

**Н. И. Акатнов, С. А. Аверьянова, Е. Н. Быстрова, Н. А. Крылов**

***Полуэмпирическое моделирование изотермических турбулентных течений с преимущественным направлением осредненного движения жидкости.***

В статье представлены две полуэмпирические модели турбулентных течений с преимущественным направлением осредненного движения. В первой для расчетов двухточечных характеристик в однородном сдвиговом потоке применена известная теория осесимметричной турбулентности Чандрасекхара. Вторая является низкорейнольдсовым вариантом опубликованной ранее высокорейнольдсовой « $k - kl$ » модели.

**1. Расчеты статистических характеристик однородной турбулентности на основе уравнений для вторых двухточечных моментов**

Основой существующих моделей турбулентности для решения прикладных задач являются одноточечные моменты разных порядков. Однако, двухточечные моменты турбулентности гораздо более информативны, чем одноточечные. Например, второй двухточечный момент в однородной изотропной турбулентности позволяет найти кинетическую энергию турбулентности  $k$ , интегральный и тэйлоровский масштаб турбулентности, скорость диссипации  $\varepsilon$  и энергетический спектр пульсаций. Наиболее известным уравнением для второго двухточечного момента является уравнение Кармана – Ховарта [1]. Оно не замкнутое, поскольку кроме второго содержит еще и третий момент. Изложение обширной литературы, посвященной исследованию вырождения однородной изотропной турбулентности и замыканию уравнения Кармана–Ховарта, представлено в монографиях [2], [3]. Среди замыкающих моделей выделим формулы, позволяющие выразить третий момент через градиент второго, предложенные и протестированные в работах [4 – 8].

В 2000 г. на кафедре аэродинамики СПбГТУ Е.Н. Быстровой была защищена диссертационная работа, посвященная расчетам статистических характери-

Проблемы турбулентности и вычислительная гидродинамика (к 70-летию кафедры «Гидроаэродинамика») стик однородной турбулентности на основе уравнений для двухточечных моментов, замкнутых посредством градиентных формул. Основные результаты работы опубликованы в [9, 10]. Содержание работы [9] кратко сводится к следующему. Приведен вывод градиентной формулы, которая имеет вид:

$$M_{LL,L} = \nu_t \frac{\partial M_{L,L}}{\partial y} \quad (1.1)$$

Здесь  $M_{LL,L} = \langle (u'_{LA})^2 u'_{LB} \rangle$  – корреляционный момент 3-го порядка;  $y$  – расстояние между точками А и В;  $L$  – направление, соединяющее точки А и В;  $u'_{LA}$ ,  $u'_{LB}$  – проекции пульсационных скоростей на  $L$  в точках А и В. Коэффициент турбулентной вязкости  $\nu_t$  получен в виде:

$$\nu_t = l \sqrt{b(t)} [1 - f(y,t)] \quad (1.2)$$

где  $b(t) = M_{L,L}(t,0) \equiv \langle u'^2 \rangle$ ;  $f(t,y) = M_{L,L}(t,y) / b(t)$  – продольный коэффициент корреляции. В отличие от работ [4, 5, 8], в которых  $l$  фигурирует как отвлеченная характерная длина порядка  $y$ , в формуле (1.2)  $l$  трактуется как аналог пути смешения Прандтля. Выведены две модификации  $l(y)$  – одна для случая малых и средних чисел Рейнольдса, другая для больших, когда в спектре пульсаций появляется инерционный интервал (с законом "-5/3"). Далее приведены результаты расчетов вырождения изотропной турбулентности на основе уравнения Кармана – Ховарта, замкнутого с помощью формул (1.1), (1.2), а также сравнения расчетов с опытными данными. Получено хорошее согласие между расчетами и опытом для вырождения энергии турбулентности, для корреляционных функций и энергетических спектров. На рис. 1 и 2 приведены сравнения расчетов коэффициентов корреляции  $f(y,t)$ , а также соответствующего одномерного энергетического спектра с опытными данными [11]. На этих и последующих рисунках  $M$  характерная длина турбулизирующего устройства. Все расчеты сделаны при универсальных значениях трех эмпирических коэффициентов принятой модели.

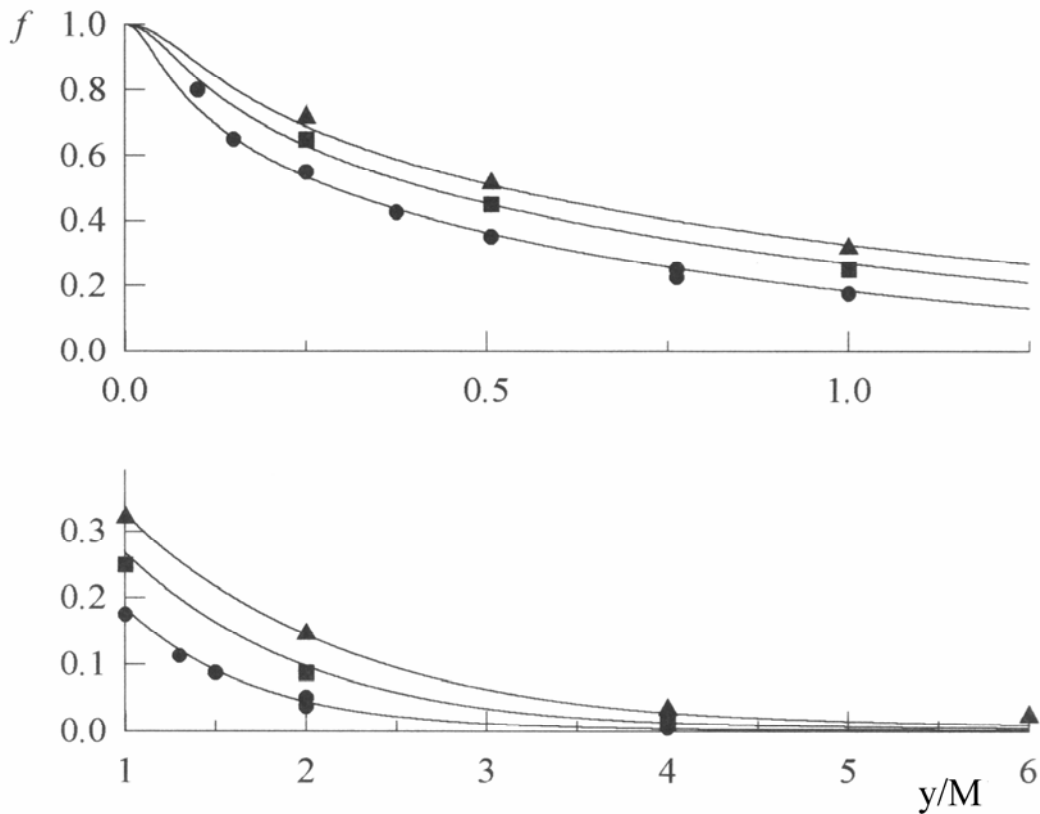


Рис.1 Эволюция продольного коэффициента корреляции. Опытные данные [11]:  $Re=43000$ , кружки –  $z_1/M=42$ , квадраты –  $z_1/M=98$ , треугольники –  $z_1/M=172$ .

В той же статье рассмотрена задача об однородном турбулентном потоке, текущем со средней скоростью  $U_1$ , параллельной оси  $z_1$ , при наличии однородного сдвига  $dU_1/dz_2 = const$ . Пульсационное движение считалось изотропным.

Статистические характеристики турбулентности в этом случае могут быть найдены на основе уравнения Кармана – Ховарта, в которое добавлен генерационный член  $P = -\langle u'_{2A} u'_{1B} \rangle \partial U_1 / \partial z_2$ . Это уравнение строго выводится в предположении изотропности турбулентности. Для определения недиагональной компоненты тензора вторых моментов использовано обобщенное соотношение Невзглядова – Драйдена в виде:

$$\left| \langle u'_{2A} u'_{1B} \rangle \right| = 0.5 \beta \langle u'_{iA} u'_{iB} \rangle \quad (1.3)$$

Здесь  $\beta=0,3$  – обычно используемое значение эмпирического коэффициента  $\beta$ . Сделаны расчеты турбулентности для чисел Рейнольдса  $Re=(1.0 \div 2.2) \cdot 10^4$  и

$dU_1/dz_2 = 43.5 \div 84.0 \text{ c}^{-1}$  и сопоставлены с опытными данными. Рост кинетической энергии турбулентности вниз по потоку хорошо согласуется с опытом при разных числах Рейнольдса и  $dU_1/dz_2$ . Хорошо совпадает с опытом и величина тэйлоровского масштаба, определяющего диссипацию турбулентности  $\varepsilon_t$ . Рост интегрального масштаба вниз по потоку качественно согласуется с опытом (количественное сравнение с опытом в данном случае невозможно, так как реальная турбулентность анизотропна). Расчеты сделаны при тех значениях эмпирических коэффициентов в формуле для  $l(y)$  в (1.2), которые были выбраны при исследовании вырождения изотропной турбулентности.

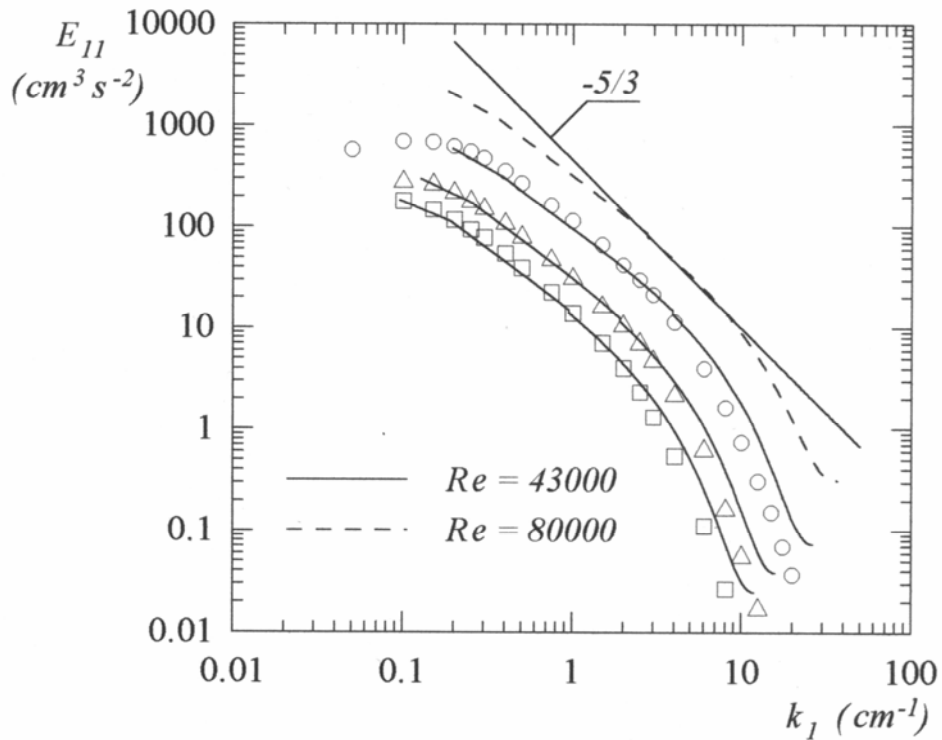


Рис. 2 Эволюция одномерного энергетического спектра. Опытные данные см. рис. 1.

В работе [10] также рассмотрено течение с однородным сдвигом, но с анизотропным пульсационным движением. Опытные данные, полученные в турбулентных сдвиговых потоках с преимущественным направлением течения (по-

Проблемы турбулентности и вычислительная гидродинамика (к 70-летию кафедры «Гидроаэродинамика») граничные слои, струи и так далее) показывают, что одноточечные моменты находятся в них в соотношениях:

$$\langle u_1'^2 \rangle > \langle u_2'^2 \rangle \approx \langle u_3'^2 \rangle, \quad \langle u_1' u_2' \rangle \neq 0 \quad (1.4)$$

Хотя  $\langle u_2'^2 \rangle$  и  $\langle u_3'^2 \rangle$  заметно отличаются по величине, но они оба существенно меньше, чем  $\langle u_1'^2 \rangle$ , поэтому естественно в данном случае сделать предположение об осевой симметрии турбулентности. В данной работе для получения двухточечных характеристик использована теория осесимметричной турбулентности С. Чандрасекхара [12]. Согласно этой теории все соленоидальные двухточечные моменты поля скорости второго порядка выражаются через две скалярные функции  $B(t, \mu, y)$  и  $Q(t, \mu, y)$ , а моменты третьего порядка – через шесть ( $T_1, T_2 \dots T_6$ ). Здесь  $\mu$  – косинус угла между вектором  $\vec{y}$ , соединяющим точки А и В, и осью симметрии  $\vec{\lambda}$ . Важной особенностью рассматриваемой задачи является то, что функции  $B$  и  $Q$  можно считать не зависящими от  $\mu$ . Уравнения для  $B$  и  $Q$  в данной работе были выведены из уравнения для следа тензора вторых двухточечных моментов. Сумма членов уравнения, содержащих производные от третьих двухточечных моментов, выражена через два скалярных коэффициента  $T_4(t,y)$  и  $T_6(t,y)$  (остальные  $T_i=0$ ). Коэффициенты  $T_4(t,y)$  и  $T_6(t,y)$  выражались через функции  $B(t,y)$  и  $Q(t,y)$  посредством градиентных формул, записанных по аналогии с градиентной формулой, использованной в [9], с теми же значениями эмпирических коэффициентов. Для выражения касательной компоненты тензора вторых моментов, входящей в генерационный член уравнения, снова использовалась обобщенная гипотеза Невзглядова – Драйдена. К сожалению, теория Чандрасекхара не позволила получить адекватной формулы для  $\langle u_{2A}' u_{1B}' \rangle$ , поскольку построена для безсдвиговой турбулентности. Члены уравнения вторых двухточечных моментов, найденные с помощью теории Чандрасекхара, содержат слагаемые, имеющие множителями  $\mu^0$  и  $\mu^2$ . Собирая суммы коэффициентов при  $\mu^0$  и  $\mu^2$  и приравнивая их к нулю, получаем систему

Проблемы турбулентности и вычислительная гидродинамика (к 70-летию кафедры «Гидроаэродинамика») дифференциальных уравнений относительно сферически симметричных функций  $B$  и  $Q$ , а именно:

$$U_1 \frac{\partial B}{\partial z_1} = \frac{2}{y^4} \frac{\partial}{\partial y} \left[ y^4 (\nu + \nu_{tB}) \frac{\partial B}{\partial y} \right] - \frac{2p\nu_{tQ}}{y} \frac{\partial Q}{\partial y} + \beta \frac{dU_1}{dz_1} B^* \quad (1.5)$$

$$U_1 \frac{\partial Q}{\partial z_1} = \frac{2\nu}{y^4} \frac{\partial}{\partial y} \left[ y^4 \frac{\partial Q}{\partial y} \right] + \frac{1}{y} \frac{\partial}{\partial y} \left( y p \nu_{tQ} \frac{\partial Q}{\partial y} \right) + \beta \frac{dU_1}{dz_1} Q^* \quad (1.6)$$

Здесь  $p$  – числовой коэффициент,  $B^*$  и  $Q^*$  представляют собой несколько модифицированные функции  $B$  и  $Q$ . Во-первых, в них входят только неотрицательные части функций  $B$  и  $Q$ . Во-вторых, добавлены небольшие по величине слагаемые  $\sim(B-2Q)$ . Эти слагаемые практически исчезают, когда  $B \approx 2Q$ . При этом последнем условии выполняется наблюдаемые на опыте соотношения между  $\langle u_1'^2 \rangle$  и величиной  $0.5(\langle u_2'^2 \rangle + \langle u_3'^2 \rangle)$ .

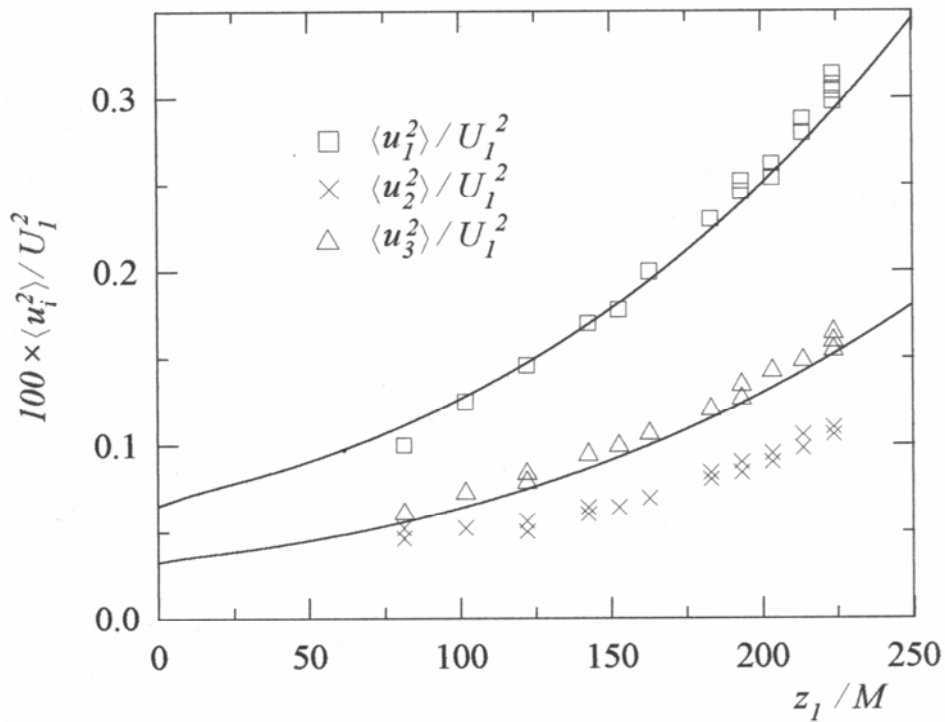
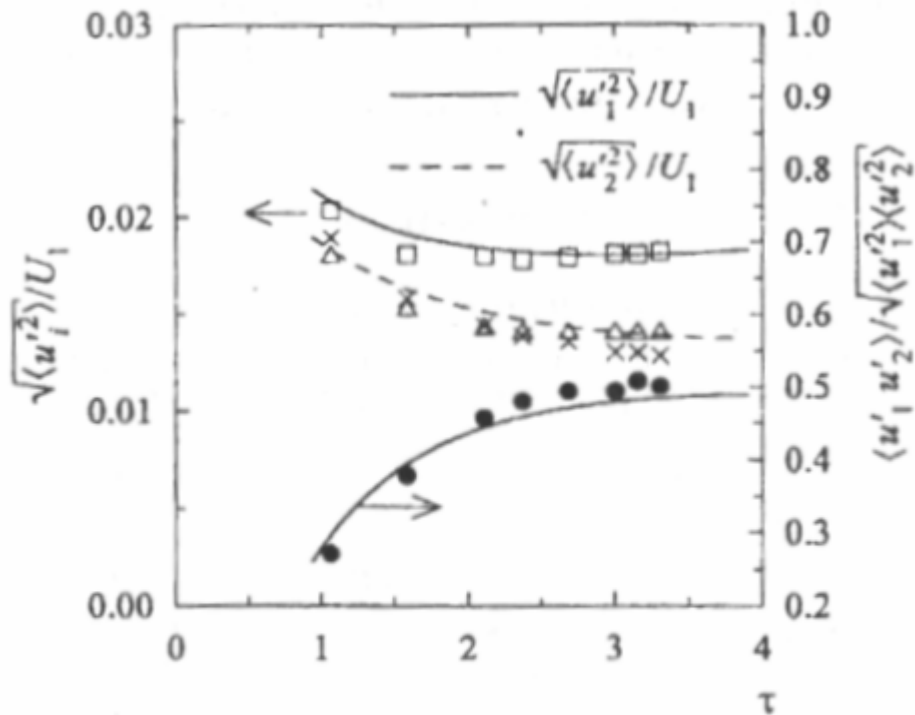


Рис. 3 Эволюция вторых одноточечных моментов турбулентности вниз по потоку для  $Re=12350$  [13],  $d\langle u_1 \rangle / dz_2 = 46.8c^{-1}$ ,  $U_1 = \langle u_1 \rangle$

На основе уравнений (1.5) —(1.6) сделаны расчеты при разных числах Рейнольдса и  $dU_1/dz_2$ . По рассчитанным функциям  $B$  и  $Q$  с помощью теории осесимметричной турбулентности могут быть найдены кинетическая энергия турбулентности, дисперсии продольной и поперечной скоростей пульсационного движения, диагональные компоненты тензора вторых двухточечных моментов и соответствующие им спектры, продольные и поперечные интегральные и тейлоровские масштабы. Были получены указанные выше характеристики, а также установлено их хорошее согласие с данными опытов. На рис. 3 показаны эволюции вторых односточечных моментов вниз по потоку. Сплошные линии – расчет, значки – эксперимент [13].



$$Re=43000, \square - \sqrt{\langle u_1'^2 \rangle} / U_1, \times - \sqrt{\langle u_2'^2 \rangle} / U_1, \\ \Delta - \sqrt{\langle u_3'^2 \rangle} / U_1, \bullet - \langle u_1' u_2' \rangle / \sqrt{\langle u_1'^2 \rangle \langle u_2'^2 \rangle}.$$

Рис. 4 Эволюция среднеквадратичных значений пульсационных скоростей и сдвигового напряжения  $\langle u_1' u_2' \rangle$  вниз по потоку для  $Re=12350, dU_1/dz_2 = 12.9c^{-1}$ . Опытные данные [14]:  $Re=43000$

Отдельно была рассмотрена задача о внезапном наложении однородного сдвига на первоначально изотропную турбулентность. Известно, что в этом случае коэффициент  $\beta$  не мгновенно обретает значение равное  $\beta_M = 0,3$ , а достигает его асимптотически, с некоторым характерным временем  $T$ , называемым временем релаксации. Для определения  $\beta(t)$  в данном случае было составлено линейное релаксационное уравнение. Рассчитанные таким путем диагональные и касательные составляющие тензора вторых одноточечных моментов показаны на рис. 4 сплошными линиями в сравнении с опытами [14] (значки).

## 2. Разработка « $k-kl$ » модели турбулентности.

В настоящее время для решения прикладных задач широко используются дифференциальные полуэмпирические модели турбулентности с одним уравнением (относительно  $v_i$ ), с двумя и с большим их числом. Среди моделей с двумя дифференциальными уравнениями наибольшую популярность имеют « $k - \varepsilon$ », « $k - \omega$ », а так же комбинация этих двух моделей. Однако эти модели имеют существенные недостатки [15].

С точки зрения построения модели более последовательны методы вывода уравнения переноса величины  $m=kl$ , где  $k = \frac{\overline{u_i u_i}}{2}$  – среднекинетическая энергия турбулентности, а  $l$  – масштаб турбулентности, пропорциональный интегральному. Первыми моделями турбулентности были именно « $k - kl$ » и « $k - l$ » модели [16, 17], а позднее появились работы [18–20] и ряд других. Опыт использования « $k - \varepsilon$ » или « $k - \omega$ » моделей несравненно больше, чем моделей « $k - kl$ ». Тем не менее, потенциальные достоинства последних значительны, и их совершенствование представляется полезным.

Построение модели « $k - kl$ », о которой речь пойдет дальше, в наиболее общем виде представлено в работе [21]. Вывод уравнений модели сделан на осно-



ве уравнения переноса вторых двухточечных моментов  $M_{i,j} = \langle u'_{iA} u'_{jB} \rangle$  (здесь  $u'_{iA}$ ,  $u'_{jB}$  – проекции пульсационных скоростей на оси  $x_i$ ,  $x_j$  в точках А и В). Построенная высокорейнольдсовая модель была протестирована путем расчетов плоской и круглой струй, слоя смешения, следа за цилиндром, пограничного слоя при  $dp/dx = 0$ , течений в плоском канале и в трубе. В трех последних случаях для удовлетворения граничным условиям использовались пристеночные функции. Во всех случаях получено хорошее согласие с опытом полей осредненных скоростей и энергии турбулентности (см. [21]).

В дальнейшем было смоделировано несколько последовательно улучшенных модификаций низкорейнольдсовой версии той же модели. Первые удачные расчеты на основе низкорейнольдсовой модели были сделаны С. А. Аверьяновой в 1999г. в ее магистерской диссертации, которая рассчитала течения в канале и в плоских пограничных слоях при  $dp/dx = 0$  и  $dp/dx \neq 0$ . Было установлено хорошее согласие расчетов с опытом для канала и пограничных слоев при  $dp/dx \leq 0$ . В расчетах пограничных слоев с  $dp/dx > 0$  коэффициент сопротивления  $c_f$  оказался много выше экспериментального. Позднее в модель были внесены некоторые поправки, улучшившие согласие с опытом при  $dp/dx > 0$ . Эта последняя модификация для плоского пограничного слоя имеет вид:

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = U_E \frac{dU_E}{dx} + \frac{\partial}{\partial y} \left[ (v + v_t^d) \frac{\partial u}{\partial y} \right]; \quad \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (2.1)$$

$$u \frac{\partial k}{\partial x} + v \frac{\partial k}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left[ (v + v_t^d) \frac{\partial k}{\partial y} \right] + v_t^d \left( \frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 - C_d \frac{k \sqrt{k}}{l} \left( \frac{a_\varepsilon}{\text{Re}_t} + 1 \right) - 2\nu(1 - f_1) \frac{k}{y^2} \quad (2.2)$$

$$u \frac{\partial m}{\partial x} + v \frac{\partial m}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left[ \left( v + \frac{v_t^d}{\sigma_m} \right) \frac{\partial m}{\partial y} + l v_t^d \frac{\partial k}{\partial y} \right] + a_1 l v_t^d \left( \frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 - C_{m1} f_2 \frac{m \sqrt{k}}{l} - 2\nu l \frac{m}{k} \left| \frac{\partial u}{\partial y} \right| \left| \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right| f_2 \alpha_1 - C_{m2} m f_2 \left| \frac{\partial u}{\partial y} \right| - C_{m3} \sqrt{k} \frac{\partial l}{\partial y} \frac{\partial m}{\partial y} \alpha_2 f - 6\nu \frac{m}{y^2} f_3 \quad (2.3)$$

Здесь  $u, v$  – проекции осредненной скорости на оси  $x$  и  $y$ ;  $U_E$  – скорость на внешней границе пограничного слоя;  $\nu$  – кинематический коэффициент молекулярной вязкости;  $\nu_t = l\sqrt{k}$  – кинематический коэффициент турбулентной вязкости;  $m = kl$  – энергия пульсаций на длине корреляции;  $\tau_t = \rho \nu_t \frac{\partial u}{\partial y}$ .

Демпфирующие функции имеют вид:

$$f_1 = 1 - \exp\left[-\frac{\text{Re}_t}{B_f}\left(1 + A_f \frac{\text{Re}_t}{B_f}\right)\right], \quad f_2 = 1 - \exp\left[-\left(\frac{\text{Re}_t}{H_f}\right)^2\right] \quad (2.4)$$

$$f_3 = \exp\left[-\left(\frac{\text{Re}_t}{D_f}\right)^2\right]$$

$$\text{Re}_t = \begin{cases} \frac{\nu_t}{\nu} & \text{при } \frac{\partial \nu_t}{\partial y} > 0 \\ \frac{\nu_{t \max}}{\nu} & \text{иначе} \end{cases}$$

$$\nu_t^d = \nu_t f_1$$

Постоянные коэффициенты в модели:  $A_f=0.45$ ,  $B_f=26$ ,  $H_f=25$ ,  $D_f=70$ ,  $a_1=0.965$ ,  $C_d=0.075$ ,  $a_\varepsilon=4.2$ ,  $C_{m1} = 0.0375$ ,  $C_{m2} = 0.015$ ,  $\sigma_m=2$ .

Переменные коэффициенты:

$$\alpha_2 = \begin{cases} 1 & \text{при } \frac{\partial m}{\partial y} > 0 \\ 0 & \text{иначе} \end{cases}$$

$$\alpha_1 = \begin{cases} \frac{G}{\varepsilon} = \frac{l^2 \left|\frac{\partial u}{\partial y}\right|^2}{C_d k} & \text{при } \frac{G}{\varepsilon} < 1 \\ 1 & \text{иначе} \end{cases}$$

Рассмотрим область равновесия в пристеночной области, в которой пренебрежем конвективными членами и действием сил вязкости. Тогда уравнение (2.2) можно записать в виде:

$$\sqrt{k}l^2 \left( \frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 = C_d k \sqrt{k} \quad \text{или} \quad \left( \frac{\tau_t}{\rho} \right)^2 = C_d k^2 \quad (2.5)$$

Примем, что в области равновесия  $\frac{\tau_t}{\rho} \cong \frac{\tau_w}{\rho} = v_*^2$  и тогда уравнение (2.5)

можно записать в виде:

$$k = \frac{v_*^2}{\sqrt{C_d}} \quad (2.6)$$

С учетом сделанных допущений, (2.3) можно привести к виду:

$$\frac{k}{\sigma_m} \frac{d}{dy} \left[ l \frac{\partial l}{\partial y} \right] - C_{m3} k \left( \frac{\partial l}{\partial y} \right)^2 + \left( a_1 - \frac{C_{m1}}{C_d} - \frac{C_{m2}}{\sqrt{C_d}} \right) l \left( \frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 - 2l^3 \left| \frac{\partial u}{\partial y} \right| \left| \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right| = 0 \quad (2.7)$$

Допустим, что  $C_{m3}$  подобран так, что первые два члена в (2.7) взаимно уничтожаются. Тогда, подставив числовые значения коэффициентов в два последних члена (2.9) для  $l$  получим формулу Кармана, а именно:

$$l = \chi_1 \left| \frac{du}{dy} \right| \left| \frac{d^2u}{dy^2} \right| \cong 0.21 \left| \frac{du}{dy} \right| \left| \frac{d^2u}{dy^2} \right| \quad (2.8)$$

Числовое значение  $\chi_1 \cong 0,21$  естественно отличается от 0,4, поскольку  $v_t$  имеет иное определение. Поскольку в области равновесия профиль осредненной скорости логарифмический, получаем:

$$l = \chi_1 y \quad (2.9)$$

Чтобы два первых члена в (2.7) взаимно компенсировались, следует принять  $C_{m3} = \frac{1}{\sigma_m} = 0.5$ .

Таким образом, наличие члена, включающего  $\left| \frac{d^2u}{dy^2} \right|$ , в правой стороне (2.3), приводит к формуле Кармана (2.8) в области равновесия и обеспечивает  $l \propto y$  в этой области. Этот член обеспечивает также хорошее согласие с опытом расчетов плоской и круглой струй.

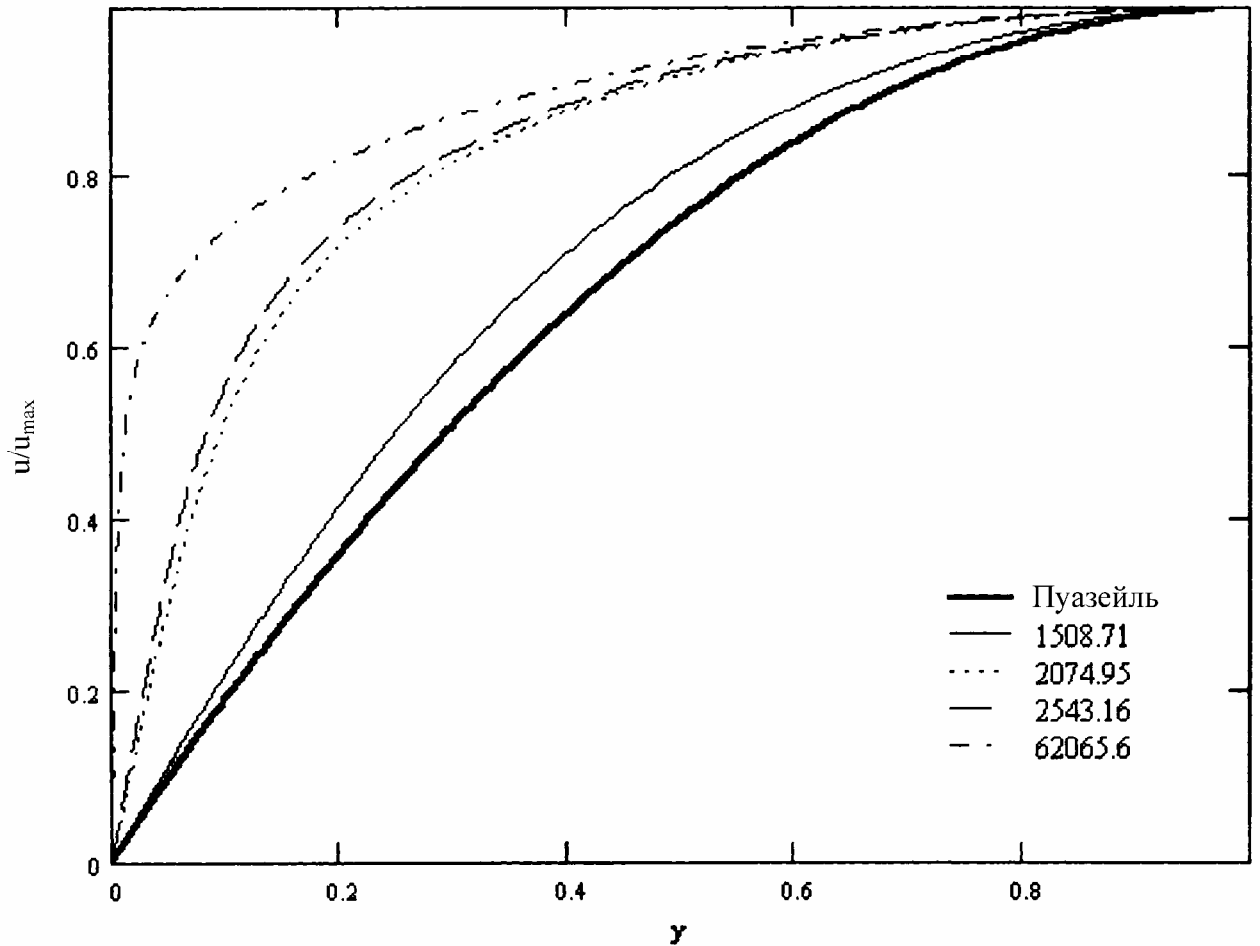


Рис. 5 Профили скорости при различных числах  $Re$ .

Расчеты С. А. Аверьяновой показали, что в пограничных слоях с  $\frac{dp}{dx} > 0$  происходит резкое возрастание  $\chi_l$  в области равновесия по сравнению со значением  $\chi_l \approx 0,21$ . Рост  $\chi_l$  определяется сильным увеличением градиента  $\frac{dm}{dy}$  в пристеночной области, то есть при  $\frac{dp}{dx} > 0$  в пристеночную область поступает избыточное количество  $m$ . Но из опытов известно, что в пристеночной области условия равновесия приближенно сохраняются и при  $\frac{dp}{dx} > 0$ . Следовательно, избыточное количество  $m$  (по сути, это также энергия) в пристеночной области должно ускоренно диссипировать. Такая диссипация возможна, поскольку  $m$  поступает из области дальше от стенки (где  $l$  – больше) в область ближе к стенке (где  $l$  – меньше). Такой процесс переноса похож на каскадный, в котором перенос энергии происходит в сторону меньших масштабов

турбулентности. Дополнительная диссипация  $m$  в пристеночной области в данной модификации учтена членом с коэффициентом  $C_{m3}$  в правой стороне (2.3).

Формула составлена на основе соображений размерности.

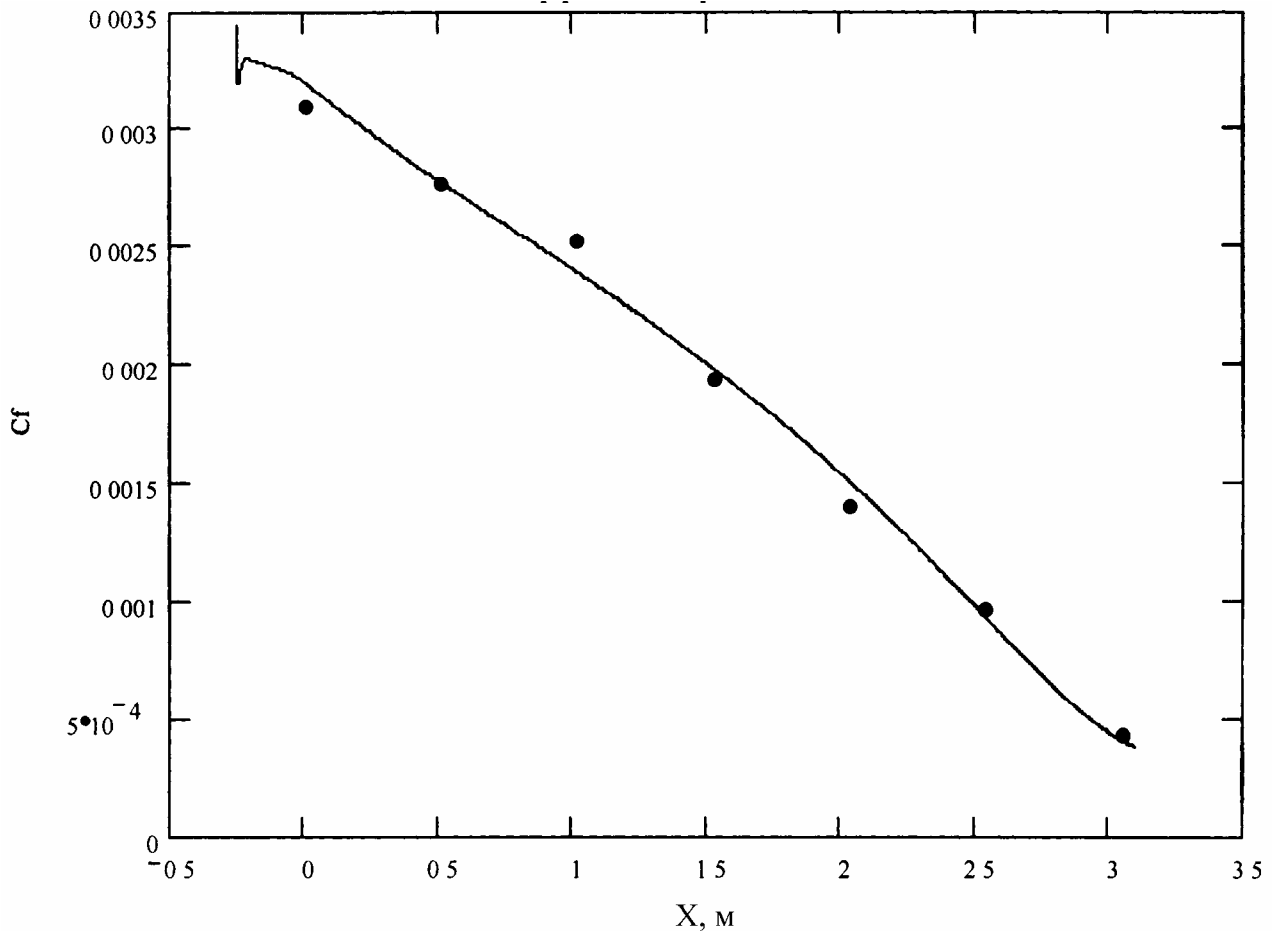


Рис. 6 Коэффициент трения на пластине при положительном градиенте давления (опыт № 4500).

Обстоятельное тестирование модели (2.2), (2.3) для пристеночных течений выполнено Н. А. Крыловым в его магистерской диссертации (2002 г.). Он ввел ряд усовершенствований в модель, проводил расчеты и проверял их разными методами, использовал разные способы обработки опытных данных. Им были рассчитаны поля течений в канале и в трубе, причем поля осредненных скоростей энергии  $k$  оказались в хорошем согласии с данными опытов. В частности, было установлено, что при уменьшении числа Рейнольдса –  $Re$ , профили осредненных скоростей в трубе приближаются к пуазейлевскому распределению.

При числе  $Re=1500$  профиль скорости мало отличается от последнего (см. рис. 5).

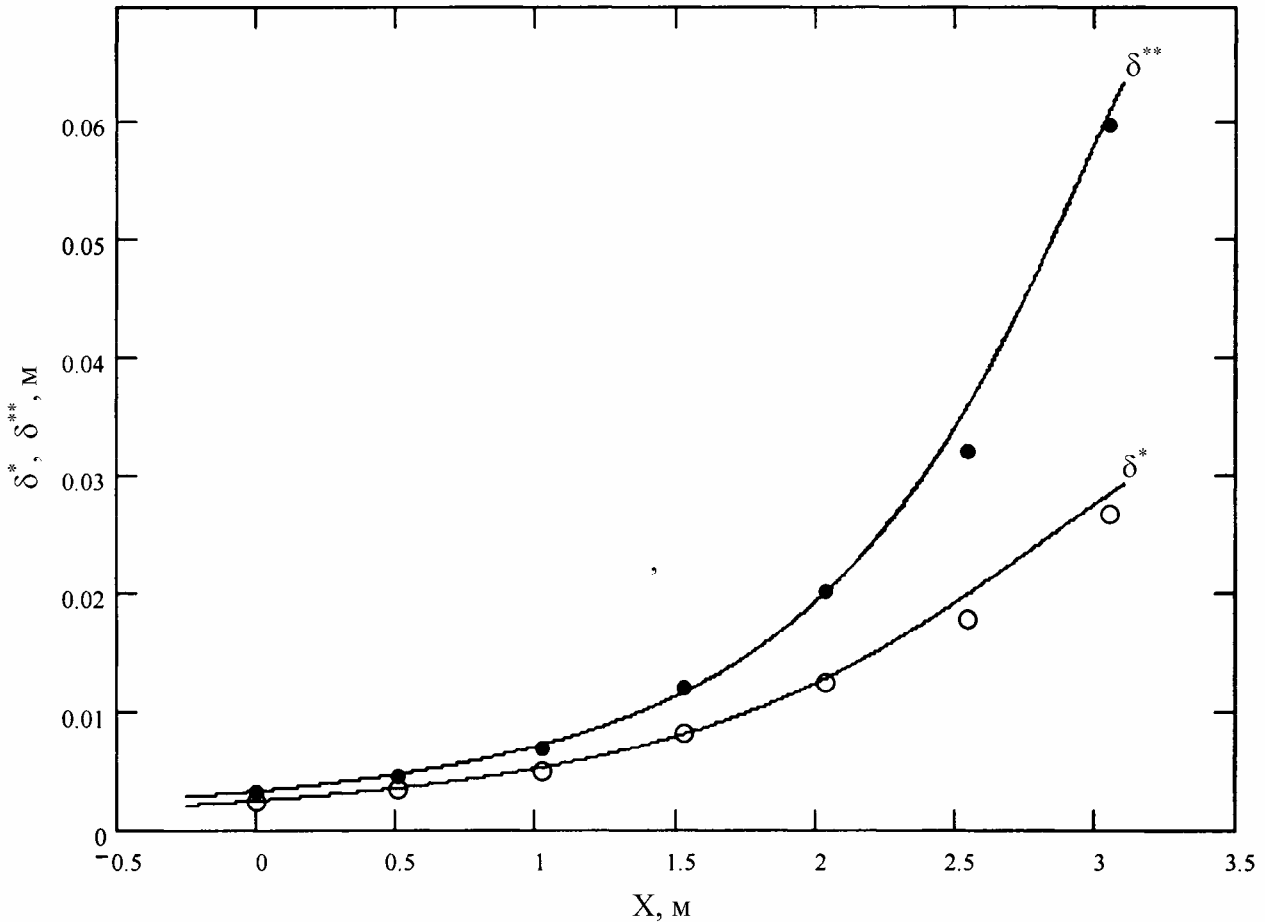


Рис. 7 Толщина вытеснения и толщина потери импульса на пластине при положительном градиенте давления (опыт № 4500).

Получено хорошее согласие расчетов с опытом для пограничного слоя при  $dp/dx = 0$  (опыт №1400. Здесь и далее нумерация опытов соответствует протоколам известной Стэнфордской конференции 1968г.), а так же для двух пограничных слоев с  $dp/dx < 0$  (опыт №1300 и №2700). Очень хорошо согласуются с опытом профили скорости, толщины  $\delta^*$  и  $\delta^{**}$ , но графики  $c_f$  при  $dp/dx < 0$  идут несколько ниже экспериментальных, хотя расхождение не превышает 10%. Расчет пограничного слоя с умеренным градиентом  $dp/dx > 0$  (опыт №3300) хорошо согласуется с опытом по профилям скорости и толщинам  $\delta^*$  и  $\delta^{**}$ , а  $c_f$  идет ниже опытного, хотя отклонение менее чем на 10%. Расчеты опытов №4500 и

№4800 с сильным  $\frac{dp}{dx} > 0$  потребовали некоторого увеличения коэффициента  $C_{m3}$ . Был введен безразмерный параметр  $\Gamma_k$ , который зависел от производной  $\frac{d\sqrt{k^+}}{dy^+}$  в области равновесия, точнее при  $y^+=40-60$  (здесь  $k^+ = \frac{k}{\nu_*^2}$ ,  $y^+ = \frac{y\nu_*}{\nu}$ ). Коэффициент  $C_{m3}$  был принят в виде:

$$C_{m3} = (C_{m3})_0 (1 + d_k \Gamma_k) \quad (2.10)$$

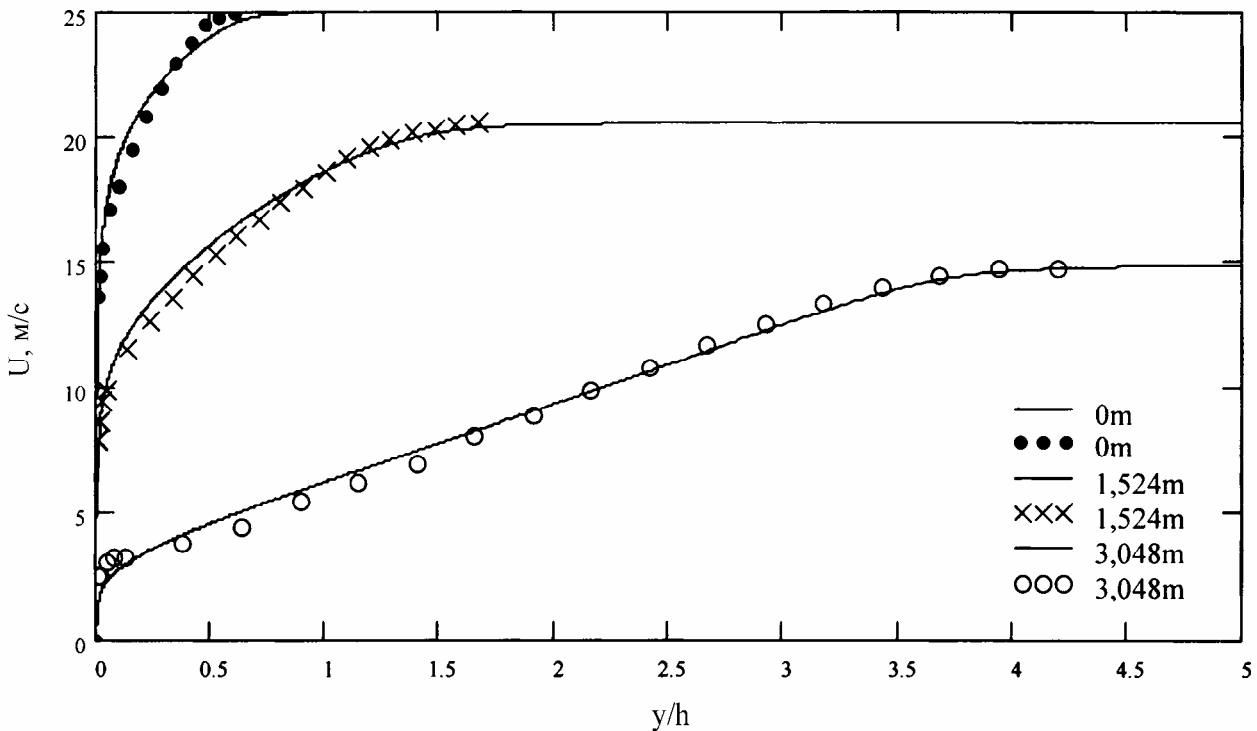


Рис. 8 Профили скорости в различных сечениях  $x=const$  на пластине при положительном градиенте давления (опыт № 4500).

Здесь  $(C_{m3})_0=0,5$  и  $d_k$  – эмпирический коэффициент. При использовании (2.10) согласие с опытами №4500 и №4800 стало вполне удовлетворительным. На рис. 6 приведен график  $c_f$  в сравнении с опытом (точки) для опыта №4500. На рис. 7 – толщины  $\delta^*$  и  $\delta^{**}$ , а на рис. 8 профили скорости для того же опыта. В целом последнюю модификацию модели можно считать успешной, однако требуются дальнейшие исследования и уточнения вида параметра  $\Gamma_k$ .

## Литература

1. **Karman T. Howarth L.** On the statistical theory of isotropic turbulence //Proc. Roy. Soc. 1938. A164, № 917. P. 192-215.
2. **Монин А.С. Яглом А.М.** Статистическая гидромеханика ч. 2. //М.: Наука, 1967. – 720 с.
3. **Седов Л.И.** Методы подобия и размерности в механике. //М.: Наука, 1987. – 430с.
4. **Hasselmann K.** Zur Deutung der dreifachen Geschwindigkeitskorrelationen der isotropen turbulenz // Dtsch. Hydrogr. 1958. Zs.11, №5. – S.207-217
5. **Лыткин Ю.М., Черных Г.Г.** Об одном способе замыкания уравнения Кармана-Ховарта //Динамика сплошной среды. Новосибирск, ин-т гидродинамики. 1976. – Вып. 27. – С. 124.
6. **Акатнов Н.И.** О замыкании уравнения для двухточечных моментов // Гидродинамика. Сб. научных статей ЛПИ. 1990. С. 31.
7. **Domoradzki J. Mellor G.** A simple turbulence closure hypothesis for triply-velocity correlation function in homogeneous isotropic turbulence // J. Fluid Mech. – 1984. – V. 140. – P. 45-61.
8. **Oberlack M. Peters N.** Closure of the two-point correlation equation as a basic for Reynolds stress model // Applied Scientific Research. – 1993. – v. 51. – p. 533-538.
9. **Акатнов Н.И., Быстрова Е.Н.** Расчеты некоторых характеристик однородной турбулентности на основе уравнения Кармана-Ховарта, замкнутого посредством полуэмпирической модели // ТВТ. – 1999. – т. 37, № 6. – с. 895-903.
10. **Акатнов Н.И., Быстрова Е.Н.** Использование модели осесимметричной турбулентности для анализа статистических характеристик пульсационного движения в однородном сдвиговом потоке // ТВТ. – 2000. – т. 38, № 4. – с. 576.
11. **Comte-Bellot G. S., Corrsin S.** Simple time correlation of full and Narrow – Band velocity signals in grid-generated “isotropic” turbulence //J. Fluid Mech. – 1971. – v.48. – p.273
12. **Chandrasekhar S.** The theory of axisymmetric turbulence // Phyllos. Trans. A. – 1950. – v. 242. – P. 557.
13. **Tavoularis S., Corrsin S.** Experiments in nearly homogeneous turbulent shear flow with a uniform mean temperature gradient // J. Fluid Mech. – 1981. – v.104. – p.311



14. **Champagne F., Harris Y., Corrsin S.** Experiments of nearly homogeneous turbulent shear flow // J. Fluid Mech. – 1970. – v.41. – p.81
15. **Гарбарук А.В., Лапин Ю.В., Стрелец М.Х.** Применение обратного метода решения уравнений пограничного слоя для тестирования моделей турбулентности // ТВТ. – 1998. – № 4. – с. 607-616.
16. **Rotta J.** Statistische Theorie nichthomogener Turbulenz //Z. Phys. – 1951. – v.131, № 1. – p. 51-77
17. **Глушко Г.С.** Дифференциальные уравнения для масштаба турбулентности и расчет турбулентного пограничного слоя на плоской пластине // Турбулентные течения. М.: Наука, – 1970. – с. 37-44.
18. **Иевлев В.М.** Турбулентное движение высокотемпературных сплошных сред // М.: Наука. – 1975. – 265 с.
19. **Ng K., Spalding D.** Prediction of 2-dimentional boundary layers on smooth walls with 2-equation model of turbulence // Int. Journal of Heat and Mass Transfer. – 1976. – v.19, № 10. – pp.1161-1172.
20. **Smith B.** The k – kl turbulence model and wall layers model for compressible flow // AIAA- 90-1483. – pp.1-10.
21. **Акатнов Н.И.** Использование тензорных полиномов при построении уравнения для масштаба турбулентности в полуэмпирических моделях //Изв. РАН. Механика жидкости и газа. – 1994. – №4. – с.51-64.