СБОРНИК ЗАДАЧ ПО МЕХАНИКЕ ИДЕАЛЬНОЙ ЖИДКОСТИ И ГАЗА

Д.К.Зайцев, Р.Л.Петров

Государственный комитет РСФСР по делам науки и высшей школы

Ленинградский государственный технический университет

СБОРНИК ЗАДАЧ

по механике идеальной жидкости и газа

(Д.К.Зайцев, Р.Л.Петров)

С.Петербург - 1992

ВСТУПЛЕНИЕ

В работе приведены задачи по основным разделам курса механики идеальной жидкости и газа (равновесие жидкости, сила давления на поверхность, кинематика, потенциальные течения, интегралы Бернулли и Лагранжа-Коши, ударные волны и др.), рекомендуемые для проведения практических занятий и контрольных работ. Представлены как собственные разработки авторов, так и задачи, заимствованные из различных источников, при необходимости переработанные для обеспечения единства стиля и корректности формулировок. В каждом разделе имеются группы однотипных по способу решения задач; звездочкой отмечены задачи, выделяющиеся среди подобных повышенной сложностью математических выкладок или нестандартностью решения. Все задачи могут быть решены аналитически (без применения ЭВМ); простейший расчет по полученным формулам призван продемонстрировать порядок характерных для практики величин. Необходимый для решения задач математический аппарат - основы интегрального и дифференциального исчисления, а также (в разделе 5) начальные сведения из теории функций комплексного переменного.

I. РАВНОВЕСИЕ ЖИДКОСТИ

I.I. Доказать, что при равновесии жидкости в потенциальном поле объемных сил справедливы следующие утверждения:

а)давление и плотность жидкости сохраняют постоянные значения на изопотенциальных поверхностях,

б)граница раздела несмешивающихся жидкостей разной плотности совпадает с изопотенциальной поверхностью.

I.2. Доказать, что баротропное равновесие жидкости возможно только в потенциальном поле объемных сил.

I.3. Найти форму свободной поверхности и распределение давления в тяжелой несжимаемой жидкости, покоящейся в однородном поле сил тяжести. Давление на свободной поверхности постоянно.

Для земных условий оценить, на какой глубине избыточное давление воды равно атмосферному.

I.4. Определить форму свободной поверхности и распределение давления в объеме V несжимаемой жидкости, тяготеющей к неподвижному центру с силой, пропорциональной удалению от центра.

Оценить давление в центре Земли, считая ее несжимаемой жидкостью (радиус Земли 6400 км, средняя плотность 5,5 кг/куб.м).

I.5. Найти распределение давления в политропной атмосфере сферической планеты, пренебрегая влиянием массы атмосферы на закон тяготения. Определить высоту и массу атмосферы. Все условия на поверхности планеты известны.

Оценить высоту атмосферы Земли, принимая показатель политропы равным I,4.

I.6. Найти распределение давления в изотермической атмосфере, пренебрегая кривизной поверхности и изменением силы тяжести с высотой.

Оценить массу атмосферы Земли.

I.7. Найти распределение давления и плотности в так называемой стандартной атмосфере Земли, состоящей из двух слоев совершенного газа: нижнего слоя, в котором температура убывает по линейному закону (тропосфера), и верхнего слоя, в котором температура постоянна (стратосфера).

Изменением силы тяжести с высотой пренебречь.

I.8. Совершенный газ притягивается к неподвижному центру с силой, пропорциональной удалению от центра. Найти распределение давления и массу газа, если известны условия в центре притяжения; $T = const$.

I.9. Определить форму свободной поверхности тяжелой несжимаемой жидкости, совершающей квазитвердое движение вместе с сосудом, который:

а)движется по горизонтальной плоскости со скоростью V,

б)движется по горизонтальной плоскости с ускорением a,

в)скользит без трения по наклонной плоскости,

г)движется с постоянной скоростью по горизонтальному закруглению,

д)вращается вокруг вертикальной оси с угловой скоростью ω.

I.10. Высокий вертикальный цилиндрический сосуд радиусом R с жидкостью вращается вокруг своей оси с угловой скоростью ω. Найти форму свободной поверхности, распределение давления в жидкости и силу давления на дно сосуда, если в отсутствие вращения уровень жидкости в сосуде равен h.

I.II. Вертикальный цилиндр радиусом R высотой h заполнен до половины водой. С какой предельной скоростью можно вращать цилиндр вокруг его оси, чтобы вода не выливалась?

I.I2. Закрытый вертикальный цилиндр радиусом R высотой h заполнен водой на 3/4 своего объема. С какой скоростью должен вращаться цилиндр вокруг своей оси,чтобы свободная поверхность коснулась дна?

I.I3. Открытый сосуд с вертикальной осью симметрии до краев наполнен несжимаемой жидкостью. Сосуд начинает вращаться вокруг своей оси, так что в каждый момент времени жидкость в сосуде покоится относительно его стенок (часть жидкости под действием центробежных сил выливается из сосуда). Определить, при какой скорости вращения свободная поверхность коснется дна сосуда и найти отвечающую этому режиму силу избыточного давления жидкости на дно.

Сосуд имеет следующую форму:

а)цилиндр радиусом R высотой h,

б)куб с ребром a,

в)тот же куб, вращающийся вокруг своего ребра,

г)усеченный конус высотой h с радиусом нижнего основания R

и радиусом верхнего основания $2R$,

д) тот же конус, повернутый большим основанием вниз,

е) усеченная пирамида высотой h, имеющая в нижнем основании квадрат со стороной a, а в верхнем - квадрат со стороной $2a$,

ж) та же пирамида, повернутая большим основанием вниз,

з) кольцо высотой h, образованное двумя коаксиальными цилиндрами радиусов R_1 и R_2.

I.14. Для случаев г) и е) предыдущей задачи определить, при какой скорости вращения из сосуда выльется вся жидкость.

I.15. Какое максимальное количество жидкости может удерживаться в открытом сосуде, вращающемся вокруг вертикальной оси с угловой скоростью ω? Сосуд имеет форму а), б), в) задачи I.13.

I.16. Сосуд в форме прямого конуса высотой h и радиусом основания R заполнен жидкостью и вращается с угловой скоростью ω вокруг своей вертикальной оси. Найти силу избыточного давления на дно сосуда.

I.17. Закрытый сосуд, заполненный несжимаемой жидкостью, вращается вокруг своей вертикальной оси. Определить силу избыточного давления жидкости на крышку сосуда, если в отсутствие вращения эта сила равна нулю.

Формы сосуда те же, что и в задаче I.13.

I.18. Благодаря вращению рабочего колеса центробежного насоса жидкость отбрасывается от центра колеса, где находится всасывающее отверстие, на периферию. Определить, на какую максимальную высоту может быть поднята вода, если насос находится на высоте h над уровнем водоема, а вода в рабочем колесе радиусом R совершает квазитвердое вращение с угловой скоростью ω.

I.19. Несжимаемая жидкость, совершающая квазитвердое вращение в вертикальном цилиндре радиусом R, состоит из двух несмешивающихся компонентов различной плотности ($\rho_1 < \rho_2$), занимающих объемы V_1 и V_2 соответственно. Определить форму свободной поверхности и поверхности раздела жидкостей, распределение давления, а также силу избыточного давления на дно сосуда.

I.20. Закрытый цилиндр высотой h радиусом R, в который налиты две несмешивающиеся несжимаемые жидкости разной плотности, вращается вокруг своей вертикальной оси. Определить, при какой скорости вращения поверхность раздела жидкостей коснется дна, если каждая жидкость занимает половину объема цилиндра.

I.21. Несжимаемая жидкость, образующая планету, притягивается к неподвижному центру с силой,

а) пропорциональной расстоянию до центра R ,

б) пропорциональной $1/R^2$,

в) изменяющейся по закону $f(R)$.

Определить форму свободной поверхности жидкой планеты с учетом ее медленного квазитвердого вращения вокруг собственной оси, полагая известными все условия на полюсе.

Для случая а) оценить степень сжатия земли, т.е. относительную разность расстояний от центра планеты до экватора и до полюса $\delta = (R_э - R_п)/R_п$.

I.22. Решить предыдущую задачу, полагая, что сила тяготения направлена не к центру планеты, а так, что ее проекции на ось вращения z и перпендикулярную ей ось r определяются выражениями $g_z = \mu \cdot z$, $g_r = \mu(1 - 1{,}2\,\delta)\, r$, где μ - постоянная, δ - заранее неизвестная степень сжатия планеты (это соответствует тяготению однородного слабо сжатого эллипсоида вращения).

I.23.* Определить форму жидкой планеты объемом V с учетом ее медленного квазитвердого вращения вокруг далекой звезды. Сила собственного тяготения планеты направлена к ее центру и пропорциональна расстоянию до него. Непараллельностью сил притяжения звезды и центробежных сил в пределах планеты пренебречь.

Оценить степень деформации Земли Солнцем, если известны: период обращения Земли вокруг Солнца (365 дней), ее радиус (6400 км) и ускорение силы тяжести на поверхности.

2. СИЛА ДАВЛЕНЯ ЖИДКОСТИ НА ПОВЕРХНОСТЬ

2.1. Определить величину и точку приложения силы избыточного давления воды на плоскую вертикальную стенку следующих форм:

а) прямоугольник с горизонтальной стороной a и вертикальной стороной b, центр которого находится на глубине b,

б) круг радиусом R с центром на глубине $2R$,

в) эллипс с горизонтальной полуосью a, вертикальной полуосью b и центром на глубине $2b$,

г) равнобедренный треугольник высотой h с основанием a, касающимся поверхности воды,

д)* прямоугольный треугольник с вертикальным катетом b и горизонтальным катетом a, касающийся поверхности воды своей вершиной,

е) равнобедренная трапеция высотой h с верхним основанием a, касающимся поверхности воды, и нижним основанием b,

ж) квадрат со стороной a и вертикальной диагональю, касающийся поверхности воды.

2.2. Разность уровней воды на воротах шлюза равна h. Определить величину момента, необходимого для открывания створки ворот шириной a с вертикальной осью.

2.3. Вертикальная стенка высотой h из каменной кладки разделяет два отсека бассейна, уровень воды в которых равен h_1 и h_2. Определить минимальную толщину стенки из условия устойчивости против опрокидывания.

2.4.* Несжимаемая жидкость покоится в однородном поле сил тяжести. Получить формулы, связывающие величину и координаты точки приложения силы избыточного давления жидкости на плоскую поверхность с геометрическими характеристиками поверхности.

2.5. Сферический сосуд радиусом R заполнен водой. Определить силу избыточного давления воды на верхнюю половину шара.

2.6. На горизонтальной поверхности установлен сосуд массой M без дна, имеющий форму конуса с углом полураствора α и радиусом основания R. Определить, при каком уровне воды в сосуде он оторвется от поверхности.

2.7. На плоской вертикальной стенке сосуда с водой имеется выступ. Определить величину, направление и точку приложения силы избыточного давления воды на указанный выступ следующей формы:

а) куб с ребром a, касающийся поверхности воды одной из граней,

б) диск толщиной a радиусом R с центром на глубине $2R$,

в) тот же диск, погруженный в воду наполовину,

г) вертикальный полуцилиндр радиусом R высотой h, касающийся поверхности воды,

д) тот же полуцилиндр с горизонтальной образующей,

е) полусфера радиусом R, с центром на глубине $2R$,

ж) та же полусфера, погруженная в воду наполовину.

2.8. В дне бака с водой имеется отверстие радиусом R, закрытое шаром того же радиуса. Определить силу, действующую на шар, если уровень воды в баке $h > R$.

2.9. В горизонтальном дне первоначально пустого сосуда имеется отверстие радиусом r, закрытое шаром радиусом $R > r$. Сосуд медленно заполняется водой. Какова должна быть плотность материала шара, чтобы он не всплыл?

2.10. В горизонтальном дне сосуда с водой имеется отверстие радиусом R, закрытое легким шаром радиусом $2R$. При каком уровне воды шар не будет всплывать?

2.11. Отверстие в дне бака с водой закрыто коническим клапаном высотой h, изготовленным из латуни. Определить силу, необходимую для подъема клапана, если уровень воды в баке равен $5h$, диаметр основания конуса $D = 0{,}4h$, а диаметр отверстия $d = 2/3 \cdot D$.

2.12* Определить величину и направление силы, действующей на боковую поверхность конуса высотой h с радиусом основания R, погруженного в воду. Центр основания находится на глубине H, а ось конуса наклонена под углом α к вертикали.

2.13. В несжимаемой жидкости, покоящейся в однородном поле сил тяжести, находится тело. Доказать, что сила избыточного давления жидкости на тело равна по величине весу вытесненного объема жидкости, направлена вертикально вверх и проходит через центр тяжести вытесненного объема (закон Архимеда).

2.14. Тяжелая несжимаемая жидкость совершает квазитвердое вращение в однородном поле сил тяжести. Получить общее выражение для а)силы и б)*момента, действующих со стороны жидкости на погруженное в нее тело (обобщение закона Архимеда на случай вращающейся жидкости).

2.15. Несжимаемая жидкость совершает квазитвердое вращение вокруг вертикальной оси. Вместе с жидкостью движется однородный шар, который при посредстве тонкого невесомого стержня шарнирно закреплен в точке, находящейся

а)на оси вращения,

б)на расстоянии a от оси вращения.

Найти возможные положения равновесия шара и исследовать их устойчивость, если расстояние от центра шара до шарнира равно ℓ.

2.16.* Несжимаемая жидкость совершает квазитвердое вращение вокруг вертикальной оси. Вместе с жидкостью вращается тонкий однородный стержень длиной ℓ, шарнирно закрепленный на оси вращения. Найти положения равновесия стержня и исследовать их устойчивость, если шарнир расположен

а)в центре стержня,

б)на конце стержня.

3. ПЛАВАНИЕ ТЕЛ. ОСТОЙЧИВОСТЬ

3.1. В воде плавает бревно. Определить погруженную часть его объема, если относительная плотность дерева равна 0,8.

3.2. В сосуд налиты две несмешивающиеся жидкости с плотностями ρ_1 и ρ_2. Определить положение плавающего в сосуде затопленного поплавка плотностью ρ, если $\rho_1 < \rho < \rho_2$.

3.3. Однородный куб плотностью ρ может поворачиваться вокруг своего ребра, находящегося на уровне воды. Определить положение равновесия куба.

3.4.* Вертикальный цилиндр плавает по поверхности воды. При отклонении его оси от вертикали на малый угол α центр тяжести вытесненного объема смещается и линия действия выталкивающей силы пересекает ось цилиндра в некоторой точке M, называемой метацентром.

Убедиться, что метацентр расположен выше центра тяжести вытесненного объема на величину метацентрического радиуса, вычисляемого по общей формуле $R_m = J_o/V$, где V - вытесненный объем, J_o - момент инерции площади ватерлинии относительно оси поворота.

Указание. Учесть, что в силу неизменности величины вытесненного объема ось поворота лежит в плоскости свободной поверхности и проходит через ось цилиндра (в общем случае - через центр тяжести площади ватерлинии).

3.5. На основании решения предыдущей задачи сформулировать условия остойчивости тела (устойчивости к угловым возмущениям) при плавании по поверхности жидкости.

3.6. Найти глубину погружения и исследовать устойчивость найденного положения равновесия однородного тела плотностью ρ, плавающего в воде.

Тело имеет следующую форму:

а) куб с ребром a, одна из граней которого горизонтальна,

б) прямоугольный параллелепипед с ребрами $a < b < c$, одна из граней которого параллельна поверхности воды,

в) длинный горизонтальный брус, имеющий в сечении квадрат со стороной a и вертикальной диагональю,

г) тот же брус с горизонтальной боковой гранью,

д) пирамида высотой h, имеющая в основании квадрат со стороной a (основание пирамиды находится под поверхностью воды и параллельно ей),

е) та же пирамида, повернутая основанием вверх,

ж) вертикальный конус высотой h и радиусом основания R,

з) тот же конус, повернутый основанием вверх,

и) диск радиусом R высотой h,

к) цилиндр радиусом R длиной $2R$ с горизонтальной образующей,

л) шар радиусом R,

м) полусфера радиусом R с горизонтальным основанием,

н) та же полусфера, повернутая основанием вверх.

3.7. Считая, что айсберг является однородным вертикальным цилиндром радиусом R, определить его максимальную высоту над уровнем воды.

3.8. По поверхности воды плавает легкий диск радиусом R

высотой h. Какой груз можно положить в центре верхней грани диска без нарушения его остойчивости?

3.9. По поверхности воды плавает легкий вертикальный конус высотой h с радиусом основания R. На какую глубину можно погрузить конус в воду без опрокидывания, нажимая на его вершину?

3.10. Тонкостенный вертикальный цилиндр радиусом R имеет вес G и заполнен водой до высоты h. На каком расстоянии от дна цилиндра должен находиться его центр тяжести, чтобы данное положение было устойчивым при плавании по поверхности воды? Как изменятся условия устойчивости, если вода внутри цилиндра замерзнет (без изменения плотности)?

3.11. Герметичный тонкостенный куб с ребром a плавает по поверхности воды так, что одна из его граней горизонтальна и расположена на глубине h. Внутри куба находится воздух при атмосферном давлении.

В результате пробоины дна в куб поступает вода, изотермически сжимая находящийся там воздух. Определить условия, при которых куб с пробоиной не утонет и исследовать устойчивость его нового положения равновесия (с горизонтальным дном).

Весом воздуха, находящегося в кубе, пренебречь.

3.12. Герметичный тонкостенный цилиндр радиусом R высотой h заполнен водой до половины. Определить условия устойчивости а)вертикального и б)горизонтального положения цилиндра при плавании его под поверхностью оды.

3.13.* По поверхности воды плавает легкий тонкостенный куб с ребром a. Куб разделен ветикальными перегородками, параллельными боковым граням куба, на 4 равных отсека. Какой груз можно положить в центре верхней грани куба без нарушения его остойчивости, если каждый отсек заполнен водой на 1/4 ?

Как изменятся условия остойчивости, если

а)убрать перегородки, разделяющие куб на отсеки,

б)удалить из отсеков воду?

4. КИНЕМАТИКА ЖИДКОСТИ

4.1. Движение жидкости задано способом Лагранжа (a, b, c - переменные Лагранжа, t - время, x , y, z - декартовы координаты жидкой частицы):

а) $x = a + ut$, $y = b$, $z = c$;

б) $x = a + ut^2$, $y = b + vt$, $z = c$;

в) $x = a\cos(\alpha t + b)$, $y = a\sin(\alpha t + b)$, $z = c + wt$;

г) $x = a\cos(\alpha t^2 + b)$, $y = -a\cdot\sin(\alpha t^2 + b)$, $z = c$;

д) $x = a + R\cos(\alpha t)$, $y = b + R\sin(\alpha t)$, $z = c + wt^2$.

Определить характер движения, найти скорость и ускорение потока, описать движение в переменных Эйлера.

4.2. Описать в переменных Эйлера и Лагранжа квазитвердое вращение жидкости вокруг оси z

а)с постоянной угловой скоростью,

б)с постоянным угловым ускорением.

Определить скорости и ускорения жидких частиц.

4.3. Движение жидкости задано проекциями скоростей на оси декартовой системы координат (способ Эйлера):

а) $V_x = S\cdot y$, $V_y = S\cdot x$, $V_z = 0$;

б) $V_x = mx + nt$, $V_y = -ky + lt$, $V_z = 0$;

в) $V_x = -Stx$, $V_y = Sty$, $V_z = 0$;

г) $V_x = S\cdot\cos(\alpha t)$, $V_y = S\cdot\sin(\alpha t)$, $V_z = S$.

Описать движение в переменных Лагранжа.

4.4. Записать уравнения линий тока и траекторий для движения жидкости, заданного проекциями скоростей:

а) $V_x = x + t$, $V_y = -y + t$, $V_z = 0$;

б) $V_x = -ay$, $V_y = ax$, $V_z = bt$;

в) $V_x = a\cdot\sin(\alpha t)$, $V_y = a\cdot\cos(\alpha t)$, $V_z = 0$;

г) $V_x = atx/R^3$, $V_y = aty/R^3$, $V_z = atz/R^3$, $R = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$.

4.5. Скорость жидкости в круглой трубе распределена по степенному закону:

а) $V = V_0\,(1 - R/R_0)^n$, $(n < 1)$;

б) $V = V_0\,(1 - R^2/R_0^2)$.

Определить, является ли течение потенциальным. Найти ротор скорости и построить вихревые линии.

4.6. Определить составляющие угловой скорости частиц жидкости в потоке, для которого проекции скорости заданы выражениями (a - постоянная): $V_x = axy$, $V_y = ayz$, $V_z = azx$.

4.7. Жидкость вращается вокруг оси z ,так что скорости частиц убывают пропорционально расстоянию от оси вращения. Доказать, что течение безвихревое и вычислить дивергенцию скрости.

4.8.* Поле скоростей вращательного движения жидкости вокруг оси z имеет вид: $V_x = -y \cdot f(R)$, $V_y = x \cdot f(R)$, $V_z = 0$ ($R = \sqrt{x^2 + y^2}$). Определить вид функции $f(R)$, если жидкость несжимаема, а течение безвихревое.

4.9. Вычислить циркуляцию скорости по отрезку прямой, соединяющему точки A(I,0) и B(0,I), в потоке жидкости, заданном проекциями скорости: $V_x = -ay/(x^2+y^2)$, $V_y = ax/(x^2+y^2)$, $V_z = 0$.

4.I0. Плоское течение жидкости задано потенциалом $\varphi = ax(x^2 - 3y^2)$ (функция, градиент которой равен скорости потока). Определить расход жидкости через отрезок прямой линии, соединяющий точки A(0,0) и B(I,I).

4.II. Плоское движение жидкости задано проекциями скорости:

а) $V_x = ay$, $V_y = 0$;

б) $V_x = -ay$, $V_y = ax$;

в) $V_x = -ay/(x^2+y^2)$, $V_y = ax/(x^2+y^2)$.

Выделить квазитвердую и деформационную составляющие движения в окрестности точки A(I,I).

5. ПОТЕНЦИАЛЬНЫЕ ТЕЧЕНИЯ. КОМПЛЕКСНЫЙ ПОТЕНЦИАЛ

5.I. Можно ли рассматривать функцию $\varphi(x,y) = x^5 + ax^3y^2 + 5xy^4$ в качестве потенциала скорости некоторого плоского течения несжимаемой жидкости? Если да,то при каком значении коэффициента a ?

5.2. Представляют ли многочлены $\varphi = x^3 - 3xy^2$ и $\psi = 3x^2y - y^3$ соответственно потенциал и функцию тока одного и того же течения?

5.3. Найти функцию тока плоского течения несжимаемой жидкости, заданного своим потенциалом $\varphi(x,y)$:

а) $\varphi = x$,

б) $\varphi = x^2 - y^2$,

в) $\varphi = x/(x^2+y^2)$.

5.4. Показать, что проекции скорости $V_x = x - 4y$, $V_y = -y - 4x$, $V_z = 0$ отвечают потенциальному течению несжимаемой жидкости. Найти потенциал и функцию тока.

5.5. Движение определяется комплексным потенциалом $\chi(z) = (1+i)\ln(z^2-1) + (2-3i)\cdot\ln(z^2-4) + 1/z$. Определить расход жидкости через окружность $|z| = 3$ и циркуляцию скорости по этой окружности.

5.6. В точке комплексной плоскости $z_1 = 1$ расположен вихрь интенсивностью $\Gamma_1 = 2\pi$, а в точке $z_2 = -1$ - вихрь интенсивностью $\Gamma_2 = -2\pi$. Определить величину и направление скорости в точке $z_3 = 1+i$.

5.7. В точках $z = \pm a$ расположены источники мощностью Q. Определить величину и направление скорости в точке $z = (1+2i)a$.

5.8. Однородный поток несжимаемой жидкости, направленный вдоль вещественной оси комплексной плоскости, набегает со скоростью V_∞ на источник мощностью Q, расположенный в начале координат. Записать комплексный потенциал такого течения и найти

а) координаты точки, в которой давление максимально,

б) давление и вектор скорости в точке $z = ia$.

5.9. Однородный плоский поток несжимаемой жидкости, направленный вдоль оси y, набегает со скоростью V_∞ на точечный вихрь интенсивностью Γ, расположенный в точке ($x = 0$, $y = a$). Найти

а) координаты точки, в которой давление максимально,

б) давление и вектор скорости в точке ($x = a$, $y = 0$).

5.10. Показать, что течение, определяемое комплексным потенциалом $\chi = az^2$, отвечает обтеканию прямого угла. Найти линии тока.

5.11. Показать, что комплексный потенциал $\chi = a\sqrt{z}$ описывает безотрывное обтекание полубесконечной пластины. Показать, что линиями тока служат параболы.

5.12. Показать, что комплексный потенциал $\chi = az^n$ ($a > 0$, $n \geq 1/2$) соответствует обтеканию угла с раствором $\alpha = \pi/n$. Найти скорость течения в точке $z = 0$.

5.I3. Точечные (прямолинейные) вихри расположены в точках $(-a, a)$, (a, a), $(0,0)$ плоскости (x, y). Найти скорости, сообщаемые вихрями друг другу, если

а)все вихри имеют одинаковую интенсивность,

б)интенсивность вихря, расположенного в начале координат, равна по величине, но противоположна по знаку интенсивностям двух других вихрей.

5.I4. Показать, что сумма комплексных потенциалов двух одинаковых источников может интерпретироваться как потенциал течения, порождаемого источником в присутствии плоской стенки. Найти распределение скорости вдоль этой стенки.

5.I5. По аналогии с решением предыдущей задачи построить потенциал течения, порождаемого

а)источником внутри прямого угла,

б)вихрем в присутствии плоской стенки,

в)вихрем внутри прямого угла.

5.I6. В точке $x = a$ на оси абсцисс находится вихрь интенсивностью Γ, а в точке $x = R^2/a$ - вихрь интенсивностью $-\Gamma$. Показать, что окружность $x^2 + y^2 = R^2$ является линией тока.

5.I7. Основываясь на решении предыдущей задачи, построить комплексный потенциал бесциркуляционного обтекания круга радиусом R потоком от вихря интенсивностью Γ, расположенного на расстоянии $a > R$ от центра круга.

5.I8. Основываясь на решении задачи 5.I6, найти траекторию движения точечного вихря интенсивностью Γ в присутствии круга радиусом R. Циркуляция скорости по контуру круга равна а)0, б)Γ, в)$-\Gamma$.

5.I9. В точках $x = a$ и $x = R^2/a$ расположены линейные источники мощностью Q, а в начале координат - сток мощностью $-Q$. Показать, что окружность $x^2 + y^2 = R^2$ является линией тока.

5.20. Основываясь на решении предыдущей задачи найти распределение скоростей на поверхности круга радиусом R, обтекаемого потоком от источника мощностью Q, расположенного на расстоянии $a > R$ от центра круга.

5.2I. Найти траектории движения пары точечных вихрей, интенсивности которых равны по величине и имеют а)одинаковые или б)противоположные знаки.

5.22. Опираясь на решение задачи 5.15в определить траекторию движения точечного вихря внутри прямого угла.

5.23. В точке комплексной плоскости $z_1(a,0)$ находится источник мощностью Q, а в точке $z_2(-a,0)$ - сток той же мощности. Найти комплексный потенциал течения в предельном случае $a \to 0$ при условии $Qa = m$ (m - постоянная величина).

5.24. В точке $z_1 = ae^{i\alpha}$ находится вихрь интенсивностью Γ, а в начале координат - вихрь интенсивностью $-\Gamma$. Найти потенциал течения в предельном случае $\Gamma \to \infty$ при сохранении величины произведения $a \cdot \Gamma$.

5.25.* В плоском потоке несжимаемой жидкости, симметричном относительно оси x, известно распределение скорости вдоль оси симметрии (V_0 и a - постоянные величины):

а) $V(x,0) = V_0(1 + ax)$,

б) $V(x,0) = V_0(1 + a^2x^2)$,

в) $V(x,0) = V_0(1 - a^2/x^2)$,

г) $V(x,0) = V_0\, a/x$.

Найти функцию тока, потенциал и поле скорости, если течение безвихревое.

6. ИНТЕГРАЛ БЕРНУЛЛИ

6.1. Найти скорость истечения тяжелой несжимаемой жидкости из бака через небольшое отверстие, расположенное на глубине h. Считать, что давление на свободной поверхности и в струе жидкости на выходе из отверстия равно атмосферному.

6.2. Определить объемный и массовый расход воды, вытекающей из открытого бака в атмосферу через короткое сопло диаметром d, расположенное на глубине h.

6.3. Вода вытекает из большого закрытого бака в атмосферу через отверстие, расположенное на глубине h. Определить скорость воды на выходе из отверстия, если избыточное давление воздуха над поверхностью воды равно p.

6.4. Вода вытекает из закрытого бака в атмосферу через короткий насадок площадью S, расположенный ниже поверхности воды на величину h . Определить реактивную силу, действующую на бак, если избыточное давление воздуха в баке равно p .

6.5. В вертикальной стенке открытого сосуда с водой имеется малое отверстие, расположенное на расстоянии h от свободной поверхности. Где надо расположить второе отверстие, чтобы вытекающая из него струя достигала пола в той же точке, что и струя из первого отверстия?

Обе струи в момент выхода из отверстий горизонтальны.

6.6. Из открытого бака через малое отверстие выходит горизонтальная струя жидкости. Определить дальнобойность струи, т.е. расстояние (по горизонтали), которое струя пролетит до падения на землю, если уровень жидкости в баке H , а отверстие расположено на высоте h .

6.7. В условиях предыдущей задачи определить, где следует расположить отверстие, чтобы дальнобойность струи была максимальной.

6.8. Из открытого бака, уровень воды в котором h , через короткий насадок выходит струя. Определить,где следует расположить насадок и под каким углом к горизонту должна выходить струя, чтобы ее дальнобойность была максимальной.

6.9. Из открытого бака через короткое сопло площадью S выходит в атмосферу струя жидкости, направленная

а)вертикально вниз,

б)горизонтально,

в)под углом α к горизонту.

Определить площадь того поперечного сечения струи, которое находится ниже сопла на величину h , если уровень жидкости в баке над соплом равен H .

6.10. Вода из открытого бака течет по горизонтальной трубке переменного сечения, находящейся на расстоянии h от свободной поверхности, и сбрасывается в атмосферу. Найти распределение давления вдоль трубки. Трением пренебречь.

6.11. Вода из закрытого бака с избыточным давлением воздуха p выливается в атмосферу по тонкой вертикальной трубке постоянного сечения. Найти распределение давления вдоль трубки, если длина ее ℓ , а уровень воды в баке выше нижнего конца трубки на величину h . Трением пренебречь.

6.12. Несжимаемая жидкость плотностью ρ течет по горизонтальной трубке переменного сечения. Найти расход жидкости, если известен перепад давлений $p_1 - p_2$ между сечениями с площадью S_1 и S_2. Трением пренебречь, течение считать одномерным.

6.13. Газ движется по каналу переменного сечения при неизменной температуре. Считая течение одномерным, найти связь между скоростью в некотором сечении и его площадью.

6.14. Два соосных диска радиусом R расположены на небольшом расстоянии h друг от друга. Через центральное отверстие радиусом R_0 в междисковый зазор подается вода. Определить перепад давления между входным и выходным кольцевыми сечениями, если расход воды равен Q. Течение между дисками считать радиальным, трением пренебречь.

6.15. Решить предыдущую задачу, считая, что диски соединены между собой тонкими радиальными лопатками, обеспечивающими равномерное вращение потока вместе с дисками с угловой скоростью ω вокруг оси симметрии.

6.16. Тяжелая несжимаемая жидкость вращается вокруг вертикальной оси по закону свободного вихря (окружная скорость убывает пропорционально удалению от оси вращения). Найти распределение давления в жидкости и уравнение свободной поверхности, давление на которой равно атмосферному.

6.17. Вода из открытого бака течет по горизонтальному трубопроводу диаметром D и сбрасывается в атмосферу. На трубопроводе имеется местное сужение диаметром d, к которому подсоединена тонкая трубка, опущенная в резервуар с водой. Определить направление течения воды в трубке, если трубопровод расположен выше уровня воды в резервуаре на величину H и ниже уровня воды в баке на величину h.

6.18. В первоначально пустой сосуд, имеющий в дне отверстие диаметром d, непрерывно подается вода с расходом Q. Какова должна быть высота сосуда, чтобы он не переполнялся?

6.19. В первоначально пустой вертикальный цилиндрический сосуд радиусом R начинает поступать вода с постоянным расходом Q. Найти закон изменения расхода воды, вытекающей из малого донного отверстия диаметром d.

6.20. Определить время опорожнения вертикального цилиндрического сосуда с водой через малое отверстие в его дне. Диаметр сосуда D, уровень воды в нем h, площадь отверстия S.

6.21. В условиях предыдущей задачи определить время, в течение которого из сосуда выльется половина воды.

6.22. В каком соотношении находятся времена опорожнения бочки длиной L и диаметром D для двух вариантов: а) вертикальная бочка с отверстием в дне, б) горизонтальная бочка с таким же отверстием на нижней образующей. Давление над свободной поверхностью жидкости равно атмосферному.

6.23. Вертикальный сосуд имеет форму поверхности вращения, определяемой в цилиндрических координатах уравнением $R = a z^n$. Жидкость выливается из сосуда через малое отверстие, расположенное в начале координат. Выразить время опорожнения сосуда через начальный объем жидкости V и начальный расход Q.

6.24. Жидкость вытекает из сосуда через малое отверстие в его дне. Какую форму должен иметь сосуд, чтобы скорость понижения свободной поверхности жидкости оставалась неизменной?

6.25. Два вертикальных цилиндрических сосуда с диаметрами D_1 и D_2 соединены короткой трубкой малого диаметра d. Определить время выравнивания уровней воды в сосудах, если начальная разность уровней равна $\Delta h = h_1 - h_2$.

6.26. Цистерна объемом V находится на дне водоема глубиной H. Вода из цистерны вытесняется сжатым воздухом с избыточным давлением p через отверстие площадью S. Сколько времени потребуется, чтобы вытеснить из цистерны всю воду? Влиянием уровня воды в цистерне на скорость истечения пренебречь.

6.27. Открытый бак имеет форму перевернутого конуса с углом полураствора α и малым отверстием в вершине. Найти время истечения воды от уровня h до уровня $h/2$.

7. АДИАБАТИЧЕСКОЕ ТЕЧЕНИЕ ИДЕАЛЬНОГО ГАЗА. ИЗЭНТРОПИЧЕСКИЕ ФОРМУЛЫ

7.I. Для дозвукового газового потока оценить:

а)диапазон чисел Маха, в котором возможно рассмотрение обтекания тела с использованием модели несжимаемой жидкости,

б)погрешность определения скорости потока по показаниям трубки Прандтля без учета сжимаемости /5,с.95/.

Выполнить расчет для воздуха при комнатной температуре.

7.2. Доказать, что адиабатическое течение идеального газа баротропно вдоль траектории.

7.3. Записать интеграл Бернули в форме, содержащей скорость и скорость звука. Получить зависимости скорости звука, температуры, плотности, давления и скорости от числа Маха M (изэнтропические формулы).

7.4. Получить зависимость числа Маха M от скоростного коэффициента λ и обратную зависимость $\lambda(M)$.

7.5. Исходя из интеграла Бернули, проанализировать зависимость отношения кинетической энергии газа к внутренней энергии от числа Маха.

7.6. Сопоставить эволюцию процессов истечения газа из баллона через сужающееся сопло при изменении отношения давления в баллоне к противодавлению для двух вариантов: а)фиксировано давление в баллоне, б)фиксировано противодавление.

7.7. Для одноатомного (k =5/3) и двухатомного (k =7/5) газов рассчитать отношение давления торможения к противодавлению, при котором истечение из бака через сужающееся сопло становится критическим.

7.8. Получить формулу для расчета максимально возможного расхода газа с известными параметрами торможения при истечении из бака через сопло.

Рассчитать максимально возможный расход гелия, аргона, водорода и воздуха через сопло с минимальным сечением Iкв.см при давлении в баке 0,IМПа и температуре 20°С.

7.9. Расход газа при истечении из бака через сужающееся сопло можно найти по приближенной формуле Прандтля /5,с.II7/ или по более точной изэнтропической формуле /5,с.II6/.

Рассчитать зависимость относительной ошибки определения массового расхода воздуха по формуле Прандтля от относительного противодавления.

7.10. Через сопло Лаваля площадью критического сечения S, работающее в расчетном сверхзвуковом режиме, атмосферный воздух поступает в бак, откуда откачивается вакуумным насосом с постоянным объемным расходом Q.

Считая, что температура внутри бака равна внешней, определить давление в баке, площадь выходного сечения сопла и число Маха на срезе сопла. Рассчитать диаметры критического и выходного сечений сопла, если производительность насоса Q =150л/с, а давление в баке составляет а)100Па , б)1000Па.

7.11. Исходя из известной зависимости относительной площади поперечного сечения сопла Лаваля $\bar{A} = A/A^*$ от числа Маха M /5,с.114/, составить производные $d\bar{A}/dM$ и $dM/d\bar{A}$. Проанализировать зависимость $\bar{A}(M)$ для одно- и двухатомного газов при предельно малых ($M \to 0$), малых ($M \cong 0,1$), умеренных дозвуковых ($M \cong 0,5$), трансзвуковых ($M \cong 1$), умеренных сверхзвуковых ($M \cong 2$), гиперзвуковых ($M \cong 10$) и неограниченно возрастающих ($M \to \infty$) числах Маха. Результаты представить в форме таблицы.

7.12. Для симметричного (относительно критического сечения) клиновидного и конического сопла Лаваля с углом полураствора а)10° и б)20° рассчитать относительную продольную координату $\bar{x}$ для указанных в предыдущей задаче газов и чисел . Составить и вычислить в найденных сечениях производные $d\bar{x}/dM$ и $dM/d\bar{x}$.

Результаты представить в форме таблиц.

7.13. Проанализировать изменение гидродинамических величин (скорость, скорость звука, температура, плотность и давление) при движении газа по соплу Лаваля. Для этого составить и вычислить безразмерные производные гидродинамических величин по продольной координате в характерных (по данным предыдущей задачи) сечениях сопла.

Результаты представить в форме таблиц.

7.14*. Газ из баллона вытекает через сужающееся сопло в атмосферу. Считая процесс опорожнения баллона адиабатическим, определить для одно- и двухатомного газов зависимость давления в баллоне от времени.

Течение в сопле является

а) закритическим (давление в баке относительно велико),

б) докритическим.

Указания к п. б).

I. Убедиться, что плотность газа в струе на срезе сопла не изменяется с течением времени.

2. При интегрировании уравнения для давления удобно перейти к новой переменной $\tilde{p}=\sqrt{1-\bar{p}^{\frac{k-1}{k}}}$, где $\bar{p}$ - отношение атмосферного давления к давлению в баллоне.

7.I5.* Основываясь на решении предыдущей задачи, найти время адиабатического истечения газа из баллона объемом 40л с начальным давлением 0,5МПа и температурой 20°С через сопло с сечением 5кв.мм.

В баллоне находится а) воздух, б) аргон, в) гелий.

7.I6.* Воспользовавшись дифференциальными уравнениями для давления из задачи 7.I4, выяснить, является ли зависимость давления в баллоне от времени гладкой или терпит излом при смене режимов течения.

7.I7. Решить задачу 7.I4а, считая, что благодаря теплообмену со стенками температура неподвижного газа в баллоне остается неизменной. При этом течение газа в сопле по-прежнему адиабатическое.

7.I8. Основываясь на решении задач 7.I4а и 7.I7, найти время закритического истечения газа из баллона объемом 40л с начальным давлением I0МПа и температурой 20°С через сопло с сечением 5кв.мм и 0,0Iкв.мм для адиабатического и изотермического режимов. Какому режиму в большей степени отвечает каждое из указанных сечений сопла?

В баллоне находится а) воздух, б) аргон, в) гелий.

7.I9. В цилиндрической трубке длиной L и площадью поперечного сечения S с заглушенным концом находится поршень массой M. Поршень разделяет камеру высокого давления длиной ℓ и открытую часть трубки, заполненную атмосферным воздухом. В некоторый момент времени удаляются стопоры и сжатый газ начинает разгонять поршень.

Определить, при какой относительной длине ℓ/L камеры высокого давления скорость поршня на срезе трубки будет максимальной. Процесс расширения толкающего газа считать адиабатическим, волновыми процессами и трением пренебречь.

Для а) одноатомного и б) двухатомного толкающего газа с начальным давлением 1МПа рассчитать максимальную скорость поршня массой 1кг при L =1м, S =40кв.см.

8. УДАРНЫЕ ВОЛНЫ И СКАЧКИ УПЛОТНЕНИЯ

8.1. Доказать, что акустическое возмущение, возникшее с любой стороны от ударной волны, достигнет ее. В каком случае возмущение, возникшее с одной стороны от ударной волны, распространится на противоположную сторону?

8.2. Используя формулы прямого скачка уплотнения /5, с.131, с.135/, записать в виде функции от числа Маха ударной волны M_1 отношения газодинамических величин за ударной волной (плотности, давления, скорости спутного потока) к их значениям при $M_1 \to \infty$.

Вычислить полученные отношения для одно- и двухатомного газа при M_1 =5 и M_1 =10. Обсудить свойства сильных ударных волн.

8.3*. Учитывая, что для слабых ударных волн относительное изменение давления $\varepsilon = \Delta p/p_1$ мало, представить отношение плотностей и температур на ударной волне, а также изменение энтропии и относительное изменение скорости потока в виде ряда по степеням ε , сохраняя в разложении члены порядка ε^3 .

Сопоставить полученные выражения с аналогичными разложениями для изэнтропического течения и сделать выводы о свойствах слабых ударных волн.

Оценить ошибку в расчете указанных величин по изэнтропическим формулам для ударных волн при M_1 =1,2 , M_1 =1,5 и M_1 =2.

8.4. В сверхзвуковой части сопла Лаваля укреплено небольшое затупленное тело. Выяснить характер изменения давления в передней критической точке при смещении тела вниз по потоку.

Как изменился бы результат в отсутствие головного скачка уплотнения?

8.5. В сверхзвуковой части сопла Лаваля укреплено небольшое затупленное тело. Считая, что при большом числе Маха набегающего потока M_∞ коэффициент сопротивления тела $C_x = R_x / (\frac{1}{2}\rho_\infty V_\infty^2 S)$ не зависит от M_∞, определить зависимость силы сопротивления R_x от параметров торможения и местного числа Маха в сопле. Выяснить характер изменения силы сопротивления при смещении тела вниз по потоку. Сопоставить полученные данные с результатами предыдущей задачи.

8.6. Пренебрегая влиянием силы тяжести, вывести закон движения тела в неподвижном газе при постоянном значении коэффициента сопротивления (см. предыдущую задачу).

Полагая $C_x = 0,8$, рассчитать

а)относительное замедление снаряда массой 2кг диаметром 6см на расстоянии 2км от орудия при начальной скорости I,5км/с,

б)кинетическую энергию шара диаметром Iсм массой Iг на расстоянии 3м от метательного устройства с открытой рабочей частью при начальной скорости 6км/с.

8.7. Плоская ударная волна отражается от параллельной ее фронту стенки. Записать:

а)число Маха отраженной волны как функцию ее скорости и параметров потока за падающей волной,

б)отношение давлений на отраженной волне как функцию отношения давлений на падающей волне,

в)скорость отраженной волны как функцию отношения давлений на падающей волне и ее скорости.

Учесть, что за отраженной волной вследствие непроницаемости стенки скорость газа равна нулю.

8.8. Ударная волна движется с постоянной скоростью по неподвижному газу в канале постоянного сечения, перекрытом заглушкой с отверстием. Составить замкнутую систему уравнений, решение которой позволит определить скорость отраженной ударной волны, а также давление, плотность и скорость потока за ней. Течение у заглушки считать одномерным, установившимся.

8.9. Составить замкнутую систему уравнений для расчета взаимодействия двух плоских ударных волн, движущихся навстречу друг другу по неподвижному газу. Учесть, что в результате взаимодействия образуются две ударные волны, а между ними - контактная поверхность, на которой давление и скорость не терпят разрыва.

8.10. Составить замкнутую систему уравнений для расчета взаимодействия ударной волны с параллельной ей контактной поверхностью (см. предыдущую задачу). Считать, что в результате взаимодействия образуются две ударные волны, а между ними - движущаяся контактная поверхность.

8.11. Газ с давлением торможения p_0 вытекает из осесимметричного сопла Лаваля в покоящийся газ, давление которого p_∞ ниже расчетного. На некотором расстоянии от сопла образуется дискообразный скачок уплотнения (диск Маха). Определить число Маха потока, набегающего на диск Маха, полагая давление за диском равным давлению в невозмущенном газе. Выполнить расчет для одно- и двухатомного газа при $p_0/p_\infty=100$.

8.12. Составить замкнутую систему уравнений для расчета положения плоского скачка уплотнения внутри сопла Лаваля при нерасчетном (перерасширенном) режиме течения, считая,что

а)течение внутри сопла безотрывное,

б)поток отрывается от стенок сопла сразу за скачком и давление в дозвуковой струе равно внешнему давлению.

8.13*. Клиновидное тело с присоединенным скачком уплотнения отклоняет сверхзвуковой поток с числом Маха M_1 на угол θ (5,с.241). Найти зависимость угла наклона скачка β от числа M_1 в предельном состоянии присоединенного скачка ($d\theta/d\beta=0$). Вычислить для $k=5/3$ и $k=7/5$ наибольший угол отклонения потока при $M_1\to\infty$. Выяснить для $M_1\to\infty$, при каком угле θ поток за косым скачком уплотнения будет звуковым.

8.14. Поток с числом Маха $M_1\gg 1$ набегает на тонкий клин с углом полураствора θ. Определить в линейном приближении угол наклона скачка уплотнения как функцию M_1 и θ.

8.15. Вывести уравнение ударной поляры для косого скачка уплотнения при бесконечно большом числе Маха набегающего потока.

8.16*. Составить замкнутую систему уравнений для расчета интенсивности и угла наклона косого скачка уплотнения, отраженного от плоской стенки, вдоль которой движется сверхзвуковой поток. Интенсивность и угол наклона падающего скачка уплотнения известны, точка отражения лежит на стенке (регулярное отражение).

8.17. Коэффициент давления за косым скачком уплотнения представить как функцию угла отклонения потока и угла наклона скачка.

9. ИНТЕГРАЛ ЛАГРАНЖА-КОШИ

9.1. К баку с водой на глубине h присоединена горизонтальная трубка длиной ℓ с задвижкой на конце. В некоторый момент времени задвижка мгновенно открывается и вода начинает вытекать в атмосферу. Определить зависимость скорости воды в трубке от времени.

Изменением уровня жидкости и нестационарностью течения в баке (вплоть до входа в трубку) пренебречь.

9.2. Вертикальный участок L-образной трубки малого постоянного сечения заполнен водой до высоты h. Определить закон движения воды и распределение давления в ней после мгновенного открывания вентиля, разделяющего горизонтальный и вертикальный участки.

Течение считать одномерным, потерями пренебречь.

9.3. Заполненная водой трубка длиной ℓ с малым постоянным сечением наклонена под углом α к вертикали. В некоторый момент времени мгновенно открывается вентиль, закрывающий трубку, и вода начинает выливаться в атмосферу. Найти закон изменения скорости воды в трубке и распределение давления в ней.

9.4. Погруженная в несжимаемую жидкость сфера расширяется по заданному закону. Определить давление на поверхности сферы, если давление на бесконечном удалении от нее равно p_∞. Силы тяготения отсутствуют.

9.5. Из несжимаемой жидкости, заполняющей все пространство, внезапно удаляется сферический объем радиусом R. Определить время, в течение которого образовавшаяся полость заполнится жидкостью.

9.6. Некоторый объем идеальной несжимаемой жидкости занимает длину ℓ в прямой трубке с малой постоянной площадью сечения. Жидкость тяготеет к точке на оси трубы с силой, пропорциональной расстоянию до нее. Определить закон движения жидкости и найти давление в каждой ее точке.

9.7. В изогнутую трубку с малым постоянным поперечным сечением налита несжимаемая жидкость, занимающая длину ℓ вдоль оси трубки. Пренебрегая трением, найти частоту малых свободных колебаний жидкости около положения равновесия для трубок следующих форм:

а) U-образная трубка, имеющая 2 вертикальных колена,

б) трубка, одно колено которой вертикально, а другое наклонено под углом α к горизонту,

в) окружность радиусом R,

г)* произвольно изогнутая трубка, ось которой на концах столба жидкости (в положении равновесия) наклонена под углами α_1 и α_2 к горизонту.

9.8. В вертикальной U-образной трубке малого постоянного сечения, одно колено которой запаяно, находится идеальная несжимаемая жидкость. В некоторый момент времени жидкость неподвижна и заполняет открытое колено трубки до высоты h, а в закрытом колене высоты H находится воздух при атмосферном давлении. Определить максимальную высоту подъема жидкости в запаянном колене и распределение давления для этого момента времени.

Сжатие воздуха в трубке считать изотермическим.

9.9. Половину длины тонкой закрытой трубки малого постоянного сечения занимает жидкость плотностью ρ, а другую половину - газ с давлением $2p$. В некоторый момент времени один из концов трубки мгновенно открывается и жидкость выбрасывается в атмосферу с давлением p. Пренебрегая трением и считая расширение выталкивающего газа изотермическим, найти максимальную скорость жидкости в трубке.

Трубка расположена

а) горизонтально,

б) вертикально (жидкость внизу),

в)* под углом α к горизонту.

9.10. Поршень в длинной трубке с открытым в атмосферу концом совершает гармонические колебания с малой амплитудой. Счиая, что возмущения потенциала скорости в трубе удовлетворяют линейному волновому уравнению /5,с.102/, найти возмущение скорости и давления как функции продольной координаты и времени.

Указание. Считать, что условия непротекания на поверхности поршня выполняются в сечении $x=0$, относительно которого совершает колебания поршень.

9.11. На ограниченном участке длинной цилиндрической трубы с неподвижным газом создано незначительное избыточное давление, которое вдоль указанного участка

а)распределено по синусоидальному закону с нулевым возмущением на границах участка,

б)постоянно.

Решить задачу о распространении малых возмущений давления и скорости в трубе.

9.12. Волна сжатия, описанная в предыдущей задаче, отражается от открытого конца трубы. Найти возмущение давления и скорости в отраженной волне, считая, что на конце трубы возмущение давления равно нулю.

9.13. Тонкая цилиндрическая трубка с открытым концом отделена диафрагмой от бака с небольшим избыточным давлением. Определить возмущение давления и скорости в трубе с момента исчезновения диафрагмы.

10. ХАРАКТЕРИСТИКИ. ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКИЕ ИНВАРИАНТЫ

10.1. Решить задачи 9.11 - 9.13 о распространении волн давления в цилиндрических трубах методом характеристик.

10.2. Найти максимальную скорость воздуха в ударной трубе /5,с.155-157/ при начальной температуре T_0 и нулевом давлении в канале низкого давления. Сопоставить найденную скорость и максимальную скорость стационарного потока с температурой торможения T_0.

10.3. В волне сжатия перед движущимся в покоящемся воздухе поршнем /5,с.148-151/ скорость газа распределена по косинусоидальному закону, достигая на поршне максимального значения, равного 20м/с. Длина области возмущения равна четверти длины волны и составляет 1м. Найти время формирования скачка уплотнения.

10.4*. Начальное давление газа в относительно короткой камере высокого давления ударной трубы немного выше давления другого газа в канале низкого давления. Составить выражения для расчета возмущений давления и скорости в сечении диафрагмы и на торце камеры при многократном отражении волн давления от контактной поверхности и торца камеры.

10.5*. Вывести в $x - t$ координатах уравнение головы отраженной от торца камеры высокого давления волны разрежения. Решение представить в параметрической форме с параметром M (местное число Маха). Воспользоваться решением для центрированной в начале координат волны разрежения /5,с.151-153/.

10.6. В ударной трубе с длинным каналом низкого давления, работающей на воздухе, число Маха ударной волны равно 2. Во сколько раз упадет давление на торце камеры высокого давления после отражения от него волны разрежения? Как изменится результат, если в камере высокого давления использовать гелий?

10.7. В условиях предыдущей задачи найти время достижения сечения диафрагмы головой отраженной от торца камеры высокого давления волны разрежения. Воспользоваться решением задачи 10.5.

10.8. Вблизи диафрагмы ударной трубы постоянного диаметра установлено короткое сопло Лаваля. Найти начальное отношение давлений на диафрагме и число Маха ударной волны, считая течение внутри сопла установившимся, а режим течения расчетным /5,с.116-119/.

10.9*. Составить замкнутую систему соотношений для расчета взаимодействия отраженной от торца канала низкого давления ударной волны с контактной поверхностью в ударной трубе, имеющей длинную камеру высокого давления.

Считать, что в результате взаимодействия образуется прошедшая в толкающий газ ударная волна, а к торцу канала движется а) ударная волна или б)центрированная волна разрежения.

10.10*. В условиях предыдущей задачи рассмотреть режим "сшития" контактной поверхности, когда в результате взаимодействия отраженной ударной волны с контактной поверхностью не возникает возмущения, распостраняющегося к торцу канала низкого давления.

Вывести формулу, определяющую отношение начальных температур толкающего и рабочего газов как функцию отношения давлений на первичной ударной волне, при котором реализуется указанный режим.

10.11*. Ударная труба работает в режиме "сшитой" контактной поверхности (см. предыдущую задачу). Определить отношение длины канала низкого давления к длине камеры высокого давления, при котором хвост первичной центрированной волны разрежения, голова отраженной от торца камеры высокого давления волны разрежения и прошедшая в толкающий газ отраженная ударная волна встречаются в одной точке $x-t$ диаграммы.

10.12. Малое возмущение изменяет направление вектора скорости плоского сверхзвукового потока на $2°$. Найти изменение числа Маха потока, если в невозмущенном потоке число Маха $M=2$.

10.13. Малое возмущение, изменяющее направление вектора скорости плоского сверхзвукового потока на $2°$, падает на параллельную потоку а)твердую стенку, б)свободную поверхность. Найти изменение числа Маха за отраженным возмущением, если в невозмущенном потоке число Маха равно 2.

10.14. Сопоставить по степени сложности решения методом характеристик двух задач: а)задачи о центрированной волне разрежения /5,с.151-153/ и б)задачи Прандтля-Майера о сверхзвуковом обтекании выпуклого угла /5,с.270/.

Что общего и каковы различия между этими решениями?

ЛИТЕРАТУРА

I.Аэродинамика в вопросах и задачах (под ред. Н.Ф.Краснова). М., Высшая школа, 1985, 760с.

2.Давидсон В.Е. Основы газовой динамики в задачах. М., Высшая школа, 1965, 208с.

3.Ильюшин А.А.,Ломакин В.А.,Шмаков А.П. Задачи и упражнения по механике сплошной среды. М., МГУ, 1979, 200с.

4.Киселев П.Г. Гидравлика. Основы механики жидкости. М.-Л., Госэнергоиздат, 1963, 424с.

5.Лойцянский Л.Г. Механика жидкости и газа. М., Физматгиз, 1987, 840с.

6.Осватич К.,Шварценбергер. Сборник задач и упражнений по газовой динамике. М., Мир, 1967, 272с.

7.Самойлович Г.С.,Нитусов В.В. Сборник задач по гидроаэромеханике. М., Машиностроение, 1986, 150с.

8.Яблонский В.С.,Яблонская В.П. Сборник задач по теоретической гидромеханике. М.-Л., Гостехиздат, 1951, 200с.

Содержание