

Ю.В. Латин, А.В. Гарбарук, М.Х. Стрелец

**Алгебраические модели турбулентности
для пристенных канонических течений
(немного истории и некоторые новые результаты)**

Введение

Начало теоретических исследований турбулентности принято связывать с классической работой Осборна Рейнольдса опубликованной в 1894 году [1]. В этой работе была сформулирована методология описания турбулентных течений, суть которой заключается в представлении мгновенных значений всех гидродинамических величин (скорости, плотности, температуры и т. д.) в виде суммы осредненных (по времени или по ансамблю) и пульсационных (турбулентных) составляющих. Естественно, что изучение и описание представляющего наибольший практический интерес поведения осредненных характеристик потока, сравнительно плавно меняющихся в пространстве и во времени, оказалось делом намного более простым, чем исследование трехмерного нестационарного и в значительной степени хаотического движения, каковым в действительности является любое турбулентное течение. Благодаря этому, метод Рейнольдса составил целую эпоху в теории турбулентности и до сих пор является основным методом, используемым для решения большинства практически важных научных и прикладных технических проблем. Однако этот метод, как известно, не позволяет получить решение той или иной задачи теории турбулентности в рамках строгой математической постановки, так как уравнения, полученные Рейнольдсом для описания турбулентных потоков, являются незамкнутыми. В отличие от уравнений динамики вязкой жидкости, содержащих тензор вязких напряжений, который для обычных ("ньютоновских") жидкостей легко выражается через тензор скоростей деформаций, уравнения Рейнольдса содержат элементы

тензора турбулентных напряжений, природа и свойства которых целиком определяются характеристиками пульсационного движения. Поэтому для описания турбулентных потоков в рамках метода Рейнольдса неизбежным этапом оказывается моделирование турбулентных напряжений, суть которого сводится к установлению эмпирических или полуэмпирических связей между этими напряжениями и осредненными характеристиками самого потока, прежде всего, характеристиками поля скоростей.

Изначально основным объектом при экспериментальном и теоретическом изучении свойств турбулентных потоков были так называемые канонические течения, то есть относительно простые течения, максимально свободные от влияния разного рода частных обстоятельств. Для пристенной турбулентности таковыми являются обтекание длинной плоской пластины и профиля крыла, установившееся течение в цилиндрической трубе и некоторые другие. В результате многолетних экспериментальных и теоретических исследований, начало которых связывают с работами О. Рейнольдса, относящимися к последней четверти XIX в., для этих течений был накоплен обширный опытный материал, послуживший основой для разработки многочисленных эмпирических и полуэмпирических моделей турбулентности. С появлением мощных современных суперкомпьютеров удалось осуществить также "прямое численное моделирование" некоторых канонических течений, то есть решить соответствующие задачи не в рамках уравнений Рейнольдса, замкнутых с помощью той или иной модели турбулентности, а путем численного интегрирования исходных (неосредненных) трехмерных нестационарных уравнений Навье-Стокса. Тем не менее, многие проблемы, относящиеся к простейшим каноническим турбулентным течениям, все еще остаются нерешенными.

Ниже излагаются некоторые наиболее важные результаты, полученные в этой области, в том числе, результаты авторов.

1. Турбулентный пограничный слой на плоской пластине.

При обтекании любого тела потоком жидкости или газа на его поверхности образуется тонкий (пограничный) слой, в котором вследствие влияния вязкости среды происходит резкое изменение скорости потока от нуля на самой поверхности (эффект прилипания) до значения скорости в набегающем потоке. Если число Рейнольдса $Re_x = Ux/\nu$, представляющее собой отношение расстояния от передней кромки пластины до заданного сечения x к линейному вязкостному масштабу ν/U (ν - коэффициент кинематической вязкости среды, U - скорость набегающего потока), меньше некоторого критического значения, называемого критическим числом Рейнольдса Re_{KP} , то есть при $Re_x \leq Re_{KP}$, в пограничном слое реализуется ламинарный режим течения; при $Re_x \geq Re_{KP}$ - турбулентный режим течения. Значение критического числа Рейнольдса для случая обтекания плоской пластины изменяется в диапазоне $3 \cdot 10^5 \leq Re_{KP} \leq 3 \cdot 10^6$ в зависимости от состояния внешнего потока и от некоторых других обстоятельств, например, от степени шероховатости поверхности пластины.

Для рассматриваемого частного случая общие уравнения Рейнольдса несколько упрощаются и принимают вид так называемых уравнений турбулентного пограничного слоя, включающих уравнение движения (переноса импульса) в проекции на направление пластины и уравнение неразрывности:

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial \tau}{\partial y}, \quad (1.1)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0, \quad (1.2)$$

где x и y обозначают декартовы координаты, направленные вдоль поверхности пластины и по нормали к ней, u и v представляют собой соответствующие проекции вектора осредненной по Рейнольдсу скорости, а через τ обозначено полное касательное напряжение, включающее вязкую (τ_L), и турбулентную (τ_T) составляющие: $\tau = \tau_L + \tau_T$.

Вязкая составляющая полного касательного напряжения τ_L определяется через динамическую вязкость $\mu = \rho \cdot \nu$ и скорость сдвига $\partial u / \partial y$ посредством формулы Ньютона

$$\tau_L = \mu \frac{\partial u}{\partial y}, \quad (1.3)$$

а для определения турбулентной составляющей (так называемого напряжения Рейнольдса), связанного с характеристиками пульсационного движения соотношением

$$\frac{\tau_T}{\rho} = -\overline{u'v'}, \quad (1.4)$$

необходимо каким-либо образом выразить его через осредненные характеристики потока, что собственно и составляет задачу моделирования турбулентности (через u' и v' в (1.4) обозначены пульсационные составляющие проекций скорости, а черта означает осреднение по Рейнольдсу).

Исторически первые и наиболее простые модели турбулентности основываются на тех или иных алгебраических связях между рейнольдсовым напряжением τ_T и характеристиками осредненного движения и, вследствие этого, называются алгебраическими. Современные модели этой группы базируются на представлениях о двухслойной структуре турбулентного пограничного слоя, сформулированных в классической работе Клаузера [2]. Согласно этим представлениям весь слой делится на две основные подобласти: внутреннюю (область закона стенки), с характерной для нее мелкомасштабной турбулентностью, и внешнюю область крупномасштабных вихревых структур. В свою очередь, внутренняя область (см. рис. 1) включает вязкий подслой (1), переходную область (2) и область логарифмического профиля скоростей (3), а внешняя – области "закона следа" (4) и перемежаемости (5).

Схематически изменение скорости в пограничном слое на этом рисунке показано в так называемых координатах закона стенки $\varphi = u/v_*$ и $\eta = y \cdot v_*/\nu$, причем протяженность отдельных областей на этом рисунке примерно

соответствует структуре пограничного слоя на плоской пластине.

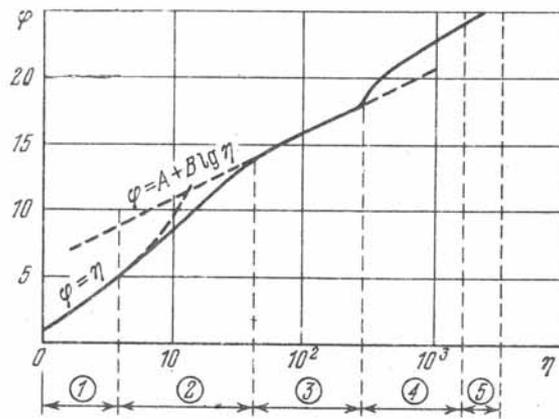


Рис. 1. Структура турбулентного пограничного слоя.

Как видно из определения переменных φ и η , в качестве масштабов при их построении используются так называемая динамическая скорость или скорость трения $v_* = \sqrt{\tau_w / \rho}$ (τ_w — напряжение трения на стенке) и линейный вязкостный масштаб ν / v_* . Выбор именно этих масштабов не является случайным. Еще в 1950 г. Людвиг и Тильман [3] установили существование "закона стенки", согласно которому профили скоростей во внутренней области пограничного слоя, построенные в переменных φ , η , то есть

$$\varphi = \varphi(\eta), \quad (1.5)$$

оказываются универсальными, то есть нечувствительными к изменению внешних условий, например, к изменению продольного перепада давления, степени турбулентности внешнего потока, числа Рейнольдса и др. Иными словами, масштабы v_* и ν / v_* являются универсальными (главными) масштабами внутренней области. Что касается протяженности области действия закона стенки, то она существенно зависит от всех перечисленных выше факторов. В пограничном слое на плоской пластине внутренняя область составляет примерно 20 % от толщины всего слоя и в ней генерируется около 80 % всей энергии турбулентности.

Основой алгебраических и многих других, более сложных моделей турбулентности, является гипотеза Буссинеска, согласно которой турбулентное

касательное напряжение τ_T связано со скоростью сдвига соотношением

$$\tau_T = \rho \cdot \nu_T \cdot \frac{\partial u}{\partial y}, \quad (1.6)$$

в котором через ν_T обозначен так называемый кинематический коэффициент турбулентной вязкости. Формула Буссинеска сама по себе не решает проблему определения связи между τ_T и осредненными характеристиками потока, а лишь переводит ее на уровень коэффициента турбулентной вязкости ν_T . Однако важное значение этой формулы состоит в том, что она указывает на "сдвиговое" происхождение турбулентного напряжения τ_T : при отсутствии сдвига, то есть при $\partial u / \partial y = 0$, τ_T обращается в ноль. Очевидно, что гипотеза Буссинеска справедлива не для всех турбулентных течений и, в частности, не описывает эффектов памяти и анизотропию рейнольдсовых напряжений. Однако ее применение для канонических пристенных течений и, в том числе, для турбулентного пограничного слоя на плоской пластине является вполне оправданным.

При построении алгебраических моделей турбулентности, наряду с гипотезой Буссинеска, широко используются соображения теории размерностей. Основоположник теории пограничного слоя – выдающийся немецкий гидродинамик Людвиг Прандтль на основе этих соображений еще в 1925 г. предложил следующую простую формулу для турбулентной вязкости:

$$\nu_T = l \cdot \left(l \cdot \frac{\partial u}{\partial y} \right), \quad (1.7)$$

где l – так называемый турбулентный путь перемешивания.

Нетрудно видеть, что l в формуле Прандтля играет роль линейного масштаба, а произведение $l \cdot \partial u / \partial y$ по размерности является масштабом скорости. В непосредственной окрестности стенки путь перемешивания оказался пропорциональным расстоянию от стенки y

$$l = \kappa y, \quad (1.8)$$

а значение эмпирической постоянной κ , названной постоянной Кармана,

оказалось равным $\kappa=0.41$.

Формулы (1.6) – (1.8), дополненные так называемым демпфирующим множителем, D_{VD} , предложенным Е. ван Дристом в 1956 г. [4]

$$D_{VD} = (1 - \exp(-\eta/A))^2, \quad A = 26, \quad (1.9)$$

составляют содержание одной из наиболее популярных до настоящего времени алгебраических моделей турбулентности для внутренней области пограничного слоя (демпфирующий множитель D_{VD} учитывает влияния твердой стенки на процессы турбулентного переноса в ее непосредственной окрестности). В рамках этой модели полное касательное напряжение τ связано с осредненным полем скорости соотношением

$$\tau = \tau_L + \tau_T = \rho \cdot (v + v_T) \cdot \frac{\partial u}{\partial y} = \rho \cdot \left(v + (\kappa y)^2 \cdot D_{VD} \cdot \frac{\partial u}{\partial y} \right) \cdot \frac{\partial u}{\partial y}, \quad (1.10)$$

а соответствующее выражение для эффективной вязкости $v_{eff} = v + v_T$ имеет вид

$$v_{eff} = v + (\kappa y)^2 \cdot D_{VD} \cdot \frac{\partial u}{\partial y}. \quad (1.11)$$

Подводя некоторый итог, можно сказать, что к середине 50-х годов проблема описания турбулентной вязкости во внутренней области в рамках алгебраических моделей приблизилась к своему решению. Иначе обстоит дело с определением турбулентной вязкости во внешней области с характерной для нее крупномасштабной турбулентностью.

В упоминавшейся уже работе Клаузера [2] для этой цели было предложено две формулы:

$$v_{TO} = \sigma \cdot v_* \cdot \delta, \quad (\text{Клаузер-1}), \quad (1.12)$$

$$v_{TO} = k \cdot U \cdot \delta^*, \quad (\text{Клаузер-2}), \quad (1.13)$$

В первой из этих формул в качестве масштаба скорости используется уже упоминавшаяся динамическая скорость v_* , а в качестве линейного масштаба – толщина пограничного слоя δ (σ – эмпирическая постоянная). Выбор в качестве линейного масштаба толщины пограничного слоя δ был не случайным, а

вытекал из анализа экспериментальных профилей скорости во внешней области, согласно которому функция

$$\frac{U-u}{v_*} = f\left(\frac{y}{\delta}\right) \quad (1.14)$$

является универсальной. К сожалению, "хроническая неточность", присущая определению толщины пограничного слоя δ (на практике δ определяют как расстояние от стенки, на котором скорость отличается от скорости во внешнем потоке на некоторую заданную величину), побудили Клаузера отказаться от этой формулы и перейти к соотношению, названному выше формулой Клаузер-2. В отличие от модели Клаузер-1, в ней в качестве масштаба скорости фигурирует скорость набегающего потока U , а в качестве масштаба длины – однозначно определяемая интегральная толщина вытеснения пограничного слоя

$$\delta^* = \int_0^{\infty} \left(1 - \frac{u}{U}\right) \cdot dy, \quad (1.15)$$

которая характеризует степень отгеснения линий тока во внешнем потоке вследствие торможения среды в окрестности стеки.

Для эмпирической постоянной k на основе опытов было найдено значение $k=0.018$.

Формула Клаузера–2, а также формула Прандтля (1.8), в которой для пути перемешивания l было принято выражение

$$l = \lambda \cdot \delta, \quad \lambda = 0.09, \quad (1.16)$$

стали основными соотношениями для определения турбулентной вязкости во внешней области турбулентного пограничного слоя.

Последующее широкое использование двухслойных алгебраических моделей, основанных на этих соотношениях, показало однако, что эмпирические «константы» λ и k , значения которых были найдены из опытов, проводившихся при сравнительно высоких числах Рейнольдса, не обладают свойством универсальности (постоянства при изменении числа Рейнольдса): для

того, чтобы обеспечить согласование результатов расчетов с экспериментальными данными при более низких числах Рейнольдса, эти "константы" должны соответствующим образом корректироваться.

Так, в наиболее популярной модели Себеси-Смита, базирующейся на соотношениях (1.11), (1.9) и (1.13) (константа k в (1.13) принимается равной $k = 0.0168$), поправка на влияние малых чисел Рейнольдса вводится эмпирическим соотношением

$$k = 0.0168 \frac{1.55}{1 + \Pi}, \quad (1.17)$$

где

$$\Pi = 0.55 \cdot \left(1 - \exp\left(-0.243\sqrt{z_1} - 0.298z_1\right)\right), \quad z_1 = \frac{\text{Re}^{**}}{425} - 1, \quad \text{Re}^{**} = \frac{U \cdot \delta^{**}}{\nu}. \quad (1.18)$$

Здесь $\delta^{**} = \int_0^{\infty} \frac{u}{U} \cdot \left(1 - \frac{u}{U}\right) \cdot dy$ – толщина потери импульса. Вычислительные аспекты проблемы «малых чисел Рейнольдса» подробно обсуждаются в работе [6].

Данную проблему, получившую в литературе название проблемы «малых чисел Рейнольдса» [5, 6], удалось решить лишь сравнительно недавно [7].

Модель: Лапин-Поспелов (1995), [7].

В работе [7] было показано, что причиной неуниверсальности эмпирических констант является неудачный выбор масштабов при определении турбулентной вязкости во внешней области пограничного слоя (1.12), (1.13), (1.16), и что универсальными линейным и скоростным масштабами внешней области для течения на плоской пластине являются толщина вытеснения пограничного слоя δ^* и динамическая скорость v_* .

При использовании указанных масштабов и включении в формулу для турбулентной вязкости во внешней области пограничного слоя так называемого коэффициента перемежаемости Клебанава, γ , учитывающего снижение турбулентной вязкости вблизи внешней границы слоя, она принимает вид:

$$v_{TO} = K \cdot v_* \cdot \delta^* \cdot \gamma. \quad (1.19)$$

Эта формула была названа в [7] формулой Клаузера-3. Во внутренней области в [7] использовалась модель Прандтля-Лойцянского, отличающаяся от модели Прандтля-ван Дриста только выражением для демпфирующего множителя, который определялся с помощью выражения [8]:

$$D_L = 1 - \exp\left(-(\eta/A)^2\right), \quad A = 26, \quad (1.20)$$

Проведенное в [7] сопоставление результатов расчетов коэффициента поверхностного трения на плоской пластине, полученных в широком диапазоне чисел Рейнольдса, с соответствующими опытными данными показало, что если положить константу k в формуле Клаузера-3 равной константе Кармана

$$K = \kappa = 0.41, \quad (1.21)$$

то результаты расчетов хорошо согласуются с экспериментом во всем диапазоне изменения чисел Рейнольдса, в котором реализуется турбулентный режим течения, то есть при $Re^{**} \geq 320$.

Это обстоятельство является достаточно убедительным подтверждением того, что динамическая скорость v_* и интегральная толщина вытеснения δ^* действительно являются универсальными масштабами внешней области турбулентного пограничного слоя на плоской пластине.

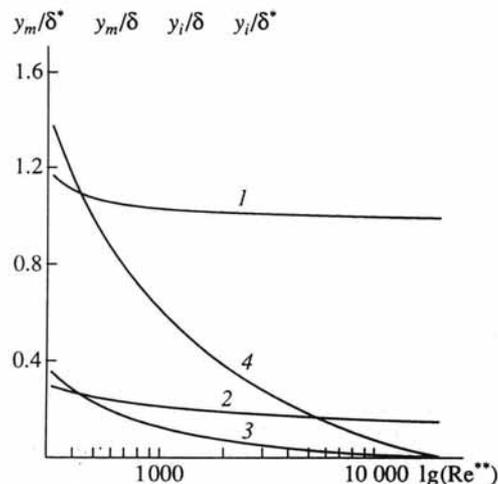


Рис. 2. Зависимость толщины внутренней области u_m и толщины вязкого подслоя и переходной области u_i от числа Рейнольдса Re^{**} по модели Л-П: 1 – u_m/δ^* , 2 – u_m/δ , 3 – u_i/δ , 4 – u_i/δ^* .

С помощью описанной модели турбулентности удалось провести анализ характера изменения структуры турбулентного пограничного слоя при уменьшении числа Re^{**} вплоть до значений близких к $Re^{**} = 320$. Результаты расчетов координат границы внутренней области пограничного слоя y_m и верхней границы переходной области (начала области логарифмического профиля скоростей), y_i , в зависимости от Re^{**} приведены на рис. 2, из которого видно, что при больших числах Re^{**} толщина внутренней области (области закона стенки), y_m , близка к толщине вытеснения δ^* . Между кривыми 1 и 4 располагается область логарифмического профиля скоростей

$$\varphi = \frac{1}{\kappa} \cdot \ln(\eta) + B, \quad (1.22)$$

протяженность которой уменьшается с уменьшением числа Re^{**} что дает основание предположить, что при $Re^{**} = 320$ логарифмическая область полностью вырождается (некоторое "перекрытие" кривых 1 и 4 на рис. 2 является следствием "несовершенства" демпфирующего множителя D_L). Наконец, кривые 2 и 3 на рис. 2 дают представление о масштабах тех же областей в сравнении с толщиной пограничного слоя δ .

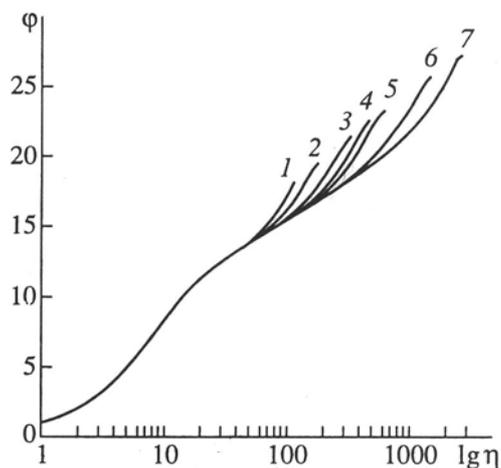


Рис. 3. Профили скоростей в переменных закона стенки по модели Л-П при различных числах Рейнольдса Re^{**} . 1 – $Re^{**} = 320$, 2 – 500, 3 – 1000, 4 – 1500, 5 – 2000, 6 – 5000, 7 – 10000.

Рис. 3, на котором представлены профили скорости в координатах закона стенки при различных числах Рейнольдса, более наглядно иллюстрирует ту же

тенденцию: с уменьшением числа Рейнольдса логарифмический участок профиля скорости уменьшается и при $Re^{**} = 320$ практически исчезает.

Наконец, на рис. 4 приведены профили турбулентной вязкости при различных числах Рейнольдса Re^{**} , полученные с использованием описанной модели турбулентности. Из него видно, в частности, что при $Re^{**} = 320$ (кривая 1) отношение максимального значения турбулентной вязкости ν_T к молекулярной вязкости ν оказывается равным примерно 13, что совпадает с количественной оценкой, данной Брэдшоу для момента вырождения логарифмического участка.

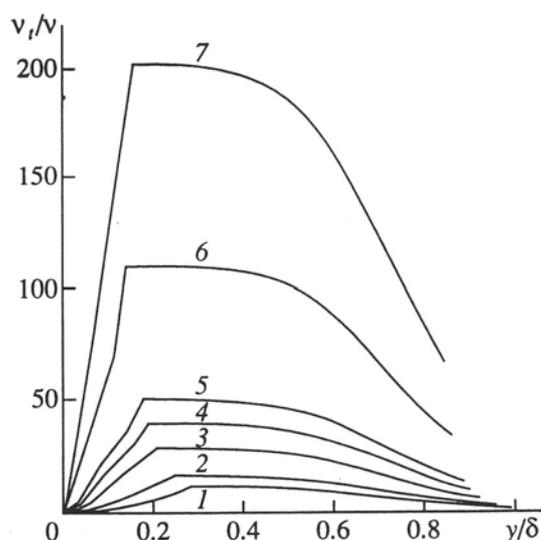


Рис. 4. Профили турбулентной вязкости при различных числах Рейнольдса Re^{**} по модели Л-П. 1 – $Re^{**} = 320$, 2 – 500, 3 – 1000, 4 – 1500, 5 – 2000, 6 – 5000, 7 – 10000.

Модель ГЛС (Гарбарук-Латин-Стрелец, 1999, [9])

В области логарифмического профиля скоростей (1.22) из формулы Прандтля (1.7)-(1.8) с учетом (1.22) следует, что турбулентная вязкость ν_T в этой области определяется выражением

$$\nu_{TO} = \kappa \cdot y \cdot \nu_*, \tag{1.23}$$

которое при $y = \delta^*$ совпадает с формулой Клаузера-3 (1.19) для внешней области. С учетом отмеченных обстоятельств была предложена простейшая из существующих алгебраических моделей для плоской пластины [9]

$$\begin{aligned}
v_T &= \kappa v_* \min\{yD, \delta^* \gamma\} \\
D &= [1 - \exp(-yv_*/vA)]^3 \\
\gamma &= [1 + 5.5(y/\delta)^6]^{-1} \\
\kappa &= 0.41, \quad A = 12.
\end{aligned}
\tag{1.24}$$

В отличие от существующих аналогов, модель ГЛС содержит на одну эмпирическую константу меньше. Обобщение этой модели на другие канонические течения и некоторые результаты ее применения будут рассмотрены в последующих разделах статьи.

2. Переходный пограничный слой на плоской пластине (модель: Лабусов-Лалин (1996) [10])

Проблема описания характеристик пограничных слоев на переходных от ламинарного к турбулентному режимам течения при больших числах Рейнольдса практически столь же актуальна, что и описание турбулентного режима. Имеющийся более чем вековой опыт измерения сопротивления плоских пластин (первые измерения были осуществлены Фрудом в 1872 г.) свидетельствует о большой протяженности участков с переходным режимом течения, особенно при больших числах Рейнольдса и низких уровнях турбулентности во внешнем потоке.

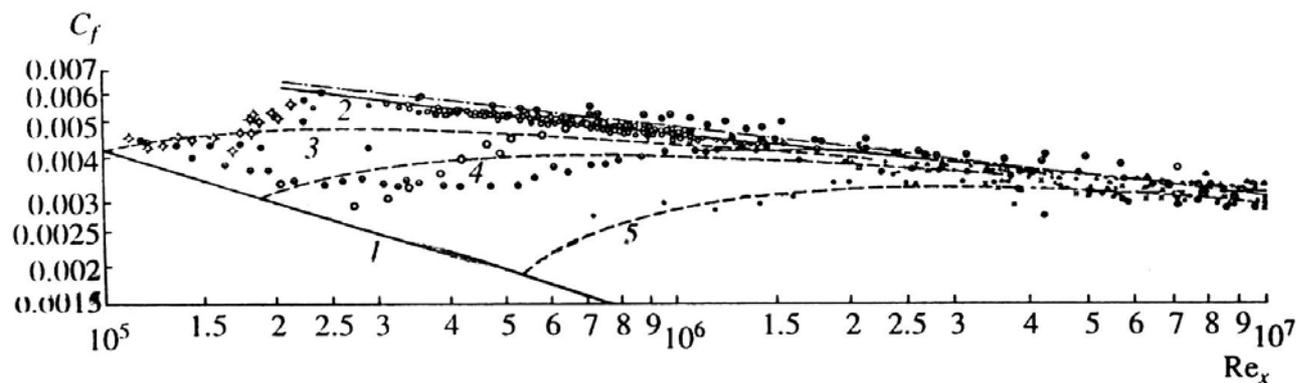


Рис. 5. Зависимость среднего коэффициента трения C_f на плоской пластине от числа Рейнольдса для ламинарного (1), переходного (2) и турбулентного режимов течения при разных Re_{xS} : 3 – 10^5 , 4 – 1.9×10^5 , 5 – 5.3×10^5 .

На рис. 5, заимствованном из работ Шонхера (1932 г.) (приводится по [8]), представлены опытные данные по полному коэффициенту сопротивления C_f

$$C_f = \frac{1}{Re_x} \int_0^{Re_x} C_{f'} dRe_x, \quad C_f = 2\tau_w / \rho U^2,$$

C_f – местный коэффициент трения.

Трем кривым на этом рисунке, соответствующим переходным от ламинарного к турбулентному режимам течения, можно поставить в соответствие различные значения числа Re_{xS} – числа Рейнольдса начала перехода (слева направо $Re_{xS} = 10^5, 1.9 \times 10^5, 5.3 \times 10^5$). Прямая линия слева (кривая 1) описывается зависимостью Блазиуса для ламинарного пограничного слоя.

$$C_f = 1.328 / \sqrt{Re_x}. \quad (2.1)$$

Режим течения с развитой турбулентностью (кривая 2) в широком диапазоне изменения числа Re_x ($2 \times 10^5 \leq Re_x \leq 5 \times 10^8$) вполне удовлетворительно может быть описан эмпирической зависимостью [8].

$$C_f = 0.455 (\lg Re_x)^{-2.58}. \quad (2.2)$$

Из рис. 5 следует, что при невысоких уровнях турбулентности во внешнем потоке ε (переходная кривая, лежащая справа) протяженность переходного участка пограничного слоя может быть весьма значительной. Масштабы этого участка сокращаются по мере роста параметра ε , что видно из характера расположения опытных точек в левой части рисунка ($Re_{xS} = 10^5$).

Предложенная в работе [10] четырехпараметрическая двухслойная алгебраическая модель переходного пограничного слоя на пластине основана на обобщении модели [7] (Лапин-Поспелов, 1995), рассмотренной в п. 1., т. е. во внутренней области использовалась формула Прандтля с демпфирующим множителем Лойцянского D_L (1.20)

$$v_{TL} = \kappa^2 y^2 \frac{\partial u}{\partial y} D_L, \quad (2.3)$$

а во внешней – формула Клаузера-3 (1.19), с тем, однако отличием, что постоянная Клаузера K заменялась функцией числа Re^{**} и двух эмпирических параметров: числа $Re_{S}^{**} = U_{\infty} \delta_{S}^{**} / \nu$ и $Re_{E}^{**} = U_{\infty} \delta_{E}^{**} / \nu$ начала S и конца E

перехода соответственно. Значение параметров $Re_{S}^{**}(\varepsilon)$ и $Re_{E}^{**}(\varepsilon)$ в зависимости от степени турбулентности во внешнем потоке определялись на основе эмпирических данных [11, 12].

$$Re_{S}^{**} = 163 + \exp(6.91 - \varepsilon)$$

$$Re_{E}^{**} = 2.667 Re_{S}^{**} \text{ при } \varepsilon \leq 6 \% \quad (2.4)$$

$$Re_{E}^{**} = 320 + \exp(7.7 - 0.45\varepsilon) \text{ при } \varepsilon > 6 \%$$

Функция $K(Re^{**}, Re_{S}^{**}, Re_{E}^{**})$, определенная из условия минимизации различий между расчетными и существующими опытными данными по коэффициенту трения, имеет вид

$$K = \kappa \left[1 - \exp \left\{ -6 \frac{Re^{**3} - Re_{S}^{**3}}{Re_{E}^{**3} - Re_{S}^{**3}} \right\} \right] \quad (2.5)$$

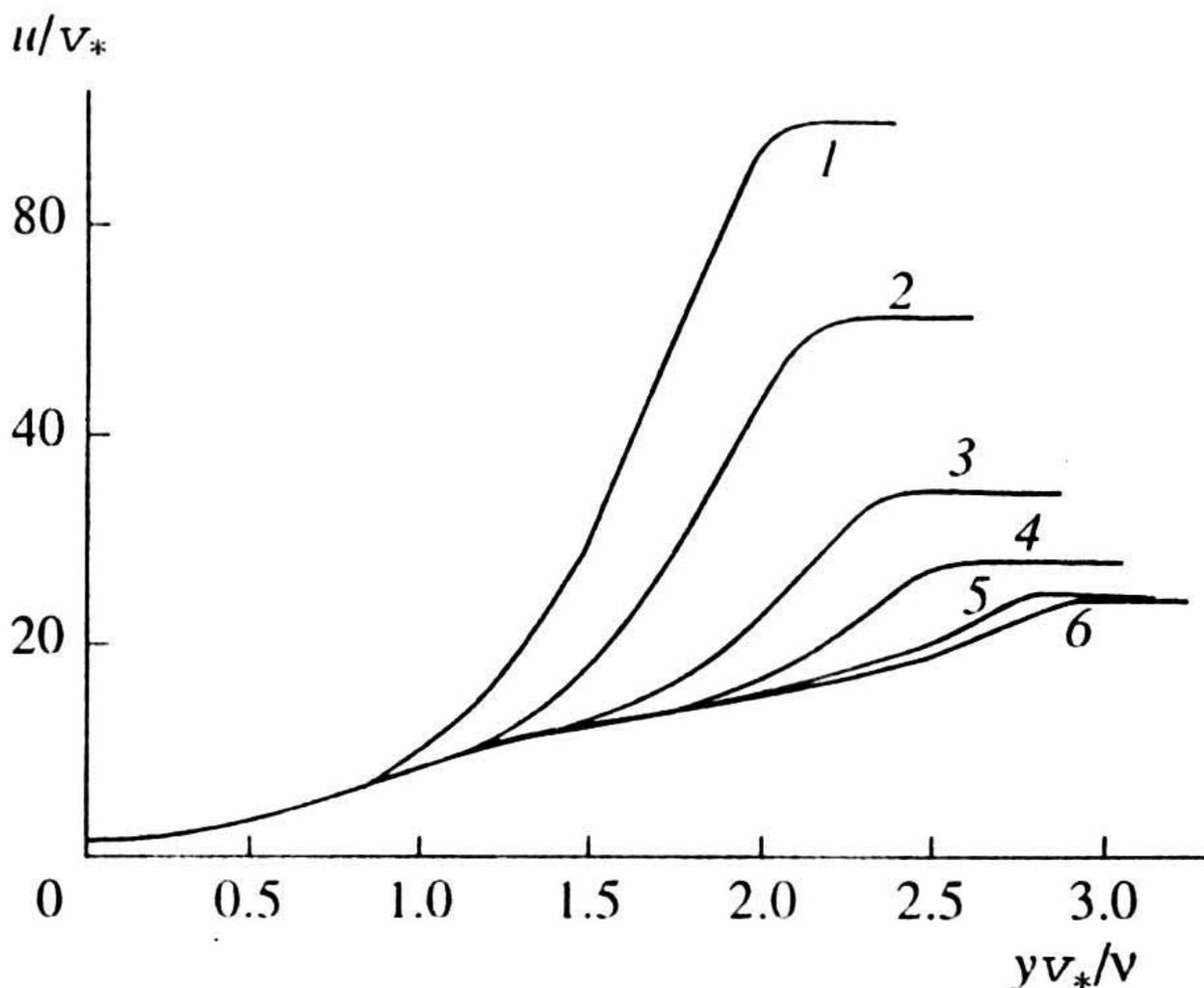


Рис. 6. Профили скоростей $u/v_* = f(yv_*/\nu)$ в сечениях пограничного слоя.

Результаты тестирования модели подробно описаны в [10]. Здесь ограничимся приведением профилей скорости $u/v_* = f(yv_*/\nu)$ в различных сечениях участка с переходным режимом течения (рис. 6) и зависимости местного коэффициента трения $C_f(Re^{**})$ при различных уровнях турбулентности во внешнем потоке (рис. 7).

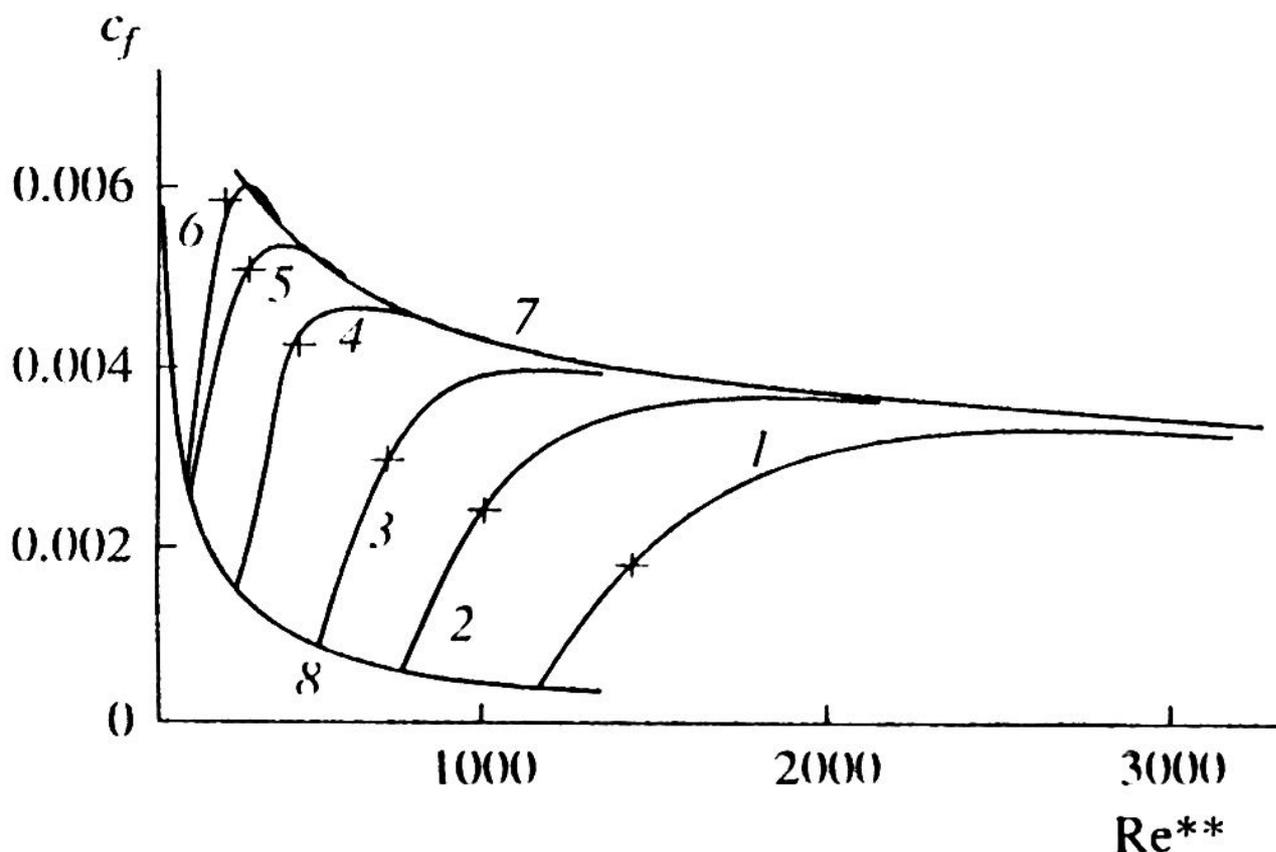


Рис. 7. Зависимость местного коэффициента трения C_f от числа Re^{**} при различных уровнях турбулентности во внешнем потоке. (1 – $\varepsilon = 0.01\%$, 2 – $\varepsilon = 0.5\%$, 3 – $\varepsilon = 1\%$, 4 – $\varepsilon = 2\%$, 5 – $\varepsilon = 5\%$, 6 – $\varepsilon = 8\%$, 7 – развитое турбулентное течение, 8 – ламинарное течение).

На рис. 6 сечению 1 соответствует профиль скоростей Блазиуса; в сечениях 2 и 3 логарифмические участки профиля скоростей еще не сформировались и лишь в последующих сечениях этот участок образуется, а его относительная протяженность по мере роста числа Re^{**} увеличивается.

На рис. 7 крестиками обозначены точки, ниже которых внутренняя область включает только вязкий подслой и переходную область, а выше начинает формироваться логарифмическая область. В этих точках $v_{T\max}/v = 10$.

3. Турбулентный пограничный слой по выпуклой криволинейной поверхности (модель: Лабусов-Лапин (2000) [13])

В ряду актуальных проблем пристенной турбулентности проблема влияния продольной кривизны поверхности на характеристики турбулентных течений одна из наиболее давних (Прандтль, 1929 г.) Криволинейная выпуклая ($R_w > 0$, R_w – радиус кривизны) стенка, как показывают экспериментальные исследования, оказывает стабилизирующее влияние, проявляющееся в уменьшении реynольдсовых касательных напряжений и уровня кинетической энергии турбулентности. В случае достаточно сильной кривизны поверхности ($\delta/R_w > 0.01$, δ - толщина пограничного слоя) стабилизирующий эффект может привести к полному подавлению турбулентности или подавлению ее во внешней области пограничного слоя с образованием зон с отрицательной генерацией турбулентной энергии и отрицательным касательным напряжением [14].

Предыдущий опыт построения алгебраических моделей турбулентности для течений на криволинейных поверхностях свидетельствует о недостаточности любых соотношений для скоростных масштабов турбулентности, полученных из формальных соображений, для удовлетворительного количественного описания роли продольной кривизны. В связи с этим необходимым элементом этих моделей стало включение весовых эмпирических констант в качестве множителя перед безразмерными параметрами, выражающими влияние продольной кривизны. Принципиальным отличием модели [13] от существующих моделей является введение в качестве множителя перед параметром кривизны (y/K_w) весовой функции, зависящей от локального турбулентного числа Рейнольдса (v_T/ν).

Модель [13] основана на обобщении однопараметрической модели (1.23) ГЛС [9] для плоской пластины. Окончательная формулировка модели представляется соотношениями:

Во внутренней области ($0 \leq y \leq \delta^*$)

$$v_{ef} = v + \kappa y \tilde{v}_{sc,i} D$$

$$D = \left[1 - \exp\left(-\frac{y \tilde{v}_{sc,i}}{vA}\right) \right]^3 \quad (3.1)$$

$$\tilde{v}_{sc,i} = v_* \exp\left(-C \frac{y}{\delta^*} Ri_T\right), \quad Ri_T = \frac{\delta^* v_{T_0}}{R_w v}.$$

Во внешней области ($\delta^* \leq y \leq \delta$)

$$v_{T_0} = \kappa v_* \delta^* \gamma \exp(-CRi_T). \quad (3.2)$$

Рекомендуемые значения констант: $\kappa = 0.41$, $A = 12$, $C = 1.4$.

Здесь константа C введена как параметр закона стенки. Можно показать, что при $C = 2$ во внутренней области реализуется классический закон стенки, согласно которому профиль скоростей в переменных закона стенки определяется соотношением

$$d\varphi/d\eta = 1/\kappa\eta. \quad (3.3)$$

При $C=1$ реализуется полученный Таунсендом (1961 г.) так называемый обобщенный закон стенки

$$d\varphi/d\eta = \sqrt{\tau/\tau_w}/\kappa\eta. \quad (3.4)$$

Вопрос о том, какой из законов стенки реализуется на выпуклой криволинейной поверхности, может быть решен на основе анализа результатов сравнения расчетных и опытных данных.

Проведенное тестирование модели в широком диапазоне изменения параметра кривизны ($0.01 \leq \delta_0/R_w \leq 0.09$, δ_0 – толщина пограничного слоя в начальном сечении криволинейного участка, R_w – радиус кривизны поверхности), свидетельствует о хорошем соответствии экспериментальных и расчетных данных по интегральным характеристикам пограничного слоя: коэффициенту трения C_f , толщине вытеснения δ^* и потере импульса δ^{**} , формпараметру $H = \delta^*/\delta^{**}$. На основе сопоставления расчетных и опытных данных по распределению касательных турбулентных напряжений сделан вывод о том, что модель предсказывает существенно меньшее, чем в опытах,

влияние кривизны на подавление турбулентности во внешней области пограничных слоев при слабой кривизне поверхности ($\delta_0/R_w = 0.01$). Однако это различие имеет тенденцию к уменьшению с ростом параметра кривизны поверхности. Из анализа расчетных и экспериментальных профилей скорости, построенных в переменных закона стенки, сделан вывод о частичной реализации на криволинейной поверхности обобщенного закона стенки Таунсенда. В основном варианте модели значение константы C принято равным $C = 1.4$ (рис. 8).

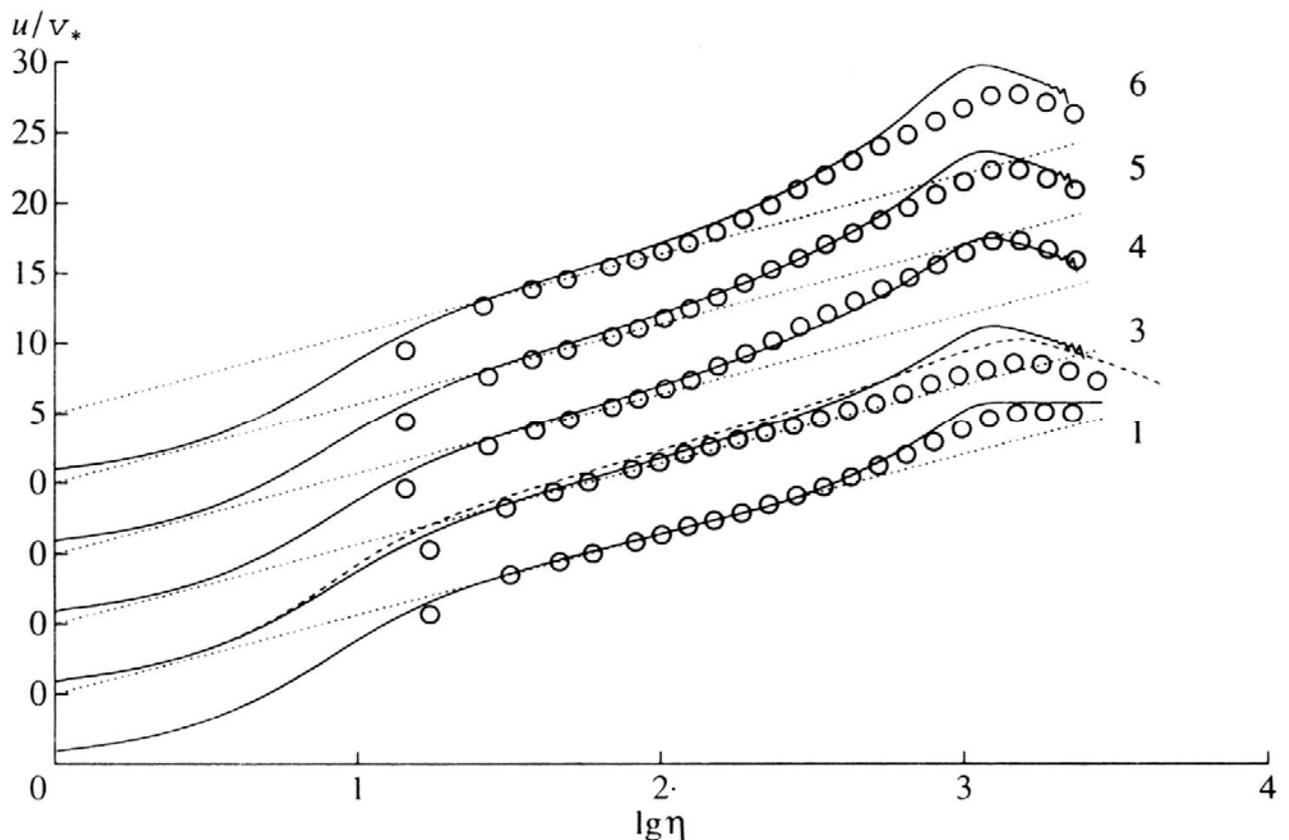


Рис. 8. Профили скоростей в координатах закона стенки (φ, η). Сравнение экспериментальных [14] (точки) и расчетных (сплошные линии – модель (3.1)-(3.2), пунктирные – логарифмический закон (1.22)) профилей, 1, 3, 4, 5, 6 – номера поперечных сечений.

4. Турбулентный пограничный слой при одновременном влиянии продольного градиента давления, вдува (отсоса) и поперечной кривизны поверхности (модель: Гарбарук, Лапин, Стрелец (2002) [15])

В работе [9] в рамках традиционной двухслойной клаузеровской схемы была предложена простая алгебраическая модель для расчета течений с

положительным градиентом давления, сравнивая по точности с лучшими из известных алгебраических и дифференциальных моделей турбулентности. Для рассматриваемого класса течений характерно наличие экстремума касательного напряжения внутри пограничного слоя (τ_{\max}). Ключевую роль в «успешности» модели [9] сыграло использование в качестве скоростного масштаба во внешней области v_{so} параметра, определенного по значению τ_{\max} ($v_{so} = (\tau_{\max}/\rho)^{1/2}$). Этот же прием был использован в [15] для построения более общей модели турбулентности, включающей учет как прямого, так и перекрестного влияния одновременно действующих факторов: продольного перепада давления, вдува (отсоса) газа через пористую поверхность, поперечной кривизны поверхности. При этом необходимо иметь в виду, что сфера применимости модели ограничивается условием немонотонности распределения касательного напряжения, точнее, обязательного существования экстремума (τ_{\max}).

Уравнения двумерного (плоского и осесимметричного) стационарного пограничного слоя имеют вид:

$$\rho \left(u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \right) = - \frac{dp}{dx} + \frac{1}{r^\alpha} \frac{\partial}{\partial y} (r^\alpha \tau), \quad (4.1)$$

$$\frac{\partial (r^\alpha u)}{\partial x} + \frac{\partial (r^\alpha v)}{\partial y} = 0. \quad (4.2)$$

Здесь u , v и x , y – проекции скорости и оси координат, направленные вдоль обтекаемой поверхности и по нормали к ней соответственно, p – давление, τ – касательное напряжение, $r = r_w + Ky$ – локальный радиус поперечной кривизны ($K = +1$ для выпуклой и -1 – для вогнутой поверхности), r_w – радиус поперечной кривизны поверхности, $\alpha = 0$ – плоское течение, $\alpha = 1$ – осесимметричное течение.

Граничные условия к системе уравнений (4.1), (4.2) имеют вид:

$$u = 0, v = V_w \text{ при } y = 0; \quad u \rightarrow U_e \text{ при } y \rightarrow \infty, \quad (4.3)$$

где V_w – скорость вдува ($V_w > 0$) или отсоса ($V_w < 0$), а U_e – скорость на внешней

границе пограничного слоя.

Сохраняя, как в [9], неизменными линейные масштабы (y , δ^* для внутренней i и внешней o области соответственно) и обозначая скоростные масштабы v_{si} и v_{so} , запишем модель турбулентной вязкости в следующем виде:

$$v_T = \kappa \min\{y v_{si} D, \delta^* v_{so} \gamma\}. \quad (4.4)$$

Демпфирующий множитель D и параметр перемежаемости γ примем такими же как в работе [9]:

$$D = [1 - \exp(-y v_{si}/vA)]^3, \quad \gamma = [1 + 5.5(y/\delta)^6]^{-1}, \quad \kappa = 0.436, \quad A = 13, \quad (4.5)$$

где ν - кинематическая вязкость, δ - толщина пограничного слоя, а κ - константа Кармана.

Для осесимметричных течений линейный масштаб внешней области, в качестве которого принимается толщина вытеснения пограничного слоя δ^* , определяется соотношением [16]:

$$\delta^* = \sqrt{r_w^2 + 2 \int_0^{\delta} (1 - u/U_e)(r_w + y) dy} - r_w. \quad (4.6)$$

Для плоского течения ($r_w \rightarrow \infty$) выражение (4.6) принимает традиционную форму

$$\delta^* = \int_0^{\delta} (1 - u/U_e) dy. \quad (4.7)$$

Скоростные масштабы во внутренней v_{si} и внешней v_{so} областях выражаются соотношениями:

$$v_{si} = v_* \sqrt{\frac{1}{1 + Ky/r_w} \left[1 + B_* \varphi + \frac{dp}{dx} \frac{y}{\tau_w} \left(1 + \frac{K}{2} \frac{y}{r_w} \right) \right]}. \quad (4.8)$$

$$v_{so} = v_* \left\{ 1 + 2\Phi_m \frac{dp}{dx} \frac{y_m}{\tau_w} + \frac{1}{2} B_* \varphi_m \Phi_m \frac{r_w}{r_m} \left(1 + \frac{y_m}{r_m} + 4\Phi_m \right) - K \frac{y_m r_w}{r_m^2} \left(1 + \frac{1}{2} \frac{y_m}{r_m} \right) \left[1 + B_* \varphi_m + \frac{dp}{dx} \frac{y_m}{\tau_w} \left(1 + \frac{K}{2} \frac{y_m}{r_w} \right) \right] \right\}^{1/2}, \quad (4.9)$$

$$\Phi_m = \frac{1}{\kappa \varphi_m} \sqrt{\frac{1 + B_* \varphi_m}{r_m/r_w}}, \quad r_m = r_w + y_m. \quad (4.10)$$

Область применения модели ограничивается условием:

$$\left(\frac{\partial \bar{\tau}}{\partial \eta}\right)_{\eta=0} = \frac{v}{v_* \tau_w} \frac{dp}{dx} + B_* \left(\frac{d\varphi}{d\eta}\right)_{\eta=0} - \frac{K}{r_w^+} > 0. \quad (4.11)$$

При рассмотрении частных случаев ограничимся записью лишь скоростных масштабов во внешней области v_{so} :

1. Течение на плоской ($r_w \rightarrow \infty$), непроницаемой ($B_* = 0$) поверхности при наличии положительного градиента давления ($dp/dx > 0$)

$$v_{so} = v_* \left(1 + \frac{2}{\kappa \varphi_m} \frac{dp}{dx} \frac{y_m}{\tau_w}\right)^{1/2}. \quad (4.12)$$

Эта модель первоначально предложена в работе [9]. Там же приведены результаты ее достаточно детального тестирования, свидетельствующие о ее высокой эффективности при описании характеристик турбулентных пограничных слоев с отрывом.

2. Течение на плоской ($r_w \rightarrow \infty$), проницаемой ($B_* > 0$) пластине ($dp/dx = 0$) – модель «чистого» вдува

$$v_{so} = v_* \left[1 + \frac{B_* \sqrt{1 + B_* \varphi_m}}{2\kappa} \left(1 + \frac{4\sqrt{1 + B_* \varphi_m}}{\kappa \varphi_m}\right)\right]^{1/2}. \quad (4.13)$$

3. Течение на цилиндрической вогнутой поверхности ($K = -1$)

$$v_{so} = v_* \left[1 + \frac{y_m r_w}{r_m^2} \left(1 + \frac{y_m}{2r_m}\right)\right]^{1/2}. \quad (4.14)$$

Для течений, в которых касательное напряжение τ изменяется монотонно от наибольшего значения на стенке τ_w до нуля на внешней границе, т. е. удовлетворяющих условию $(\partial \tau / \partial y)_{y=0} \leq 0$, как свидетельствует имеющийся опыт расчетов, в качестве скоростных масштабов v_{si} и v_{so} можно использовать один и тот же масштаб - динамическую скорость ($v_* = \sqrt{\tau_w / \rho}$): $v_{si} = v_{so} = v_*$.

Ограниченность опытных данных, в частности, их отсутствие для течений, подверженных одновременному воздействию всех рассмотренных выше факторов (градиент давления, вдув-отсос, поперечная кривизна), весьма затрудняет полномасштабное тестирование предложенной модели. В связи с

этим для тестирования предложенной модели были проведены расчеты турбулентных пограничных слоев, по которым в литературе имеются достаточно надежные опытные данные. В частности, были рассмотрены пограничные слои на плоской поверхности при наличии сильного (опыт 0141 [17]) положительного градиента давления, а также пограничный слой с сильным положительным градиентом давления на продольно обтекаемом цилиндре [16] и на плоской проницаемой (при наличии вдува) поверхности [18]. Кроме того, результаты расчетов по предложенной модели сравнивались с результатами, полученными на основе других наиболее представительных моделей: алгебраической модели [19], дифференциальной модели с одним уравнением для турбулентной вязкости Спаларта и Аллмареса [20] и дифференциальной $k-\omega$ модели Ментера [21].

Результаты расчетов представлены на рис. 9-11 в форме продольных распределений коэффициента трения $C_f = 2\tau_w/\rho U_e^2$, формпараметра пограничного слоя $H = \delta^*/\theta$ (θ – толщина потери импульса), профилей скорости $u/U_e = f(y)$; $u^+(y^+)$ и касательного напряжения $-\overline{u'v'}/U_e^2 = f(y)$.

5. Ламинарное, переходное и турбулентное установившееся течение в круглой трубе с гладкими стенками (модели: Лапин, Нехамкина, Стрелец (1990) [22], (1995) [23])

Турбулентное установившееся течение в круглой трубе с гладкими стенками относится к числу канонических, наиболее изученных экспериментально типов течений. Классические опыты Никурадзе (1932 – 1933 гг.) и многих других исследователей [24] позволили установить «универсальный» закон сопротивления

$$1/\sqrt{\lambda} = 2.0 \lg(\text{Re} \sqrt{\lambda}) - 0.8. \quad (5.1)$$

Здесь λ и Re - коэффициент сопротивления и число Рейнольдса соответственно, выражаемые соотношениями

$$\lambda = \tau_w / (1/8 \rho \bar{u}^2), \quad \text{Re} = \bar{u} d / \nu, \quad (5.2)$$

где τ_w - напряжение трения на стенке; ρ – плотность; $d=2R$ – диаметр трубы; R – радиус трубы; ν – коэффициент кинематической вязкости; \bar{u} – среднерасходная скорость

$$\bar{u} = Q/(\pi R^2), \quad Q = 2\pi \int_0^R u(R-y)dy. \quad (5.3)$$

Здесь Q – расход; y – координата, отсчитываемая от стенки; u – скорость.

Формула (5.1) справедлива при числах Рейнольдса Re от 4.5×10^3 до 3.4×10^6 , что видно из рис 12, на котором приведены опытные данные разных авторов и результаты расчетов по этой формуле [24].

Переход от ламинарного течения с пуазейлевским законом сопротивления

$$\lambda=64/Re \quad (5.4)$$

к турбулентному имеет место в диапазоне чисел Рейнольдса $2.1 \times 10^3 - 4.5 \times 10^3$ [25].

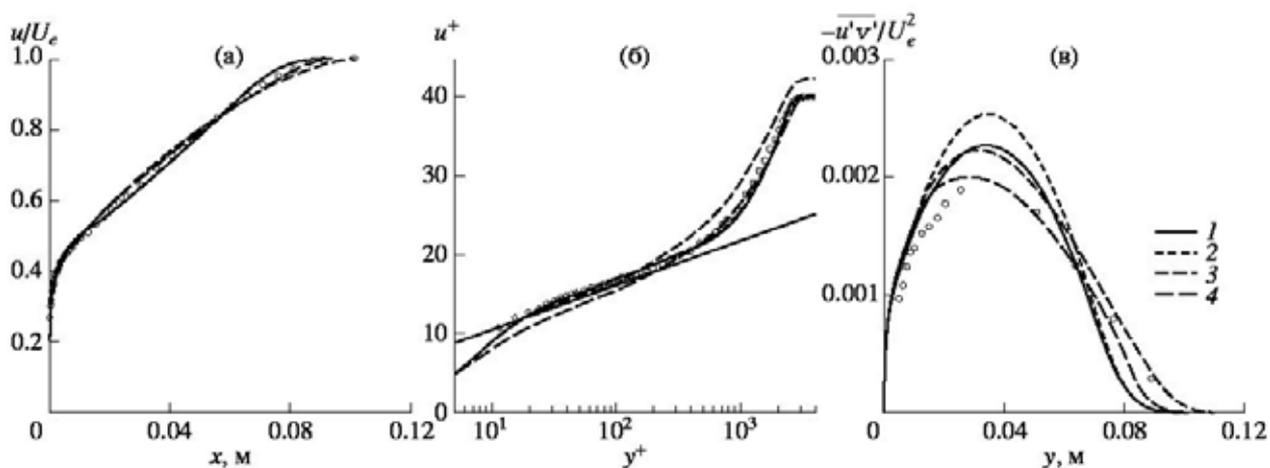


Рис. 9. Расчетные и экспериментальные профили скорости и касательные напряжения для опыта 0141 [17] при $x=3.4$ м: а – профиль скорости в физических переменных, б – профиль скорости в переменных закона стенки, в – профиль касательного турбулентного напряжения $\overline{u'v'}$. 1 – расчет по предлагаемой модели, 2 – по алгебраической модели [19], 3 – по модели Спаларта-Аллмареса [20], 4 – по модели Ментера [21], точки – экспериментальные данные [17].

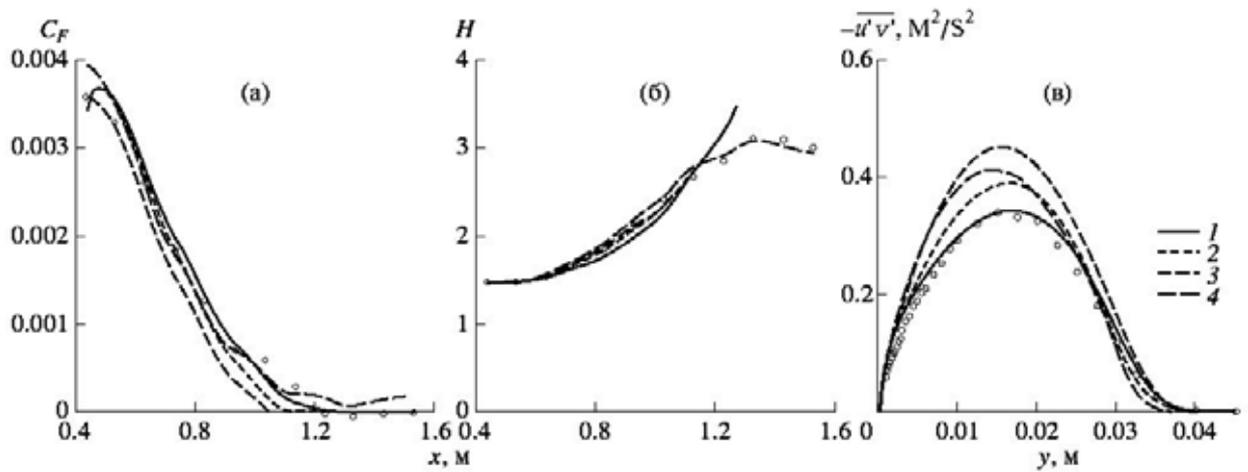


Рис. 10. Продольные распределения основных параметров пограничного слоя и профиль касательного турбулентного напряжения для опыта Dangel&FernHolz [16]: а – коэффициент трения C_f , б – формпараметр H , в – касательное напряжение при $x=0.931$ м. Обозначения моделей те же, что и на рис. 9.

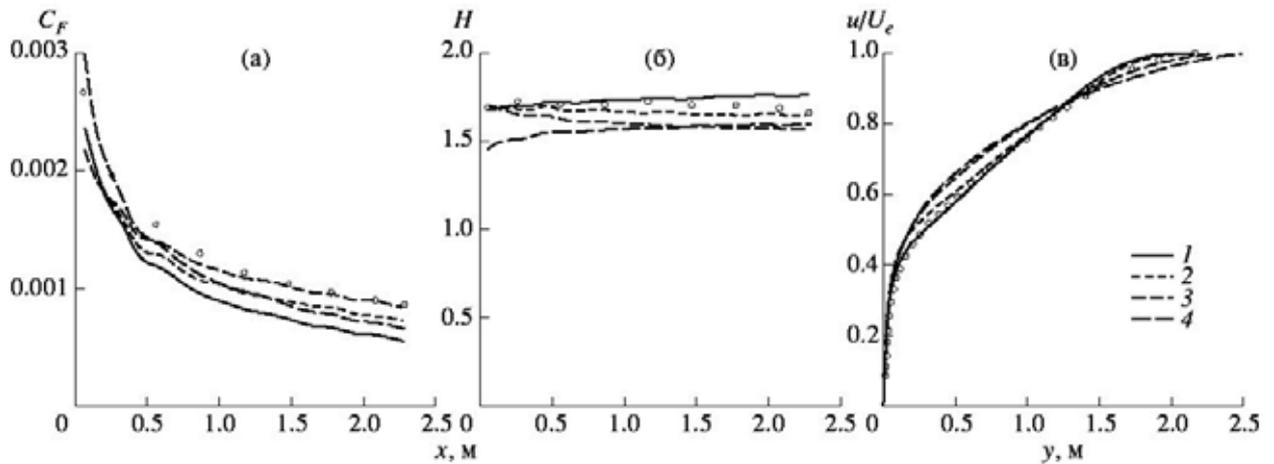


Рис. 11. Продольные распределения основных параметров пограничного слоя и профиль скорости для опыта 0241 [18]: а – коэффициент трения C_f , б – формпараметр H , в – профиль скорости при $x=1.168$ м. Обозначения моделей те же, что и на рис. 9.

Детальные исследования распределений турбулентной вязкости в поперечных сечениях потока при больших числах Рейнольдса, проведенные Лауфером ($Re = 4.3 \times 10^5$) и Нуннером ($Re = 4 \times 10^5$), показали, что турбулентная вязкость в центральной части потока (при $y/R \geq 0.3$) примерно постоянна. Это обстоятельство дало основание и послужило стимулом для разработки двухслойных алгебраических моделей турбулентности для установившегося течения в круглой трубе, подобных моделям, широко применяемым при расчетах пристенных турбулентных пограничных слоев.

Представленные ниже модели базируются на классических формулах Прандтля, Клаузера-2, Ван-Дрифта и являются, по существу, обобщением известных моделей применительно к переходному режиму течения.

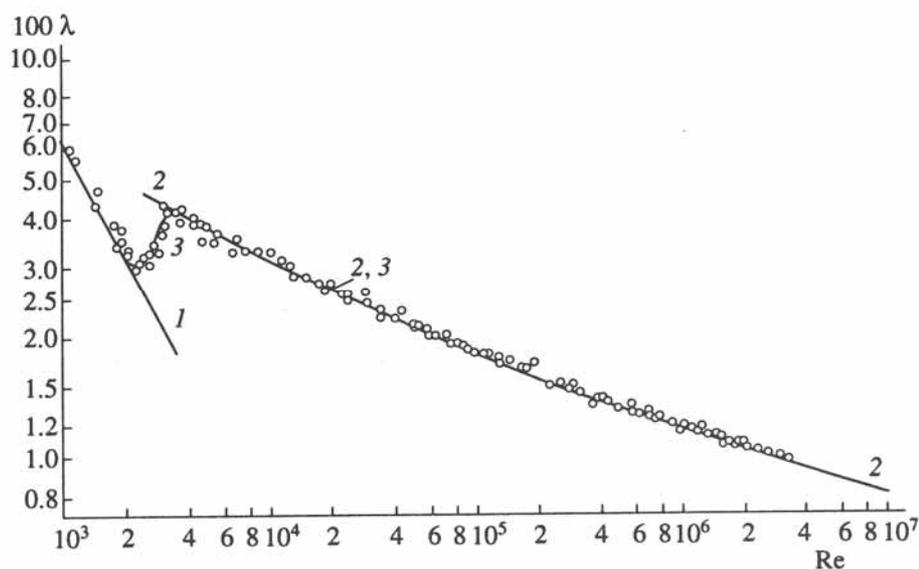


Рис. 12. Закон сопротивления для течения в гладкой трубе: 1 – ламинарное течение (5.4), 2 – турбулентное течение (5.1), 3 – переходное и турбулентное течения (расчет по модели [22]).

Во внутренней области (в обеих рассматриваемых моделях) используется формула Прандтля с демпфирующим множителем Ван-Дрифта:

$$v_{eff} = \nu + \kappa^2 y^2 \frac{\partial u}{\partial y} D_{VD} \quad (5.5)$$

$$D_{VD} = \left[1 - \exp\left(-\frac{y\nu_*}{\nu A}\right) \right]^2, \quad \kappa = 0.4, \quad A = 26.$$

Во внешней области (модель [22]) принимается модифицированная формула Клаузера-2

$$v_{eff} = \nu + k(\bar{\delta}^*) \cdot U_a \cdot \delta^*, \quad \bar{\delta}^* = \delta^* / R. \quad (5.6)$$

Здесь U_a – скорость на оси трубы, δ^* – аналог толщины вытеснения для осесимметричного течения

$$\delta^* = 2R \int_0^1 (1 - u/U_a)(1 - y/R) d(y/R), \quad (5.7)$$

функция $k(\bar{\delta}^*)$ выражается соотношением

$$k(\bar{\delta}^*) = k_0 \exp(-13.5 \bar{\delta}^{*2}) \{1 - \exp[-21(0.5 - \bar{\delta}^*)]\}. \quad (5.8)$$

Во внешней области (модель [23]) используется модифицированная формула Прандтля

$$v_{eff} = \nu + l^2 \frac{\partial u}{\partial y},$$

$$l = R \left\{ (0/117 - 0/2\bar{\delta}^*) [1 - \exp(-60(0.5 - \bar{\delta}^*))] [1 - 0.145 \exp(-20\bar{\delta}^*)] \right\}. \quad (5.9)$$

Введение эффективной вязкости v_{eff} во внешней области ((5.6) для модели [22] и (5.9) для модели [23]) связано с возможностью использования приведенных моделей для «сквозного» расчета ламинарного (течения Пуазейля), переходного и турбулентного режимов течения.

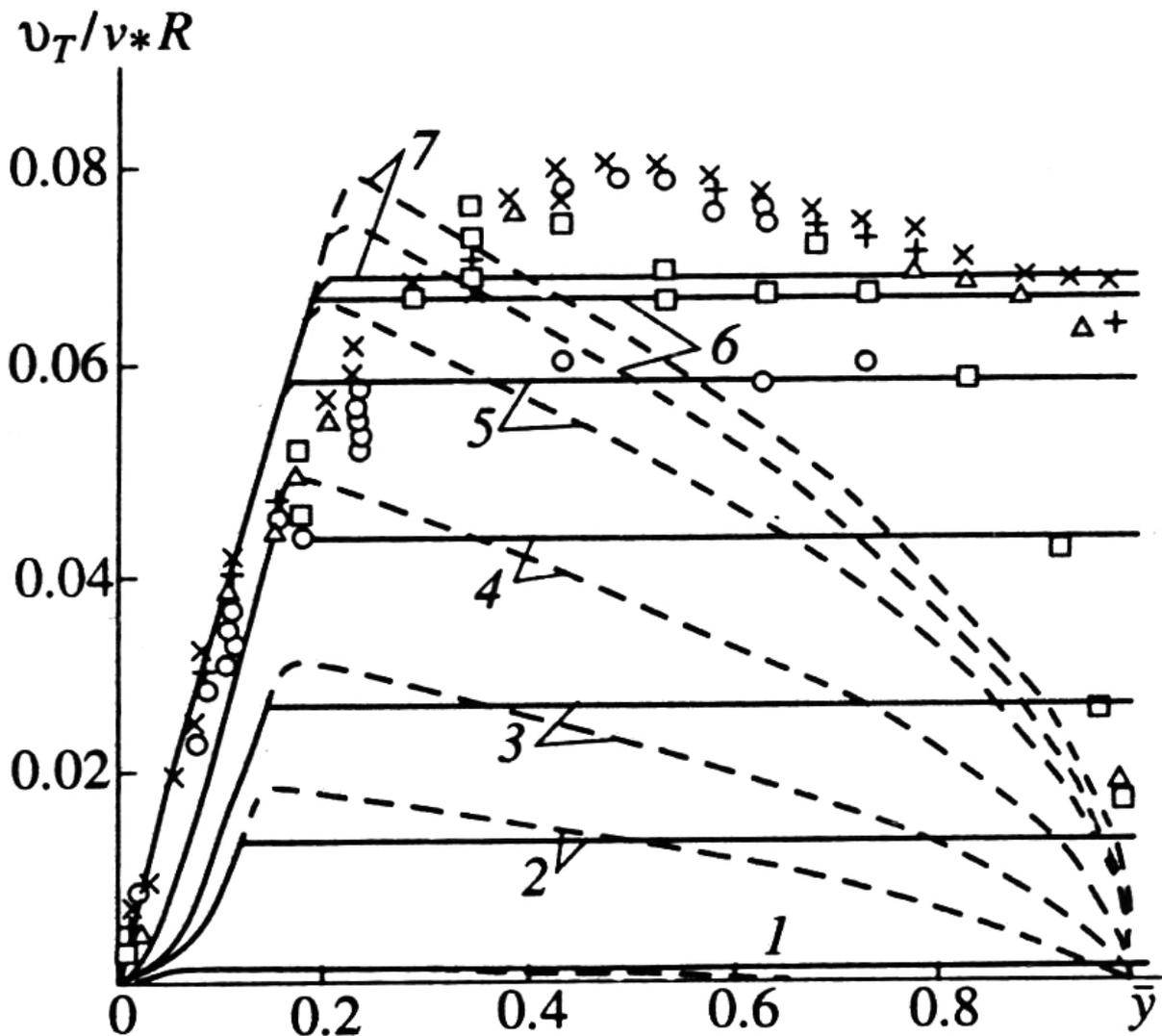


Рис. 13. Распределение нормализованного коэффициента турбулентной вязкости по сечению трубы при различных числах Re : 1 – $Re = 2.5 \times 10^3$, 2 – 3×10^3 , 3 – 4×10^3 , 4 – 10^4 , 5 – 10^5 , 6 – 10^6 , 7 – 10^7 . Сплошные линии – модель [22], штриховые – модель [23], точки – экспериментальные данные Лауфера, Хуннера и Никурадзе.

Обращаясь к результатам расчетов, заметим, что одним из условий, использованных при построении обеих моделей, было условие совпадения расчетного и опытного значения коэффициентов сопротивления λ во всем рассмотренном диапазоне изменения чисел Рейнольдса ($2.09 \times 10^3 \leq Re \leq 10^7$), что подтверждается на рис. 13.

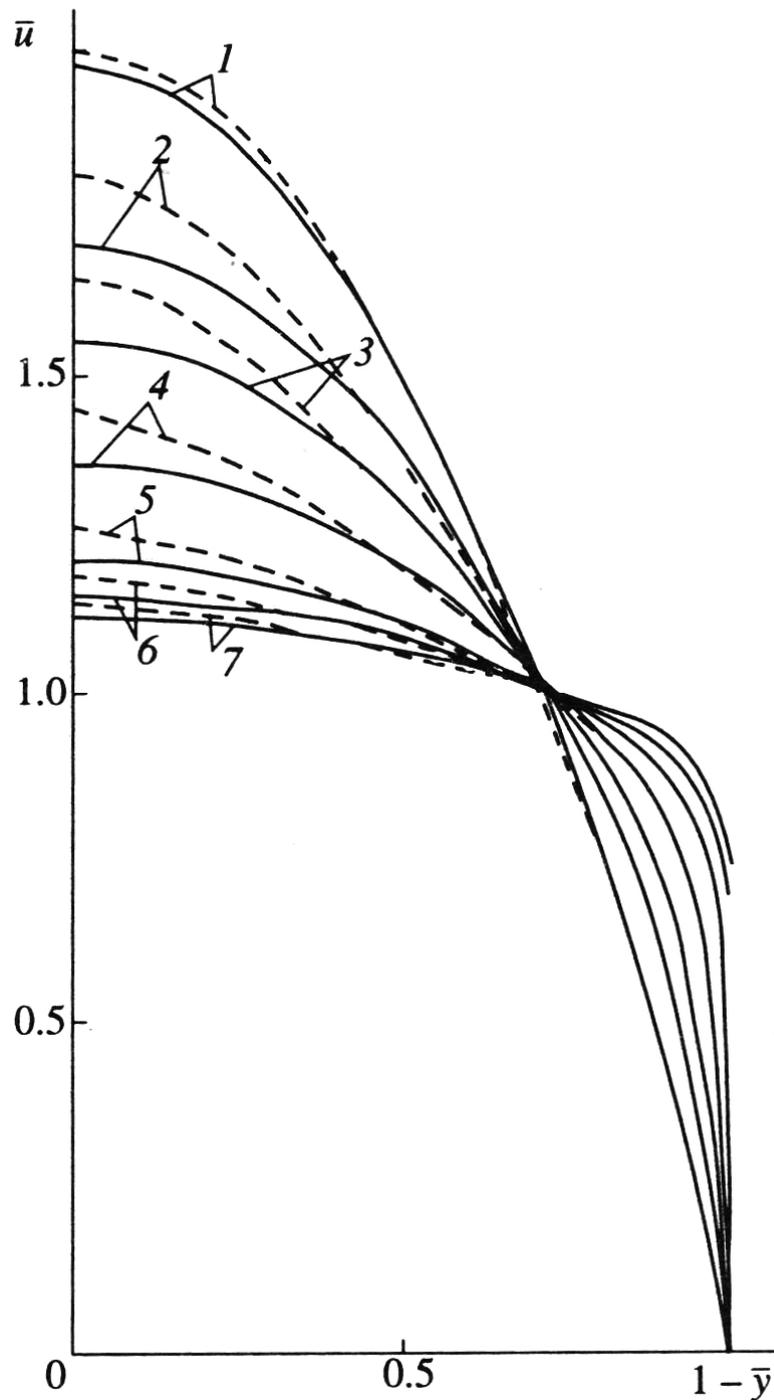


Рис. 14. Профили скоростей в трубе при различных числах Re : 1 – $Re = 2.5 \times 10^3$, 2 – 3×10^3 , 3 – 4×10^3 , 4 – 10^4 , 5 – 10^5 , 6 – 10^6 , 7 – 10^7 . Обозначения моделей те же, что и на рис. 13.

На рис. 13 представлено распределение «нормализованного» коэффициента турбулентной вязкости по сечению трубы при различных числах Рейнольдса. Там же приведены опытные данные Лауфера ($Re = 4.3 \times 10^5$), Нуннера ($Re = 4 \times 10^5$) и Никурадзе (квадратики). Принимая во внимание, что данные Лауфера и Нуннера получены с помощью прямых измерений с использованием термоанемометра, а данные Никурадзе - на основе обработки профилей скорости, следует признать, что последние, по-видимому, не вполне достоверны вблизи оси трубы. Поэтому из сравнения профилей турбулентной вязкости, полученных с помощью двух рассматриваемых моделей турбулентности, с опытными данными можно сделать вывод, что предпочтение следует отдать модели [22]. Подобную же оценку можно дать и профилям скорости в трубе при различных числах Рейнольдса, представленных на рис. 14.

В заключение отметим, что обобщение модели [22] на турбулентное установившееся течение в круглой трубе с песочной шероховатостью содержится в работе [26].

Список литературы

1. Reynolds O. On the Dynamical Theory of Incompressible Viscous Fluids and the Determination of the Criterion. Philosophical Transactions of the Royal Society of London, Series A, 1895, V. 186, P. 123-161; русский пер. в сб. «Проблемы турбулентности», ОНТИ, 1936.
2. Clauser F.H. Turbulent boundary layers in adverse pressure gradients. Journal Aeron. Sci., 1954, V. 21, PP. 91-108; русский пер. в сб. «Проблемы турбулентности», ОНТИ, 1936.
3. Ludweig H., Tillman W. NASA TM, 1950, N1285 15.
4. Van Driest E.R. On Turbulent Flow Near a Wall. Journal Aero. Sci., 1956, V. 23, N. 11.
5. Андерсон Д, Таннехилл Дж, Плетчер Р. Вычислительная гидромеханика и теплообмен. М.: Мир, 1990, с. 384.
6. Турбулентность. Под ред. П. Брэдшоу, М.: Машиностроение, 1980, с. 343.
7. Лапин Ю.В., Поспелов В.А. Турбулентный пограничный слой на плоской пластине. ТВТ, 1995, т. 33, № 3, Стр. 422-429.
8. Лойцянский Л.Г. Механика жидкости и газа. 7-е изд. М.: Дрофа, 2003, 840 стр.
9. Гарбарук А.В., Лапин Ю.В., Стрелец М.Х. Простая алгебраическая модель турбулентности для расчета турбулентного пограничного слоя с положительным перепадом давления. ТВТ, 1999, Т. 37, №1, стр. 87-91.
10. Лабусов А.Н., Лапин Ю.В. Четырехпараметрическая двухслойная алгебраическая модель переходного пограничного слоя на плоской пластине. ТВТ, 1996, т. 34, № 6, стр. 942-948.
11. Abu-Ghanam B, Show R. J. Mech. Eng. Sci., 1980, V. 22, N 5, P. 213.
12. Hall D.G., Gibbings J.C. Mech. Eng. Sci., 1972, V. 14, P. 134.
13. Лабусов А.Н., Лапин Ю.В. Алгебраическая модель турбулентного пограничного слоя на выпуклой криволинейной поверхности. ТВТ, 2000, т. 38, № 3, стр. 458-467.

14. Gillis J.C., Johnston J.P., 1979 Turbulent Boundary Layer on a Convex Wall and its Redevelopment on a Flat Wall. *Journal of Fluid Mech.*, 1983, V. 135, PP. 123-153.
15. Гарбарук А.В., Лапин Ю.В., Стрелец М.Х. Турбулентный пограничный слой при одновременном влиянии продольного градиента давления, вдува (отсоса) и поперечной кривизны поверхности
16. Dengel P., Fernholz H.H. An experimental investigation of an incompressible turbulent boundary layer in the vicinity of separation. *Journal of Fluid Mech.*, 1990, V. 212, p. 615.
17. Samuel A.E., Joubert P.N. A boundary layer developing in an increasingly adverse pressure gradient. *Journal of Fluid Mech*, 1974, v. 66(3), p. 481.
18. Andersen P.S., Kays W.M., Moffat R.J. The turbulent boundary on a porous plate: an experimental study of the fluid mechanics for adverse free-stream pressure gradients. Thermosciences Division, Department of Mechanical Engineering, Stanford University, Report N HMT-15, 1972.
19. Гарбарук А.В., Лапин Ю.В., Стрелец М.Х. Алгебраическая модель турбулентности для течений с максимумом касательного напряжения внутри пограничного слоя. *ТВТ*, 2001, Т. 39, № 4.
20. Spalart P.R., Allmaras S.R. A One-Equation Turbulence Model for Aerodynamic Flows. *AIAA Paper*, 1992, AIAA-92-0439.
21. Menter F.R. Zonal two equation $k-\omega$ turbulence models for aerodynamic flows. *AIAA Paper*, 1993, AIAA-93-2906.
22. Лапин Ю.В., Нехамкина О.А., Стрелец М.Х. *Изв. АН СССР, МЖГ*, 1990, № 2, С. 31.
23. Лапин Ю.В., Нехамкина О.А., Стрелец М.Х. Двухслойная трехпараметрическая модель переходного и турбулентного установившегося течения в круглой трубе с гладкими стенками. *ТВТ*, 1995, Т. 33, № 1, с. 49-53.
24. Шлихтинг Г. Теория пограничного слоя. М.: Наука, 1969.
25. Preston J.H. *JFM*, 1958, V. 3, P. 4.

26. Лапин Ю.В., Нехамкина О.А., Стрелец М.Х. Многопараметрическая алгебраическая модель турбулентного установившегося течения в круглой трубе с песочной шероховатостью. ТВТ, 1995, Т. 33, № 5, с. 731-737.