

Министерство образования Российской Федерации

САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ  
ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ

С.Б.Колешко, Ф.Д.Попов

МЕХАНИКА ЖИДКОСТИ И ГАЗА

РАЗНОСТНЫЕ СХЕМЫ

Учебное пособие

Санкт-Петербург  
Издательство СПбГТУ  
2001

УДК 532+533

К о л е ш к о С. Б., П о п о в Ф. Д. Механика жидкости и газа. Разностные схемы: Учеб. пособие. СПб.: Изд-во СПбГТУ. 2001, 72 с.

Пособие соответствует государственному образовательному стандарту дисциплины «Механика жидкости и газа» направления бакалаврской и магистерской подготовки 553300 «Прикладная механика» и одноименного направления 651500 подготовки специалистов.

Изложены основы метода конечных разностей применительно к модельным уравнениям и уравнениям гидродинамики. Сформулированы фундаментальные понятия теории разностных схем. Приведены способы построения и приемы исследования некоторых аппроксимирующих разностных схем. Изложены основы метода дробных шагов для решения многомерных задач.

Предназначено для студентов и аспирантов, изучающих методы численного решения задач механики жидкости и газа.

Ил. 10. Библиогр.: 9 назв.

Печатается по решению редакционно-издательского совета Санкт-Петербургского государственного технического университета.

Санкт-Петербургский государственный  
технический университет, 2001

## Содержание

Введение.....	
Глава 1. Простейшие приемы построения и исследования разностных схем .....	
1.1. Основные понятия и определения .....	
1.2. Разностные уравнения первого и второго порядков с постоянными коэффициентами .....	
1.3. Скорость сходимости приближенного решения к точному .....	
Глава 2. Сходимость, аппроксимация и устойчивость. Некоторые способы исследования разностных схем для уравнений в частных производных .....	
2.1. Понятие соответствия между сеточными функциями и функциями непрерывных аргументов .....	
2.2. Строгие определения понятий сходимости, аппроксимации и устойчивости. Теорема Лакса о сходимости .....	
2.3. Пример исследования разностной схемы для уравнений в частных производных .....	
2.4. Условие Куранта, Фридрихса и Леви, необходимое для устойчивости разностных схем .....	
2.5. Схема Лакса. Сеточная вязкость. Монотонность .....	
Глава 3. Способы построения и приемы исследования устойчивости аппроксимирующих разностных схем .....	
3.1. Метод неопределенных коэффициентов .....	
3.2. Консервативность (дивергентность) разностных схем. Метод пересчета, или метод предиктор-корректор .....	
3.3. Явная разностная схема для уравнения теплопроводности.....	
3.4. Неявные разностные схемы. Метод прогонки .....	
3.5. Спектральный (гармонический) признак устойчивости .....	
Глава 4. Некоторые способы построения разностных схем для многомерных задач .....	
4.1. Явные и неявные однородные схемы. Матричная прогонка .....	
4.2. Простейшие схемы дробных шагов: продольно-поперечной прогонки и стабилизирующей поправки .....	
4.3. Схемы расщепления оператора по пространственным переменным .....	
Литература .....	

## Введение

Вычислительные (численные) методы составляют, наряду с физическим экспериментом, главные инструменты исследования задач механики жидкости и газа.

Исключительная важность роли, которую играют вычислительные методы в современной гидродинамике, обусловлена прежде всего особенностями применяемых физико-математических моделей.

Типичная задача гидродинамики формулируется в виде системы нелинейных ( в лучшем случае квазилинейных) уравнений. Краевые условия нередко приходится ставить на заранее неизвестных границах. В решении могут встречаться особые точки, а уравнения - менять свой тип в расчетной области. Эти обстоятельства обычно исключают точные решения для практически интересных постановок, даже если последние весьма упрощены. Поэтому естественно, что общие идеи, относящиеся к отысканию численных решений уравнений, уже давно нашли в задачах гидродинамики самую благодатную почву.

Стремительный прогресс в области вычислительной техники открыл путь к таким методам, и, следовательно, к решению таких задач механики жидкости и газа, которые еще несколько лет назад считались недоступными. Существует и несомненная обратная связь: решение математических проблем, порожденных теми или иными задачами гидродинамики, обогащало общую теорию численных методов и стимулировало развитие новых направлений в этой области.

Многие общие положения вычислительной гидродинамики уже вполне определились и стали классическими, другие - еще только формируются. Общей особенностью развития вычислительных методов в гидродинамике, как и в других смежных областях, является непосредственная опора на численный эксперимент.

Следует заметить, что теория численных методов далека от завершения. В частности, теоретические исследования методов удается проводить лишь для линейных уравнений (а иногда только для уравнений с постоянными коэффициентами).

В этих условиях обычный путь численного решения достаточно сложной новой задачи схематически выглядит так: 1) на основе теории для сходных (моделирующих) уравнений, а также опыта и интуиции выбирается метод решения, 2) с учетом особенностей задачи составляется алгоритм и программа, 3) в результате численного эксперимента корректируются части программы, схемные параметры, 4) проводится сравнения с известными близкими вариантами, расчетами для предельных значений параметров и т.п. Лишь практическое опробование схемы может определить ее пригодность.

В связи с появлением в последние годы пакетов прикладных гидродинамических программ, использующих апробированные и достаточно эффективные численные алгоритмы, среди части пользователей возникло представление об универсальных возможностях этих пакетов, освобождающих от необходимости детального понимания как особенностей постановок исходных задач, так и свойств применяемых численных методов. В действительности такие представления являются в большой степени иллюзорными ввиду огромного многообразия видов и форм гидродинамических течений. Речь идет даже не об исследовании новыми методами потоков заведомо сложной природы (например, нестационарных турбулентных течений с существенно разными масштабами), а об осознанном использовании прикладных пакетов в рамках их возможностей путем принятия адекватных решений относительно схем, сеток и т.п. Разумеется, эти действия не могут иметь под собой какой-либо иной основы, помимо понимания фундаментальных основ численных методов и особенностей их схемных реализаций.

В настоящем учебном пособии рассмотрен только метод конечных разностей применительно к уравнениям гидродинамики, получивший наибольшее распространение благодаря своей универсальности и эффективности. Объем издания заставил ограничиться изложением лишь основ метода и простейшими уравнениями; этот материал вошел в первую часть курса «Численные методы в гидрогазодинамике».

При составлении некоторых разделов настоящего пособия использовалось содержание лекций, прочитанных канд. ф.-м.н. доцентом Ф.Д.Поповым для студентов кафедры гидроаэродинамики.

## Глава 1. ПРОСТЕЙШИЕ ПРИЕМЫ ПОСТРОЕНИЯ И ИССЛЕДОВАНИЯ РАЗНОСТНЫХ СХЕМ

### 1.1. Основные понятия и определения

Сущность конечноразностных методов решения задач, использующих дифференциальные уравнения, состоит в следующем.

1. Область непрерывного изменения аргумента (отрезок, часть поверхности или объема) заменяется областью дискретной, т.е. состоящей из множества отдельных точек - узлов (одно- или многомерной). Совокупность узлов образует сетку, параметрами которой являются шаг сетки - постоянные или переменные.
2. Производится приближенная замена (аппроксимация) дифференциальных уравнений, дифференциальных граничных, начальных и иных дополнительных условий их разностными аналогами, оперирующими величинами в узлах сетки. Так получается система ал-

гебраических уравнений. Множество подобных уравнений, зависящих от шагов, как от параметров, составляет разностную схему. Содержание пунктов 1 и 2 составляет так называемую дискретизацию задачи.

3. В качестве приближенного решения исходной дифференциальной задачи берется решение соответствующей алгебраической задачи. В итоге получается таблица чисел (одно- или многомерная) - сеточная функция.

Рассмотрим для иллюстрации простейшую линейную дифференциальную задачу

$$\frac{du}{dx} = -A u(x), \quad 0 < x < 1, \quad u(0) = 1, \quad A = \text{const} > 0 \quad (1.1)$$

с решением

$$u(x) = e^{-Ax} \quad (1.2)$$

Введем в области изменения  $x$  сетку

$$x_m = mh, \quad m = 0, 1, \dots, M > 0, \quad h = 1 / M$$

( $M$  отрезков). Вместо непрерывной функции  $u(x)$  будем искать таблицу

$$u(0) = u_0, \quad u(h) = u_1, \quad u(2h) = u_2, \dots, \quad u(Mh) = u_M$$

(для простоты записи сохраним одно и то же обозначение для непрерывной и сеточной функций).

Приближенно заменим производную  $du / dx$  в точке  $x_m$  выражением  $(u(x_m + h) - u(x_m)) / h$ .

Тогда вместо задачи (1.1) получим

$$\begin{aligned} (u(x_m + h) - u(x_m)) / h &= -Au(x_m), \quad m = 0, 1, \dots, M - 1, \\ u(0) &= 1 \end{aligned} \quad (1.3)$$

Отсюда последовательно находим

$$u(h) = u(0) \cdot (1 - Ah) = 1 - Ah$$

$$u(2h) = u(h) \cdot (1 - Ah) = (1 - Ah)^2$$

.....

$$u(mh) = u((m - 1)h) \cdot (1 - Ah) = (1 - Ah)^m$$

.....

$$u(Mh) = u(1) = (1 - Ah)^M = (1 - Ah)^{1/h}$$

В фиксированном узле  $x_m$  имеем  $u(x_m) = (1 - Ah)^m = (1 - A / M)^{Mx_m}$ , и при измельчении шага сетки ( $h = 1 / M \rightarrow 0$ ) в пределе получим

$$u(x_m) \rightarrow e^{-Ax_m}. \quad (1.4)$$

Таким образом, приближенное решение (семейство таблиц с параметром  $h$ ) стремится к точному при  $h \rightarrow 0$ .

Очевидно, что приближенную замену производной  $du/dx$  разделенной разностью, приводящую к аппроксимирующему алгебраическому выражению типа (1.3), можно производить и другими способами, например:

$$(du/dx)_{x_m} \sim (u(x_m) - u(x_m - h)) / h \quad (1.5)$$

$$(du/dx)_{x_m} \sim (u(x_m + h) - u(x_m - h)) / (2h) \quad (1.6)$$

Ввиду такой многовариантности конструирования аппроксимирующих соотношений требуется обязательная предварительная оценка свойств получающихся схем. Дело не только в том, что те или иные схемы могут давать решения, заметно различающиеся по точности, но и в том, что в отдельных случаях решения вообще не сходятся к точному при измельчении параметра  $h$ .

Для сравнения между собой решений дифференциальной и разностной задач в следующем разделе рассматриваются некоторые общие свойства простейших разностных уравнений.

## 1.2. Разностные уравнения первого и второго порядков с постоянными коэффициентами

Обозначим  $u(x_m) = u(mh) = u_m$ , где  $m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ . Разностные задачи, соответствующие аппроксимациям (1.3) и (1.6), можно переписать в форме

$$a u_m + b u_{m+1} = 0 \quad (1.7)$$

$$a u_{m-1} + b u_m + c u_{m+1} = 0 \quad (1.8)$$

(для уравнения (1.7)  $a = -(1 - Ah)$ ,  $b = 1$ , а для уравнения (1.8)  $a = -c = -1$ ,  $b = 2Ah$ ).

Уравнение (1.7) называется разностным первого порядка, а (1.8) при  $a \neq 0$ ,  $b \neq 0$  - разностным второго порядка.

Общее решение однородного уравнения (1.7) имеет вид  $u_m = \alpha q^m$ , где  $q = -a/b$ ,  $\alpha$  - постоянная, определяемая из дополнительных условий.

Однородное уравнение второго порядка (1.8) имеет решение

$$u_m = \alpha q_1^m + \beta q_2^m \quad (1.9)$$

если корни  $q_1$  и  $q_2$  характеристического уравнения различны, и решение  $u_m = (\alpha + \beta m) q^m$ , если корни кратны,  $\alpha$  и  $\beta$  - постоянные.

Рассмотрим более подробно решение уравнения второго порядка. В нашем случае

$$q_{1,2} = -Ah \pm \sqrt{A^2 h^2 + 1}$$

и справедливо решение (1.9). Коэффициенты  $\alpha$  и  $\beta$  определяются дополнительными условиями и дают конкретное решение. Пусть имеем помимо известного  $u_0 = u(0)$  еще одно значение  $u_1 = u(h)$ . Тогда из системы

$$u_0 = \alpha + \beta, \quad u_1 = \alpha q_1 + \beta q_2$$

следует

$$\alpha = \frac{q_2 u_0 - u_1}{q_2 - q_1}, \quad \beta = -\frac{q_1 u_0 - u_1}{q_2 - q_1} \quad (1.10)$$

Выясним, как надо выбирать  $u_1 = u(h)$ , чтобы при  $h \rightarrow 0$  обеспечить стремление решения (1.9) с коэффициентами (1.10) к точному решению исходной дифференциальной задачи (1.1).

Представим корни  $q_1$  и  $q_2$  при малом  $h$  так:

$$\begin{aligned} q_1 &= \sqrt{1 + A^2 h^2} - Ah = 1 - Ah + A^2 h^2 / 2 + O(h^4) \\ q_2 &= -\sqrt{1 + A^2 h^2} - Ah = -1 - Ah - A^2 h^2 / 2 + O(h^4) \end{aligned}$$

откуда

$$q_1^m = q_1^{x_m/h} = e^{\frac{x_m}{h} \ln(1 - Ah + A^2 h^2 / 2 + O(h^4))} = e^{-Ax_m} + O(h^2) \quad (1.11)$$

$$q_2^m = (-1)^m e^{Ax_m} + O(h^2) \quad (1.12)$$

$$u_m = \frac{q_2 u_0 - u_1}{q_2 - q_1} (e^{-Ax_m} + O(h^2)) - \frac{q_1 u_0 - u_1}{q_2 - q_1} ((-1)^m e^{Ax_m} + O(h^2)) \quad (1.13)$$

Чтобы в любой фиксированной точке  $x_m$  при измельчении шага сетки  $h$  имело место условие

$$\lim u_m = u_0 e^{-Ax_m},$$

необходимо и достаточно, как видно из (1.13), чтобы

$$\frac{q_2 u_0 - u_1}{q_2 - q_1} \rightarrow u_0, \quad \frac{q_1 u_0 - u_1}{q_2 - q_1} \rightarrow 0.$$



Это требует, чтобы  $u_1 \rightarrow u_0$ , так как при  $h \rightarrow 0$   $q_1 \rightarrow 1$ ,  $q_2 \rightarrow 0$ . Условие  $u_1 \rightarrow u_0$  при  $h \rightarrow 0$  может быть выполнено, например, так:  $u_1 = u_0$  или более точно  $u_1 = u_0 + O(h)$ . Если принять во внимание разложение

$$u(h) = u_0 + u_x(0) \cdot h + O(h^2) = u_0 - Au_0 h + O(h^2)$$

и выбрать  $u_1 = u_0(1 - Ah)$ , то это условие будет иметь точность  $O(h^2)$ .

### 1.3. Скорость сходимости приближенного решения к точному

Положим для простоты  $u_0 = 1$ . Схема (1.3) приводит к сеточной функции

$$u_m = (1 - Ah)^m = (1 - Ah)^{x_m/h}.$$

Определим погрешность приближенного решения  $\delta(x_m, h)$  как разность между этим решением и точным

$$\delta(x_m, h) = (1 - Ah)^{x_m/h} - e^{-Ax_m} \quad (1.14)$$

Очевидно, что величина погрешности в выбранном узле  $x_m$  зависит от параметра схемы - шага  $h$ .

Преобразуя выражение

$$(1 - Ah)^{x_m/h} = e^{x_m/h \ln(1 - Ah)} = e^{-x_m/h \cdot (Ah + A^2 h^2 / 2 + A^3 h^3 / 6 + \dots)},$$

получим с учетом малости  $h$

$$\begin{aligned} (1 - Ah)^{x_m/h} &= e^{-x_m/h} \left( 1 - hA^2 x_m / 2 + O(h^2) \right) \\ \delta(x_m, h) &= -hA^2 x_m / 2 \cdot e^{-x_m/h} + O(h^2) \end{aligned} \quad (1.15)$$

Результат (1.15) говорит о том, что скорость сходимости приближенного решения к точному имеет первый порядок относительно шага сетки  $h$  (или разностная схема имеет первый порядок точности относительно шага  $h$ ).

Для схемы (1.6) рассмотрим два варианта задания условия  $u(h) = u_1$ .

а)  $u_1 = u_0 = 1$  (первый порядок точности граничного условия относительно  $h$ ).

Обращаясь к решению (1.13) и принимая во внимание условие для  $u_1$ , получим

$$\alpha = \frac{q_2 u_0 - u_1}{q_2 - q_1} = 1 + Ah / 2 + O(h^2), \quad \beta = -\frac{q_1 u_0 - u_1}{q_2 - q_1} = -Ah / 2 + O(h^2)$$

откуда

$$\delta(x_m, h) = Ah / 2 \cdot (e^{-Ax_m} - (-1)^m e^{Ax_m}) + O(h^2) \quad (1.16)$$

то есть схема имеет первый порядок точности.

б)  $u_1 = 1 - Ah$  (второй порядок точности задания  $u_1$ ):

$$\alpha = 1 - A^2 h^2 / 4 + O(h^4), \quad \beta = A^2 h^2 / 4 + O(h^4)$$

$$\delta(x_m, h) = h^2 \left( \frac{2Ax_m - 3}{12} A^2 e^{-Ax_m} + (-1)^m A^2 / 4 \cdot e^{Ax_m} \right) + O(h^3) \quad (1.17)$$

и схема, таким образом, имеет второй порядок точности.

Как видно, порядок точности схемы (1.6) зависит от порядка точности задания величины  $u_1$ . Можно показать, что, увеличивая степень точности задания  $u_1$  (даже взяв точное значение  $u_1 = e^{-Ah}$ ), нельзя добиться точности схемы более высокой, чем вторая.

Очевидно, преимущество в точности схемы (1.6) по сравнению со схемой (1.3) связано с иной аппроксимацией производной  $du / dx$ .

Воспользуемся разложением решения дифференциальной задачи в ряд Тейлора около точки  $x_m$  (штрихи - символы производных):

$$u(x \pm h) = u(x) \pm u'(x) \cdot h + u''(x) \cdot h^2 / 2 \pm u'''(x) \cdot h^3 / 6 + O(h^4)$$

откуда

$$\frac{u(x+h) - u(x)}{h} = u'(x) + u''(x) \cdot h / 2 + O(h^2) \quad (1.18)$$

$$\frac{u(x+h) - u(x-h)}{2h} = u'(x) + u'''(x) \cdot h^2 / 6 + O(h^4) \quad (1.19)$$

Подставляя разложения (1.18) и (1.19) в схемы (1.3) и (1.6) и принимая во внимание, что  $u(x)$  тождественно удовлетворяет уравнению  $u'(x) + Au(x) = 0$ , получим выражения для ошибок (погрешностей) аппроксимаций  $u''(x) \cdot h / 2 + O(h^2)$  и  $u'''(x) \cdot h^2 / 6 + O(h^4)$  этих схем. Таким образом, разностная схема (1.3) аппроксимирует дифференциальное

уравнение с первым, а схема (1.6) - со вторым порядками точности относительно шага  $h$  (или, коротко говоря, имеет место аппроксимация первого или второго порядков).

Кажется разумным предположение, что порядок скорости сходимости приближенного решения к точному может быть сделан равным порядку точности аппроксимации производных в дифференциальном уравнении. Однако это утверждение справедливо только для тех разностных схем, которые обладают свойством устойчивости.

Строгое определение устойчивости дано в следующей главе, здесь отметим только, что обе рассмотренные схемы являются устойчивыми.

Приведем пример неустойчивой схемы.

Аппроксимируем  $du/dx = u'(x)$  следующим образом:

$$u'(x) \sim \mu \frac{u(x+h) - u(x-h)}{2h} + (1-\mu) \frac{u(x+h) - u(x)}{h} \quad (1.20)$$

где  $\mu$  - параметр схемы (наряду с  $h$ ). Пользуясь разложением решения в ряд Тейлора, составим выражения для разделенных разностей, входящих в (1.20), и подставим их в разностную схему. Погрешность аппроксимации имеет вид:

$$\begin{aligned} & \mu(u'(x) + O(h^2)) + (1-\mu)(u'(x) + O(h)) + Au(x) = \\ & = u'(x) + Au(x) + \mu O(h^2) + (1-\mu) O(h) \end{aligned}$$

и при любом  $\mu$  стремится к нулю, если  $h \rightarrow 0$ . При этом порядок аппроксимации будет вторым при  $\mu = 1$  и первым при  $\mu \neq 1$ .

Используя индексную форму записи, получим

$$-\mu u_{m-1} + 2(Ah - (1-\mu))u_m + (2-\mu)u_{v+1} = 0$$

Положим  $\mu = 4$ . Тогда для разностного уравнения

$$-4u_{m-1} + 2(Ah - 3)u_m - 2u_{v+1} = 0$$

характеристическое уравнение примет вид

$$-4 + 2(Ah - 3)q - 2q^2 = 0$$

с корнями

$$q_1 = 2(1 + Ah) + O(h^2), \quad q_2 = 1 - Ah + O(h).$$

Если задать  $u_1 = 1 - Ah$ , то

$$u_m = \alpha q_1^m + \beta q_2^m = e^{-Ax_m} + O(h^2) + h^2 2^{x_m/h} (-2A^2 e^{Ax_m} + O(h)) \quad (1.21)$$

Очевидно, что за счет множителя  $h^2 2^{x_m/h}$  значение  $u_m$  при  $m > 1$  стремится к бесконечности при измельчении шага сетки. Таким образом, аппроксимирующая разностная схема дает решение, не стремящееся к решению дифференциальной задачи при  $h \rightarrow 0$ ; эта схема является неустойчивой. Уточненный выбор величины  $u_1$  (даже в виде точного значения  $u_1 = e^{-Ah}$ ) не исправит положения.

Приведенные оценки скорости сходимости приближенных решений к точному носят асимптотический характер (они рассматриваются для предельного случая  $h \rightarrow 0$ ). С этой точки зрения схема (1.6) представляется более точной, чем схема (1.3), поскольку в первом случае  $\delta(x_m, h) = O(h^2)$ , а во втором  $\delta(x_m, h) = O(h)$ .

Для более детального анализа представим эти погрешности соответственно как  $\sigma h^2 + O(h^3)$  и  $\gamma h + O(h^2)$ . Величины множителей  $\sigma$  и  $\gamma$  дают количественную характеристику скорости сходимости, представляющую существенный практический интерес. Именно они определяют выбор шага  $h$ , обеспечивающий требуемую точность решения.

Как следует из формул (1.15) и (1.17),

$$\gamma = -x_m A^2 / 2 \cdot e^{-Ax_m} \text{ (для схемы первого порядка),}$$

$$\delta(x_m, h) = \frac{2Ax_m - 3}{12} A^2 e^{-Ax_m} + (-1)^m \frac{A^2}{4} e^{Ax_m} \text{ (для схемы второго порядка).}$$

Практически, во всяком случае, относительная погрешность в любой точке не должна превышать единицу:  $|\delta(x_m, h) / u(x_m)| \leq 1$ . Возьмем для определенности  $x_m = 1$ ,  $A = 20$ . Для схемы первого порядка

$$|\delta / u| \approx hA^2 / 2 = 200h \leq 1, \quad h \leq 5 \cdot 10^{-3}$$

(при выбранных условиях следующие члены ряда разложения по степеням  $h$  не существенны). Для схемы второго порядка

$$\left| \frac{\delta}{u} \right| \approx h^2 \left| \frac{2Ax_m - 3}{12} A^2 + (-1)^m \frac{A^2}{4} \cdot e^{2A} \right| \approx h^2 \frac{400}{4} e^{40} \leq 1.$$

Отсюда следует, что при  $x_m = 1$ ,  $A = 20$  достижение той же точности потребует для схемы второго порядка (1.6) измельчения шага  $h$  в  $10^7$  раз по сравнению со схемой первого порядка (1.3). Таким образом, оценку практической пригодности схемы надо делать не только по показателю степени  $h$  в величине погрешности, но и по коэффициенту при этой степени.

Выясним причины столь медленной сходимости по схеме второго порядка.

Для схемы (1.3) решение имеет вид

$$u_m = \alpha q^m, \quad q = 1 - Ah, \quad \alpha = u_0 = 1, \quad q^m = e^{-Ax_m} + O(h).$$

Для схемы (1.6):

$$\begin{aligned} u_m &= \alpha q_1^m + \beta q_2^m, \\ q_1 &= \sqrt{1 + A^2 h^2} - Ah = 1 - Ah + A^2 h^2 / 2 + O(h^4) \\ q_2 &= -\sqrt{1 + A^2 h^2} - Ah = -1 - Ah - A^2 h^2 / 2 + O(h^4) \\ \alpha &= \frac{q_2 u_0 - u_1}{q_2 - q_1} = 1 + O(h^2), \quad \beta = -\frac{q_1 u_0 - u_1}{q_2 - q_1} = O(h^2) \\ q_1^m &= e^{-Ax_m} + O(h^2), \quad q_2^m = (-1)^m e^{Ax_m} + O(h^2) \end{aligned}$$

Член, соответствующий второму корню  $q_2^m = (-1)^m e^{Ax_m} + O(h^2)$ , представляет собой осциллирующую и быстро растущую при  $A = 20$  функцию  $m$ . Подавить ее можно только за счет малого  $h$  ( $\beta \sim h^2$ ).

Естественно, что ситуация резко меняется, если  $A < 0$ . Тогда функция  $q_2^m$ , соответствующая «лишнему» корню  $q_2$ , быстро затухает с ростом  $m$ , и схема (1.6) требует для достижения заданной точности гораздо меньшего шага, чем схема (1.3).

Таким образом, «выгодность» или «невыгодность» схемы зависит от постановки задачи.

Приведем пример еще одной схемы второго порядка точности, имеющей существенно более высокую скорость сходимости:

$$\frac{u_{m+1} - u_m}{h} + A \frac{u_{m+1} + u_m}{2} = 0, \quad m = 0, 1, \dots, M - 1; \quad u_0 = 1 \quad (1.22)$$

или

$$u_m (Ah / 2 - 1) + u_{m+1} (Ah / 2 + 1) = 0$$

Для проверки аппроксимации разложим решение исходной задачи в ряд Тейлора около точки  $x_m$ :

$$u(x_m + h) = u(x_m) + u'(x_m) \cdot h + u''(x_m) \cdot h^2 / 2 + O(h^3),$$

откуда

$$\begin{aligned} \frac{u(x_m + h) - u(x_m)}{h} &= u'(x_m) + u''(x_m) \cdot h / 2 + O(h^2) \\ \frac{u(x_m + h) + u(x_m)}{2} &= u(x_m) + u'(x_m) \cdot h / 2 + O(h^2) \end{aligned}$$

Подставляя эти результаты в разностную схему (1.22) и учитывая, что при любом  $x$  справедливо  $u'(x) + Au(x) = 0$ , получим для ошибки аппроксимации в точке  $x_m$  выражение

$$A u''(x_m)h^2 / 12 + O(h^3),$$

имеющее второй порядок относительно  $h$ .

Решение разностной задачи (1.22) имеет вид  $u_m = q^m$ , где корень характеристического уравнения  $q$  равен  $(1 - Ah / 2) / (1 + Ah / 2)$ . Отсюда

$$q^m = e^{-Ax_m(1+A^2h^2/12+O(h^3))}$$

и

$$\delta(x_m, h) = u_m - e^{-Ax_m} = -e^{-Ax_m} \cdot \frac{x_m A^3}{12} h^2 + O(h^3).$$

Для относительной погрешности решения условие  $|x_m A^3 h^2 / 12| \leq 1$  при тех же значениях  $x_m = 1$ ,  $A = 20$  приводит к требованию  $h \leq (12 / 30)^{1/2} \approx 4 \cdot 10^{-2}$ . Как видно, схема (1.22) обеспечивает заданную точность при существенно более крупном шаге, чем схемы первого порядка (1.3) и второго порядка (1.6) при  $A > 0$ .

## ГЛАВА 2. СХОДИМОСТЬ, АППРОКСИМАЦИЯ И УСТОЙЧИВОСТЬ. НЕКОТОРЫЕ ПРИЕМЫ ИССЛЕДОВАНИЯ РАЗНОСТНЫХ СХЕМ ДЛЯ УРАВНЕНИЙ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ

### 2.1. Понятия соответствия между сеточными функциями и функциями непрерывных аргументов

Решения исходной дифференциальной и аппроксимирующей разностной задач принадлежат различным функциональным пространствам - пространству функций непрерывного аргумента и пространству функций, заданных в дискретных точках.

Поскольку конечной целью является приближение решения дифференциальной задачи сеточной функцией, то возникает вопрос о способах их взаимного сопоставления.

Предположим, что исходная задача в общем случае многомерна. Аргумент  $x$  будем трактовать как вектор с компонентами  $x = \{x_1, x_2, \dots, x_p\}$  в  $p$ -мерной области  $D$ . Введем в  $D$  сетку  $\omega^h$  (для простоты равномерную по каждому  $x_i$ ). Шаг сетки является также  $p$ -мерным вектором  $h = \{h_1, h_2, \dots, h_p\}$ .

Пусть решение конечноразностной задачи дало функцию, определенную в узлах сетки  $\omega^h$ , то есть  $p$ -мерную таблицу; обозначим ее  $u^{(h)}$ . Таким образом, необходимо сопоставить между собой функции  $u^{(h)}$  и  $u(x)$ , принадлежащие, как уже отмечалось, разным функциональным пространствам. Надо, однако, учесть, что непосредственному сравнению поддаются лишь функции, определенные в одном и том же пространстве.

Имеются два варианта сопоставления функций  $u^{(h)}$  и  $u(x)$ .

1. Доопределение  $u^{(h)}$  на всю область  $D$  изменения аргумента (путем линейной или какой-либо иной интерполяции).
2. Построение на основе  $u(x)$  некоторой сеточной функции  $[u]_h$ , определенной в тех же узлах, что и  $u^{(h)}$ . В качестве меры приближения  $u^{(h)}$  к  $u(x)$  следует считать меру приближения  $u^{(h)}$  к  $[u]_h$ .

Воспользуемся далее вторым вариантом, что продиктует формулировки понятий сходимости, аппроксимации и устойчивости.

Наиболее простым способом построения  $[u]_h$ , применяемым обычно в случае непрерывных функций  $u(x)$ , является определение  $[u]_h$  как совокупности значений  $u(x)$  в узлах сетки («проектирование  $u(x)$  на сетку»). Именно такой подход применялся в 1-й главе.

Другой возможный способ состоит в вычислении интегрального среднего от  $u(x)$  в некоторой окрестности узловой точки с приписыва-

нием результата этому узлу. Так, для функции одного аргумента  $x$  ( $0 \leq x \leq 1$ ) определим  $[u]_h$  в узлах  $x = h/2, 3h/2, \dots, 1 - h/2$  виде интеграла

$$[u]_h = \frac{1}{h} \int_{x-h/2}^{x+h/2} u(\xi) d\xi$$

Такой способ применяется, когда  $u(x)$  имеет разрывы, но интеграл от нее существует. В газовой динамике часто встречаются функции, у которых имеется  $\int_0^1 u^2(x) dx$ . Тогда существуют, как известно, и  $\int_0^1 |u(x)| dx$ , и  $\int_0^1 u(x) dx$ .

После того, как тем или иным способом определена сеточная функция  $[u]_h$ , будем считать, что именно она и является искомым точным решением. Этой таблице (ее можно назвать «эталонной») должна приближенно соответствовать таблица  $u^{(h)}$  - решение разностной задачи.

Многие результаты, относящиеся к сравнению между собой функций непрерывных аргументов и сеточных функций, удобно выражать при помощи определений и понятий функционального анализа.

В обычном математическом анализе рассматриваются арифметические пространства, их элементом является число. В функциональном анализе эти понятия обобщаются: элементами пространства могут быть объекты более сложной структуры - функции, векторы, матрицы и т.п. В зависимости от вида и свойств элементов пространства последнее обладает теми или иными свойствами.

Ограничимся здесь только линейными нормированными пространствами.

Для линейных пространств  $U$  определены применительно к их объектам понятия сложения и умножения на число (действительное или комплексное), подчиняющиеся обычным правилам. Кроме того, каждому элементу пространства должен принадлежать нулевой элемент  $\theta$ , а каждому элементу  $u$  должен соответствовать противоположный  $-u$  со свойством  $u + (-u) = \theta$ .

Подчиненность этим определениям пространств, обычно встречающихся при решении дифференциальных уравнений, очевидна.

Пространство  $U$  называется нормированным, если каждому элементу  $u$  этого пространства можно поставить в соответствие неотрицательное число (норму)  $\|u\|_U$ , которая характеризует меру отклонения данного элемента от нулевого  $\theta$  (иногда значок  $U$  в обозначении нормы опускают).



Именно понятие нормы является наиболее существенным для дальнейшего.

Отметим следующие свойства норм:

1. равенство нормы нулю только для нулевого элемента  $\|\theta\| = 0$ ,
2.  $\|\lambda u\| = |\lambda| \cdot \|u\|$  ( $\lambda$  - число),
3.  $\|u + v\| \leq \|u\| + \|v\|$  («неравенство треугольника»).

Нормы можно вводить по-разному, учитывая специфику объектов пространства.

Упорядоченная последовательность элементов  $\{u_i\}$   $u_1, u_2, \dots$  называется фундаментальной, если  $\|u_i - u_j\| \rightarrow 0$  при  $i, j \rightarrow \infty$  независимо друг от друга. Если любая фундаментальная последовательность  $\{u_i\}$  сходится к некоторому предельному элементу  $u$ , т.е.  $\|u_i - u\| \rightarrow 0$  при  $i \rightarrow \infty$ , то пространство  $U$  называется полным.

Полные линейные нормированные пространства именуются банаховыми. В дальнейшем будут рассматриваться два вида банаховых пространств:

1. Пространство непрерывных функций ( $C$ -пространство), в котором задается так называемая  $C$ -норма

$$\|u(x)\| = \max_{x \in D} |u(x)| \quad (2.1)$$

(если максимум в  $D$  не достигается, но имеется точная верхняя грань, то  $\|u(x)\| = \sup_{x \in D} |u(x)|$ ).

2. Пространство квадратично-интегрируемых на отрезке  $x \in [a, b]$  функций ( $L_2$ -пространство), где принята  $L_2$ -норма:

$$\|u(x)\| = \left( \int_a^b u^2(x) dx \right)^{1/2} \quad (2.2)$$

Сеточные функции  $u^{(h)}$ ,  $[u]_h$ , трактуемые как векторы с компонентами, равными значениям функций в узлах сетки, определены в пространстве сеточных функций  $U_h$ . Поскольку ожидается сходимость сеточных функций к  $u(x)$  при  $h \rightarrow 0$ , то естественно потребовать, чтобы нормы в пространстве  $U_h$  переходили при  $h \rightarrow 0$  в соответствующие нормы в пространстве  $U$ . Указанное условие согласования норм выражается равенством

$$\lim_{h \rightarrow 0} \|u^{(h)}\|_{U_h} = \|u(x)\|_U \quad (2.3)$$

Так, пусть в  $C$ -пространстве имеется функция  $u(x)$ ,  $x \in [a, b]$  с нормой (2.1), а сеточная функция в  $U_h$  определена как совокупность зна-

чений  $u(x)$  в узлах сетки. Тогда в  $U_h$  вводится норма  $\|u^{(h)}\|_{U_h} = \max_m |u_m^{(h)}|$  (максимальная по модулю компонента вектора  $u^{(h)}$ ); эта норма в пределе  $h \rightarrow 0$  переходит в  $C$ -норму в  $U$ .

Если для функции непрерывного аргумента взята  $L_2$ -норма (2.2), то ее аналогом в пространстве  $U_h$  является  $\|u^{(h)}\|_{U_h} = \left( h \sum_m (u_m^{(h)})^2 \right)^{1/2}$ .

Рассмотрим теперь понятие оператора в функциональном пространстве.

Пусть имеются два пространства  $U$  и  $V$  и подпространство  $Q \subseteq U$ . Если каждому элементу  $u \in Q$  ставится в соответствие по определенному правилу элемент  $v = Au$ ,  $v \in V$ , то считается, что в  $Q$  задан оператор  $A$  (например, оператор дифференцирования).

Подпространство  $Q$  называют областью определения, а множество  $R \subseteq V$  элементов  $v$  - областью значений оператора  $A$ . В дальнейшем будем считать, что  $Q$  и  $R$  - подпространства одного и того же пространства  $U$  (оператор, действующий на непрерывную функцию, дает также непрерывную функцию).

Ограничимся линейными однородными операторами, то есть обладающими свойством  $A(\lambda u_1 + \mu u_2) = \lambda A(u_1) + \mu A(u_2)$ .

Оператор называют ограниченным, если для любых  $u \in U$  имеет место условие  $\|Au\|_V \leq M \|u\|_U$ ,  $M = \text{const} > 0$ . Наименьшая постоянная  $M$ , удовлетворяющая этому условию, называется нормой оператора  $A$  и обозначается  $\|A\|_{U \rightarrow V}$  (из  $U$  в  $V$ ).

## 2.2. Строгие определения понятий сходимости, аппроксимации и устойчивости. Теорема Лакса о сходимости

Пусть исходная дифференциальная задача формулируется в виде

$$Lu = f \quad (2.4)$$

где  $L$  - заданный дифференциальный оператор,  $f$  - заданная правая часть. Решение  $u(x)$  ищется в области изменения координат  $D$  и принадлежит пространству  $U$ , норма решения обозначена  $\|u\|_U$ .

В области  $D$  выбирается сетка  $\omega^h$  и конструируется по одному из правил сеточная функция  $[u]_h$  с нормой  $\|[u]_h\|_{U_h}$ , удовлетворяющей условию согласования норм  $\lim_{h \rightarrow 0} \|[u]_h\|_{U_h} = \|u(x)\|_U$ .

Сеточную функцию  $[u]_h$  будем считать искомой таблицей, которую приближает решение  $u^{(h)} \in U_h$  разностной задачи

$$L_h u^{(h)} = f^{(h)} \quad (2.5)$$

Здесь  $L_h$  - оператор, посредством которого каждому элементу  $u^{(h)} \in U_h$  ставится в соответствие некоторый элемент  $f^{(h)} \in F_h$  (также сеточная функция);  $F_h$  называют пространством правых частей задачи. Значок  $h$  в обозначениях  $L_h$ ,  $F_h$ ,  $u^{(h)}$  указывает на сеточный характер задачи и подчеркивает, что величина шага сетки является параметром разностной схемы и решения.

Сформулируем строгое определение сходимости.

Решение разностной задачи сходится к решению исходной дифференциальной задачи, если

$$\lim_{h \rightarrow 0} \|[u]_h - u^{(h)}\|_{U_h} = 0.$$

Если при этом справедлива оценка

$$\|[u]_h - u^{(h)}\|_{U_h} \leq ch^k$$

(постоянные  $c$  и  $k$  не зависят от  $h$ ), то имеет место сходимость порядка  $h^k$  (иными словами, разностная схема имеет  $k$ -й порядок точности).

Непосредственную проверку сходимости (подобную проведенной в гл. 1 для простейших уравнений) для практически интересных задач, как правило, выполнить не удастся. Дело не только в том, что не известно само решение  $u(x)$  и, следовательно, функция  $[u]_h$ , но и в том, что во многих случаях сеточную функцию  $u^{(h)}$  можно найти лишь в численной форме.

Поэтому исследование сходимости разбивается на два этапа: проверку аппроксимации и доказательство устойчивости.

Предположим, что в разностную схему (2.5) вместо  $u^{(h)}$  подставлена сеточная функция  $[u]_h$ . В этом случае уравнения (2.5), вообще говоря, не выполняются точно. Результатом действия оператора  $L_h$  на  $[u]_h$  будет не  $f^{(h)}$ , а некоторая сеточная функция  $f^{(h)} + \delta f^{(h)}$ , где  $\delta f^{(h)}$  - погрешность аппроксимации (аппроксимационная невязка):

$$L_h[u]_h = f_h + \delta f^{(h)}.$$

Определение аппроксимации, если употребить понятие невязки, таково:

Разностная схема  $L_h u^{(h)} = f^{(h)}$  аппроксимирует задачу  $Lu = f$  на решении  $u$ , если  $\lim_{h \rightarrow 0} \|\delta f^{(h)}\|_{F_h} = 0$ . Если при этом справедлива оценка  $\|\delta f^{(h)}\|_{F_h} \leq c_1 h^{k_1}$  (постоянные  $c_1 > 0$  и  $k_1 > 0$  не зависят от  $h$ ), то имеет место аппроксимация порядка  $h^{k_1}$ .

Теперь дадим определение устойчивости разностной схемы (приведем два определения).

1-е определение. Разностную схему  $L_h u^{(h)} = f^{(h)}$  называют устойчивой, если существуют такие два числа  $h_0 > 0$  и  $\delta > 0$ , что при любом  $h < h_0$  и при любом  $\varepsilon^{(h)} \in F_h$ , удовлетворяющем неравенству  $\|\varepsilon^{(h)}\|_{F_h} < \delta$ , разностная схема  $L_h z^{(h)} = f^{(h)} + \varepsilon^{(h)}$  имеет единственное решение  $z^{(h)}$  и при этом справедлива оценка  $\|z^{(h)} - u^{(h)}\|_{U_h} \leq c_2 \|\varepsilon^{(h)}\|_{F_h}$ , где постоянная  $c_2 > 0$  не зависит от  $h$ .

Смысл этого определения состоит в том, что любое малое ( $\|\varepsilon^{(h)}\|_{F_h} < \delta$ ) возмущение входных данных (правой части) разностной задачи вызывает равномерное относительно  $h$  малое (в смысле нормы  $\|z^{(h)} - u^{(h)}\|$ ) возмущение решения.

2-е определение. Разностная схема  $L_h u^{(h)} = f^{(h)}$  устойчива, если существует такое  $h_0 > 0$ , что при любом  $h < h_0$  и при любом  $f^{(h)} \in F_h$  она

имеет единственное решение  $u^{(h)} \in U_h$ , причем  $\|u^{(h)}\|_{U_h} \leq c_3 \|f^{(h)}\|_{F_h}$ , где постоянная  $c_3 > 0$  не зависит от  $h$ .

Это определение выражает то свойство схемы, что решение должно иметь тот же порядок, что и правая часть.

Основная теорема теории разностных схем (теорема Лакса) утверждает, что из аппроксимации и устойчивости следует сходимость. Эта теорема имеет следующую формулировку:

*Пусть разностная схема  $L_h u^{(h)} = f^{(h)}$  аппроксимирует задачу  $Lu = f$  на решении  $u$  с порядком  $h^{k_1}$  и устойчива. Тогда решение разностной задачи  $u^{(h)}$  при  $h \rightarrow 0$  сходится к  $[u]_h$ , причем имеет место оценка  $\|[u]_h - u^{(h)}\|_{U_h} \leq c_1 c_2 h^k$ , где  $c_1$  и  $c_2$  входят соответственно в определение аппроксимации и устойчивости.*

Доказательство. Поскольку схема устойчива, то

$$\|z^{(h)} - u^{(h)}\|_{U_h} \leq c_2 \|\varepsilon^{(h)}\|_{F_h} \quad (2.6)$$

Положим  $\varepsilon^{(h)} = \delta f^{(h)}$ ; тогда в силу единственности решения разностной задачи  $z^{(h)} = [u]_h$ , и равенство (2.6) примет вид  $\|[u]_h - u^{(h)}\|_{U_h} \leq c_2 \|\delta f^{(h)}\|_{F_h}$ . Но из условия аппроксимации следует оценка  $\|\delta f^{(h)}\|_{F_h} \leq c_1 h^{k_1}$ , что и доказывает теорему.

Таким образом, если схема устойчива, то порядок сходимости совпадает с порядком аппроксимации.

### 2.3. Пример исследования разностной схемы для уравнения в частных производных. Принцип максимума

Рассмотрим решение гиперболического уравнения

$$\frac{\partial u}{\partial t} + a \frac{\partial u}{\partial x} = \varphi(x, t), \quad a = \text{const} > 0 \quad (2.7)$$

в области  $D \{0 < t \leq T, -\infty < x < \infty\}$  с начальным условием  $u(x, 0) = \psi(x)$  (задача Коши). Функции  $\varphi(x, t)$  и  $\psi(x)$  считаются ограниченными. Коэффициент  $a$  является аналогом скорости в конвективном члене, а само уравнение (2.7) - простейшей моделью уравнения течения невязкого газа.

В операторном виде задача (2.7) имеет вид

$$Lu = f$$

$$Lu = \begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + a \frac{\partial u}{\partial x}, & 0 < t < T, \quad -\infty < x < \infty \\ u(x, 0), & -\infty < x < \infty \end{cases}$$

$$f = \begin{cases} \varphi(x, t), & 0 < t < T, \quad -\infty < x < \infty \\ \psi(x), & -\infty < x < \infty \end{cases}$$

(в оператор включены и дифференциальные уравнения, и граничные условия).

В области  $D$  введем равномерную по  $x$  и  $t$  сетку  $\omega^h: x = x_m + mh, m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, t = t_n = n\tau, n = 0, 1, \dots, N; N$  - целая часть отношения  $T / \tau$ . Будем считать, что  $\tau / h = \text{const}$  (при измельчении шаги по пространству и времени убывают пропорционально друг другу). Таким образом, параметрами сетки являются величины  $h$  и  $r$ .

Сеточную функцию  $[u]_h$  определим по первому способу:  $[u]_h = u(mh, n\tau) = u(x_m, t_n)$ . Аппроксимируем производные  $\partial u / \partial t = u_t$  и  $\partial u / \partial x = u_x$  в узлах сетки разделенными разностями

$$u_t(x_m, t_n) \sim \frac{u^{(h)}(x_m, t_n + \tau) - u^{(h)}(x_m, t_n)}{\tau} \quad (2.8)$$

(вперед по времени),

$$u_x(x_m, t_n) \sim \frac{u^{(h)}(x_m, t_n) - u^{(h)}(x_m - h, t_n)}{h} \quad (2.9)$$

(назад по координате  $x$ ). Обозначим для краткости  $u^{(h)}(x_m, t_n) = u_m^n$  (значок  $h$  опускаем). Тогда разностная схема в операторной форме примет вид  $L_h u^{(h)} = f^{(h)}$ , где

$$L_h u^{(h)} = \begin{cases} \frac{u_m^{n+1} - u_m^n}{\tau} + a \frac{u_m^n - u_{m-1}^n}{h}, & m = 0, \pm 1, \dots; n = 0, 1, \dots, N-1 \\ u_m^0, & m = 0, \pm 1, \dots \end{cases} \quad (2.10)$$

$$f^{(h)} = \begin{cases} \varphi(x_m, t_n) = \varphi_m^n, & m = 0, \pm 1, \dots; n = 0, 1, \dots, N-1 \\ \psi(x_m) = \psi_m, & m = 0, \pm 1, \dots \end{cases}$$

В данном примере  $f^{(h)}$  представляет собой совокупность двух сеточных функций, одна из которых определена на двумерной сетке, а другая - на одномерной.

Перепишем исходное разностное уравнение, умножив его на  $\tau$ :

$$u_m^{n+1} = (1 - ar) u_m^n + ar u_{m-1}^n + \tau \varphi_m^n \quad (2.11)$$

откуда следует, что если сеточная функция известна на временном слое  $n$  ( $t = n\tau$ ), то она может быть непосредственно вычислена и на слое  $n+1$  ( $t = (n+1)\tau$ ). Поскольку известно начальное условие  $u_m^0$ , то можно с помощью соотношений (2.11) послойно найти  $u_m^1, u_m^2$  и т.д. во всей области.

Важной особенностью схемы (2.11) является то, что решение в некоторой точке  $x_m$  на временном слое  $t_n$  определяется (помимо  $\varphi_m^n$ ) только значениями  $u^{(h)}$  в точках предыдущего слоя и не зависят от решения в соседних точках рассматриваемого слоя  $t_n$ ; такие схемы называют явными.

Выясним основные свойства приведенной схемы.

1. Аппроксимация. Исходя из вида (2.10) правой части  $f^{(h)}$ , определим пространство  $F_h$  как пространство пар ограниченных сеточных функций (одна - двумерная, другая - одномерная). Обозначим  $g^{(h)}$  некоторый элемент этого пространства:

$$g^{(h)} = \begin{pmatrix} \varphi_m^n \\ \psi_m \end{pmatrix}$$

Определим норму  $g^{(h)}$  в пространстве  $F_h$  равенством

$$\|g^{(h)}\|_{F_h} = \max_{m,n} |\varphi_m^n| + \max_m |\psi_m|$$

(если максимум не достигается, то имеется в виду точная верхняя грань).

Для оценки аппроксимации разложим решение исходной задачи в ряд Тейлора с записью остаточных членов в форме Маклорена

$$u(x_m, t_n + \tau) = u(x_m, t_n) + u_t(x_m, t_n) \tau + u_{tt}(x_m, t_n + \eta) \tau^2 / 2, \quad 0 < \eta < \tau;$$

$$u(x_m - h, t_n) = u(x_m, t_n) - u_x(x_m, t_n) h + u_{xx}(x_m - \xi, t_n) h^2 / 2, \quad 0 < \xi < h.$$

Выражая необходимые разностные комбинации, получим

$$\frac{u(x_m, t_n + \tau) - u(x_m, t_n)}{\tau} = u_t(x_m, t_n) + u_{tt}(x_m, t_n + \eta) \tau / 2,$$

$$\frac{u(x_m, t_n) - u(x_m - h, t_n)}{h} = u_x(x_m, t_n) - u_{xx}(x_m - \xi, t_n) h / 2$$

Составим  $L_h[u]_h$ , учитывая, что  $[u]_h = u(x_m, t_n)$ :

$$L_h[u]_h = \begin{cases} \frac{u(x_m, t_{n+1}) - u(x_m, t_n)}{\tau} + a \frac{u(x_m, t_n) - u(x_{m-1}, t_n)}{h} \equiv \\ \equiv (u_t + au_x)_{x_m, t_n} + \frac{\tau}{2} u_{tt}(x_m, t_n + \eta) - \frac{ah}{2} u_{xx}(x_m - \xi, t_n) \\ u(x_m, 0) + 0 \end{cases}$$

Замечая, что  $(u_t + au_x)_{x_m, t_n} = \varphi(x_m, t_n)$ , а  $u(x_m, 0) = \psi(x_m)$ , получим для невязки  $\delta f^{(h)}$  следующее выражение:

$$\delta f^{(h)} = \begin{cases} \frac{\tau}{2} u_{tt}(x_m, t_n + \eta) - \frac{ah}{2} u_{xx}(x_m - \xi, t_n) \equiv \\ \equiv h \left( \frac{\tau}{2} u_{tt}(x_m, t_n + \eta) - \frac{a}{2} u_{xx}(x_m - \xi, t_n) \right) \\ 0 \end{cases}$$

Так как вторые производные ограничены, то найдется такое значение  $c > 0$  (не зависящее от  $h$ ), что  $\|\delta f^{(h)}\|_{F_h} \leq c_1 h$ .

Как видно из приведенного примера, исследование аппроксимации хотя и предполагает подстановку функции  $u$  в разностную схему, но не требует решения исходной задачи и базируется на формальном разложении  $u$  в ряд Тейлора в узле сетки. Этот способ достаточно универсален и может применяться для существенно более сложных схем. Исследование (в случае равномерных сеток) носит локальный характер и не составляет большого труда.

2. Устойчивость. Воспользуемся вторым определением устойчивости:  $\|u^{(h)}\|_{U_h} \leq c_3 \|f^{(h)}\|_{F_h}$  при всех  $h < h_0$ .

Определим норму в  $U_h$  условием  $\|u^{(h)}\|_{U_h} = \max_{m,n} |u_m^n|$  (аналог  $C$ -нормы). Докажем устойчивость схемы при условии



$$ra = \frac{\tau a}{h} \leq 1 \quad (r > 0, a > 0) \quad (2.12)$$

Так как  $1 - ar \geq 0$ , то справедлива оценка

$$|(1 - ar) u_m^n + ar u_{m-1}^n| \leq \max(|u_m^n|, |u_{m-1}^n|) \leq \max_m |u_m^n|$$

Тогда из соотношения (2.11) и последнего неравенства следует

$$|u_m^{n+1}| \leq \max_m |u_m^n| + \tau \max_m |\varphi_m^n| \leq \max_m |u_m^n| + \tau \max_{m,n} |\varphi_m^n|$$

а так как правая часть от  $m$  не зависит, то

$$\max_{m,n} |u_m^{n+1}| \leq \max_m |u_m^n| + \tau \max_{m,n} |\varphi_m^n| \quad (2.13)$$

Это неравенство называют принципом максимума. Если  $\varphi_m^n \equiv 0$ , то оно означает, что при переходе к следующему временному слою  $\max_m |u_m^n|$  не возрастает.

Записывая неравенство (2.13) для временных слоев  $n, n-1, \dots, 1$  и складывая их, получим после приведения подобных членов

$$\max_m |u_m^{n+1}| \leq \max_m |u_m^0| + (n+1)\tau \max_{m,n} |\varphi_m^n|$$

Поскольку при любом  $n$  имеем  $(n+1)\tau \leq T$ , то

$$\max_m |u_m^{n+1}| \leq \max_m |\psi_m| + T \max_{m,n} |\varphi_m^n| \leq (1+T) \|f^{(h)}\|_{F_h}$$

Так как это неравенство верно при всех  $n$  (правая часть от  $n$  не зависит), то верно и соотношение

$$\max_m |u_m^{n+1}| \leq (1+T) \|f^{(h)}\|_{F_h}$$

или

$$\|u^{(h)}\|_{U_h} \leq c_3 \|f^{(h)}\|_{F_h}$$

Учитывая, что существование и единственность решения разностной задачи (2.11) заранее очевидны, последнее неравенство и есть признак устойчивости схемы.

Следовательно, решение разностной задачи при  $h \rightarrow 0$  сходится к точному решению, причем сходимость имеет первый порядок относительно  $h$ .

Выясним теперь смысл ограничения  $ar \leq 1$ , благодаря которому удалось доказать принцип максимума и устойчивость.

## 2.4. Условие Куранта, Фридрихса и Леви, необходимое для устойчивости разностной схемы

Дадим геометрическую интерпретацию уравнения (2.11).

Рассмотрим узел  $x = 0$ ,  $t = n\tau$  и выясним, каким точкам принадлежат значения сеточной функции, формирующие величину  $u_0^n$  при «послойном» счете по формуле (2.11). Из уравнения (2.11) следует, что  $u_0^n$  определяется значениями  $u_0^{n-1}$ ,  $u_{-1}^{n-1}$  и только ими, эти последние, в свою очередь, выра-

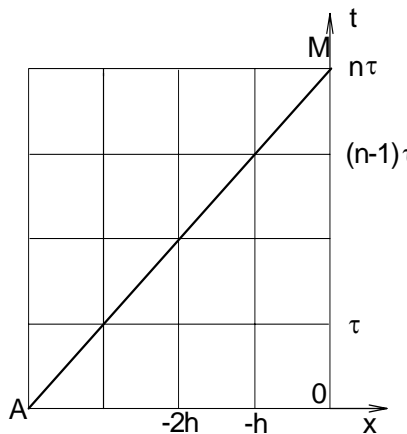


Рис.1

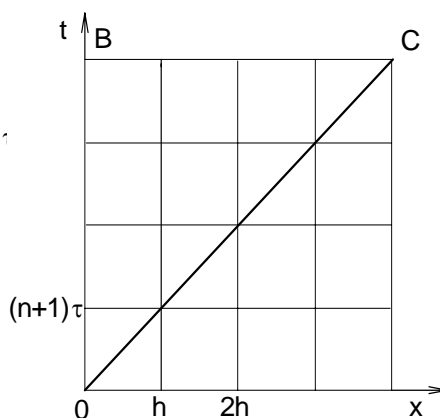


Рис.2

жаются через  $u_0^{n-2}$ ,  $u_{-1}^{n-2}$ ,  $u_{-2}^{n-2}$  и т.д.

Рассматривая последовательно нижние слои вплоть до слоя  $n = 0$ , обнаружим, что использованные узлы находятся в треугольнике  $AOM$  области

зависимости решения разностной задачи в точке  $(0, n\tau)$ . Уравнение гипотенузы  $AM$  этого треугольника имеет вид (рис. 1)  $t = n\tau + tx/h$ . Если теперь изменить значение  $u_0^n$  в точке  $x = 0$ ,  $t = n\tau$  и проследить за тем, на каких узлах скажется это изменение, то можно прийти к понятию области влияния. Из соотношения (2.11) ясно, что область влияния захватывает «верхние» временные слои в секторе  $OBC$  (рис. 2). Луч  $OC$  имеет угловой коэффициент  $\tau/h$ . За один шаг по времени  $\tau$  область возмущений расширяется по координате  $x$  на  $h$ . Это обстоятельство имеют в виду, говоря, что скорость распространения численных возмущений (или возмущений по сетке) равна  $h/\tau$ .

Вернемся теперь к исходной дифференциальной задаче

$$u_t + au_x = \varphi(x, t), \quad u(x, 0) = \psi(x), \quad a = \text{const} > 0$$

Выражение  $u_t + au_x = du/dt$  представляет собой индивидуальную (лагранжеву) производную по времени для движения частицы со скоростью  $a$  в направлении  $x$  в нестационарном неоднородном поле функции  $u$ ;  $x = x(t)$  - переменная координата частицы. В плоскости  $x, t$  движению

частицы соответствует прямая с угловым коэффициентом  $\operatorname{tg} \alpha = 1/a$  (рис. 3, прямая  $MB$ ).

Решение исходной задачи при условиях  $x = x_0$  при  $t = 0$  (выделение определенной частицы) и  $u|_{t=0} = u(x_0, 0) = \psi(x_0)$  очевидно:

$$\left. \begin{aligned} x &= x_0 + at \\ u &= \psi(x_0) + \int_0^t \varphi(x_0 + at', t') dt' \end{aligned} \right\} \quad (2.14)$$

Отсюда следует, что значение  $u$  в любой точке  $x, t$  в области решения однозначно определяется значениями  $\varphi$  на луче-характеристике

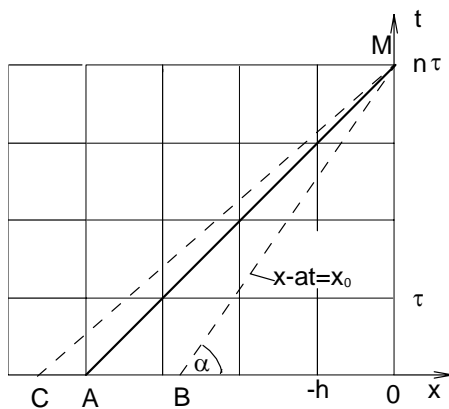


Рис.3

$x - at = \text{const}$ , проходящей через рассматриваемую точку, и начальным значением  $u = \psi(x_0)$  в точке  $x_0$  пересечения характеристики с осью абсцисс.

Рассмотрим две возможности расположения характеристики с угловым коэффициентом  $1/a$ , проходящей через выделенную точку  $M(x = 0, t = n\tau)$ , по отношению к области зависимости решения разностной задачи  $MOA$  для той же точки.

1. Характеристика  $MC$  проходит вне области зависимости. Если внести изменения

в  $\varphi(x, t)$  на этой характеристике или в значение  $\psi(x_0)$ , то это, согласно (2.14), должно влиять на точное решение в точке  $0, n\tau$ , однако не может изменить значение сеточной функции в той же точке. Ясно, что при этом не приходится рассчитывать на совпадение разностного и точного решений.

2. Если характеристика  $MB$  находится внутри области зависимости или совпадает с ее границей, то изменение параметров на характеристике скажется на  $u(0, n\tau)$ . Этому расположению как раз и отвечает условие  $\tau/h \leq 1/a$  или  $ra \leq 1$ .

Условие  $a\tau \leq h$  поддается еще одной интерпретации при  $\varphi \equiv 0$ . Уравнение (2.11) при этом принимает вид

$$u_m^{n+1} = \left(1 - \frac{a\tau}{h}\right) u_m^n + \frac{a\tau}{h} u_{m-1}^n \quad (2.15)$$

Если провести из точки  $x_m, t_{n+1}$  характеристику, то она отсечет отрезок  $a\tau$  от нижней стороны ячейки длины  $h$ . Таким образом, формула (2.5) дает

линейно интерполированное по точкам  $u_m^n$  и  $u_{m-1}^n$  значение, которое затем приписывается (сносится по характеристике) точке следующего слоя.

Случаю  $a\tau > h$  соответствовала бы экстраполяция, что, естественно, дало бы меньшую точность.

Если  $a\tau = h$  (характеристика совпадает с границей области зависимости), то выполняется соотношение  $u_m^{n+1} = u_m^n$ , означающее сдвиг значения  $u$  из точки  $x_{m-1}, t_n$  в точку  $x_m, t_{n+1}$ , затем в точку  $x_{m+1}, t_{n+2}$  и т.д. В этом случае реализуется точное решение.

Однако счет при  $a\tau = h$  («на границе устойчивости») обычно не проводят и, как правило, имеют  $a\tau < h$ . При этом используются и другие точки области зависимости (помимо принадлежащих характеристике), что уже не соответствует точному решению и приводит к появлению так называемой схемной (иначе - сеточной, аппроксимационной) вязкости.

Приведенные соображения относятся к 1928 г. и принадлежат Куранту, Фридрихсу и Леви. Под условием Куранта, Фридрихса и Леви (условием КФЛ) понимают утверждение: **для устойчивости явной разностной схемы необходимо, чтобы область зависимости решения дифференциальной задачи находилась бы внутри области зависимости решения разностной задачи.**

Это утверждение должно быть верно и при измельчении шагов сетки, отсюда ясно происхождение условия  $r = \tau / h = \text{const}$  при  $h \rightarrow 0$ .

Условие КФЛ  $a\tau \leq h$  может быть сформулировано и в следующей форме: **скорость  $a$  распространения физических возмущений не должна превышать скорость  $h / \tau$  распространения численных возмущений.**

Приведенная геометрическая (физическая) интерпретация не может заменить доказательство устойчивости. Условие КФЛ в общем случае является лишь необходимым и может применяться только для установления непригодности той или иной схемы. В то же время условие КФЛ достаточно универсально и допускает обобщение на случай  $a = a(x, t)$  и даже на случай квазилинейных уравнений с коэффициентом  $a = a(x, t, u)$ .

В качестве примера обобщим условие КФЛ на систему нелинейных (но квазилинейных) уравнений газовой динамики.

Система уравнений неразрывности, движения и баланса энергии для невязкого нетеплопроводящего газа имеет вид

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} \rho \vec{v} &= 0 \\ \frac{d\vec{v}}{dt} &= -\frac{1}{\rho} \operatorname{grad} p = 0 \\ \frac{d}{dt} \frac{p}{\rho^k} &= 0 \end{aligned} \right\} (2.16)$$

После введения энтропии  $s$  ( $ds = c_v d \ln(p / \rho^k)$ ) и с учетом одномерности движения система переписывается в виде

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho \frac{\partial u}{\partial x} + u \frac{\partial \rho}{\partial x} &= 0 \\ \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} &= 0 \\ \frac{\partial s}{\partial t} + u \frac{\partial s}{\partial x} &= 0 \end{aligned} \right\} (2.17)$$

К этим уравнениям присоединяется уравнение состояния  $p / \rho = RT$  или  $p = p(\rho, s)$ . Исключим из системы (2.17)  $\partial p / \partial x$ :

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \left. \frac{\partial p}{\partial \rho} \right|_s \frac{\partial \rho}{\partial x} + \left. \frac{\partial p}{\partial s} \right|_\rho \frac{\partial s}{\partial x}$$

и запишем ее в матричной форме

$$\frac{\partial U}{\partial t} + A \frac{\partial U}{\partial x} = 0 \quad (2.18)$$

где вектор-столбец  $U = (\rho, u, s)^T$  определяет движение и состояние газа, а матрица коэффициентов  $A$  имеет вид

$$A = \begin{bmatrix} u & \rho & 0 \\ \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial \rho} & u & \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial s} \\ 0 & 0 & u \end{bmatrix} \quad (2.19)$$

Как известно, характеристические направления системы гиперболического типа в плоскости  $x, t$  представляют собой значения  $dx / dt$ , являющиеся корнями  $\lambda$  уравнения  $\det(A - \lambda E) = 0$  ( $E$  - единичная матрица,  $\det$  - символ определителя), то есть собственные (характеристические) значения матрицы  $A$ .

Физический смысл  $(dx/dt)_{1,2,3}$  - это скорости распространения возмущений в системе. Собственные значения матрицы (2.19) равны корням уравнения

$$(u - \lambda) \cdot \left( (u - \lambda)^2 - \frac{\partial p}{\partial \rho} \Big|_s \right) = 0$$

то есть

$$\lambda_1 = u, \quad \lambda_{2,3} = u \pm \sqrt{\frac{\partial p}{\partial \rho} \Big|_s} = u \pm c$$

где  $c = \sqrt{(\partial p / \partial \rho)_{s=const}}$  - скорость звука.

Итак, физические возмущения в системе распространяются со скоростями  $u$ ,  $u \pm c$ , и необходимое условие устойчивости решения разностной задачи в этом случае принимает вид

$$\frac{h}{\tau} \geq |u| + c \quad \text{или} \quad \frac{\tau}{h} \leq \frac{1}{|u| + c}$$

где  $|u| + c$  - наибольшая скорость распространения возмущений.

Вопрос о матричной форме (2.18) записи уравнений может быть несколько развит.

Определим собственные векторы  $l^{(i)} = (l_1^{(i)}, l_2^{(i)}, l_3^{(i)})$  ( $i = 1, 2, 3$ ) матрицы (2.19) условиями  $l^{(i)} A = \lambda_i l^{(i)}$ . Три собственных вектора  $l^{(i)}$  образуют базисную систему, т.е.

$$\det \begin{bmatrix} l_1^{(1)} & l_2^{(1)} & l_3^{(1)} \\ l_1^{(2)} & l_2^{(2)} & l_3^{(2)} \\ l_1^{(3)} & l_2^{(3)} & l_3^{(3)} \end{bmatrix} = 0$$

Умножая уравнение (2.18) на  $l^{(i)}$  ( $i = 1, 2, 3$ ), получим с учетом свойства сочетательности

$$l^{(i)} \left( \frac{\partial U}{\partial t} + A \frac{\partial U}{\partial x} \right) = l^{(i)} \left( \frac{\partial U}{\partial t} + \lambda_i \frac{\partial U}{\partial x} \right) = 0$$

или  $l^{(i)} \cdot dU / dt_i = 0$ , где  $dU / dt_i$  - индивидуальная производная от  $U$  для движения со скоростью  $\lambda_i = dx / dt_i$  вдоль оси  $x$  (в плоскости  $x, t$  - производная вдоль  $i$ -й характеристики).

Запись значительно упрощается, если  $l^{(i)}$  не зависят от  $U$ , т.е.  $l^{(i)} = l^{(i)}(x, t)$ . Тогда можно образовать вектор-столбец с компонентами  $F_i = l^{(i)} U$  и принять его вместо  $U$  за искомым.

Из условия  $l^{(i)} \cdot dU / dt_i = 0$  вытекает, что

$$\frac{d}{dt_i}(l^{(i)}U) = U \frac{dl^{(i)}}{dt_i}$$

или

$$\frac{dU_i}{dt_i} = \sum_{k=1}^3 U_k \left( \frac{\partial l_k^{(i)}}{\partial t} + \lambda_i \frac{\partial l_k^{(i)}}{\partial x} \right) \quad (2.20)$$

т.е. по каждому характеристическому направлению дифференцируется только одна функция. Уравнение (2.20) представляет собой запись исходной системы в инвариантах.

В качестве простого примера записи уравнения газовой динамики в инвариантах рассмотрим известную задачу о полностью изэнтропическом ( $s = \text{const}$ ) течении.

Если ввести новую функцию давления  $\tilde{P}$ , определив ее дифференциал равенством  $d\tilde{P} = dp / \rho c = c dp / \rho$ , то одномерный нестационарный поток будет описываться уравнениями

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + c \frac{\partial \tilde{P}}{\partial x} &= 0 \\ \frac{\partial \tilde{P}}{\partial t} + u \frac{\partial \tilde{P}}{\partial x} + c \frac{\partial u}{\partial x} &= 0 \end{aligned}$$

Комбинируя эти уравнения друг с другом, получим

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t}(u + \tilde{P}) + (u + c) \frac{\partial}{\partial x}(u + \tilde{P}) &= 0 \\ \frac{\partial}{\partial t}(u - \tilde{P}) + (u - c) \frac{\partial}{\partial x}(u - \tilde{P}) &= 0 \end{aligned}$$

Отсюда непосредственно видно, что первый инвариант Римана  $u + \tilde{P}$  сохраняется вдоль первого характеристического направления  $\lambda_1 = u + c$ , а второй инвариант  $u - \tilde{P}$  - вдоль второго характеристического направления  $\lambda_2 = u - c$ .

Условие устойчивости КФЛ по-прежнему имеет вид  $\tau / h \leq 1 / (|u| + c)$ .

Вернемся теперь снова к исходному модельному уравнению (2.7), но положим в нем  $a = \text{const} < 0$ . Очевидно, что ни при каких соотношениях между  $\tau$  и  $h$  в аппроксимирующей разностной схеме (2.11) условие КФЛ не выполняется (характеристика проходит вне треугольника области зависимости решения разностной задачи), а схема неустойчива.



Для получения устойчивой схемы аппроксимируем  $\partial u / \partial x$  разностью вперед по  $x$ :

$$u_x(x_m, t_n) \sim \frac{u^{(h)}(x_m + h, t_n) - u^{(h)}(x_m, t_n)}{h} = \frac{u_{m+1}^n - u_m^n}{h}$$

Соответствующая разностная схема имеет вид:

$$\frac{u_m^{n+1} - u_m^n}{\tau} + a \frac{u_{m+1}^n - u_m^n}{h} = \varphi_m^n$$

или

$$u_m^{n+1} = (1 + ar) u_m^n - ar u_{m+1}^n + \tau \varphi_m^n \quad (2.21)$$

Разложением в ряд Тейлора функции  $u(x, t)$  легко установить, что явная схема с разностью вперед, как и схема (2.11), аппроксимирует исходную задачу с первым порядком точности. Приняв во внимание расположение области зависимости для схемы (2.21), заметим, что условие КФЛ будет выполнено, если  $\tau / h \leq -1 / a$ . При этом схема (2.21) имеет неотрицательные коэффициенты и для нее можно доказать устойчивость на основе принципа максимума.

В общем случае ( $a > 0$  или  $a < 0$ ) условие устойчивости можно сформулировать следующим образом.

*Для получения устойчивой явной схемы необходимо при аппроксимации производной  $\partial u / \partial x$  брать разность назад по  $x$ , если  $a > 0$ , и разность вперед по  $x$ , если  $a < 0$ . В любом случае должно выполняться условие  $\tau |a| / h \leq 1$ .*

Итак, сходимость решений с первым порядком точности для схем (2.11) и (2.22) можно считать установленной. Вместе с тем интересно выяснить, каково поведение решения, полученного с конечными шагами  $\tau$  и  $h$ , при измельчении шагов.

Рассмотрим погрешность разностного решения  $\delta u_m^n = u_m^n - u(x_m, t_n)$ . Воспользуемся тем, что решение  $u(x, t)$  исходной дифференциальной задачи, в силу аппроксимации первого порядка, при подстановке в разностные соотношения дает невязку  $O(\tau + h) = O(h)$  (так как  $\tau / h = r = \text{const}$  при любом  $h$ ).

Подставив  $u_m^n = u(x_m, t_n) + \delta u_m^n$ , например, в схему (2.21), имеем

$$u(x_m, t_{n+1}) + \delta u_m^{n+1} = (1 + ar)(u(x_m, t_n) + \delta u_m^n) - ar(u(x_{m+1}, t_n) + \delta u_{m+1}^n) + \tau \varphi_m^n$$

С учетом первого порядка аппроксимации приходим к соотношению, связывающему между собой погрешности решения  $\delta u$ :

$$\delta u_m^{n+1} = (1 + ar) \delta u_m^n - ar \delta u_{m+1}^n + \tau O(h) \quad (2.22)$$

(напомним, что схема (2.21) получена в результате умножения на  $\tau$  исходного уравнения с разделенными разностями).

На основе уравнения (2.22) проследим за эволюцией погрешности при переходе от одного временного слоя к другому. Рассмотрим частный случай, когда начальная погрешность  $\delta u_m^n$  имеет вид  $(-1)^m \varepsilon$ , где  $\varepsilon = \tau O(h)$ . Помимо того, не будем учитывать на последующих слоях вклад последнего члена в (2.22).

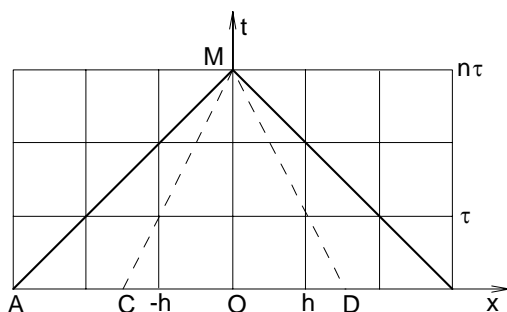
Вычисляя последовательно  $\delta u_m^{n+1}$ ,  $\delta u_m^{n+2}$  и т.п., приходим к выражениям

$$\begin{aligned} \delta u_m^{n+1} &= (1 + ar) (-1)^m \varepsilon + ar (-1)^m \varepsilon = (1 + 2ar) (-1)^m \varepsilon \\ \delta u_m^{n+2} &= (1 + 2ar)^2 (-1)^m \varepsilon \\ &\dots\dots\dots \\ \delta u_m^{n+N} &= (1 + 2ar)^N (-1)^m \varepsilon \end{aligned}$$

Очевидно, что если  $|1 + 2ar| < 1$ , то погрешность затухает, а если  $|1 + 2ar| > 1$ , то экспоненциально возрастает. В последнем случае погрешность может быстро превысить само решение, и дальнейшие вычисления теряют смысл. Обычным признаком экспоненциального роста ошибок становится появление при расчете величин больших порядков и остановка вычислений из-за переполнения арифметического устройства.

Легко видеть, что случаю затухания ошибок  $|1 + 2ar| < 1$  при  $a < 0$  как раз и соответствует условие КФЛ  $|ra| < 1$ .

В общем случае  $a = a(x/t)$  характеристики могут изменять в разных точках направление наклона. Можно заведомо обеспечить попадание характеристик ( $MC$ ,  $MD$  на рис. 4) в область зависимости решения разностной задачи  $AMB$ , если воспользоваться симметричной аппроксимацией  $\partial u / \partial x$



и выполнить условие КФЛ в форме  $\max_{m,n} |a_m^n| \cdot \tau / h \leq 1$ . При этом получается явная четырехточечная схема

$$\frac{u_m^{n+1} - u_m^n}{\tau} + a_m^n \frac{u_{m+1}^n - u_{m-1}^n}{2h} = \varphi_m^n \quad (2.23)$$

Рис.4

с аппроксимационными невязками порядка  $O(\tau + h^2)$ .

Однако можно показать (на основе приводимого в главе 3 спектрального признака устойчивости), что если при  $h \rightarrow 0$  имеет место равенство  $\tau / h = r = \text{const}$ , то схема неустойчива. Этот пример доказывает, что критерий КФЛ является лишь необходимым условием устойчивости.

## 2.5. Схема Лакса. Сеточная вязкость. Монотонность

Рассмотрим новую разностную схему для модельного уравнения  $u_t + a(x,t) u_x = \varphi(x,t)$ . Модифицируем в неустойчивой схеме (2.23) выражение для разностного аналога члена  $u_t$ , оставив без изменения симметричную аппроксимацию  $u_x$ :

$$\frac{u_m^{n+1} - 1/2 \cdot (u_{m+1}^n - u_{m-1}^n)}{\tau} + a_m^n \frac{u_{m+1}^n - u_{m-1}^n}{2h} = \varphi_m^n \quad (2.24)$$

Как видно, в первом члене  $u_m^n$  заменено на среднее арифметическое значение величин  $u_{m-1}^n$  и  $u_{m+1}^n$ . Схема (2.24) представляет собой простейший вариант схемы Лакса.

Умножив уравнение (2.24) на  $\tau$  и обозначив  $\kappa_m^n = |a_m^n| \tau / h$ , получим явное выражение  $u_m^{n+1}$  через значения  $u_{m\pm 1}^n$  на предыдущем слое:

$$u_m^{n+1} = \frac{1}{2}(1 - \kappa_m^n) u_{m+1}^n + \frac{1}{2}(1 + \kappa_m^n) u_{m-1}^n + \tau \varphi_m^n \quad (2.25)$$

Если выбор шагов подчинить условию  $\max_{m,n} |a_m^n| \tau / h \leq 1$ , то схема Лакса (2.25) имеет неотрицательные коэффициенты и, согласно принципу максимума, устойчива.

Проверим характер аппроксимации схемы (2.24). Разложение функции  $u(x,t)$  в ряд Тейлора около точки  $x_m, t_n$  дает

$$u(x_m \pm h, t_n) = u(x_m, t_n) \pm u_x h + u_{xx} h^2 / 2 \pm u_{xxx} h^3 / 6 + O(h^4),$$

$$u(x_m, t_n + \tau) = u(x_m, t_n) + u_t \tau + u_{tt} \tau^2 / 2 + u_{ttt} \tau^3 / 6 + O(\tau^4)$$

откуда

$$(u(x_{m+1}, t_n) - u(x_{m-1}, t_n)) / 2h = u_x + O(h^2)$$

$$(u(x_{m+1}, t_n) + u(x_{m-1}, t_n)) / 2 = u(x_m, t_n) + u_{xx} h^2 / 2 + O(h^2)$$

$$(u(x_m, t_{n+1}) - u(x_m, t_n)) / \tau = u_t + u_{tt} \tau / 2 + O(\tau^2)$$

$$(u(x_m, t_{n+1}) - (u(x_{m+1}, t_n) + u(x_{m-1}, t_n)) / 2) / \tau = u_t + u_{tt} \tau / 2 - u_{xx} h^2 / 2 + O(\tau^2 + h^4 / \tau)$$

(все производные фиксируются в узле  $x_m, t_n$ ).

Подставляя, с учетом соотношения  $[u]_h = u(x, t)$  в узлах сетки, соответствующие выражения в разностную схему, получим

$$L_h[u]_h = u_t + u_{tt} \tau / 2 - u_{xx} h^2 / 2\tau + au_x + O(\tau^2 + h^2)$$

Поскольку  $u_t + au_x \equiv \varphi$ , то аппроксимационная невязка равна

$$\delta f^{(h)} = u_{tt} \tau / 2 - u_{xx} h^2 / 2\tau + au_x + O(\tau^2 + h^2)$$

Принципиально новым моментом является присутствие в выражении  $\delta f^{(h)}$  коэффициента в виде отношения шагов  $h^2 / \tau$ . В результате предельная величина невязки при  $h, \tau \rightarrow 0$  определяется соотношением между шагами при их измельчении.

Из выражения для  $\delta f^{(h)}$  видно, что

- 1) если при  $h, \tau \rightarrow 0$  выполнено условие  $r = \tau / h = \text{const}$ , то имеет место аппроксимация первого порядка относительно  $h$  (или  $\tau$ ),
- 2) если же задано условие  $R = \tau / h^2 = \text{const}$ , т.е. происходит ускоренное измельчение шага  $\tau$ , то невязка стремится к конечной величине  $-u_{xx} / 2R$ .

Значит, схема Лакса во втором случае аппроксимирует не исходную гиперболическую задачу  $u_t + au_x = \varphi$ , а новую параболическую задачу

$$u_t + au_x - u_{xx} / R = \varphi \quad (2.26)$$

Можно трактовать слагаемое со второй производной по  $x$  в уравнении (2.26) как член с сеточной (аппроксимационной) вязкостью, а параметр  $R$  (или  $2R$ ) как «сеточное число Рейнольдса». Ясно, что при малом  $R$  решение задачи (2.26) не будет иметь ничего общего с решением исходной задачи.

Такое свойство, когда при том или ином законе предельного перехода ( $\tau \sim h$  или  $\tau \sim h^2$ ) разностная схема аппроксимирует различные задачи, называют негибкостью. Свойство негибкости иногда используют при сквозном счете течений с ударными волнами: применяя резкое уменьшение  $\tau$  в ближайшей окрестности волны, добиваются локального возрастания сеточной вязкости, что сглаживает нефизические осцилляции решения.

Необходимо подчеркнуть, что свойство негибкости относится к предельному переходу  $h, \tau \rightarrow 0$ , в этом смысле все остальные ранее рассмотренные схемы свободны от указанной особенности. Однако поскольку расчеты ведутся пусть при малых, но конечных шагах сетки, то как главные, т.е. содержащие  $\tau$  и  $h$  в наименьших степенях, так и остальные члены в

выражении невязки  $\delta f^{(h)}$  имеют конечную величину. Если, в частности, в выражении  $\delta f^{(h)}$  присутствуют слагаемые со второй производной по  $h$  с множителем  $\nu(h)$  (член с вязкостью аппроксимационного происхождения), этот фактор влияет на решение так же, как повлиял бы вязкостный член с коэффициентом вязкости  $\nu$  в исходном уравнении.

Если теперь подставить в разностную схему разложение в ряд Тейлора некоторой функции непрерывного аргумента, которая предполагается совпадающей с разностным решением в узлах сетки, и сделать предельный переход  $h, \tau \rightarrow 0$ , то для свободной от негибкости аппроксимирующей разностной схемы все «лишние» члены безусловно обратятся в нуль, а оставшиеся (при нулевых степенях шагов) составят исходное дифференциальное уравнение. Если же после подстановки удержать еще и главные члены погрешности аппроксимации, то получится так называемое первое дифференциальное приближение разностной схемы. Если, вдобавок к этому, сохранить еще члены с  $h$  и  $\tau$  в следующей степени, то совокупность оставленных членов даст второе дифференциальное приближение и т.д. Очевидно, что о свойствах решений, соответствующих данной разностной схеме, можно судить на основании анализа вида дифференциальных приближений этой схемы, причем тем более точно, чем выше порядок взятого дифференциального приближения.

Для примера приведем первое дифференциальное приближение для разностной схемы (2.10) (аппроксимация  $u_x$  назад по  $x$ ;  $a = \text{const} > 0$ ):

$$u_t + au_x + u_{tt} \tau / 2 - au_{xx} h / 2 = \varphi \quad (2.27)$$

Полученное уравнение называют гиперболической формой дифференциального приближения. Для последующей трактовки удобнее преобразовать это уравнение. Для этого выразим с точностью до величин порядка  $h$  производную  $u_{tt}$ :

$$u_{tt} = (\varphi - au_x)_t = -au_{tx} + \varphi_t = \varphi_t - a\varphi_x + a^2 u_{xx}$$

Тогда уравнение (2.27) примет вид

$$u_{\varphi_t} + au_x - \frac{ah}{2}(1 - ar)u_{xx} = \varphi - \frac{\tau}{2}(\varphi_t - a\varphi_x)$$

Как видно, множитель  $\nu(h)$  при члене со схемной вязкостью равен  $ah(1 - ar) / 2$ . При выполнении условия КФЛ имеем  $\nu(h) > 0$ , и указанный член оказывает сглаживающее влияние на решение. При нарушении условия КФЛ эффект отрицательной вязкости дестабилизирует решение, что

проявляется численно в экспоненциальном росте  $\delta u_m^n$ . В случае  $ar = 1$  для однородного уравнения первое дифференциальное приближение (как и последующие) совпадает с исходным дифференциальным уравнением.

Вернемся вновь к схеме Лакса. Эта схема принадлежит к числу так называемых **монотонных** схем.

Чтобы пояснить это свойство, рассмотрим однородную задачу при  $a = \text{const}$ ,  $|a|\tau / h = |\kappa| \leq 1$ . Пусть начальный профиль  $u_m^0 = \psi(x_m)$  имеет вид ступеньки:  $\psi(x_m) = 0$  при  $m=0, -1, -2, \dots$  и  $\psi(x_m) = 1$  при  $m=1, 2, \dots$ . Как следует из соотношения (2.25), на следующем временном слое изменятся только  $u_0^1$  и  $u_1^1$ , которые получат значение  $(1 - \kappa) / 2$ , лежащее при всех  $|\kappa| \leq 1$  между нулем и единицей. На следующих временных слоях сохраняется монотонный по  $x$  характер результатов.

Разностная схема, сохраняющая при переходе от слоя  $n$  к слою  $n + 1$  монотонность решения, сама называется монотонной.

Заметим, что при  $|\kappa| = 1$  ступенька без искажения будет смещаться вправо ( $a > 0$ ) или влево ( $a < 0$ ) на расстояние  $h$  за время  $\tau$ , т.е. со скоростью  $a$ , как и должно быть в соответствии с точным решением. При  $|\kappa| < 1$  переход от значений  $u_m^n = 0$  к  $u_m^n = 1$  сглаживается.

Обе схемы первого порядка с несимметричной аппроксимацией производной  $u_x$  также монотонны при выполнении условия КФЛ, однако они обладают меньшим сглаживающим действием, чем схема Лакса.

# Глава 3. СПОСОБЫ ПОСТРОЕНИЯ И ПРИМЕРЫ ИССЛЕДОВАНИЯ УСТОЙЧИВОСТИ АППРОКСИМИРУЮЩИХ РАЗНОСТНЫХ СХЕМ

## 3.1. Метод неопределенных коэффициентов

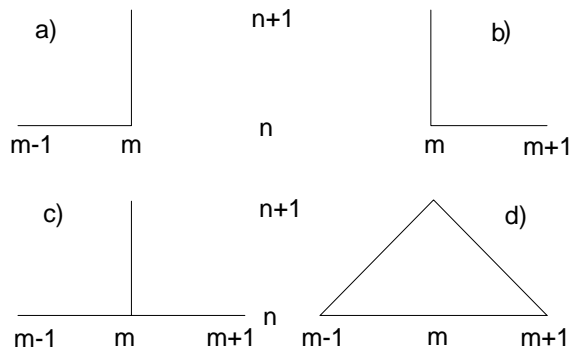
Все приведенные выше разностные схемы конструировались путем формальной замены производных их разностными аналогами. Существуют и более универсальные способы аппроксимации как дифференциальных уравнений так и начальных и граничных условий. Рассмотрим построение разностных аналогов для дифференциальных уравнений.

Обратимся к прежней гиперболической задаче Коши

$$\begin{aligned} u_t + au_x &= \varphi(x,t), \quad a = \text{const}, \quad 0 < t < T, \quad -\infty < x < \infty \\ u(x,0) &= \psi(x), \quad -\infty < x < \infty \end{aligned} \quad (3.1)$$

Удобно сопоставлять разностным схемам графические построения, показывающие, в каких точках сетки расположены значения сеточной функции, связанные разностным уравнением. Совокупность этих точек принято называть **разностным шаблоном**. Схемам с несимметричными разностями (2.11) и (2.22) соответствуют шаблоны, изображенные на рис. 5, а,б, неустойчивой схеме (2.23) с симметричной аппроксимацией  $u_x$  - на

рис. 5, с, схеме Лакса (2.25) - на рис. 5, d.



**Рис.5.**

Построение схемы начинается с выбора разностного шаблона. Предположим для определенности, что выбран четырехточечный шаблон, изображенный на рис. 5, в.

Поскольку разностная схема линейная, то имеет смысл строить разностный оператор  $L_h$  для аппроксимации дифференциального уравнения в виде линейной комбинации  $u^{(h)}$  в узлах сетки.

Кроме того, ради удобства запишем оператор для случая, когда обе части исходного уравнения с разделенными разностями умножены на  $\tau$ :

$$L_h u^{(h)} = u_m^{n+1} - \sum_{p=-1}^1 \alpha_p u_{m+p}^n \quad (3.2)$$



где  $\alpha_{-1}, \alpha_0, \alpha_1$  - коэффициенты при соответствующих  $u^{(h)}$ . Не уточняя пока вида  $f^{(h)}$ , подберем коэффициенты  $\alpha_p$  из соображений наибольшей точности аппроксимации.

Точность аппроксимации определяется величиной невязки из выражения

$$L_h[u]_h = f^{(h)} + \delta f^{(h)}$$

Выберем, как и раньше,  $[u]_h$  в виде  $[u]_h = u(x, t)$  в узлах сетки. Запишем разложение  $u(x, t)$  в ряд Тейлора около узла  $x_m, t_n$

$$\begin{aligned} u(x_m, t_n + \tau) &= u(x_m, t_n) + u_t \tau + u_{tt} \tau^2 / 2 + O(\tau^3) \\ u(x_m + ph, t_n) &= u(x_m, t_n) + u_x ph + u_{xx} p^2 h^2 / 2 + O(ph)^3 \end{aligned} \quad (3.3)$$

где  $p = -1, 0, 1$ ; все производные фиксированы в точке  $x_m, t_n$ . Поскольку  $u(x, t)$  есть решение уравнения  $u_t + au_x = \varphi$ , то можно выразить  $u_t, u_{tt}$  через  $u_x, u_{xx}$  и производные от  $\varphi$ :

$$u_t = \varphi - au_x, \quad u_{tt} = a^2 u_{xx} + \varphi_t - a\varphi_x$$

Тогда

$$u(x_m, t_n + \tau) = u(x_m, t_n) + (\varphi - au_x)\tau + (a^2 u_{xx} + \varphi_t - a\varphi_x)\tau^2 / 2 + O(\tau^3)$$

Подставляя в (3.2) точное решение  $[u]_h$  вместо  $u^{(h)}$ , получим

$$\begin{aligned} L_h[u]_h &= (1 - \sum_{(p)} \alpha_p) u(x_m, t_n) - (\tau a + \sum_{(p)} p \alpha_p) u_x(x_m, t_n) + \\ &+ (\tau^2 a^2 - h^2 \sum_{(p)} p^2 \alpha_p) u_{xx}(x_m, t_n) / 2 + \tau(\varphi + \tau(\varphi_t - a\varphi_x) / 2) + O(\tau^3 + h^3) \end{aligned} \quad (3.4)$$

Выберем в качестве  $f^{(h)}$  известную функцию  $\tau(\varphi + \tau(\varphi_t - a\varphi_x) / 2)$ , приняв за норму  $f^{(h)}$  в пространстве  $F_h$  максимум модуля всех ее компонент. Отсюда

$$\begin{aligned} \delta f^{(h)} &= L_h[u]_h - f^{(h)} = (1 - \sum_{(p)} \alpha_p) u(x_m, t_n) - (\tau a + \sum_{(p)} p \alpha_p) u_x(x_m, t_n) + \\ &+ (\tau^2 a^2 - h^2 \sum_{(p)} p^2 \alpha_p) u_{xx}(x_m, t_n) / 2 + O(\tau^3 + h^3) \end{aligned} \quad (3.5)$$

Совокупности значений  $u, u_x, u_{xx}$  в узлах сетки, вообще говоря, произвольны. Если подобрать теперь  $\alpha_{-1}, \alpha_0, \alpha_1$  так, чтобы коэффициенты в скобках при  $u, u_x, u_{xx}$  обратились бы в нуль, то  $\delta f^{(h)}$  будет величиной порядка  $\tau^3 + h^3$ . Поэтому при условии  $r = \tau / h = \text{const}$  получим разност-

ный оператор, аппроксимирующий дифференциальный оператор с порядком  $h^2$  (так как исходное уравнение было умножено на  $\tau$ ).

В итоге надо добиться подбором коэффициентов  $\alpha_p$  выполнения условий

$$(1 - \sum_{(p)} \alpha_p) = 0, \quad \kappa + \sum_{(p)} p \alpha_p = 0, \quad \kappa^2 - \sum_{(p)} p^2 \alpha_p = 0 \quad (\kappa = \tau a / h)$$

откуда

$$\alpha_{-1} = (\kappa^2 + \kappa) / 2, \quad \alpha_0 = 1 - \kappa^2, \quad \alpha_1 = (\kappa^2 - \kappa) / 2$$

Подставляя полученные  $\alpha_p$  в схему, имеем

$$\begin{aligned} L_h u^{(h)} &= u_m^{n+1} - u_m^n - \kappa^2 (u_{m-1}^n - 2u_m^n + u_{m+1}^n) / 2 + \kappa (u_{m+1}^n - u_{m-1}^n) = \\ &= \tau \left( \varphi + \frac{\tau}{2} (\varphi_t - a \varphi_x) \right)_m^n \end{aligned}$$

или, разделив на  $\tau$ ,

$$\frac{u_m^{n+1} - u_m^n}{\tau} = a \frac{u_{m+1}^n - u_{m-1}^n}{h} - \frac{a^2 \tau}{2} \cdot \frac{u_{m-1}^n - 2u_m^n + u_{m+1}^n}{h^2} = \left( \varphi + \frac{\tau}{2} (\varphi_t - a \varphi_x) \right)_m^n \quad (3.6)$$

Начальное условие, не содержащее производных, записывается точно:  $u_m^0 = \psi_m$ .

Схема второго порядка точности (3.6) является разновидностью схем Лакса-Вендроффа и имеет нетривиальные особенности:

- 1) в левой части содержится с множителем  $-a^2 \tau / 2$  разностный аналог второй производной  $u_{xx}$ ,
- 2) справа вместо обычной правой части дифференциальной задачи стоит комплекс  $(\varphi + \tau / 2 (\varphi_t - a \varphi_x))_m^n$ .

Основные свойства схемы следующие:

- 1) схема устойчива при  $|\kappa| \leq 1$  (доказательство будет дано ниже),
- 2) схема обладает сглаживающими свойствами,
- 3) для схемы не имеет места принцип максимума,
- 4) схема не обладает монотонностью.

Продемонстрируем последнее. Пусть  $\varphi \equiv 0$ ,  $u_m^0 = 0$  при  $m=0, -1, -2, \dots$  и  $u_m^0 = 1$  при  $m=1, 2, \dots$ . Тогда из уравнения

$$u_m^{n+1} = (\kappa^2 + \kappa) u_{m-1}^n / 2 + (1 - \kappa^2) u_m^n + (\kappa^2 - \kappa) u_{m+1}^n / 2$$

вытекает, что на следующем слое получают новые значения только  $u_0^1$  и  $u_1^1$ :  $u_0^1 = (\kappa^2 - \kappa) / 2$ ,  $u_1^1 = 1 - (\kappa^2 + \kappa) / 2$ . Очевидно, что если  $a > 0$ , то  $0 \leq \kappa \leq 1$  и  $u_0^1 \leq 0$ ,  $u_1^1 \geq 0$ , а если  $a < 0$ , то  $-1 \leq \kappa \leq 0$  и  $u_0^1 \geq 0$ ,  $u_1^1 \geq 1$ ; в обоих слу-

чаях нарушается монотонность (рис. 6). Отметим также, что условие  $u_1^1 \geq 1$  (при  $a < 0$ ) нарушает принцип максимума.

Как видно из приведенного примера, метод неопределенных коэффициентов является более универсальным, чем простой прием формальной замены производных конечными разностями. Эта универсальность подтверждается тем, что из общего выражения (3.4) можно получить все предыдущие схемы первого порядка точности.

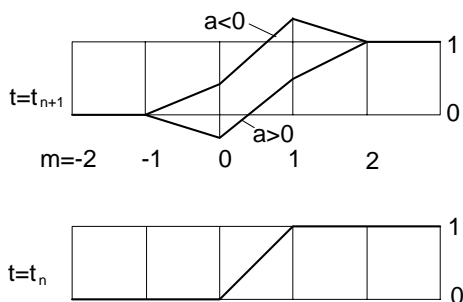


Рис.6.

Действительно, положим  $f^{(h)} = \tau \varphi_m^n$  и сделаем подбором коэффициентов  $\alpha_p$  два первых члена, содержащих  $\tau$  и  $h$  в нулевой и первой степенях:

$\alpha_{-1} + \alpha_0 + \alpha_1 = 1$ ,  $\alpha_{-1} - \alpha_1 = \kappa$ . Ввиду того, что уравнений два, а коэффициентов три, можно выбирать один из коэффициентов произвольно. Таким образом получается семейство схем первого порядка.

Если, в частности, взять  $\alpha_0 = 1$ , то  $\alpha_{-1} = -\alpha_1 = \kappa / 2$ , и получается схема

$$u_m^{n+1} - u_m^n + \frac{\kappa}{2}(u_{m+1}^n - u_{m-1}^n) = \tau \varphi_m^n$$

(неустойчивая схема (2.23)).

Полагая  $\alpha_0 = 0$ , что сводит шаблон к трехточечному (без нижней центральной точки  $x_m, t_n$ ), получаем  $\alpha_{-1} = (1 + \kappa) / 2$ ,  $\alpha_1 = (1 - \kappa) / 2$  и приходим к схеме Лакса (2.25).

Аналогично, исключая из исходного шаблона точку  $x_{m+1}, t_n$  ( $\alpha_1 = 0$ ) или точку  $x_{m-1}, t_n$  ( $\alpha_{-1} = 0$ ), получаем схемы с несимметричными аппроксимациями  $u_x$  разностями назад (2.11) или вперед (2.21).

Что касается линейных схем второго порядка на выбранном шаблоне, то, как следует из самого хода рассуждений, схема Лакса-Вендроффа является единственной.

### 3.2. Консервативность (дивергентность) разностных схем. Метод пересчета, или метод предиктор-корректор

Метод пересчета является распространенным приемом построения разностных схем, особенно эффективным для схем повышенного (второго и третьего) порядков точности.

Основное внимание в этом разделе будет уделено принципам построения таких схем применительно к уравнениям газовой динамики. В связи с тем, что предикторно-корректорные схемы часто применяются для расчетов разрывных течений, а для них обычная форма уравнений непригодна, следует использовать либо законы сохранения в интегральном виде, либо дифференциальные уравнения в специальной (так называемой консервативной) форме. Обратимся вначале к выводу таких уравнений.

Обычно применяемая система дифференциальных уравнений, описывающих течение однокомпонентной среды без внешнего подвода тепла, имеет вид

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} \rho \vec{v} = 0 \quad (3.7)$$

$$\rho \frac{d\vec{v}}{dt} = \operatorname{Div} P \quad (3.8)$$

$$\rho \frac{d}{dt} \left( U + \frac{v^2}{2} \right) = \operatorname{div} P \cdot \vec{v} \quad (3.9)$$

где  $U$  - внутренняя энергия (в простейшем случае  $U = c_v T$ ),  $P$  - тензор напряжений (для идеального газа  $P = -pE$ ),  $d/dt$  - лагранжева производная.

Можно придать левым частям уравнений (3.8) и (3.9) иной вид. Примем во внимание, что первоначально законы баланса (сохранения) количества движения и энергии формулируются в интегральной форме

$$\frac{d}{dt} \int_{\tau} \rho \vec{v} d\tau = \int_{\sigma} \vec{p}_n d\sigma \quad (3.10)$$

$$\frac{d}{dt} \int_{\tau} \rho \left( U + \frac{v^2}{2} \right) d\tau = \int_{\sigma} \vec{p}_n \cdot \vec{v} d\sigma \quad (3.11)$$

Известно, что конвективная производная от интеграла по объему некоторой величины  $\Phi$  (скалярной или векторной) сводится к переносу  $\Phi$  через соответствующую контрольную поверхность, откуда следует такая форма записи левых частей уравнений (3.10), (3.11):

$$\left. \begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_{\tau} \Phi d\tau &= \int_{\tau} \frac{\partial \Phi}{\partial t} d\tau + \int_{\sigma} v_n \Phi d\sigma \\ \int_{\sigma} v_n \Phi d\sigma &= \int_{\sigma} \vec{n} \cdot (\vec{v}\Phi) d\sigma = \int_{\tau} \nabla \cdot (\vec{v}\Phi) d\tau \end{aligned} \right\} \quad (3.12)$$

Если  $\Phi$  - скалярная функция, то под знаком интеграла по объему в (3.12) стоит обычная дивергенция, если же  $\Phi$  - вектор, то  $\vec{v}\Phi$  есть тензор-диада и  $\nabla \cdot (\vec{v}\Phi)$  означает вектор  $\text{Div } \vec{v}\Phi$ . С учетом этих преобразований и условия  $\vec{p}_n = \vec{n} \cdot P$  уравнения (3.10) и (3.11) приводятся к виду

$$\int_{\tau} \left( \frac{\partial}{\partial t} \rho \vec{v} + \nabla \cdot (\rho \vec{v} \vec{v}) \right) d\tau = \int_{\tau} \nabla \cdot P d\tau \quad (3.13)$$

$$\int_{\tau} \left( \frac{\partial}{\partial t} \rho \left( U + \frac{v^2}{2} \right) + \nabla \cdot \left( \rho \vec{v} \left( U + \frac{v^2}{2} \right) \right) \right) d\tau = \int_{\tau} \nabla \cdot (P \cdot \vec{v}) d\tau \quad (3.14)$$

Если обозначить  $\rho(U + v^2 / 2) = e$  (полная энергия единицы объема) и принять во внимание условия  $\nabla \cdot P = \nabla \cdot (-pE) = -\nabla p$ , а также произвольность объема  $\tau$ , то от законов баланса количества движения и энергии в интегральной форме (3.13) и (3.14) можно прийти к дифференциальным выражениям этих законов

$$\frac{\partial}{\partial t} \rho \vec{v} + \nabla \cdot (\rho \vec{v} \vec{v} + pE) = 0 \quad (3.15)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} e + \nabla \cdot ((e + p)\vec{v}) = 0 \quad (3.16)$$

Присоединяя к уравнениям (3.15) и (3.16) уравнение баланса массы (3.7) и пользуясь декартовыми координатами  $x_1, x_2, x_3$ , получим следующую систему

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_k} \rho v_k = 0 \quad (3.17)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \rho v_i + \frac{\partial}{\partial x_k} (\rho v_k v_i + p \delta_{ik}) = 0 \quad (3.18)$$

$$\frac{\partial e}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_k} ((e + p)v_k) = 0 \quad (3.19)$$

(подразумевается суммирование по повторяющимся индексам). Если ввести пятикомпонентные векторы-столбцы состояния газа  $U$  и потоков по каждому направлению  $\Phi_k$ :

$$U = \begin{bmatrix} \rho \\ \rho v_1 \\ \rho v_2 \\ \rho v_3 \\ e \end{bmatrix}, \quad \Phi_k = \begin{bmatrix} \rho v_k \\ \rho v_1 v_k + p \delta_{1k} \\ \rho v_2 v_k + p \delta_{2k} \\ \rho v_3 v_k + p \delta_{3k} \\ (e + p) v_k \end{bmatrix} \quad (3.20)$$

то систему (3.17)-(3.19) можно кратко записать в виде одного уравнения:

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_k} \Phi_k(U) = 0 \quad (3.21)$$

В частности, для стационарного одномерного потока сразу получим соотношения на скачке уплотнения

$$\frac{\partial}{\partial x} \rho u = 0, \quad \frac{\partial}{\partial x} (\rho u^2 + p) = 0, \quad \frac{\partial}{\partial x} u(e + p) = 0$$

или

$$\rho u = \text{inv}, \quad \rho u^2 + p = \text{inv}, \quad u(e + p) = \text{inv}$$

(inv - символ инварианта на скачке).

Иногда удобно выделить из уравнения (3.21) действие сил давления как член типа источника. В этом случае имеем

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_k} F_k(U) = H, \quad (3.22)$$

$$F_k(U) = \begin{bmatrix} \rho v_k \\ \rho v_1 v_k \\ \rho v_2 v_k \\ \rho v_3 v_k \\ e v_k \end{bmatrix}, \quad H = \begin{bmatrix} 0 \\ -\partial p / \partial x_1 \\ -\partial p / \partial x_2 \\ -\partial p / \partial x_3 \\ -\partial(p v_k) / \partial x_k \end{bmatrix}$$

Очевидно, что каждая компонента  $F_k$  выражает конвективный перенос соответствующей компоненты вектора  $U$  в направлении  $x_k$ . Уравнение (3.22) утверждает, что локальное изменение той или иной величины обусловлено ее конвективным переносом через поверхность и членами типа источника. В более общем случае в правую часть  $H$  вошли бы и иные источники, выражающие, например, объемное образование массы, объемные силы и эффекты вязкости, теплопроводности, диффузии и т.п.

Интегральная форма законов сохранения, использующая обозначения  $\Phi_k$  или  $F_k$ , имеет вид:

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{\tau} U d\tau + \int_{\sigma} n_k \Phi_k(U) d\sigma = 0 \quad (3.24)$$

или

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{\tau} U d\tau + \int_{\sigma} n_k F_k(U) d\sigma = \int_{\tau} H d\tau \quad (3.25)$$

где  $\tau$  - неподвижный объем с поверхностью  $\sigma$ , сквозь которую протекает газ, переносящий ту или иную субстанцию.

Дифференциальные формы записи (3.21) и (3.22), как и интегральные (3.24) и (3.25), называют дивергентными или консервативными. (Некоторые авторы называют дивергентными только формы (3.21) и (3.24).)

Ограничимся в дальнейшем случае только одной пространственной переменной  $x = x_1$ ,  $u = v_1$ . Тогда

$$U = \begin{bmatrix} \rho \\ \rho u \\ e \end{bmatrix}, \quad \Phi = \Phi_1 = \begin{bmatrix} \rho u \\ \rho u^2 + p \\ (e + p) u \end{bmatrix}$$

Проинтегрируем уравнение  $\partial U / \partial t + \partial \Phi / \partial x = 0$  по некоторой фиксированной области  $D$  с контуром  $\Gamma$  в плоскости  $x, t$ :

$$\iint_D \left( \frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial \Phi}{\partial x} \right) dx dt = 0$$

По формуле Грина сведем интеграл к контурному:

$$\oint_{\Gamma} (U dx - \Phi dt) = 0 \quad (3.26)$$

Обратимся теперь к построению конечноразностного аналога уравнения (3.26). Введем наряду с основной сеткой (узлы  $x_m, t_n$ ) вспомогательную (узлы  $x_m \pm h/2, t_n \pm \tau/2$ , рис.7). Основные узлы находятся на серединах горизонтальных сторон, а вспомогательные - на серединах вертикальных сторон разностной ячейки. Считаем искомой сеточную функцию  $[U]_h$ , определенную в основных узлах путем осреднения по соответствующей стороне, т.е.

$$[U]_h \Big|_{x_m, t_n} = \frac{1}{h} \int_{x_m-h/2}^{x_m+h/2} U(\xi, t_n) d\xi$$

Для вычисления потоков потребуются также значения  $[U]_h$ , полученные путем осреднения по вертикальным отрезкам во вспомогательных узлах

$$[U]_h \Big|_{t_n^{n+1/2}}^{x_{m+1/2}} = \frac{1}{\tau} \int_{t_n}^{t_{n+1}} U(x_{m+1/2}, \eta) d\eta$$

Приближенное разностное решение  $U^{(h)}$  в основных узлах обозначим  $U_m^n$ ,

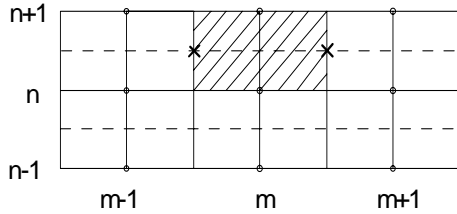


Рис.7.

а во вспомогательных  $U_{m+1/2}^{n+1/2}$ . Обозначим для краткости  $\Phi(U_{m+1/2}^{n+1/2}) = \Phi_{m+1/2}^{n+1/2}$ . Будем считать величину  $U_m^n$  продолженной на горизонтальную сторону ячейки  $t = t_n$ ,  $x_{m-1/2} < x < x_{m+1/2}$ , а  $U_{m+1/2}^{n+1/2}$  - на вертикальную сторону  $x = x_{m+1/2}$ ,  $t_n < t < t_{n+1}$ .

Определение сеточной функции

$U^{(h)}$  основано на использовании интегрального закона сохранения (3.26). Для построения разностной схемы положим, что  $U^{(h)}$  удовлетворяет уравнению

$$\oint_{\Gamma} U^{(h)} dx - \Phi(U^{(h)}) dt = 0 \quad (3.27)$$

выбрав в качестве  $\Gamma$  контур разностной ячейки, а направление обхода - против часовой стрелки. Тогда

$$(U_m^n - U_m^{n+1}) h - (\Phi_{m+1/2}^{n+1/2} - \Phi_{m-1/2}^{n+1/2}) \tau = 0 \quad (3.28)$$

$$U_m^{n+1} = U_m^n - \frac{\tau}{h} (\Phi_{m+1/2}^{n+1/2} - \Phi_{m-1/2}^{n+1/2})$$

Расчет по формуле (3.28) предполагает известным правило вычисления  $\Phi_{m\pm 1/2}^{n+1/2}$  по значениям  $U^{(h)}$ .

Отметим важное свойство (3.28). Проведем произвольный замкнутый, сам себя не пересекающий контур  $\Gamma^{(h)}$  по сторонам разностных ячеек. Просуммируем уравнения (3.28) по всем разностным ячейкам, охваченным контуром  $\Gamma^{(h)}$ . Очевидно, что в результате получим соотношение, которое содержит только  $U^{(h)}$  в точках, принадлежащих контуру  $\Gamma^{(h)}$ , поскольку величины на «внутренних» границах смежных прямоугольников входят дважды и с разными знаками.

Разностные схемы, которые при суммировании по всем точкам (ячейкам) сеточной области дают только алгебраические суммы неизвестных или функций от них на границе области, называются **дивергентными**, или **консервативными**.

Консервативные схемы обеспечивают выполнение разностных аналогов законов сохранения (массы, количества движения и др.) независимо



от шагов разностной сетки. В этом смысле они передают свойства дифференциальных уравнений.

Обратимся теперь к изложению собственно метода пересчета.

Для примера рассмотрим простейшую задачу Коши для обыкновенного дифференциального уравнения

$$dy / dt = y, \quad 0 < t \leq T, \quad y(0) = y_0.$$

Если  $y^n$  известно, то для вычисления  $y^{n+1}$  применяют двухступенчатую (двухшаговую) процедуру. Первый шаг - предиктор - использует явную схему Эйлера с несимметричной разностью для получения вспомогательного (предикторного) значения  $y^{n+1/2}$  с первым порядком точности:

$$\frac{y^{n+1/2} - y^n}{\tau / 2} = f(y^n, t_n), \quad y^{n+1/2} = y^n + \frac{\tau}{2} f(y^n, t_n)$$

Второй, уточняющий шаг - корректор - базируется на предикторном значении  $y^{n+1/2}$  и позволяет получить окончательное значение  $y^{n+1}$  на основе симметричной аппроксимации со вторым порядком точности

$$\frac{y^{n+1} - y^n}{\tau} = f(y^{n+1/2}, t_{n+1/2}), \quad y^{n+1} = y^n + \tau f(y^{n+1/2}, t_{n+1/2})$$

Подобный прием можно также использовать, если  $f$  - не функция, а некоторое дифференциальное выражение.

Вернемся к задаче

$$u_t + au_x = \varphi(x, t), \quad a = \text{const}, \quad 0 < t \leq T, \quad -\infty < x < \infty, \quad u(0, x) = \psi(x)$$

сводящейся к консервативной форме (3.22), если положить  $U = u$ ,  $A = au$ ,  $H = f$ . Пусть  $u^n$  известно. По схеме Лакса найдем предикторное значение  $u_{m-1/2}^{n+1/2}$ :

$$\left( u_{m-1/2}^{n+1/2} - 1/2(u_{m-1}^n + u_m^n) \right) / (\tau / 2) = -a(u_m^n + u_{m-1}^n) / h + \varphi_{m-1/2}^n \quad (3.29)$$

и аналогично  $u_{m+1/2}^{n+1/2}$  (рис. 8).

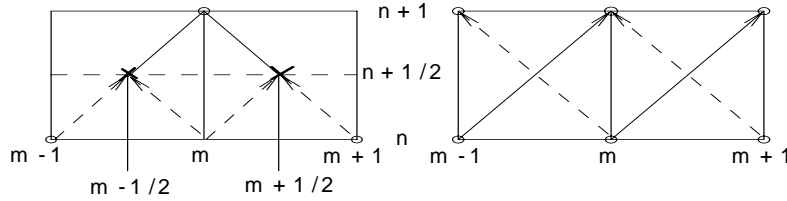


Рис.8.

Рис.9.

Затем по симметричной схеме «крест» второго порядка аппроксимации по  $h$  и  $\tau$  определим  $u_m^{n+1}$ :

$$\frac{u_m^{n+1} - u_m^n}{\tau} = -a \frac{u_{m+1/2}^{n+1/2} - u_{m-1/2}^{n+1/2}}{h} + \varphi_m^{n+1/2}$$

Исключая отсюда предикторные значения  $u_{m\pm 1/2}^{n+1/2}$ , получим

$$\frac{u_m^{n+1} - u_m^n}{\tau} + a \frac{u_{m+1}^n - u_{m-1}^n}{2h} - \frac{a^2 \tau}{2} \cdot \frac{u_{m+1}^n - 2u_m^n + u_{m-1}^n}{h^2} = \varphi_m^{n+1/2} - \frac{\tau a}{2h} (\varphi_{m+1/2}^n - \varphi_{m-1/2}^n)$$

Заметим, что

$$\varphi_m^{n+1/2} = \varphi_m^n + (\tau / 2) \varphi_t(x_m, t_n) + O(\tau^2), \quad (\varphi_{m+1/2}^n - \varphi_{m-1/2}^n) / h = \varphi_x(x_m, t_n) + O(h^2)$$

Таким образом, в итоге двухшаговой процедуры вновь получена схема Лакса-Вендроффа второго порядка аппроксимации.

Данный подход естественно обобщается на случай одномерного уравнения в дивергентной форме (3.21). Используя на предикторной стадии схему Лакса, найдем

$$U_{m-1/2}^{n+1/2} = \frac{1}{2} (U_{m-1}^n + U_m^n) - \frac{\tau}{2h} (\Phi_m^n - \Phi_{m-1}^n)$$

$$U_{m+1/2}^{n+1/2} = \frac{1}{2} (U_m^n + U_{m+1}^n) - \frac{\tau}{2h} (\Phi_{m+1}^n - \Phi_m^n)$$

Эти формулы фактически дают способ вычисления вспомогательных значений  $U_{m\pm 1/2}^{n+1}$ , необходимых для расчета потоков  $\Phi$  в этих точках. Далее следует непосредственное определение  $U_m^{n+1}$  по формуле (3.28) (корректорный шаг). Так получается двухшаговый вариант схемы Лакса-Вендроффа, предложенный Рихтмайером и Мортонем.

Приведенный предикторно-корректорный способ получения схем второго порядка не является единственным. Так, для уравнения  $y_t = f(y, t)$  можно находить по схеме Эйлера предикторное значение  $\bar{y}^{n+1}$  (с первым порядком точности)  $\bar{y}^{n+1} = y^n + \tau f(y^n, t^n)$ , а затем уточненную величину (со вторым порядком)  $y^{n+1}$ :

$$y^{n+1} = y^n + \frac{\tau}{2} (f(y^n, t^n) + f(\bar{y}^{n+1}, t^{n+1}))$$

Для уравнения  $u_t + au_x = \varphi$  предиктором может быть определение  $\bar{u}_m^{n+1}$  с первым порядком точности с использованием несимметричной аппроксимации (например, разности вперед):

$$\frac{\bar{u}_m^{n+1} - u_m^n}{\tau} + a \frac{u_{m+1}^n - u_m^n}{h} = \varphi_m^n$$

и аналогичное определение  $\bar{u}_{m-1}^{n+1}$

$$\frac{\bar{u}_{m-1}^{n+1} - u_{m-1}^n}{\tau} + a \frac{u_m^n - u_{m-1}^n}{h} = \varphi_{m-1}^n$$

Корректорный шаг (рис. 9):

$$\frac{u_m^{n+1} - u_m^n}{\tau} + \frac{a}{2} \left( \frac{u_{m+1}^n - u_m^n}{h} + \frac{\bar{u}_m^{n+1} - \bar{u}_{m-1}^{n+1}}{h} \right) = \frac{1}{2} (\varphi_m^n + \varphi_m^{n+1})$$

Если исключить из последнего соотношения вспомогательные  $\bar{u}_{m-1}^{n+1}$  и  $\bar{u}_m^{n+1}$ , то вновь получается схема Лакса-Вендроффа. Отметим, что если заменить порядок вычисления разностей по  $x$  на предикторном и корректорном шагах на противоположный, то после исключения  $\bar{u}$  будет тот же результат.

Таким образом, для линейного уравнения все четыре схемы: собственно Лакса-Вендроффа, двухшаговая с симметричными разностями и обе двухшаговые с несимметричными разностями (вперед или назад) оказываются эквивалентными.

Применим вариант с несимметричной аппроксимацией к газодинамической задаче (3.22), записанной в консервативной форме. Взяв разности вперед, получим на предикторном шаге

$$\bar{U}_m^{n+1} = U_m^n + \tau \left( - (F_{m+1}^n - F_m^n) / h + H_m^n \right)$$

$$\bar{U}_{m-1}^{n+1} = U_{m-1}^n + \tau \left( - (F_m^n - F_{m-1}^n) / h + H_{m-1}^n \right)$$

Корректорный шаг имеет вид

$$\frac{U_m^{n+1} - U_m^n}{\tau} + \frac{1}{2} \left( \frac{F_{m+1}^n - F_m^n}{h} + \frac{\bar{F}_m^{n+1} - \bar{F}_{m-1}^{n+1}}{h} \right) = \frac{1}{2} (\bar{H}_m^{n+1} + H_m^n) \quad (3.30)$$

Можно трактовать уравнение (3.30) как аппроксимацию исходного уравнения со вторым порядком в точке  $m, n + 1/2$  - в середине разностной ячейки. Разности  $(F_{m+1}^n - F_m^n)/h$  и  $(\bar{F}_m^{n+1} - \bar{F}_{m-1}^{n+1})/h$  аппроксимируют  $\partial F / \partial x$  со вторым порядком соответственно в точках  $m + 1/2, n$  и  $m - 1/2, n + 1$ , а, следовательно, их полусумма с тем же порядком аппроксимирует  $\partial F / \partial x$  в средней по отношению к ним точке  $m, n + 1/2$ .

Возможна еще одна трактовка уравнения (3.30). Перепишем (3.30) в виде

$$\frac{U_m^{n+1} - U_m^n}{\tau} + \frac{1}{h} \left( \frac{F_{m+1}^n + \bar{F}_m^{n+1}}{2} - \frac{F_m^n + \bar{F}_{m-1}^{n+1}}{2} \right) = \frac{1}{2} (\bar{H}_m^{n+1} + H_m^n) \quad (3.31)$$

Стоящие в скобках полусуммы  $F$  со вторым порядком точности равны значениям  $F_{m+1/2}^{n+1/2}$  и  $F_{m-1/2}^{n+1/2}$ , а их разность, отнесенная к  $h$ , с тем же порядком аппроксимирует  $\partial F / \partial x$  в центральной точке  $m, n + 1/2$ .

Для другого порядка чередования разностей получим:

$$\begin{aligned} \bar{U}_m^{n+1} &= U_m^n + \tau \left( - (F_m^n - F_{m-1}^n) / h + H_m^n \right) \\ \bar{U}_{m+1}^{n+1} &= U_{m+1}^n + \tau \left( - (F_{m+1}^n - F_m^n) / h + H_{m+1}^n \right) \end{aligned}$$

(предикторный шаг),

$$\frac{U_m^{n+1} - U_m^n}{\tau} + \frac{1}{2} \left( \frac{F_m^n - F_{m-1}^n}{h} + \frac{\bar{F}_{m+1}^{n+1} - \bar{F}_m^{n+1}}{h} \right) = \frac{1}{2} (\bar{H}_m^{n+1} + H_m^n) \quad (3.32)$$

(корректорный шаг).

Схемы (3.30) и (3.32) являются вариантами схем Мак-Кормака. Они, как и двухшаговый вариант схемы Лакса-Вендроффа, обладают консервативностью, однако - в силу нелинейности исходного уравнения (3.22) - все три схемы не эквивалентны друг другу.

Схема Мак-Кормака часто применяется в силу ряда своих достоинств. В частности, она оперирует только величинами в основных узлах сетки (что важно при наличии правой части  $H$ ) и легко обобщается на многомерные задачи.

Рассмотренные схемы являются двухслойными, т.е. в окончательной записи значения  $U^{n+1}$  связаны только с величинами на слое  $n$ , а «промежуточные» величины  $U^{n+1/2}$  в варианте схемы Лакса-Вендроффа используют-

ся только для вычисления потоков  $\Phi^{n+1/2}$  и далее не требуются. В памяти компьютера необходимо хранить только величины  $U^n$ .

Заметим, что если хранить в памяти величины на двух слоях ( $n$  и  $n+1$ ), то легко построить полностью центрированную (содержащую лишь центральные симметричные разности) трехслойную схему второго порядка точности, не являющуюся схемой предиктор-корректор.

Так, пусть для уравнения  $y_t = f(y, t)$  известны  $y^n$  и  $y^{n+1}$ . Тогда можно найти со вторым порядком точности

$$y^{n+2} = y^n + 2\tau f(y^{n+1}, t_{n+1}), \quad y^{n+3} = y^{n+1} + 2\tau f(y^{n+2}, t_{n+2})$$

и т.д.

Подобные схемы, в которых фактически делается двойной шаг  $2\tau$ , называют схемами «с перешагиванием».

Обобщение такого подхода на газодинамическую задачу дает схему

$$\frac{U_m^{n+1} - U_m^n}{2\tau} + \frac{\Phi_{m+1}^{n+1} - \Phi_{m-1}^{n+1}}{2h} = 0$$

Полученные  $U^{n+2}$  используются для вычисления  $\Phi^{n+2}$  перехода к слою  $n+3$ . Значительным недостатком этих простых в реализации схем является существование как бы двух взаимопроникающих сеток с четными и нечетными узлами и расслоение решений между этими сетками.

Рассмотрим теперь более универсальный способ построения двухслойных схем на основе метода неопределенных коэффициентов.

Выше были приведены два варианта предикторно-корректорных схем для уравнения  $y_t = f(y, t)$ :

1-я схема: предиктор  $y^{n+1/2} = y^n + \tau / 2 \cdot f(y^n, t_n),$

корректор  $y^{n+1} = y^n + \tau f(y^{n+1/2}, t_{n+1/2});$

2-я схема: предиктор  $\bar{y}^{n+1} = y^n + \tau f(y^n, t_n),$

корректор  $y^{n+1} = y^n + \tau / 2 \cdot (f(y^n, t_n) + f(\bar{y}^{n+1}, t_{n+1})).$

Обобщим эти схемы в виде записи с неопределенными коэффициентами.

Предикторный этап: вычисление  $y^{(1)}$  в точке  $t_1 = t_n + \alpha_1 \tau$  по методу Эйлера первого порядка точности:  $y^{(1)} = y^n + \alpha_1 \tau f^n.$

Корректорный этап: определение  $y^{n+1}$  в точке  $t_{n+1}$ :

$$y^{n+1} = y^n + \tau(w_0 f^n + w_1 f^{(1)}) \tag{3.33}$$

где  $\alpha_1, w_0, w_1$  - коэффициенты,  $f^n = f(y_n, t_n)$ ,  $f^{(1)} = f(y^{(1)}, t_1)$ . Разложим решение  $y(t)$  в ряд Тейлора около точки  $t_n$ :

$$y(t_n + \tau) = y^n + y_t^n \tau + y_{tt}^n \tau^2 / 2 + O(\tau^3)$$

С учетом  $y_t = f$ ,  $y_{tt} = f_t + ff_y$  получим

$$y(t_n + \tau) = y^n + f^n \tau + (f_t + ff_y) \tau^2 / 2 + O(\tau^3)$$

Аналогично разложим в ряд Тейлора около точки  $y^n, t_n$  функцию двух аргументов  $f(y, t)$ :

$$f(y(t_1), t_1) = f^n + f_t^n \alpha_1 \tau + f_y^n (y(t_1) - y^n) + O(\tau^2)$$

Поскольку  $y(t_1) - y^n = \alpha_1 \tau f^n + O(\tau^2)$ , то

$$f(y(t_1), t_1) = f^n + (f_t + ff_y) \alpha_1 \tau + O(\tau^2) \quad (3.34)$$

После подстановки разложений (3.34) и (3.35) в разностную схему (3.33) получим невязку в виде

$$\tau f^n (1 - w_0 - w_1) + \tau^2 (f_t + ff_y) (1/2 - \alpha_1 w_1) + O(\tau^3)$$

Чтобы невязка после деления на  $\tau$  была порядка  $\tau^2$ , необходимо положить  $w_0 + w_1 = 1$ ,  $\alpha_1 w_1 = 1/2$ .

Таким образом, можно варьировать один из коэффициентов  $\alpha_1, w_0, w_1$ , образуя семейство схем. Для уравнений в частных производных выбор коэффициентов определится способом аппроксимации пространственного оператора. Так, для двухшагового варианта схемы Лакса-Вендроффа необходимо принять  $\alpha_1 = 1/2$ ,  $w_0 = 0$ ,  $w_1 = 1$ , а для схемы Мак-Кормака -  $\alpha_1 = 1$ ,  $w_0 = w_1 = 1/2$ .

Метод предиктор-корректор позволяет строить схемы и более высокого порядка аппроксимации.

### 3.3. Явная разностная схема для уравнения теплопроводности

Рассмотрим одномерную нестационарную параболическую задачу

$$\frac{\partial u}{\partial t} = k \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad k = \text{const} > 0, \quad 0 < t < T, \quad -\infty < x < \infty, \quad u(x, 0) = \psi(x) \quad (3.36)$$

Решение этой задачи выражается интегралом Пуассона

$$u(x, t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi kt}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{(x - \xi)^2}{4kt}\right) \psi(\xi) d\xi$$

Отсюда следует, что областью зависимости решения в точке  $x_m, t_n$  является полоса  $-\infty < x < \infty, 0 \leq t \leq t_n$ . Такое свойство параболической задачи должно быть отражено при конструировании разностной схемы. В частности, условие  $\tau / h = \text{const}$  при  $h \rightarrow 0$  не пригодно, так как при этом область зависимости разностной задачи конечна, и о совпадении разностного решения с точным говорить не приходится.

Несколько видоизменим задачу, ограничив решение областью  $0 < x < 1, 0 < t \leq T$  с условиями на концах интервала  $u(0, t) = u(1, t) = 0$ , ( $\psi(0) = \psi(1) = 0$ ). Введем равномерную сетку  $x_m = mh$  ( $m = 0, 1, \dots, M$ ),  $t_n = n\tau$  ( $n = 0, 1, \dots, N$ ), где  $M = 1/h, N = T/\tau$ . Рассмотрим явную схему

$$\frac{u_m^{n+1} - u_m^n}{\tau} - k \frac{u_{m+1}^n - 2u_m^n + u_{m-1}^n}{h^2} = 0, \quad m = 1, \dots, M-1, \quad n = 0, 1, \dots, N-1 \quad (3.37)$$

$$u_m^0 = \psi_m, \quad m = 0, \dots, M, \quad u_0^n = u_M^n = 0, \quad n = 1, \dots, N$$

Перепишем аппроксимирующее уравнение в виде

$$u_m^{n+1} = (1 - 2\sigma) u_m^n + \sigma (u_{m-1}^n + u_{m+1}^n), \quad \sigma = k\tau / h^2 \quad (3.38)$$

Для оценки аппроксимации разложим функцию  $u(x, t)$  в ряд Тейлора около узла  $x_m, t_n$ . Полагая  $[u]_h = u(x_m, t_n)$ , получим

$$\delta f^{(h)}(x_m, t_n) = u_{tt} \tau / 2 - u_{xx}^{(4)} kh^2 / 12 + O(\tau^2 + h^4)$$

Поскольку  $u_t = ku_{xx}$ ,  $u_{tt} = k^2 u_{xx}^{(4)}$ , то

$$\delta f^{(h)} = (k^2 \tau / 2 - kh^2 / 12) u_{xx}^{(4)} + O(\tau^2 + h^4)$$

что и доказывает аппроксимацию при любом соотношении между шагами при  $h, \tau \rightarrow 0$ .

Устойчивость схемы для случая  $\sigma \leq 1/2$  очевидна, так как коэффициенты в правой части уравнения (3.38) при этом неотрицательны и имеет место принцип максимума, обеспечивающий устойчивость в  $C$ -норме. Таким образом, из соображений устойчивости следует закон предельного перехода  $\tau \sim h^2$  при  $h \rightarrow 0$ . Заметим, что если  $\sigma = \kappa\tau / h^2 = 1/6$ , то схема имеет четвертый порядок аппроксимации.

### 3.4. Неявные разностные схемы. Метод прогонки

Рассмотренные выше схемы являются условно устойчивыми, т.е. для их устойчивости необходимо выполнение соотношений типа  $\tau / h \leq \text{const}$  или  $\tau / h^2 \leq \text{const}$ . На практике такие ограничения часто приводят к неоправданному потребностями точности уменьшению шага  $\tau$ . С другой стороны, условия устойчивости содержат, в дополнение к параметрам исходной задачи, параметры дискретизации  $h$  и  $\tau$ . В связи с этим возникает проблема построения разностных схем, допускающих смягчение приведенных ограничений или вообще свободных от них (так называемых *безусловно (абсолютно) устойчивых* схем).

Обратимся для примера к гиперболической задаче

$$u_t + au_x = \varphi(x, t), \quad a = \text{const} > 0$$

Аппроксимируем дифференциальное уравнение следующим разностным

$$\frac{u_m^{n+1} - u_m^n}{\tau} + a \frac{u_m^{n+1} - u_{m-1}^{n+1}}{h} = \varphi_m^n \quad (3.39)$$

или

$$u_m^{n+1} = \frac{1}{1 + \kappa} u_m^n + \frac{\kappa}{1 + \kappa} u_{m-1}^{n+1} + \frac{\tau}{1 + \kappa} \varphi_m^n \quad (3.40)$$

От применявшейся выше схемы (2.11) настоящая схема отличается лишь тем, что при аппроксимации производной  $u_x$  разности берутся не на слое  $n$ , а на верхнем временном слое  $n + 1$ . Схему (3.39) называют неявной, поскольку аппроксимирующие соотношения не сводятся к непосредственно готовым для вычислений (явным) выражениям неизвестной величины через известные. В неявных схемах несколько неизвестных алгебраически связаны друг с другом и с известными величинами.

Проверка аппроксимации схемы (3.39) не составляет труда и дает невязку  $\delta f^{(h)} = O(\tau + h)$ .

Соотношение (3.40) при  $\varphi \equiv 0$  имеет следующую геометрическую трактовку (рис. 10). Выражение  $(u_m^n + \kappa u_{m-1}^{n+1}) / (1 + \kappa)$  есть линейная интер-



полюция значений  $u^{(h)}$  из точек  $B$  и  $C$  в точку  $O$ , лежащую на пересечении диагонали  $BC$  с характеристикой  $DE$ , а соотношение (3.40) означает перенос интерполированной величины по характеристике в точку  $x_m, t_{n+1}$ . Поэтому областью зависимости разностного решения в точке  $x_m, t_{n+1}$  является полубесконечная полоса  $-\infty < x < x_m, 0 \leq t \leq t_{n+1}$ . Следовательно, внутри последней заведомо находится область зависимости решения дифференциальной задачи (характеристика), что позволяет рассчитывать на устойчивость при любых  $h$  и  $\tau$ . Аналогично можно построить неявную схему с симметричной аппроксимацией  $u_x$ :

$$\frac{u_m^{n+1} - u_m^n}{\tau} + a \frac{u_{m+1}^{n+1} - u_{m-1}^{n+1}}{2h} = \varphi_m^n \quad (3.41)$$

Для краевой задачи теплопроводности  
 $u_t = k(x,t)u_{xx} + \varphi(x,t), 0 < x < 1, 0 < t \leq T$   
 $u(x,0) = \psi(x), u(0,t) = \alpha(t), u(1,t) = \beta(t)$

неявная схема с аппроксимацией  $u_{xx}$  разностью на слое  $n+1$  имеет вид

$$\frac{u_m^{n+1} - u_m^n}{\tau} = k_m^n \frac{u_{m+1}^{n+1} - 2u_m^{n+1} + u_{m-1}^{n+1}}{h^2} + \varphi_m^n, m = 1, 2, \dots, M-1, n = 0, 1, \dots, N-1 \quad (3.42)$$

$$u_m^0 = \psi_m, m = 0, 1, \dots, M, u_0^n = \alpha^n, u_M^n = \beta^n, n = 0, 1, \dots, N$$

Перепишем соотношения (3.41) и (3.42) после их умножения на  $\tau$  в общем виде

$$a_m^n u_{m-1}^{n+1} + b_m^n u_m^{n+1} + c_m^n u_{m+1}^{n+1} = f_m^n \quad (3.43)$$

Так, для последней схемы

$$a_m^n = c_m^n = -\sigma_m^n, b_m^n = 1 + 2\sigma_m^n, f_m^n = u_m^n + \tau\varphi_m^n, \sigma_m^n = k_m^n \tau / h^2$$

Вопрос об устойчивости неявных разностных схем складывается из двух частей: 1) доказательства однозначной разрешимости разностной задачи и непрерывной зависимости ее решения от входных данных (для задачи (3.42) - от  $\varphi, \psi, \alpha, \beta$ ), 2) установления метода решения системы разностных уравнений и доказательства его устойчивости.

Поясним суть второго пункта, отсутствовавшего для явных схем. На каждом временном шаге надо решать систему взаимосвязанных уравнений, число которых, определяющее порядок системы, может быть весьма велико (для системы (3.43), включая в нее граничные условия, он равен

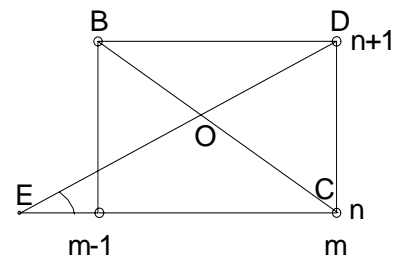


Рис.10.

$M + 1 = 1/h + 1$ ). Если не принимать во внимание ее особенности и решать ее как систему общего вида, то число операций будет пропорционально  $M^3$ , что сведет на нет преимущества неявной схемы. Кроме того, никакой алгоритм не реализуется арифметическим процессором точно, и если метод решения выбран неудачно, то ошибки округления могут существенно исказить результат.

Установим утверждение, лежащее в основе доказательства устойчивости разностных схем, приводимых к виду (3.43).

Перепишем, опуская временные индексы, систему разностных уравнений:

$$\begin{aligned} u_0 &= \alpha \\ a_m u_{m-1} + b_m u_m + c_m u_{m+1} &= f_m, \quad m = 1, 2, \dots, M-1, \\ u_M &= \beta \end{aligned} \quad (3.44)$$

Лемма. Если имеет место условие  $|b_m| \geq |a_m| + |c_m| + \delta$  ( $\delta > 0$ ), то 1) система (3.44) однозначно разрешима при любых  $f_m$  и 2) имеет место оценка

$$|u_m| \leq \max(|\alpha|, |\beta|, (\max_m |f_m|) / \delta) \quad (3.45)$$

Доказательство. Пусть  $u_0, u_1, \dots, u_M$  - решение системы (3.44) при некоторой правой части  $f_m$ . Обозначим  $u_k$  максимальное по модулю значение  $u_m$ . Если  $k = 0$  или  $k = M$ , то справедливость оценки (3.45) очевидна. В случаях  $k = 1, 2, \dots, M-1$  верны неравенства

$$|b_k| |u_k| \leq |f_k| + |a_k| |u_{k-1}| + |c_k| |u_{k+1}| \leq |f_k| + (|a_k| + |c_k|) |u_k|$$

откуда

$$|u_k| \leq \frac{|f_k|}{|b_k| - (|a_k| + |c_k|)} \leq \frac{|f_k|}{\delta} \leq \frac{\max_m |f_m|}{\delta}$$

что и доказывает лемму.

Отсюда вытекает разрешимость системы и единственность решения. Действительно, пусть  $\alpha = f_1 = \dots = f_{M-1} = \beta = 0$ , т.е. система (3.44) однородна. Тогда, согласно (3.45), она имеет только тривиальное решение, и ее определитель должен быть отличен от нуля. В таком случае, как известно, система однозначно разрешима при любой правой части.

Рассмотрим собственно метод решения системы (3.44) - так называемую прогонку - вариант метода исключения Гаусса для системы с сильно разреженной матрицей.

Матрица системы (3.44) именуется трехдиагональной, поскольку ее остальные элементы равны нулю (для сокращения записи они опущены):

$$\begin{bmatrix} 1 & & & & & & \\ a_1 & b_1 & c_1 & & & & \\ & a_2 & b_2 & c_2 & & & \\ & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ & & & a_{M-1} & b_{M-1} & c_{M-1} & \\ & & & & & & 1 \end{bmatrix}$$

Запишем условие  $u_0 = \alpha$  в виде  $u_0 = A_0 u_1 + B_0$ , где  $A_0 = 0$ ,  $B_0 = \alpha$ . Пользуясь этим представлением, исключим  $u_0$  из следующей (второй) строки системы:

$$a_1(A_0 u_1 + B_0) + b_1 u_1 + c_1 u_2 = f_1$$

откуда  $u_1 = A_1 u_2 + B_1$ ,  $A_1 = -c_1 / (a_1 A_0 + b_1)$ ,  $B_1 = (f_1 - a_1 B_0) / (a_1 A_0 + b_1)$ . Допустим, что путем таких последовательных исключений найдены  $A_1, B_1, A_2, B_2, \dots, A_{m-1}, B_{m-1}$ . Определим  $A_m$  и  $B_m$  из соотношения

$$u_m = A_m u_{m+1} + B_m \quad (3.46)$$

Для этого исключим  $u_{m-1} = A_{m-1} u_m + B_{m-1}$  из уравнения  $a_m u_{m-1} + b_m u_m + c_m u_{m+1} = f_m$ , что дает

$$A_m = -c_m / (a_m A_{m-1} + b_m), \quad B_m = (f_m - a_m A_{m-1}) / (a_m A_{m-1} + b_m) \quad (3.47)$$

По формулам (3.47) вычисляют последовательно  $A_m$  и  $B_m$  вплоть до  $A_{M-1}$  и  $B_{M-1}$  (прямая прогонка). Затем с помощью соотношений (3.46) по известному  $u_M = \beta$  находят  $u_{M-1}$ , потом  $u_{M-2}$  и так далее до  $u_1$  (обратная прогонка).

При выполнении условия леммы делители в формулах (3.47) при любом  $m$  не обращаются в нуль, а для коэффициентов  $A_m$  справедливо неравенство  $|A_m| < 1$ ; последнее обеспечивает невозрастание ошибки на стадии обратной прогонки.

### 3.5. Спектральный (гармонический) признак устойчивости

Спектральный признак устойчивости разностных схем является наиболее распространенным в силу своей простоты и универсальности. Его можно применять как к явным, так и к неявным схемам, к системам уравнений, к задачам со многими переменными. Однако данный метод допускает использование только для однородных уравнений с постоянными коэффициентами без учета краевых условий.

Суть метода заключается в том, что свойства разностных схем оцениваются по поведению во времени решений специального вида (гармонических функций, или гармоник), являющихся собственными функциями оператора перехода, то есть оператора, обеспечивающего переход решения с предыдущего временного слоя на следующий.

Для функций непрерывных аргументов  $x, t$  гармоникой называют выражение  $u = e^{\omega t + ikx}$ , где  $\omega$  и  $k$  - постоянные, причем  $k$  - вещественное. Для дискретных функций, определенных на сетке  $x_m = mh$ ,  $t_n = n\tau$ , гармоника имеет вид

$$u_m^n = e^{\omega t_n + ikx_m} = \lambda^n e^{i\alpha m} \quad (3.48)$$

где  $\lambda = e^{\omega\tau}$ ,  $\alpha = kh$ . Величина  $\alpha$  меняется от 0 (постоянная в направлении  $x$  функция) до  $2\pi$  (функция с наибольшей частотой изменения  $x$  по сетке). Заметим, что в некоторых руководствах верхнее значение  $\alpha$  ограничивают величиной  $\pi$ , что соответствует одной полуволне периодической функции на сеточном интервале

Подстановка  $u_m^n = \lambda^n e^{i\alpha m}$  в разностную схему дает соотношение связывающее между собой  $\lambda$  и  $\alpha$ : так называемое характеристическое (дисперсионное) уравнение  $\lambda = \lambda(\alpha)$ . Величина  $\lambda$  - в общем случае комплексная - именуется множителем (коэффициентом) перехода. Смысл последнего названия ясен из равенств

$$u_m^n = \lambda^n e^{i\alpha m}, \quad u_m^{n+1} = \lambda^{n+1} e^{i\alpha m}$$

откуда  $u_m^{n+1} = \lambda u_m^n$ .

Сеточная функция  $u_m^0$  в форме (3.48) имеет вид  $e^{i\alpha m}$  и ее можно рассматривать как начальное условие задачи. Из (3.48) следует, что  $u_m^n = \lambda^n u_m^0$ , откуда

$$\max_m |u_m^n| = |\lambda|^n \max_m |u_m^0| \quad (3.49)$$

Воспользуемся вторым определением устойчивости

$$\|u^{(h)}\|_{U_h} \leq c \|f^{(h)}\|_{F_h}, \quad c = \text{const} > 0 \quad (3.50)$$

и введем нормы следующим образом

$$\|u^{(h)}\|_{U_h} = \max_{m,n} |u_m^n|, \quad \|f^{(h)}\|_{F_h} = \max_m |u_m^0| \quad (3.51)$$

Тогда, как следует из соотношений (3.49)-(3.51), для устойчивости схемы во всяком случае необходимо, чтобы при всех  $n$  и для всех гармоник ( $0 \leq \alpha \leq 2\pi$ ) имело место условие  $|\lambda|^n \leq c$ ,  $n = 0, 1, \dots, N$ . Замечая, что  $n \sim 1/\tau$ , имеем

$$|\lambda(\alpha)| \leq 1 + c_1 \tau \quad (3.52)$$

Это ограничение есть необходимое спектральное условие устойчивости (условие Неймана), выражающее ограниченность гармоник по модулю при  $\tau \rightarrow 0$ ,  $n \rightarrow \infty$ . Геометрическое истолкование условия (3.52) сводится к тому, что в комплексной плоскости  $\text{Re} \lambda + i \text{Im} \lambda$  все значения  $\lambda(\alpha)$  при  $0 \leq \alpha \leq 2\pi$  не должны выходить из круга радиуса  $1 + c_1 \tau$ .

На практике обычно заменяют неравенство (3.52) условием  $|\lambda| \leq 1$ .

Рассмотрим применение спектрального метода для исследования устойчивости полученных ранее схем.

Исходное дифференциальное уравнение  $u_t + au_x = 0$ ,  $a = \text{const} > 0$ .

1. Явная схема с несимметричной аппроксимацией  $u_x$  разностью назад

$$\frac{u_m^{n+1} - u_m^n}{\tau} + a \frac{u_m^n - u_{m-1}^n}{h} = 0$$

$$u_m^{n+1} = (1 - \kappa)u_m^n + \kappa u_{m-1}^n, \quad \kappa = a\tau / h$$

Характеристическое уравнение  $\lambda = 1 - \kappa + \kappa e^{-i\alpha}$  - уравнение окружности радиуса  $\kappa$  с центром в точке  $1 - \kappa$ . Условие Неймана выполняется при  $\kappa \leq 1$ , что совпадает с критерием КФЛ.

2. Аналогичная схема с аппроксимацией  $u_x$  разностью вперед

$$\frac{u_m^{n+1} - u_m^n}{\tau} + a \frac{u_{m+1}^n - u_m^n}{h} = 0$$

Отсюда получаем  $\lambda = 1 + \kappa - \kappa e^{-i\alpha}$  - уравнение окружности радиуса  $\kappa$  с центром в точке  $1 + \kappa$ . Условие Неймана нарушено, и схема неустойчива при всех  $\kappa > 0$ .

3. Явная схема с симметричной аппроксимацией  $u_x$ :

$$\frac{u_m^{n+1} - u_m^n}{\tau} + a \frac{u_{m+1}^n - u_{m-1}^n}{2h} = 0$$

или

$$u_m^{n+1} = u_m^n - \kappa (u_{m+1}^n - u_{m-1}^n) / 2,$$

$$\lambda = 1 - i\kappa \sin \alpha, \quad |\lambda| = (1 + \kappa^2 \sin^2 \alpha)^{1/2} \geq 1$$

Очевидно, прогноз неутешителен.

4. Схема Лакса

$$\frac{u_m^{n+1} - (u_{m-1}^n + u_{m+1}^n) / 2}{\tau} + a \frac{u_{m+1}^n - u_{m-1}^n}{2h} = 0$$

или

$$u_m^{n+1} = \frac{1 - \kappa}{2} u_{m+1}^n + \frac{1 + \kappa}{2} u_{m-1}^n$$

откуда  $\lambda = \cos \alpha - i\kappa \sin \alpha$ ,  $|\lambda| = (\cos^2 \alpha + \kappa^2 \sin^2 \alpha)^{1/2}$ .

Схема устойчива при  $|\kappa| \leq 1$ , что совпадает с условием выполнения принципа максимума.

5. Схема Лакса-Вендроффа

$$\frac{u_m^{n+1} - u_m^n}{\tau} + a \frac{u_{m+1}^n - u_{m-1}^n}{2h} - \frac{a^2 \tau}{2} \frac{u_{m+1}^n - 2u_m^n + u_{m-1}^n}{h^2} = 0$$

или

$$u_m^{n+1} = u_m^n - \kappa (u_{m+1}^n - u_{m-1}^n) / 2 + \kappa^2 (u_{m+1}^n - 2u_m^n + u_{m-1}^n)$$

Характеристическое уравнение имеет вид

$$\lambda = 1 - 2\kappa^2 \sin^2 \frac{\alpha}{2} - i\kappa \sin \alpha$$

и, следовательно,

$$|\lambda|^2 = \left(1 - 2\kappa^2 \sin^2(\alpha / 2)\right)^2 + \kappa^2 \sin^2 \alpha = 1 - 4\kappa^2(1 - \kappa^2) \sin^4(\alpha / 2)$$

Очевидно, что  $|\lambda| \leq 1$  при  $|\kappa| \leq 1$ .

6. Неявная схема с несимметричной аппроксимацией  $u_x$  разностью назад

$$\frac{u_m^{n+1} - u_m^n}{\tau} + a \frac{u_m^{n+1} - u_{m-1}^{n+1}}{h} = 0$$

или

$$(1 + \kappa)u_m^{n+1} = u_m^n + \kappa u_{m-1}^n.$$

Отсюда

$$|\lambda|^2 = \frac{1}{(1 + 2\kappa \sin^2(\alpha / 2))^2 + \kappa^2 \sin^2 \alpha} \leq 1$$

при любых  $\kappa > 0$ .

7. Явная схема для уравнения теплопроводности  $u_t = ku_{xx}$

$$\frac{u_m^{n+1} - u_m^n}{\tau} = k \frac{u_{m+1}^n - 2u_m^n + u_{m-1}^n}{h^2}$$

или

$$u_m^{n+1} = (1 - 2\sigma)u_m^n + \sigma(u_{m+1}^n - u_{m-1}^n), \quad \sigma = k\tau / h^2 > 0$$

$$\lambda = 1 - 4\sigma \sin^2(\alpha / 2)$$

Схема устойчива при  $\sigma \leq 1/2$ , что совпадает с соответствующим результатом в п. 3.3.

8. Неявная схема для уравнения теплопроводности

$$\frac{u_m^{n+1} - u_m^n}{\tau} = k \frac{u_{m+1}^{n+1} - 2u_m^{n+1} + u_{m-1}^{n+1}}{h^2}$$

или

$$u_m^{n+1} = u_m^n + \sigma(u_{m+1}^{n+1} - 2u_m^{n+1} - u_{m-1}^{n+1}).$$

Характеристическое уравнение имеет вид

$$\lambda = \frac{1}{1 + 4\sigma \sin^2(\alpha / 2)}$$

и схема устойчива независимо от величины  $\sigma$ .

## Глава 4. НЕКОТОРЫЕ СПОСОБЫ ПОСТРОЕНИЯ РАЗНОСТНЫХ СХЕМ ДЛЯ МНОГОМЕРНЫХ ЗАДАЧ

### 4.1. Явные и неявные однородные схемы. Матричная прогонка

Все рассмотренные ранее задачи были одномерными по пространственной координате. Между тем, большинство практически интересных задач гидродинамики имеет многомерный характер, что привносит новые проблемы в построение разностных схем. Познакомимся с некоторыми из них на примере уравнения теплопроводности:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = Lu, \quad L = \sum_{s=1}^3 L_s, \quad L_s = k \frac{\partial^2}{\partial x_s^2}, \quad k = \text{const} > 0 \quad (4.1)$$

Введем равномерную по каждой переменной разностную сетку с шагами  $\tau, h_1, h_2, h_3$ . Аппроксимируем вторую производную по направлению  $x_s$  на временном слое  $n$  ( $t = n\tau$ ) в точке пространства  $mpq$  ( $x_1 = mh_1, x_2 = ph_2, x_3 = qh_3$ ) со вторым порядком точности:

$$L_s u \sim \Lambda_s u^n = k \frac{u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n}{h_s^2}$$

(индекс  $j$  соответствует узлам  $x_s$ , остальные индексы для простоты опущены). Тогда явная схема имеет вид:

$$\frac{u_{mpq}^{n+1} - u_{mpq}^n}{\tau} = (\Lambda_1 + \Lambda_2 + \Lambda_3)u^n = \Lambda u^n \quad (4.2)$$

а простейшая неявная запишется следующим образом:

$$\frac{u_{mpq}^{n+1} - u_{mpq}^n}{\tau} = \Lambda u^{n+1} \quad (4.3)$$

Очевидно, что обе схемы аппроксимируют исходную задачу (4.1) независимо от соотношения шагов с порядком  $O(\tau + h^2)$ , где  $h = \max(h_1, h_2, h_3)$ .



Оценим устойчивость обеих схем. Обобщая метод гармоник на пространственно многомерные задачи, положим  $u_{mpq}^n = \lambda^n e^{i(\alpha_1 m + \alpha_2 p + \alpha_3 q)}$  и потребуем для устойчивости условия  $|\lambda| \leq 1$  в диапазоне изменения каждого  $\alpha$  от 0 до  $2\pi$ .

Ограничимся для простоты двумерной задачей. Для схемы (4.2) характеристическое уравнение имеет вид  $\lambda = 1 - (c_1 + c_2)$ , а для схемы (4.3) -  $\lambda = 1 / (c_1 + c_2 + c_3)$ , где  $c_s = 4\sigma_s \sin^2(\alpha_s / 2)$ . Видно, что явная схема условно устойчива: так, при  $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma$  для устойчивости необходимо  $\sigma \leq 1/4$ , а для неявной схемы  $|\lambda| \leq 1$  при любых соотношениях между шагами, т.е. схема (4.3) безусловно устойчива.

Неявной схеме с весами, обобщающей схемы (4.2) и (4.3) (так наз. схеме Кранка-Николсона)

$$\frac{u^{n+1} - u^n}{\tau} = \Lambda(\mu u^{n+1} + (1 - \mu)u^n), \quad 0 \leq \mu \leq 1 \quad (4.4)$$

соответствует характеристическое уравнение

$$\lambda = \frac{1 - (1 - \mu)(c_1 + c_2)}{1 + \mu(c_1 + c_2)}$$

Схема безусловно устойчива при  $\mu \geq 1/2$  и условно устойчива при  $0 \leq \mu < 1/2$ .

Схемы типа (4.2)-(4.4) называют однородными, так как аппроксимации носят единообразный характер во всех узлах (в том числе и временных) расчетной области.

Реализация неявных схем (4.3), (4.4) для многомерных случаев весьма трудоемка. В качестве примера рассмотрим для двумерного уравнения (4.3) краевую задачу в прямоугольнике  $G \{0 \leq x_1 \leq 1, 0 \leq x_2 \leq 1\}$  с границей  $\Gamma$ . На каждом временном шаге необходимо решать систему аппроксимирующих уравнений, дополненных граничными условиями:

$$u_m^p - \sigma_1(u_{m-1,p} - 2u_{mp} + u_{m+1,p}) - \sigma_2(u_{m,p-1} - 2u_{mp} + u_{m,p+1}) = f_{mp} \quad (4.5)$$

где  $u_{mp} = u_{mp}^{n+1}$ .

Порядок системы (4.5) равен  $M = M_1 M_2$ , где  $M_s = 1/h_s - 1$ , ввиду чего количество операций резко возрастает по сравнению с одномерной задачей.

Для решения системы (4.5) можно применять метод матричной прогонки, записав эту систему в виде:

$$a_m \bar{u}_{m-1} + b_m \bar{u}_m + c_m \bar{u}_{m+1} = \bar{f}_m \quad (4.6)$$

где  $\bar{u}_m, \bar{f}_m$  есть векторы-столбцы  $\{u_{m,p}\}, \{f_{m,p}\}$ , а матрицы  $a_m, b_m, c_m$  имеют вид

$$a_m = c_m = \begin{bmatrix} 0 & -\sigma_1 & & & & & \\ & & -\sigma_1 & & & & \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ & & & -\sigma_1 & & & \\ & & & & -\sigma_1 & & \\ & & & & & -\sigma_1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$b_m = \begin{bmatrix} -\sigma_2 & 1 + 2(\sigma_1 + \sigma_2) & & & & & \\ & -\sigma_2 & 1 + 2(\sigma_1 + \sigma_2) & -\sigma_2 & & & \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ & & & -\sigma_2 & 1 + 2(\sigma_1 + \sigma_2) & -\sigma_2 & \end{bmatrix}$$

По аналогии с обычной прогонкой положим

$$\bar{u}_m = A_m \bar{u}_{m+1} + \bar{B}_m \quad (4.7)$$

где  $A_m$  - матрица,  $\bar{B}_m$  - вектор. Подставляя (4.7) в уравнение (4.6), получим

$$(a_m A_{m-1} + b_m) \bar{u}_m + c_m \bar{u}_{m+1} = \bar{f}_m - a_m \bar{B}_{m-1}$$

Умножая последнее равенство на  $(a_m A_{m-1} + b_m)^{-1}$ , будем иметь

$$\bar{u}_m = (a_m A_{m-1} + b_m)^{-1} c_m \bar{u}_{m+1} + (a_m A_{m-1} + b_m)^{-1} (\bar{f}_m - a_m \bar{B}_{m-1})$$

откуда

$$A_m = (a_m A_{m-1} + b_m)^{-1} c_m, \quad B_m = (a_m A_{m-1} + b_m)^{-1} (\bar{f}_m - a_m \bar{B}_{m-1}) \quad (4.8)$$

Имея при  $t = t_{n+1}$  краевые условия при  $x_1 = 0$ :  $\bar{u} = \bar{u}_0(ph_2)$ , получим  $A_0 = 0, \bar{B}_0 = \bar{u}_0$ , и далее по рекуррентным формулам (4.8) найдем  $A_1, \bar{B}_1, \dots, A_{M-1}, \bar{B}_{M-1}$ . Зная краевое условие при  $x_1 = 1$ :  $\bar{u} = \bar{u}_M(ph_2)$ , по формулам обратной прогонки (4.7) последовательно определим остальные  $\bar{u}_m$ .

Таким образом, схема матричной прогонки подобна обычной прогонке с той лишь разницей, что «прогоняемыми» величинами становятся матрицы и векторы.

Если  $M_2$  велико, то обращение при каждом  $m$  соответствующих матриц достаточно трудоемко. Еще более сложный алгоритм возникает при решении трехмерной задачи.

Можно сделать попытку изменить размерность оператора на верхнем слое, применив, например, схему

$$\frac{u^{n+1} - u^n}{\tau} = \Lambda_1 u^{n+1} + \Lambda_2 u^n \quad (4.9)$$

сводящуюся к трехточечным прогонкам по  $x_1$ . Однако схемы подобного рода являются условно устойчивыми. Действительно, характеристическое уравнение  $\lambda = (1 - c_2) / (1 + c_1)$  показывает, что схема устойчива лишь при  $\sigma_2 \leq 1/2$ . Возможная неустойчивость обусловлена явной аппроксимацией производной по  $x_2$ : в то время как амплитуда гармоники  $A_1(t)e^{i\alpha_1 m}$  всегда убывает, гармоника  $A_2(t)e^{i\alpha_2 p}$  при нарушении условия устойчивости  $\sigma_2 \leq 1/2$  будет возрастать по амплитуде.

Таким образом, в многомерных случаях возрастают трудности при построении простых в реализации безусловно устойчивых схем. Эти трудности не могут быть преодолены при использовании однородных схем и простейших аппроксимаций, когда интегрирование происходит единообразно от шага к шагу. Следует изменить структуру схем и перейти к более сложным аппроксимациям.

#### 4.2. Простейшие схемы дробных шагов: переменных направлений (продольно-поперечной прогонки) и стабилизирующей поправки

Вычисления по условно устойчивой схеме (4.9) несимметричны: вторая производная по  $x_1$  аппроксимируется неявно, по  $x_2$  - явно. Симметризованная схема, в которой  $x_1$  и  $x_2$  меняются ролями от шага к шагу, предложена в 1955 г. Писменом, Дугласом и Рэкфордом:

$$\frac{u^{n+1} - u^n}{\tau} = \Lambda_1 u^{n+1} + \Lambda_2 u^n, \quad \frac{u^{n+2} - u^{n+1}}{\tau} = \Lambda_1 u^{n+1} + \Lambda_2 u^{n+2} \quad (4.10)$$

(первый шаг совпадает со схемой (4.9), на втором шаге производная по  $x_1$  аппроксимируется явно, по  $x_2$  - неявно). После перехода от слоя  $n$  к слою  $n+2$  счет повторяется. Ввиду этого можно считать промежуточный слой  $n+1$  вспомогательным и рассматривать схему типа (4.10) как переход с исходного слоя  $n$  на слой  $n+1$  с вспомогательным слоем  $n+1/2$ .

В таких обозначениях схема примет вид

$$\frac{u^{n+1/2} - u^n}{\tau/2} = \Lambda_1 u^{n+1/2} + \Lambda_2 u^n, \quad \frac{u^{n+1} - u^{n+1/2}}{\tau/2} = \Lambda_1 u^{n+1/2} + \Lambda_2 u^{n+1} \quad (4.11)$$

Покажем, что после исключения вспомогательного полушага  $n+1/2$  получается безусловно устойчивая и безусловно аппроксимирующая схема. Перепишем (4.11) в виде

$$(E - \frac{\tau}{2}\Lambda_1)u^{n+1/2} = (E + \frac{\tau}{2}\Lambda_2)u^n, \quad (E - \frac{\tau}{2}\Lambda_2)u^{n+1} = (E + \frac{\tau}{2}\Lambda_1)u^{n+1/2} \quad (4.12)$$

( $E$  - единичный оператор). Умножим второе уравнение (4.12) слева на оператор  $E - (\tau/2)\Lambda_1$ . Если предположить коммутативность операторов  $\Lambda_1$  и  $\Lambda_2$  (в данном примере это очевидно), то получим однородную схему, эквивалентную двухшаговой схеме (4.11):

$$(E - \frac{\tau}{2}\Lambda_1)(E - \frac{\tau}{2}\Lambda_2)u^{n+1} = (E + \frac{\tau}{2}\Lambda_1)(E - \frac{\tau}{2}\Lambda_1)u^n = (E + \frac{\tau}{2}\Lambda_1)(E + \frac{\tau}{2}\Lambda_2)u^n$$

или

$$\frac{u^{n+1} - u^n}{\tau} = \Lambda \frac{u^n + u^{n+1}}{2} u^{n+1} - \frac{\tau^2}{4} \Lambda_1 \Lambda_2 \frac{u^{n+1} - u^n}{\tau} \quad (4.13)$$

Очевидно, что схемы (4.13) или (4.11) аппроксимирует исходную задачу с тем же порядком точности, что и неявная схема (4.4) при  $\mu = 1/2$ .

Как следует из (4.11), коэффициент перехода от слоя  $n$  к слою  $n + 1/2$  равен  $(1 - c_2/2)/(1 + c_1/2)$ , а от слоя  $n + 1/2$  к слою  $n + 1 - (1 - c_1/2)/(1 + c_2/2)$ . В итоге двух полушагов амплитуда гармоника изменится в  $\lambda$  раз:

$$\lambda = \frac{(1 - c_1/2)(1 - c_2/2)}{(1 + c_1/2)(1 + c_2/2)}$$

причем  $|\lambda| \leq 1$  при всех  $c_1, c_2$ . Таким образом, введение дополнительного дробного шага привело к безусловно устойчивой схеме, реализуемой обычными прогонками по  $x_1$  на первом полушаге и по  $x_2$  на втором полушаге. В связи с этим схемы типа (4.11) называют схемами продольно-поперечной прогонки.

Анализ множителей перехода на каждом дробном шаге показывает, что на первом полушаге ошибка по  $x_1$  уменьшается в  $1 + c_1/2$  раз, а ошибка по  $x_2$  изменяется в  $1 - c_2/2$  раз (при  $c_2 > 4$  растет), в то время как на втором полушаге ошибка по  $x_2$  уменьшается в  $1 + c_2/2$  раз, а ошибка по  $x_1$  изменяется в  $1 - c_1/2$  раз (при  $c_1 > 4$  растет). Как бы сильно ни выросла ошибка в направлении явной аппроксимации на данном полушаге, на следующем полушаге она обязательно уменьшится, так что в итоге двух шагов она не возрастает по амплитуде. Отсюда ясно преимущество данной схемы по отношению к схеме (4.9) или аналогичной однородной схеме

$$\frac{u^{n+1} - u^n}{\tau} = \Lambda_1 u^n + \Lambda_2 u^{n+1}$$

в которых ошибка в направлении явной аппроксимации будет постоянно возрастать при нарушении условия устойчивости.

Из приведенных наглядных соображений следует, что метод попеременного неявного счета непригоден в трехмерном случае, когда в каждом направлении  $x_1, x_2, x_3$  на два дробных шага с явной аппроксимацией приходится один шаг с неявной, из-за чего возрастание ошибки в явной схеме не компенсируется ее убыванием в неявной.

Для решения трехмерной задачи Дугласом и Рэкфордом предложена трехшаговая схема

$$\frac{u^{n+1/3} - u^n}{\tau} = \Lambda_1 u^{n+1/3} + (\Lambda_2 + \Lambda_3) u^n$$

$$\begin{aligned} \frac{u^{n+2/3} - u^{n+1/3}}{\tau} &= \Lambda_2(u^{n+2/3} - u^n) \\ \frac{u^{n+1} - u^{n+2/3}}{\tau} &= \Lambda_3(u^{n+1} - u^n) \end{aligned} \quad (4.14)$$

Обозначив

$A_s = E - \tau\Lambda_s$  ( $s = 1, 2, 3$ ),  $B_1 = \tau(\Lambda_2 + \Lambda_3)$ ,  $B_2 = -\tau\Lambda_2$ ,  $B_3 = -\tau\Lambda_3$  и последовательно исключая  $u^{n+1/3}$ ,  $u^{n+2/3}$ , получим эквивалентную однородную схему в целых шагах  $A_1 A_2 A_3 u^{n+1} - u^n = (B_1 + A_1 B_2 + A_1 A_2 B_3) u^n$ , откуда

$$\begin{aligned} \frac{u^{n+1} - u^n}{\tau} &= \Lambda u^{n+1} - \tau^2(\Lambda_1 \Lambda_2 + \Lambda_1 \Lambda_3 + \Lambda_2 \Lambda_3) \frac{u^{n+1} - u^n}{\tau} + \\ &+ \tau^3 \Lambda_1 \Lambda_2 \Lambda_3 \frac{u^{n+1} - u^n}{\tau}, \quad \Lambda = \Lambda_1 + \Lambda_2 + \Lambda_3 \end{aligned} \quad (4.15)$$

Для множителя перехода имеем выражение

$$\lambda = \frac{1 + c_1 c_2 + c_1 c_3 + c_2 c_3 + c_1 c_2 c_3}{(1 + c_1)(1 + c_2)(1 + c_3)} \quad (4.16)$$

Из (4.15) следует аппроксимация с первым порядком по времени, из (4.16) - безусловная устойчивость.

Как видно из (4.14), первый дробный шаг дает аппроксимацию исходного уравнения, а последующие являются поправочными и предназначены для повышения устойчивости. Поэтому такие схемы называют схемами стабилизирующей поправки (поправки на устойчивость).

### 4.3. Схемы расщепления оператора по пространственным переменным

Из предыдущего раздела следует, что аппроксимация на дробных шагах части операторов явными выражениями ухудшает устойчивость. Желание избежать этого привело к идее пользоваться на каждом дробном шаге только неявными одномерными операторами. При этом на  $s$ -м дробном шаге в правой части аппроксимируется только выражение  $k\partial^2 u / \partial x_s^2$ , а полная аппроксимация исходной задачи достигается лишь в итоге всех дробных шагов. Подобная схема расщепления оператора на дробных шагах была предложена Н.Н.Яненко в 1959 г.

Простейшая схема расщепления для уравнения теплопроводности имеет вид:

$$\left. \begin{aligned} \frac{u^{n+1/3} - u^n}{\tau} &= \Lambda_1 u^{n+1/3} \\ \frac{u^{n+2/3} - u^{n+1/3}}{\tau} &= \Lambda_1 u^{n+2/3} \\ \frac{u^{n+1} - u^{n+2/3}}{\tau} &= \Lambda_1 u^{n+1} \end{aligned} \right\} \quad (4.17)$$

Соотношения (4.17) можно переписать в виде

$$(E - \tau\Lambda_s)u^{n+s/3} = u^{n+(s-1)/3}, \quad s = 1, 2, 3 \quad (4.18)$$

что приводит после исключения  $u^{n+1/3}$  и  $u^{n+2/3}$  к эквивалентной однородной схеме

$$\prod_{s=1}^3 (E - \tau\Lambda_s)u^{n+1} = u^n$$

или

$$\frac{u^{n+1} - u^n}{\tau} = \Lambda u^{n+1} - \tau(\Lambda_1\Lambda_2 + \Lambda_1\Lambda_3 + \Lambda_2\Lambda_3)u^{n+1} + \tau^2\Lambda_1\Lambda_2\Lambda_3u^{n+1} \quad (4.19)$$

Уменьшение амплитуд гармоник на дробных шагах происходит соответственно в  $1 + c_1$ ,  $1 + c_2$ ,  $1 + c_3$  раз, откуда

$$\lambda = \frac{1}{(1 + c_1)(1 + c_2)(1 + c_3)} \quad (4.20)$$

Таким образом, схема (4.17) или (4.19) аппроксимируют исходную задачу по времени с порядком  $\tau$  и безусловно устойчива. Она реализуется последовательными прогонками вдоль направлений  $x_1, x_2, x_3$ .

Для повышения точности можно вместо (4.17) применить схему с весами

$$\left. \begin{aligned} \frac{u^{n+1/3} - u^n}{\tau} &= \Lambda_1(\mu u^{n+1/3} + (1-\mu)u^n) \\ \frac{u^{n+2/3} - u^{n+1/3}}{\tau} &= \Lambda_2(\mu u^{n+2/3} + (1-\mu)u^{n+1/3}) \\ \frac{u^{n+1} - u^{n+2/3}}{\tau} &= \Lambda_3(\mu u^{n+1} + (1-\mu)u^{n+2/3}) \end{aligned} \right\} \quad (4.21)$$

Полагая  $\mu = 1/2$  и исключая дробные шаги, приходим к схеме

$$\begin{aligned} \frac{u^{n+1} - u^n}{\tau} &= \Lambda \frac{u^{n+1} + u^n}{2} - \frac{\tau^2}{4}(\Lambda_1\Lambda_2 + \Lambda_1\Lambda_3 + \Lambda_2\Lambda_3) \frac{u^{n+1} - u^n}{\tau} + \\ &+ \frac{\tau^2}{8} \Lambda_1\Lambda_2\Lambda_3(u^{n+1} + u^n) \end{aligned}$$

имеющей второй порядок точности по времени.

Данный подход широко применяется при численном решении задач гидрогазодинамики.

Запишем соответствующую систему уравнений в матричном виде:

$$\frac{\partial U}{\partial t} + LU = 0 \quad (4.22)$$

где  $U = [\rho, \rho u_1, \rho u_2, \rho u_3, e, \dots]^T$  - вектор, определяющий движение и состояние газа,  $L$  - матричный дифференциальный оператор.

Представим оператор  $L$  как сумму  $N$  одномерных операторов  $L = \sum_{s=1}^N L_s$ , где  $N$  - число пространственных измерений задачи. (При использовании некоторых координатных систем оператор  $L$  может иметь нерасщепляемую часть  $G$ , содержащую смешанные производные и свободные члены. Здесь для простоты последующих действий оператор  $G$  опущен.) Тогда разностная схема на дробных шагах примет вид:

$$\frac{U^{n+s/N} - U^{n+(s-1)/N}}{\tau} + \Lambda_s^n U^{n+s/N} = 0, \quad s = 1, 2, 3 \quad (4.23)$$

где  $\Lambda_s^n$  - разностный одномерный оператор, аппроксимирующий  $L_s$ ; индекс  $n$  в обозначении  $\Lambda_s^n$  указывает на то, что элементы оператора, зави-



сящие от искомым функций (проекции скорости, коэффициенты теплопроводности, вязкости и т.п.) берутся на слое  $n$ , благодаря чему устраняются итерации, обусловленные нелинейностью. Исключая дробные шаги, приходим к схеме

$$\prod_{s=1}^N (E + \tau \Lambda_s^n) U^{n+1} = U^n$$

или

$$\begin{aligned} \frac{U^{n+1} - U^n}{\tau} + \Lambda^n U^{n+1} + \tau(\Lambda_1^n \Lambda_2^n + \Lambda_1^n \Lambda_3^n + \Lambda_2^n \Lambda_3^n) U^{n+1} + \\ + \tau^2 \Lambda_1^n \Lambda_2^n \Lambda_3^n U^{n+1} = 0 \quad (N = 3) \end{aligned} \quad (4.24)$$

Схема (4.24) аппроксимирует задачу (4.22) с первым порядком относительно  $\tau$ .

При реализации схемы (4.23) для гидрогазодинамических задач может возникнуть трудность, связанная с прогонками вектора  $U$  (размерность  $U$  определяется числом физических переменных задачи). В частности, плотность (или давление) в газе непосредственно связаны с его скоростью. С вычислительной стороны задача гораздо легче, когда уравнения для отдельных физических величин являются автономными.

Для придания разностной схеме подобного свойства применяют, помимо расщепления по координатам, еще и расщепление по физическим процессам. Так, конвективные и вязкостные члены в уравнении движения и члены типа  $\operatorname{div} \vec{V}$  в уравнении неразрывности относят к одному временному слою, а члены с градиентом давления в уравнении движения и производные от плотности в уравнении неразрывности - к другому. В итоге получают такую систему разностных уравнений, в которой для каждой компоненты  $U$  на определенном временном слое имеется свое автономное уравнение. В этом случае задача оказывается расщепленной на  $2N$  слоев, и схема в целых шагах имеет вид

$$\begin{aligned} \prod_{s=1}^N (E + \tau \Lambda_{1s}^n)(E + \tau \Lambda_{2s}^n) U^{n+1} = U^n \\ \Lambda_{1s}^n + \Lambda_{2s}^n = \Lambda_s^n, \quad \sum_{s=1}^N \Lambda_s^n = \Lambda^n \end{aligned} \quad (4.25)$$

Наряду с простотой реализации и безусловной устойчивостью, доказываемой на двумерных линейных аналогах, схемам расщепления в форме (4.24) или (4.25) присущи и определенные недостатки. Так, при прогонках по границам точность выполнения краевых условий составляет  $O(\tau) + O(h^2)$ . Если нестационарная постановка используется в рамках ме-

тогда установления для решения стационарной задачи, то установившееся решение, как видно из (4.19) или (4.24), зависит от величины  $\tau$ .

От указанных недостатков можно освободиться, если применить несколько иной подход к расщеплению. Проиллюстрируем этот подход для случая, когда непосредственной целью является решение аппроксимирующей разностной стационарной задачи:

$$\Lambda U = 0 \quad (4.26)$$

с  $N$  пространственными измерениями

Нередко к решению задачи (4.26) удобно подходить итерационным способом, используя хорошо разработанный аппарат решения нестационарных уравнений и поставив в соответствие этой задаче соответствующую нестационарную. Тогда отдельная итерация в решении уравнения (4.26) формально представляет собой шаг по времени, а получение решения (4.26) достигается, когда процесс перестает развиваться во времени, т.е. добавленные частные производные по времени обращаются в нуль (на практике - становятся достаточно малыми).

Пусть для метода установления первоначально сформулирована простейшая неявная схема

$$\frac{U^{n+1} - U^n}{\tau} + (\Lambda U)^{n+1} = 0 \quad (4.27)$$

Обозначим  $\Delta U = U^{n+1} - U^n$  - временное (итерационное) приращение. Тогда разностную задачу (4.27) можно записать в виде

$$\Delta U = -\tau(\Lambda U)^{n+1} \quad (4.28)$$

Приближенно представим входящее правую часть уравнения (4.28) выражение  $(\Lambda U)^{n+1}$  в виде  $(\Lambda U)^n + L^n \Delta U$ , где  $L^n = (d \Lambda U / dU)^n$  - матрица Якоби, взятая на временном слое  $t_n$ . Схема (4.28) после этого примет вид

$$(E + \tau L^n) \Delta U = -\tau(\Lambda U)^n \quad (4.29)$$

Совокупность значений  $(\Lambda U)^n$  в рассматриваемых узлах определяет сеточную функцию - невязку решения задачи (4.26) на функции  $U^n$ . Заменяем оператор  $E + \tau L^n$ , действующий на приращение  $\Delta U$ , на факторизо-

ванный оператор  $\prod_{s=1}^N (E + \tau L_s^n)$ , представляющий собой произведение одномерных разностных операторов  $E + \tau L_s^n$ . Разностная задача

$$\prod_{s=1}^N (E + \tau L_s^n) \Delta U = -\tau(\Lambda U)^n$$

эквивалентна набору задач с одномерными операторами в левых частях

$$\left. \begin{array}{l} (E + \tau L_1^n) \Delta U^{(1)} = \Delta U^{(0)} \\ \dots\dots\dots \\ (E + \tau L_N^n) \Delta U^{(N)} = \Delta U^{(N-1)} \end{array} \right\} \quad (4.30)$$

где  $\Delta U^{(0)} = -\tau(\Lambda U)^n$ ,  $\Delta U^{(N)} = \Delta U = U^{n+1} - U^n$ .

Переход от (4.29) к (4.30) можно трактовать как расщепление многомерной задачи на переходе от  $t_n$  к  $t_{n+1}$  на несколько одномерных в рамках метода дробных шагов. Как видно, при сходимости процесса к стационарному решению имеем  $\Delta U = 0$ , и результат не зависит от шага  $\tau$ .

Формулировка задачи для определения на каждом временном шаге не самих функций, а приращений к ним (так называемая «дельта-форма» записи уравнений) имеет преимущества и с точки зрения реализации граничных условий. Данный подход может быть обобщен и на собственно нестационарные (эволюционные) задачи.

## Литература

1. Самарский А.А. Введение в теорию разностных схем. М.: Наука, 199 . с.
2. Самарский А.А. Теория разностных схем. М.: Наука, 199 . с.
3. Марчук Г.И. Методы вычислительной математики. М.: Наука, 199 . с.
4. Годунов С.К., Рябенский В.С. Разностные схемы. Введение в теорию. М.: Наука, 199 . с.
5. Лойцянский Л.Г. Механика жидкости и газа. М.: Наука, 1987.840с.
6. Самарский А.А., Николаев Е.С. Методы решения сеточных уравнений. М.: Наука, 19 . с.
7. Яненко Н.Н. Метод дробных шагов решения многомерных задач математической физики. М.: Наука, 196 . с.
8. Ковеня В.М., Яненко Н.Н. Метод расщепления в задачах газовой динамики. Новосибирск: Наука, 1981. с.
9. Флетчер К. Вычислительные методы в динамике жидкости. Т. 1. М.: Наука, 199 . с.