \boldsymbol{r_2}), \#(3)$$

<sup>&</sup>lt;sup>(•)</sup> А.П. Никишин, nikishin.ap@edu.spbstu.ru

где  $\boldsymbol{\varepsilon}^*$  и  $\boldsymbol{\sigma}^*$  – заданные постоянные симметричные тензоры, соответствующие различным состояниям (осевые растяжения и сдвиги).

Определение эффективных упругих свойств элементарного ЭПО проводилось методом конечно-элементной гомогенизации. Эффективные свойства гомогенизированного материала принимались соответствующими трансверсально изотропному упругому материалу, для которого закон Гука может быть записан в виде:

$$\overline{\mathbf{\varepsilon}} = \overline{\mathbf{C}} \cdot \cdot \overline{\mathbf{\sigma}}, \#(4)$$

где  $\bar{\mathbf{\epsilon}} = \frac{1}{V_{\Im \Pi 0}} \int_{V_{\Im \Pi 0}} \mathbf{\epsilon} dV$  – тензор деформации,  $\bar{\boldsymbol{\sigma}} = \frac{1}{V_{\Im \Pi 0}} \int_{V_{\Im \Pi 0}} \boldsymbol{\sigma} dV$  – тензор напряжений, **С** – тензор упругих податливостей 4 ранга. Данным величинам соответствует гомогенизированный материал.

Рассматривались различные варианты 2D/3D ЭПО (рис. 1). В случае 2D ЭПО модуль упругости в продольном направлении может быть оценен на основе правила смеси:

$$E_1 = (1 - c_f)E_m + c_f E_f, \#(5)$$

где  $c_f$  – объемная доля волокна в материале;  $E_f$  – модуль Юнга в продольном направлении для волокна;  $E_m$  – модуль Юнга в продольном направлении для матрицы.



Рис. 1. Геометрия ЭПО: a) 2D; б) 3D

Для оценки точности численных решений был проведен анализа практической сходимости значений эффективных модулей упругости ЭПО при увеличении числа ячеек периодичности. Рассматривался композитный материал со следующими свойствами отдельных компонент: полимерная матрица -  $E_m = 1$  ГПа,  $v_m = 0.43$ ; стекловолокно:  $E_f = 70$  ГПа,  $v_m = 0.3$ ). Установлено, что при использовании условий периодичности, удовлетворительная (статистически существенная) точность достигается уже при использовании ЭПО, включающих 1 ячейку периодичности. Тогда как при использовании ГУ для перемещений и напряжений в целях исключения краевого эффекта необходимо рассмотрение большого числа ячеек периодичности. Поля распределения интенсивности напряжений по Мизесу для рассматриваемых вариантов граничных условий представлены на рис 2 для 2D ЭПО с двумя ячейками периодичности. В случае силовых и кинематических ГУ ясно прослеживается влияние границ ЭПО на его НДС, что приводит к необходимости рассмотрения ЭПО с большим количеством ячеек периодичности. В случае условий периодичности краевых эффектов не наблюдается.



Рис. 2. Распределение интенсивности напряжений по Мизесу при использовании различных типов ГУ: а) кинематические ГУ; б) силовые ГУ; в) ГУ периодичности

Для оценки влияния объемной доли волокон на эффективные упругие свойства проведена серия КЭ расчетов. Рассматривались ЭПО с долей волокон от 20 до 70%. Результаты проведенных вычислительных экспериментов показали, что изменение объемной доли армирующих волокон существенно влияет на эффективные модули (рис. 3а), так при изменении объемной доли волокон с 50% до 70% модуль Юнга в поперечном направлении изменяется более чем на 20%.



Рис. 3. а) Влияние объемный доли армирующего волокна, б) Сравнение численных и экспериментальных результатов [1] для модуля Юнга в продольном направлении для различных комбинаций композитных материалов.



Рис. 4. Сравнение численных и экспериментальных результатов [2-4] при расчете эффективных свойств для различных комбинаций композитных материалов
С целью верификации предложенных методик было проведено сравнение результатов численного моделирования с экспериментальными данными. На рис. 36 представлены результаты сравнения модуля Юнга в продольном направлении для ряда различных комбинаций материала описанных в [1]. На рис. 4 представлены результаты сравнения эффективных упругих свойств для GFRP композитов с объемной долей волокон 20% и 52%.

*Вывод.* Рассмотрены различные подходы определения эффективных упругих свойств однонаправленных волокнистых полимерных композиционных материалов. Установлено, что удовлетворительная точность достигается при использовании условий периодичности. Определение эффективных свойств в поперечном направлении может быть осуществлено с использованием 2D ЭПО. В этом случае модуль упругости в продольном направлении может быть оценен при помощи правила смесей. Сравнение результатов моделирования с экспериментальными данными показало хорошее соответствие.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Minchenkov K., Vedernikov A., Safonov A., Akhatov I. Thermoplastic Pultrusion: A Review // Polymers. – 2021. – Vol. 13(2), 180.

2. Zhang S., Capran C. Mechanical properties of pultruded GFRP at intermediate strain rate // Composite Structures. – 2021. – Vol. 278. – 114699

3. Wang H.W., Zhou H.W., L.L. Gui, H.W. Ji, X.C. Zhang. Analysis of effect of fiber orientation on Young's modulus for unidirectional fiber reinforced composites // Composites Part B-engineering. – 2014. – Vol. 56. - P. 733-739.

4. Sonti S.S., Barbero E.J. Material characterization of pultruded laminates and shapes // Journal of reinforced plastics and composites. – 1996. - Vol. 15. - P. 701-717.

УДК 536.2

Д.М. Пашковский<sup>1</sup>, Е.Н. Вильчевская<sup>2</sup>

<sup>1</sup>Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого<sup>(•)</sup> <sup>2</sup>Институт проблем машиноведения РАН

## РАСЧЕТ ЭФФЕКТИВНОЙ ДИФФУЗИОННОЙ ПРОНИЦАЕМОСТИ МАТЕРИАЛА С СУПЕРЭЛЛИПТИЧЕСКОЙ НЕОДНОРОДНОСТЬЮ

Введение. Задача определения эффективных коэффициентов диффузионной проницаемости для поликристалла является одной из актуальных при проектировании новых материалов с заданными свойствами. В случае материала, имеющего неоднородности эллипсоидальной формы, эффективные диффузионные характеристики определяются аналитически, используя аппарат микромеханики [1, 2, 3]. Для материалов со сложной геометрией микроструктуры возможно только численно моделировать процесс диффузии в репрезентативном объеме. При этом в случае диффузии в неоднородных материалах необходимо учитывать эффект сегрегации, который заключается В том, что диффундирующее вещество скапливается на границе между матрицей и неоднородностью материала [4, 5].

Эффективные коэффициенты диффузионной проницаемости для неоднородности вычисляются на основе найденного поля концентрации и первого закона Фика. Учет сегрегации приводит к разрывности полей концентрации на границах неоднородностей, что является проблемой при решении классическим МКЭ. Поэтому предлагается стационарную задачу диффузии сформулировать в вариационной форме, а решение найти методом Ритца [6, 7]. В работе базисные функции имеют вид полносвязной сигмоидальной нейронной сети с

<sup>&</sup>lt;sup>(•)</sup> Д.М. Пашковский, mr.vivivilka@icloud.com

одним скрытым слоем [8]. Аппроксимация поля концентрации зависит от координат материальной точки и параметра *j*, определяющего принадлежность точки матрице материала или неоднородности.

Основная часть. Рассматривается материал  $\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_0$ , состоящий из матрицы  $\Omega_0$  и неоднородности в суперэллипптического цилиндра  $\Omega_1$ .  $\Gamma$  - граница области  $\Omega$ .  $\Lambda$  - граница неоднородности  $\Omega_1$  (рис. 1).



Рис. 1. Область Ω

Функционал энергии системы П складывается из трех слагаемых. Первое слагаемое П<sub>1</sub> – энергия системы при стационарной задаче диффузии на области  $\Omega$ , которая имеет следующий вид:

$$\Pi_{1} = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \nabla c(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{D}(\mathbf{x}) \cdot \nabla c(\mathbf{x}) \, d\Omega, \quad \mathbf{D} = \begin{cases} \mathbf{D}_{0} = D_{0}\mathbf{E}, & \mathbf{x} \in \Omega_{0} \\ \mathbf{D}_{1} = D_{1}\mathbf{E}, & \mathbf{x} \in \Omega_{1} \end{cases}$$
(1)

где  $c(\mathbf{x})$  – поле концентрации, **D** – тензор диффузионной проницаемости в точке **x**.

Внешний потенциал концентрации П<sub>2</sub> на границе области Г:

$$\Pi_2 = \frac{1}{2} \int_{\Gamma} (c(\mathbf{x}) - \mathbf{G}_0 \cdot \mathbf{x})^2 d\Gamma$$
<sup>(2)</sup>

где  $\mathbf{G}_0$  – градиент концентрации на границе Г.

Внутренний потенциал П<sub>3</sub> на границе между матрицей и неоднородностью Л:

$$\Pi_{3} = \frac{1}{2} \int_{\Lambda} (sc(\mathbf{x})|_{\Lambda^{+}} - c(\mathbf{x})|_{\Lambda^{-}})^{2} d\Lambda + \frac{1}{2} \int_{\Lambda} (D_{1} \nabla c(\mathbf{x}) \cdot \boldsymbol{n}|_{\Lambda^{+}} - D_{0} \nabla c(\mathbf{x}) \cdot \boldsymbol{n}|_{\Lambda^{-}})^{2} d\Lambda$$
(3)

где *s* – параметр сегрегации, *n* – внешняя нормаль неоднородности. Первое слагаемое в (3) описывает скачок поля концентрации на границе неоднородности, связанный с эффектом сегрегации. Второе слагаемое в (3) означает сохранение молярного потока при переходе через границу неоднородности.

Поле концентрации аппроксимируется сигмоидальной нейронной сетью с одним скрытым слоем [8]:

$$c(\mathbf{x}) = c(x, y, j) = \sum_{i=1}^{N} w_4^{(i)} \sigma \left( w_1^{(i)} x + w_2^{(i)} y + w_3^{(i)} j + b_1^{(i)} \right) + b_2$$
(4)

где  $j = \{-1, 1\}$  – индикатор матрицы (j = -1) или неоднородности (j = 1), N – число базисных функций,  $w_1^{(i)}, w_2^{(i)}, w_3^{(i)}, w_4^{(i)}, b_1^{(i)}, b_2$  – параметры нейронной сети,  $\sigma(z) = (1 + \exp(-z))^{-1}$  – сигмоидальная функция.

Параметры нейронной сети  $w_1^{(i)}, w_2^{(i)}, w_3^{(i)}, w_4^{(i)}, b_1^{(i)}, b_2$  определяются из минимизации функционала П методом градиентного спуска.

$$\Pi = \Pi_1 + \Pi_2 + \Pi_3 \to \min \tag{5}$$

Компоненты тензора эффективной диффузионной проницаемости  $\mathbf{D}_{eff}$  вычисляются исходя из первого закона Фика [1, 2]:

$$\langle J \rangle_V = -\mathbf{D}_{eff} \cdot \mathbf{G_0} \tag{6}$$

где  $\langle J \rangle_V$  – осредненный молярный поток по репрезентативному объему V, рассчитываемый по полю концентрации  $c(\mathbf{x})$ . Если неоднородность находится в базисе собственных векторов  $\mathbf{D}_{eff}$ , то можно найти две компоненты тензора  $\mathbf{D}_{eff}$  из решения двух задач при разных градиентах концентрации  $\mathbf{G}_0$ , заданных на границе области Г. В первой задаче  $\mathbf{G}_0^{(1)} = g_x \boldsymbol{e}_1$ , а во второй  $\mathbf{G}_0^{(2)} = g_y \boldsymbol{e}_2$ , тогда диагональные компоненты тензора  $\mathbf{D}_{eff}$  имеют вид:

$$D_{11} = -\frac{\left(\langle J \rangle_{V}^{(1)}\right)_{x}}{g_{x}}, \qquad D_{22} = -\frac{\left(\langle J \rangle_{V}^{(2)}\right)_{y}}{g_{y}}$$
(7)

В качестве примера рассмотрена задача для суперэллиптического цилиндра с размерами полуосей *a* и *b*, уравнение которого имеет вид:

$$\left|\frac{x}{a}\right|^p + \left|\frac{y}{b}\right|^p = 1 \tag{8}$$

Параметры моделирования приняты следующие: a = b и p = 0.5; коэффициент проницаемости матрицы  $D_0 = 0.1$ , а неоднородности  $D_1 = 0.01$ . Параметр сегрегации задается s = 2.

На рис. 2 приведен график численной аппроксимации поля концентрации, полученный в результате решения задачи (5).



Рис. 2. Аппроксимация поля концентраций в форме (4)

Из рис. 2 видно, как меняется скачок на границе с постоянным параметром сегрегации. В результате получены следующие коэффициенты диффузионной проницаемости:

$$D_{11} = 0.09142, \quad D_{22} = 0.09143$$

Отметим, что в силу симметрии задачи коэффициенты диффузионной проницаемости совпадают.

Заключение. В данной работе представлен численный метод расчета компонент тензора эффективной диффузионной проницаемости материала с неоднородностью в форме суперэллиптического цилиндра. При нахождении поля концентрации учитывается эффект сегрегации. Данный метод можно использовать для нахождения тензора диффузионной проницаемости материала с неоднородностью произвольной формы.

### ЛИТЕРАТУРА

1. Пашковский Д.М., Фролова К.П., Вильчевская Е.Н. Эффективные диффузионные свойства поликристалла // Научно-технические ведомости СПбГПУ. Физико-математические науки. – 2022. – Т. 15. – No 3. – С. 154–168.

2. Frolova K.P., Vilchevskaya E.N. Effective diffusivity of transversely isotropic material with embedded pores // Materials Physics and Mechanics. – 2021. – Vol. 47. No. 6. – P. 937–950.

3. Kachanov M., Sevostianov I. Micromechanics of materials, with applications. Switzerland: Springer International Publishing AG (part of Springer Nature), 2018. 712 p.

4. Belova I.V., Murch G.E. Diffusion in nanocrystalline materials // Journal of Physics and Chemistry of Solids. – 2003. – Vol. 64. No. 5. – P. 873–878.

5. Belova I.V., Murch G.E. The effective diffusivity in polycrystalline material in the presence of interphase boundaries // Philosophical Magazine. -2004. - Vol. 84. No. 1. - P. 17–28.

6. Hu W.F., Lin T.S., Lai M.C. A discontinuity capturing shallow neural network for elliptic interface problems //Journal of Computational Physics. – 2022. – T. 469. – C. 111576.

7. Yu B. et al. The deep Ritz method: a deep learning-based numerical algorithm for solving variational problems //Communications in Mathematics and Statistics.  $-2018. - T. 6. - N_{\odot}. 1. - C. 1-12.$ 

8. Haykin, Simon. Neural Networks: A Comprehensive Foundation. Prentice Hall, 1999.

УДК 539.9

И.А. Рублев<sup>1,2</sup>, А.Б. Фрейдин<sup>1,2</sup>

<sup>1</sup>Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого<sup>(•)</sup> <sup>2</sup>Институт проблем машиноведения Российской академии наук

## ФРОНТ ХИМИЧЕСКОЙ РЕАКЦИИ В ЦИЛИНДРИЧЕСКОМ ТЕЛЕ В ПОСТАНОВКАХ СТАЦИОНАРНОЙ И НЕСТАЦИОНАРНОЙ ДИФФУЗИИ

Введение. В рамках данной работы исследуется задача распространения фронта локализованной химической реакции между упругим и диффундирующими компонентами. Химическая реакция сопровождается собственной деформацией и изменением модулей упругости материала. Для описания влияния напряжений на скорость фронта реакции используется кинетическое уравнение, согласно которому скорость фронта реакции определяется нормальной компонентой тензора химического сродства. Выражение для тензора сродства было получено как следствие фундаментальных законов и второго закона термодинамики в виде неравенства Клаузиуса – Дюгема (см. обзор [1] и приведенный в нем список литературы).

Рассматриваемая задача – связанная. Напряжения влияют на скорость фронта химической реакции, а движение фронта, сопровождающееся собственной деформацией превращения, приводит к возникновению механических напряжений, которые зависят от положения фронта.

Подобные задачи были изучены в предположении реализации квазистационарной диффузии и допущении о конечности скорости реакции в начальный момент времени, см., напр., [2]. В данной работе ставится начально-краевая осесимметричная задача, особенности которой: учет нестационарности диффузии и рассмотрение этапа накопления диффундирующего компонента, предшествующего началу реакции. Проведено сравнение результатов, полученных в нестационарной и квазистационарной постановках задачи диффузии.

Постановка задачи. Исследуется распространение осесимметричного фронта химической реакции в упругом цилиндре (рис. 1). Реакция локализована на цилиндрическом фронте радиуса  $R_{\Gamma}$  и поддерживается диффузией вещества  $B_*$  через область, занятую превращенным материалом  $B_+$ . Диффундирующий компонент подводится в область превращенного материала через внешнюю поверхность радиуса R и полностью поглощается химической реакцией на фронте  $R_{\Gamma}$  (рис. 1).

<sup>&</sup>lt;sup>(•)</sup> И.А. Рублев, ilya\_rublev@mail.ru



Рис. 1. Этапы распространения фронта химической реакции: а) первоначальное накопление диффундирующего компонента; б) распространение фронта реакции

Реакция протекает в два этапа. На первом этапе происходит накопление диффундирующего компонента  $B_*$  в исходном материале  $B_-$ . Моменту начала химической реакции соответствует достижение концентрацией на границе критического значения, равного равновесной концентрации  $c_{eq}$ , зависящей от напряжений, порождаемых деформацией превращения и внешней нагрузкой, и соответствующей нулевому значению нормальной компоненты тензора сродства [1,2]. На втором этапе происходит продвижение фронта реакции по телу, поддерживаемое диффузией  $B_*$  через превращенный материал.

Задача включает в себя следующие уравнения:

- уравнение механического равновесия с граничными условиями, включающими условия непрерывности усилия и перемещения на распространяющемся фронте реакции, и определяющими соотношениями твердых компонентов реакции, учитывающими деформацию превращения;
- простейшее уравнение диффузии, соответствующее закону Фика:  $\partial c / \partial t = D \Delta c$ , где c концентрация диффундирующего компонента, <math>D коэффициент диффузии;
- граничное условие диффузии через внешнюю поверхность тела:  $D\underline{N} \cdot \nabla c + \alpha(c(R,t) c_*) = 0$ , где  $\alpha$  коэффициент переноса, N вектор нормали к границе,  $c_*$  растворимость (насыщаемость)  $B_*$  в  $B_+$ ;
- граничное условие на фронте реакции:  $-D\nabla c|_{R_{\Gamma}} = \omega(N)$ , где,  $\omega(N)$  скорость реакции на ориентированной площадке с нормалью *N*;
- начальное условие отсутствие диффундирующего компонента в теле в начальный момент времени;
- вводится дополнительное условие на фронте реакции:  $c_+|_{R_{\Gamma}} = c_-|_{R_{\Gamma}}$ ;
- $\omega(N) = k_* c \left\{ 1 \exp\left(-\frac{A_{NN}}{RT}\right) \right\}$ , где  $A_{NN}$  нормальная компонента тензора химического сродства, T температура, R универсальная газовая постоянная,  $k_*$  константа скорости реакции.

В случае малых деформаций и линейно-упругих компонентов реакции нормальная тензора сродства может быть представлена виде компонента В [2]:  $A_{NN} = \frac{n_- M_-}{\rho} (\gamma + w_- - w_+ + \langle \sigma \rangle: \llbracket \varepsilon \rrbracket) + RT \ln \frac{c}{c_+}, \quad \text{где} \quad \langle \sigma \rangle = 1/2 (\sigma_+ + \sigma_-)$ – среднее арифметическое напряжений на фронте,  $[[\varepsilon]] = \varepsilon_+ - \varepsilon_-$  скачок деформаций,  $w_+ -$  объемные плотности энергии деформаций твердых компонентов, у – комбинация химических энергий компонентов реакции, *M*\_ и *ρ*\_ – молярная масса и плотность вещества *B*\_, *n*\_ – соответствующий стехиометрический коэффициент.

Также была введена равновесная концентрация  $c_{eq}$  такая, что при имеющемся напряженно-деформированном состоянии  $A_{NN} = 0$ . Тогда выражения для скорости реакции  $\omega(N)$  и скорости фронта W можно представить в виде:  $\omega(N) = k_*(c(\Gamma) - c_{eq})$  и  $W = \frac{n_-M_-}{\rho_-}\omega(N) = \frac{n_-M_-}{\rho_-}k_*(c(\Gamma) - c_{eq})$ , где напряжения влияют на скорости через  $c_{eq}$ .

Результаты. В ходе решения задачи были выделены этап первоначального накопления диффундирующего компонента и этап продвижения фронта реакции. Исследовано влияние параметров диффузии, константы скорости реакции, химических энергий, собственной деформации превращения, модулей упругости компонентов реакции и внешней деформации на время начала реакции. В результате решения осесимметричной задачи с нестационарной диффузией были получены скорость фронта реакции (рис. 2) и концентрация диффундирующего компонента на фронте реакции в зависимости от его положения при различных параметрах диффузии, константах скорости реакции и химических энергиях. Было проведено сравнение полученного решения с решением задачи в постановке квазистационарной диффузии (рис. 2). Также получено распределение концентрации по телу при разных положениях фронта. Исследовано влияние толщины начального слоя вещества  $B_+$  на решение задачи.



Рис. 2. Зависимость скорости фронта химической реакции от его положения при разных химических энергиях в случае стационарной и нестационарной диффузии



Рис. 3. Отношение пути, пройденного фронтом реакции к моменту выхода на режим стационарной диффузии к пути, пройденному к моменту блокирования, от величины химической энергии

На основе полученных в работе результатов можно сделать следующие выводы:

- •Выделены две стадии реакции. Определено время начала реакции в зависимости от коэффициента переноса диффундирующей компоненты, коэффициента диффузии и химических энергий.
- •Учет нестационарности диффузии особенно сильно влияет на начальной стадии распространения фронта реакции. Появляется начальный переходной режим возрастания скорости фронта.
- •По мере продвижения фронта реакции разница между решениями в постановках стационарной и нестационарной диффузии уменьшается.

- •Получено, что увеличение химических энергий, коэффициента диффузии, коэффициента переноса, а также уменьшение константы скорости реакции приводят к ускорению установления выхода решения на стационарный режим (рис. 3).
- Распространение фронта реакции может быть заблокировано механическими напряжениями.
- Анализ влияния толщины начального слоя превращенного вещества показал слабую зависимость решения от толщины при толщинах меньше 0.01*R*.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Freidin A.B., Vilchevskaya E.N. Chemical affinity tensor in coupled problems of mechanochemistry. In: Encyclopedia of Continuum Mechanics. Altenbach H., Öchsner A. (eds) Springer, Berlin, Heidelberg, 2019. 2. Freidin A.B., Vilchevskaya E.N., Korolev I. Stress-assisted chemical reactions front propagation in

2. Freduli A.B., Vinchevskaya E.N., Korolev I. Stress-assisted chemical reactions from propagation in deformable solids // Int. J. Eng. Sci. 2014. V. 83. P. 57-75. 3. Рублев И.А., Королев И.К., Фрейдин А.Б. Одномерная задача о распространении фронта

3. Рублев И.А., Королев И.К., Фрейдин А.Б. Одномерная задача о распространении фронта химической реакции в упругом теле. Неделя науки ФизМех. Сб. статей Всероссийской научной конференции 4-9 апреля 2022 года. СПб.: Политех-Пресс. 2022. С. 221-223.

УДК 539.3, 539.42

А.В. Савиковский<sup>1,2</sup>, М.М. Фролов<sup>1</sup>, А.С. Семенов<sup>1</sup> <sup>1</sup>Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого<sup>(•)</sup> <sup>2</sup>Акционерное общество «Силовые машины - ЗТЛ, ЛМЗ, Электросила, Энергомашэкспорт»

## ВЫЧИСЛЕНИЕ КОЭФФИЦИЕНТОВ ИНТЕНСИВНОСТИ НАПРЯЖЕНИЙ НА ОСНОВЕ КОНТУРНЫХ ИНТЕГРАЛОВ Ј1 и Ј2 С УЧЕТОМ БЕРЕГОВ ТРЕЩИНЫ ПРИ СМЕШАННОЙ МОДЕ РАЗРУШЕНИЯ

Введение. Проблема обеспечения прочности промышленных и авиационных газотурбинных двигателей (ГТД) является важной инженерной задачей. Актуальность подобных исследований связана с разработкой в РФ новых авиационных ГТД (например, двигатель ПД-14 для самолета MC-21) и промышленных ГТУ (например, турбина ГТЭ-65 в АО «Силовые машины»). В качестве конструкционного материала для ответственных деталей ГТД, в первую очередь, рабочих лопаток, чаще всего применяются жаропрочные никелевые сплавы [1]. Рабочие лопатки являются наиболее нагруженными элементами ГТД [2], подвергнутыми воздействию центробежных сил, давлению газа, а также нестационарным и неоднородным температурам. Вследствие действия различных комбинированных переменных нагрузок в рабочих лопатках ГТД образуются трещины усталости, ползучести и термоусталости [3]. Примеры разрушений рабочих лопаток ГТД вследствие развития трещин приведены на рис. 1.

Так как именно рабочие и направляющие лопатки определяют ресурс ГТД, то обеспечение прочности и долговечности лопаток ГТД является актуальной задачей, для успешного выполнения которой, необходимо максимально точно производить оценку трещиностойкости ответственных деталей газовых турбин в условиях наличия в них трещин.

Параметры разрушения. В качестве основных параметров разрушения в данном исследовании для оценки трещиностойкости конструкции рассматриваются коэффициенты интенсивности напряжений (КИН) [4]. При рассмотрении трещин в конструкциях возникает необходимость вычисления КИН в условиях смешанных мод разрушения (комбинация нормального отрыва, поперечного и продольного сдвига).

<sup>&</sup>lt;sup>(•)</sup> А.В. Савиковский, savikovskii.artem@yandex.ru



Рис. 1. Примеры трещин в лопатках ГТД

<u>Целью работы является</u>: а) вычисление КИН при произвольном нагружении в условиях смешанных мод разрушения для линейно-упругого изотропного материала на основе компонент векторного J-интеграла:  $J_1$  и  $J_2$ , а также б) анализ влияния конечно-элементной дискретизации в окрестности вершины трещины на точность вычисления КИН. В качестве метода расчета КИН используется метод эквивалентного объемного интегрирования (ЭОИ) [5]. Основная идея метода – преобразование интеграла по контуру к интегралу по площади для увеличения точности вычислений.

Постановка задачи. В целях апробации численного вычисления КИН рассматривается модельная задача: одиночная горизонтальная трещина в бесконечной изотропной плоскости в условиях смешанной моды разрушения (рис. 2). Рассматривается плоское напряженное состояние (ПНС). Безразмерные параметры, характеризующие жесткое нагружение, *а* и *b* подбирались соответствующими различным углам наклона трещины при одноосном растяжении бесконечной плоскости напряжением 100 МПа.



Рис. 2. Постановка задачи для пластины с трещиной в условиях смешенных мод нагружения

Задача о пластине с внутренней трещиной (рис. 2), подвергнутой комбинированному растяжению и сдвигу, имеет аналитическое решение [6]:

$$K_{\rm I} = \sigma \sqrt{\pi L} , \qquad K_{\rm II} = \tau \sqrt{\pi L} , \qquad (1)$$

где  $K_{\rm I}$  – КИН моды растяжения,  $K_{\rm II}$  – КИН моды сдвига,  $\sigma \approx aE/(1-v^2)$ ,  $\tau \approx bG$ . Численные результаты вычисления КИН сравнивались с аналитическим решением.

Вычисление КИН через  $J_1$  и  $J_2$ . В случае изотропного материала,  $J_1$  и  $J_2$  связаны с КИН следующими соотношениями [7]:

$$J_1 = \frac{K_I^2}{E} + \frac{K_{II}}{E},$$
 (2)

$$_{2} = -2 \frac{\kappa_{I} \kappa_{II}}{E},\tag{3}$$

Где  $J_1 = \int_{\Gamma} \left( W n_1 - n_i \sigma_{ij} \frac{\partial u_j}{\partial x_1} \right) d\Gamma$  И  $J_2 = \int_{\Gamma} \left( W n_2 - n_i \sigma_{ij} \frac{\partial u_j}{\partial x_2} \right) d\Gamma - \int_{\Gamma_{\Gamma}} (W_+ - W_-) d\Gamma$  – компоненты векторного J-интеграла. Во многих работах влияние слагаемого по берегам трещины Г<sub>с</sub> на значение  $J_2$  не учитывается, что приводит к неинвариантности  $J_2$ . Из выражений (2) и (3) можно получить выражения для КИН в случае изотропного материала [7]:

$$K_{\rm I} = \pm \frac{\sqrt{E}}{2} \cdot (\sqrt{J_1 - J_2} \pm \sqrt{J_1 + J_2}), \tag{4}$$

$$K_{\rm II} = \pm \frac{\sqrt{E}}{2} \cdot (\sqrt{J_1 - J_2} + \sqrt{J_1 + J_2}), \tag{5}$$

где знаки ± зависят от соотношения КИН. В данной работе учет слагаемого по берегам трещины Г<sub>с</sub>, выполнялся путем преобразования первого слагаемого в J<sub>2</sub>, используя длины берегов трещины, на которые опираются 2 соседних контура интегрирования [8]. Вычисления производились с помощью конечно-элементного программного комплекса PANTOCRATOR [9].

Результаты и выводы. КИН рассчитывались для двух вариантов конечно-элементной сетки около вершины трещины: равномерной и со сгущением. Также использовались 2 метода вычисления КИН: без учета берегов трещин и с учетом берегов трещин. На рис. 3 показаны результаты сравнения конечно-элементных расчетов с аналитическим решением.



Рис. 3. Результаты сравнения численных результатов с аналитическим решением (угол ф характеризует отклонение нормали к трещине от направления максимальных главных напряжений)

Результаты сравнения показали, что при вычислении КИН необходимо учитывать слагаемое по берегу трещины для J<sub>2</sub>, иначе погрешность в вычислении КИН может достигать 20 %! Сравнение методов дискретизации показало, что два варианта конечно-элементных сеток демонстрируют похожие (отличие менее 4 %) результаты вычисления КИН.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Гецов Л.Б. Материалы и прочность деталей газовых турбин. Том 1. – Рыбинск: Газотурбинные технологии, 2010.

2. Семенов А.С., Грищенко А.И., Колотников М.Е., Гецов Л.Б. Конечно-элементный анализ термоциклической прочности лопаток газовых турбин Часть 1. Модели материала, критерии разрушения, идентификация параметров // Вестник УГАТУ. – 2019. – Т. 23. – №1 (83). – С. 70-81.

3. Семенов А.С., Семенов С.Г., Гецов Л.Б. Методы расчетного определения скорости роста трещин усталости, ползучести и термоусталости в поли- и монокристаллических лопатках ГТУ // Проблемы прочности. – 2015. – № 2. – С. 61-87.

4. Kachanov M., Shafiro B., Tsukrov I. Handbook of Elasticity Solutions. Boston: Springer, 2003. - 330 p.

5. Nikishkov G.P., Atluri S.N. An equivalent domain integral method for computing crack-tip integral parameters in non-elastic, thermo-mechanical fracture // Engineering Fracture Mechanics, 1987. – Vol. 26. –  $N_{26}$ . – P. 851-867.

6. Sih G.C., Paris P.C., Irwin G.R. On cracks in rectilinearly anisotropic bodies // International Journal of Fracture Mechanics. –1965. – Vol. 1. – No. 3. – P. 189-203.

7. Ragu I.S., Shivakumar K.N. An equivalent domain integral method in the two-dimensional analysis of mixed-mode crack problems // Engineering Fracture Mechanics. –1990. – Vol. 37. – № 4. – P. 707-725.

8. Eischen J.W. An improved method for computing the J<sub>2</sub>-integral // Engineering Fracture Mechanics. – 1987. – Vol. 26. – N $_{2}$  5. – P. 691-700.

9. Семенов А.С. PANTOCRATOR – конечно-элементный программный комплекс, ориентированный на решение нелинейных задач механики // Труды V-ой Международной конференции «Научнотехнические проблемы прогнозирования надежности и долговечности конструкций». СПб.: Изд-во СПбГПУ. – 2003. – С. 466–480.

УДК 531

А.И. Сватковский<sup>1,2</sup>, О.В. Антонова<sup>1</sup>, Г.Б. Уфлянд<sup>2</sup> <sup>1</sup>Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого<sup>(•)</sup> <sup>2</sup>ООО «ТурбоРеф Инжиниринг»

## МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ РАБОЧИХ ХАРАКТЕРИСТИК ГАЗОТУРБИННОЙ УСТАНОВКИ КМА-2М

Введение. Существенным фактором, который влияет на КПД турбины, является величина радиальных зазоров между ротором и статором. Результаты предыдущих исследований [1], демонстрируют, что изменения величины зазора на 1% на лопатках приводит к снижению КПД примерно на 1.5-2%. Основными факторами, влияющими на величину радиальных зазоров, являются деформации ротора и статора, вызванные изменениями температур и силовых воздействий.

Ключевыми элементами моделирования были выбраны обоймы и ротор. Как можно увидеть на фотографиях (рис.1), у данной конструкции существуют две проблемы: отход кожуха от обоймы (слева) и большой радиальный зазор между лопатками и обоймой (справа). Первое влияет на систему охлаждения, а второе влияет на потери рабочего тела. Обе этих особенности приводят к снижению КПД агрегата.

*Тепловой и прочностной расчет диска. Определение полей* температур и перемещений проводилось в системе конечно-элементного анализа ANSYS [2]. На рис. 2 представлены модели диска и обоймы. Для моделирования диска была выбрана осесимметричная модель, двумерные элементы, позволяющие промоделировать толщину лопаток.

<sup>&</sup>lt;sup>(•)</sup> А.И. Сватковский, alexis134@rambler.ru

Характеристики материалов диска – сталь ЭП428, лопатки – сталь ЭИ607А и обойма – сталь 40 были взяты из [3]. Граничные условия для теплового расчета взяты из [4], представляют собой тепловые потоки, заданные на различных поверхностях диска.



Рис. 1. Фото КМА-2М



Рис. 2. Модель диска с лопатками и оооимы

Экспериментальные данные были также взяты из [4], замеры температур производились с помощью термопар, через тепловые расширения считались перемещения. В табл. 1 представлены результаты расчетов до выхода на стационарный режим

таол. т. тезультаты расчетов до выхода на стационарный режим							
Радиальные перемещения, мм	Разность между расчетн. и	В процентах, %					
	эксп. данными, мм						
0,87	0,13	13					
1,41	0,11	7					
2,15	0,15	6					
2,60	0,10	4					
2,66	0,14	5					

Табл. 1. Результаты расчетов до выхода на стационарный режим

Высокая погрешность связана в первую очередь с тем, что была взята упрощенная модель, однако на высоких скоростях и приближении к стационару показывается неплохая точность.

Для расчетов прочности диска была выбрана осесимметричная модель диска, а сами лопатки были заменены соответствующей им центробежной силой. В табл.2 представлены результаты расчета эквивалентных напряжений на стационарном режиме (окружные, радиальные+осевые, осевые+радиальные-окружные).

Табл. 2. Результаты расчета эквивалентных напряжений на стационарном режиме(окружные, радиальные+осевые, осевые+радиальные-окружные)

Окружные, Па	Радиальные и осевые, Па	Осевые+радиальные-окружные, Па
376,04	638,12	262,07

Ввиду того, что эквивалентные напряжения превышают предел текучести, требуется расчет на малоцикловую усталость, например, по формуле Мэнсона,  $\Delta \varepsilon = \left(\ln \frac{1}{1-\psi}\right)^{0,6} \cdot N - 0,6+3,5 \cdot (\sigma_B - \sigma_m) E \cdot N - 0,12$ , где  $\sigma_m = \sigma_{3KB}/2$  - среднее напряжение цикла,  $\psi$  – относительно сужение поперечного сечения, E – модуль упругости, N – число циклов до разрушения,  $\sigma_B$  – предел прочности. [5] Исходя из данной формулы, N = 7584. Результаты удолетворительны, потому что количество пусков турбины заметно меньше, чем рассчетное число циклов до появления трещины.

*Расчет обоймы.* Для рассмотрения был выбран сегмент в 44 градуса для всех элементов, кроме кольца. Это ровно четверть от общей модели, потому что в остальных элементах есть пазы в 3 мм. В табл. 3 представлены результаты расчета до выхода на стационарный режим.

Время, ч	Температура, С	Перемещения, мм	
1	261,4	2,425	
3	336	3,118	
4	348,4	3,233	
5	349,9	3,247	
6	350	3,247	
8	350	3,247	

Табл.3. Результаты расчета до выхода на стационарный режим

На рис. 3 представлен график сравнения перемещений между лопатками и обоймой.



Рис. 3. Результаты расчетов на 8ч

Минимальный зазор составляет 0,587мм после 8 часов с момента пуска, максимальный-1,555мм на 1м часу. Данный зазор достаточно велик, тем более что здесь не учтен холодный зазор.

Выводы. Охлаждающий пар подается вместе с пуском ротора, и, как видно из графика, это излишне, ввиду слишком большого зазора в первые 3 часа после пуска турбины. Предварительно, можно подавать пар начиная с 3-го часа с момента пуска ротора. Так же видно, что выбраны слишком большие коэффициенты теплоотдачи и температуры (так как обойма слишком быстро выходит на стационар), а значит, требуется уточнение ГУ. Ввиду имеющихся данных, возможно, создание вставок будет излишним.

В целом, получены важные результаты расчетов, которые могут использоваться при проведении необходимой модернизации турбины.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Бондарчук П.В., Тисарев А.Ю., Лаврушин М.В. Разработка методики расчета системы управления радиальными зазорами в турбине ГТД – СГАУ им. Королева, 2012. – С. 272.

2. ANSYS, Inc. Release Notes, Release 17 – SAS IP, Inc.

3. Зубченко А.С. Марочник сталей и сплавов – Машиностроение-1, 2003. – 782 с.

4. Уфлянд Г.Б. Технический отчет по результатам инжиниринга турбин агрегата КМА-2М – 2017. – С. 15.

5. Биргер И.А. Детали машин – Машиностроение-1, 1993. – С. 37.

УДК 539.38, 539.52

А.А. Семенова, А.И. Грищенко Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого<sup>(•)</sup>

## ВЛИЯНИЕ КРИСТАЛЛОГРАФИЧЕСКОЙ ОРИЕНТАЦИИ МОНОКРИСТАЛЛИЧЕСКИХ КОРСЕТНЫХ И ПРИЗМАТИЧЕСКИХ ОБРАЗЦОВ НА РАЗМАХ ПЛАСТИЧЕСКОЙ ДЕФОРМАЦИИ ПРИ ИНТЕНСИВНОМ ТЕРМОЦИКЛИЧЕСКОМ ВОЗДЕЙСТВИИ

Введение. Монокристаллические сплавы являются незаменимыми материалами при производстве рабочих и направляющих лопаток газотурбинных двигателей последних поколений. Жаропрочные монокристаллические сплавы на никелевой основе обладают ярко выраженной анизотропией физико-механических свойств. высокими показателями кратковременной и длительной прочности. Важнейшим показателем жаропрочных сплавов является их сопротивление термической усталости. Ключевым параметром, позволяющим оценить число циклов до разрушения, является размах неупругих деформаций в процессе термоциклических воздействий, существенное влияние на который оказывает кристаллографическая ориентация монокристаллических сплавов.

*Целью данной работы* является анализ влияния отклонения кристаллографических осей монокристаллических сплавов на никелевой основе от направления термомеханической нагрузки на уровень пластических деформаций при циклическом нагружении.

Важность данного исследования обусловлена доминирующим влиянием последнего на термоусталостную долговечность ответственных элементов ГТУ.

Определяющие уравнения. В рамках используемых в работе микромеханических моделей материала [1,2] предполагается, что пластическое течение осуществляется как результат возможного скольжения в активных системах скольжения (CC), характеризуемых нормалью к  $\alpha$  -ой плоскости скольжения  $\mathbf{n}^{\alpha}$  и направлением скольжения  $\mathbf{l}^{\alpha}$  ( $\alpha = 1, ..., N$ ).

<sup>&</sup>lt;sup>(•)</sup> А.А. Семенова, semenova.alisa@gmail.com

Монокристаллические сплавы на никелевой основе имеют кубическую гранецентрированную кристаллическую решетку, для которой существует двенадцать октаэдрических СС вида {111}<011> и шесть кубических СС вида {001}<011>. Октаэдрические СС состоят из четырех плоскостей скольжения {111}, при этом в каждой из этих плоскостей существует три независимых направления скольжения <011>. Для кубической СС характерны три плоскости скольжения {001} с двумя независимыми направлениями <011> в каждой из этих плоскостей.

В случае малых деформаций имеем [2-4]:

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}} = \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{e} + \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{p}, \qquad \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{p} = \sum_{\alpha=1}^{N_{act}} \dot{\boldsymbol{\gamma}}^{\alpha} \mathbf{P}^{a}, \qquad \boldsymbol{\tau}^{\alpha} = \boldsymbol{\sigma} \cdot \cdot \mathbf{P}^{a} , \qquad (1)$$

где  $\mathbf{P}^{\alpha} = \frac{1}{2} (\mathbf{n}^{\alpha} \mathbf{l}^{\alpha} + \mathbf{l}^{\alpha} \mathbf{n}^{\alpha})$  – тензор Шмида,  $N_{act}$  – число активных СС. Множители  $\dot{\gamma}^{\alpha}$  для упругопластической модели вычисляются на основе уравнения:

$$f^{\alpha} = \left| \tau^{\alpha} - X^{\alpha} \right| - R^{\alpha} - \tau_0 = 0.$$
<sup>(2)</sup>

Внутренние переменные, характеризующие нелинейное изотропное и нелинейное кинематическое упрочнение, определяются равенствами [4-6]:

$$R^{\alpha} = bQ \sum_{\beta} h^{\alpha\beta} r^{\beta}, \quad \dot{r}^{\alpha} = (1 - br^{\alpha}) \dot{\gamma}^{\alpha}, \quad X^{\alpha} = Cx^{\alpha}, \quad \dot{x}^{\alpha} = \left[ sign(\tau^{\alpha} - X^{\alpha}) - Dx^{\alpha} \right] \dot{\gamma}^{\alpha}.$$
(3)

Недиагональная структура матрицы изотропного упрочнения  $h^{\alpha\beta}$ , задаваемая в виде  $h^{\alpha\beta} = H[q + (1-q)\delta_{ab}]$ , позволяет учесть перекрестное (латентное) упрочнение [5] путем введения в рассмотрение взаимного влияния различных СС друг на друга.

*Результаты вычислительных экспериментов*. В качестве объектов исследования были рассмотрены 3 структурных уровня: уровень элемента материала (рис. 1а), уровень элемента материала с окружением, учитывающим его податливость (рис. 1б), а также корсетный образец (рис. 1в).

Рассматривалось интенсивное термомеханическое воздействие в условиях жесткого защемления в осевом направлении. Моделирование осуществлялось при помощи конечноэлементного пакета PANTOCRATOR [7] и программы CES.



Рис. 1. Распределение полей интенсивности пластических деформаций: а) для элемента материала; б) для элемента материала с окружением; в) для корсетного образца

На рис. 2 и 4 видно, что рост разориентации приводит к росту ширины петли пластического гистерезиса, что способствует значительному ускорению накопления термоусталостных повреждений.

Так, для случая корсетного образца аксиальная разориентация в 10° приводит к трехкратному росту ширины петли гистерезиса. Увеличение податливости окружения материала приводит к уменьшению петли гистерезиса (рис. 3).



Рис. 2. Элемент материала: а) влияние кристаллографической ориентации на гистерезисное поведение при интенсивном термоциклическом воздействии (0 °C ↔ 1100 °C);
б) влияние отклонения от направления [001] на размах пластических деформаций



Рис. 3. Влияние податливости окружения элемента материала: а) на гистерезисное поведение при интенсивном термоциклическом воздействии (0 °C ↔ 1100 °C); б) на размах пластических деформаций при отклонении от [001] в 15°





Выводы. Полученные результаты указывают на существенное влияние кристаллографической ориентации на размах пластических деформаций при циклическом воздействии, что показывает необходимость корректировки принятых норм, допускающих отклонение в 10° при изготовлении лопаток ГТУ.

Полученные результаты могут быть использованы при проектировании и определении ресурса монокристаллических рабочих лопаток ГТУ, содержащих нетривиальную топологию охлаждающих отверстий.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Трусов П.В., Швейкин А.И. Многоуровневые модели моно- и поликристаллических материалов: теория, алгоритмы, примеры применения. — Новосибирск: Издательство СО РАН, – 2019. – 605 с.

2. Forest S., Ammar K., Appolaire B., Cordero N., Gaubert A. Micromorphic approach to crystal plasticity and phase transformation. In: Schröder J., Hackl K. (eds) Plasticity and Beyond. CISM International Centre for Mechanical Sciences. – 2014. – Vol. 550. Springer, Vienna.

3. Meric L. Poubanne P., Cailletaud G. Single crystal modelling for structural calculations: Part I — Model presentation, J. Engng. Mater. Techn. – 1991. – Vol. 113 – P. 162.

4. Грищенко А.И., Семенов А.С. Моделирование процессов упругопластического деформирования монокристаллических сплавов // Вестник Пермского национального исследовательского политехнического университета. Механика. 2022. № 2. С. 58-72.

5. Kocks U.F., Brown T.J. Latent hardening in aluminum // Acta Metallurgica. – 1966. – Vol. 14. – no. 2. – P. 87-98.

6. Семенов А.С., Грищенко А.И., Колотников М.Е., Гецов Л.Б. Конечно-элементный анализ термоциклической прочности лопаток газовых турбин Часть 1. Модели материала, критерии разрушения, идентификация параметров // Вестник УГАТУ. – 2019, – Vol. 23, №1 (83), – Р. 70-81.

7. Семенов А.С. PANTOCRATOR – конечно-элементный программный комплекс, ориентированный на решение нелинейных задач механики // Труды V Межд. конф. «Научно-технич. проблемы прогнозир. надежн. и долговечн. констр. и методы их решения». СПб.: Изд-во СПбГПУ, – 2003. – С. 466–480.

УДК 539.3, 537.226.4

Н.В Скутин, С.М. Лобанов, А.С. Семенов

Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого<sup>(•)</sup>

## МОДЕЛИРОВАНИЕ МЕХАНИЧЕСКОГО ГИСТЕРЕЗИСНОГО ПОВЕДЕНИЯ ТЕТРАГОНАЛЬНЫХ ДОМЕННЫХ СТРУКТУР СЕГНЕТОЭЛЕКТРОЭЛАСТИКОВ

Введение. Сегнетоэлектроэластики находят применение в широком спектре технических устройств: от пьезопривода сканирующего туннельного микроскопа до инжектора топлива в автомобиле, от элементов энергонезависимой памяти до автономных накопителей энергии. Ключевым свойством сегнетоактивных материалов является наличие спонтанной поляризации в кристаллитах при температурах ниже точки Кюри. При комнатной температуре большинство сегнетопьезокерамических материалов находится в сегнетоэлектрической тетрагональной фазе, в которой возможны 6 направлений спонтанной поляризации в кристаллите – соответствующих кристаллографическим осям (001) [1].

В реальном материале образуются области с одинаковым направлением спонтанной поляризации, называемые доменами. Между доменами в тетрагональной фазе могут существовать два типа границ: со скачком поляризации 90° и 180°. Условия электрической и механической совместности [2,3]:  $(\mathbf{D}_I - \mathbf{D}_J) \cdot \mathbf{n} = 0$  и  $\varepsilon_I - \varepsilon_J = \frac{1}{2} (\mathbf{an} + \mathbf{na})$ , где  $\mathbf{n}$  - вектор нормали к границе между доменами, приводят к ограниченному числу возможных ламинатных доменных паттернов. В данном исследовании рассматриваются все 8

<sup>&</sup>lt;sup>(•)</sup> Н.В. Скутин, yt86tu@mail.ru

возможных вариантов элементарных представительных объемов (ЭПО) ламинатных структур второго ранга [2], представленных на рис. 1.



Целью данной работы является исследование процессов эволюции доменной структуры и возможностей микроструктурных моделей для описания механического гистерезисного поведения тетрагональных доменных структур сегнетоэлектроэластиков.

*Методы исследования.* При получении гистерезисных кривых с учетом доменной структуры использовался метод конечно-элементной (КЭ) гомогенизации [2-3]:

$$\boldsymbol{\varepsilon}^{r} = \frac{1}{V_{\kappa p}} \int_{V_{\kappa p}} \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}^{r}(\mathbf{r}) \, dV \,, \quad \mathbf{P}^{r} = \frac{1}{V_{\kappa p}} \int_{V_{\kappa p}} \tilde{\mathbf{P}}^{r}(\mathbf{r}) \, dV \,, \quad \boldsymbol{\sigma} = \frac{1}{V_{\kappa p}} \int_{V_{\kappa p}} \tilde{\boldsymbol{\sigma}}(\mathbf{r}) \, dV \,, \quad \mathbf{E} = \frac{1}{V_{\kappa p}} \int_{V_{\kappa p}} \tilde{\mathbf{E}}(\mathbf{r}) \, dV \,, \quad (1)$$

где  $\epsilon^{r}$  – тензор остаточных деформаций,  $\mathbf{P}^{r}$  – вектор поляризации,  $\boldsymbol{\sigma}$  – тензор напряжений,  $\mathbf{E}$  – вектор интенсивности напряженности электрического поля.

В расчетах использовалась микроструктурная модель сегнетоэлектроупругого материала [1-3], непосредственно учитывающая эволюцию доменной структуры. Решение нелинейных связанных краевых задач сегнетоэлектроупругости производилось с использованием конечно-элементного программного комплекса PANTOCRATOR [4].

Результаты моделирования. На рис. 2 показаны кривые механического гистерезиса для доменных структур: {1112}, {1314}, {1342}, нагружаемых в направлении [010]. При сжатии при напряжениях меньших -2000 МПа (в состоянии насыщения) наблюдается нарушение условия устойчивости материала по Друккеру  $\Delta \sigma \cdots \Delta \varepsilon^r > 0$ . При этом пластические деформации обратного напряжениям знака с дальнейшим уменьшением напряжений демонстрируют рост, заканчивающийся насыщением и достижением спонтанной деформации. В результате на кривой наблюдается петля двойного гистерезиса, характерного для антисегнетоэлектрических материалов. Обнаруженный эффект наблюдается для всех вариантов рассматриваемых доменных структур (рис. 2-4) и различных направлений приложения нагрузки (рис. 3), как при мягком, так и при жестком нагружении (нагрузка с разгрузкой) (рис. 4). Он имеет место при задании условий периодичности на боковых гранях ЭПО (рис. 2-4), а также при их жестком защемлении, однако эффект пропадает при свободных или допускающих параллельное смещение боковых гранях ЭПО (рис. 5).

Как видно из рис. 6, причиной неустойчивости является эволюция доменной структуры, которая происходит под действием значительных полей остаточных микронапряжений. При сжатии в направлении [010] в домене с начальной поляризацией [100] на этапе насыщения присутствуют растягивающие напряжения (горизонтальные, в направлении [010]), которые воздействуют на соседние домены с начальной поляризацией [010], инициируя в них при жестком защемлении в направлении [100] процессы переключения в направлении [010].





Рис. 5. Кривые гистерезиса при жестком и мягком нагружении доменной структуры {1324} в направлении [010] при свободных боковых гранях

Заключение. Результаты моделирования гистерезисов сегнетоэластиков позволили установить значительное отличие для различных доменных паттернов и существенную анизотропию свойств доменных структур. При значительных уровнях сжимающих напряжений в условиях бокового стеснения может наблюдаться неустойчивость доменных структур.



Рис. 6. Кривая сжатия/разгрузки в направлении [010] для доменной структуры ЭПО {1324}, при задании условий периодичности на боковых гранях (с указанием полей распределения пластических деформаций  $\varepsilon^{r}_{[010][010]}$  в характерные моменты времени)

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Семенов А.С. Микроструктурная модель сегнетоэлектроупругого материала с учетом эволюции дефектов // Научно-технические ведомости СПбГПУ. Физико-матем. науки, – 2021, – Т. 14, – № 1., – С. 32-57.

2. Лобанов С.М., Семенов А.С., Мамчиц А. Моделирование гистерезисного поведения монокристаллического титаната бария с учетом эволюции доменной структуры // Физическая мезомеханика. – 2022. – Т. 25. – № 6. – С. 75-84.

3. Lobanov S.M.; Semenov A.S. Finite-element modeling of the hysteresis behavior of tetragonal and rhombohedral polydomain ferroelectroelastic structures // Materials. -2023, -16, -540.

4. Семенов А.С. PANTOCRATOR – конечно-элементный программный комплекс, ориентированный на решение нелинейных задач механики // Труды V-ой Межд. конф. "Научно-технич. пробл. прогнозир. надежн. и долговечности конструкций и методы их решения". СПб.: Изд-во СПбГПУ, 2003. С. 466-480.

П.Я. Стронгин<sup>1</sup>, П.С. Степанов<sup>2</sup>, Л.М. Яковис<sup>1</sup> <sup>1</sup>Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого<sup>(•)</sup> <sup>2</sup>Санкт-Петербургский государственный технологический институт (технический университет)

## РАСЧЕТ РЕГУЛЯТОРОВ ДЛЯ ТИПИЧНЫХ ОБЪЕКТОВ ПРОМЫШЛЕННОЙ АВТОМАТИКИ

Для управления разнообразными объектами промышленной автоматики повсеместно применяются типовые (ПИ и ПИД) регуляторы. Наиболее распространенная схема настройки параметров типовых регуляторов включает в качестве начального этапа снятие разгонных характеристик, которое предусматривает подачу на вход объекта управления (ОУ) ступенчатого управляющего воздействия и фиксацию реакции выходной переменной управляемого процесса на это воздействие. Типичная разгонная характеристика устойчивого ОУ (объект с самовыравниванием) представляет собой кривую одного из двух типов. Это либо апериодический процесс постепенного перехода выходной переменной на новый установившийся уровень (рис. 1, слева), либо подобный же процесс, но сопровождающийся затухающими колебаниями (рис. 1, справа).



Рис. 1. Типичные разгонные характеристики (слева – апериодический, справа — колебательный процессы) и их аппроксимация

Апериодическая реакция характерна для непрерывных технологических процессов, а колебательная – для упругих механических систем. В данной работе предлагается простой способ настройки типовых регуляторов, охватывающий оба варианта.

Придерживаясь принципа описания поведения ОУ наиболее простыми динамическими моделями, ограничимся линейными дифференциальными уравнениями второго порядка с последействием вида

$$\alpha \ddot{x}(t) + \beta \dot{x}(t) + \gamma x(t) = u(t - \tau), \tag{1}$$

где *и* – управляющее воздействие, а *х* – выходная переменная.

соответствующем выборе параметров При  $\alpha, \beta, \gamma$  и  $\tau$  модель (1)может с удовлетворительной для расчета систем управления с обратной связью точностью аппроксимировать экспериментальные зависимости. В ситуациях типичных характеристическое уравнение ОУ (1)  $\alpha p^2 + \beta p + \gamma = 0$  может, в зависимости от коэффициетов, иметь либо два вещественных, либо два комплексно-сопряженных корня. В первом случае передаточная функция ОУ (1) может быть записана в виде

$$x = \frac{ke^{-pt}}{(T_1p+1)(T_2p+1)}u,$$
(2)

где при  $T_1 \ge 0, T_2 \ge 0$  – разгонная характеристика ОУ (2) имеет монотонный апериодический

<sup>&</sup>lt;sup>(•)</sup> Л.М. Яковис, leonid@yakovis.com

характер, а так называемые постоянные времени  $T_1$  и  $T_2$  являются параметрами двух последовательных инерционных звеньев первого порядка.

Модель (2) может, например, ассоциироваться с последовательным соединением двух идеальных смесителей и транспортера.

В случае комплексно-сопряженных корней модель (1) может быть представлена в виде

$$x = \frac{ke^{-p\tau}}{p^2 + bp + c}u,\tag{3}$$

где при  $\frac{b}{\sqrt{c}} \le 2$ ,  $b \ge 0, c > 0$  разгонная характеристика ОУ (3) будет иметь колебательный характер.

Модель (3) может, например, интерпретироваться как механическая система с пружиной, демпфером вязкого трения и вынуждающей силой запаздывающего действия.

Предлагаемая методика расчета ПИ и ПИД-регуляторов состоит в следующем.

1. Снятые экспериментально разгонные характеристики аппроксимируются моделью (1). Для этого может использоваться та или иная известная программа, например, стандартная функция MATLAB pem.

2. С применением той же процедуры полученная в п. 1 модель второго порядка аппроксимируется более простой моделью инерционного звена первого порядка с запаздыванием

$$x = \frac{ke^{-p\tau}}{Tp+1}u, \ T \ge 0, \tau \ge 0.$$
 (4)

3. Применительно к модели (4) по простым формулам компенсационного метода рассчитываются параметры ПИ или ПИД-регуляторов. Для ПИ-регулятора с передаточной функцией  $W(p) = k_p + k_i/p$  формулы для настройки  $k_p$  и  $k_i$  имеют вид  $k_p = rT/(k\tau)$ ,  $k_i = r/(k\tau)$ . Для ПИД-регулятора  $W(p) = k_p + k_i/p + k_d p$ , где  $k_p = (dT + g\tau)/(k\tau)$ ,  $k_i = d/(k\tau)$ ,  $k_d = (gT)/k$ . Здесь коэффициенты r, d и g выбираются в зависимости от критерия оценки качества управления. Суть метода состоит в расчете таких параметров настройки регулятора, которые обеспечивают идентичность поведения замкнутой регулятором системы определенному эталонному образцу [1].

4. Устойчивость, качество управления и грубость в системе с ОУ (1) и регулятором, рассчитанным в п.3, проверяются методом имитационного моделирования с применением одного из стандартных программных пакетов, например, SIMULINK.

Все процедуры по пп 1 – 4 могут быть выполнены в интерактивном режиме с применением программного пакета МІМО-Маster, разработанного в ВШ «Механика и процессы управления» СПбПУ Петра Великого [2]. Результаты многочисленных имитационных экспериментов показали, что предложенная методика приемлема при любых соотношениях параметров модели (2). Что касается ОУ типа (3), то область эффективного применения компенсационного метода ограничивается процессами с ограниченной интенсивностью колебаний. Более конкретно, максимальная величина выбега  $\delta = (x_{max} - x_{\infty})/x_{\infty}$ , где  $x_{max}$  – максимальное, а  $x_{\infty}$  – установившееся значения выходной переменной на графике разгонной характеристики (см. рис. 1 справа), не должна превосходить значения 0.25. Применительно к модели (3) показатель  $\delta$  рассчитывается по формулам

$$\delta = e^{-\frac{b\pi}{2\omega}}, \qquad \omega = \sqrt{c - b^2/4}.$$

Пример 1. Рассмотрим ОУ типа (2) с апериодической разгонной характеристикой при K = 1,  $T_1 = 10$ ,  $T_2 = 3$ ,  $\tau = 0.1$  (см. рис.1 слева). Выполненная средствами MIMO-Master аппроксимация инерционным звеном первого порядка с запаздыванием дает ОУ (4) с параметрами K = 1, T = 11.0,  $\tau = 2.4$ . Разгонная характеристика этого ОУ показана на том же рисунке, что и разгонная характеристика исходного ОУ (2). Далее по приведенным выше формулам компенсационного метода рассчитываются настройки ПИ-регулятора для ОУ (4)

 $k_p = rT/(k\tau) = 3.4, k_i = r/(k\tau) = 0.3.$  В расчете использовано r = 0.739, что соответствует интегральному квадратичному критерию качества управления (ИКК). Найденный регулятор был применен к исходному ОУ (2) при приведенном к выходу ОУ возмущении n = 1(t). В результате выполненного с использованием МІМО-Маster имитационного моделирования замкнутой системы «объект-регулятор» был получен переходный процесс изменения выходной переменной, показанный на рис. 2 слева. Этому процессу соответствует ИКК = 0.0304. Для сравнения поисковым путем в результате серии имитационных расчетов были получены оптимальные по ИКК настройки ПИ-регулятора  $k_p = 23.1$  и  $k_i = 0.28$ . Переходный процесс для оптимального по ИКК регулятора показан на том же рис. 2 слева. Этому процессу соответствует ИКК = 0.0173.



Рис. 2. Переходные процессы в системе управления: слева ОУ типа (2), а справа – типа (3)

Пример 2. Рассмотрим ОУ типа (3) с колебательной разгонной характеристикой при K = 1, b = 1.64, c = 4,  $\tau = 0.34$ ,  $\delta = 0.25$  (см. рис.1 справа). Выполненная средствами МІМО-Маster аппроксимация инерционным звеном первого порядка с запаздыванием дает ОУ (4) с параметрами K = 0.25, T = 0.134,  $\tau = 1.1$ . Разгонная характеристика этого ОУ показана на том же рисунке, что и разгонная характеристика исходного ОУ (3). Далее по приведенным выше формулам компенсационного метода рассчитываются настройки ПИ-регулятора для ОУ (4)  $k_p = 0.36$ ,  $k_i = 2.7$ . Найденный регулятор был применен к исходному ОУ (2) при приведенном к выходу ОУ возмущении n = 1(t). В результате выполненного с использованием МІМО-Маster имитационного моделирования замкнутой системы «объектрегулятор» был получен переходный процесс изменения выходной переменной, показанный на рис. 2 справа. Этому процессу соответствует ИКК = 0.0633. Для сравнения поисковым путем в результате серии имитационных расчетов были получены оптимальные по ИКК настройки ПИ-регулятора  $k_p = 2.19$  и  $k_i = 2.83$ . Переходный процесс для оптимального по ИКК регулятора показан на том же рис. 2 справа. Этому процессу соответствует ИКК = 0.0495.

Анализ приведенных и подобных им примеров показывает, что хотя по формальному показателю ИКК рассчитанные по предлагаемой методике регуляторы уступают ПИрегуляторам с оптимальными параметрами, найденными существенно более сложным поисковым путем, однако они обеспечивает менее колебательные и менее продолжительные переходные процессы, что важно для практических приложений. Возможность применения простых аналитических расчетов регуляторов в сочетании с аппроксимацией ОУ инерционными звеньями с запаздыванием использована в пакете программ MIMO-Master [2].

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Яковис Л.М., Спорягин К.В. Настройка типовых регуляторов для многосвязных объектов управления // Мехатроника, Автоматизация, Управление – 2009. – №6. – С. 55 – 63.

2. Яковис Л.М., Спорягин К.В. Автоматизированный расчет типовых регуляторов для многосвязных объектов управления // Автоматизация в промышленности – 2018. – №4 – С. 58 – 64.

В.А. Судаков<sup>1,2</sup>, Д.Д. Ожгибесова<sup>1</sup>, И.А. Михайлов<sup>2</sup> <sup>1</sup>Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого<sup>(•)</sup> <sup>2</sup>ООО «Центротех-Инжиниринг»

## РАЗРАБОТКА ЦИФРОВОЙ МОДЕЛИ РАВНОНАПРЯЖЕННОГО ДИСКА, НАВИТОГО ИЗ ВОЛОКОН

*Введение*. Особенность проектирования изделий из композиционных материалов заключается в учете неразрывной связи материала, конструкции и технологии.

В отчете NASA [1] описана технология равнонапряженного диска для создания равнопрочной оболочки аэродинамического замедлителя из волокнистого полимерного композиционного материала (ВПКМ), представленной на рис. 1. В рамках нитяной модели композита (т. е. без учета несущей способности связующего) автором были получены траектории армирования, обеспечивающие равнонапряженность волокон, и исследованы два типа конструкции: сплошные диски и диски с отверстием. Также были исследованы возможные траектории, обеспечивающие равнонапряженность волокон при различных диапазонах изменения частоты вращения.



Рис. 1. Аэродинамический замедлитель из ВПКМ [1]

Известна конструкция равнонапряженного дискового маховика [2], представленная на рис. 2(а), в которой армирующие нити располагаются по петлеобразным кривым, распределенным в окружном направлении между внешним контуром и центральным отверстием, соприкасаясь с ними по касательной. В частном случае, приведенном на рис. 2(б), при уменьшении диаметра отверстия до нуля (диск без отверстия) петлеобразные кривые вырождаются в систему проходящих через центр диска окружностей.



Рис. 2. а) Расположение нитей в равнонапряженном диске с отверстием; б) Расположение нитей равнонапряженном диске посередине без отверстия [2]

Настоящая работа основана на математическом и компьютерном моделировании свойств элемента конструкции из ВПКМ. Главной целью является получение расчетной

<sup>&</sup>lt;sup>(•)</sup> В.А. Судаков, v\_a\_sudakov@inbox.ru

методики для оптимального проектирования кинетического накопителя энергии с требуемыми характеристиками по прочности и жесткости с учетом технологии изготовления.

В качестве исходных данных для разработки методики выбран диск с отверстием. Для реализации расчетной методики решается комплекс задач, связанных с получением геометрических и технологических параметров намотки через моделирование траектории армирующих волокон, задач расчета эффективных характеристик материала в зависимости от полученных технологических параметров, а также задач конечно-элементного моделирования и расчета изделия из ВПКМ. В итоге должна получиться структура, обеспечивающая равнонапряженное состояние в диске. С помощью разрабатываемой цифровой модели можно будет рассчитывать высокоскоростные маховики, в которых применяется конструкция равнонапряженного диска, навитого из волокон.

Этапы разработки и результаты. Для моделирования укладки с помощью геометрического анализа процесса формообразования, представленного на рис. 3, по теореме косинусов получена формула (1), которая позволяет определить угол  $\pm \alpha$  вдоль радиуса с учетом диаметра волокна. По полученной зависимости можно численно определить распределение укладки волокна в элементарном объеме по радиусу для последующего прочностного расчета.



Рис. 3. Геометрическое решение задачи нахождения угла укладки

Реализован алгоритм аналитического определения напряженно-деформированного состояния в глобальной и локальной системах координат в программе MATLAB по соотношениям механики слоистых пластин [3]. Верификация расчетного алгоритма осуществлена по данным задачи из учебника [4], в которой рассматривается растяжение пластины с укладкой [30 -30 0 0 -30 30]. Также было проверено численное решение в программе ANSYS Composite PrepPost. Расчетная схема модельной задачи представлена на рис. 4. Погрешность верификации напряжений и деформаций в локальной и глобальной системах координат для первого слоя 30 градусов приведены в табл. 1. Погрешность верификации с расчетом из [4] составляет менее 0,3%, что позволяет судить о корректности аналитического численного моделирования проектирования И В методике равнонапряженного диска.



Рис. 4. Расчетная схема модельной задачи Растяжение пластины

		BOOK	MATLAB	Погрешность, %	ANSYS	Погрешность, %
GLOBAL	Ex	1,28E-03	1,28E-03	3,95E-01	1,28E-3	3,25E-01
	$\varepsilon_y$	-1,49E-03	-1,49E-03	2,43E-01	-1,49E-01	1,91E-01
(MPa)	$S_x$	73,60	73,62	3,07E-02	73,66	8,97E-02
	$S_y$	7,11	7,11	5,35E-02	7,10	1,98E-01
	$ au_{\mathrm{xy}}$	36,60	36,55	1,25E-01	36,58	4,64E-02
LOCAL	$\varepsilon_1$	5,85E-04	5,85E-04	6,58E-02	5,85	2,74E-03
	$\varepsilon_2$	-7,96E-04	-7,96E-04	5,79E-03	-7,98	3,00E-01
	$\gamma_{\rm xy}$	-2,39E-03	-2,39E-03	5,76E-02	-2,39E-03	1,72E-01
(MPa)	<i>S</i> <sub>1</sub>	88,70	88,65	5,38E-02	88,71	8,55E-03
	$S_2$	-7,92	-7,92	5,24E-02	-7,94	2,92E-01
	$ au_{12}$	-10,52	-10,52	1,95E-02	-10,53	1,34E-01

Табл. 1. Сравнение результатов решения в MATLAB и ANSYS со значениями из учебника

Разработан скрипт для построения модели диска в ANSYS ACP, в котором используется формула (1) для автоматической генерации распределения схемы укладки  $\pm \alpha$  и получения модели равнопрочного диска. Скрипт реализует все этапы работы с BПКМ в ANSYS ACP, начиная с выбора материала, заканчивая созданием необходимого количества слоев с требуемыми углами укладки в каждом элементе. На рис. 5 представлен результат работы скрипта на примере сектора диска.

На данный момент решается задача получения распределения толщины оболочки, так как при данной технологии диск имеет неравномерную толщину. После решения задачи можно будет оценить равнопрочность диска, и методика будет завершена.



Рис. 5. Результат работы скрипта по заданию укладки по формуле (1) на примере сектора диска

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Kyser A.C. The Rotornet: A High Performance Hypersonic Decelerator for Planetary Entry // National aeronautics and space administration. – 1965. – P. 83.

2. Кайзер А.С. Равнонапряженный вращающийся диск, навитый из волокон // Ракетная техника и космонавтика, 1965, № 7 С. 127-131.

3. Voyiadjis G.Z. Mechanics of Composite Materials with MATLAB // George Z. Voyiadjis, Peter I. Kattan: Springer-Verlag Berlin Heidelberg. – 2005. – P. 337.

4. Hyer M.W. Stress Analysis of Fiber-Reinforced Composite Materials // Hyer, M.W.; University of Illinois at Urbana-Champaign. - 1997. – P. 627.

П.П. Удалов<sup>1</sup>, Л.В. Штукин <sup>1</sup>,И.А. Попов<sup>1</sup>, А.В. Лукин<sup>1</sup>, К.В. Полеткин<sup>2</sup> <sup>1</sup>Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого<sup>(•)</sup> <sup>2</sup>Hefei University of Technology, Hefei, China

# ИССЛЕДОВАНИЕ ЯВЛЕНИЯ ПАРАМЕТРИЧЕСКОГО РЕЗОНАНСА В МИКРОМЕХАНИЧЕСКОМ БЕСКОНТАКТНОМ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОМ ПОДВЕСЕ

Введение. Электромагнитный подвес – устройство, работающий на принципе электромагнитной индукции [1]. Работая в режиме акселерометра при правильном подборе электрических и электромагнитных параметров системы возможно добиться квазинулевой жесткости системы, что приводит к теоретически бесконечной чувствительности [2,3]. Применяя этот подход к задачам гравиметрии [4-6], возможно конструировать высокоточные электромагнитные гравиметры. В данной же работе предлагается рассмотреть одномерную задачу о колебаниях чувствительного элемента, выполненного в форме проводящего диска, в индукционном подвесе [2,7,8], вблизи его положения равновесия и получить аналитические оценки для зон затягивания колебаний, что может быть полезным для определения рабочих величин параметров системы.

Одномерная модель колебаний чувствительного элемента электромагнитного гравиметра. Схематическое изображение электромагнитного подвеса с электродами  $E_1 - E_4$  изображено на рис. 1.



Стабилизирующая катушка

Рис. 1. Схематическое изображение электромагнитного подвеса

Согласно формализму Лагранжа-Максвелла, динамическая система в безразмерном виде [7,8] примет вид:

$$lj'_{2} + rj_{2} = -\frac{dm_{12}}{d\xi}\xi'\sin\tau - m_{12}\cos\tau,$$

$$\xi'' + \lambda\xi' = \varepsilon \left(\alpha \frac{dm_{12}}{d\xi}j_{2}\sin\tau - 1 + \zeta\hat{e}_{1}^{2} - \zeta\hat{e}_{2}^{2} + 2\zeta\xi(\hat{e}_{1} + \hat{e}_{2})^{2}\right),$$

$$(1)$$

$$(1-\xi)\hat{e}_{1} + \xi(1-\xi)(\hat{e}_{1} + \hat{e}_{2}) = u_{01}, \qquad \xi\hat{e}_{2} + \xi(1-\xi)(\hat{e}_{1} + \hat{e}_{2}) = u_{02},$$

<sup>(•)</sup> П.П. Удалов, pp udalov@mail.ru

где

$$\alpha = \frac{L_{1}i_{a}^{2}}{2\tilde{m}gr}, \beta = \frac{\mu_{0}r_{c}}{L_{1}}, \tau = \omega t, \varepsilon = \frac{g}{2\omega^{2}r}, \lambda = \frac{\mu}{\tilde{m}\omega}, \xi = \frac{y}{2r}, a = \frac{r_{pm}}{r_{c}}, j_{2} = \frac{i_{2}}{i_{a}}, \hat{e}_{1} = \frac{e_{1}}{e_{0}},$$

$$\hat{e}_{2} = \frac{e_{2}}{e_{0}}, W_{0} = \frac{e_{0}^{2}}{2A}, l = \frac{L_{2}}{L_{1}}, r = \frac{R_{2}}{L_{1}\omega}, u_{c} = \frac{2he_{0}}{A}, u_{01} = \frac{u_{1}}{u_{c}}, u_{02} = \frac{u_{2}}{u_{c}}, \zeta = \frac{W_{0}}{\tilde{m}g},$$

$$m_{12} = \frac{M_{12}}{L_{1}} = \beta\sqrt{a} \left[ \left( \frac{2}{\kappa} - \kappa \right) K(\kappa) - \frac{2}{\kappa} E(\kappa) \right], \qquad \kappa^{2}(y) = \frac{4a}{(1+a)^{2} + 4\xi^{2}},$$

$$\frac{dm_{12}}{d\xi} = \frac{\partial m_{12}}{\partial \kappa} \frac{\partial \kappa}{\partial \xi} = -\frac{8\beta a}{\kappa^{2}} \left[ \frac{(2-\kappa^{2})E(\kappa)}{1-\kappa^{2}} - 2K(\kappa) \right] \frac{\xi}{((1+a)^{2} + 4\xi^{2})^{\frac{3}{2}}},$$
(2)

где  $L_1, L_2$  – собственные индуктивности катушки и диска соответственно,  $i_a, \omega$  – амплитуда и частота тока катушки соответственно,  $\tilde{m}$  – масса диска, g – ускорение свободного падения, 2h – расстояние между катушкой и верхними электродами,  $\mu_0$  – магнитная постоянная,  $r_c, r_{pm}$  – срединный радиус катушки и ИМ соответственно,  $t_c, t_{pm}$  – толщины катушки и ИМ соответственно, t – время,  $\mu$  – коэффициент трения, y – расстояние между катушкой и центром тяжести ИМ,  $i_2$  – наведенный ток в ИМ,  $e_1$  – электрический заряд на верхней паре электродов,  $e_2$  – электрический заряд на нижней паре электродов,  $e_0$  – номинальное значение заряда,  $A = \varepsilon_e \varepsilon_0 A_{\varepsilon}, \varepsilon_0$  – относительная диэлектрическая проницаемость,  $\varepsilon_e$  – диэлектрическая постоянная,  $A_{\varepsilon}$  – площадь электродов,  $R_2$  – электрическое сопротивление ИМ,  $u_1, u_2$  – напряжения на верхней и нижней парах электродов соответственно,  $M_{12}$  – взаимная индуктивность между катушкой и ИМ.

Исследование положения равновесия ИМ. Далее решается задача о нахождении положения равновесия системы (1) для набора параметров  $(j_2, \xi, \hat{e}_1, \hat{e}_2) = (j_{20}, \xi_0, \hat{e}_{10}, \hat{e}_{20})$ , где  $j_2 = j_{20}(\tau)$  – гармоническая функция наведенного тока, которая соответствует постоянным значениям  $\xi_0, \hat{e}_{10}, \hat{e}_{20}, u_{01}, u_{02}$ . Выражение для определения постоянного положения равновесия  $\xi_0$  имеет следующий вид [7,8]

$$f(\xi_0, u_1, u_2) = \frac{3u_1^2}{(1 - \xi_0)^2} + \frac{2u_1u_2}{\xi_0(1 - \xi_0)} - \frac{u_2^2}{\xi_0^2} - \frac{2\alpha m_{12}(\xi_0)m_{12}'(\xi_0)}{\sqrt{l^2 + r^2}} - 4 = 0.$$
(3)

Динамика чувствительного элемента гравиметра вблизи положения равновесия. Для исследования малых колебаний вблизи положения равновесия системы  $\xi_0$  введем переменную  $z \triangleq \xi - \xi_0$  и линеаризуем второе уравнение в (1):

$$z'' + \lambda z' + (\delta - \hat{\varepsilon} \cos(2\tau + \gamma))z = 0.$$
(4)

Стоит отметить, что вследствие периодичности тока катушки магнитная жесткость системы имеет периодическую компоненту с удвоенной частотой тока возбуждения, что приводит к переменному члену в жесткости. Это значит, что при определенном наборе параметров колебания являются или затухающими, или бесконечно возрастающими. Для нахождения переходных кривых (кривых, разделяющие данные области), применим метод растянутых параметров [9].

Таким образом, выражения переходных кривых, исходящих из δ = 0,1 примут вид:

$$\delta = -\frac{1}{8}\hat{\varepsilon}^2 + \cdots, \delta = 1 \pm \frac{1}{2}\sqrt{\hat{\varepsilon}^2 - 4\lambda^2} - \frac{\hat{\varepsilon}^2}{32} + \cdots.$$
(5)

На рис. 2 иллюстрируется верификация выражений переходных кривых, задаваемых выражениями (5), по численным результатам, полученным для выражения (4) согласно теории Флоке [9].

Из рис. 2 видно, что аналитические выражения для переходных ветвей (5) с хорошей точностью совпадают с численным решением задачи (4). В случае оценки колебаний вблизи положения равновесия рабочими областями являются области затуханий колебаний вследствие потребности удержания колебаний вблизи положения равновесия  $\xi_0$  и недопуска его дрейфа.



Рис. 2. Области устойчивости (прозрачные кружки) и неустойчивости (черные кружки) в плоскости параметров (ε̂, δ). Черные линии – переходные кривые, задаваемые выражениями (5); v = 0.15

Выводы. Рассмотрена аналитическая модель нелинейных колебаний чувствительного элемента электромагнитного подвеса, выполненного в виде недеформируемого дископодобного тела. Найдены и проанализированы зависимости величины положения равновесия чувствительного элемента в зависимости от электромагнитных и физических параметров системы.

Работа проводилась при поддержке гранта Российского научного фонда № 21-71-10009.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Han H.S, Kim D.S. Magnetic Levitation. – Heidelberg: Springer Netherlands. – 247 p.

2. Poletkin K., Chernomorsky A., Shearwood C. Proposal for micromachined accelerometer, based on contactless suspension with zero spring constant // IEEE Sensors Journal. – 2012. – V. 12, No. 7. – P. 2407-2413.

3. Руднев И.А., Анищенко И.В. Физические принципы создания магнитолевитационных систем на основе высокотемпературных сверхпроводящих композитов второго поколения (Обзор) // Журнал технической физики. – 2021. – Т. 91. – №. 12. – С. 1813-1847.

4. Краснов А.А., Соколов А.В., Элинсон Л.С. Результаты эксплуатации гравиметров «Чекан-АМ» // Гироскопия и навигация. 2014. №1. С. 98-104.

5. Соколов А.В., Усов С.В., Элинсон Л.С. Опыт проведения гравиметрической съемки в условиях выполнения морских сейсмических работ // Гироскопия и навигация. 2000. № 1. С. 39-50.

6. Пешехонов В.Г., Соколов А.В., Железняк Л.К., Береза А.Д., Краснов А.А. Вклад навигационных технологий в создание мобильных гравиметров // Гироскопия и навигация. 2019. Т. 27. №. 4. С. 162.

7. Скубов Д.Ю., Индейцев Д.А., Удалов П.П., Попов И.А., Лукин А.В., Полеткин К.В. Нелинейная динамика микромеханического твердотельного неконтактного электромагнитного индукционного подвеса// Механика деформируемого твердого тела в проектировании конструкций: программа и тезисы докладов. – Пермь, 2022. – С. 72.

8. Скубов Д.Ю., Индейцев Д.А., Удалов П.П., Попов И.А., Лукин А.В., Полеткин К.В. Исследование положения равновесия неконтактного электромагнитного подвеса // XXXIV Международная инновационная конференция молодых ученых и студентов по проблемам машиноведения (МИКМУС-2022). – 2022. – С. 338-343.

9. Nayfeh A. H. Perturbation methods. - New-York: John Wiley & Sons. - 425 p.

Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого<sup>(•)</sup>

## ЦЕНТРОБЕЖНАЯ НАГРУЗКА ВАЛА С УЧЕТОМ ЭФФЕКТА ДВОЯКОЙ ИЗГИБНОЙ ЖЕСТКОСТИ

Введение. Вибрации газотурбинного двигателя являются опасным фактором, который может привести к его разрушению, к крушению летательного аппарата и человеческим жертвам. Наиболее распространенной причиной вибраций является наличие несбалансированной центробежной нагрузки (дисбаланса) на роторах. Наиболее широко используемым методом снижения дисбаланса является балансировка роторов.

Одним из элементов роторов являются валы – детали, характерный размер которых в одном направлении значительно превосходит характерные размеры в двух других направлениях. В [1] показано, что балансировка валов классическими методами может привести не к снижению, а к увеличению нагрузок на опоры.

Альтернативным методом снижения дисбаланса роторов является оптимизация конструкции ротора с использованием математического моделирования.

В классических подходах математического моделирования роторов в качестве исходной нагрузки задается дисбаланс, сосредоточенный в плоскостях балансировки ротора [2-5]. Такой подход не учитывает распределение дисбаланса на валах и может привести к погрешностям при определении вибраций. В работе [6] предложен метод задания исходной нагрузки, учитывающий распределение дисбаланса по валу и показано, что такой подход дает более точные результаты по сравнению с классическим методом задания нагрузок.

В работе [7] рассмотрено уравнение, моделирующее прогиб вала с двоякой жесткостью.

Цель настоящей работы – оценить влияние двоякой жесткости на рабочий прогиб вала.

*Теория.* Рассмотрим дифференциальное уравнение в частных производных, моделирующее прогиб вала с двоякой жесткостью [7].

$$\operatorname{Re}\left(-\frac{\partial^{2} z(s,t)}{\partial s^{2}} - \beta M(s,t) + \Delta e^{2i\omega t} \overline{M(s,t)}\right) \equiv 0$$
(1)

Будем рассматривать случай простой двухопорной балки с постоянной распределенной нагрузкой  $q_x(M_y(s) = \frac{q_x s(l-s)}{2}).$ 

Можно показать, что множество решений уравнения (1) является надмножеством множества решений следующей системы уравнений:

$$\begin{cases} -\frac{\partial^2 u(s,t)}{ds^2} - \beta M_y(s) + \Delta M_y(s) \cos 2\omega t \equiv 0\\ \frac{\partial^2 v(s,t)}{\partial s^2} + \Delta M_y(s) \sin 2\omega t \equiv 0 \end{cases}$$
(2)

Можно показать, что решение системы (2) с граничными условиями:

$$u(0,t) = u(l,t) = v(0,t) = v(l,t) = 0$$
(3)

существует, единственно и имеет вид:

<sup>&</sup>lt;sup>(•)</sup> А.Р. Усманов, ysman2d@gmail.com

$$\begin{aligned} u(s,t) &= \frac{s^4}{24} \left[ \beta q_x - \Delta q_x \cos 2\omega t \right] + \frac{s^3}{12} \left[ \Delta q_x l \cos 2\omega t - \beta q_x l \right] + \\ &+ \left[ -\frac{l^3}{24} \left( \beta q_x - \Delta q_x \cos 2\omega t \right) - \frac{l^2}{12} \left( \Delta q_x l \cos 2\omega t - \beta q_x l \right) \right] s \\ v(s,t) &= \frac{s^4}{24} \left[ \Delta q_x \sin 2\omega t \right] + \frac{s^3}{12} \left[ -\Delta q_x l \sin 2\omega t \right] + \\ &+ \left[ -\frac{l^3}{24} \left( \Delta q_x \sin 2\omega t \right) - \frac{l^2}{12} \left( -\Delta q_x l \sin 2\omega t \right) \right] s \end{aligned}$$

$$(4)$$

Рассмотрим следующую систему уравнений:

$$\begin{cases} -\frac{\partial^2 u(s,t)}{ds^2} - \beta \tilde{M}_y(s,t) \equiv 0\\ -\frac{\partial^2 v(s,t)}{\partial s^2} - \beta \tilde{M}_x(s,t) \equiv 0 \end{cases}$$
(5)

где  $\tilde{M}_{y}(s,t) = \frac{\tilde{q}_{x}(t)s(l-s)}{2}, \tilde{M}_{x}(s,t) = \frac{\tilde{q}_{y}(t)s(l-s)}{2}, \tilde{q}_{x}(t) = q_{x}\left(1 - \frac{\Delta\cos 2\omega t}{\beta}\right), \tilde{q}_{y}(t) = q_{x}\frac{\Delta\sin 2\omega t}{\beta}.$ 

Можно показать, что решение системы (5) с граничными условиями (3) существует, единственно и тождественно совпадает с решением системы (2) с теми же граничными условиями.

Данное утверждение означает, что если в простой двухопорной балке с постоянной распределенной нагрузкой  $q_x, q_y = 0$  заменить  $q_x$  на  $q_x \left(1 - \frac{\Delta \cos 2\omega t}{\beta}\right)$  и  $q_y$  на  $q_x \frac{\Delta \sin 2\omega t}{\beta}$ , мы получим точное решение уравнения (1).

Сравнение с экспериментом. Рассмотрим эксперимент [8]. Вал имеет эксцентриситет, который приводит к появлению дисбаланса и, соответственно, к прогибу в работе [6], а также приводит к появлению двоякой жесткости ( $J_x \neq J_y, \Delta \neq 0$ ).

График зависимости прогиба середины вала от времени для двух случаев ( $\Delta \neq 0, \Delta = 0$ ), определенный по формулам (4), показан на рис. 1.



Рис. 1. График изменения прогиба середины вала

Результаты показывают, что учет двоякой жесткости приводит к результатам, более близким к эксперименту.

Заключение. В данной работе представлен метод учета двоякой жесткости при определении рабочего прогиба валов. На тестовой задаче показано, что учет двоякой жесткости приводит к результатам, более близким к эксперименту

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Ласкин А.С., Себелев А.А., Забелин Н.А. Энергетические машины. Вибропрочность и устойчивость элементов турбомашин. Санкт-Петербург: ПОЛИТЕХ-ПРЕСС, – 2018. – 128 с.

2. Хаймович А.И., Болотов М.А., Печенина Е.Ю. Модель виртуального уравновешивания жестких роторов // Вестник Самарского университета. Аэрокосмическая техника, технологии и машиностроение. – 2022. – Т. 21. – № 1. – С. 99–109.

3. Fegade R., Patel V., Nehete R. S., Bhandarkar B. M. Unbalanced response of rotor using ANSYS parametric design for different bearings // International Journal of Engineering Sciences & Emerging Technologies. –2014. – Vol. 7. – No. 1. – P. 506–515.

4. Ahobal N., Ajit prasad S.L. Study of vibration characteristics of unbalanced overhanging rotor // IOP Conference Series: Materials Science and Engineering. – 2019. – Vol. 577. – P. 012140.

5. Longxi Zh., Shengxi J., Jingjing H. Numerical and experimental study on the multiobjective optimization of a two-disk flexible rotor system // International Journal of Rotating Machinery. – 2017. – Vol. 2017. January. –P. 1–10.

6. Усманов А.Р., Модестов В.С. Метод задания центробежных нагрузок валов при расчете дисбалансного поведения роторов // Научно-технические ведомости СПбГПУ. Физикоматематические науки. – 2023. – 16 (1).

7. Фридман В.М. Теория упругих колебаний, СПб: «Наука», 2014. - С. 253.

8. Saleem Md, Garikapati Diwakar, Munukurthi Rama Surya Satyanarayana, Detection of unbalance in rotating machines using shaft deflection measurement during its operation // IOSR Journal of Mechanical and Civil Engineering -2012 - 3 (3). -P. 8-20.

Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого<sup>(•)</sup>

## ЧИСЛЕННЫЙ АНАЛИЗ ПРИСПОСОБЛЯЕМОСТИ ТЕРМОЦИКЛИЧЕСКИ НАГРУЖАЕМОГО СОСУДА ПОД ДАВЛЕНИЕМ В УСЛОВИЯХ УПРУГО-ИДЕАЛЬНО-ПЛАСТИЧЕСКОГО ДЕФОРМИРОВАНИЯ

Введение. Типичными условиями работы таких элементов реакторных установок атомных электростанций как металлоконструкции оболочек и сосуды под давлением является комбинированное действие механических и температурных нагрузок. Для обеспечения прочности подобных конструкций в 60-е годы XX века был проведен ряд научных исследований по анализу приспособляемости тонкостенных сосудов под давлением при нагружении внутренним давлением и температурным градиентом по толщине стенки.

В базовой работе Бри [1] аналитически найдены характерные зоны качественно различного поведения конструкции при комбинации двух типов нагрузок. В рамках рассмотренной постановки тонкостенный сосуд заменен на эквивалентный (при определенных допущениях) объект, испытывающий одноосное напряженное состояние. Решение задачи получено для некоторого циклического процесса, имитирующего режимы пуска и останова реактора, при этом характерными нагрузками принимаются циклически изменяющийся градиент температур по толщине от нулевого значения до максимального и постоянно приложенное рабочее давление. Для такой постановки получено базовое аналитическое решение задачи, представляемое в виде диаграммы приспособляемости конструкции с различными характерными зонами, именуемой диаграммой Бри.

Целью работы является анализ приспособляемости термоциклически нагружаемого сосуда под давлением в условиях упруго-идеально-пластического деформирования с помощью метода конечных элементов, реализованного в программном комплексе Abaqus.

Актуальность данной работы заключается в необходимости получения характерных зон приспособляемости объектов атомной энергии под действием высокотемпературного циклического нагружения. Построение диаграммы Бри для реального объекта позволит получить характерное поведение конструкции под действием термоциклического нагружения и скорректировать (при необходимости) условия эксплуатации конструкции с целью сохранения ею работоспособности.

Аналитическое решение классической задачи Бри. Постановка данной задачи заключается в следующем – рассматривается тонкостенный цилиндр, на внутренней поверхности которого приложено давление. По толщине стенки приложен линейный градиент температур по закону:

$$T = -\frac{\Delta T x}{d}, x \in \left[-\frac{d}{2}; \frac{d}{2}\right],\tag{1}$$

где  $\Delta T$  – амплитуда изменения температуры от между стенками, d – толщина стенки.

В общем виде постановка задачи представлена на рис. 1а.

В работе [1] проводится значительное упрощение постановки – производится переход от трехмерной постановки к одномерной в условиях малости остальных компонент тензора напряжений по сравнению с окружными и осевыми напряжениями. В таком случае постановка задачи сводится к анализу одноосного растяжения стержня под действием градиента температур.

<sup>&</sup>lt;sup>(•)</sup> Р.В. Федоренко, fedorenko\_rv@spbstu.ru

Параметры материалов также задаются в упрощенном виде – материал цилиндра (стержня) принимается упруго-идеально-пластическим.



Рис. 1. а) общая постановка задачи, б) диаграмма приспособляемости Бри, в) характерные диаграммы деформирования сосуда в каждой из зон

Считается, что в процессе работы реактора происходят режимы пуска и останова, что определяет циклический характер задания температурной нагрузки. При этом силовая нагрузка (давление) прикладывается и остается постоянной во время всего расчета.

Решение задачи строится в представлении деформации в виде суммы упругой механической, тепловой и неупругой (при ее наличии) составляющих:

$$\varepsilon = \frac{\sigma}{E} + \alpha \Delta T + \eta \tag{2}$$

где *а* – коэффициент теплового расширения, *η* – пластическая деформация.

Результатом решения задачи является диаграмма с границами состояния конструкции в осях  $\sigma_p, \sigma_t$ , обезразмеренных на предел текучести материала. Здесь  $\sigma_p$  – механическое напряжение,  $\sigma_t$  – температурное напряжение, причем:

$$\sigma_p = \int_{-d/2}^{d/2} \sigma_{\theta} dx = PR/d$$

$$\sigma_t = \frac{E\alpha\Delta T}{2(1-\nu)},$$
(3)

где *v* – коэффициент Пуассона.

Диаграмма, полученная в работе [1], представлена на рис. 16. Диаграмма отражает характерные состояния цилиндра (стержня) при различных комбинациях внешних нагрузок (напряжений, вызванных каждой из нагрузок): зона E соответствует полностью упругие состояния конструкции, в зонах  $S_1, S_2$  – состояния упругой приспособляемости (elastic или strict shakedown), в зоне P – состояния пластического циклирования (plastic cycling или global shakedown), в зонах  $R_1, R_2$  – состояния ratcheting (неограниченное увеличение пластических деформаций под действием циклических нагрузок). На рис. 1в представлены характерные кривые нагружения сосуда в каждой из зон диагрмаммы Бри.

Численное решение с помощью метода конечных элементов. В силу возможностей численного моделирования в данной работе постановка расширяется до двумернойосесимметричной задачи, описывающей тонкостенный цилиндр с учетом симметрии нагрузки и геометрии, что позволяет учесть не учитываемые в оригинальном решении факторы (малость компонент напряжений, замена задачи на одноосную и т.п.) и убедиться в корректности принятых допущений. На рис. 2а представлена расчетная модель для решения задачи в программной системе конечно-элементного анализа Abaqus.



Рис. 2. а) постановка численной задачи, б) диаграмма приспособляемости из численного расчета

Внутреннее давление задается равномерным на всей внутренней поверхности сосуда. Величина давления определяется как

$$p = k \cdot P, \tag{4}$$

где *p* – расчетное значение давления, *P* – давление, определяющее границу поверхности текучести материала, *k* – варьируемый коэффициент пропорциональности.

Известно, что для тонкостенных осесимметрично нагруженных оболочек вращения [2]:

$$\sigma_1 = PR/d, \qquad \sigma_2 = PR/2d, \qquad \sigma_3 = 0. \tag{5}$$

Тогда, по критерию Мизеса, который определяет поверхность текучести:

$$\frac{\sqrt{3}}{2}\frac{PR}{d} = \sigma_T.$$
(6)

Таким образом, предельное давление, которое вызовет в конструкции эквивалентное напряжение, равное пределу текучести, определяется выражением:

$$P = \sigma_T \cdot \frac{2d}{\sqrt{3R}}.$$
(7)

Разница температур задается следующим образом:

$$\frac{E\alpha\Delta I}{2(1-\nu)} = n \cdot \sigma_T.$$
(8)

На рис. 26 представлена полученная диаграмма при решении задач с коэффициентами:  $k \in [0:0.1:1], n \in [0:0.4:4]$ . На данной диаграмме точками нанесены результаты численного решения, сплошными линями – границы разделения зон различного поведения конструкции.

Заключение. Численное решение, полученное без каких-либо допущений в постановке задачи, полностью совпадает с диаграммой деформирования Бри из аналитического решения [1].

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Bree J. Elastic-plastic behaviour of thin tubes subject to internal pressure and intermittent high-heat fluxes with application to fast nuclear reactor fuel elements // Journal of Strain Analysis. – 1967. – Vol. 2 (3). - P. 226-238.

2. Заславский Б.В. Краткий курс сопротивления материалов. Учебник для авиационных специальностей вузов. М.: Машиностроение, 1986. – 328с.

М.М. Фролов<sup>1</sup>, А.В. Савиковский<sup>1,2</sup>, А.С. Семенов<sup>1</sup> <sup>1</sup>Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого<sup>(•)</sup> <sup>2</sup>Акционерное общество «Силовые машины - ЗТЛ, ЛМЗ, Электросила, Энергомашэкспорт»

# ВЛИЯНИЕ ФОРМЫ КОНТУРА НА ЗНАЧЕНИЯ ИНТЕГРАЛОВ $J_1$ и $J_2$ ПРИ СМЕШАННОЙ МОДЕ РАЗРУШЕНИЯ

Введение. Один из эффективных методов вычисления коэффициентов интенсивности напряжений (КИН) основан на использовании инвариантного J интеграла [1]:

$$K^2 = J\kappa E$$
,  $\kappa = 1$  (IIHC),  $\kappa = 1 - \nu^2$  (IIДC), (1)

где ПНС – плоское напряженное состояние, ПДС – плоское деформированное состояние. В плоской задаче различают две чистых моды разрушения, которым соответствуют два КИН:  $K_I, K_{II}$ . В чистых модах КИН однозначно связан с *J* интегралом. В случае смешанной моды возникает проблема: для определения нескольких КИН имеется только одно уравнение (1). Введение *J* интеграла как проекции некоторого вектора **J** на направление распространения трещины [2] приводит к возможности использования других проекций [3], что позволяет получить необходимое количество уравнений для определения КИН. Введем обозначения для координат **J**:  $J_1$  – проекция на направление роста трещины **e**,  $J_2$  – проекция на направление, ортогональное к **e**. Для  $J_1$  доказана его инвариантность относительно формы и размеров контура [1], для  $J_2$  такого заключения сделать не удается.

Цель данной работы заключается в исследовании зависимости  $J_1$  и  $J_2$  интегралов от размеров и формы контура. Зависимость от формы проверяется путем сравнения значений J интегралов, вычисленных по круговому и прямоугольному контуру. Вычисление производится на основе асимптотического приближения решений задач линейной механики разрушения. Зависимость  $J_2$  интеграла от размеров контура проверяется вычислением на основе точного решения.

Вычисление  $J_1$  и  $J_2$  на основе асимптотического решения. Простейшая форма контура для вычисления J интеграла – окружность с центром в вершине трещины, опирающаяся на ее берега (рис. 1а). Используя асимптотические приближения решений задач о трещине в плоскости при растяжении и сдвиге [4], была показана справедливость следующих равенств [1, 3]

$$J_1(\Gamma) = \frac{K_I^2 + K_{II}^2}{E}, \qquad J_2(\Gamma) = -2\frac{K_I K_{II}}{E}.$$
 (2)

Данное выражение справедливо в случае ПНС, выражения для ПДС могут быть получены умножением правых частей (2) на  $1 - v^2$ .



Рис. 1. Контуры интегрирования: а) круговой контур; б) симметричный прямоугольный контур; в) замкнутый контур, не охватывающий вершину трещины

<sup>&</sup>lt;sup>(•)</sup> М.М. Фролов, frolov\_mm@spbstu.ru

Усложним задачу, рассмотрев интеграл по прямоугольному контуру (рис. 16). Разложим интегралы по всему контуру на сумму интегралов по отдельным сторонам. В силу симметрии контура интегралы по отдельным сторонам есть интегралы по симметричным промежуткам. Это позволяет использовать свойства четности/нечетности компонент напряжений и перемещений и показать, что  $J_1$  в смешанной моде равен сумме интегралов от чистых мод, потому что все смешанные слагаемые нечетны (на отрезках ЕВ и CD) или сокращаются (на отрезках ВС и DE). Вычисление слагаемых для чистых мод производится достаточно просто и дает результат

$$J_1 = \frac{K_I^2 + K_{II}^2}{E} \frac{2}{\pi} \left( \arctan \frac{a}{b} + \arctan \frac{b}{a} \right) = \frac{K_I^2 + K_{II}^2}{E} .$$
(3)

Аналогичные рассуждения для  $J_2$  показывают, что нечетны или сокращаются те слагаемые, что связаны с выражениями для чистых мод, а остаются только смешанные слагаемые. Так как вычислять интеграл все равно приходится в смешанной моде, можно упростить вычисления другим путем: на сторонах вида x = const вычислять интеграл только от четной по x части, а на сторонах y = const - только от четной по y. В итоге получим

$$J_2 = -2\frac{K_I K_{II}}{E} \frac{2}{\pi} \left( \operatorname{arctg} \frac{a}{b} + \operatorname{arctg} \frac{b}{a} \right) = -2\frac{K_I K_{II}}{E}.$$
(4)

Рассмотрим несимметричные прямоугольные контуры, получаемые из исходного сдвигом одной стороны (рис. 2). Используя, по возможности, свойства четности/нечетности подынтегральных выражений, придем к следующим результатам для контура Рис. 2a

$$J_1 = \frac{K_I^2 + K_{II}^2}{\pi E} \left( \operatorname{arctg} \frac{a}{b} + \operatorname{arctg} \frac{b}{a} + \operatorname{arctg} \frac{a + \Delta a}{b} + \operatorname{arctg} \frac{b}{a + \Delta a} \right) = \frac{K_I^2 + K_{II}^2}{E}$$
(5)

$$J_2 = -2\frac{K_I K_{II}}{\pi E} \left( \operatorname{arctg} \frac{a}{b} + \operatorname{arctg} \frac{b}{a} + \operatorname{arctg} \frac{a + \Delta a}{b} + \operatorname{arctg} \frac{b}{a + \Delta a} \right) = -2\frac{K_I K_{II}}{E}$$
(6)

Выражения для контура, показанного на рис. 26, имеют совершенно аналогичный вид, отличающийся заменой  $a + \Delta a$  на  $b + \Delta b$ . Как показывают вычисления, на результат не влияют ни форма, ни размеры, ни симметрия контура относительно вершины трещины. При использовании асимптотической части решения результаты одинаковы для любых контуров!



Рис. 2. Несимметричные прямоугольные контуры

Вычисление  $J_1$  и  $J_2$  на основе точного решения. В работах по механике конфигурационных сил (например: [2]) показывается, что в области  $\Omega$  однородного материала выполняется условие

$$\mathbf{J} = \int_{\Omega} \nabla \cdot (W\mathbf{E} - \nabla \mathbf{u} \cdot \boldsymbol{\sigma})^T \, d\Omega = \oint_{\Gamma} (W\mathbf{n} - \mathbf{T} \cdot \mathbf{u} \nabla) d\Gamma = \mathbf{0}, \qquad \mathbf{T} = \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n}.$$
(7)

Проекциями выражения (7) на оси координат трещины являются  $J_1$  и  $J_2$  интегралы. Рассмотрим область (Рис. 1в), не охватывающую вершину трещины, ограниченную составным контуром  $\Gamma = \Gamma_C \cup \Gamma_{\varepsilon} \cup \Gamma_{\delta}$ , где  $\Gamma_{\delta} = \Gamma_+ \cup \Gamma_-$  единое обозначение для берегов трещины.
Рассматривается однородный материал, следовательно, выполняется соотношение

$$\mathbf{J}(\Gamma) = \mathbf{0} \quad \rightarrow \quad J_k(\Gamma) = J_k(\Gamma_{\mathcal{C}}) + J_k(\Gamma_{\mathcal{E}}) + J_k(\Gamma_{\delta}) = \mathbf{0} \,. \tag{8}$$

Разделим интегралы  $J_k(\Gamma_c)$  и  $J_k(\Gamma_\delta)$  на две части. Первая часть  $J_k^*$  соответствует значению, полученному по асимптотическому решению, вторая  $\hat{J}_k$  - разности между точным и асимптотическим значением (поправочное слагаемое)

$$J_k(\Gamma) = J_k^*(\Gamma_{\mathbb{C}}) + \hat{J}_k(\Gamma_{\mathbb{C}}) + J_k(\Gamma_{\varepsilon}) + J_k^*(\Gamma_{\delta}) + \hat{J}_k(\Gamma_{\delta}).$$
(9)

Подстановка значений  $J_k^*(\Gamma_{\mathcal{C}})$  и  $J_k^*(\Gamma_{\delta})$ , найденных в предыдущем пункте, после сокращения и предельного перехода  $\varepsilon \to 0$  приводит к уравнению для определения поправочных значений  $\hat{J}_k(\Gamma_{\mathcal{C}}) + J_k(\Gamma_{\delta}) = 0$ , (10)

где сразу учтено  $J_k^*(\Gamma_{\delta}) = 0$ . Значения *J* интегралов на внешнем контуре  $\Gamma_C$  складываются из значения, получаемого из асимптотического решения, и поправки, которая определяется только конфигурацией берегов трещины. С учетом этого можно записать  $J_2$  в виде

$$J_{2}(\Gamma_{C}) = J_{2}^{*}(\Gamma_{C}) + \hat{J}_{2}(\Gamma_{C}) = -2\frac{K_{I}K_{II}}{E} - J_{2}(\Gamma_{\delta}).$$
(11)

Рассмотрим берега в виде прямолинейных отрезков y = 0, для которых точное решение (подробное рассмотрение которого можно найти в [5]) представляется в виде

$$\sigma_{+} = -\frac{K_{I}}{\sqrt{\pi l}} - \frac{2K_{II}}{\sqrt{\pi l}} \frac{x-l}{\sqrt{l^{2}-(x-l)^{2}}}, \qquad \sigma_{-} = -\frac{K_{I}}{\sqrt{\pi l}} + \frac{2K_{II}}{\sqrt{\pi l}} \frac{x-l}{\sqrt{l^{2}-(x-l)^{2}}}, \tag{12}$$

где введены обозначения  $\sigma_+ = \sigma_x$  – на верхнем берегу,  $\sigma_- = \sigma_x$  на нижнем берегу трещины, l – полудлина трещины. Скачок энергии деформации определяется соотношением

$$\llbracket W \rrbracket = W_{+} - W_{-} = \frac{1}{2E} (\sigma_{+}^{2} - \sigma_{-}^{2}) = 4 \frac{K_{I} K_{II}}{\pi E} \frac{x - l}{\sqrt{l^{2} - (x - l)^{2}}},$$
(13)

тогда  $J_2$  интеграл по берегам длины  $\delta$  имеет вид

$$J_2(\Gamma_{\delta}) = \int_0^{\delta} \llbracket W \rrbracket dx = 4 \frac{K_I K_{II}}{\pi E} \int_0^{\delta} \frac{(x-l) dx}{\sqrt{l^2 - (x-l)^2}} = -4 \frac{K_I K_{II}}{\pi E} \sqrt{1 - \Delta^2}, \qquad \Delta = \frac{l - \delta}{l}.$$
 (14)

Подставив данный результат в формулу (10) для поправки к  $J_2$ , можно получить точное значение  $J_2$  на внешнем контуре

$$J_2(\Gamma_C) = -2\frac{K_I K_{II}}{\pi E} \left( 1 + \frac{2}{\pi} \sqrt{1 - \Delta^2} \right).$$
(15)

Заключение. В работе получено аналитическое решение для  $J_1$  и  $J_2$  интегралов для прямоугольного контура. Совпадение полученных результатов с результатами на круговом контуре указывает на инвариантность  $J_1$  и  $J_2$  интегралов относительно формы контура. Для контура произвольной формы получено выражение (15) для  $J_2$  на основе *точного решения*, которое, в отличие от асимптотического приближения (4), зависит от размера контура  $\delta$ , что указывает на необходимость учета вкладов по берегам трещины для обеспечения его инвариантности.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Rice J.R. A path independent integral and the approximate analysis if strain concentration by notches and cracks // Journal of Applied Mechanics. – 1968. – P. 379-386.

2. Gurtin M.E., Podio-Guidugli P. Configurational forces and the basic laws for crack propagation // Journal of the Mechanics and Physics of Solids. – 1996. – Vol. 44 (6). – P. 905-927.

3. Eishen J.W. An improved method for computing the  $J_2$  integral // Engineering Fracture Mechanics. – 1987. – Vol. 26 (5). – P. 691-700.

4. Морозов Н.Ф. Математические вопросы теории трещин. – М.: Наука, 1984. – 256 с.

5. Hello G., Ben Tahar M., Roelandt J.-M. Analytical determination of coefficients in crack-tip stress expansions for a finite crack in an infinite plane medium // International Journal of Solids and Structures. -2011. - Vol. 49. - P. 556-566.

## Т.Н. Хашба<sup>1</sup>, А.С. Смирнов<sup>1,2</sup>

<sup>1</sup> Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого<sup>(•)</sup> <sup>2</sup> Институт проблем машиноведения Российской академии наук

## УСТОЙЧИВОСТЬ РАВНОВЕСИЯ КОНЕЧНОМЕРНОЙ МОДЕЛИ КОЛОННЫ ПОД ДЕЙСТВИЕМ СОБСТВЕННОГО ВЕСА

Введение. Устойчивость балочных конструкций представляет собой обширный раздел теории устойчивости упругих систем [1, 2]. Важное значение при этом имеет построение физических конечномерных моделей таких систем и анализ их устойчивости по аналогии с тем, как это часто делается в задачах теории колебаний [3, 4]. Подобные упрощенные модели состоят из сосредоточенных элементов и обладают конечным числом степеней свободы, что позволяет весьма просто выявлять условия их устойчивости, которые в свою очередь играют роль приближенного решения для исходных моделей с распределенными параметрами.

В настоящей статье строится конечномерная модель колонны с учетом собственного веса и находятся условия ее устойчивости в зависимости от числа степеней свободы модели, а также осуществляется их сопоставление с результатами из распределенной модели.





*Модель с распределенными параметрами*. Рассмотрим сначала колонну как систему с распределенными параметрами (она показана на рис. 1 вместе с ее параметрами). Следуя [1], запишем уравнение равновесия консольной балки под действием собственного веса:

$$EJv''' + q(L - x)v' = 0,$$
 (1)

где  $q = \rho F g$  – интенсивность распределенной весовой нагрузки, x – продольная координата, а v(x) – поперечное перемещение сечения балки с координатой x. Известно, что если ввести новую переменную z и пересчитать все производные по нижеследующим формулам [2]:

$$z = \frac{2}{3} \sqrt{\frac{q}{EJ}} (L-x)^3, \qquad v' = -\left(\frac{3}{2}\right)^{1/3} \left(\frac{q}{EJ}\right)^{1/3} z^{1/3} \frac{dv}{dz'},$$

$$v'' = \left(\frac{3}{2}\right)^{2/3} \left(\frac{q}{EJ}\right)^{2/3} \left(z^{2/3} \frac{d^2v}{dz^2} + \frac{z^{-1/3}}{3} \frac{dv}{dz}\right), \qquad v''' = -\frac{3}{2} \frac{q}{EJ} \left(z \frac{d^3v}{dz^3} + \frac{d^2v}{dz^2} - \frac{1}{9z} \frac{dv}{dz}\right),$$
(2)

то уравнение (1) приведется к уравнению Бесселя порядка 1/3 относительно dv/dz:

$$\frac{d^3v}{dz^3} + \frac{1}{z}\frac{d^2v}{dz^2} + \left(1 - \frac{1}{9z^2}\right)\frac{dv}{dz} = 0, \qquad \frac{dv}{dz} = AJ_{1/3}(z) + BJ_{-1/3}(z), \tag{3}$$

(•) T.H. Xam6a, hashba\_tn@spbstu.ru

где сразу же выписано и его решение при помощи функций Бесселя  $J_{1/3}(z)$  и  $J_{-1/3}(z)$ , в котором *A* и *B* – константы. Запишем граничные условия на первую и вторую производные: v' = 0 при x = 0 и EJv'' = 0 при x = L. Вычисляя далее на основе формул (2) и (3)

$$v'' = \left(\frac{3}{2}\right)^{2/3} \left(\frac{q}{EJ}\right)^{2/3} \left[ A\left(z^{2/3}J'_{1/3}(z) + \frac{z^{-1/3}}{3}J_{1/3}(z)\right) + B\left(z^{2/3}J'_{-1/3}(z) + \frac{z^{-1/3}}{3}J_{-1/3}(z)\right) \right]$$
(4)

и учитывая, что выражения в круглых скобках при A и B при  $z \to 0$  (т. е. при  $x \to L$ ) стремятся к ненулевому (но конечному) и нулевому значениям соответственно, заключаем, что второе из указанных граничных условий будет выполнено, если положить A = 0. Тогда первое граничное условие, исходя из решения (3), приводит к следующему уравнению:

$$J_{-1/3}\left(\frac{2}{3\sqrt{\delta}}\right) = 0, \qquad \delta = \frac{EJ}{qL^3}.$$
(5)

Его наименьший положительный корень  $\delta_* = 0.1276$  определяет критическое значение величины  $\delta$ , играющей роль ключевого безразмерного параметра данной задачи.

Модель с сосредоточенными параметрами. Построим теперь модель колонны с сосредоточенными параметрами, имеющую n степеней свободы. Для этого разделим балку на n участков длины l = L/n и массы  $m = \rho Fl$ . Инерционные свойства балки моделируются при помощи «схемы гантели»: масса каждого участка разносится по его краям, на которых помещаются грузы массой m/2, а сам участок заменяется твердым безмассовым стержнем. Упругие свойства балки моделируются при помощи торсионов жесткостью на поворот  $2\gamma$ , прикрепленных к краям каждого участка, и жесткость их последовательного соединения  $\gamma$  должна совпадать с жесткостью на поворот участка балки длиной l в исходной модели, т. е.  $\gamma = EJ/l$ . Остается соединить шарнирно все стержни и объединить примыкающие друг к другу торсионы в единые торсионы жесткостью  $\gamma$  и грузы в единые грузы массой m. Крайние торсионы жесткостью  $2\gamma$  ни с чем не объединяются, причем один из них соединен с неподвижным основанием, а другой ни к чему не крепится и потому не играет никакой роли. Крайние грузы массой m/2 также ни с чем не объединяются, при этом один из них попадает в неподвижный шарнир и потому не смещается. В результате будем иметь конечномерную модель в виде многозвенного математического маятника с упругими шарнирами (рис. 2).

Для выявления условий устойчивости составим потенциальную энергию системы. Принимая в качестве обобщенных координат углы отклонения стержней  $\varphi_i$  от вертикали, запишем сначала потенциальную энергию силы тяжести грузов, отсчитывая ее от положения равновесия (когда все углы  $\varphi_i$  равны нулю), а также ее квадратичную аппроксимацию:

$$\Pi_{\text{TRHK.}} = mgl \sum_{i=1}^{n-1} (n-i)(\cos\varphi_i - 1) + \frac{m}{2}gl \sum_{i=1}^{n} (\cos\varphi_i - 1) \approx \\ \approx -\frac{mgl}{4} [(2n-1)\varphi_1^2 + (2n-3)\varphi_2^2 + (2n-5)\varphi_3^2 + \dots + 3\varphi_{n-1}^2 + \varphi_n^2].$$
(6)

Далее запишем потенциальную энергию всех торсионов:

$$\Pi_{\text{ropc.}} = \frac{1}{2} (2\gamma) \varphi_1^2 + \frac{1}{2} \gamma \sum_{i=2}^{n} (\varphi_i - \varphi_{i-1})^2 = \frac{1}{2} \gamma [3\varphi_1^2 + 2\varphi_2^2 + 2\varphi_3^2 + \ldots + 2\varphi_{n-1}^2 + \varphi_n^2 - 2\varphi_1 \varphi_2 - 2\varphi_2 \varphi_3 - \ldots - 2\varphi_{n-1} \varphi_n].$$
(7)

Тогда суммарная потенциальная энергия многозвенного маятника примет вид:

$$\Pi = \Pi_{\text{TRM:}} + \Pi_{\text{TOPC.}} = \frac{mgl}{4} [(6\alpha - 2n + 1)\varphi_1^2 + (4\alpha - 2n + 3)\varphi_2^2 + (4\alpha - 2n + 5)\varphi_3^2 + \dots + (4\alpha - 3)\varphi_{n-1}^2 + (2\alpha - 1)\varphi_n^2 - 4\alpha\varphi_1\varphi_2 - 4\alpha\varphi_2\varphi_3 - \dots - 4\alpha\varphi_{n-1}\varphi_n] = \frac{mgl}{4} \boldsymbol{\varphi}^{\mathrm{T}} \mathbf{C}_n \boldsymbol{\varphi},$$
(8)

где  $\boldsymbol{\phi} = [\varphi_1, \varphi_2, ..., \varphi_n]^T$  – столбец обобщенных координат, а обезразмеренная матрица квазиупругих коэффициентов  $\mathbf{C}_n$ , являющаяся трехдиагональной и обладающая регулярной структурой, вместе с безразмерным параметром  $\alpha$  имеют следующие представления:

$$\mathbf{C}_{n} = \begin{bmatrix} 6\alpha - 2n + 1 & -2\alpha & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ -2\alpha & 4\alpha - 2n + 3 & -2\alpha & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & -2\alpha & 4\alpha - 2n + 5 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 4\alpha - 3 & -2\alpha \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -2\alpha & 2\alpha - 1 \end{bmatrix}, \qquad \alpha = \frac{\gamma}{mgl}. \tag{9}$$

Подчеркнем, что эту матрицу следует формировать по главной диагонали с обоих концов, добавляя с увеличением n ее внутренние элементы. Например, матрицы  $C_2$  и  $C_3$  имеют вид:

$$\mathbf{C}_2 = \begin{bmatrix} 6\alpha - 3 & -2\alpha \\ -2\alpha & 2\alpha - 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C}_3 = \begin{bmatrix} 6\alpha - 5 & -2\alpha & 0 \\ -2\alpha & 4\alpha - 3 & -2\alpha \\ 0 & -2\alpha & 2\alpha - 1 \end{bmatrix}. \tag{10}$$

Однако для случая n = 1 необходимо записать отдельное выражение. В самом деле,

$$\Pi = -\frac{mgl}{4}\varphi_1^2 + \frac{1}{2}(2\gamma)\varphi_1^2 = \frac{mgl}{4}(4\alpha - 1)\varphi_1^2 = \frac{mgl}{4}c_1\varphi_1^2, \qquad c_1 = 4\alpha - 1.$$
(11)

Определяя условия устойчивости (т. е. условия положительной определенности матрицы  $C_n$ ) при помощи критерия Сильвестра [5], можно установить критическое значение параметра  $\alpha$ при различных n. Принимая во внимание, что связь параметров  $\delta$  и  $\alpha$  с учетом формул l = L/n,  $m = \rho Fl$  и  $\gamma = EJ/l$  дается выражением  $\delta = \alpha/n^3$ , можно вычислить и критическое значение параметра  $\delta$ . В табл. 1 приводится это значение в зависимости от числа степеней свободы модели (при n от 1 до 5) и относительная погрешность результата в сравнении со значением  $\delta_* = 0.1276$  из исходной распределенной модели. Видно, что при увеличении nэта погрешность постепенно снижается, как этого и следовало ожидать. При этом точность, вполне достаточную для практических приложений, уже обеспечивает модель всего с тремя степенями свободы, где погрешность немногим превышает 6%, а модель с пятью степенями свободы и вовсе дает совершенно незначительную погрешность, чуть большую 2%.

Табл.1. Критическое значение параметра  $\delta$  и погрешность результата при различных n

Число степеней свободы модели <i>n</i>	1	2	3	4	5
Критическое значение параметра $\delta$	0.25	0.1479	0.1355	0.1319	0.1303
Погрешность ( $\delta - \delta_*$ )/ $\delta_* \cdot 100\%$	95.9%	15.9%	6.2%	3.4%	2.1%

Заключение. Данное исследование демонстрирует важность построения конечномерных моделей с сосредоточенными параметрами в задачах об устойчивости равновесия систем с распределенными параметрами. Такие модели позволяют получить оценку для критического значения ключевого безразмерного параметра задачи, причем эта оценка обладает хорошей точностью уже при достаточно небольшом числе степеней свободы. Полученные результаты интересны в теоретическом отношении, а также они полезны для практических приложений.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Динник А.Н. Устойчивость упругих систем. – М.: ОНТИ НКТП СССР, 1935. – 186 с.

2. Тимошенко С.П. Устойчивость упругих систем. – М.: ГИТТЛ, 1955. – 568 с.

3. Бабаков И.М. Теория колебаний. Изд. 4-е, испр. – М.: Дрофа, 2004. – 591 с.

4. Смирнов А.С., Дегилевич Е.А. Колебания цепных систем. – СПб: Политех-Пресс, 2021. – 246 с.

5. Хашба Т.Н., Смирнов А.С. Устойчивость равновесия многозвенных маятников // Молодежь и наука: актуальные проблемы фундаментальных и прикладных исследований: Материалы V Всероссийской национальной научной конференции молодых ученых, Комсомольск-на-Амуре, 11-15 апреля 2022 г. – 2022. – Ч. 2. – С. 95-97.

Петербургский государственный университет путей сообщения Императора Александра I<sup>(•)</sup>

## ПРОГНОЗ РАБОТЫ ВЕРХНЕГО СТРОЕНИЯ ЖЕЛЕЗНОДОРОЖНОГО ПУТИ С УЧЕТОМ ИЗМЕНЕНИЯ ХАРАКТЕРИСТИК СОПРОТИВЛЕНИЯ УСТАЛОСТИ РЕЛЬСОВОЙ СТАЛИ В РЕЗУЛЬТАТЕ ИЗНОШЕННОСТИ РЕЛЬСОВ

В настоящее время для современных конструкций железнодорожного пути и существующих параметрах конструкции подвижного состава соблюдение требований прочности элементов верхнего строения пути является необходимым, но не достаточным условием обеспечения надежной работы пути. В условиях увеличения нагруженности конструкций с развитием тяжеловесного и скоростного движения показатели долговечности, наряду с прочностью и надежностью, становятся определяющими. Введение тяжеловесных и длинносоставных поездов с 2010 года по 2019 год вновь привело к росту дефектности рельсов по 11 коду на 63% (с 9039 шт. в 2010 году до 24828 шт. в 2019 году). Это обусловливает разработку и внедрение вероятностных методов расчета на прочность при переменных напряжениях, учитывающих случайный характер действующих нагрузок и вариацию характеристик сопротивления усталости материалов и деталей, на основе проведения комплекса теоретических и экспериментальных исследований [1].

Применительно к рельсам и другим металлическим элементам железнодорожного пути для обеспечения характеристик сопротивления усталости в России и странах СНГ реализован и практикуется подход недопущения в проектируемой конструкции возможности появления циклических напряжений с амплитудами, превышающими ее предел выносливости.

Вопреки стремлению обеспечить отсутствие возможности появления циклических напряжений с амплитудами, превышающими ее предел выносливости, нормирования требований к прочности и динамическим качествам для рельсов и других металлических элементов железнодорожного пути, в системе «колесо-рельс» имеет место возникновение циклических напряжения с амплитудами, превышающими предел выносливости, поэтому формирование надежных прогнозов долговечности с целью недопущения преждевременного образования усталостных трещин, последующего их развития, разрушения элементов, недопущения повышения вероятности аварий подвижного состава является одновременно необходимой и трудоемкой задачей, требующей большого объема экспериментальных исследований, наличия стендов и оборудования, сопровождающимися высокими затратами и длительными сроками проведения испытаний для получения полных и достоверных данных для прогнозирования долговечности рельсов и других металлических элементов верхнего строения железнодорожного пути. Процессы фрикционного взаимодействия, протекающие в контакте, существенно зависят от теплового и температурного режимов. Величина температур в тяжелонагруженных открытых узлах трения может достигать и превышать температуры плавления материалов [2]. При вписывании вагона в криволинейные участки пути контактные нагрузки в средней части гребня колеса могут достигать 2000 МПа [2, 5-8]. Методы определения долговечности и ресурса несущих элементов подвижного состава и пути рассмотрены в работах отечественных и зарубежных ученых [4, 9].

Основной алгоритм расчетов пути на прочность принятый в настоящее время, основывается на ряде допущений и предпосылок, выработанных в процессе эволюции Правил расчетов пути на прочность и сформулированных в Правилах 1954 г. следующим

<sup>&</sup>lt;sup>(•)</sup> В.А. Черняева, chernyaeva@pgups.ru

образом: все характеристики пути, входящие в расчет, в том числе допускаемые напряжения, принимаются за неслучайные величины; при расчете рельса на изгиб за фактическое допускаемое напряжение принимается возможное значение условного предела текучести рельсовой стали; допускаемые динамические напряжения растяжения в кромках подошвы рельсов в прямых и кривых участках, в переднем вылете и переводных кривых стрелочных переводов в рельсах Р50 и тяжелее приняты неслучайными величинами – 240 МПа; напряжения в кромках остряков стрелочных переводов – 275 МПа; неровность пути учитывается как фактор возникновения дополнительного инерционного вертикального давления.

Износ рельсов на величину 0, 3, 6, 9 мм учитывается при определении коэффициента относительной жесткости рельсового основания и рельса. В приведенной методике коэффициент является фактором, определяющим изменение величины изгибающего момента и прогиба рельса под действием эквивалентной силы для изгибающего момента и эквивалентной силы для давления на шпалу и для прогиба, соответственно; максимального напряжения в подошве рельса от его изгиба под действием изгибающего момента; максимальных напряжение в шпале на смятие под подкладкой (при деревянной шпале) и в прокладке при железобетонной шпале; максимальных напряжений в балласте под шпалой и т.д.

При выборе критериев оценки параметров напряженно-деформированного состояния необходимы критерии оценки полученных расчетом или экспериментальным путем, параметров не только по первому критическому состоянию – критерии прочности и устойчивости, но также критерии оценки по второму критическому состоянию – критерию долговечности. В основу разработки этих критериев для рельсов принимается кривая усталости Веллера, а также математическое выражение, описывающее усталостную кривую:

$$\sigma_0^m \cdot n_0 = G = const,\tag{1}$$

где  $\sigma_0$  - напряжения в материале, образующиеся при нагружении; m – степенной показатель, зависящей от материала;  $n_0$  – число циклов загрузки, необходимое для достижения усталостного ресурса материала.

Значение *G* называется ресурсом уталостной прочности материала, а значение  $D = \sigma^m$  – это показатель повреждаемости, характеризующий условия нагружения детали, изготовленной из этого материала.

В качестве критерия прочности  $\sigma_{n}$  для материала принимается значение напряжения с кривой усталости, при малом (до 140) числе циклов нагрузки.

С учетом формулы (1) можно получить другое известное соотношение, позволяющее определять для того же материала число циклов  $n_1$ , необходимое для достижения усталостного ресурса при напряжениях  $\sigma_1$ :

$$\sigma_0^m \cdot n_0 = \sigma_1^m \cdot n_1. \tag{2}$$

Выражение (2) может быть положено в основу методики по определению критериев долговечности для элементов пути, изготовленных из различных материалов.

Сопротивление материалов (предел текучести на разрыв (временное сопротивление), условный предел текучести, длительный предел выносливости, ограниченный предел выносливости) в условиях работы пути под подвижной нагрузкой носит динамический характер; кроме того, это сопротивление происходит в различных меняющихся условиях, в частности температурных, и при разной степени изношенности конструкции и элементов ее составляющих. Необходимо учитывать, что для разных условий будут различные допускаемые случаи, и нельзя без анализа утверждать, что самый неблагоприятный случай будет при самом большом действующем напряжении [3].

Далее рассмотрим факторы, влияющие на изменение характеристик сопротивления рельсовой стали действию циклических контактных нагрузок и, как следствие, влияющих на долговечность рельсов в процессе эксплуатации: контакт изношенных поверхностей колеса и рельса может иметь произвольную форму; изменение мест концентрации напряжений; изменение размера, в том числе за счет износа конструкции; изменение качества поверхности; изменение ассиметрии цикла нагружения; изменение характеристик эксплуатационной нагруженности (напряжений, деформации, температуры); накопление остаточных напряжений в конструкции; изменение частоты колебаний. Если элементы работают при ограниченном пределе выносливости следует учитывать, что, если изменение частоты загружения элемента и, следовательно, времени действия нагрузки) в довольно широких пределах от 300 до 30 000 циклов в минуту вызывает в рельсовой стали небольшие (на 2...4% повышение предела выносливости), то при количестве загружений менее 60 циклов в минуту предел выносливости заметно уменьшается, а запасы по долговечности, оцениваемые по числу циклов до разрушения в 1,5...2,0 раза меньше, чем в конструкциях, нагружаемых с высокой частотой [10]. Изменение пауз между циклами нагружений (между может оказывать заметное влияние. Результаты поездами) экспериментальных исследований, проведенных учеными ЛИИЖТа – ПГУПСа в 80-е годы ХХ века, показали, что микроневровности бандажа в отношении деформаций как бы удваивают число циклов приложения нагрузки, в отдельных случаях носящей знакопеременный характер.

При наличии кривых усталости, учитывающих влияние вышеизложенных факторов и кривой плотности вероятности появления тех или иных значений, можно будет определить число циклов, до достижения которого обеспечена ограниченная прочность.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Методика оценки воздействия подвижного состава на путь по условиям обеспечения надежности: утв. распоряжением ОАО «РЖД» от 22.12.2017 № 2706р. Доступ через СПС КонсультантПлюс.

2. Жаров И.А., Комаровский И.А., Захаров С.М. Моделирование изнашивания пары гребень колеса - боковая поверхность головки рельса в кривых малого радиуса // Вестник ВНИИЖТа – 1998. – № 2 – С. 15-18.

3. Шахунянц Г.М. Железнодорожный путь – М: Трансжелдориздат, 1961. – 615 с.

4. Кочергин В.В., Буханцев А.А., Панкратова И.Г., Русанов О.А. Опыт обеспечения прочности несущих конструкций локомотивов и моторвагонного подвижного состава // Вестник ВНИИЖТа – 2019. – № 2 (78). – С. 67-73.

5. Жаров И.А., Комаровский И.А., Захаров С.М. Закономерности изнашивания при качении с поперечным проскальзыванием // Трение и износ – 1999. – № 3 (20). – С. 306-312.

6. Комаровский И.А., Жаров И.А. Моделирование изнашивания пары гребень колеса - рельс на роликах при поперечном проскальзывании // Трение и износ – 1997. – № 2 (18). – С. 174-180.

7. Марков Д.П. Требования к машинам для испытания на износостойкость рельсовых и колесных сталей // Вестник ВНИИЖТа – 1994. – № 3. – С. 22-26.

8. Кротов С.В. Повреждаемость колесных пар и расчетная оценка несущей способности соединения колеса с осью при повышении нагрузки на ось вагона: дис. ... канд. техн. наук: 05.22.07/ РГУПС. Ростов-на-Дону, 1996. 208 с.

9. Махутов Н.А., Резников Д.О., Коссов В.С., Оганьян Э.С., Волохов Г.М., Овечников М.Н., Протопопов А.Л. Методы определения ресурса нерезервируемых несущих элементов подвижного состава и пути // Бюллетень ОУС ОАО «РЖД» – № 3. – 2017. – С. 19-39.

10. Ратнер С.И. Разрушение при повторных нагрузках. – М: Оборонгиз, 1959. – 352 с.

Ф.В. Шаделко, Р.В. Федоренко, В.С. Модестов Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого<sup>(•)</sup>

## СОЗДАНИЕ ЦИФРОВОГО ДВОЙНИКА КОНСТРУКЦИЙ ХРАНИЛИЩА ОТРАБОТАННОГО ЯДЕРНОГО ТОПЛИВА И ТРАНСПОРТНО-УПАКОВОЧНОГО КОМПЛЕКТА ДЛЯ СЛУЧАЯ ПАДЕНИЯ САМОЛЕТА

Введение. Обеспечение безопасного хранения отработанного ядерного топлива является неотъемлемой частью ядерного топливного цикла. В таких условиях необходимо гарантировать прочность и герметичность транспортно-упаковочных комплектов при всех типах внешних воздействий, в том числе экстремальных. В настоящей работе рассмотрено событие падения тяжелого самолета Airbus со скоростью 100 м/с на хранилище отработанного ядерного топлива и находящихся внутри транспортно-упаковочных комплектов.

Цели и задачи работы. Данная работа нацелена на получение расчетных данных при возникновении аварийных условий, связанных с падением самолета на хранилище отработанного ядерного топлива (далее – ХОЯТ) и на находящихся внутри транспортноупаковочных комплектов (далее – ТУК).

Описание методов исследования. Моделирование выполнено методом конечных элементов с использованием программного комплекса ABAQUS [1].

В расчетах используется нелинейная модель деформирования и прочности бетона "Concrete damaged plasticity" (далее – CDP) [2]. На рис. 1 показаны диаграммы деформирования бетона на растяжение и сжатие.



Рис. 1. а) Диаграмма деформирования бетона при одноосном растяжении; б) диаграмма деформирования бетона при одноосном сжатии

Для моделирования сталей в расчетах используется билинейный закон пластичности с изотропным упрочнением. Учет влияния изменения скоростей деформации в стали проводится с помощью введения в модель закона Купера-Саймондса.

Моделирование нагрузки от самолета проводится с применением метода Риеры, позволяющим заменить моделирование полномасштабной модели самолета на эквивалентную нагрузку (давление), равную реакции абсолютно жесткой плиты на воздействие реального самолета с заданной скоростью [3].

<sup>&</sup>lt;sup>(•)</sup> Ф.В. Шаделко, shadelko\_fv@spbstu.ru



Рис. 2. а) Постановка задачи при ударе в стену; б) постановка задачи при ударе в крышу

Объект исследования. В данном исследовании рассматриваются типовые конструкции ХОЯТ и ТУК. Железобетонные конструкции состоят из бетона класса C35/45 и арматуры класса A500, для ТУК используется сталь 09Г2С, для двигателей сталь 35, характеристики материалов приняты согласно [2, 4, 5].

При моделировании удара самолета Airbus массой 590т в ХОЯТ кривая Риера получена без учета двигателей, поэтому расчетная модель состоит из явной модели двигателей и давления, имитирующего нагрузку от фюзеляжа и крыльев самолета. На поверхности фундаментной плиты здания задана жесткая заделка.

На рис. 2 представлены изображения расчетной модели с расположением двигателей самолета.

Наихудший сценарий падения самолета в крышу состоит в значительных деформациях бетона и быстром разрушении арматуры, что приводит к отколу и падению цельных кусков железобетонных конструкций. Рассмотрен случай падения цельной железобетонной плиты на ТУК. В качестве граничных условий используется жесткое закрепление ТУК за основание. В системе действуют две основные нагрузки: ускорение свободного падения и начальная скорость железобетонной плиты 18.69 м/с, с учетом того, что она находиться на высоте 20 м, рис. 3.



Рис. 3. Постановка задачи при обрушении железобетонной плиты на ТУК

*Результаты.* На рис. 4 представлены поля распределения общей скалярной меры поврежденности бетона (SDEG) для различных расчетных случаев в конце падения.

Считается, что бетон полностью разрушен при превышении параметра SDEG значения 0.9. Конечные элементы, для которых параметр SDEG превышает данное значение, окрашены в серый цвет; они не препятствуют проникновению корпуса самолета/двигателей внутрь здания, поскольку их жесткость незначительна.



Рис. 4. а) Распределение скалярной меры поврежденности в бетоне (SDEG) при ударе в стену; б) распределение скалярной меры поврежденности в бетоне (SDEG) при ударе в крышу

На рис. 5 показано распределение напряжений и пластических деформаций в ТУК при падении железобетонной плиты. б)







Рис. 5. а) Распределение интенсивности напряжений в ТУК; б) распределение пластических деформаций в ТУК

Выводы. Хранилище отработанного ядерного топлива в случае падения тяжелого самолета Airbus теряет несущую способность. Необходимо обеспечение безопасности ТУК в условиях хранения на открытой площадке. В результате падения железобетонной плиты на ТУК возникают пластические деформации на поверхности крышки ТУК величиной около 2%, в данном случае прочность ТУК обеспечена.

### ЛИТЕРАТУРА

1. Abaqus 2016 Theory Guide – Dassault Systems, 2016.

2. EN 1992-1-1 (Eurocode 2) - Design of concrete structures - Part 1-1: General rules and rules for buildings.

3. Бирбраер А.Н., Роледер А.Ю. Экстремальные воздействия на сооружения. СПб.: Изд-во Политехнического ун-та, 2009. – 594 с.

4. EN 206-1 Concrete. Part 1: Specification performance, production, and conformity.

5. ПНАЭ Г-7-002-86. Нормы расчета на прочность оборудования и трубопроводов атомных энергетических установок. М., Энергоатомиздат, 1989 г.

УДК 533.6

# К.К. Забелло, Н.А. Щур Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого<sup>(•)</sup>

## ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ДИНАМИКИ КОМАРА С ЗАДАННЫМИ КИНЕМАТИЧЕСКИМИ ПАРАМЕТРАМИ ДВИЖЕНИЯ КРЫЛЫШЕК

Введение. На сегодняшний день существует целый класс задач – задач биоморфного движения, вызываемого крупномасштабной деформацией частей тела или тела целиком. В данных задачах изучается взаимодействие между движущимся (или деформирующимся) твердым телом (системой тел) и потоком жидкости или газа. Особый интерес представляет механика полета насекомых. Полет насекомых значительно экономичнее полета самолетов в отношении затрачиваемой энергии. Так, например, саранча за час полета теряет примерно 0,8% своей массы [1]. Основным «горючим» у нее служит жир. Реактивный самолет за это же время полета теряет около 12% своей массы в виде топлива. Явные преимущества имеют насекомые и по величине массы, приходящейся на единицу мощности. Кроме того, насекомые имеют несомненные преимущества в маневренности перед летательной техникой. В дополнении к этому они способны, в отличие от самолетов, взлетать без разбега и садиться без пробега, а в отличие от вертолетов совершать взлет и посадку с любой по форме и не обязательно горизонтально расположенной поверхности. Таким образом, изучения данного вида движения является перспективным направлениям развития воздушных летательных аппаратов.

*Целью* настоящей работы является сопряженный расчет течения воздуха вблизи комара и динамики его полета с заданными кинематическими параметрами движения крылышек.

Постановка задачи и методика расчета. Рассматривается полет комара вида Culex quinquefasciatus (муж.) с длиной крылышек 4 мм и средней длиной хорды в 0.8 мм. Масса комара, соответствующая данному размеру крыльев, составляет 2.7 мг. В начальный момент времени комар и среда предполагаются неподвижными.

В работе осуществляется совместное решение 6 уравнений динамики и системы уравнений Навье-Стокса. Характерное число Рейнольдса, посчитанное по средней длине хорды крыла и среднеквадратичной скорости кончика крыла, составляет 120, что соответствует ламинарному режиму течения.

Кинематика движения крыльев комара является суперпозицией двух колебательных движений: крутильного и махового, полученных в результате обработки замедленной видео съемки полета комара [2]. Определяющими параметрами крутильного колебания являются (рис.1 (а)): углы закрутки у основания ( $\alpha_{base}$ ) и кончика ( $\alpha_{tip}$ ) крыла, а также ось кручения, положение которой задается углом девиации ( $\theta$ ). Маховое движение описывается углом ( $\varphi$ ) взмаха. В работе используются две кинематические модели, аппроксимирующие экспериментальные зависимости гармоническими функциями (рис.1(б, в, г)). Отличие первой модели (упрощенной) от второй (усложненной) заключается в пренебрежении углом закрутки у основания крыла, а также большей амплитудой закрутки кончика крыла. Угол закрутки от основания до кончика крыла меняется линейно. В силу незначительности изменение угла девиации, в обеих моделях он полагается равным нулю.

Учет движения границ расчетной области осуществляется с использованием оригинального алгебраического алгоритма деформации расчетной сетки. Данный алгоритм

<sup>&</sup>lt;sup>(•)</sup> К.К. Забелло, kosnay@mail.ru

является модернизацией способа деформации, предложенного в работе [3]. Реализация алгоритма и расчеты проведены с использованием коммерческого пакета ANSYS Fluent. В силу ограничений алгоритма деформации расчет по второй кинематической модели выполнялся для сферы с крыльями. Предварительно был проведен расчет, показавший незначительное влияния геометрии тела на гидродинамические силы (рис. 3 (а)).



Рис. 1. а) Углы, определяющие кинематику движения крыла комара: α – угол изгиба крыла, φ – угол взмаха крыла, θ – угол девиации оси изгиба. б-г) Изменение углов изгиба кончика (α<sub>tip</sub>) и основания (α<sub>base</sub>) крыла, а также угла взмаха (φ) в течение периода колебания (T) крыла для двух кинематических моделей. Черной линии соответствует данные из работы [2].

Результаты расчетов и обсуждение. На рис. 2 иллюстрируются отдельные результаты расчетов по первой кинематической модели. Механизм создания подъемной силы у комара напоминает возникновение продольной силы при коньковом ходе. Гидродинамическая сила при взмахе направлена в основном перпендикулярно плоскости крыла, как и силы реакции опоры для лезвия конька. Таким образом, вращение крыла при взмахе обеспечивает наличие положительной, вертикальной составляющей гидродинамической силы.



Рис. 2. Визуализация вихрей на крылышке полем безразмерной завихренности в различные фазы колебания и график изменения подъемной силы в течение всего периода (Т). *с*<sub>*m*</sub>- средняя длина хорды крыла, *U*<sub>*ref*</sub> – среднеквадратичная скорость кончика крыла.

Максимум гидродинамической силы наблюдается при максимальной скорости кончика крылышка (гребке), при этом угол атаки минимален, а сила, действующая на крыло, имеет наибольшую вертикальную составляющую (рис. 2). Обтекание при гребке характеризуется образованием вихря на передней кромке крылышка, который, согласно теореме Жуковского, напрямую связан с подъемной силой. Данный вихрь зарождается в момент супинации (вращение крыла относительно оси кручения) и существует в течение всего гребка, к концу которого он срывается. При возвратном движении картина течения повторяется, но уже на другой стороне крылышка.

В случае использования второй кинематической модели (усложненной) наблюдается увеличение максимума подъемной силы за период, а также появление двух локальных минимумов (рис. 3а). Кручение крыла в крайней точке взмаха создает вблизи нижней кромки мощную рециркуляционную зону, что приводит к появлению второго локального минимума в подъемной силе.

Был проведен ряд параметрических исследований для первой кинематической модели по результатам, которых было установлено, что подъемная сила пропорциональна квадрату частоты (рис.3б). Также определена характерная частота – 820 Гц, обеспечивающая зависание комара. Полученное значение близко к результатам экспериментальных измерений в работе [1] – 719 ± 59 Гц. Экспериментальные данные из других статьей лежат в широком диапазоне от 456 [4] до 1000 [5] Гц. Таким образом, полученное значение попадает в диапазон экспериментальных данных, что говорит о правомерности используемой модели.



Рис. 3. а) Изменение подъемной силы за период колебания (Т) для разных форм тела и кинематических моделей движения крылышек. б) Зависимость средней подъемной силы от частоты колебаний крылышек. Выделена частота, при которой средняя подъемная сила соответствует силе тяжести комара

Заключение. Разработана вычислительная модель полета комара с предписанным движением крылышек. Показан механизм создания подъемной силы. Установлено, что подъемная сила пропорциональна квадрату частоты. Определена характерная частота в 820 Гц, обеспечивающая зависание комара. Полученное значение попадает в диапазон экспериментальных данных.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Свидерский В.Л. Полет насекомого. – М.: Наука, 1980. – 136 с.

2. Bomphrey, R., Nakata, T., Phillips, N. et al. Smart wing rotation and trailing-edge vortices enable high frequency mosquito flight // Nature. – 2017. – Vol. 544. – P. 92–95

3. Щур, Н. А. Численное исследование свободных и вынужденных колебаний тел в потоке // дис. : канд. физ.-мат. наук : 01.02.05 – СПб., 2008. – 105 с.

4. Kim, Dongmin & DeBriere, Terry & Cherukumalli, Satish & White, Gregory & Burkett-Cadena, Nathan. (2021). Infrared light sensors permit rapid recording of wingbeat frequency and bioacoustic species identification of mosquitoes // Scientific Reports. – 2021. – Vol. 11 (1). – Article number. 10042.
5. Benjamin J. Arthur, Kevin S. Emr, Robert A. Wyttenbach, Ronald R. Hoy; Mosquito (*Aedes aegypti*) flight tones: Frequency, harmonicity, spherical spreading, and phase relationships // J. of Acoustical Society of America. – 2014. – Vol. 135 (2). – P. 933–941.

УДК 612.13

## Л.В. Мальсагова, Л.Г. Тихомолова Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого<sup>5</sup>

## ИССЛЕДОВАНИЕ СТРУКТУРЫ ТЕЧЕНИЯ В МОДЕЛИ ОТВЕТВЛЕНИЯ СОСУДИСТОГО ПРОТЕЗА ОТ АРТЕРИИ МЕТОДОМ УЛЬТРАЗВУКОВОЙ ВЕКТОРНОЙ ВИЗУАЛИЗАЦИИ

Введение. Атеросклероз артерий нижних конечностей проявляется снижением кровоснабжения, до полного его отсутствия (в запущенных случаях). Для восстановления кровотока в обход закупоренного участка артерии проводится операция шунтирования. В первый год после операции в 15-50% случаев происходит зарастание протеза (шунта) в зоне анастомоза (месте соединения артерии и протеза) [1-3]. Возможной причиной зарастания шунта является гиперплазия интимы [2,3]. Гиперплазия интимы (рис. 1) – явление избыточного роста внутреннего слоя артерий - интимы. Предполагаемыми факторами, влияющими на образование гиперплазии интимы, являются особенности локальной гемодинамики: скорость кровотока, распределение зон стагнации (застоя) и отрыва потока [3].



Рисунок 1. Бедренно-подколенное шунтирование: а-схема ответвления шунта от бедренной артерии, б- зарастание анастомоза в месте соединения шунта и ОБА

*Целью работы* является получение экспериментальных данных о структуре пульсирующего течения в модели ответвления протеза от бедренной артерии при различной доле расхода в протез методом ультразвуковой векторной визуализации.

<sup>&</sup>lt;sup>5</sup> Л.Г. Тихомолова, ludmila060495@mail.ru

Экспериментальная установка. Эксперимент проводился в лаборатории гидродинамики кровообращения Высшей школы прикладной математики и вычислительной физики на установке (рис. 2), которая состоит из замкнутого гидродинамического контура (1), контейнера с моделью (2), ультразвукового датчика (3), который подключен к сканеру Mindray Resona 7, насосного блока, состоящего из 5 последовательно подключенных насосов (4), двух датчиков электромагнитного расходомера (5), сигнал с которых идет на электромагнитный расходомер и обрабатывается компьютером, демпфера (6), и двух регуляторов расхода (7).



В контейнер (2) помещается модель анастомоза и заливается тканеимитирующим материалом на основе агар-агаровой смеси с добавлением графита, для имитации тканей, окружающих сосуды. В качестве кровеимитирующей жидкости используется 36% раствор глицерина. Плотность жидкости  $\rho = 1050$  кг/м<sup>3</sup>, коэффициент динамической вязкости  $\mu = 3.5 \cdot 10^{-3}$  Па·с.

Модель ответвления протеза от бедренной артерии (рис. 3) была получена путем осреднения размеров 25 персонализированных моделей, полученных на основе данных МСКТ ангиографии. Внутренний диаметр общей бедренной артерии 6 мм, глубокой бедренной артерии 4 мм и протеза 8 мм. Толщина стенки модели 1 мм.

Максимальное входное число Рейнольдса Re<sub>max</sub> =1000, которому соответствует максимальный Q<sub>in\_max</sub>=18.9 мл/с. Моделируются три кривые расхода в протез 0.3, 0.5, 0.7 от входного (рис. 4). На гидродинамическом стенде моделируется как положительная (верхняя), так и отрицательная (нижняя) полуволны кривой расхода, соответствующие упрощенной физиологической кривой расхода в бедренной артерии.



Рис. 4. Расходные кривые при трех отношениях расхода на выходе протеза к расходу во входном сосуде – равных 0.3, 0.5 и 0.7

Методика. Экспериментальные данные получаются в режиме векторной визуализации Vector Flow. Минимальная частота сканирования ультразвуковым датчиком составляет 3,6 МГц. Результатом работы является видеофайл двумерного векторного поля скорости (с частотой 500Гц), с возможностью воспроизведения видеофайла от 1/7 до 1/200 от реального времени записи, а также изменения длины векторов и их плотности.

В данной работе для получения векторного поля скорости ультразвуковой датчик закреплялся на державке над моделью анастомоза в двух положениях (рис. 3): 1 – на участке входа (параллельно оси входного участка), 2 – на участке шунта (под углом 45° к оси входного участка), красным пунктиром обозначены сечения, в которых снимались профили продольной скорости.

Для построения профиля скорости записывались значения модуля вектора скорости (V) и угол его наклона относительно плоскости датчика ( $\alpha$ ), и по формуле  $V_x = V * cos\alpha$  находились значения продольной скорости. Векторные поля скорости и профили продольной скорости регистрировались в моменты максимумов прямого и обратного тока, в моменты времени 0.27T и 0.55T соответственно, где T – время цикла, в данном случае T = 1 с.

*Результаты.* В качестве примера на рис. 5 представлены векторные поля скорости на входном участке и в шунте при 50% доле расхода в шунт в момент максимального прямого тока. Видно, что во входном участке течение преимущественно однородное. В шунте в момент ускорения потока видно образование вихревой зоны.



Рис. 5. Двумерное векторное поле скорости на участках: а – входном, б – в шунте в момент времени максимального расхода при равной доле при соотношении расхода в шунте ко входному,

$$Q_{sh_max}/Q_{in_max} = 0.5$$

На рис. 6 для разных значений параметра  $Q_{sh_max}/Q_{in_max}$  представлены профили скорости, обезразмеренные на входную среднерасходную среднюю по циклу скорость:  $V_{TAV} = \frac{1}{T} \int V_x(t) dt$ . По графикам видно, что в шунте в момент максимума прямого тока для наименьшего расхода в шунт ( $Q_{sh_max}/Q_{in_max} = 0.3$ ) зона обратного тока максимальна. В минимум расхода для всех случаев наблюдается обратное течение.

Выводы. Проведено исследование пульсирующего течения в модели ответвления протеза от бедренной артерии при различной доле расхода в протез новым методом ультразвуковой векторной визуализации Vector Flow, который реализован на сканере Mindray Resona 7. В ходе экспериментального исследования в двух сечениях и в два момента времени для трех долей расхода в шунт были получены и проанализированы профили и векторные поля скорости. В протезе обнаружено вихревое рециркуляционное течение, которое локализуется у внешней стенки шунта ниже его ответвления от сосуда. Длина зона рециркуляции, локализованной у внешней стенки протеза, в фазу прямого потока достигает размеров нескольких калибров. В фазу обратного потока зона рециркуляции отсутствует. С

увеличением доли расхода в протез зона рециркуляции уменьшается, максимальные ее размеры обнаружены при 30% расходе в нем.



Рис. 6. Обезразмеренные на скорость V<sub>TAV</sub> профили при разных расходах в протезе: в сечении 1 (Q<sub>in</sub>) и в сечении 2 для разных долей расхода в протез

Работа выполнена при поддержке Российского научного фонда (грант № 20-65-47018) и при технической поддержке ООО «Миндрей Медикал Рус» и ООО «Сонар-Медикал».

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Закеряев А.Б., Виноградов Р.А., Матусевич В.В., и др. Бедренно-подколенное шунтирование: от истоков до наших дней. Вестник Национального медико-хирургического Центра им. Н.И. Пирогова 2021, т. 16, № 3 – С. 57-60.

2. Швальб П.Г., Калинин Р. Е., Ухов Ю. И. Клинические наблюдения гиперплазия интимы как причины рестеноза после хирургического лечения больных облитерирующим атеросклерозом артерий нижних конечностей. Российский медико-биологический вестник им. академика И.П. Павлова.- 2007.- № 2.- С. 107-114.

3. Курьянов П.С., А.С. Разуваев, В.Н. Вавилов. Гиперплазия интимы в зоне сосудистого анастомоза. Ангиология и сосудистая хирургия. – 2008. – № 14(4). – С. 146-151.

УДК 612.13

# А.В. Машошина, Д.Э. Синицына Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого <sup>(•)</sup>

## ЧИСЛЕННОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ СТРУКТУРЫ ЗАКРУЧЕННОГО ТЕЧЕНИЯ В МОДЕЛИ КРОВЕНОСНОГО СОСУДА

Введение. Клинические исследования показывают, что в большинстве кровеносных сосудов течение крови является закрученным. Закрутка формируется в сердце и поддерживается сосудами за счет кривизны сосудистого русла и винтового типа расположения тканей сосудистой стенки, что подтверждается большинством клинических исследований [1-3]. В частности, в работе [4] авторы показали, что у 97% обследуемых добровольцев (42 здоровых пациента) в большинстве сосудов присутствует закрученный кровоток.

<sup>&</sup>lt;sup>(•)</sup> Д.Э. Синицына, sinicina.daria@yandex.ru

*Мотивацией* к настоящей работе является получение данных о структуре закрученного течения в модели кровеносного сосуда в широком диапазоне чисел Рейнольдса ( $Re = \frac{\rho DV}{\mu}$ , где  $\rho$  – это плотность и  $\mu$  –коэффициент динамической вязкости жидкости, D – диаметр сосуда, V – среднерасходная скорость потока).

Постановка задачи и методика исследования. На основе уравнений Навье-Стокса численно моделируется стационарное закрученное течение в модели сосуда (цилиндрическая трубка диаметром d = 6 мм, длиной l = 20 см) в предположении о ламинарном характере кровотока. Закрученность течения возникает за счет завихрителя на входе, который представляет собой скрученную ленту с поворотом на  $180^{\circ}$  между входной и выходной кромками. Расчеты проводились для жидкости аналогичной по свойствам крови: с динамическим коэффициентом вязкости  $\mu = 0,00375$  Па·с и плотностью  $\rho = 1100 \frac{\text{кг}}{\text{м}^3}$ .

*Результаты.* На рис. 1 представлены примеры полей осевой и окружной компонент скорости, а также линии тока и изоповерхность Q-критерия, которые позволяют визуализировать сложную вихревую структуру потока. Линии тока кровотока сильно закручены на входе в модель и стремятся выпрямиться при продвижении по сосуду.



Рис. 1. Поля осевой и окружной компонент скорости, линии тока и изоповерхность Q-критерия, окрашенная по локальной величине скорости: расчеты для Re = 300

Параметрические расчеты закрученного течения для всех рассмотренных вариантов показали, что на входе формируется двуспиральная структура течения, которая трансформируется в осесимметричную, вниз по потоку. На двуспиральную структуру потока указывает наличие двух максимумов в распределении осевой и окружной компонент скорости по поперечным сечениям (рис. 1). Ниже по потоку, где струи соединяются, максимум осевой скорости один и локализован в центре сосуда, при этом величина окружной компоненты скорости стремится к нулю.

На рис. 2 представлено изменение интегрального параметра закрутки в зависимости от продольной координаты и числа Рейнольдса, данный параметр определяется как  $S = \frac{\int \rho V_{\varphi} V_n r dS}{R \int \rho V_n^2 dS}$ , где  $\rho$  – плотность жидкости,  $V_{\varphi}$  – окружная и  $V_n$  – осевая компоненты скорости, R – радиус и S – площадь поперечного сечения сосуда.



Рис. 2. Изменение интегрального параметра закрутки вдоль модели сосуда

Осесимметричная структура потока характеризуется малыми значениями интегрального параметра закрутки (S < 0,05), при увеличении этого показателя (S > 0,05) возникает двуспиральная структура закрученного течения. Вниз по потоку интенсивность закрутки уменьшается и чем меньше число Рейнольдса, тем слабее закрученность течения, и тем быстрее оно стремится перейти к осесимметричной структуре.

На рис. З построено отношение максимальных окружной и осевой компонент скорости вдоль модели сосуда для всех рассчитанных вариантов. Видно, что рассматриваемое отношение для малых чисел Рейнольдса (Re < 500) монотонно убывает вдоль сосуда, а при увеличении числа Рейнольдса монотонность нарушается, встречаются локальные максимумы. Важно подчеркнуть, что анализируемое соотношение скоростей применяется как показатель закрученности потока при клиническом обследовании пациентов. Обработка расчетных данных продемонстрировала, что такой параметр закрутки в среднем превышает интегральный показатель закрутки S в два раза.



Рис. 3. Изменение отношения максимальных окружной к осевой скорости вдоль модели сосуда

Выводы. Проведено численное исследование структуры закрученного кровотока в модели кровеносного сосуда в широком диапазоне чисел Рейнольдса. Закрутка создавалась завихрителем в виде скрученной ленты. Параметрические расчеты показали, в частности, что при значениях интегрального параметра закрутки *S* превышающих 0,05 формируется двуспиральная структура закрученного течения, которая переходит в осесимметричную ниже по сосудистому руслу при локальных значениях *S* меньше 0,05.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Bogren H.G., Buonocore M.H. Blood flow measurements in the aorta and major arteries with MR velocity mapping // Journal of Magnetic Resonance Imaging. – 1994. – V. 4. – Pp. 119–130.

2. Kilner P.J., Yang G.Z., Mohiaddin R.H. et al. Helical and retrograde secondary flow patterns in the aortic arch studied by three-directional magnetic resonance velocity mapping // Circulation. – 1993. – V. 88. – Pp. 2235–2247.

3. Mohiaddin R.H., Yang G.Z., Kilner P.J. Visualization of flow by vector analysis of multidirectional cine MR velocity mapping // Journal of Computer Assisted Tomography. – 1994. – V. 18. – Pp. 383–392.

4. P.A. Stonebridge et al. Spiral laminar flow: a survey of a three-dimensional arterial flow pattern in a group of volunteers // European Journal of Vascular and Endovascular Surgery. – 2016. – V. 52. – Pp. 674–680.

УДК 612.13

Д.Э. Синицына Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого<sup>(•)</sup>

## ИССЛЕДОВАНИЕ ВЛИЯНИЯ УПРУГОСТИ СТЕНОК НА СТРУКТУРУ ПРОСТРАНСТВЕННОГО КРОВОТОКА В БИФУРКАЦИИ БРЮШНОЙ АОРТЫ

Введение. При проведении моделирования кровотока актуальным остается вопрос о степени влияния деформации стенки в течение сердечного цикла на пространственновременную структуру формирующегося потока. В большинстве случаев исследователи проводят моделирование, пренебрегая упругостью сосудистых стенок.

В представленной работе проводится сопоставительный анализ влияния упругости стенок на характеристики пространственного кровотока в модельной конфигурации, включающей область сосудистого русла из трех бифуркаций – брюшной аорты и общих подвздошных артерий. Численное моделирование в упругом кровеносном сосуде проводилось с помощью технологии Fluid Structure Interaction (FSI), которая реализована в виде одностороннего (1-way FSI) и двухстороннего (2-way FSI) обмена данных.

Описание модели. В расчетах использовалась модель среднестатистической конфигурации, которая построена по клиническим данным о геометрии [1-3] около 1000 здоровых пациентов, и включает область бифуркации брюшной аорты (БА), общие (ОПА), наружные (НПА) и внутренние (ВПА) подвздошные артерии (рис.1а). Основные геометрические характеристики модели приведены в табл. 1.

Постановка расчетного исследования и вычислительные аспекты. При моделировании кровотока решались трехмерные нестационарные уравнения Навье-Стокса для несжимаемой вязкой жидкости (в предположении о ламинарном характере кровотока) в программе ANSYS CFX со вторым порядком точности по пространству и по времени. Решение уравнения движения упругой стенки выполнялось в программе ANSYS Transient Structural. Передача данных, получаемых на перестраиваемой сетке, проводится в модуле ANSYS Workbench –

<sup>&</sup>lt;sup>(•)</sup> Д.Э. Синицына, sinicina.daria@yandex.ru

System Coupling, который на каждом шаге по времени обеспечивает обмен информацией о давлении на внутренней стенке и ее перемещении между солверами.



Рис. 1. а) Модель бифуркаций брюшной аорты и подвздошных артерий среднестатистической конфигурации: БА – брюшная аорта, ОПА – общие подвздошные артерии, НПА – наружные подвздошные артерии, ВПА – внутренние подвздошные артерии, D – диаметр сосуда;
б) расчетные сетки; в) изменения входного давления и расходов во времени в артериях рассматриваемого участка сосудистого русла при 70 уд/мин

Табл. 1. Геометрические параметры модели бифуркации брюшной аорты

					1.1			1			
α <sub>1</sub> , °	α <sub>2,</sub> , °	α <sub>3</sub> , °	$lpha_4$ , °	α <sub>5</sub> , °	α <sub>6</sub> , °	α <sub>7</sub> ,°	α <sub>8</sub> , °	α <sub>9</sub> , °	D <sub>БА</sub> , мм	D <sub>НПА</sub> , мм	D <sub>ВПА</sub> , мм
15	30	25	15	165	160	120	50	135	18	9	5,5

Для гидродинамической задачи была построена неструктурированная расчетная сетка, состоящая из тетраэдров с пятью призматическими слоями у внутренней стенки (2,5 млн. элементов), для механической задачи расчетная сетка преимущественно состояла из гексаэдров с тремя слоями поперек сосудистой стенки (135 тыс. элементов) (рис. 16). Шаг по времени – 0,0172 с. Для всех рассматриваемых вариантов рассчитывалось три сердечных цикла для исключения влияния начальных условий.

Моделирование проводилось для жидкости со свойствами, аналогичными таковым для человеческой крови: с плотностью  $\rho = 1050$  кг/м<sup>3</sup> и динамическим коэффициентом вязкости  $\mu = 0,00375$  Па·с. В расчетах использовались два подхода моделирования кровотока в эластичной модели. При одностороннем обмене данных (1Way FSI) на каждом шаге по времени решается механическая задача с приложенным к внутренней стенке сосуда пульсирующим избыточным давлением, далее данные о перемещении стенки автоматически передаются в программный модуль для решения гидродинамической задачи, и проводится расчет течения в измененной геометрии. При данном подходе в качестве граничных условий на входе в БА задается постоянный уровень давления, на выходах из подвздошных артерий предписывается изменение среднерасходной скорости во времени. Идентичные граничные условия накладывались в гидродинамической задаче для модели с жесткими стенками. В случае двустороннего обмена данных (2-way FSI) на входе в модель задается пульсирующее

избыточное давление, на каждом шаге по времени решается гидродинамическая задача, полученные данные о давлении на внутренней стенке, автоматически передаются в модуль для решения механической задачи, затем решается механическая задача и обратно передается информация о перемещении стенки под действием рассчитанного давления. На внутренних стенках накладывалось условие прилипания. В случае модели с жесткими стенками максимальное за сердечный цикл *T* (70 уд/мин) число Рейнольдса, построенное по местной среднерасходной скорости  $V_b$  и гидравлическому диаметру *D*, на входе в БА составляет  $Re_{макс} = V_b D_{\rm БА} \rho / \mu = 1875$ , число Уомерсли  $Wo = R \sqrt{2\pi \rho / \mu T} \approx 13$ , соответственно.

При расчете деформации упругого кровеносного сосуда использовалась модель изотропной упругой стенки с переменной по длине толщиной, которая составляет в среднем 10% от диаметра сосуда. Для сосудистой стенки области брюшной аорты приняты следующие механические параметры: плотность – 1200 кг/м<sup>3</sup>, коэффициент Пуассона  $\mu = 0,4$ , модуль Юнга  $E = 0,8 \div 8$  МПа. На стенках модели у входа и выходов наложены запреты на перемещение в нормальном направлении и скрутку сосуда.

*Результаты.* Упругость стенок повлияла на величину входного расхода. На рисунке 2а представлены зависимости средних значений расхода для фазы прямого (Q<sup>+</sup>cp) и обратного тока (Q<sup>-</sup>cp) жидкости, а также амплитуды волн расхода (Q<sup>+/-</sup>макс) по сравнению с результатами применения модели с жесткими стенками. Для сосуда с механическими параметрами здоровой сосудистой стенки (0,8 – 1 МПа) зарегистрировано увеличение среднего прямого расхода на входе в БА на 6%, а обратного – на 90%, амплитуда расходов увеличилась на 17% и 45%, соответственно. При этом длительность прямого тока ( $\Delta t^+$ ) уменьшилась на 6%, а обратного ( $\Delta t^-$ ) увеличилась на 68% (рисунок 2б).



Рис. 2. Зависимости от модуля Юнга: a) относительных средних значений расхода (Q<sup>+/-</sup>cp) и амплитуд волн расхода (Q<sup>+/-</sup>макс); б) длительности прямого (Δt<sup>+</sup>) и обратного тока (Δt<sup>-</sup>)

На рис. За представлены рассчитанные перемещения стенки при E = 1 МПа, полученные посредством 2-way FSI подхода. Установлено, что значительные перемещения сосредоточены в местах бифуркаций сосудов, а максимальные перемещения возникают на задней стенке непосредственно перед бифуркацией БА в момент максимального входного давления. Рассчитанные перемещения в области БА составляют 40% от поперечного размера сосуда, что существенно больше по сравнению с подвздошными артериями, где перемещения стенок не превышают 10%.

На рис. Зб,в представлены распределения осредненных параметров, характеризующих воздействие потока на стенки сосуда - осредненные по циклу сдвиговые напряжения на

стенке (TAWSS – Time-averaged wall shear stress) и индекс колебаний сдвиговых напряжений (OSI – Oscillatory shear index) для случая здоровой упругой стенки (E = 1 МПа):



Рис. 3. Распределение параметров на сосудистой стенке *верхний ряд*: а) перемещение стенки в момент максимального давления (задняя стенка);
б) распределение осредненных по циклу сдвиговых напряжений;
в) разница рассчитанных значений параметра TAWSS при использовании 1- и 2Way FSI (передняя и задняя стенки).

нижний ряд: a) разница расчетных перемещений стенки в момент максимального давления при использовании 1- и 2Way FSI (задняя стенка); б) индекс колебаний сдвиговых напряжений; в) разница значений параметра OSI, рассчитанных при использовании 1- и 2Way FSI (передняя и задняя стенки).

Области, характеризующиеся низкими значениями осредненных сдвиговых напряжений (TAWSS < 1 Па) в сочетании с высокими значениями индекса колебаний сдвиговых напряжений (OSI > 0,25), в гидродинамическом плане подвержены атеросклеротическому изменению сосудистой стенки. Согласно картинам распределения анализируемых параметров, такими местами являются области внешних стенок ОПА, задняя стенка бифуркации БА и НПА. Упругость сосудистой стенки в широком диапазоне рассматриваемых механических параметров незначительно повлияла на распределение

осредненных сдвиговых напряжений, представленные оценки правомерны и для случая жестких стенок сосудистого русла.

При сопоставлении результатов, полученных с помощью 1-way и 2-way FSI подходов зарегистрированы незначительные отличия в структуре течения в отдельные моменты сердечного цикла, однако, на результаты осредненных характеристик (TAWSS, OSI) применение различных подходов не повлияло (рис. 3в). Следует учитывать, что моделирование кровотока с упругими стенками требует высокой вычислительной мощности, а использование 1-way FSI подхода значительно сокращает физическое время расчета (в среднем в 5 раз).

#### ЛИТЕРАТУРА

1. R. Lorbeer, A. Grotz, M. Dörr, et al., Reference values of vessel diameters, stenosis prevalence, and arterial variations of the lower limb arteries in a male population sample using contrast-enhanced MR angiography // PLoS One. -2018. - V. 13(6). - P.15.

2. F. Cuomo, S. Roccabianca, D. Dillon-Murphy et al. Effects of age-associated regional changes in aortic stiffness on human hemodynamics revealed by computational modeling // PLoS One. -2017. - V. 12(3). - P.21.

3. V. Kurra, P. Schoenhagen, E.E. Roselli, S.R. Kapadia, et al. Prevalence of significant peripheral artery disease in patients evaluated for percutaneous aortic valve insertion: Preprocedural assessment with multidetector computed tomography // The Journal of Thoracic and Cardiovascular Surgery. – 2009. – V. 137(5). – Pp. 1258 - 1264.

4. L. Ke, J. Wentao, C. Yu, et al., Fluid-solid interaction analysis on iliac bifurcation artery: a numerical study// International Journal of Computational Methods. – 2018. – V. 16(5). – Pp. 1–18.

5. J. J. Yeung, H. J. Kim, T.A. Abbruzzese, et al. Aortoiliac hemodynamic and morphologic adaptation to chronic spinal cord injury // Journal of vascular surgery. – 2006. – V. 44(6). – Pp.1254 - 1265.

УДК 531

А.О. Охотников<sup>1</sup>, О.В. Антонова<sup>1</sup>, О.И. Охотников<sup>2</sup> <sup>1</sup>Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого<sup>(•)</sup> <sup>2</sup>Курский государственный медицинский университет

## АНАЛИЗ ЦИКЛИЧЕСКОЙ ПРОЧНОСТИ ПОКРЫТОГО ЭНДОБИЛИАРНОГО СТЕНТА

*Введение*. При установке и длительной эксплуатации эндобилиарных стентов возникают вопросы, выходящие за рамки медицинского использования. С учетом средних времен эксплуатации данного класса медицинских изделий и особенностями условий их применения наиболее важным и актуальным является анализ циклической прочности таких конструкций.

Основной особенностью установки эндобилиарного стента, существенно влияющей на постановку задачи математического моделирования, является тот факт, что в рабочем положении стент располагается одновременно в просвете желчного протока и в просвете 12перстной кишки [1,2], при этом одна часть стента находится в активно перистальтирующей 12-перстной кишке, оказывающей механическое воздействие на стент. Следует отметить, что внутри просвета ток желчи происходит с низкой скоростью и в относительно небольшом объеме, что позволяет на данном этапе отказаться от учета гидродинамического воздействия желчи на стенку сосуда.

<sup>&</sup>lt;sup>(•)</sup> A.O. Охотников, okhotnikov@compmechlab.ru



Рис. 1. Эндобилиарный покрытый стент

Моделирование процесса установки стента. В качестве объекта исследования был выбран покрытый эндобилиарный стент [2], представляющий собой плетеную сетчатую структуру из материала с памятью формы [3]. Покрытый эндобилиарный стент состоит из двух материалов: никелид титана (нитинола) и полимер фторопласта 4 (тефлона). На рис. 1 представлен образец такой конструкции [4]. В ходе проведения данного исследования были поставлены три задачи, моделирующие три разных положения стента в просвете двенадцатиперстной кишки. Оценивалось расстояние выступающей части стента от дуоденального сосочка (25%, 30% и 50% от всей длины стента). Пространственная модель стента и граничные условия представлены на рис. 2.



Рис. 2. Геометрическая модель и варианты постановки стента

Численное моделирование поведения покрытого эндобилиарного стента под действием динамического циклического воздействия со стороны 12-перстной кишки при различной длине свободного дуоденального колена (25мм, 30мм, 50мм) проводилось в программном комплексе конечно-элементного анализа ANSYS [5]. Была определена длительность жизненного цикла покрытого стента при заданной величине смещения конца дуоденального колена (1 и 5 мм). Оценивались эквивалентные напряжения по Мизесу и чувствительность усталостной прочности (чувствительность к нагружению). Результаты численного моделирования представлены на рис.3. и в табл. 1.



Рис. 3. Критические области варианта установки стента (50% от всей длины стента)

таол. 1. Результаты численного решения								
Активная часть стента,	25	30	50					
%.								
Минимальное время	21,6	16,8	1,6					
эксплуатации, месяцы								

Заключение. По результатам математического моделирования поведения стента минимальное время эксплуатации составило: для 50% длины дуоденального колена 1,6 месяца, для 30% - 16,8 месяцев, для 25% - 21,6 месяца; это позволяет сделать вывод, что максимальное значение напряжений и деформаций наблюдается в случае 50% длины активной части. Данные результаты подтверждены медицинской практикой, показывающей, что при такой установке риск рефлюкса содержимого двенадцатиперстной кишки является минимальным.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Кучумов А.Г., Няшин Ю.И., Самарцев В.А., Туктамышев В.С., Лохов В.А., Шестаков А.П. Математическое моделирование методики установки стента из материала с памятью формы при проведении эндобилиарных вмешательств // Российский журнал биомеханики - 2017. - Т. 21, № 4. -C. 462-473.

2. Охотников О.И., Яковлева М.В., Григорьев С.Н. Временное эндобилиарное стентирование стриктур дистального отделе общего желчного протока, обусловленных хроническим панкреатитом // Анналы хирургической гепатологии – 2018.- Т.23, №3.- С. 31-36.

3. Robertson S. W., Pelton A. R. & Ritchie R. O. Mechanical fatigue and fracture of Nitinol //International Materials Reviews. - 2012. - 57:1, P. 1-37.

4. Маады А.С., Карпов О.Э., Стойко Ю.М., Ветшев П.С., Бруслик С.В., Левчук А.Л. Эндоскопическое билиарное стентирование при опухолевой механической желтухе //Анналы хирургической гепатологии. - 2015.- 20(3).- С. 59-67.

5. ANSYS, Inc. Release Notes, Release 17 – SAS IP, Inc.

Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого<sup>(•)</sup>

## МОДЕЛИРОВАНИЕ БАЛЛОННОЙ АНГИОПЛАСТИКИ КОАРКТАЦИИ АОРТЫ С УЧЕТОМ ВЯЗКО-ГИПЕРУПРУГИХ СВОЙСТВ МАТЕРИАЛА

Актуальность. Коарктация аорты является основной причиной ранней смертности и заболеваемости, связанной с сердечной недостаточностью [1]. Безопасным методом устранения данной патологии является баллонная ангиопластика, как самостоятельная процедура, так и с дополнительным стентированием. В настоящее время широкое распространение получило описание материала аорты с помощью анизотропной гиперупругой модели Holzapfel-Gasser-Ogden (HGO) [2], показывающей хорошее совпадение с экспериментальными данными [3]. Но эта модель является абсолютно упругой и, как следствие, не может корректно описать процесс ангиопластики без стентирования.

*Цель работы.* Целью работы является создание модели материала стенки аорты на основе HGO, позволяющей учитывать изменение деформированного состояния с течением времени для моделирования ангиопластики.

*Модель материала аорты*. Модель Holzapfel-Gasser-Ogden (HGO) предлагает описание плотности энергии деформации как сумму изотропной и анизотропной составляющих через введение в рассмотрение векторов  $M^{\alpha}$ , указывающих на направление волокон в материале ( $\alpha = 1, 2 \dots N, N$  – количество семейств волокон). Тензор напряжений может быть выражен покомпонентно как функция градиента деформации **F** [4]:

$$\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}^{iso} + \boldsymbol{\sigma}^{ani}; \#(1)$$

$$\sigma_{ij}^{iso} = \frac{2}{J} C_{10} \left( J^{-\frac{2}{3}} \boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{F}^{T} - \frac{1}{3} \delta_{ij} \bar{I}_{1} \right); \#(2)$$

$$\sigma_{ij}^{ani} = \sum_{\alpha=1}^{N} \frac{2k_{1}}{J} \exp(k_{2} \bar{E}_{\alpha}^{2}) \bar{E}_{\alpha} \left[ \bar{m}_{i}^{\alpha} \bar{m}_{j}^{\alpha} - \frac{1}{3} \delta_{ij} \bar{I}_{4(\alpha\alpha)} \right], \#(3)$$

где  $\delta_{ij}$  – символ Кронекера,  $\mathbf{m}^{\alpha} = \mathbf{F}\mathbf{M}^{\alpha}$  – деформированный направляющий вектор волокна J– определитель градиента деформации,  $\bar{I}_1, \bar{I}_{4(\alpha\alpha)} = \mathbf{M}^{\alpha} \cdot \mathbf{C} \cdot \mathbf{M}^{\alpha}$  – инварианты  $\mathbf{C}, \mathbf{C}$  – тензор формоизменения. Компонента  $\bar{E}_{\alpha}$  указывает на растяжение волокна:  $\bar{E}_{\alpha} = (\bar{I}_{4(\alpha\alpha)} - 1)$ .  $C_{10}, k_1, k_2$  – параметры модели.

Для учета вязкости предлагается реологическая модель на основе модели Кельвина – Фойгта [5], где упругому элементу (HGO) ставится параллельно элемент Ньютона с динамической вязкостью η. В такой реологической модели деформации элементов будут одинаковы, а напряжения суммироваться. Т. е. тензор напряжений будет выглядеть следующим образом:

$$\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}^{iso} + \boldsymbol{\sigma}^{ani} + \boldsymbol{\sigma}^{vis}, \#(4)$$

где вязкая часть  $\sigma^{vis}$  описывается следующим определяющим уравнением:

$$\boldsymbol{\sigma}^{vis} = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} (\boldsymbol{F}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{F}) \# (5)$$

Конечно-элементное моделирование. Моделирование процесса ангиопластики проводилось для геометрии аорты, полученной из результатов 3D сканирования. Исходная геометрия была сильно упрощена (до осесимметричной постановки) ввиду сложности реализации локальной системы координат в исходной геометрии (рис. 1).

<sup>&</sup>lt;sup>(•)</sup>М.К. Тишков, tishkovmax@gmail.com



Рис. 1. Исходная геометрия и упрощение

В ходе упрощения были сохранены: наименьший диаметр коарктационного сегмента  $(d_{COA} = 4 \text{ мм})$ , диаметр участка выше  $(d_{up} = 5.65 \text{ мм})$  и ниже  $(d_{down} = 9.8 \text{ мм})$  коарктации, а также соответствующие длины участков  $(l_{up} = 10.26 \text{ мм}, l_{down} = 6.23 \text{ мм})$ . Процесс ангиопластики проводился полиуретановым баллоном с внешним диаметром 4 мм и толщиной стенки 0.1 мм. Взаимодействие баллона со стенкой аорты рассматривалось как контакт с коэффициентом трения 0.2. Решение проводилось без учета инерционных сил, с закреплением аорты и баллона по кромкам в пакете Abaqus. Используемая конечно-элементная сетка состояла из 19000 гексагональных элементов для аорты и 4000 для баллона. Параметры материалов аорты [3] (НGO) и баллона [6] (гиперупругая модель Огдена) указаны в табл. 1 и 2 соответственно.

Табл.	1.	Парамет	ры м	атери	ала а	орты
1		110000000000000000000000000000000000000	P 21 111	••••••••••••••••••••••••••••••••••••••		0 0 1 2

Модель	<i>С</i> <sub>10</sub> , кПа	$k_1$ , кПа	k₂, кПа	D	ф, град				
HGO	10.986	3.011	0.7667	1.0E-6	63				

Табл. 2. Пара	метры матери	иала баллона	a			
Модель	$\mu_1$ , кПа	$lpha_1$	$D_1$	μ <sub>2</sub> , кПа	$\alpha_2$	D
Оглен	10 986	3 011	0 7667	-2	0	(

В табл. 1 параметр φ указывает на угол между направляющими векторами семейств волокон. При расширении баллона материал аорты учитывался без введения вязкости, а процесс релаксации (после удаления баллона) рассчитывался с тремя значениями вязкости: 5,8 и 10 · 10<sup>5</sup> кПа · с.

*Результаты*. Распределения напряжений в процессе расширения баллона (рис. 2) показывают, что область больших напряжений сосредоточена в области наименьшего диаметра. Максимум составляет 329 кПа. При удалении от этой области напряжения быстро падают.

В процессе нагрузки максимальный диаметр аорты составил 7 мм. Разгрузка с учетом различных значений вязкости изображена на рис. 4. Были получены времена релаксации (табл. 3), при которых сохраняется 90, 50 и 10 % от максимального приращения.



Рис. 3. Распределение напряжений (кПа) по сечению аорты в различные моменты расширения баллона: а) в начальный момент; б) в момент половины максимального расширения; в) в момент максимального расширения баллона



Рис. 4. Зависимость диаметра аорты от времени в процессе релаксации

Вязкость $\eta$ , кПа с	t <sub>90%</sub> , год	$t_{50\%},$ год	t <sub>10%</sub> , год
106	0.0332	0.2428	0.8430
$8\cdot 10^5$	0.0212	0.1748	0.6822
$5 \cdot 10^{5}$	0.0147	0.1412	0.4056

Табл. 3. Времена релаксации

#### Выводы

Предложенная модель с учетом вязкости позволяет моделировать деформацию аорты в процессе ангиопластики в чисто упругой постановке, а релаксацию проводить с учетом вязкости аорты. Получены распределения напряжений по сечению в процессе расширения аорты. Полученные временные зависимости диаметра аорты от времени релаксации показывают возможность подбирать значения вязкости для достижения определенного значения диаметра при релаксации.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Egbe A. C. et al. Doppler-derived arterial load indices better reflect left ventricular afterload than systolic blood pressure in coarctation of aorta //Circulation: Cardiovascular Imaging. – 2020. – Vol. 13. – P. e009672.

2. Pasta S. et al. Constitutive modeling of ascending thoracic aortic aneurysms using microstructural parameters //Medical engineering & physics. – 2016. – Vol. 38. – P. 121-130.

3. García-Herrera C. M. et al. Mechanical characterisation of the human thoracic descending aorta: experiments and modelling //Computer Methods in Biomechanics and Biomedical Engineering. -2012. – Vol. 15. – P. 185-193.

4. Nolan D. R., Lally C., McGarry J. P. Understanding the deformation gradient in Abaqus and key guidelines for anisotropic hyperelastic user material subroutines (UMATs) //Journal of the Mechanical Behavior of Biomedical Materials. – 2022. – Vol. 126. – P. 104940.

5. Meyers M. A., Chawla K. K. Mechanical behavior of materials. - Cambridge university press, 2008.

6. Schiavone A., Zhao L. G. A study of balloon type, system constraint and artery constitutive model used in finite element simulation of stent deployment //Mechanics of advanced materials and modern processes. -2015. - Vol. 1. - P. 1-15.

## УДК 004.94

М.И. Костина, Д.Н. Циганков

## Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого<sup>(•)</sup>

## МОДЕЛИРОВАНИЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЙ ГАНГЛИОЗНЫХ КЛЕТОК В СЕТЧАТКЕ ГЛАЗА ДЛЯ ОПТИМИЗАЦИИ РЕШЕНИЙ ЭВОЛЮЦИОННЫХ ЗАДАЧ

Введение. В ходе эволюции глаза живых существ претерпевали изменения. На сегодняшний день каждое живое существо имеет какое-то распределение ганглиозных клеток в глазу, которое является решением эволюционной задачи. Известно, что в центре зрительной оси глаза человека плотность ганглиозных клеток максимальна и снижается к периферии [1]. Ганглионарная клетка — нервная клетка сетчатки глаза, способная генерировать нервные импульсы в отличие от других типов нейронов сетчатки. Клетки сетчатки связаны между собой сложной сетью возбуждающих, подавляющих и двунаправленных сигнальных связей. Они собирают информацию от всех слоев сетчатки как по вертикальным путям. Топографическая карта в зрительной коре является логарифмической, что означает, что малые изменения в пространственной организации входных сигналов в ретине могут вызвать большие изменения в распределении активности нейронов на карте в зрительной коре. Это связано с тем, что нервные клетки в зрительной коре обрабатывают информацию с нескольких соседних клеток ретины, и на карте в зрительной коре каждой нервной клетке соответствует определенный регион пространства, который она обрабатывает. При этом расстояние между соседними регионами на карте в зрительной коре увеличивается логарифмически с увеличением расстояния между соответствующими регионами на сетчатке [2]. На сегодняшний день известно 3 основных типа распределения клеток, связанных с решением эволюционной задачи. Первый – с наибольшей концентрацией в центре – фовией: анатомически fovea представляет собой ямообразное углубление с выпуклыми загибающимися внутрь стенками, которые создают дополнительную рефракцию световых лучей, приходящих из оптически более плотных слоев, и, возможно, дополнительно увеличивают изображение. Второй тип – это зрительная полоса, горизонтальная лентой простирающаяся вдоль назотемпоральной оси глаза. Третий тип характеризуется равномерным распределением; это значит, что количество клеток в

<sup>&</sup>lt;sup>(•)</sup> М.И. Костина, koctena@list.ru

каждой фасетке глаза примерно одинаково. Каждое из указанных распределений можно описать математической моделью.

Математическая модель как способ описать распределение ганглиозных клеток в сетчатке. Экспериментально обнаружено, что плотность ганглиозных клеток (RGC) в сетчатке глаза приматов убывает по мере удаления от центра зрительной оси и описывается математической функцией степенного закона, где RGC обратно пропорциональны квадрату расстояния от центра зрительной оси с показателем степени, который обычно обозначают как α. Также исследования на обезьянах показали, что значение показателя степени α может колебаться в зависимости от типа обезьян, размера их глаза, а также места нахождения в сетчатке. В целом, значения показателя степени варьируют в диапазоне от 1,2 до 4,3 [3].

Таким образом, интересна следующая задача: зная математическую модель плотности ганглиозных у разных животных смоделировать процесс фокусировки глаза на конкретном объекте и найти (а в случае приматов подтвердить) оптимальное значение параметра α, в зависимости от плотности распределения, количества клеток в глазу и типа появления целей.

Исходя из экспериментальных данных можно построить математические модели: в случае фовии (яркие представители такого распределения: человек, приматы) плотность

случае фовии (яркие представители такого распределения. человек, примател, штетел, распределения выглядит следующим образом: $n = \begin{cases} n_0, \varepsilon_r \leq \varepsilon_0 \\ n_0 \left(\frac{\varepsilon_0}{\varepsilon_r}\right)^{\alpha}, \varepsilon_r > \varepsilon_0 \end{cases}$ , в случае полосы (яркие представители такого распределения: лошадь, коза и др.):  $n = \begin{cases} n_0, \varepsilon_y \leq \varepsilon_0 \\ n_0 \left(\frac{\varepsilon_0}{\varepsilon_y}\right)^{\alpha}, \varepsilon_y > \varepsilon_0 \end{cases}$ , а для

равномерного распределения( как у мухи)  $n = n_0$ .



Рис. 1. Распределение клеток в случае фовии, горизонтальной полосы и при равномерном распределении с небольшой моделью глаза (максимальная плотность распределения заштрихована)

Меняя параметр α (рис. 2), можно получать разные распределения, с биологической точки зрения это значит, что если живое существо создает большую фовию или полосу, то у него остается маленькое количество клеток на периферии, и наоборот.



Рис. 2. а) Распределение клеток с разным коэффициентом α, б) схема саккад

*Метод Монте-Карло, компьютерное моделирование в среде MatLab.* Моделирование саккад проводилось следующим образом: Вначале находилась граница фовии с помощью трансцендентного уравнения, которое решалось численно программой для каждого набора параметров (а, отношение количества клеток к максимальному ( за максимальное количество данных клеток принималось количество их у мухи)

Далее случайным образом получались угловые сферические координаты цели. Затем определялись координаты скачка глаза и погрешность скачка, после попытки попасть в фовию. Количество попыток (их количество было ограниченно сверху) попасть в фовию, оно же количество скачков – саккад – записывалось и передавалось в головную программу, которая и вызывала симуляцию саккад. Если случайные координаты попали в фовию, то симуляция саккады заканчивалась.

Так как плотность распределения зависит от параметра α, а количество саккад тоже зависит от него, а также от изначального числа клеток и точности саккады, головная программа запускала симуляцию одного набора параметров через вспомогательную функцию, в которой сначала решалось трансцендентное уравнение для нахождения границ фовии, а затем производилась "игра" в саккады.

Аналогичная процедура применялась при моделировании для зрительной полосы, изменения составляли в плотности распределения и определении границы полосы.

Задача данного моделирования – найти оптимальный параметр α, для разного вида количества клеток и точности саккады, а также показать отличия фовиального распределения от полосы.

*Результаты.* В ходе симуляции нами были получены зависимости количества саккад от интересующего нас параметра для разного количества исходных клеток (кривые разного цвета на рис. 3). Из рисунка видно, что оптимальный параметр α близок к 2 (отличается от этого значения небольшой корректировкой размерами фовии).



Рис. 3. (a) Зависимость количества саккад от параметра α при распределении типа фовия. (б) Сравнение количества саккад для распределений фовия и полоса

При сравнении с со случаем полосы видно (рис. 3б), что для равномерного появления целей фовия показывает лучшую точность ( количество клеток фиксировано, а требуемая точность растет).

Заключение. Таким образом, распределение ганглиозных клеток сетчатки глаза оптимизирует задачу локализации случайных целей при ограниченном полном количестве ганглиозных клеток, которые определяют угловое разрешение зрения. Поиск оптимальных решений проводится для уменьшения количества саккад, требуемых для попадания случайной цели на фовию. Оптимальное распределение ганглиозных клеток соответствует

закону Верхоффа-Рюггера, плотность ганглиозных клеток в центре зрительного поля наибольшая и постепенно уменьшается по мере удаления на периферию сетчатки.

В дальнейшем будет интересно смоделировать процесс появления целей преимущественно на горизонте, что близко к реальности для травоядных животных, а также учесть размеры, так как размеры тоже могут внести вклад в решение эволюционной задачи.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Wilder, H D et al. «Topography of ganglion cells and photoreceptors in the retina of a New World monkey: the marmoset Callithrix jacchus. »// Visual neuroscience. – 1996.- Vol. 13(2). – P. 335-352.

2. Ryan T. Philips , V. Srinivasa Chakravarthy The mapping of eccentricity and meridional angle onto orthogonal axes in the primary visual cortex: an activity-dependent developmental model // Comput. Neurosci. – 2015.- Vol. 9(3).

3. Silveira, L C et al. Retinal ganglion cell distribution in the cebus monkey: a comparison with the cortical magnification factors.// Vision research. – 1989. – Vol. 29(11). – P.1471-1483.

УДК 612.13

Е.Д. Никитин<sup>1</sup>, Я.А. Гатаулин<sup>1,2</sup>, А.Д. Юхнев<sup>1,2</sup>, Д.А. Росуховский<sup>2</sup> <sup>1</sup>Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого <sup>(•)</sup> <sup>2</sup>Институт экспериментальной медицины, Санкт-Петербург

## ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ПОСТУРАЛЬНЫХ НАГРУЗОК НА ТЕЧЕНИЕ В ВЕНОЗНОМ КЛАПАНЕ

Введение. Постуральные (англ. posture — поза, положение) воздействия (нагрузки) – это действия, связанные с перемещением-ориентацией человека в пространстве, в том числе с помощью специальных технических средств и направленные на изменение взаимного расположения, напряжения и перемещения твердых и жидких тканей организма [1]. С помощью постуральных нагрузок на организм пациента может быть оказано уникальное воздействие, недостижимое зачастую другими средствами. Соответствующие процедуры с одновременным мануальным воздействием показали свою эффективность для коррекции гемодинамики и, в частности, активации возвратного тока крови к сердцу при хронической венозной недостаточности нижних конечностей.

Физиологические основы процессов внутри вены, происходящие при постуральных нагрузках, несмотря на многочисленные работы в этой области [1,2], до конца не изучены. Данная работа посвящена численному исследованию течения внутри здорового венозного клапана при простых (с фиксированными углами между осью вены и вектором силы тяжести) постуральных нагрузках.

Геометрическая модель. Была построена модель здорового клапана подколенной вены на основе собственных клинических ультразвуковых измерений в плоскости симметрии клапана (рис. 1*a*). Геометрическая модель клапана (рис. 1*б*) характеризуется радиусом вены R = 5 мм, длиной l = 10 мм и толщиной h=0,5 мм створки, длиной L=9 мм и глубиной H=2 мм синуса (расширения за клапаном). Длины областей перед клапаном  $L_1$  и за клапаном  $L_2$  – взяты достаточными для того, чтобы не оказывать существенного влияния на течение в клапане и равны 25 и 36 мм, соответственно.

Ввиду того, что поток через клапан близок к плоскому, благодаря вытянутой форме створок в нормальном к центральной плоскости направлении, расчеты проводились для плоской модели клапана (рис.16). Построенная модель также является симметричной.

<sup>&</sup>lt;sup>(•)</sup> Я.А. Гатаулин, yakov\_gataulin@mail.ru

Введенное допущение симметрии течения относительно оси вены исходит из того, что клапан является двустворчатым.



Рис. 1. Модель клапана (*a*) и расчетная область (половина геометрической модели симметричного венозного клапана) (*б*)

Модель упругой створки. Движение упругой створки моделировалось с помощью уравнений для линейного однородного изотропного материала. Механические свойства створки клапана были взяты из расчетной работы авторов статьи, использующей двумерную модель здорового клапана: E = 0,2 МПа, v = 0,45,  $\rho = 1200$  кг/м<sup>3</sup> [3]. Условие жесткой заделки задано в том месте створки, где створка соприкасается со стенкой. На остальной поверхности створки задавалось условие сопряжения с жидким телом по силе. В недеформируемом состоянии клапан считается полностью открытым (радиус проходного сечения составляет  $\delta=0,3$  R) [3].

Гидродинамическая модель. Течение жидкости моделировалось с помощью уравнений движения вязкой несжимаемой жидкости (уравнений Навье – Стокса) на деформируемой сетке. Характерное число Рейнольдса, построенное по диаметру вены и скорости течения в клапане в горизонтальном положении ( $V_{0b} = 0.05$  м/с), составляло 132. На входной границе задано периодическое изменение давления, соответствующее постуральной нагрузке (рис. 2). На верхней границе задано условие зеркальной симметрии, на нижней – условие прилипания. Стенка вены считалась абсолютно жесткой ввиду малости ее перемещений. На створке задавалось условие сопряжения с твердым телом по скорости.

Модель постуральной нагрузки. Постуральная нагрузка моделировалась посредством задания входного граничного условия, для которого использовались результаты одномерных расчетов давления в артериях и венах человека в зависимости от угла α между направлением вектора силы тяжести и горизонталью [2]. Обработка результатов этих расчетов позволила выявить связь давления в подколенной вене от угла α, которая была использована в данной работе в качестве граничного условия:

 $p_{\alpha}(t) = (p_{90}(t) - p_0)\sin\alpha + p_0,$ 

где  $p_0$  и  $p_{90}$  – давления на входной границе для вены в горизонтальном (человек лежит) и вертикальном (человек стоит) положении, соответственно. Давление на входной границе вены, находящейся в горизонтальном положении,  $p_0$  является практически постоянным во времени и составляет 22 Па [3].

На основе расчетов статьи [4] была определена периодическая функция давления на входной границе вены, находящейся в вертикальном положении, согласно следующей формуле:

$$p_{90}(t) = \begin{cases} A \sin \omega t + B, \ 0 < t < T_1 \\ B, \ T_1 < t < T \end{cases}$$

где A, B – коэффициенты,  $\omega = \pi/T_l$  – частота цикла, T – длина всего цикла (1,7 с). Данная функция состоит из двух участков. Первый – длительностью  $T_l=1,2$  с и перепадом давления по

гармоническому закону с амплитудой A = 80 Па, второй – длительностью  $T - T_1$  и с постоянным отрицательным давлением B = -20 Па [3].

Программные средства. Гидродинамические уравнения решались в эйлеровской постановке в Ansys Fluent, механические – в лагранжевой постановке в Ansys Mechanical. Связка двух систем происходила в модуле System Coupling среды Ansys Workbench.

Результаты. На рис.3 показано поле течения через венозный клапан с помощью линий тока в момент максимального расхода. Поток жидкости, проходя через клапан, приводит к формированию высокоскоростной струи между створок, под створками клапана наблюдается, напротив, область низкоскоростного течения, за клапаном – обширная рециркуляционная зона. С изменением положения тела из горизонтального в вертикальное ( $\alpha$  от 0 до 90°) скорость движения жидкости между створками клапана увеличивается почти в 1,5 раза, при этом длина зоны рециркуляции, возникающей позади клапана, уменьшается в 1,5 раза. Для врачей представляет интерес зона низкоскоростного течения под створкой клапана, являющаяся потенциальным местом формирования тромбов. На рис.3 правая граница этой зоны (V < 0,001 м/с) показана пунктирной линией. С изменением положения вены ( $\alpha$  от 0 до 90°) размер зоны низкоскоростного течения уменьшается в 1,3 раза.

На рис. 4,а показано изменение среднерасходной скорости во времени цикла – при разных угловых положениях вены относительно вертикали. В вертикальном положении вены ( $\alpha = 90^{\circ}$ ) продолжительность обратного течения  $T_{or}$  (область отрицательных скоростей) составляет 0,2*T*, а максимальная скорость обратного течения – 0,21 V<sub>90 b max</sub>, где V<sub>90 b max</sub> – максимальная за цикл скорость прямого течения в вене в вертикальном положении, равная 0,14 м/с. В вене в горизонтальном положении ( $\alpha = 0$ ) клапан не закрывается, среднерасходная скорость постоянна (0,36 V<sub>90 b max</sub>) и рефлюкс (обратное течение) отсутствует. С изменением положения вены (изменение  $\alpha$  от 45 до 90°) продолжительность рефлюкса увеличивается в 2 раза. На рис. 4,а также показано, что расчетные и клинические данные [5] для вены в вертикальном положении согласуются между собой по длительности рефлюкса (отличие составляет менее 20%).







Рис. 3. Линии тока, раскрашенные по величине скорости, в момент максимального расхода для разных угловых положений вены:  $\alpha = 0$  (*a*), 45° (*б*), 90° (*в*)

На рис.4,6 показано изменение полуширины  $\delta$  проходного сечения при разных угловых положениях вены. В горизонтальном положении ( $\alpha = 0$ ) створки неподвижны. В вертикальном положении ( $\alpha = 90^{\circ}$ ) клапан периодически закрывается и открывается. В течение цикла можно выделить четыре фазы: фаза открытия (0-0,3)*T*; фаза полного открытия (0,3 - 0,6)*T* ( $\delta_{\text{max}} = 0,35 R$ ); фаза закрытия (0,6 - 0,8)*T*; фаза закрытого клапана (0,8 - 1)*T*. С изменение положения вены ( $\alpha$  изменяется от 0 до 90°)  $\delta_{\text{max}}$  увеличивается в 1,3 раза.



Рис. 4. Изменение среднерасходной скорости (*a*) и полуширины проходного сечения (б) при разных угловых положениях вены (V<sub>90 b max</sub> = 14 см/с)

Выводы. Проведено численное исследование течения внутри здорового венозного при разных положениях вены относительно вектора силы клапана тяжести. Проанализированы два качественно отличающихся режима течения в горизонтальном (человек лежит) и вертикальном (человек стоит) положениях – постоянно открытое состояние и колебания створок с периодическим закрытием и открытием клапана, соответственно. При перемещении человека из положения лежа в положение стоя существенно уменьшается область рециркуляции за клапаном и область низкоскоростного течения под створками клапана, являющаяся местом потенциального тромбообразования. Результаты данного исследования могут быть использованы врачами при разработке методик постуральной коррекции гемодинамики.

Работа выполнена при финансовой поддержке Минобрнауки в рамках госзадания № 122020300239–8.

Результаты получены при использовании ресурсов СКЦ «Политехнический» СПбПУ.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Сергеев Т.В., Суворов Н.Б., Белов А.В., Гараба М.И. Влияние постуральных нагрузок колебательного характера на параметры сердечного ритма // Вестник новых медицинских технологий – 2016 – т. 23, № 1 – с. 80

2. Zhang X., Noda S., Himeno R., Liu H. Gravitational effects on global hemodynamics in different postures: a closed-loop multiscale mathematical analysis // Acta mechanica sinica. – 2017. – vol.33, no.3 – p.595–618

3. Гатаулин Я.А., Никитин Е.Д., Юхнев А.Д., Росуховский Д.А. Численное моделирование течения жидкости в венозном клапане при пробе Вальсальвы // Российский журнал биомеханики, 2022, No 3, C. 78-86.

4. Liu X., Liu L. Effect of valve lesion on venous valve cycle: a modified immersed finite element modeling // PLoS ONE. - 2021. - Vol. 14, No. 3. - P. 1-26.
### УДК 612.13

А.А. Маринова<sup>1</sup>, Л.Г. Тихомолова<sup>1</sup>, А.Д. Юхнев<sup>1</sup>, А.А. Врабий<sup>2</sup> <sup>1</sup>Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого<sup>(•)</sup> <sup>2</sup>Первый Санкт-Петербургский медицинский университет им. акад. И.П.Павлова

# ЧИСЛЕННОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ КРОВОТОКА В ПЕРСОНИФИЦИРОВАННЫХ МОДЕЛЯХ АНАСТОМОЗА БЕДРЕННОЙ АРТЕРИИ

Введение. В ходе операции бедренно-подколенного шунтирования в обход закупоренного участка общей бедренной артерии пришивают шунт для восстановления кровотока. Проксимальный анастомоз представляет собой ответвление шунта от артерии. В области анастомоза может возникать гиперплазия интимы – разрастание клеток внутренней стенки сосуда [1]. Проведение пациент-ориентированного математического моделирования зарастания может помочь оценке риска протеза после операции в в каждом индивидуальном случае [2]. Целью данной работы является анализ изменений гемодинамических параметров в проксимальном анастомозе бедренной артерии пациента за полгода с помощью пациент-ориентированных численных расчетов и сравнение результатов расчетов с клиническими измерениями гемодинамики пациента методом ультразвуковой векторной визуализации.

Геометрические расчетов модели. Для использовались трехмерные две персонифицированные модели области проксимального анастомоза бедренной артерии, построенные по данным компьютерной томографии одного пациента через  $\Delta t = 1$  и 7 месяцев после операции. Общая бедренная артерия (ОБА) разветвляется на глубокую (ГБА) и поверхностную бедренные артерии (ПБА), при этом в ПБА кровоток отсутствует из-за ее тромбоза. В ходе исследований у пациента в области ответвления шунта от ОБА была обнаружена (с помощью УЗ исследования и мультиспиральной компьютерной томографии) наросшая через 7 месяцев после операции неоинтима толщиной около 1 мм. Также за полгода уменьшился на 2 мм диаметр шунта на выходе, сместилось расположение ГБА относительно ОБА, при этом уменьшился ее входной диаметр на 1 мм.

Модель	Δt, мес	D <sub>ОБА</sub> (вход) мм	D <sub>шунт</sub> (выход) мм	D <sub>ГБА</sub> (вход) мм	Re <sub>ОБА</sub> (макс)	Q <sub>ОБА</sub> (макс) мл/с	$\frac{Q_{\text{шунт}}}{Q_{\text{ОБА}}}$	2 50 W	<ul> <li>ОБА (1 модель)</li> <li>Шунт (1 модель)</li> <li>ОБА (2 модель)</li> <li>Шунт (2 модель)</li> </ul>
1	1	8	11	4	1800	38	0.9		
2	7	7	9	5	1640	34	0.35		0.5 t, c

Табл.	1. П	араметр	ы персо	онифиг	циров	анных м	оде.	лей	
област	ги пр	оксима.	тьного	анасто	моза	бедренно	эй а	пртер	ии

Рис. 1. Изменение продольной скорости на входе (ОБА) и выходе (шунт)

*Граничные условия и параметры среды.* Рассматривалось стационарное ламинарное течение вязкой несжимаемой жидкости с плотностью  $\rho = 1000 \text{ кг/m}^3$  и вязкостью  $\mu = 0.004 \text{ Па} \cdot \text{с}$ . На входе в ОБА и выходе из шунта задавалось изменение среднерасходной скорости по циклу согласно клиническим ультразвуковым измерениям (рис. 1), на выходе из глубокой бедренной артерии задавалось нулевое давление. На стенках ставилось условие

<sup>&</sup>lt;sup>(•)</sup>А.А. Маринова, sanmarinova@gmail.com

прилипания. Для данного пациента за полгода значительно изменилась доля расхода через ШУНТ уменьшился В 2.6 он раза, ЭТО может быть связано с нарастанием неоинтимы в месте ответвления шунта, возникновением тромботических отложений в шунте или зарастанием места присоединения шунта к бедренной артерии входе (дистальный анастомоз). Максимальное число Рейнольдса на (ОБА)  $Re = \rho D_{OEA} V_{OEA} / \mu$  составило 1800.

Вычислительные аспекты. Численное моделирование кровотока проводилось с помощью средств пакета ANSYS CFX по методу конечных объемов при использовании сеток, состоящих в среднем из 3 млн элементов. Решение описывалось уравнениями Навье-Стокса для несжимаемой жидкости. Дискретизация уравнений производилась со вторым порядком точности.

*Результаты.* В течение сердечного цикла структура потока значительно меняется для обеих моделей (рис. 2). В фазу ускорения наблюдаем прямые линии тока, к моменту максимального расхода возникают вихри в области ответвления и на начальных участках шунта и ГБА. В период замедления потока в обеих ветвях наблюдается сложная пространственная структура течения. За счет изменения соотношения расходов в ветвях во второй модели увеличились размеры рециркуляционных зон в момент максимального расхода вдоль внешней стенки шунта сразу за анастомозом.



Рис. 2. Изменение структуры течения на протяжении цикла

В момент максимального расхода в поперечном сечении шунта вблизи анастомоза во второй модели наблюдается зона обратных течений, когда как для первой ее нет (рис. 3). При уменьшении скорости значительно увеличиваются значения поперечной составляющей скорости и формируются два крупных вихря, характерные для течения за поворотом.

Для визуализации структуры вихревого течения удобно использовать нормированный параметр спиральности LNH (Local Normalized Helicity), который определяется как:

$$LNH = \frac{\vec{v} \cdot \vec{\omega}}{|\vec{v}| \cdot |\vec{\omega}|} ,$$

где  $\vec{v}$  - вектор скорости,  $\vec{\omega}$  – вектор завихренности. Знак этой величины определяет направление закрутки вихря. По изоповерхности LNH (рис.4а) видно, что в момент максимального расхода вихревое течение на начальном участке ОБА и в месте разветвления наблюдается только у стенок сосуда. Ниже по шунту формируется двухвихревое течение, далее на прямом участке вихри затухают. При этом для модели 2 затухание закрутки в шунте

происходит на более коротком участке. Это обстоятельство повышает вероятность возникновения тромботических отложений.



Рис. 3. Расположение поперечного сечения в шунте (а), профиль безразмерной продольной скорости в шунте в момент максимального расхода (б), поля модуля скорости и векторные поля поперечной составляющей скорости в четыре момента цикла (в)

Важными гемодинамическими параметрами для оценки взаимодействия кровотоксосудистая стенка являются осредненные по циклу сдвиговые напряжения (TAWSS - Time-Averaged Wall Shear Stress) и индекс их колебаний (OSI – Oscillatory Shear Index):

$$TAWSS = \frac{1}{T} \int_0^T |\overrightarrow{\tau_w}| dt, \ OSI = \frac{1}{2} \left( 1 - \frac{\left| \int_0^T \overrightarrow{\tau_w} dt \right|}{\int_0^T |\overrightarrow{\tau_w}| dt} \right)$$

где  $\overrightarrow{\tau_w}$  – вектор сдвиговых напряжений на стенке, t – переменная времени, T – время одного сердечного цикла. В исследованиях [1, 2] указываются критические значения данных здоровых пораженных сосудистых параметров, характерные для И стенок. На рис. 46 голубым окрашены области со значением TAWSS ниже 0.5 Па, а красным с OSI выше 0.25, в которых высока вероятность атеросклеротических изменений сосудов и тромботических отложений на стенках синтетического шунта. В модели 2 выявлено увеличение размеров зоны с низкими сдвиговыми напряжениями и высоким индексом их колебаний по длине шунта, потенциально опасной с точки зрения развития тромботических отложений.



Рис. 4. Изоповерхности параметра спиральности в момент максимального расхода (а), опасные области малых сдвиговых напряжений и высоких индексов их колебаний (б)

Методом высокоскоростной ультразвуковой векторной визуализации V-flow [3] в центральной продольной плоскости анастомоза визуализировано пульсирующее поле скорости кровотока пациента через семь месяцев после операции. Результаты измерений сопоставлены с численным расчетом второй модели (рис.5). Для фазы уменьшения расхода по результатам расчета трехмерного течения построено двумерное векторное распределение скорости в продольном сечении. Также представлены профили измеренной и рассчитанной продольной скорости в эту фазу цикла для сечения в шунте вблизи анастомоза. Оба метода позволили выделить и описать характерные области течения: зоны равномерного течения, высокоскоростные зоны струйного характера и отрывные зоны. Результаты расчета и измерений удовлетворительно согласуются друг с другом.



Рис. 5. Векторные поля скорости в центральном сечении анастомоза: рассчитанные (a), измеренные методом высокоскоростной ультразвуковой векторной визуализации V-flow на сканере Mindray Resona 7 (б); профили продольной компоненты скорости (в)

Выводы. Уменьшение в 2.6 раза доли расхода по шунту за полгода привело к снижению интенсивности вихревой структуры течения В шунте, а также к существенному увеличению в нем зоны с низкими сдвиговыми напряжениями и высоким индексом их колебаний, т.е. к повышению вероятности развития тромботических отложений в шунте. В фазу замедления потока в обеих моделях формируется интенсивное вихревое течение у внешней стенки шунта сразу за анастомозом, занимающее около половины поперечного сечения. Векторные поля скорости в плоскости ультразвукового сканирования, полученные с помощью численного моделирования и методом высокочастотной ультразвуковой векторной визуализации, удовлетворительно согласуются друг с другом.

Работа выполнена при поддержке РНФ, грант № 20-65-47018, и при технической поддержке ООО «Миндрей Медикал Рус» и ООО «Сонар-Медикал».

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Donadoni F., Pichardo-Almarza C., Barlett M., Dardik A., Homer-Vanniasinkam S., Díaz-Zuccarini V. Patient-specific, multi-scale modeling of neointimal hyperplasia in vein grafts // Frontiers in Physiology. – 2017. - Vol. 8 (226). - P. 1-2.

2. McGah P.M., Leotta D.F., Beach K.W., McGah P.M., Leotta D. F., Beach K. W., Riley J. J., Aliseda A. A longitudinal study of remodeling in a revised peripheral artery bypass graft using 3D ultrasound imaging and computational hemodynamics // Journal Biomechanical Engineering. - 2011. –Vol. 133. - P. 1-10.

3. Yiu B., Lai S., Yu A. Vector projectile imaging: time-resolved dynamic visualization of complex flow patterns // Ultrasound in Medicine and Biology. – 2014. - Vol. 40(9). – P. 2295–2309.

# СЕКЦИЯ «МНОГОМАСШТАБНОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ПЕРЕНОСА И КОНВЕРСИИ ЭНЕРГИИ»

УДК 534.11-12

# Е.С. Бутузова, С.Д. Ляжков Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого.<sup>(\*)</sup>

# ПЕРЕНОС ЭНЕРГИИ В ПОЛУБЕСКОНЕЧНОЙ ЦЕПОЧКЕ ГУКА ПРИ КИНЕМАТИЧЕСКОМ НАГРУЖЕНИИ

Описание процессов переноса энергии в кристаллах под внешним нагружением является систематически изучаемой проблемой в области современной физики и тесно связано с задачей о распространении тепла в кристаллах на микро- и наноуровне, при котором закон Фурье нарушается (см. в частности, [1]).

В настоящей работе рассматривается распространение энергии в одномерном полубесконечном кристалле, конец которого подвержен кинематическому нагружению. Ситуация, о которой идет речь, соответствует эксперименту, описанному, например, в статье [2]. Однако, для того чтобы оценить характер переноса энергии в нелинейных кристаллах, необходимо понимание протекания того же процесса в гармонических кристаллах.

Рассматривается полубесконечная цепочка, состоящая из частиц массой *m*, соединенных линейными пружинками жесткостью *c*. Предполагая взаимодействие частиц только с ближайшими соседями, напишем уравнение динамики цепочки:

$$\ddot{u}_n = \omega_e^2 (u_{n+1} - 2u_n + u_{n-1}), \qquad n \in \mathbb{N},$$

$$u_0 = U \sin(\Omega t),$$
(1)

где  $\omega_e = \sqrt{c/m}$  – элементарная частота колебаний атома;  $u_n$  – перемещение n-ой частицы; U и  $\Omega$  – амплитуда и частота нагружения соответственно. Начальные условия для перемещений и скоростей частиц (за исключением граничной) – нулевые.

Формула для поля перемещений имеет вид [3]:

$$u_n = \frac{U\omega_e^2}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\sin(\theta)\sin(n\theta)}{\Omega^2 - \omega^2(\theta)} \left(\frac{\Omega}{\omega(\theta)}\sin(\omega(\theta)t) - \sin(\Omega t)\right) d\theta,$$
(2)

где  $\theta$  – безразмерное вещественнозначное волновое число,  $\omega(\theta) = 2 \omega_e \left| \sin \frac{\theta}{2} \right|$  – дисперсионное соотношение.

Для того чтобы ответить на вопрос, почему энергия при частотах выше частоты отсечки (выше  $2\omega_e$ ) не проходит в кристалл, найдем асимптотику поля перемещений.

$$u|_{\Omega t \gg 1} \approx \frac{2\omega_e^2 \sinh \gamma}{\Omega \sqrt{\Omega^2 - 4\omega_e^2}} (-1)^n e^{-\gamma n} U \sin(\Omega t) + \frac{2U \frac{n}{t} H(\omega_e t - n)}{\left(\sqrt{\pi} \sqrt[4]{4} \sqrt{\omega_e^2 t^2 - n^2}\right) \left(\Omega^2 - 4\omega_e^2 + 4\left(\frac{n}{t}\right)^2\right)} \cos\left(\psi - \frac{\pi}{4}\right),$$
(3)

где H(t) – функция Хевисайда;  $\psi = 2\sqrt{\omega_e^2 t^2 - n^2} - 2n \arccos\left(\frac{n}{\omega_e t}\right); \quad \gamma = 2 \operatorname{arccosh} \frac{\Omega}{2\omega_e}.$ 

Формула (3) состоит из двух вкладов: вклада от колебаний с частотой нагружения Ω, локализованного вблизи границы и вклада от бегущего возмущения, найденного

<sup>(•)</sup> С.Д. Ляжков, lyazhkov sd@spbstu.ru

асимптотически с помощью метода стационарной фазы [5] с использованием подхода из работы [6]. Формула для первого вклада первоначально была найдена в работе [3], с которым полученное в настоящей работе выражение совпадает. Последний вклад затухает обратно пропорционально  $t^{\frac{3}{2}}$ , а первый – убывает с удалением от границы. Таким образом, энергия, подводимая в цепочку с помощью нагружения, не закачивается.



Рис. 1. (а) Зависимость перемещения двадцатой частицы от времени при  $\Omega = 2.8 \, \omega_e$ : численное решение – синяя линия, асимптотическое – красный пунктир. (б) поле перемещений в момент времени  $\omega_e t = 176$  при  $\Omega = 2.8 \, \omega_e$ : численное решение (синие точки), асимптотическое (красные точки)

На рис. 1 показано затухание поля перемещений при частоте, лежащей выше спектра, и представлено поле перемещений в фиксированный момент времени.

Энергия, закачиваемая в цепочку, равна работе силы f(t) по перемещению нулевой частицы:

$$E = U\Omega \int_{0}^{t} f(\tau) \cos(\Omega \tau) d\tau, \quad f(\tau) = m \ddot{u}_{0} - c(u_{1} - u_{0}).$$
(4)

Тогда выражение для энергии в интегральной форме выглядит следующим образом:  $E = U\Omega \int_{0}^{t} \left( cU - mU\Omega^{2} + \frac{2cU\omega_{e}^{2}}{\pi} \int_{0}^{\pi} \frac{\sin^{2}\theta}{\Omega^{2} - \omega^{2}(\theta)} d\theta \right) \cos(\Omega\tau) \sin(\Omega\tau) d\tau$   $- \frac{2cU^{2}\omega_{e}^{2}\Omega^{2}}{\pi} \int_{0}^{t} \int_{0}^{\pi} \frac{\sin^{2}\theta}{(\Omega^{2} - \omega^{2}(\theta))\omega(\theta)} \sin(\omega(\theta)\tau) d\theta \cos(\Omega\tau) d\tau.$ (5)

Предположим, что частота нагружения, при которой рассматривается перенос энергии, находится в полосе пропускания. Полагая, что основной вклад в энергию идет от частот близких к  $\Omega$ , напишем выражение для асимптотики полной энергии на больших временах:

$$E \approx \frac{U^2 \Omega^2 v_g(\Omega) m t}{2a}, \quad v_g(\omega) = v_s \sqrt{1 - \frac{\omega^2}{4\omega_e^2}} \operatorname{sgn}(\omega), \tag{6}$$

где  $v_g(\Omega)$  – групповая скорость; *a* – постоянная решетки;  $v_s$  – скорость звука. Зависимость полной энергии от времени представлена на рис. 2.



Рис. 2. Зависимость полной энергии от времени при различных значениях частот Ω: асимптотическое решение (звездочки), численное решение (кривые).  $\Omega_{max}$  соответствует асимптотическое решение (голубые звездочки), численное решение (зеленые кривые)

При частоте  $\Omega = 2\omega_e$  справедлива другая формула для асимптотики полной энергии:  $E \approx \frac{4cU^2\sqrt{\omega_e t}}{\sqrt{2\pi}}$ (7)

Таким образом, полная энергия в полубесконечной цепочке при кинематическом нагружении ровно в 2 раза меньше, чем в бесконечной цепочке, для полной энергии которой выражение найдено в [4]. Из формулы (5) следует, что значение частоты  $\Omega_*$ , при котором скорость подвода энергии в цепочку максимальна, равна

$$\Omega_* = \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\omega_e.$$
(8)

Зависимость полной энергии от частоты нагружения Ω представлена на рис. 3.



Рис. 3. Зависимость скорости подвода энергии от частоты  $\Omega$ 

Из формулы (6) и рис. 3 следует, что значение  $\Omega_* = \frac{\sqrt{2}}{2}\omega_e$ , найденное в статье [3], оказалось ошибочным.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Chang, C.W., Okawa, D., Garcia H., Majumdar A., Zettl, A. Breakdown of Fouriers law in nanotube thermal conductors // Phys. Rev. Lett. – 2008. – Vol.101(7). – pp.1-4

2. Kepesidis K., Lemonde M., Norambuena, A et al. Cooling phonons with phonons: Acoustic reservoir engineering with silicon-vacancy centers in diamond // Phys.Rev.B. – 2016. – Vol.94. – Pp.1-14

3. Cannas S., Prato, D. Externally excited semi-infinite one-dimensional models // American Journal of Physics – 1991 – Vol. 59(10) – pp.915–920

4. Kuzkin V.A., Krivtsov A.M. Energy transfer to a harmonic chain under kinematic and force loadings: Exact and asymptotic solutions // Journal of Micromechanics and Molecular Physics – 2018. – Vol. 3. – pp.1-16

5. Fedoryuk M.: The Saddle-Point Method. Nauka, Moscow (1977) (in russian)

6. Gavrilov S. Non-stationary problems in dynamics of a string on an elastic foundation subjected to a moving load // J. Sound Vib. – 1999. – Vol. 222(3). – pp.345–361

УДК 534.11-12

А.М. Кривцов, Б.С. Борисенков Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого<sup>(•)</sup>

# МОДЕЛИРОВАНИЕ ТЕПЛОВЫХ ПРОЦЕССОВ В СОСТАВНОМ КРИСТАЛЛЕ

Введение. Перенос тепла на макроуровне хорошо описывается законом Фурье. На микроуровне этот процесс является баллистическим и плохо описывается данным законом. Последнее десятилетие этой проблеме было посвящено множество работ [1,2]. Основными методами, применяемыми для исследования данной проблемы, являются решение уравнений динамики решетки и решение кинетического уравнения Больцмана. Исследования, основанные на этих методах, применимы к процессу переноса тепла фононами. Фонон - согласованные колебания кристаллической решетки, несущие в себе энергию. Распространение тепла фононами играет важную роль для полупроводниковых материалов [3]. Идея первого метода состоит в том, что составляется модель кристаллической решетки, задается закон взаимодействия между частицами и исследуется поведение таких величин, как энергия, поток системы. Второй подход подразумевает всегда континуальную модель, для которой выводится соответствующий вид уравнения Больцмана и находится функция распределения квазичастиц (фононов).

В данной работе проведено моделирование прохождения большого количества фононов через четкую границу двух сред, что следует понимать, как перенос тепла в составном одномерном кристалле. Под составным кристаллом понимается тело с кристаллической решеткой, причем кристаллическая решетка неоднородна. Моделирование проведено двумя способами: с помощью численного решения уравнения динамики решетки и с помощью "газовой" аналогии. Второй способ заключается в том, что вместо того, чтобы решать уравнение динамики решетки, рассматриваются сосредоточенные частицы газа в одномерном пространстве, распределение которых описывает уравнение Больцмана. Производится сравнение двух подходов в реализации одного вычислительного эксперимента.

Описание модели 1. Для описания одномерного кристалла будем использовать цепочку, состоящую из точечных масс, соединенных линейными пружинками. Неоднородность кристалла будем моделировать с помощью различия масс в данной цепочке, начиная с какого-то индекса. Пусть наша модель состоит из N частиц. Рассмотрим двусоставной

<sup>&</sup>lt;sup>(•)</sup> Б.С. Борисенков, nickendsm@gmail.com

кристалл. Силу упругости будем считать линейной, взаимодействуют только соседние частицы. Тогда уравнение динамики в перемещениях имеет вид:

$$\begin{cases} \ddot{u}_n = \omega_1^2 (u_{n+1} - 2u_n + u_{n-1}), & n = 1, 2, 3 \dots \frac{N}{2} \\ \ddot{u}_n = \omega_2^2 (u_{n+1} - 2u_n + u_{n-1}), & n = \frac{N}{2} + 1, \dots, N \end{cases}, \omega_1 = \sqrt{\frac{C}{m_1}}, \quad \omega_2 = \sqrt{\frac{C}{m_2}}, \quad (1)$$

где *m* – масса частицы, *u* – перемещение, *C* – жесткость пружинки, *n* – индекс. В системе заданы периодические граничные условия:

$$u_{N+1} = u_1 \tag{2}$$

Введем энергию *п* – ой частицы.

$$E_n = \frac{1}{2} \Pi_{n-\frac{1}{2}} + K_n + \frac{1}{2} \Pi_{n+\frac{1}{2}}, \quad K_n \stackrel{\text{\tiny def}}{=} \frac{1}{2} m_n v_n^2, \quad \Pi_n \stackrel{\text{\tiny def}}{=} \frac{1}{2} C_n \left( u_{n-\frac{1}{2}} - u_{n+\frac{1}{2}} \right)^2, \tag{3}$$

Тогда энергия двух частей цепочки соответственно:

$$E_1 = \sum_{k=1}^{\frac{N}{2}} E_k, \quad E_2 = \sum_{k=\frac{N}{2}+1}^{N} E_k, \quad (4)$$

Описание вычислительного эксперимента. В системе, заданной уравнениями (1), в левой и правой части задаются начальные условия в виде случайно распределенных локализованных возмущений. Пусть  $N_1$  — количество возмущений в левой части,  $N_2$  — в правой. Начальные условия для каждого из них описываются уравнениями (5):

$$u_n^0 = \cos\frac{2\pi n}{N_\lambda} - 1,\tag{5}$$

где  $N_{\lambda}$  — количество частиц в каждой в каждом возмущении.

Тогда, согласно [4], для достижения "равновесного" состояния в данной системе, необходимо, чтобы:

$$\frac{c_1}{c_2}\frac{b_2}{b_1} = \frac{\bar{E}_2}{\bar{E}_1},\tag{6}$$

где  $c_1, c_2$  — скорости звука в каждой из частей цепочки,  $b_1, b_2$  — среднее расстояние между энергетическими центрами в каждой из частей,  $\bar{E}_1, \bar{E}_2$  — удельные энергии в каждой из частей соответственно.

Описание модели 2. Пусть имеется две непрерывные одномерные среды, в которых могут двигаться сосредоточенные частицы со скоростями  $c_1, c_2$  соответственно. Пусть каждая частица несет порцию энергии  $e_n$ , не зависящую от скорости движения. Две среды замыкаются друг на друга (выполняются периодические граничные условия. Пусть задано условие, что при достижении границы среды, в которой движется частица, она "раскалывается" на две: одна начинает двигаться в той же среде, но в противоположную сторону, другая движется во второй среде в том же направлении, что и исходная. Причем энергии двух частей частицы  $e_{n1}, e_{n2}$ , согласно [4], равны:

$$e_{n1} = \frac{(1-\nu)^2}{(1+\nu)^2} e_n, \quad e_{n2} = \frac{4\nu^2}{(1+\nu)^2}, \quad \nu = \frac{c_1}{c_2}, \tag{7}$$

Описание вычислительного эксперимента. Аналогично эксперименту для первого подхода, задается  $2N_1$  частиц в одной среде и  $2N_2$  частиц во второй (удвоенное значение, так как вследствие начальных условий (5) волна распадается сразу на две) случайным образом. Смотрится величина (8):

$$\delta = \frac{E_1(t) - E_2(t)}{E_{10} - E_{20}},\tag{8}$$

где  $E_1(t)$  и  $E_2(t)$  – энергии в левой и правой части, зависящие от времени,  $E_{10}$  и  $E_{20}$  – значения энергий в начальный момент времени.

Графики зависимости величины (7) от времени для модели 1 и модели 2 соответственно, для равновесного и неравновесного состояния представлены ниже. Здесь в качестве масштаба по времени взят *T* – период колебаний одного элемента модели 1 (левой части цепочки).



Рис. 1. Равновесное состояние (модель 1, усреднение по реализациям)





Рис. 2. Неравновесное состояние (модель 1)

Рис. 3. Неравновесное состояние (модель 2)

Выводы. Эксперименты с реализацией равновесного состояния характеризуются не колебательным движением, график быстро сходится к заданному в первый момент времени значению (рис. 1). Можно заметить, что при заданном неравновесном состоянии совершаются затухающие биения энергии, причем энергия не выравнивается (рис. 2). Для более грубой модели 2 график неравновесного состояния получился менее четким, но наблюдаются также колебания относительно явной асимптоты вблизи 0.55-0.6 относительно начальной величины. Следовательно, можно исследовать состояние неравновесной системы на больших временах на более грубой модели 2. Возможна аналитика для модели 2 (уравнения Больцмана).

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Spohn, H.: The phonon Boltzmann equation, properties and link to weakly anharmonic lattice dynamics. // J. Stat. Phys. – 2006. – P. 124(2–4), 1041–1104.

2. Cahill, D.G., Ford, W.K., Goodson, K.E., Mahan, G.D., Majumdar, A., Maris, H.J., Merlin, R., Phillpot, S.R. Nanoscale thermal transport // J. Appl. Phys. – 2003. – P. 93, 793.

3. Хвесюк В.И. Перенос теплоты в наноструктурах. // Инженерный журнал: наука и инновации, 2013, вып. 5.

4. А.М. Кривцов. Прохождение возмущения через границу: континуальное описание. *In press.* – 2021. – 17 с.

### УДК 534.111

И.Е. Груздев, А.М. Кривцов

Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого<sup>(•)</sup>

# ИССЛЕДОВАНИЕ РАСПРОСТРАНЕНИЯ ЭНЕРГИИ В ПЛОСКОЙ КВАДРАТНОЙ КРИСТАЛЛИЧЕСКОЙ РЕШЕТКЕ

Введение. Описание материалов на нано уровне имеет существенные особенности, связанные с тем, что атомы в веществе располагаются дискретно [1,2]. Это непосредственно влияет на распространение энергии в среде. Достаточно давно известно подобие переноса массы и энергии для диффузионных процессов, но исследовано мало вопросов, касающихся распространения энергии в среде и сравнение с массовой динамикой.

В данной работе рассматривается плоская линейная цепочка, состоящая частиц постоянной массой *m*, соединенными пружинами с постоянной жесткостью *c*. Для такой системы исследуется расплывание энергетического возмущения методом энергетических моментов, который описан в [3]. На основе этого строится аналогия между движением массы и перемещением энергии. В работе рассматривается случаи, в которых сохраняется суперпоток энергии.

Целью данного исследования является рассмотрение частных случаев сохранения суперпотока энергии в среде.

*Уравнение динамики*. Перемещения частиц в рассматриваемой цепочке удовлетворяют уравнению

$$\dot{v}_{n,k} = \sqrt{\frac{c}{m}} \left( v_{n-\frac{1}{2},k} - v_{n+\frac{1}{2},k} + v_{n,k-\frac{1}{2}} - v_{n,k+\frac{1}{2}} \right), \qquad n \in \mathbb{Z}, \qquad k \in \mathbb{Z}$$
(1)

где n – номер частицы,  $u_n \mathbb{Z}$  – множество целых чисел, m – масса частицы с номером n, c – жесткость пружин, соединяющих частицы,  $v_{n,k}$  – обобщенная скорость, задается по следующему правилу:

<sup>&</sup>lt;sup>(•)</sup>И.Е. Груздев, superigor\_2000@mail.ru

$$v_{n,k} = \begin{cases} \dot{u}_{n,k}, & n \in \mathbb{Z}, & k \in \mathbb{Z}, \\ \sqrt{\frac{c}{m}} \left( u_{n-\frac{1}{2},k} - u_{n+\frac{1}{2},k} \right), & n \in \mathbb{Z}/2, & k \in \mathbb{Z}, \\ \sqrt{\frac{c}{m}} \left( u_{n,k-\frac{1}{2}} - u_{n,k+\frac{1}{2}} \right), & n \in \mathbb{Z}, & k \in \mathbb{Z}/2, \end{cases}$$
(2)

где символом Z/2 – обозначено множество полуцелых чисел.

Элементарные энергии. Элементарная энергия, связанная с целым и полуцелым индексом, определяется как

$$E_{n,k} = \frac{mv_{n,k}^2}{2}.$$
 (3)

Свойство суммирования. Покажем свойство сумм обобщенных скоростей. Рассмотрим такую сумму:

$$S_{\alpha,\beta} = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \sum_{k \in \mathbb{Z}} v_{n,k} v_{n+\alpha,k+\beta}, \tag{4}$$

где α и β – некоторые целые или полуцелые числа. Продифференцируем это выражение по времени:

$$\dot{S}_{\alpha,\beta} = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \sum_{k \in \mathbb{Z}} v_{n,k} v_{n+\alpha,k+\beta} = = \sqrt{\frac{c}{m}} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \sum_{k \in \mathbb{Z}} \left( v_{n-\frac{1}{2},k} - v_{n+\frac{1}{2},k} + v_{n,k-\frac{1}{2}} - v_{n,k+\frac{1}{2}} \right) v_{n+\alpha,k+\beta} + + v_{n,k} \left( v_{n-\frac{1}{2}+\alpha,k+\beta} - v_{n+\frac{1}{2}+\alpha,k+\beta} + v_{n+\alpha,k-\frac{1}{2}+\beta} - v_{n+\alpha,k+\frac{1}{2}+\beta} \right).$$
(5)

Сдвинем индексы в первом произведении таким образом, чтобы обобщенная скорость с индексами *n* и *k* умножалась на скобку из суммы и разности сдвинутых скоростей:

$$\dot{S}_{\alpha,\beta} = \sqrt{\frac{c}{m}} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \sum_{k \in \mathbb{Z}} v_{n,k} \left( v_{n+\alpha+\frac{1}{2},k+\beta} - v_{n+\alpha-\frac{1}{2},k+\beta} + v_{n+\alpha,k+\beta+\frac{1}{2}} - v_{n+\alpha,k+\beta-\frac{1}{2}} \right) + v_{n,k} \left( v_{n-\frac{1}{2}+\alpha,k+\beta} - v_{n+\frac{1}{2}+\alpha,k+\beta} + v_{n+\alpha,k-\frac{1}{2}+\beta} - v_{n+\alpha,k+\frac{1}{2}+\beta} \right) \equiv 0,$$
(6)  
**D** JOKABLIBACT

что доказывает

$$S_{\alpha,\beta} = \text{const} \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{Z} \cup \mathbb{Z}/2.$$
 (7)

Второй момент энергии. Если считать, что энергия – скаляр, а поток энергии – вектор, то в простейшем случае второй момент энергии можно ввести следующим образом:

$$\boldsymbol{\mu}_{2} = a^{2} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \sum_{k \in \mathbb{Z}} (n^{2} \boldsymbol{i} \boldsymbol{i} + nk(\boldsymbol{i} \boldsymbol{j} + \boldsymbol{j} \boldsymbol{i}) + k^{2} \boldsymbol{j} \boldsymbol{j}) E_{n,k}, \qquad (8)$$

где а – расстояние между частицами в недеформированном состоянии. Таким образом, формулой выше задается тензор второго момента энергии. Далее запишем выражение для производной по времени от второго момента энергии:

$$\dot{\boldsymbol{\mu}}_{2} = ma^{2} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \sum_{k \in \mathbb{Z}} (n^{2} \boldsymbol{i} \boldsymbol{i} + nk(\boldsymbol{i} \boldsymbol{j} + \boldsymbol{j} \boldsymbol{i}) + k^{2} \boldsymbol{j} \boldsymbol{j}) v_{n,k} \dot{v}_{n,k}$$
(9)

Далее воспользуемся тем, что тензор второго момента энергии симметричный, выражения для диагональных компонент одинаковы с точностью до перестановки индексов, и тем, что n и k – независимые, будем исследовать только компоненты тензора с индексами *ii* и *ij*. Подставим (2) в (9) и используем выражения (5)-(6), в результате получим:

$$(\dot{\boldsymbol{\mu}}_2)_{ii} = ma^2 \sqrt{\frac{c}{m}} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \sum_{k \in \mathbb{Z}} \left( \left( n + \frac{1}{4} \right) v_{n,k} v_{n-\frac{1}{2},k} \right), \tag{10}$$

$$(\dot{\boldsymbol{\mu}}_{2})_{ij} = \frac{ma^{2}}{2} \sqrt{\frac{c}{m}} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \sum_{k \in \mathbb{Z}} \left( n \left( v_{n,k} v_{n,k-\frac{1}{2}} \right) + k \left( v_{n,k} v_{n-\frac{1}{2},k} \right) \right), \tag{11}$$

Заметим, что (11) является константой в силу (7) и того, что коэффициенты n и k независимы, то есть внедиагональные компоненты тензора второго момента энергии линейно зависят от времени.

Продифференцируем выражение (10) по времени еще раз и упростим, тогда:

$$(\ddot{\boldsymbol{\mu}}_{2})_{ii} = a^{2}c \sum_{n \in \mathbb{Z}} \sum_{k \in \mathbb{Z}} (v_{n,k}^{2} - v_{n,k}v_{n-1,k}).$$
(12)

В силу (7) последнее выражение тоже является постоянным, то есть диагональные компоненты тензора второго момента энергии квадратично зависят от времени.

В результате проведения данной работы стало ясно, что суперпоток энергии в такой решетке сохраняется, диагональные компоненты тензора второго момента энергии квадратично зависят от времени, а вне диагональные – линейно.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Кривцов А.М., Морозов Н.Ф. О механических характеристиках наноразмерных объектов. // Физика твердого тела. – 2002. –Т.44. – №12 – С. 2158-2163.

2. Косевич А.М. Основы механики кристаллической решетки. – М.: Наука, 1975.

3. Кунин И.А. Теория упругих сред с микроструктурой. – М.: Наука, 1975. – 416 с.

УДК 534.11

А.А. Кедров, С.А. Щербинин Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого<sup>(•)</sup>

#### МОДЕЛИРОВАНИЕ ТЕПЛОВЫХ ПРОЦЕССОВ В КАРБИНЕ

Введение. Теоретические [1,2] и экспериментальные [3] исследования показывают, что на микро- и наноуровне распространение тепла носит не диффузионный характер, а баллистический. В частности, отклонение от закона Фурье продемонстрировано в нанотрубках [3], кремниевых мембранах, кремниевых нанопроволоках, графене. Поэтому изучение тепловых процессов на микро- и наномасштабах представляет большой интерес и является актуальным направлением исследований.

Целью данной работы является исследование тепловых процессов в реальном кристалле: однородной углеродной цепочке кумулена – с помощью квантово-механического моделирования и сравнение результатов такого моделирования с теоретическими результатами, полученными ранее В.А. Кузькиным и А.М. Кривцовым [6]. В качестве метода моделирования используется метод «Density Functional based Tight binding» (DFTB), являющийся некоторым приближением первопринципного высокоточного метода «Density functional theory» (DFT) [4]. DFTB сравним по точности с оригинальным DFT, но значительно превосходит его по скорости вычислений.

Модель и методы. В данной работе рассматриваются малые продольные колебания кумулена – цепочки из атомов углерода с одинаковыми связями. Все вычисления проводятся

<sup>&</sup>lt;sup>(•)</sup> С.А. Щербинин, tsherbinin\_sa@spbstu.ru

в программном пакете DFTB+[5]. Были рассмотрены цепочки из 25 частиц и 101 частицы, для каждой задавались периодические граничные условия.

В начальный момент времени задавалось однородное распределение кинетической температуры, что достигалось посредством задания соответствующих начальных условий: смещения всех частиц из их положений равновесия равны нулю, а начальные скорости удовлетворяют условиям

$$\langle v_n \rangle = 0, \langle v_n v_k \rangle = \frac{k_b T^0}{2N} \delta_{nk} \tag{1}$$

где  $T^0$ — температура всей системы в начальный момент времени, N – число частиц в системе,  $\delta_{nk}$  – символ Кронекера, а усреднение идет по всем частицам цепочки.

Для задания условий, соответствующих (2), в начальный момент времени задавались случайным образом скорости, соответствующие равномерному распределению:

$$v_n \in U\left[-\sqrt{3\frac{k_b T^0}{2N}}, \sqrt{3\frac{k_b T^0}{2N}}\right]$$
(2)

Таким образом, задавалось 200 различных реализаций, по которым затем проводилось усреднение и кинетическая температура системы в ходе временной эволюции определялась следующим образом:

$$T = 2k_b^{-1}\langle K \rangle,\tag{3}$$

где (К) – средняя кинетическая энергия, приходящаяся на одну частицу.

Для сравнения результатов моделирования с аналитическими результатами, рассчитанными с помощью формул, полученных в [6], было рассчитано дисперсионное соотношения  $\omega(k)$ . Это соотношение было построено посредством задания в рассматриваемой цепочке начальных смещений, соответствующих линейным нормальным модам с различными волновыми числами и последующим расчетом их частот. Аналитические формулы получены для линейных решеток общего вида и, как ожидается, будут справедливы при малых амплитудах атомных колебаний углеродной цепочки

*Результаты*. Результаты моделирования для цепочки, состоящей из 101 частицы, при начальном распределении скоростей, соответствующем температуре 5.83 К, представлены на рис. 1. На рис. 1а можно вначале наблюдать резкий рост кинетической температуры до значения более 300 К, а затем постепенное затухание колебаний температуры на уровне около 215 К. Резкий рост можно объяснить, если взглянуть на рис. 16, где представлена временная эволюция потенциальной энергии для одной из реализаций (за ноль потенциальной энергии принято значение потенциальной энергии в начальный момент времени). Как видно из графика, в начальный момент времени потенциальная энергия не минимальная и в ходе эволюции системы уменьшается. Это можно объяснить тем, что рассматриваемая углеродная цепочка неустойчива и даже при небольшом значении начальной кинетической температуры переходит в новое состояние.

При моделировании динамики цепочки из 25 частиц было обнаружено, что такая цепочка оказывается устойчивой. На рис. 2 представлено дисперсионное соотношение для такой цепочки, а также сравнение аналитического решения для кинетической температуры, полученного с использованием этого дисперсионного соотношения, с численым решением. Из рисунка видно, что аналитическое решение достаточно хорошо совпадает с численным.

Однако есть и некоторые расхождения между этими решениями, установление причин которых является одной из целей дальнейшего исследования.



Рис. 1. Изменение кинетической температуры (а) и потенциальной энергии (б) с течением времени для системы из 101 частицы



Рис. 2. (а) Зависимость частоты линейной нормальной моды от ее волнового числа для углеродной однородной цепочки из 25 частиц; (б) Сравнение аналитических результатов, полученных с помощью этой зависимости и численных результатов для временной эволюции кинетической температуры

Выводы. С помощью метода DFTB было проведено исследование низкоамплитудных продольных колебаний в однородной углеродной цепочке, соответствующих равномерному начальному распределению кинетической температуры. Установлено, что цепочка из 101 частицы даже при малой начальной кинетической температуре оказывается неустойчивой и переходит в некоторое новое, более устойчивое состояние. Цепочка же из 25 частиц оказалась устойчивой, и для такой короткой цепочки было построено дисперсионное соотношение, на основе которого найдено аналитическое решение для временной эволюции кинетической температуры. Аналитическое решение оказалось достаточно близким к численному. Направлениями дальнейших исследований являются более детальное изучение перехода цепочки из 101 частицы в новое состояние, а также изучение причин расхождения между численным и аналитическим решениями.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Rickert, W., Vilchevskaya, E.N., M<sup>°</sup>uller, W.H. A note on couette flow of micropolar fluids according to eringen's theory // Mathematics and Mechanics of Complex Systems. – 2019. – Vol.7. – P. 25-50.

2. Rieder, Z., Lebowitz, J.L., Lieb, E. Properties of a harmonic crystal in a stationary nonequlibrium state // Journal of Mathematical Physics. – 1967. - Vol 8(5). – P. 1073-1078.

3. Chang, C.W. Experimental probing of non-fourier thermal conductors // S., L. (ed.) Thermal Transport in Low Dimensions. From Statistical Physics to Nanoscale Heat Transfer. – Springer, Heidelberg, 2016. – Vol. 921. – P. 305-338.

4. W. Kohn. Nobel Lecture: Electronic structure of matter—wave functions and density functionals // Rev. Mod. Phys. –1999. –Vol. 71. – P. 1253.

5. DFTB+ [Электронный pecypc]. – URL: https://dftbplus.org/

6. Kuzkin, V.A. Thermal equilibration in infinite harmonic crystals // Continuum Mechanics and Thermodynamics. – 2019. – Vol. 31 (5). – P. 1401-1423.

# СЕКЦИЯ «МАТЕМАТИКА И ЕЕ ПРИЛОЖЕНИЯ»

УДК 519.632

Д.А. Тархов, Т.В. Лазовская, Е.М. Разумов, А.А. Сергеева, М.А. Чистякова Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого<sup>(•)</sup>

# ЭВОЛЮЦИОННЫЕ МЕТОДЫ ОБУЧЕНИЯ НЕЙРОСЕТЕВЫХ РЕШЕНИЙ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ЛАПЛАСА С РАЗРЫВНЫМ ГРАНИЧНЫМ УСЛОВИЕМ ДИРИХЛЕ: АНАЛИЗ И СРАВНЕНИЕ

Современная наука и технологии невозможны без использования компьютерных методов для решения математических задач. Одним из наиболее важных инструментов являются нейронные сети, которые обладают способностью к обучению и поиску сложных зависимостей в данных [1,2]. В данном исследовании рассматривается эффективность различных методов обучения и параметров мутации в эволюционном алгоритме для построения нейросетевого решения уравнения Лапласа в единичном квадрате с разрывным граничным условием Дирихле. Решение подобных задач является важным для практических задач математической физики, таких как моделирование распространения тепла в твердых телах или анализ электростатических полей [2]. Результаты исследования могут быть использованы для создания более точных и эффективных алгоритмов численного решения подобных задач.

Для исследования были использованы три метода обучения сети и три набора параметров мутации, что в сумме дало девять вариантов построения решения. Для каждого из них были проведены многократные расчеты, и проанализированы как усредненные, так и лучшие результаты. Основой обучения сетей является оптимизация соответствующей функции потерь со штрафным параметром [1].

Первый метод обучения включает в себя добавление нейронов по одному с генерацией 100 начальных весов, выбор наилучшего, оптимизацию линейно входящего коэффициента *С* и доучивание всей сети со случайной генерацией точек на границе.

Во втором методе обучения, кроме добавления нейронов по одному и оптимизации, как в первом методе, доучивание всей сети проводилось с исключением неудачно добавленного нейрона.

В третьем, помимо всего вышеперечисленного, используется критерий выбора нейрона как нормированная сумма ошибок по оператору и граничному условию.

Для оценки результатов были использованы три показателя: ошибка удовлетворения уравнению Лапласа, ошибка удовлетворения граничному условию и ошибка соответствия с приближенным решением задачи, построенным на основе метода Фурье. Усредненные результаты приведены в табл. 1.

Особенности проведенных экспериментов:

- 1. Часть программ, особенно те, которые использовали первый метод, требовали значительно больше времени для выполнения по сравнению с другими, например, третьим методом. В некоторых случаях время, необходимое программе для получения ответов, превышало двое суток, что затрудняло получение равного количества результатов для различных блоков.
- 2. Во время выполнения программ, использующих первый метод, значение текущего штрафного параметра (Ag) в функции потерь, который был рассчитан 25 раз для каждого нового нейрона, часто превышал порог в 10<sup>6</sup>. Это происходило в примерно 50% запусков программы. Расчет таких значений занимал гораздо больше времени по

<sup>&</sup>lt;sup>(•)</sup>Д.А. Тархов, dtarkhov@gmail.com

сравнению с меньшими значениями, а точность вычислений становилась недостаточной.

- 3. Если текущее значение коэффициента Ag превышало порог в 10<sup>6</sup>, программа принудительно прерывалась, что также увеличивало время для получения нового значения. Эту особенность следует учитывать при выборе оптимального метода.
- 4. В некоторых случаях экспериментальные графики не совпадали с теоретическими, как показано на рис. 1, слева. Это также следует учитывать при выборе оптимального метода из трех.

Метод	Max	Число	Расчетный	Среднекв.	Среднекв.	Среднекв.
	число	эпох	штрафной	ошибка,	ошибка,	ошибка,
	нейронов	обучения	параметр Ад	уравнение	граничное	решение
		первого	в функции	Лапласа	условие	Фурье
		нейрона	потерь			
1	20	200	0,9146925	0,0583049	0,1956895	0,0740306
1	20	400	0,9962438	1,2092330	0,1313035	0,0501956
1	30	200	0,9955565	2,1524250	0,1023898	0,0310222
2	20	200	0,5710418	0,8537900	0,4809525	0,4137480
2	20	400	1,0711500	0,8250230	0,3055080	0,2340410
2	30	200	0,8141750	1,0277335	0,2209275	0,1477175
3	20	200	1,0204165	4,1492300	0,1321786	0,0453144
3	20	400	0,9197200	0,2688913	0,3044460	0,1712070
3	30	200	0,6835980	0,0198399	0,4751560	0,3628500

Табл. 1. Усредненные результаты многократных вычислительных экспериментов



Рис. 1. Графики нейросетевого u(x, x) и аналитического решения w(x, x), 3-й метод (слева) и 1-й метод (справа)

На основе результатов экспериментов можно заключить, что первый метод, который основан на добавлении нейронов по одному с генерацией n1 начальных весов, выбором из них наилучшего, оптимизацией C и доучиванием всей сети со случайной генерацией точек на границе, является наиболее удачным. На проведенном количестве вычислительных экспериментов этот метод демонстрирует наименьшие значения среднеквадратичной ошибки удовлетворения граничному условию, наименьшее значение среднеквадратичной ошибки соответствия пробной функции и наименьшее значение среднеквадратичной ошибки

удовлетворения уравнению Лапласа. Кроме того, в вычислениях этого метода чаще встречаются графики, которые почти полностью соответствуют теоретическим значениям (рис. 1, справа), в то время как в других блоках присутствуют достаточно заметные и существенные отклонения (рис. 1, слева).

Однако для уточнения приведенных выводов необходимо расширить объем экспериментальных данных.

Работа выполнена при поддержке гранта Российского научного фонда № 22-21-20004, https://rscf.ru/project/22-21-20004/.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Tarkhov, D. Vasilyev, A. Semi-Empirical Neural Network Modeling and Digital Twins Development; Academic Press: Cambridge, MA, USA, 2020.

2. Antonov, V. Tarkhov, D. Vasilyev, A. Unified approach to constructing the neural network models of real objects. Part 1. Math. Methods Appl. Sci. 2018, 41, 9244–9251.

УДК 519.632

Д.М. Пашковский, Д.А. Тархов, Т.В. Лазовская Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого<sup>(•)</sup>

# АЛГОРИТМ ПОДБОРА ОПТИМАЛЬНОЙ СТРУКТУРЫ НЕЙРОННОЙ СЕТИ ДЛЯ АППРОКСИМАЦИИ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЯ ЛАПЛАСА

Моделирование физико-механических процессов в промышленности, энергетике и строительстве требует применения математического моделирования, в котором для описания процессов чаще всего используется аппарат дифференциальных уравнений в частных производных. Существуют два больших класса численных методов для решения данных уравнений. Это сеточные методы (например, методы конечных элементов, конечных объемов и другие) и бессеточные методы (например, методы динамики частиц, методы сглаженных частиц и другие). На практике возникает множество трудностей при использовании этих методов, например, сложность алгоритмов формирования сетки, большие размерности задач и неустойчивость алгоритмов относительно ошибок округления. Для преодоления этих трудностей могут быть использованы методы аппроксимации на основе нейронных сетей, однако их применение также внесет свои сложности в виде большого количества скрытых слоев и нейронов, создавая трудности при обучении и вычислении значений аппроксимации решения. В рамках нашего исследования мы разработали метод поиска приближенного решения уравнения Лапласа, который позволяет автоматически подобрать оптимальное количество нейронов на каждом скрытом слое радиально-базисной нейронной сети в процессе обучения.

В данной работе решается задача Дирихле для двумерного уравнения Лапласа на области **Ω** с условиями на границе Γ<sub>Ω</sub>:

$$\Delta u(x,y) = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, \quad (x,y) \in \Omega, \qquad u(x,y)|_{\Gamma_{\Omega}} = f(x,y)$$
(1)

где  $\Omega$  – рассматриваемая двумерная область,  $\Gamma_{\Omega}$  – граница  $\Omega$ .

Приближенное решение задачи (1) ищется в форме нейронной сети с радиально – базисными функциями с одним скрытым слоем (RBF - сеть) [1,2]:

<sup>(•)</sup>Д.А. Тархов, dtarkhov@gmail.com

$$u(x,y) = \sum_{i=1}^{K} w_i \varphi_i(x,y)$$
<sup>(2)</sup>

где K – размер RBF-сети (или количество нейронов),  $\varphi_i(x, y)$  – функция Гаусса следующего вида:

$$\varphi_i(x, y) = \varphi(x, y, c_i^x, c_i^y, s_i) = \exp\left(-s_i\left((x - c_i^x)^2 + (y - c_i^y)^2\right)\right)$$
(3)

а  $w_i$ ,  $c_i^x$ ,  $c_i^y$ ,  $s_i$  – параметры RBF-сети, *i* - индекс параметра. Параметры  $c_i^x$ ,  $c_i^y$  называются центрами радиально-базисных функций,  $s_i$  – шириной радиально-базисной функции,  $w_i$  – веса нейронной сети. Слагаемое  $w_i \varphi_i(x, y)$  в (2) будем называть нейроном RBF-сети.

Алгоритм поиска приближенного решения уравнения Лапласа (1) сводится к поиску параметров  $w_i$ ,  $c_i^x$ ,  $c_i^y$ ,  $s_i$  RBF-сети, минимизирующих квадратичный функционал J(u):

$$u(x, y) = \underset{w_i, c_i^x, c_j^y, s^i}{\operatorname{argmin}} J(u)$$
(4)

Для уравнения Лапласа квадратичный функционал *J*(*u*) имеет следующий вид [1,2]:

$$J(u) = \int_{\Omega} (\Delta u)^2 d\Omega + \int_{\Gamma_{\Omega}} (u - f)^2 d\Gamma_{\Omega}$$
<sup>(5)</sup>

где первое слагаемое в функционале соответствует ошибке по уравнению Лапласа на области  $\Omega$ , а второе слагаемое отвечает за ошибку выполнения граничных условий на  $\Gamma_{\Omega}$ .

Подбор минимального числа нейронов K радиально-базисной нейронной сети осуществляется одновременно с процессом минимизации функционала J(u). Задача состоит в том, чтобы найти такое число  $K^*$ , которое бы удовлетворяло следующим условиям:

- 1. Оптимальный размер RBF-сети находится в диапазоне  $K_{min} < K^* < K_{max}$ ;
- 2.  $K^*$  должно быть минимально при условии, что решение u(x,y) удовлетворяет заданной точности J(u) < E, где E заданная точность для приближенного решения.

За основу алгоритма обучения сети (минимизации функционала (4)) был выбран шаг метода Бройдена-Флетчера-Гольдфарба-Шанно (BFGS) [3]. Общая схема алгоритма оптимизации при условии поиска наименьшего количества нейронов *К* состоит из следующих шагов:

- 1. Инициализация алгоритма BFGS;
- 2. Проверка условия J(u) < E. Если условие выполнено, то алгоритм завершается;
- 3. Шаг метода BFGS;
- 4. Проверка условия на изменение структуры RBF-сети. В зависимости от результата осуществляется вставка или удаление нейрона RBF-сети;
- 5. Проверка на локальный минимум. В случае, если условие выполнено, то осуществляется вставка и удаление одного нейрона для того, чтобы продолжить минимизацию;
- 6. Переход на Шаг 2;

Критерием для вставки или удалением нейрона RBF-сети является параметр  $T_r$ , который вычисляется на итерации l для функционала J(u) за r шагов оптимизации:

$$T_r = \sum_{k=p-r}^{p} \left( J_{k+1}(u) - J_k(u) \right)$$
(6)

В зависимости от того, какой знак у параметра  $T_r$ , принимается следующее:

- Если  $T_r < 0$ , то функционал J(u) убывает. Осуществляется удаление нейрона.
- Если  $T_r > 0$ , то функционал J(u) возрастает. Осуществляется вставка нейрона.

• Если  $|T_r| < \varepsilon_s$ , то функционал J(u) не изменяется. Осуществляется одновременная вставка и удаление нейрона.

Мы протестировали алгоритм на модельной задаче для двумерного уравнения Лапласа на квадрате с разрывными граничными условиями:

$$u|_{\Gamma_1} = u|_{\Gamma_2} = 1, \qquad u|_{\Gamma_3} = u|_{\Gamma_4} = 0$$
 (7)

где Г<sub>1</sub>, ..., Г<sub>4</sub> – стороны квадрата. Аппроксимация RBF-сетью сравнивается с решением полученным методом Фурье.

На рис.1 показано аналитическое решение при 100 слагаемых в ряде Фурье (красная поверхность) и аппроксимация RBF-сетью (синяя поверхность).



Рис. 1. Аналитическое решение при 100 слагаемых в ряде Фурье (красная) и численное (синяя) решения u(x,y) для тестовой задачи

Итоговое число нейронов в RBF-сети равно 14. Решения имеют большое расхождение на границе, но при этом внутри области разница между решениями небольшая.

На рис. 2 показана зависимость числа нейронов RBF-сети от номера итерации минимизации функционала J(u).



Рис. 2. Число нейронов от номера итерации для тестовой задачи

На рис. 2 видно, что в результате алгоритма подбора структуры сети удалось уменьшить количество нейронов на 6. При этом решение удовлетворяет заданной точности.

Заключение. В работе представлен алгоритм подбора оптимальной структуры RBF-сети для поиска приближенного решения задачи Дирихле для уравнения Лапласа. Данный алгоритм позволяет уменьшить число нейронов RBF-сети при заданной точности приближенного решения уравнения. Работа данного алгоритма продемонстрирована на модельной задаче с разрывными граничными условиями.

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда № 22-21-20004.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Тархов Д. А. Нейронные сети: модели и алгоритмы. – М.: Радиотехника, 2005, – 256 с.

2. Tarkhov D.A., Migovan M.A., Ivanenko K.A., Smirnov S.A., Kobicheva A.M. The Problem of Solution Restoration by Measurements for the Laplace Equation // Advances in Intelligent Systems and Computing. – 2019. – Vol. 850. – <u>https://doi.org/10.1007/978-3-030-02351-5\_51</u>

3. Goldfarb. D. A family of variable-metric methods derived by variational means // Mathematics of Computation. – 1970. – Vol. 24. – P. 23-26.

УДК 51-74

Д.А. Тархов, М.Д. Закирова, Д.А. Лавыгин, О.А. Скрипкин Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого<sup>(•)</sup>

# ПРИМЕНЕНИЕ РАЗЛИЧНЫХ ЧИСЛЕННЫХ МЕТОДОВ ДЛЯ СТАБИЛИЗАЦИИ ОБРАТНОГО МАЯТНИКА

Введение. В современном мире существует множество неустойчивых систем, требующих стабилизации, начиная с термоядерного реактора и заканчивая гироскутером. Задача управления такими системами является практически важной проблемой управления, так как неустойчивый объект при выходе из строя может представлять существенную опасность для человека и окружающей среды. В данной статье мы провели сравнительный анализ двух методов управления неустойчивой системой на примере задачи стабилизации обратного маятника. Также конструкция обратного маятника может использоваться в робототехнике при создании элементов, необходимых для поддержания равновесия.

Цель работы. Исследование двух подходов для управления обратным маятником: метод линеаризации и непрерывная модификация неявного метода Эйлера. Решение проблемы, которая заключается в нелинейности уравнений, описывающих поведение обратного маятника.

В соответствии с принципом максимума Понтрягина [1] оптимальное по времени ограниченное управление состоит в совершении двух шагов с постоянными максимальными управлениями разных знаков. В качестве первого метода будем рассматривать метод линеаризации, с помощью которого мы сможем уйти от нелинейности системы, вывести уравнения, которыми описывается движения маятника и вычислить оптимальное время каждого из управлений. Метод линеаризации чаще всего применяется к такого рода задачам.

Данный метод работает только для точек, которые попадают в определенные области (рис. 1, 2); в зависимости от того, в какую область попала точка, выбирается знак управления.





Рис. 2. Управление выбирается с положительным знаком

<sup>&</sup>lt;sup>(•)</sup>Д.А. Тархов, dtarkhov@gmail.com

Поведение маятника в окрестности верхнего положения равновесия моделируем системой на фазовой плоскости:

$$\begin{cases} \dot{x} = y\\ \dot{y} = sinx + u \end{cases} (1)$$

Выполним линеаризующую замену sinx = x, получим систему, которая решается аналитически.

Рассмотрим случай, когда точка попадает в область на рис.2. Системы, описывающие первый и второй шаг, соответственно примут вид:

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{y} \\ \dot{\mathbf{y}} = \mathbf{x} + 1 \end{cases} \begin{cases} \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{y} \\ \dot{\mathbf{y}} = \mathbf{x} - 1 \end{cases};$$

Решения дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} x + y + 1 = e^{t_1}c_1 \\ x - y + 1 = e^{-t_1}c_2 \end{cases} \begin{cases} x + y - 1 = e^{t_2}c_3 \\ x - y - 1 = e^{t_2}c_4 \end{cases};$$

Исходя из решения данных систем, мы можем сделать вывод, что движение точки описывается гиперболой. Первая и вторая гипербола имеют вид соответственно:

$$(x+1)^2 - y^2 = c_1 c_2$$
,  $(x-1)^2 - y^2 = a$ 

Необходимо взять c<sub>1</sub>c<sub>2</sub>=1, чтобы первая гипербола проходила через начало координат: чтобы точка после совершения управления попадала в окрестность нуля. Во втором уравнении *a* принимает значение:  $a = (x_0 - 1)^2 - y_0^2$ . Это условие принадлежности точки с координатами (x<sub>0</sub>, y<sub>0</sub>) второй гиперболе.

Пересечение получившихся гипербол, точка с координатами (x<sub>1</sub>;y<sub>1</sub>), является точкой переключения управлений. Исходя из этого и систем, которые являются решениями дифференциальных уравнений, мы можем найти время действия каждого из управлений:

$$t_{1} = \ln \frac{1 - (x_{0} - 1)^{2} + y_{0}^{2} - \sqrt{((x_{0} - 1)^{2} - y_{0}^{2} - 9)((x_{0} - 1)^{2} - y_{0}^{2} - 1) - 4}}{4(x_{0} + y_{0} - 1)};$$
  
$$t_{2} = \ln \frac{1}{x_{1} + y_{1} + 1};$$

Второй подход [2] заключается в решении системы (1) с помощью неявного метода Эйлера. Движение точки на первом шаге t будет описываться уравнением:

$$\begin{cases} x_1 = x_0 + ty_1 \\ y_1 = y_0 + t(\sin x_1 + u) \\ \text{Ha BTOPOM IMARE } \tau: \\ \begin{cases} x_2 = x_1 + \tau y_2 \\ y_2 = y_1 + \tau(\sin x_2 - u) \end{cases}$$
(3)

По окончанию второго шага, мы хотим попасть в окрестность нуля, следовательно.  $x_2 = 0, y_2 = 0$ , тогда из систем (2) и (3) мы можем вычислить само управление на первом шаге:  $u = -sign(x_0)$ . По полученным результатам, получаем формулы длительности каждого из управлений:

 $t = 0.5\sqrt{y_0^2 + 4|x|} - y_0 u, \ \tau = 0.5\sqrt{y_0^2 + 4|x|} + y_0 u$ 

Идея состоит в объединении этих двух численных методов, чтобы в зависимости от положения точки на фазовой плоскости, применялся тот или иной метод, что поможет нам создать комбинированный метод, исправно работающий для любых начальных условий. В ближайшем будущем планируется создание нейросети, которая смогла бы оптимизировать данный процесс.

Работа выполнена при поддержке Российского Научного Фонда под грантом №22-21-20004.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Понтрягин Л.С., Болтянский В.Г., Гамкрелидзе Р.В., Мищенко Е.Ф. Математическая теория оптимальных процессов, М.: Наука, 1969

2. Тархов Д.А., Суббота А.Д., Суриков И.Ю. Применение приближенных многослойных методов решения дифференциальных уравнений к задаче стабилизации перевернутого маятника, НЕДЕЛЯ НАУКИ СПбПУ Материалы научной конференции с международным участием, 2017, с. 63-65

3. Васильев А.Н., Тархов Д.А. Нейросетевое моделирование. Принципы. Алгоритмы. Приложения , СПб.: Изд-во Политехн. Ун-та, 2009.

УДК 511.238

В.А. Рожицын, И.А. Ромашов, Б.С. Терушкин, С.Ф. Неробова Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого<sup>(•)</sup>

### ПОЛЯ ГАЛУА И ИХ ПРИМЕНЕНИЕ В КРИПТОГРАФИИ

В данной работе рассматриваются поля Галуа, полиномы, основанные на арифметике полей Галуа и их применение в криптографии.

Метод кодирования, основанный на полях Галуа, называется «коды Рида-Соломона». Кодирование происходит путем добавления избыточных бит информации, полученных по алгоритмам, основанным на полях Галуа. Благодаря этому осуществляется проверка целостности переданного файла и, при помехах или прерываниях во время передачи информации, его восстановления.

Кодом Рида-Соломона называется линейный циклический (n, n - d + 1) - код над GF(q), где  $q = p^m$ , длины n = q - 1, порождающий многочлен которого g(X) имеет своими корнями d-1 последовательных степеней примитивного элемента  $\alpha$  из поля GF(q) [1].

Процесс кодирования происходит следующим образом [2]:

- Разбитие информации на блоки;
- Представление каждого блока в полиномиальном виде;

• Умножение полученных полиномов на  $x^{2t}$ , где t – параметр, от которого зависит количество возможных ошибок в блоке;

• Нахождение остатка от деления полученных полиномов на порождающий полином;

• Сложение остатка с результатом умножения.

В результате выполнения этого алгоритма получается информация, закодированная кодом Рида-Соломона.

После передачи информации необходимо провести процесс декодирования информации, который состоит из следующих действий:

• Вычисление синдрома ошибки.

Для вычисления синдрома ошибки требуется найти остаток от деления полученной информации на порождающий полином. Если результат отличен от нуля, то данные не валидны, а полученный остаток от деления является синдромом ошибки.

Построение полинома ошибки.

Построение полинома ошибки необходимо ввиду того, что синдром ошибки не указывает на местоположение ошибок. Для вычисления полинома ошибки нужно

<sup>&</sup>lt;sup>(•)</sup> В.А. Рожицын, vladrocyn@yandex.ru

использовать алгоритм Евклида, либо алгоритм Берлекэмпа-Месси. Полином ошибки явно соответствует коэффициентам ошибок в данных.

• Вычисление корней полинома.

Приравнивая полином ошибки к нулю и находя все его корни, получаем местоположение ошибок.

Задачи данной работы заключались в реализации процедур кодирования и декодирования информации кодами Рида-Соломона, а также в создании демонстрационного примера для проверки корректности работы программы.

Программа написана на языке программирования Python в силу его функционала, синтаксиса и возможностями при работе с битовой информацией.

Для возможности последующего использования результатов работы взаимодействие с полями Галуа реализовано в виде отдельного класса, на вход которого подается полином, с которым проводятся операции, и порождающий полином. Имплементированы методы сложения, вычитания, умножения и нахождения остатка от деления. Выполнение операций на полях Галуа выполняется посредствам класса, так как это позволяет гибко манипулировать большим количеством данных, что и требуется в поставленной задаче.

Еще одной причиной, по которой было выбрано реализовывать арифметику через класс, стала легкость передачи таких параметров, например, как количество возможных исправленных ошибок (t, см. процесс кодирования). Инициализация классов требует следующие параметры: информация в полиномиальном виде, порождающий полином и количество допустимых ошибок при передаче данных. Методы класса: кодирование и декодирование данных.

Рассмотрим подробнее метод кодирования информации.

• Исходная информация преобразовывается в последовательность битов, разделяется на блоки фиксированной длины и преобразуется в полиномиальный вид.

• Далее используется функция умножения на полях Галуа для «сдвига» полинома на 2t бит влево.

• Следующим шагом является нахождение остатка от деления полученных наборов на заданный порождающий полином.

• В результате сложения вычисленных на прошлом шаге остатков от деления со сдвинутыми наборами данных получаем информацию с кодами Рида-Соломона.

Следует также детально разобрать процесс декодирования данных.

Каждый полученный закодированный набор данных делится на порождающий полином для нахождения остатка от деления с помощью реализованных методов операций с полиномами на полях Галуа. В случае получения нуля данные не проходят последующие шаги исправления ошибки, так как информация не содержит ошибок. Если же остаток от деления отличен от нуля, данные считаются подлежащими восстановлению, а результат операции является найденным синдромом ошибки.

В связи с тем, что синдром ошибки не указывает местоположения ошибок, необходимо построить полином ошибки и вычислить его корни. Полином может вычисляться при помощи алгоритма Евклида, либо алгоритма Берлекэмпа-Мэсси. В реализации данного проекта использован второй метод ввиду меньших временных затрат при вычислении. Таким образом был получен полином ошибки, соответствующий коэффициентам местоположений ошибок.

Нахождение корней полинома ошибки производится посредством стандартного перебора.

Далее составляется маска положений ошибочных битов. Для этого используется алгоритм Форни. После этого можно исправить ошибки в полученных данных.

Все вышеизложенное реализовано в написанной программе.

Для проверки реализованных классов и методов был реализован класс для чтения данных из файла, их кодирования с различными параметрами инициализации класса кодирования, случайного создания ошибок в различных местах, декодирования с попыткой восстановления искаженной информации и валидацией данных с исходным текстом. Создание такого класса помогло обнаружить некоторые ошибки в процессе написания программы, а также смогло подтвердить окончательную правильность реализации всех алгоритмов программы.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Вернер М. Основы кодирования. - М.: Техносфера, 2004. - 288 с.

2. Морелос-Сарагоса Р. Искусство помехоустойчивого кодирования. Методы, алгоритмы, применение. - М.: Техносфера, 2005. - 320 с.

#### УДК 534.44

С.Е. Девятовский, А.А. Денисова

Государственный университет морского и речного флота имени адмирала С.О. Макарова<sup>(•)</sup>

# ПРОСТЕЙШЕЕ ШУМОПОДАВЛЕНИЕ ЗВУКА МЕТОДАМИ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ОБРАБОТКИ СИГНАЛОВ

В настоящее время с развитием музыкальной индустрии и внедрения в нее информационных технологий возрастает спрос на эффективные алгоритмы для обработки звуковых сигналов, позволяющие реализовать такие эффекты, как реверберация (постепенное уменьшение интенсивности звука при многократных отражениях), компрессия (сокращение динамического диапазона), перегруз (искажение сигнала за счет «мягкого» ограничения по амплитуде) и другие. К этим эффектам относится также и шумоподавление. Шумоподавление позволяет повысить качество воспроизведения треков на звуковых мониторах различного устройства, путем отчистки сигнала от шумовых частот различного вида.

Музыкальной нотой (чистым тоном) с точки зрения физики называется звуковое гармоническое колебание с постоянной частотой в диапазоне от 16 до 20000 Гц и заданной амплитудой, отвечающей за ее громкость [2]. Таким образом, любую ноту можно смоделировать следующей функциональной зависимостью от времени:

$$x = A\sin(2\pi ft + \varphi_0),$$

которое является решением волнового уравнения  $\Delta u = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$ , где f – частота в герцах, A –

амплитуда,  $\varphi_0$  – начальная фаза колебаний.

Функция от времени, соответствующая звуковому колебанию, также называется временной формой сигнала. Помимо нее существуют так же частотно-амплитудная и частотно-фазовая формы представления сигнала. Их также именуют амплитудно-частотной и фазово-частотной характеристиками сигнала.

<sup>&</sup>lt;sup>(•)</sup> С.Е. Девятовский, seregadev86@gmail.com

Рассмотрим представление сигнала на примере функции  $x(t) = \sin\left(2\pi \cdot 2t + \frac{\pi}{4}\right)$ .

Графическое представление рассматриваемого сигнала, а также его амплитудночастотная и фазово-частотная характеристики показаны на рисунках 1, 2 (а, б).

Таким образом, спектром называют совокупность АЧХ и ФЧХ [1]. Однако чаще всего как спектр принято рассматривать только амплитудно-частотную характеристику сигнала. Для перехода от сигнала к его спектру используется преобразование Фурье, которое представляет любое гармоническое колебание как сумму простых гармоник, образующих исходный сигнал. Формула прямого преобразования Фурье [3]:

$$X(f) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-2\pi i f t} dt$$

Необходимо учесть, что спектр сигнала – сумма сигналов, представленных как функции комплексной переменной, тогда модуль спектра |X(t)| представляет собой амплитудно-частотную характеристику сигнала, а его аргумент  $\arg X(t)$  – фазово-частотную.



Рис. 1. Представление синусоидального сигнала



Использование преобразования Фурье позволяет рассматривать частотные характеристики как одного сигнала, так и целой смеси, тогда, применительно к музыке, каждый аккорд (несколько одновременно звучащих нот) можно разложить на входящие в него ноты, что позволит в дальнейшем использовать преобразование Фурье [1]. Шумоподавление, рассматриваемое в данной работе, не включает в себя использование классических фильтров цифровой обработки сигналов. Алгоритм предполагает построение спектра сигнала с помощью прямого преобразования Фурье для определения гармоник, составляющих исходный сигнал, содержащих гармоники, которые не являются чистыми тонами, обладают высокой частотой (> 1000 Гц) с последующим удалением их из сигнала.

В рамках рассматриваемой темы, предположим, что с мониторов проигрывается звуковой файл с шумом на высокой частоте (рис. 3), сигнал которого определяется следующей функцией:

 $x(t) = 10 [2\sin(1053.48\pi t)\cos(121.16\pi t) + 2\sin(815\pi t)\cos(581.92\pi t) + \sin(349.24\pi t) + 2\sin(2000\pi t)]$ Применив преобразование Фурье, получаем спектр сигнала (рис. 4). По представленному спектру можно сделать вывод, что шумовой гармоникой является гармоника с частотой 1000 Гц. Удалив данную гармонику из сигнала, мы получим чистый, отфильтрованный сигнал, временную форму которого можно записать в следующем виде:

 $x(t) = 10\sin(932, 32\pi t) + 10\sin(1174, 64\pi t) + 10\sin(1396, 92\pi t) + 10\sin(233, 08\pi t) + 10\sin(349, 24\pi t)$ Графическое представление отфильтрованного сигнала представлено на рисунке 5.





Рис. 4. Частотный отклик сгенерированного сигнала



Рис. 5. Результаты работы фильтра

Стоит отметить, что, благодаря разложению сгенерированного сигнала на простые гармоники, можно наблюдать, что он состоит из нот трезвучия си-бемоль мажор с басовыми ступенями.

Таким образом, данный метод позволяет очистить сигнал, в рассматриваемой работе – звуковой файл, от шумов на высоких частотах, не являющихся чистыми тонами. На практике шумоподавление является более сложным процессом, где необходимо учитывать не только высокочастотные шумы, но и различные случайные шумы, а также рассматривать сигнал на наличие белого шума. В дальнейшем планируется провести реализацию алгоритма шумоподавления случайных шумов и белого шума на языке программирования Рython 3.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. В.П. Кандидатов, С.С. Чесноков, С.А. Шленов. Учебно-методическое пособие «Дискретное преобразование Фурье». – Москва: Московский Государственный университет им. М.В. Ломоносова, физический факультет, 2019 – 27 с.

2. И.В. Способин. Элементарная теория музыки. – Москва: Кифара, 2020 – 208 с.

3. В.А. Бесекерский, А.А. Елисеев, А.В. Небылов, А.А. Оводенко, Н.П. Поляков. Радиоавтоматика: Учеб. пособие для студ. вузов спец. Под ред. В.А. Бесекерского – М.: Высш. шк., 1985. – 271 с.

УДК 519.65

У.В. Терентьева, В.В. Гарбарук Петербургский государственный университет путей сообщения Императора Александра I<sup>(•)</sup>

# МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ РАБОТОСПОСОБНОСТИ АККУМУЛЯТОРА

Бесперебойность электропитания различного микроэлектронного оборудования необходима для обеспечения безопасности движения поездов. При пропадании внешнего энергоснабжения переход с основного питания на резервное обеспечивают аккумуляторные батареи железнодорожной станции [1]. Одним из важнейших показателей готовности аккумулятора к работе является его уровень заряженность, который постоянно проверяется в процессе технического обслуживания. Известно, что напряжение аккумулятора меняется в зависимости от степени его заряженности. Для различных температур t в таблице 1 приведены эмпирические величины напряжения H аккумуляторной батареи, по которым определяется процент P степени ее заряженности после специального теста.

Табл. 1			
t	-15°	0 °	25 °
P			
100%	25,8	25,4	25,2
75%	25,6	25,2	25,0
50%	25,4	25,0	24,8
25%	24,8	24,6	24,4
5%	24,2	23,8	23,6

Задача установления функциональной связи между данными, полученных экспериментальным способом, часто возникает в научных исследованиях. Аппроксимация числовых последовательностей функцией одной переменной хорошо разработана, но подбор функции нескольких переменных значительно более труден. Для обработки трехмерного

<sup>&</sup>lt;sup>(•)</sup> В.В. Гарбарук, garbaruk@pgups.ru

массива данных создана программа «TableCurve 3D», внутри которой содержится более пятнадцати тысяч [2] аппроксимирующих функций. Применение этой программы дает возможность быстро оценить качество выбора функции, но определение типажа нужной функции двух переменных остается за исследователем. В работе [3] на основе ряда теорем А.Н. Колмогорова и В.И. Арнольда функция нескольких переменных ищется в виде взвешенной суммы функций одной переменной при определения искомой функциях. Метод наименьших квадратов был применен [4] после представления искомой функции суммой одномерных функций. Похожий метод применен в данной работе при другом задании формы функции двух переменных.

При аппроксимации эмпирических точек поверхности функцией двух переменных H = f(P, t) сначала были рассмотрены различные виды зависимости H = f(P, c) = g(P) при различных значениях t = c и функции H = f(c, t) = h(t) при постоянных значениях H = c. По наибольшему коэффициенту детерминации  $R^2$  были выбраны степенная функция  $g(P) = a \cdot P^b$  и  $h(t) = c \cdot e^{kt}$ . Искомая функция двух переменных была представлена в виде произведения степенной и экспоненциальной функций  $H = d \cdot P^b \cdot e^{kt}$ , т.к. при фиксации одной из переменных P или t характер изменения величины H соответствует выбранной ранее функции другой переменной. Логарифм данной функции  $\ln d + b \cdot \ln P + kt$  линеен относительно аргументов  $\ln P$  и t, что дает возможность построения линейного регрессионного уравнения методом наименьших квадратов. Подставив полученные в результате расчетов коэффициенты  $\ln d = 3,14$ ; b = 0,022; k = -0,00054, в формулу находим функцию двух переменных  $H = 23,06 \cdot P^{-0,00054t}$  при высоком коэффициенте детерминации  $R^2 = 0,98$ .

Формулу  $H = d \cdot P^b \cdot e^{kt}$  можно записать в виде

$$P = \left(\frac{H}{d \cdot e^{kt}}\right)^{\left(\frac{1}{b}\right)}.$$

Если достоверность этой формулы будет подтверждена экспериментальными исследованиями, то ее можно использовать при проверке работоспособности аккумуляторов, не прибегая к табл.1.

В табл. 2 кроме исходных экспериментальных данных записаны результаты прогноза, вычисленные по полученной для величины *H* формуле, а также относительная погрешность такого прогноза. Все вычисления проведены в программе Excel.

t	-15°			0 °			25 °		
P	Экспер.	Прогноз	Погр.	Экспер.	Прогноз	Погр.	Экспер.	Прогноз	Погр.
100%	25,8	25,68	0.46%	25,4	25,47	0,29%	25,2	25,13	0,26%
75%	25,6	25,52	0,31%	25,2	25,32	0,46%	25,0	24,98	0,09%
50%	25,4	25,30	0,40%	25,0	25,10	0,38%	24,8	24,76	0,16%
25%	24,8	24,92	0,49%	24,6	24,72	0,50%	24,4	24,39	0,04%
5%	24,2	24,07	0,54%	23,8	23,88	0,32%	23,6	23,56	0,18%

Табл. 2

Максимальная относительная погрешность прогноза составляет всего 0,54%. Хорошие результаты аппроксимации дают возможность прогнозировать величину напряжения аккумуляторной батареи *H* в различных диапазонах изменения *P* и *t*. Появляется, например, возможность экстраполировать экспериментальные данные таблицы 1 на более низкие или высокие температуры. Например, для северных районов может быть актуальной табл. 3.

Т	абл	3
	aosi.	<i>J</i> •

t	-35°	-25°	-15°
P			
100%	25,96	25,82	25,8
75%	25,80	25,66	25,6
50%	25,57	25,44	25,4
25%	25,19	25,06	24,8
5%	24,33	24,20	24,2

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Сапожников Вл.В. Станционные системы автоматики и телемеханики: Учеб. для вузов ж. -д. трансп. / Вл.В. Сапожников, Б.Н. Елкин, И.М. Кокурин и др.; Под ред. Вл.В. Сапожникова. – М.: Транспорт, 1997. – 432 с.

2. Панфилов Г.В., Черняев А.В. Аппроксимация трехмерных графических зависимостей // Известия Тульского государственного университета. Технические науки. 2017.Вып. 11. Ч. 1. С. 194 –206.

3. Бутырский Е.Ю., Кувалдин И.А., Чалкин В.П. Аппроксимация многомерных функций // Научное приборостроение. 2010, том 20, № 2. С. 82–92.

4. Данилов А.М., Гарькина И.А. Интерполяция, аппроксимация, оптимизация: анализ сложных систем. – Пенза: ПГУАС, 2014. – 168 с.

УДК 511.3

Ю.В. Елесина, Б.С. Терушкин

Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого<sup>(•)</sup>

# НАХОЖДЕНИЕ НАИБОЛЬШЕГО ПРОИЗВЕДЕНИЯ НАТУРАЛЬНЫХ ЧИСЕЛ, СУММА КОТОРЫХ РАВНА С

#### (обобщение олимпиадной задачи 18.4 XVIII ММО, 1976)

Объект исследования – натуральные числа.

Предмет исследования – разбиение натурального числа для определения максимального произведения слагаемых.

Цель: исследовать закономерности разбиений натуральных чисел для определения максимального произведения слагаемых [1].

Гипотеза: разбиение натурального числа для определения максимального произведения слагаемых можно найти по универсальной формуле и единому алгоритму.

В 1976 году на XVIII Международной математической олимпиаде школьников была предложена задача: «Определить наибольшее число, являющееся произведением нескольких натуральных чисел, сумма которых равна 1976» [2]. Требуется найти такое разбиение числа 1976 на слагаемые, чтобы их произведение было наибольшим.

Решение:

Пусть наибольшее значение произведения достигается при разложении числа в виде слагаемых:  $1976 = a_1 + a_2 + \ldots + a_n$ .

Докажем, что все  $a_i > 1$ . Предположим противное. Тогда если хотя бы одно из слагаемых было 1 (например,  $a_1=1$ ), то искомое произведение было бы равно произведению остальных слагаемых и 1:  $1 \cdot a_2 \cdot a_3 \cdot \ldots \cdot a_n$ . Однако можно 1 объединить с одним из слагаемых и получится произведение больше данного ( $a_2+1$ )··· $a_3 \ldots \cdot a_n > a_2 \cdot a_3 \ldots \cdot a_n = 1 \cdot a_2 \cdot a_3 \ldots \cdot a_n$ .

<sup>&</sup>lt;sup>(•)</sup>Ю.В. Елесина, elesina2.yuv@edu.spbstu.ru

Докажем, что все  $a_i < 5$ . Предположим противное. Тогда если хотя бы одно из слагаемых было не меньше 5 (например,  $a_1 \ge 5$ ), то искомое произведение было бы равно произведению остальных слагаемых и  $a_1 \ge 5$ :  $a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_n$ .

Рассмотрим число  $a_1 \ge 5$  и его разбиение на слагаемые 3 и ( $a_1$ -3).

Тогда  $3 \cdot (a_1 - 3) = 3 \cdot a_1 - 9 = a_1 + 2 \cdot a_1 - 9 \ge a_1 + 2 \cdot 5 - 9 = a_1 + 1 > a_1$ .

Следовательно,  $a_1 < 3 \cdot (a_1 - 3)$ . Значит, при  $a_1 \ge 5$ :  $a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_n < 3 \cdot (a_1 - 3) \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_n$ .

Если один из множителей равен 4, то это равносильно случаю, когда есть два множителя, каждый из которых равен 2. 2+2=4 и  $2\cdot 2=4$ . Можно считать, что разложение числа не содержит 4 (вместо этого две 2).

Тогда в искомом разложении числа могут присутствовать лишь числа 2 и 3 для нахождения наибольшее значение произведения слагаемых.

Докажем, что количество двоек не может быть больше трех. Если есть хотя бы три двойки, то их следует заменить на две тройки, т.к. 2+2+2=6=3+3, но 2·2·2<3·3.

Значит, число нужно разложить на максимальное количество слагаемых по 3 и одно или два слагаемых по 2.

Т.к. 1976=658·3+2, то максимальное произведение слагаемых равно 2·3<sup>658</sup>.

В данной работе рассмотрено несколько заданий, где условия («разбиение натурального числа...») были такими же, как и в рассмотренной ранее задаче, но вместо исходного числа (1976) были иные (см. таблицу 1). В табл. 1 записано каждое выбранное число и его разложение для нахождения максимального произведения слагаемых.

Табл. 1		
Число	Сумма	Произведение
7	3+4	3*4=12
8	3+3+2	3*3*2=18
9	3+3+3	3*3*3=27
10	3+3+4	3*3*4=36
11	3+3+3+2	3*3*3*2=54
12	3+3+3+3	3*3*3*3=81
13	3+3+3+4	3*3*3*4=108
14	3+3+3+3+2	3*3*3*3*2=162
15	3+3+3+3+3	3*3*3*3=243
2016	3*672	3 <sup>672</sup>
2017	3*671+4	3 <sup>671</sup> +4
2018	3*672+2	$3^{672}+2$
2019	3*673	3 <sup>673</sup>

Покажем, что все задачи могут быть решены по одному алгоритму.

Обобщение условия задачи №18.4 18-й Международной математической олимпиады школьников 1976 года можно записать в виде: «Определить наибольшее число, являющееся произведением нескольких натуральных чисел, сумма которых равна С».

Формулировка задачи в другом условии:

«Найти разбиение числа C на натуральные слагаемые такое, что C= $a_1+a_2+...a_n$ , где  $a_1$ · $a_2$ ·...  $a_n$  наибольшее».

Число нужно разложить на максимальное количество слагаемых по 3 и одно или два слагаемых по 2.

Если число C кратно 3, то искомое разложение будет состоять из одних 3: C = 3+3+... +3, а максимальное произведение слагаемых будет равно  $3^{C/3}$ .

Если число С при делении на 3 имеет остаток 1, т.е. дано число вида C=3·k+1, то искомое разложение будет состоять из двух 2 и далее 3: C = 2+2+3+ ... +3, а максимальное произведение слагаемых будет равно  $2 \cdot 2 \cdot 3^{(C-4)/3}$ . Заметим, что  $2 \cdot 2 \cdot 3^{(C-4)/3} = 2 \cdot 2 \cdot 3^{k-1}$ .

Если число С при делении на 3 имеет остаток 2, т.е. дано число вида C=3·k+2, то искомое разложение будет состоять из 2 и далее 3: С = 2+3+ ... +3, а максимальное произведение слагаемых будет равно  $2\cdot 3^{(C-2)/3}$ . Заметим, что  $2\cdot 3^{(C-2)/3} = 2\cdot 3^k$ .

Результатом исследовательской работы является решение задачи в общем виде:

1.Если С кратно 3, то 3<sup>С/3</sup>;

2.Если С при делении на 3 имеет остаток 1, то 2·2·3<sup>(C-4)/3</sup>;

3.Если С при делении на 3 имеет остаток 2, то 2·3<sup>(C-2)/3</sup>.

В данной работе исследованы разбиения натуральных чисел для нахождения максимального произведения слагаемых. Обнаружены закономерности записи ответа, решена олимпиадная задача (18.4 XVIII MMO, 1976) и сделано ее обобщение, подтверждена гипотеза. Найден алгоритм решения задач данного типа. Авторские вычисления и рассуждения обнаруженных свойств разобраны в работе полностью. Надеемся, что найденный алгоритм решения позволит составить много новых интересных задач.

#### ЛИТЕРАТУРА

1.Вайнштейн Ф. «Разбиение чисел», Квант, №11, 1988.

2.Купцов Л.П., О.Ю. Овчинников, Резниченко С. В. «XIV Всероссийская олимпиада школьников», Квант, №10, 1988.

# СОДЕРЖАНИЕ

СЕКЦИЯ «ФИЗИКА ПРОЧНОСТИ И ПЛАСТИЧНОСТИ МАТЕРИАЛОВ»	
Седова Ю.С., Бессонов Н.М. Применение модифицированной модели водородной	
хрупкости к описанию разрушения упруго-пластического материала	3
Боровская О.Д., Ушанова Э.А., Петров С.Н. Реконструкция первичного аустенитного	
зерна в сталях с использованием пакета МТЕХ МАТLАВ на основе данных EBSD	6
Петров Д.А., Гуткин М.Ю. Энергия краевой дислокации в упругом шаре	9
Кремлева А.В., Смирнов А.М. Критические условия формирования дислокаций	
несоответствия в гетероструктурах на основе оксида галлия с орторомбической и	
тригональной кристаллической структурой	12
Курапова О.Ю., Смирнов И.В., Соловьёва Е.Н., Конаков Я.В., Конаков В.Г.	
Механические свойства и фазообразование алюминидов никеля с добавлением	
восстановленного оксида графена (Al-Ni-rGO)	15
Садыков Д.И., Орлова Т.С., Медведев А.Е., Мурашкин М.Ю. Влияние параметров	
ультрамелкозернистой структуры на эффекты упрочнения отжигом и увеличения	
пластичности деформацией в Al	18
Гесин И.Д., Дамаскинская Е.Е., Гиляров В.Л. Моделирование акустической эмиссии	
при разрушении гетерогенных материалов с помощью метода дискретных элементов.	21
Гузилова Л.И., Гращенко А.С., Бутенко П.Н., Николаев В.И. Механические и	
трибологические свойства эпитаксиальных слоев оксида галлия	24
Михеев Д.С., Гуткин М.Ю., Колесникова А.Л., Романов А.Е. Напряженно-	
деформированное состояние и механизмы его релаксации в сферическои композитнои	27
наночастице с ядром в форме усеченного шара	27
Назарова Е.Д., Пегливанова М.М., Филин В.Ю., Ларионов А.В. Получение истинной	
диаграммы нагружения на основе испытании на растяжения с использованием	20
численных методов	29
<u> ΓΕΥΠΗΩ «ΦΗЗΗΓΑ ΓΩΗΠΕΗCΗDOR ΑΗΗΓΙΥ ΩΡΕΠ Η Η ΑΗΩΩΤΟΝΕΤΎΡΑ.</u>	
Семции «физика конденсин обанныга стед и напосттуктуг»	

Плешаков О.С., Щербак С.А. Моделирование ионного транспорта в стеклах в процессе	
термоэлектрической поляризации	33
Решетов И.В., Кан Г., Щербак С.А., Журихина В.В., Липовский А.А. Усиление сигнала	
второй оптической гармоники после дополнительной электрополевой обработки	
силикатного стекла, подвергнутого полингу	36

# СЕКЦИЯ «ПРИКЛАДНАЯ МАТЕМАТИКА»

Давыдов В.В., Давыдов Р.В., Гольдберг А.А., Кочетков К.Д. Исследование характера	
распространения лазерного излучения в дифференциальной кювете Андерсона	39
Колосков А.О., Елисеев А.А. Учет явления адгезии при решении контактной задачи	42
Пестряков Д.Д., Баженов А.Н. Регуляризация задач в анализе данных с интервальной	
неопределенностью для достижения совместности в сильном смысле	45
Сердюков Д.В., Козлов К.Н. Автопрограммирование и аннотирование сценариев	
обработки изображений в биоинформатике	48
Михальчук В.А., Козлов К.Н. Разработка модели учета географических и генетических	
факторов для прогнозирования фенотипических признаков растений с помощью	
декартова генетического программирования	50
Бакшеев В.Е., Заяц О.И. Исследование влияния профилактики в приоритетных	
системах обслуживания с детерминированным выталкивающим механизмом	52
Божокин С.В., Рябоконь А.А. Исследование спектральных свойств	
последовательности гауссовских пиков при моделировании турбулентности	

сердечного ритма	55
сигмоид	58
Ж. Ли, Баженов А.Н. Использование твинных арифметик в анализе интервальных	61
данных	01
СЕКЦИЯ «ГИДРОАЭРОДИНАМИКА, ГОРЕНИЕ И ТЕПЛООБМЕН» Бабич Е.В., Колесник Е.В. Взаимолействие сверхзвукового потока вязкого газа с	
установленным на пластине затупленным телом при различных углах натекания Бабич Е.В., Колесник Е.В. Тестирование ряда схем с квазиодномерной реконструкцией переменных для расчета конвективных потоков на задаче о взаимодействии ударной	65
волны с вихрем	68
<i>Борисов Д.В., Калаев В.В.</i> Применение STR k-є модели для моделирования турбулентного тепло- и массообмена в тиглях установок для выращивания кристаллов	
методом Чохральского	71
микрокапель в электрическом поле Голубков В $\Pi$ Владимиров F K Гарбарук 4 В Исследование устойнивости	74
пограничного слоя на крыловом профиле на основе линейной теории	77
Зуев А.А., Абрамов А.Г., Калаев В.В. Применение искусственной нейронной сети для	
коррекции фронта кристаллизации при численном моделировании теплообмена в	80
Игнатенко В.А., Талалов В.А. Сравнительный анализ моделей излучения,	80
реализованных в вычислительных пакетах общего и специального назначения	83
теплообмена в канале с оребренной стенкой	87
Коекин В.Ю., Булович С.В. Математическое моделирование теплофизических	
процессов в роторно-лопастном двигателе с внешним подводом тепла на основе	00
Коекин В.Ю., Булович С.В. Численное моделирование термогазодинамики роторно-	90
лопастного двигателя с внешним подводом тепла	93
Масюкевич А.В., Монахов Н.А., Бабич Е.В., Колесник Е.В. Экспериментальное	07
исследование взаимодеиствия ударнои волны с трехмерными препятствиями	97
исследование термодинамически равновесного состава веществ в системе элементов	
B-F-H-O-C	100
Осадчий Д.С., Махнов А.В., Колесник Е.В. Численное моделирование сверхзвукового	102
Ламинарного обтекания тел вращения потоком вязкого газа	103
струйного течения, возникающего при дыхании человека	106
Подмаркова А.Д., Засимова М.А., Н.Г. Иванов Исследование воздухораспределения в	100
вентилируемой климатической камере с тепловым манекеном	109
ступени газовой турбины регулировкой положения форсунок камеры сгорания	112
<i>гучкина А.А., засимова М.А.</i> численное моделирование вентиляционного течения в салоне пассажирского самолета	115
Савельев А.С. Обобщенная модель поуровневых коэффициентов скорости химических	
реакций Садикова Е.В., Плетнев А.А. Расчетный анализ температурного состояния твэлов в	119

бассейне выдержки энергоблока №4 Белоярской АЭС при запроектных авариях Сафиуллин ИР Ротинян ЕМ Расчет токсичности выхлопных газов двигателя	121
внутреннего сгорания, работающего на пропан-бутановой смеси с добавкой водорода. Степашева Е.Д., Засимова М.А. Численное моделирование автоколебательного	124
режима течения при подаче плоской струи воздуха в тестовое вентилируемое	
помещение	127
Уманский А.О., Болдырев Ю.Я. Определение аэродинамических характеристик	
лопасти вертолета при взаимодействии со спутной струей в 2.5D постановке	130
Федорова Т.А., Пашкевич Д.С., Попов П.А. Влияние модели турбулентности на результаты численного моделирования процесса взаимодействия гексафторида урана с	
метаном и кислородом в режиме горения	134
Федотов А.В., Левченя А.М. Расчеты кавитационного обтекания гидропрофиля с	
использованием пакета ANSYS Fluent	137
Шерстобоев Ю.В., Калаев В.В., Тимофеев В.В., Иванов Н.Г. Численное моделирование	
трехмерной свободной конвекции жидкого металла в квадратной и кубической	
полостях	140
СЕКНИЯ «ФИЗИКА АТОМНОГО ЯЛРА И ЭЛЕМЕНТАРНЫХ ЧАСТИН В	
ФУНЛАМЕНТАЛЬНЫХ И МЕЛИЦИНСКИХ ИССЛЕЛОВАНИЯХ»	
Банников Е.В., Митранков Ю.М., Бердников Я.А. Эллиптический поток $\pi^0$ мезонов в	
Си+Аи взаимодействиях при энергии 200 ГэВ	144
Митранков Ю.М., Бердников А.Я. Модельные расчеты для описания эллиптических	
потоков ф мезонов в столкновениях тяжелых ионов	147
Митранкова М.М., Бердников Я.А. Использование мультифазной транспортной	
модели АМРТ для описания процессов рождения ф мезонов в легких системах	149
столкновений	
Ларионова Д.М., Котов Д.О. Идентифицированные заряженные адроны как	152
инструмент для изучения свойств кварк-глюонной материи	
Покидова М.В., Нарышкин Ю.Г., Бердников Я.А. Статистическая комбинация поисков	
невидимых распадов бозона Хиггса в эксперименте АТЛАС	154
Кох Д.В., Бердников Я.А. Тенденции и проблемы развития современных средств	
радиационной разведки местности	157
Анцупов С.М., Бердников А.Я. Методы выделения сигнала К*(892) мезонов в Au+Au	
столкновениях при энергии 200 ГэВ	160
Селезенев А.Д., Котов Д.О. Факторы ядерной модификации η-мезонов в He+Au	1.60
столкновениях при энергии 2001 эВ	162
<i>Павзоерин П.О., Митранкова М.М.</i> Особенности измерения выходов прямых фотонов	165
В Не+Au столкновениях при энергии VSINI = $200 \text{ I}$ эВ	165
лооанов А.А., митранков Ю.М., Бероников Я.А. Определение числа раненых нуклонов	
и числа оинарных нуклон-нуклонных столкновении с помощью методов машинного	168
$\pi_{0}$ обучения	100
поточного расседния с помощ ю генератирио состязатели ной сети	170
Бариаль $\Pi A$ Побанов $A$ <i>Бардинков</i> $\Im A$ Определение принен ного параметра в	170
столкновениях ядер зодота при энергии 600 Мэв с помощью нейронной сети	173
Стекачева ЛН Митранков ЮМ Бердников АЯ Анализ процессов рожления	175
мезонов в D+D столкновениях при энергии 27 ГэВ с использованием ялерно-	
молифицированных функций распреления партонов	176
Куницына Д.Н., Митранков Ю.М., Бердников Я.А. Расчет инклюзивного сечения	. 5
глубоко-неупругого электрон-протонного рассеяния с учетом вклада скалярного	
---	-----
дикварка	179
Степанов Ф.В., Воробьев С.И., Геталов А.Л., Щербаков Г.В., Балашою М., Лобин В.С.	
Предварительное исследование эластомеров с различной концентрацией наночастиц	
СоFe <sub>2</sub> O <sub>4</sub> с помощью поляризованных мюонов	182
Шаяхметова П.Р., Бакаев В.А., Червяков А.М. Планирование дистанционного	
облучения пациентов методом IMRT на медицинском ускорителе электронов	185
Васильев А.А., Голиков И.Г., Пак Ф.А., Халиков А.И., Шевченко И.И. Использование	
радиохромных дозиметрических пленок для измерений профиля пучка протонов с	
энергией 1000 МэВ	188

## СЕКЦИЯ «ФИЗИКА ПЛАЗМЫ И КОСМОСА»

Земляков Н.А., Чугунов А.И. Уменьшение модуля сдвига внутренней коры нейтронных	
звезд из-за эффектов конечного размера ядер	192
<i>Меркулова А.Ю., Павлов А.К.</i> Образование клатратных соединений CO <sub>2</sub> +O <sub>3</sub> +O <sub>2</sub> как	
причина сезонных вариаций кислорода в атмосфере Марса	195
Щепкин А.А., Павлов А.К., Васильев Г.И., Остряков В.М. Возможность мутаций и	
массовых вымираний живых организмов на Земле вследствие воздействия близкой	
сверхновой звезды	198
Буц М.К., Кантор М.Ю. Рентгеновская диагностика с высокой скоростью счета	
фотонов для измерения быстрой динамики спектров тормозного излучения плазмы на	
токамаке ФТ-2	201
Михайлов В.С., Зиновьев А.Н., Бабенко П.Ю., Шергин А.П. Коэффициенты распыления	
материалов реактора токамак изотопами водорода	204
Владимирова К.В., Павлов А.К., Васильев Г.И. Метод дистанционного определения	
степени облучения поверхности Европы методами рентгеновской и гамма-	
спектроскопии	207
Токарев А.Ю., Яшин А.Ю., Кукушкин К.А., Петров А.В., Пономаренко А.М.	
Применение многочастотного допплеровского обратного рассеяния для исследования	
ЕLМ на токамаке Глобус-M2	210
Сербин А.Б., Курдубов С.Л. Учет структуры радиоисточника при обработке	
результатов геодезических РСДБ-наблюдений	213
Федоренко И., Тимохин В.М., Сергеев В.Ю., Ануфриев Е.А. Исследование краевых	
локальных мод методом визуализации с напуском нейтрального гелия на токамаке	
"Глобус-М2"	216
Матевосян А.А., Барсуков Д.П. Влияние искривления пространства на момент	
инерции магнитного поля пульсара	219
Шараг С.П., Ковальнов Г.А., Остряков В.М. Изотопные аномалии солнечных	
космических лучей	222
Лубов В.В., Серов В.Л., Рошупкин С.П. Резонансный процесс Брейта-Уиллера в	
высокотемпературной лазерной плазме	225
Широбоков А.А., Веселова И.Ю., Кавеева Е.Г., Рожанский В.А., Кудреватых П.С.	
Исследование влияния тороилального индуктивного электрического поля на токи в	
SOL в геометрии ИТЭР	228
Кудреватых П.С., Штырхунов Н.В., Кавеева Е.Г., Рожанский В.А., Широбоков А.А.	
Исслелование схем с обратной связью в коле SOLPS-ITER	231
Мелихова Е.С., Павлов А.К., Васильев Г.И. Изотопные слелы активности раннего	
солниа в атмосферах планет земной группы	234
Севрюкова А.И., Кропотина Ю.А. Моделирование зеркальной неустойчивости в	_

солнечном ветре	237
температуры реликтового излучения по космологическим данным	240
электронных пар в высокотемпературной лазерной плазме	243
струи с высокотемпературной плазмой токамака "Глобус-М2"	246
СЕКЦИЯ «МЕХАНИКА И ПРОЦЕССЫ УПРАВЛЕНИЯ»	
Авдонюшкин Д.В., Матвеева А.И., Новокшенов А.Д. Безытерационное решение задачи	
топологической оптимизации с помощью машинного обучения	250
изотропном упругом слое	253
когезионных порошках методом дискретных элементов	256
Гордеев А.Н., Савиковский А.В., Антонова О.В., Михайлов А.А. Анализ возможностей	
программных комплексов ANSYS и PANTOCRATOR при вычислении параметров	
механики разрушения	258
Иванов М.В., Михайлов А.А., Антонова О.В., Кузьмин В.А. Анализ упругого поведения	
и определение эффективных характеристик слоистых панелей с тетраэдральным	
заполнителем	261
Игумнова В.С., Лукин А.В., Попов И.А. Сравнение двух систем фазовой	
автоподстройки частоты и автоматической регулировки усиления для управления	
первичными колебаниями высокодобротного МЭМС-гироскопа	264
Ильин А.А. О механохимической коррозии тороидальных оболочек под действием	
внутреннего давления	267
Карасева У.П., Фрейдин А.Б. Релаксация напряжений и структуры в моделях	
вязкоупругого материала с изменяющимся коэффициентом вязкости	270
Корчагин А.П., Семенов А.С. Конечно-элементное моделирование процесса	
поляризации сегнетоэлектрика в многослойной структуре вследствие возникновения	
микронапряжений при охлаждении	273
Кравчинский И.А., Смирнов А.С. Оптимизация коэффициентов вязкого демпфирования	074
при гашении колебании двоиного маятника	276
Можгова Н.В., Лукин А.В., Попов И.А., Штукин Л.В., Привалова О.В. Нелинеиная	
динамика слабосвязанных микробалочных резонаторов при параметрическом	270
электротепловом возоуждении	279
Муртазин И.Р., Семенов А.С. Исследование процессов сложного пассивного	202
нагружения: моделирование и эксперимент	282
Никишин А.П., Грищенко А.И. Прогнозирование механических своиств композитных	205
Пултрузионных профилеи на основе метода К.Э гомогенизации	285
Пашковскии Д.М., Вильчевская Е.Н. Расчет эффективнои диффузионной	200
проницаемости материала с суперэллиптической неоднородностью	288
<i>Руолев И.А., Фреиоин А.Б.</i> Фронт химической реакции в цилиндрическом теле в	201
постановках стационарной и нестационарной диффузии	291
Сивиковскии А.Б., <i>Фролов М.М.</i> , <i>Семенов А.С.</i> Вычисление коэффициентов	
интенсивности напряжении на основе контурных интегралов J <sub>1</sub> и J <sub>2</sub> с учетом оерегов	204
Грещины при смешанной моде разрушения	294
свитковскии А.И., Антонови О.Д., уфляно Г.Д. Математическое моделирование	207
раоочих характеристик газотуроинной установки кічіл-2111	291

Семенова А.А., Грищенко А.И. Влияние кристаллографической ориентации	
монокристаллических корсетных и призматических образцов на размах пластической	
деформации при интенсивном термоциклическом воздействии	300
Скутин Н.В., Лобанов С.М., Семенов А.С. Моделирование механического	
гистерезисного поведения тетрагональных доменных структур	
сегнетоэлектроэластиков	303
Стронгин П.Я., Степанов П.С., Яковис Л.М. Расчет регуляторов для типичных	
объектов промышленной автоматики	307
Судаков В.А., Ожгибесова Д.Д., Михайлов И.А. Разработка цифровой модели	
равнонапряженного диска, навитого из волокон	310
Удалов П.П., Штукин Л.В., Попов И.А., Лукин А.В., Полеткин К.В. Исследование	
явления параметрического резонанса в микромеханическом бесконтактном	
электромагнитном подвесе	313
Усманов А.Р., Модестов В.С. Центробежная нагрузка вала с учетом эффекта двоякой	
изгибной жесткости	316
Федоренко Р.В., Лукин А.В. Численный анализ приспособляемости термоциклически	
нагружаемого сосуда под давлением в условиях упруго-идеально-пластического	
деформирования	319
Фролов М.М., Савиковский А.В., Семенов А.С. Влияние формы контура на значения	
контурных интегралов J <sub>1</sub> и J <sub>2</sub> при смешанной моде разрушения	322
Хашба Т.Н., Смирнов А.С. Устойчивость равновесия конечномерной модели колонны	
под действием собственного веса	325
Черняева В.А., Шехтман Е.И. Прогноз работы верхнего строения железнодорожного	
пути с учетом изменения характеристик сопротивления усталости рельсовой стали в	
результате изношенности рельсов	328
Шаделко Ф.В., Федоренко Р.В., Модестов В.С. Создание цифрового двойника	
конструкций хранилища отработанного ядерного топлива и транспортно-	
упаковочного комплекта для случая падения самолета	331

#### СЕКЦИЯ «БИОМЕХАНИКА»

Забелло К.К., Щур Н.А. Численное моделирование динамики комара с заданными	
кинематическими параметрами движения крылышек	334
Мальсагова Л.В., Тихомолова Л.Г. Исследование структуры течения в модели	
ответвления сосудистого протеза от артерии методом ультразвуковой векторной	
визуализации	337
Машошина А., Синицына Д.Э. Численное исследование структуры закрученного	
течения в модели кровеносного сосуда	340
Синицына Д.Э. Исследование влияния упругости стенок на структуру	
пространственного кровотока в бифуркации брюшной аорты	343
Охотников А.О., Антонова О.В., Охотников О.И. Анализ циклической прочности	
покрытого эндобилиарного стента	347
Тишков М.К., Журавлев Д.Н. Моделирование баллонной ангиопластики коарктации	
аорты с учетом вязко-гиперупругих свойств материала	350
Костина М.И., Циганков Д.Н. Моделирование распределений ганглиозных клеток в	
сетчатке глаза для поиска оптимальных решений эволюционных задач	353
Никитин Е.Д., Гатаулин Я.А., Юхнев А.Д., Росуховский Д.А. Численное	
моделирование постуральных нагрузок на течение в венозном клапане	356
Маринова А.А., Тихомолова Л. Г., Гатаулин Я.А., Юхнев А.Д. Численное	
моделирование кровотока в персонифицированных моделях анастомоза бедренной	

ar	те	рии.	 	 •		36	50														
- 1																					

#### СЕКЦИЯ «МНОГОМАСШТАБНОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ПЕРЕНОСА И КОНВЕРСИИ ЭНЕРГИИ»

Бутузова Е.С., Ляжков С.Д. Перенос энергии в полубесконечной цепочке Гука при	
кинематическом нагружении	364
Борисенков Б.С., Кривцов А.М. Моделирование тепловых процессов в составном	
кристалле	367
Груздев И.Е., Кривцов А.М. Исследование распространения энергии в плоской	
квадратной кристаллической решетке	370
Кедров А.А., Щербинин С.А. Моделирование тепловых процессов в карбине	372

## СЕКЦИЯ «МАТЕМАТИКА И ЕЕ ПРИЛОЖЕНИЯ»

Тархов Д.А., Лазовская Т.В., Разумов Е.М., Сергеева А.А., Чистякова М.А.	
Эволюционные методы обучения нейросетевых решений для уравнения Лапласа с	
разрывным граничным условием Дирихле: анализ и сравнение	376
Пашковский Д.М., Тархов Д.А., Лазовская Т.В. Алгоритм подбора оптимальной	
структуры нейронной сети для аппроксимации решения уравнения Лапласа	378
Тархов Д.А., Закирова М.Д., Лавыгин Д.А., Скрипкин О.А. Применение различных	
численных методов для стабилизации обратного маятника	381
Рожицын В.А., Ромашов И.А., Терушкин Б.С., Неробова С.Ф. Поля Галуа и их	
применение в криптографии	383
Девятовский С.Е., Денисова А.А. Простейшее шумоподавление звука методами	
математической обработки сигналов	385
Терентьева У.В., Гарбарук В.В. Математическая модель работоспособности	
аккумулятора	388
Елесина Ю.В., Терушкин Б.С. Нахождение наибольшего произведения натуральных	
чисел, сумма которых равна С	390

# НЕДЕЛЯ НАУКИ ФИЗМЕХ

# Сборник материалов Всероссийской научной конференции

3-7 апреля 2023 года

Налоговая льгота – Общероссийский классификатор продукции ОК 005-93, т. 2; 95 3004 – научная и производственная литература

Подписано в печать 16.11.2023. Формат 60×84/16. Печать цифровая. Усл. печ. л. 25,0. Тираж 32. Заказ 5560.

Отпечатано с готового оригинал-макета, предоставленного организационным комитетом конференции, в Издательско-полиграфическом центре Политехнического университета. 195251, Санкт-Петербург, Политехническая ул., 29. Тел.: (812) 552-77-17; 550-40-14.