

Министерство науки и высшего образования Российской Федерации

САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ
ПОЛИТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ ПЕТРА ВЕЛИКОГО

А. Г. Абрамов, Н. Г. Иванов, В. В. Рис

ТЕЧЕНИЯ ЖИДКОСТИ В ПОЛЯХ ОБЪЕМНЫХ СИЛ

ЛАМИНАРНЫЕ РЕЖИМЫ И УСТОЙЧИВОСТЬ СВОБОДНОКОНВЕКТИВНЫХ ТЕЧЕНИЙ

Учебное пособие

*Рекомендовано федеральным учебно-методическим
объединением в системе высшего образования
по укрупненным группам специальностей и направлений
подготовки 15.00.00 «Машиностроение»
в качестве учебного пособия для реализации
основных образовательных профессиональных программ
по направлению подготовки магистров
15.04.03 «Прикладная механика»*



ПОЛИТЕХ-ПРЕСС

Санкт-Петербургский
политехнический университет
Петра Великого

Санкт-Петербург

2020

УДК 532.517:536.25 (075.8)

ББК

А16

Рецензенты:

Доктор технических наук, профессор, главный научный сотрудник
Института теплофизики им. С. С. Кутателадзе СО РАН *В. И. Терехов*
Доктор технических наук, старший научный сотрудник,
профессор кафедры инженерной теплофизики НИУ «МЭИ» *Г. Г. Яньков*

Абрамов А. Г. Течения жидкости в полях объемных сил. Ламинарные режимы и устойчивость свободноконвективных течений: учеб. пособие / А. Г. Абрамов, Н. Г. Иванов, В. В. Рис. – СПб. : ПОЛИТЕХ-ПРЕСС, 2020. – 114 с.

Пособие отвечает содержанию рабочей программы дисциплины «Течения жидкости в полях объемных сил». В первом разделе пособия вводятся ключевые понятия и модели свободноконвективных течений, выписаны уравнения динамики вязкой жидкости с учетом силы плавучести. Во втором разделе приведены примеры ламинарных свободно- и смешанноконвективных течений, формирующихся в областях простой геометрии (вертикальный, горизонтальный и наклонный слои, прямоугольные полости), а также у нагретой вертикальной пластины. Третий раздел посвящен отдельным вопросам устойчивости свободноконвективных течений.

Пособие предназначено для магистрантов, обучающихся по направлению подготовки 03.04.01 «Прикладные математика и физика» (профиль «Модели и высокопроизводительные вычисления в физической гидродинамике»), но может быть полезным и при изучении дисциплин магистратуры по направлениям 15.04.03 «Прикладная механика», 01.04.03 «Механика и математическое моделирование», а также для студентов других направлений подготовки при обучении отдельным аспектам механики сплошных сред.

Пособие подготовлено при поддержке Российского научного фонда, грант № 18-19-00082.

Ил. 42. Табл. 6. Библиогр.: 68 назв.

Печатается по решению
Совета по издательской деятельности Ученого совета
Санкт-Петербургского политехнического университета Петра Великого

ISBN 978-5-7422-7100-0

© Абрамов А. Г., Иванов Н. Г., Рис В. В., 2020

© Санкт-Петербургский политехнический
университет Петра Великого, 2020

ОГЛАВЛЕНИЕ

СПИСОК ОБОЗНАЧЕНИЙ.....	4
ВВЕДЕНИЕ	7
1. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ И МОДЕЛИ СВОБОДНОКОНВЕКТИВНЫХ ТЕЧЕНИЙ	10
1.1. Сила Архимеда. Скорость плавучести.....	10
1.2. Уравнения динамики жидкости с учетом силы плавучести.....	12
1.3. Приближение Буссинеска для описания тепловой конвекции.....	14
1.4. Уравнения и безразмерные параметры. Теплоотдача при свободной конвекции.....	18
2. ПРИМЕРЫ ЛАМИНАРНЫХ ТЕЧЕНИЙ СО СВОБОДНОЙ КОНВЕКЦИЕЙ.....	26
2.1. Свободная конвекция в вертикальном слое	26
2.2. Смешанная конвекция в наклонном слое	29
2.3. Смешанная конвекция в подогреваемом снизу горизонтальном слое .	34
2.4. Свободная конвекция в прямоугольных полостях с разнонагретыми вертикальными стенками. Общая постановка задачи. Течение в квадратной полости	38
2.5. Свободная конвекция в прямоугольной полости, вытянутой в вертикальном направлении	43
2.6. Свободноконвективный пограничный слой на нагретой вертикальной пластине.....	50
3. УСТОЙЧИВОСТЬ ТЕЧЕНИЙ СО СВОБОДНОЙ КОНВЕКЦИЕЙ	61
3.1. Вводные замечания	61
3.2. Спектральная задача линейной теории устойчивости	62
3.3. Устойчивость равновесия неравномерно нагретой жидкости	63
3.4. Устойчивость равновесия жидкости в безграничном горизонтальном слое (задача Релея-Бенара).....	66
3.5. Устойчивость вынужденного движения в горизонтальном слое, подогреваемом снизу	77
3.6. Устойчивость свободноконвективного движения в вертикальном слое с разнонагретыми стенками	79
3.7. Устойчивость и ламинарно-турбулентный переход в свободноконвективном пограничном слое.....	90
3.8. Ламинарно-турбулентный переход в свободноконвективном пограничном слое при возмущающем действии прямоугольных препятствий.....	101
СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ.....	107

СПИСОК ОБОЗНАЧЕНИЙ

α	коэффициент теплоотдачи, Вт/(м ² ·К)
β_p	коэффициент изотермического сжатия, 1/Па
β_T	коэффициент объемного термического расширения, 1/К
δ	толщина пристенного слоя, м
Δ	приращение величины; оператор Лапласа
∇	оператор Гамильтона (набла)
θ	безразмерная температура
κ	геометрический параметр, $\kappa = H/B$
λ	коэффициент теплопроводности, Вт/(м·К)
$\lambda = \lambda^{(R)} + i\lambda^{(I)}$	декремент возмущений, включающий вещественную (R) и мнимую (I) части, 1/с
$\{\lambda_n\}, n = 1 \dots \infty$	гидродинамические моды – собственные числа краевой задачи для пространственной части возмущений
μ	динамический коэффициент вязкости, Па·с
ν	кинематический коэффициент вязкости, м ² /с
ρ	плотность, кг/м ³
τ_w	поверхностное напряжение трения, Па
φ	угол наклона слоя, рад
Ω	безразмерный параметр для частоты возмущений в СкПС; тензор завихренности, 1/с
A	градиент температуры, К/м
a	коэффициент температуропроводности, м ² /с
B	ширина прямоугольной полости, м
C_f	коэффициент трения
c_p	удельная теплоемкость при постоянном давлении, Дж/(кг·К)
$D = d^2/dx^2 - k^2$	оператор в уравнении Орра-Зоммерфельда
\vec{e}_g	орт вектора гравитационного ускорения
f	частота, Гц
\vec{F}	сила, Н
\vec{f}	объемная плотность силы, Н/м ³
$G = 4(Gr_x/4)^{1/4}$	параметр в задаче устойчивости пограничного слоя
\vec{g}, g	вектор и величина гравитационного ускорения, м/с ²
H	вертикальный размер области, м

h	ширина (полуширина) слоя, м
\vec{k}, k	волновой вектор и его величина
L	линейный масштаб задачи, высота пластины, м
l_x, l_y, l_z	ширина, высота и длина элемента МШ, м
$N = n^2\pi^2 + k^2$	параметр в задаче Релея
\vec{n}	внешняя нормаль к поверхности
n	параметр формы возмущений поперек слоя
p	давление, Па
\bar{P}	тензор напряжений, Па
Q	объемный расход, м ³ /с; Q-критерий – характеристика завихренности в поле скорости, 1/с ²
\vec{q}	вектор плотности теплового потока, Вт/м ²
R_μ	газовая постоянная, Дж/(кг·К)
\vec{r}	радиус-вектор, м
S	площадь поверхности, м ²
\dot{S}	тензор скоростей деформации, 1/с
t	время, с
T	температура, К или °С
U	масштабная скорость плавучести, м/с
u, v, w	компоненты вектора скорости, м/с
$\overline{u_i'^2}$	средние квадратичные пульсации скорости, м ² /с ²
$\vec{u}(\vec{r}), q(\vec{r}), s(\vec{r})$	пространственные амплитуды возмущений скорости, давления и температуры
V	модуль скорости, м/с; объем, м ³
x, y, z	координаты, м

Безразмерные числа:

Ar	число Архимеда, $Ar = \Delta\rho g L_s^3 / \rho\nu^2$
Gr	число Грасгофа, $Gr = g\beta_T \Delta T_s L_s^3 / \nu^2$
Nu	число Нуссельта, $Nu = \alpha L_s / \lambda$
Pe	число Пекле, $Pe = Re \cdot Pr$
Pr	число Прандтля, $Pr = \nu / a$
Ra	число Релея, $Ra = Gr \cdot Pr$
Re	число Рейнольдса, $Re = \rho V_s L_s / \mu$
Ri	число Ричардсона, $Ri = Gr / Re^2$

Нижние индексы:

0	начальное значение величины
1, 2	значения величины на границах области
∞	значение величины на большом (бесконечном) удалении
Ar	Архимед (для силы Архимеда)
b	плавучесть, <i>buoyancy</i>
bf	основное течение, <i>basic flow</i>
conv	конвективный, <i>convective</i>
crit	критический, <i>critical</i>
diff	диффузионный, <i>diffusion</i>
eff	эффективный, <i>effective</i>
h	гидростатический, <i>hydrostatic</i>
loc	локальный, <i>local</i>
m	средний, <i>mean</i>
max	максимальное значение, <i>maximum</i>
min	минимальное значение, <i>minimum</i>
s	масштабная величина, <i>scale</i>
w	твердая стенка, <i>wall</i>
x, y, z	значение величины в точке с соответствующей координатой

Верхние индексы:

*	редуцированная (модифицированная) величина
-	безразмерная величина
'	малые возмущения величины

СПИСОК СОКРАЩЕНИЙ

ЛТП	ламинарно-турбулентный переход
МШ	макрошероховатость
ПК	программный комплекс
СкПС	свободноконвективный пограничный слой
СПбПУ	Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого
CFD	Computational Fluid Dynamics
DNS	Direct Numerical Simulation
LES	Large Eddy Simulation
MPI	Message Passing Interface
SINF	Supersonic to INcompressible Flows
TDNS	Temporal (Time-developing) DNS

ВВЕДЕНИЕ

Течения жидкостей и газов могут быть разделены на вынужденные, свободноконвективные и смешанные. Вынужденное течение (или *вынужденная конвекция*, когда речь идет о переносе тепла или концентрации примеси) возникает либо при относительном движении тел и сред разного фазового состояния, либо при наложенном извне перепаде давления, либо из-за действия неконсервативных массовых сил, не связанных с эффектом плавучести (сила Кориолиса, силы электромагнитной природы в проводящих средах), а также при любой комбинации перечисленных причин.

Свободной или естественной конвекцией, которая неотделима от тепло- и/или массопереноса, называется движение жидкости или газа, вызванное исключительно силой плавучести (силой Архимеда), возникающей в поле консервативной объемной силы (обычно это сила тяжести и/или центробежная сила) при неоднородном распределении плотности. Причиной неоднородности плотности в условиях, приближенных к изобарическим, может быть температурная неоднородность среды, создающая в поле силы тяжести тепловую гравитационную конвекцию, и/или неоднородность состава многокомпонентной среды, создающая концентрационную гравитационную конвекцию. К течениям со *смешанной конвекцией* относят течения, в которых действие силы плавучести соизмеримо с действием факторов, формирующих вынужденное течение.

Эффекты свободной конвекции играют важную роль практически во всех природных явлениях и в большом числе техногенных процессов, поэтому во многих странах исследования течений со свободной конвекцией ведутся систематически и весьма интенсивно с конца XIX века. Теоретические, экспериментальные и численные исследования свободной конвекции имеют давние традиции и в нашей стране. В СССР результаты этих работ были наиболее полно собраны и отражены О.Г. Мартыненко (ИТМО им. А.В. Лыкова) и Ю.А. Соковициным (ЛПИ им. М.И. Калинина) [1]. В настоящее время научные коллективы, занимающиеся моделированием свободноконвективных течений, работают в Пермском государственном национальном исследовательском университете, Институте механики сплошных сред УрО РАН, Институте теплофизики им. С.С. Кутателадзе СО РАН, Институте проблем механики им. А.Ю. Ишлинского РАН, Исследовательском центре

им. М.В. Келдыша, Национальном исследовательском университете «Московский энергетический институт», Томском государственном университете и др.

Изучение свободноконвективных течений входит в круг основных профессиональных интересов научной группы вычислительной гидродинамики и теплообмена под руководством профессора Е.М. Смирнова, в которой работают авторы настоящего пособия. Коллектив научной группы сформирован на базе секции «Гидроаэродинамика, горение и теплообмен» Высшей школы прикладной математики и вычислительной физики Института прикладной математики и механики СПбПУ (ранее – кафедра гидроаэродинамики физико-механического факультета).

В пособии рассмотрены задачи, ряд которых решен методами вычислительной гидродинамики (CFD). Расчеты, кроме задачи из раздела 3.8, проводились с использованием развиваемого с середины 90-х годов на кафедре гидроаэродинамики СПбПУ программного комплекса (ПК) SINF, предназначенного для решения трехмерных уравнений Навье-Стокса. ПК SINF, код исследовательской направленности, позволяет проводить расчеты стационарных и нестационарных, ламинарных и турбулентных, до- и сверхзвуковых течений жидкости или газа, развивающихся, в общем случае, в областях сложной геометрии, в том числе с учетом эффектов плавучести, в условиях сопряженного теплообмена, в неподвижной и вращающейся системах отсчета, в областях с подвижными границами, при наличии свободной поверхности и др. Дискретизация уравнений выполнена по методу конечных объемов со вторым порядком точности по времени и пространству. Распараллеливание вычислений осуществлено на основе декомпозиции расчетной области на блоки сетки с применением библиотеки MPI.

Тематика пособия обусловлена содержанием учебного курса «Течения жидкости в полях объемных сил», преподаваемого в рамках магистерской программы «Модели и высокопроизводительные вычисления в физической гидрогазодинамике» (направление подготовки 03.04.01 «Прикладные математика и физика»). Пособие состоит из трех разделов, в первом из которых введены ключевые понятия и модели свободноконвективных течений, в том числе сила Архимеда и скорость всплытия, приближение Буссинеска, выписаны уравнения динамики вязкой жидкости с учетом силы плавучести, определены основные безразмерные параметры свободной конвекции.

Во втором разделе рассмотрены некоторые примеры ламинарных свободно- и смешанноконвективных течений в областях с простой геометрией, включая свободную конвекцию в вертикальном слое, смешанную конвекцию в наклонном и горизонтальном слоях, свободную конвекцию в замкнутых прямоугольных полостях с разнонагретыми вертикальными стенками, а также свободноконвективный ламинарный пограничный слой на нагретой вертикальной пластине. Задачи второго раздела изложены так, чтобы их можно было использовать для проведения практических занятий по освоению программных средств вычислительной гидроаэродинамики и теплофизики.

Третий раздел посвящен проблематике устойчивости течений со свободной конвекцией. В нем поставлена спектральная задача линейной теории устойчивости для малых возмущений, обсуждена устойчивость равновесия неравномерно нагретой жидкости. Рассмотрены вопросы устойчивости равновесия жидкости в безграничном горизонтальном слое, подогреваемом снизу, устойчивости свободноконвективного движения в вертикальном слое с разнонагретыми стенками, а также устойчивости и ламинарно-турбулентного перехода в свободноконвективном пограничном слое на нагретой вертикальной пластине.

Основными источниками литературы, использованными при подготовке настоящего пособия, стали монографии Б. Гебхарта и др. [2], Й. Джалурии [3], С. Чандрасекара [4], Г.З. Гершуни и Е.М. Жуховицкого [5], Г.З. Гершуни, Е.М. Жуховицкого и А.А. Непомнящего [6], В.И. Полежаева с соавторами [7], Дж. Тернера [8], Д. Джозефа [9], Ф. Дразина [10], О.Г. Мартыненко и П.П. Храмцова [11], М. Лаппа [12]. В содержание разделов 2 и 3 включены результаты, содержащиеся в ряде опубликованных сотрудниками научной группы статей и докладов [13-41], а также кандидатских диссертаций авторов [42-43]. Методологические аспекты и основные характеристики программного комплекса SINF описаны в работах [44-47].

Авторы считают своим долгом выразить искреннюю благодарность профессору Е.М. Смирнову за создание и руководство научно-педагогической школой в области гидроаэродинамики течений в полях массовых сил, к числу учеников и последователей которой они причисляют и себя и под влиянием достижений которой появились оригинальные разделы пособия.

Пособие подготовлено при поддержке Российского научного фонда, грант № 18-19-00082.

1. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ И МОДЕЛИ СВОБОДНОКОНВЕКТИВНЫХ ТЕЧЕНИЙ

1.1. Сила Архимеда. Скорость плавучести

Рассмотрим протяженную горизонтальную поверхность (рис. 1.1а), над которой в состоянии гидростатического равновесия находится среда (жидкость или газ) с температурой T_h и плотностью ρ_h . Поверхность имеет ту же температуру T_h везде, кроме небольшого участка в виде нагретого пятна. Распределение температуры на поверхности показано на рисунке графиком зависимости от горизонтальной координаты $T_w(x)$; максимальная температура в зоне нагрева равняется T_{max} .

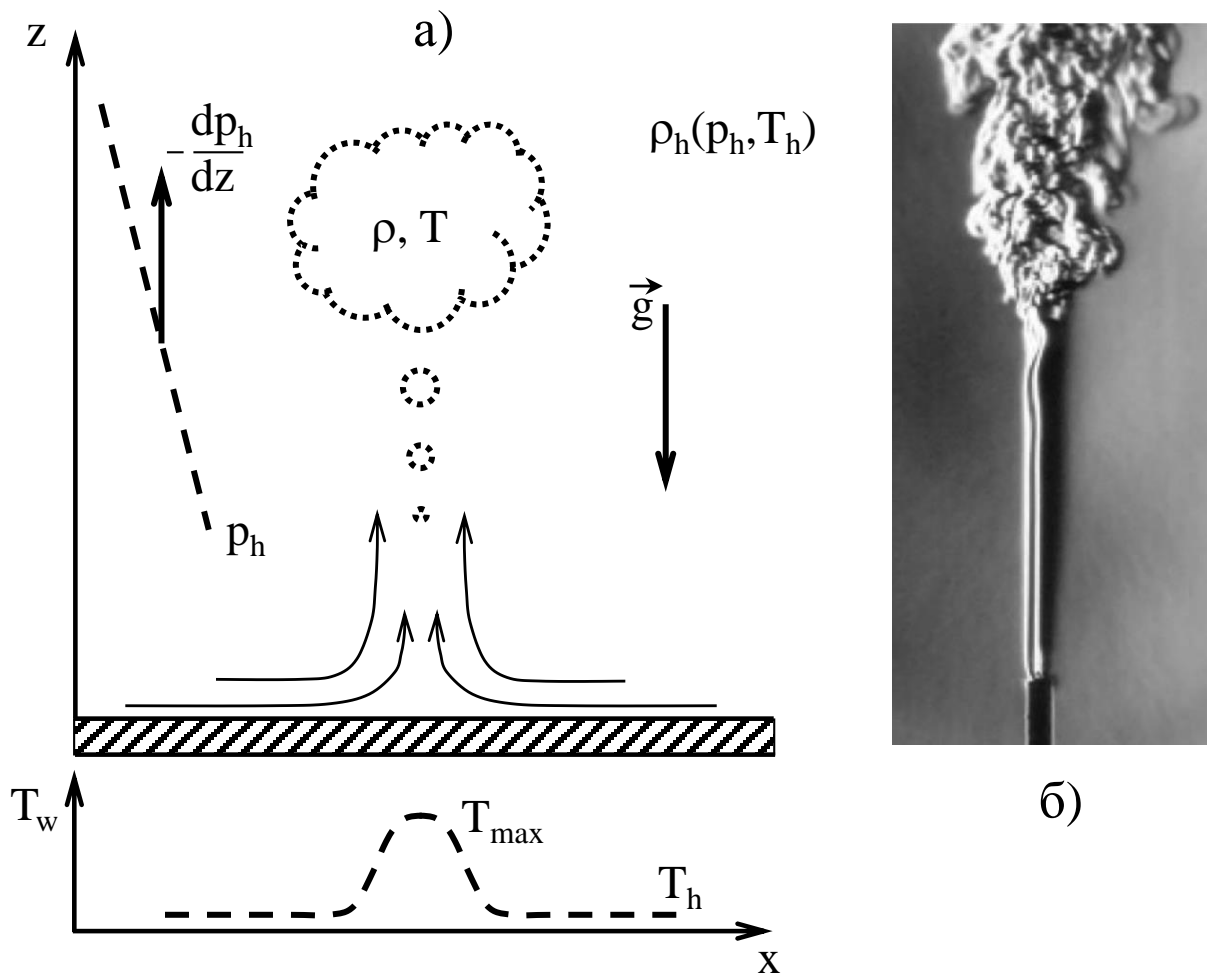


Рис. 1.1. а) Схема свободноконвективного течения над нагретым участком горизонтальной поверхности; б) факел нагретого воздуха над горящей свечой [48]

В этих условиях над нагретым участком поверхности формируется восходящее свободноконвективное течение (факел), температура T внутри

которого выше температуры окружающей среды, $T_h < T < T_{\max}$, а плотность ρ меньше плотности ρ_h (падение плотности с ростом температуры наблюдается для газов и подавляющего большинства жидкостей). Такое же явление возникает при подъемном течении нагретого воздуха, смешанного с продуктами горения свечи, см. шпирен-визуализацию на рис.1.1б [48].

В покоящейся среде давление по высоте меняется в соответствии с условием гидростатического равновесия в поле силы тяжести:

$$\text{grad } p_h = \rho_h \vec{g} \quad (1.1)$$

или в системе координат, соответствующей рис. 1.1а,

$$\frac{dp_h}{dz} = -\rho_h g. \quad (1.2)$$

Из уравнения (1.2) следует, что $p_h = p_0 - \rho_h g z$, где p_0 – давление среды на поверхности.

Для оценки динамики всплытия нагретой среды рассмотрим произвольно выбранный объем V , очерченный на рис. 1.1а пунктиром. Объем движется вверх под действием архимедовой силы \vec{F}_{Ar} (вместо термина «архимедова сила» часто используется более общий термин «сила плавучести»). Сила определяется как векторная сумма силы веса, действующей на заключенную в объеме V жидкость, и силы давления, действующей на внешнюю поверхность S рассматриваемого объема:

$$\vec{F}_{Ar} = \iiint_V \rho \vec{g} \, dV - \iint_S p \vec{n} \, dS, \quad (1.3)$$

где \vec{n} – внешняя нормаль к элементу поверхности dS . Переходя в формуле (1.3) по теореме Остроградского-Гаусса от интеграла по поверхности S к интегралу по объему V и выражая градиент давления из уравнения (1.1) через объемную плотность силы веса, получим

$$\vec{F}_{Ar} = \iiint_V (\rho - \rho_h) \vec{g} \, dV = \iiint_V \Delta \rho \vec{g} \, dV. \quad (1.4)$$

В соответствии с выражением (1.4) объемная плотность силы плавучести запишется в виде

$$\vec{f}_{Ar} = \Delta \rho \vec{g}. \quad (1.5)$$

Полученные выражения для силы плавучести и ее плотности позволяют дать приблизительную оценку скорости всплытия (иначе, скорости плавучести) нагретой жидкости, U_b . Очевидно, что на горизонтальной поверхности $U_b = 0$. Примем также, что на высоте H от поверхности скорость жидкости достигла величины U_b . Прирост удельной кинетической энергии (на единицу массы) всплывающей жидкости составит при этом $U_b^2/2$. Относя изменение кинетической энергии на счет работы силы плавучести и пренебрегая прочими эффектами, можно записать следующее равенство:

$$\frac{U_b^2}{2} = \frac{\Delta\rho}{\rho} gH .$$

Отсюда получим оценку скорости U_b в виде

$$U_b \approx \sqrt{\frac{2\Delta\rho}{\rho} gH} . \quad (1.6)$$

Например, полагая $H = 0,5$ м и $\Delta\rho = 0,02\rho_h$ при $g = 9,81$ м/с², получим для воздуха $U_b = 0,44$ м/с. В действительности характерные скорости подъемного течения в несколько раз меньше, поскольку в приведенной оценке (1.6) не учтена диссипативная роль силы вязкого трения, которую испытывает всплывающий объем среды.

Используя, с точностью до коэффициента, оценку (1.6), можно ввести в рассмотрение число Рейнольдса Re , характеризующее соотношение между масштабами сил инерции и вязкого трения в свободноконвективном потоке:

$$Re = \frac{\rho_h U_b H}{\mu} \equiv \frac{U_b H}{\nu} \approx \sqrt{\frac{\Delta\rho g H^3}{\rho\nu^2}} . \quad (1.7)$$

Квадрат введенного числа Рейнольдса называется числом Архимеда:

$$Ar = \frac{\Delta\rho g H^3}{\rho\nu^2} . \quad (1.8)$$

1.2. Уравнения динамики жидкости с учетом силы плавучести

Течения в условиях свободной конвекции, как и любые другие, подчиняются уравнению баланса массы и уравнению движения в напряжениях:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \vec{V}) = 0, \quad (1.9)$$

$$\rho \frac{d\vec{V}}{dt} = \vec{f} + \operatorname{Div} \bar{\bar{P}}, \quad (1.10)$$

где $\vec{f} = \rho \vec{g}$ и $\operatorname{Div} \bar{\bar{P}}$ – векторы удельной силы веса и объемной плотности поверхностных сил, $\bar{\bar{P}}$ – тензор напряжений.

Тензор напряжений включает в себя давление и напряжения вязкого трения, которые полагаются связанными со скоростями деформаций обобщенным законом трения Ньютона:

$$\bar{\bar{P}}^{\text{visc}} = 2\mu \dot{S} - \frac{2}{3}\mu \operatorname{div} \vec{V} \bar{\bar{E}}, \quad (1.11)$$

где μ – динамический коэффициент вязкости, \dot{S} – тензор скоростей деформаций, $\bar{\bar{E}}$ – единичный тензор. С учетом соотношения (1.11) тензор напряжений можно представить в следующем виде:

$$\bar{\bar{P}} = -\left(p + \frac{2}{3}\mu \operatorname{div} \vec{V}\right) \bar{\bar{E}} + 2\mu \dot{S}. \quad (1.12)$$

Подставив выражение (1.12) в уравнение (1.10), получим векторное уравнение Навье-Стокса для сжимаемых ньютоновских сред

$$\rho \frac{d\vec{V}}{dt} = -\operatorname{grad} p + \vec{f} + \operatorname{Div}(2\mu \dot{S}) - \frac{2}{3}\operatorname{grad}(\mu \operatorname{div} \vec{V}), \quad (1.13)$$

отражающее баланс объемной плотности силы инерции, давления, массовых сил и силы вязкого трения.

Переменная плотность делает систему уравнений (1.9) и (1.13) незамкнутой. Для замыкания требуется привлечение уравнения баланса энергии, вид которого существенно зависит от возможных процессов преобразования энергии в потоке. Выбор подходящей для описания свободной конвекции формы уравнения энергии будет сделан позже, после формулировки динамической модели свободноконвективного течения.

Как и в предыдущем разделе, будем рассматривать свободную конвекцию на фоне гидростатического равновесия среды с параметрами ρ_h и p_h ,

связанными векторным уравнением (1.1). С учетом этого уравнения и использованного в уравнении (1.4) соотношения $\rho = \rho_h + \Delta\rho$ запишем выражение для объемной плотности силы веса в виде

$$\vec{f} = \rho \vec{g} = \text{grad } p_h + \Delta\rho \vec{g}, \quad (1.14)$$

выделив в явном виде объемную плотность силы плавучести. Подставим выражение (1.14) в уравнение (1.13) и получим

$$\rho \frac{d\vec{V}}{dt} = -\text{grad}(p - p_h) + \Delta\rho \vec{g} + \text{Div}(2\mu\dot{S}) - \frac{2}{3} \text{grad}(\mu \text{div} \vec{V}). \quad (1.15)$$

Уравнение (1.15) показывает, что объемную плотность силы давления можно определять давлением, уменьшенным на величину гидростатического давления, $p^* = p - p_h$. Давление p^* принято называть редуцированным или модифицированным давлением. С учетом введения новой переменной p^* , уравнение (1.15) примет следующий вид:

$$\rho \frac{d\vec{V}}{dt} = -\text{grad } p^* + \Delta\rho \vec{g} + \text{Div}(2\mu\dot{S}) - \frac{2}{3} \text{grad}(\mu \text{div} \vec{V}). \quad (1.16)$$

В отличие от (1.13), уравнение (1.16) не содержит силы веса; ее действие можно учесть при необходимости расчета поля истинного давления p по полю модифицированного давления и найденному, например, из уравнения (1.2) полю гидростатического давления.

1.3. Приближение Буссинеска для описания тепловой конвекции

Приближение Буссинеска призвано упростить основные уравнения свободной конвекции путем выражения изменения плотности $\Delta\rho$ в уравнении движения (1.16) через изменение температуры ΔT при одновременном пренебрежении изменением плотности в уравнении неразрывности (1.9).

Плотность жидких и газообразных сред, как известно, удовлетворяет уравнению состояния в общем виде $\rho = \rho(p, T)$. Температуру T и давление p в свободноконвективном потоке будем считать мало отличающимися от некоторых характерных величин, например, средней температуры, $T_{h, m}$, и среднего давления, $p_{h, m}$, в покоящейся среде. Сопоставим плотность $\rho(p, T)$ в свободноконвективном потоке с плотностью покоящейся среды $\rho_{h, m}(p_{h, m}, T_{h, m})$; индекс

т далее опустим. Выразим плотность ρ через ρ_h , используя разложение в ряд Тейлора по двум переменным, p и T :

$$\begin{aligned} \rho = \rho_h + \left(\frac{\partial \rho}{\partial T} \right)_{p_h} \Delta T + \left(\frac{\partial \rho}{\partial p} \right)_{T_h} \Delta p + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 \rho}{\partial T^2} \right)_{p_h} (\Delta T)^2 \\ + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 \rho}{\partial p^2} \right)_{T_h} (\Delta p)^2 + \left(\frac{\partial^2 \rho}{\partial p \partial T} \right)_{p_h, T_h} \Delta T \cdot \Delta p + O\{(\Delta T)^3, (\Delta p)^3\} \end{aligned} \quad (1.17)$$

В разложении (1.17) $\Delta T = T - T_h$ и $\Delta p = p - p_h$; члены порядка $(\Delta \dots)^3$ и выше по соображениям, о которых речь пойдет ниже, не выписаны. Введем в этом разложении коэффициент объемного термического расширения

$$\beta_T = -\frac{1}{\rho_h} \left(\frac{\partial \rho}{\partial T} \right)_{p_h} \quad (1.18)$$

и коэффициент изотермического сжатия

$$\beta_p = \frac{1}{\rho_h} \left(\frac{\partial \rho}{\partial p} \right)_{T_h} . \quad (1.19)$$

В частности, для идеальных газов, описываемых уравнением состояния $\rho = p/R_\mu T$, выражения (1.18), (1.19) принимают вид

$$\beta_T = \frac{1}{T_h}, \quad \beta_p = \frac{1}{p_h}, \quad (1.20)$$

при этом величины производных в разложении (1.17) определяются соотношениями:

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial \rho}{\partial T} \right)_{p_h} = -\frac{\rho_h}{T_h} = -\rho_h \cdot \beta_T, \quad \left(\frac{\partial \rho}{\partial p} \right)_{T_h} = \frac{\rho_h}{p_h} = \rho_h \cdot \beta_p, \\ \left(\frac{\partial^2 \rho}{\partial T^2} \right)_{p_h} = \frac{2\rho_h}{T_h^2} = 2\rho_h \cdot \beta_T^2, \quad \left(\frac{\partial^2 \rho}{\partial p^2} \right)_{T_h} = -\frac{\rho_h}{p_h^2} = -\rho_h \cdot \beta_p^2, \\ \left(\frac{\partial^2 \rho}{\partial p \partial T} \right)_{p_h, T_h} = -\frac{\rho_h}{p_h \cdot T_h} = -\rho_h \cdot \beta_T \cdot \beta_p. \end{aligned} \quad (1.21)$$

Подставив выражения (1.21) в разложение (1.17), получим

$$\frac{\rho - \rho_h}{\rho_h} = -\beta_T \Delta T + \beta_p \Delta p + (\beta_T \Delta T)^2 - \frac{1}{2} (\beta_p \Delta p)^2 - \beta_T \Delta T \cdot \beta_p \Delta p + O\left\{(\beta_T \Delta T)^3, (\beta_p \Delta p)^3\right\}. \quad (1.22)$$

Для случая $\beta_T \Delta T \ll 1$ и $\beta_p \Delta p \ll 1$ в разложении (1.22) можно ограничиться только первыми двумя членами:

$$\frac{\rho - \rho_h}{\rho_h} = -\beta_T \Delta T + \beta_p \Delta p. \quad (1.23)$$

Рассмотрим, насколько справедливым при свободной конвекции может быть сделанное предположение о малости величин $\beta_T \Delta T$ и $\beta_p \Delta p$. В условиях, часто выполняющихся для газов в природе и технических приложениях, величина β_T имеет порядок от 10^{-3} до 10^{-2} . Вследствие этого, при перепадах температур $\Delta T \approx 1 \dots 10$ К, значениям $\beta_T \Delta T$ гарантированы величины порядка $10^{-2} \dots 10^{-1}$. Для жидкостей величина β_T еще меньше; так, например при 27°C для воды $\beta_T = 2,0 \times 10^{-4}$ 1/К, для этилового спирта $\beta_T = 1,1 \times 10^{-3}$ 1/К, а для ртути $\beta_T = 1,8 \times 10^{-4}$ 1/К [2].

Для оценки величины $\beta_p \Delta p$ предположим, что перепад давления Δp между покоящейся средой и свободноконвективным потоком не может, согласно теореме Бернулли, превышать скоростного напора, построенного по скорости плавучести, причем, в соответствии с формулой (1.6),

$$\Delta p \approx \rho_h U_b^2 / 2 \approx \Delta p g H, \text{ тогда} \quad (1.24)$$

$$\beta_p \Delta p \approx \frac{\Delta p g H}{\rho_h}. \quad (1.25)$$

Из выражения (1.25) следует, что в условиях, типичных для свободной конвекции, величина $\beta_p \Delta p$ для газов принимает значения, много меньшие единицы. Действительно, пусть при нормальных условиях ($p_h = 10^5$ Па) свободная конвекция воздуха происходит в области с вертикальным размером $H = 10$ м при уменьшении плотности на 10%, то есть $\Delta p \approx 10^{-1}$ кг/м³. В этом случае $\Delta p g H \approx 10$ Па, иначе $\beta_p \Delta p \approx 10^{-4}$ 1/Па. В слабосжимаемых капельных жидкостях реализуются существенно меньшие значения Δp , так что и величины $\beta_p \Delta p$ будут существенно меньшими, чем в газах.

Согласно выполненным оценкам, при свободной конвекции реализуется условие $\beta_p \Delta p \ll \beta_T \Delta T$. Следовательно, вторым членом в разложении (1.23) по сравнению с первым можно пренебречь, то есть

$$\frac{\Delta \rho}{\rho_h} = -\beta_T \Delta T. \quad (1.26)$$

Соотношению (1.26) отвечает уравнение состояния, связывающее температуру и плотность среды, в форме закона Гей-Люссака:

$$\rho = \rho_h(1 - \beta_T \Delta T). \quad (1.27)$$

Для завершения формулировки приближения Буссинеска остается применить оценки изменения плотности к дифференциальному уравнению баланса массы (1.9). Подставим выражение (1.27) в уравнение (1.9):

$$\frac{\partial}{\partial t} [\rho_h(1 - \beta_T \Delta T)] + \rho_h(1 - \beta_T \Delta T) \operatorname{div} \vec{V} + \vec{V} \operatorname{grad} [\rho_h(1 - \beta_T \Delta T)] = 0. \quad (1.28)$$

Учитывая, что величина ρ_h постоянна, и приращение плотности $\beta_T \Delta T$ мало, уравнение (1.28) приводится к уравнению неразрывности для несжимаемой среды

$$\operatorname{div} \vec{V} = 0. \quad (1.29)$$

В соответствии с формулами (1.5) и (1.26), в приближении Буссинеска объемная плотность силы плавучести имеет вид

$$\vec{f}_{Ar} = \beta_T (T_h - T) \rho_h \vec{g}. \quad (1.30)$$

С учетом произведенных преобразований, уравнения Навье-Стокса (1.16) можно переписать в следующем виде:

$$\rho_h \frac{d \vec{V}}{dt} = -\operatorname{grad} p^* + \beta_T (T_h - T) \rho_h \vec{g} + \operatorname{Div} (2\mu \dot{S}). \quad (1.31)$$

При небольших перепадах температуры $(T_h - T)$ уместно положить постоянной вязкость среды, тогда уравнение (1.31) примет вид, характерный для несжимаемых сред:

$$\frac{d \vec{V}}{dt} = -\frac{1}{\rho_h} \operatorname{grad} p^* + \beta_T (T_h - T) \vec{g} + \nu \Delta \vec{V}. \quad (1.32)$$

Уравнения (1.29) и (1.32) должны быть дополнены уравнением, описывающим поле температуры в свободноконвективном потоке, то есть дифференциальным уравнением баланса энергии. Уравнение энергии запишем в форме уравнения баланса тепла для несжимаемой жидкости с постоянными физическими свойствами (теплопроводность, теплоемкость), пренебрегая внутренними источниками тепла и вязкой диссипацией:

$$\frac{dT}{dt} = a\Delta T, \quad (1.33)$$

где $a = \lambda/\rho_h c_p$ – коэффициент температуропроводности среды, λ – коэффициент теплопроводности, c_p – удельная теплоемкость при постоянном давлении.

Следует отметить, что в литературе наряду с термином «приближение Буссинеска» часто используется другой термин – «приближение Обербека-Буссинеска» (см., например, [9]). Дело в том, что описанная в настоящем разделе упрощенная форма уравнений Навье-Стокса впервые была предложена Обербеком в 1879 году как приближение низшего порядка по коэффициенту объемного расширения [49], и лишь спустя более двадцати лет она была выведена и опубликована Буссинеском на основании предположения о возможности пренебречь изменением плотности в уравнении неразрывности, сохраняя в членах с массовыми силами вызывающую свободную конвекцию разность плотностей, записанную через разность температур [50].

1.4. Уравнения и безразмерные параметры.

Теплоотдача при свободной конвекции

Во втором разделе пособия будут рассмотрены примеры свободноконвективных течений в областях с простой геометрией. В качестве подготовительного шага запишем уравнения (1.29), (1.32) и (1.33) в декартовой системе координат, положив, что ось z направлена вертикально вверх:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0, \quad (1.34)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} = -\frac{1}{\rho_h} \frac{\partial p^*}{\partial x} + \nu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right), \quad (1.35)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} = -\frac{1}{\rho_h} \frac{\partial p^*}{\partial y} + v \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \right), \quad (1.36)$$

$$\frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z} = -\frac{1}{\rho_h} \frac{\partial p^*}{\partial z} + g\beta_T(T - T_h) + v \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \right), \quad (1.37)$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} + u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} + w \frac{\partial T}{\partial z} = a \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right). \quad (1.38)$$

Для приведения уравнений (1.29), (1.32) и (1.33) к безразмерному виду введем следующие масштабы аргументов и зависимых величин: L_s – линейный масштаб, t_s – масштаб времени, V_s – масштаб скорости, ΔT_s – масштаб температуры (изменения температуры) и p_s – масштаб давления (изменения давления). Подставим в эти уравнения вместо размерных величин произведения безразмерных величин на соответствующие масштабы (безразмерные величины помечены здесь горизонтальной чертой сверху):

$$\frac{V_s}{L_s} \operatorname{div} \bar{\mathbf{V}} = 0, \quad (1.39)$$

$$\frac{V_s}{t_s} \frac{\partial \bar{\mathbf{V}}}{\partial \bar{t}} + \frac{V_s^2}{L_s} (\bar{\mathbf{V}} \cdot \nabla) \bar{\mathbf{V}} = -\frac{p_s}{\rho_h L_s} \operatorname{grad} \bar{p}^* + \beta_T \Delta T_s g \bar{T} + \frac{v V_s}{L_s^2} v \Delta \bar{\mathbf{V}}, \quad (1.40)$$

$$\frac{\Delta T_s}{t_s} \frac{\partial \bar{T}}{\partial \bar{t}} + \frac{\Delta T_s V_s}{L_s} \bar{\mathbf{V}} \operatorname{grad} \bar{T} = \frac{a \Delta T_s}{L_s^2} \Delta \bar{T}. \quad (1.41)$$

Далее горизонтальную черту в обозначении безразмерных величин опустим, а безразмерную температуру $\bar{T} = (T_h - T)/\Delta T_s$ обозначим буквой θ . В качестве масштаба времени выберем отношение $t_s = L_s/V_s$, за масштаб скорости примем скорость плавучести, определенную через линейный масштаб L_s и масштаб относительного изменения плотности $\Delta \rho_s/\rho_h$, определенный в соответствии с формулой (1.26) через характерный перепад температуры:

$$V_s = U_b = \sqrt{g\beta_T \Delta T_s L_s}. \quad (1.42)$$

Выражение (1.42) привязывает масштаб удельной силы инерции V_s^2/L_s к масштабу силы плавучести $g\beta_T \Delta T_s$, что оправдано, когда сила плавучести – единственный источник движения. Масштабом изменения давления назначим удвоенный скоростной напор $p_s = \rho_h V_s^2$. В уравнениях (1.40), (1.41) отнесем

все слагаемые к масштабу плотности силы инерции V_s^2/L_s и, подставив назначенные масштабы, получим:

$$\operatorname{div} \vec{V} = 0, \quad (1.43)$$

$$\frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + (\vec{V} \cdot \nabla) \vec{V} = -\operatorname{grad} p^* + \vec{e}_g \theta + \frac{v}{\sqrt{g\beta_T \Delta T_s L_s^3}} \Delta \vec{V}, \quad (1.44)$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} + \vec{V} \operatorname{grad} \theta = \frac{a}{\sqrt{g\beta_T \Delta T_s L_s^3}} \Delta \theta, \quad (1.45)$$

В уравнении (1.44) \vec{e}_g – орт вектора гравитационного ускорения.

По аналогии с неизотермическими вынужденными течениями безразмерные комплексы (определяющие числа или критерии подобия), состоящие из масштабов течения, физических параметров и свойств среды, можно трактовать как числа Рейнольдса Re и Пекле Pe , в которых масштабом скорости служит скорость плавучести,

$$Re = V_s L_s / v = \frac{\sqrt{g\beta_T \Delta T_s L_s^3}}{v} \text{ – число Рейнольдса,} \quad (1.46)$$

$$Pe = V_s L_s / a = \frac{\sqrt{g\beta_T \Delta T_s L_s^3}}{a} = Re \cdot Pr \text{ – число Пекле,} \quad (1.47)$$

$$Pr = v/a \text{ – число Прандтля.} \quad (1.48)$$

Известно, что число Рейнольдса является мерой соотношения между масштабами сил инерции и вязкого трения и поэтому лишь опосредовано, через пространственную неравномерность поля скорости, отражает влияние силы плавучести, вызывающей свободноконвективное течение. Число Пекле характеризует отношение интенсивности конвективного переноса тепла (при скоростях порядка скорости плавучести) и переноса тепла теплопроводностью. Число Прандтля, составляющее вместе с числом Рейнольдса число Пекле, характеризует соотношение между интенсивностью молекулярного переноса импульса и интенсивностью переноса тепла за счет теплопроводности и является по сути характеристикой среды и ее термодинамического состояния.

Богатый опыт экспериментальных, расчетных и аналитических исследований свободной конвекции и практического использования ее эффектов

опирается на описание свободноконвективных режимов и параметров не с помощью числа Рейнольдса, а на основе другого критерия подобия, непосредственно отражающего влияние силы плавучести – числа Грасгофа

$$Gr = Re^2 = \frac{g\beta_T \Delta T_s L_s^3}{\nu^2}. \quad (1.49)$$

Наряду с числом Грасгофа при анализе свободноконвективных течений применяется и число Релея

$$Ra = Gr \cdot Pr = \frac{g\beta_T \Delta T_s L_s^3}{\nu \alpha}. \quad (1.50)$$

Число Грасгофа по своему смыслу аналогично введенному ранее числу Архимеда (1.8), а число Релея используется при сравнении эффектов свободной конвекции в средах с различными теплофизическими свойствами.

В итоге безразмерную форму уравнений Навье-Стокса и энергии для свободноконвективного течения и теплообмена (1.43–1.45) запишем, используя числа Грасгофа и Прандтля:

$$\operatorname{div} \vec{V} = 0, \quad (1.51)$$

$$\frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + (\vec{V} \cdot \nabla) \vec{V} = -\operatorname{grad} p^* + \vec{e}_g \theta + \frac{1}{\sqrt{Gr}} \Delta \vec{V}, \quad (1.52)$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} + \vec{V} \operatorname{grad} \theta = \frac{1}{Pr \sqrt{Gr}} \Delta \theta. \quad (1.53)$$

Влияние свободной конвекции может быть также весьма заметным в исходно вынужденных течениях, когда существенна роль силы плавучести на фоне действия приложенной извне силы давления или иных факторов негравитационной природы, например, сил со стороны электромагнитных полей или сил, появляющихся в неинерциальных, в частности, вращающихся системах отсчета. В этих случаях тип течения (конвекции) определяется как смешанный: вынужденно-свободный или свободно-вынужденный, а сама конвекция носит название смешанной. При смешанной конвекции масштаб силы инерции следует задавать независимо от масштаба силы плавучести, которая перестает быть единственным источником конвекции. В результате, отнеся все слагаемые уравнений (1.40), (1.41) к масштабу силы инерции V_s^2/L_s , получим:

$$\operatorname{div} \vec{V} = 0, \quad (1.54)$$

$$\frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + (\vec{V} \cdot \nabla) \vec{V} = -\operatorname{grad} p^* + \frac{Gr}{Re^2} \vec{e}_g \theta + \frac{1}{Re} \Delta \vec{V}, \quad (1.55)$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} + \vec{V} \operatorname{grad} \theta = \frac{1}{Pe} \Delta \theta. \quad (1.56)$$

В этих уравнениях число Грасгофа определено, как и выше, формулой (1.49), а число Рейнольдса, отражающее роль вынужденной конвекции, определено в традиционной для него форме – $Re = V_s L_s / \nu$.

Критериальный комплекс Gr/Re^2 называют числом Ричардсона Ri . Число Ri является отношением масштабов удельных кинетических энергий свободноконвективного и вынужденного течений и при правильном выборе масштабов отражает вклад эффектов плавучести в картину течения при смешанной конвекции. Обычно, если величина Gr/Re^2 имеет порядок 10^{-3} и меньше, роль свободной конвекции в неизотермическом потоке пренебрежимо мала.

Граничные и начальные условия для уравнений, описывающих свободную или смешанную конвекцию, остаются такими же, как и для любых других течений вязких сред. Среди граничных условий отметим условие прилипания на твердой поверхности и различные тепловые условия на ней: условие заданной температуры (первого рода), заданного теплового потока (второго рода) или условие теплообмена (третьего рода).

При свободной и смешанной конвекции, как и при вынужденной, теплоотдача твердой поверхности к омывающей ее среде описывается законом Ньютона:

$$q_w = -\lambda \left(\frac{dT}{dn} \right)_w = \alpha (T_w - T_h), \quad (1.57)$$

где q_w – удельный тепловой поток на стенке, Вт/м², λ – коэффициент теплопроводности протекающей вдоль стенки среды, Вт/(м·К), n – расстояние по нормали от стенки, $(\dots)_w$ – значение производной на стенке, α – коэффициент теплоотдачи, Вт/(м²·К). В формуле (1.57) величину T_h следует понимать как характерную температуру, не связанную с температурой стенки, например, взятую на удалении от нее или определенную специальным образом. Приводя

уравнение (1.57) к безразмерному виду с теми же масштабами, что и ранее, получим

$$\left(\frac{d\theta}{dn}\right)_w = Nu \cdot \theta, \quad (1.58)$$

где $Nu = \alpha \cdot L_s / \lambda$ – число Нуссельта, основной определяемый критерий конвективного теплообмена, то есть такой, значение которого находится в результате экспериментального и/или расчетно-теоретического исследования.

Число Нуссельта характеризует отношение полного теплового потока, определенного суммой конвективного и диффузионного (кондуктивного, вызванного теплопроводностью) потоков, $q_{w, conv} + q_{w, diff}$, к диффузионному потоку. В отсутствие конвективного переноса тепла, то есть когда левая часть в уравнении (1.33) равна нулю, $Nu = 1$, а при его наличии число Nu становится большим единицы. Число Нуссельта может иметь локальное значение, Nu_{loc} , определяемое локальными значениями температуры и теплового потока на стенке, или среднее (интегральное) значение для всей теплопередающей поверхности. Для последнего мы будем использовать с соответствующими пояснениями такое же обозначение (Nu), как и в формуле (1.58).

Значения числа Нуссельта определяются интенсивностью конвекции (число Грасгофа), физическими свойствами среды (число Прандтля), геометрией теплоотдающей поверхности, ее ориентацией относительно силы тяжести; они существенно различаются для ламинарных, переходных и турбулентных режимов течения. Эффекты свободной конвекции по-разному проявляются во внешних и внутренних течениях, что также вносит большое разнообразие в локальные и интегральные характеристики теплоотдачи при свободной конвекции. В целом, диапазон возможных значений коэффициента теплоотдачи при свободной конвекции лежит в пределах $10^0 \dots 10^3$ Вт/(м²·К).

Для геометрически подобных тел и подобных внутренних конфигураций пространства зависимости для среднего числа Нуссельта при свободной конвекции имеют вид

$$Nu = C Gr^m Pr^n, \quad (1.59)$$

где C – константа. При смешанной конвекции зависимости числа Nu от определяющих критериев могут носить более сложный характер, что связано с

многообразием проявления и взаимодействия эффектов свободного и вынужденного движения:

$$Nu = F(Ri^n, Gr^p, Re^q, Pr^r). \quad (1.60)$$

В ряде случаев с удовлетворительной точностью теплоотдача при свободной конвекции описывается степенной зависимостью относительно числа Релея, что соответствует $n = m$ в выражении (1.59):

$$Nu = C Ra^m. \quad (1.61)$$

В таблице 1.1 в качестве примера приведены значения C и m для ряда характерных свободноконвективных течений.

Таблица 1.1. Формулы для интегральных значений числа Нуссельта

Объект	Диапазон Ra	C	m
Вертикальная плоская или цилиндрическая поверхности, ламинарный режим турбулентный режим	$10^4 \dots 10^9$	0,59	0,25
	$10^9 \dots 10^{13}$	0,10	0,333
Горизонтальный цилиндр ламинарный режим турбулентный режим	$10^4 \dots 10^9$	0,53	0,25
	$10^9 \dots 10^{12}$	0,13	0,333
Шар	$0 \dots 10^{12}$	0,6	0,25
Горизонтальная плоская поверхность, обращенная вверх, горячая $T_w > T_\infty$ холодная $T_w < T_\infty$	$2 \times 10^4 \dots 8 \times 10^6$	0,54	0,25
	$10^5 \dots 10^{11}$	0,58	0,2
Горизонтальная плоская поверхность, обращенная вниз, горячая $T_w > T_\infty$ холодная $T_w < T_\infty$	$10^5 \dots 10^{11}$	0,58	0,2
	$8 \times 10^6 \dots 10^{11}$	0,15	0,333

Числа Релея определены в таблице таким образом, что за характерный размер L_s принимается либо высота (для вертикальных поверхностей), либо – для горизонтальной поверхности – какой-либо из ее горизонтальных размеров, либо диаметр (для горизонтального цилиндра и шара). Масштаб температуры

определен как $\Delta T_s = |T_w - T_\infty|$ (T_∞ – температура среды на удалении от поверхности, то есть то же, что и T_h). Теплофизические свойства среды определены при температуре, равной среднеарифметической: $(T_w + T_\infty)/2$.

Данные таблицы позволяют для большинства приведенных случаев зафиксировать характерную разницу значений показателей степени m для ламинарных ($m = 0,25$) и турбулентных ($m = 0,333$) режимов течений.

2. ПРИМЕРЫ ЛАМИНАРНЫХ ТЕЧЕНИЙ СО СВОБОДНОЙ КОНВЕКЦИЕЙ

2.1. Свободная конвекция в вертикальном слое

Рассмотрим стационарную ламинарную свободную конвекцию в слое жидкости между двумя разнонагретыми вертикальными стенками, неограниченными в координатных направлениях y и z (рис. 2.1). Слой имеет ширину $2h$ (в направлении x), а его стенки поддерживаются при постоянных температурах T_{w1} и T_{w2} , причем $T_{w2} > T_{w1}$. На практике такие условия могут быть характерными для узких вертикальных слоев.

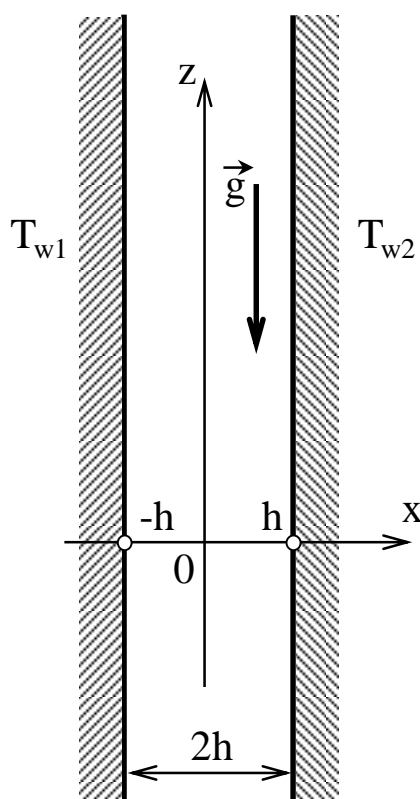


Рис. 2.1. Вертикальный слой жидкости между параллельными стенками

Неограниченная протяженность слоя позволяет считать течение в нем строго вертикальным и одинаковым (однородным) во всех поперечных сечениях $z = const$, поэтому в уравнениях (1.34–1.38) компоненты скорости u и v , а также все производные по y и z равны нулю. В результате уравнения Навье-Стокса и неразрывности (1.34–1.37), а также уравнение баланса тепла (1.38) сводятся к двум одномерным уравнениям – уравнению движения в проекции на ось z , отражающему баланс сил вязкого трения и плавучести, и уравнению теплопроводности в слое между горячей и холодной стенками:

$$\nu \frac{d^2 w}{dx^2} + g\beta_T (T - T_h) = 0, \quad (2.1)$$

$$a \frac{d^2 T}{dx^2} = 0. \quad (2.2)$$

Из уравнения (2.2) непосредственно следует, что течение в вертикальном слое не создает конвективного теплопереноса. Уравнения (2.1), (2.2) решаются при следующих граничных условиях:

$$\text{для скорости } w = 0 \text{ при } x = \pm h \quad (2.3)$$

$$\text{и для температуры } T = T_{w1} \text{ при } x = -h, T = T_{w2} \text{ при } x = h. \quad (2.4)$$

Введем в качестве переменной разность температур $T^* = T - T_h$. Тогда уравнения (2.1), (2.2) и граничные условия для температуры (2.4) примут вид:

$$\nu \frac{d^2 w}{dx^2} + g\beta_T T^* = 0, \quad (2.5)$$

$$a \frac{d^2 T^*}{dx^2} = 0, \quad (2.6)$$

$$T^* = -T_w^* \text{ при } x = -h, T^* = T_w^* \text{ при } x = h. \quad (2.7)$$

Решение уравнения (2.6) с учетом граничных условий (2.7) – линейное распределение температуры, определяемое только теплопроводностью:

$$T^* = T_w^* \cdot x/h, \quad (2.8)$$

или в безразмерной форме $\bar{T} = \bar{x}$, где $\bar{x} = x/h$ и $\bar{T} = T^*/T_w^*$ – безразмерные координата и температура, соответственно.

Подставив зависимость для распределения температуры поперек слоя (2.8) в уравнение для поля скорости (2.5) и проинтегрировав его с учетом граничных условий (2.3), получим искомое распределение скорости поперек слоя:

$$w = \frac{g\beta_T T_w h^2}{6\nu} \left(\frac{\bar{x}}{x} - \frac{\bar{x}^3}{x^3} \right). \quad (2.9)$$

Перепишем формулу (2.9), введя в рассмотрение линейный масштаб $L_s = 2h$, масштаб температуры $\Delta T_s = 2T_w$ и масштаб скорости $V_s = \nu/L_s$:

$$\bar{w} = \frac{Gr}{48} \left(\bar{x} - \bar{x}^3 \right), \quad (2.10)$$

где число Грасгофа, определенное по ширине слоя и полному перепаду температуры через слой, $Gr = \frac{g\beta_T(\Delta T)_s L_s^3}{\nu^2} = 16 \frac{g\beta_T T^* h^3}{\nu^2}$. Используя формулу (2.10), найдем положение и величину максимума скорости подъемного и опускного течений. Из условия экстремума $d\bar{w}/d\bar{x} = 0$ следует, что в точках $\bar{x} = \pm\sqrt{1/3}$, безразмерная скорость достигает величины

$$\bar{w}_{\max} = 8 \times 10^{-3} Gr. \quad (2.11)$$

Из этого равенства следует, что в вертикальном узком зазоре максимальная скорость ламинарного свободноконвективного течения пропорциональна числу Грасгофа.

На рис. 2.2 показаны распределения скорости и температуры, отвечающие формулам (2.8), (2.9). Введя в рассмотрение для этой задачи число Рейнольдса $Re = w_{\max} L_s / \nu$, которое, по сути, является нормализованной максимальной скоростью подъемного или опускного течений, выражение (2.11) можно представить в виде $Re = 8 \times 10^{-3} Gr$.

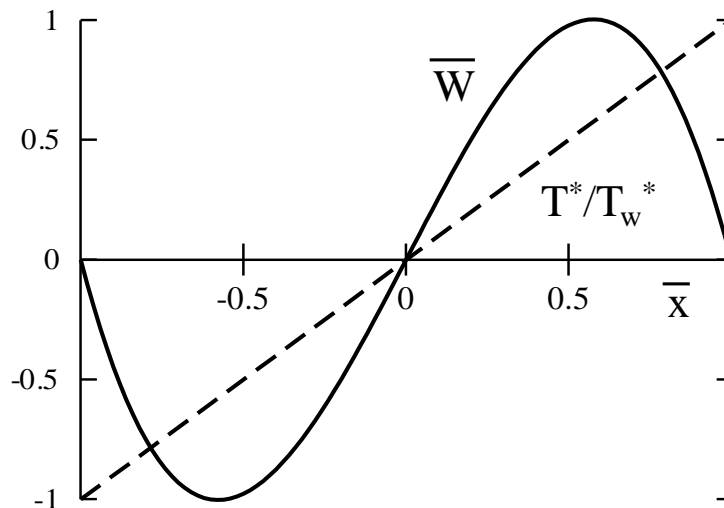


Рис. 2.2. Распределения скорости и температуры в бесконечном вертикальном слое с разнагретыми стенками

В заключение вычислим значение числа Нуссельта $Nu = \alpha \cdot (2h) / \lambda$, помня, что в этой задаче перенос тепла между стенками осуществляется только теплопроводностью. Коэффициент теплоотдачи α находится из выражения

$\alpha = q_w / (T_{w2} - T_{w1})$ с учетом того, что удельный тепловой поток $q_w = -\lambda(dT/dx)_w = (T_{w2} - T_{w1}) / (2h)$ такой же, как и для теплопроводного плоского слоя. Отсюда следует, что в данной задаче $Nu = 1$.

2.2. Смешанная конвекция в наклонном слое

Как и в разделе 2.1, будем рассматривать стационарное ламинарное течение в слое шириной $2h$ между стенками, безграничными в координатных направлениях y и z (рис. 2.3). Температура стенок: T_w^* и $-T_w^*$. Положим, что стенки наклонены относительно вертикального направления; угол между направлением гравитационного ускорения \vec{g} и продольной осью z равен φ . Вертикальный слой на рис 2.1, очевидно, соответствует случаю $\varphi = \pi$.

В отличие от предыдущей задачи допустим, что вдоль слоя в направлении оси z существует вынужденное течение, вызванное градиентом давления $\partial p^* / \partial z$. Будем считать, что на фоне вынужденного течения существенно влияние свободной конвекции. Результирующее смешанноконвективное течение будем полагать однородным в направлениях y и z . Таким образом, поля скорости и температуры можно рассматривать как зависящие только от переменной x .

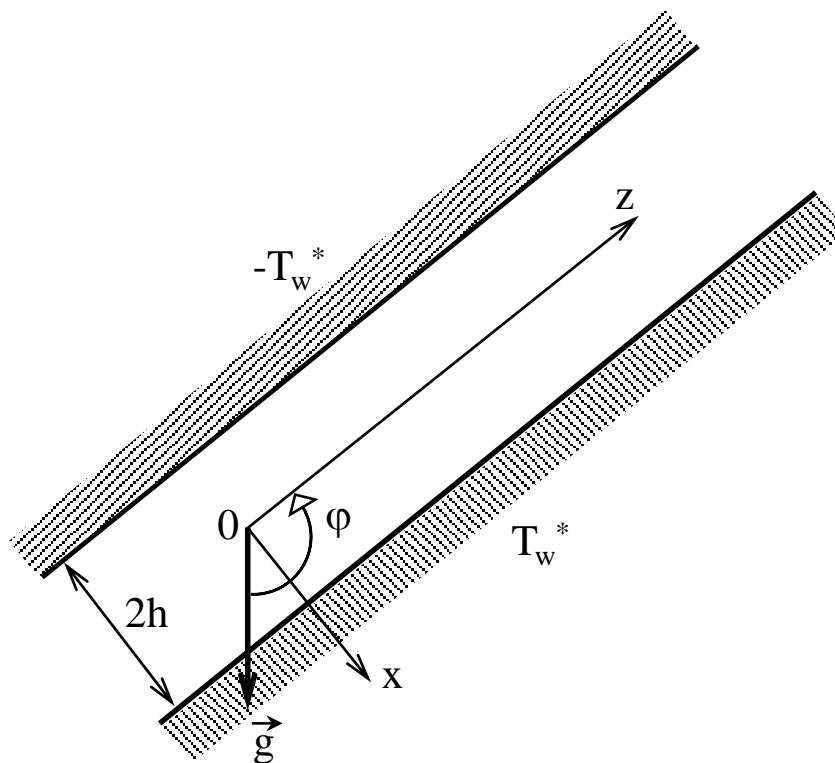


Рис. 2.3. Наклонный слой жидкости между параллельными стенками

В выбранной системе координат поле скорости имеет единственную компоненту $w(x)$. Для описания течения данного типа воспользуемся теми же соображениями, что и в разделе 2.1, и запишем упрощенные уравнения Навье-Стокса и конвективного теплообмена, аналогичные уравнениям (2.5) и (2.6), в следующем виде:

$$0 = -\frac{1}{\rho_h} \frac{\partial p^*}{\partial z} + g\beta_T T^* \cos(\pi - \varphi) + \nu \frac{d^2 w}{dx^2}, \quad (2.12)$$

$$a \frac{d^2 T^*}{dx^2} = 0 \quad (2.13)$$

с граничными условиями прилипания

$$w = 0 \text{ при } x = \pm h \quad (2.14)$$

и заданной температурой стенок

$$T^* = -T_w^* \text{ при } x = -h, T^* = T_w^* \text{ при } x = h. \quad (2.15)$$

Решением уравнения (2.13), как и в задаче из раздела 2.1, служит линейное распределение температуры поперек слоя:

$$T^* = T_w^* \cdot x/h. \quad (2.16)$$

Из уравнений движения (2.12) найдем удовлетворяющее поставленной задаче распределение модифицированного давления в слое. Для этого проинтегрируем проекцию уравнения движения на Ox , отражающую баланс соответствующей проекции силы плавучести и поперечного градиента давления, по x

$$\frac{p^*}{\rho} = -\int_0^x g\beta_T T^* \sin \varphi dx + C(z)$$

и подставим вычисленный интеграл в уравнение (2.12). Полученное уравнение представим в обобщенной форме, учтя зависимости отдельных слагаемых от пространственных переменных:

$$dC(z)/dz + F(x) = 0. \quad (2.17)$$

Уравнение (2.17) выполняется только в случае, если $dC(z)/dz = const$, то есть давление должно быть линейной функцией координаты z . Обозначим постоянную z -компоненту градиента давления как $-\frac{1}{\rho} \frac{\partial p^*}{\partial z} = C_0$ и, учтя решение уравнения конвективного теплообмена (2.16), запишем уравнение (2.17) в виде:

$$\frac{d^2 w}{dx^2} = -\frac{C_0}{\nu} + Bx, \quad (2.18)$$

где $B = g \cdot \cos \varphi \cdot \beta_T \cdot T_w^* / (\nu h)$ – параметр, определяющий влияние плавучести. Решением уравнения (2.18) с учетом граничных условий для скорости (2.14) будет выражение:

$$w = \frac{C_0}{2\nu} (h^2 - x^2) + \frac{B}{6} (x^3 - x h^2) = \frac{C_0 h^2}{2\nu} \left(1 - \bar{x}^2\right) + \frac{B h^3}{6} \left(\bar{x}^3 - \bar{x}\right), \quad (2.19)$$

в котором первое слагаемое учитывает вклад вынужденноконвективной составляющей поля скорости, а второе – свободноконвективной (здесь, как и ранее, $\bar{x} = x/h$ – нормированная координата).

Объемный расход Q жидкости, протекающей через слой, определяется вынужденной компонентой движения. Действительно, получим выражение для расхода, проинтегрировав зависимость для скорости (2.19) поперек слоя и, так как интеграл от нечетной функции в симметричных пределах равен нулю, имеем:

$$Q = \int_{-h}^h w \cdot dx = \frac{2}{3} C_0 \frac{h^3}{\nu}, \quad (2.20)$$

здесь размерность объемного расхода – m^2/s .

В выбранной системе координат жидкость течет в направлении оси z , если градиент давления направлен в противоположную сторону, и наоборот в противном случае. При отсутствии наложенного градиента давления, то есть при $C_0 = 0$, реализуется свободноконвективное течение, рассмотренное в разделе 2.1, когда расходы подъемного и опускного течений одинаковы и $Q = 0$. Если при этом положить $\varphi = \pi$, распределение скорости примет вид (2.9). При $\varphi = \pi/2$ (или $3\pi/2$) зазор ориентирован горизонтально, соответственно $B = 0$, и

распределение скорости отвечает чисто вынужденному течению. При вынужденном движении в горизонтальном слое с разнонагретыми границами, тем не менее, возможно развитие и свободноконвективного движения, связанное с потерей устойчивости равновесного состояния. Эта задача обсуждается далее в разделах 2.3 и 3.5.

Рассмотрим, как меняется распределение скорости в зазоре в зависимости от соотношения свободно- и вынужденноконвективной составляющих течения. Введем в качестве масштаба скорости среднерасходную скорость $V_s = Q/(2h)$. За линейный масштаб L_s примем, как и ранее, ширину зазора $2h$, а в качестве масштабного перепада температур – величину $2T_w^*$. Интенсивность вынужденной составляющей течения будем характеризовать числом Рейнольдса $Re = V_s L_s / \nu = Q / \nu$, а свободноконвективной – введенным выше (см. раздел 2.1) числом Грасгофа $Gr = 16(g\beta_T T_w h^3) / \nu^2$. Используя данные параметры подобия, перепишем выражение для распределения скорости (2.19) в безразмерном виде:

$$\bar{w} = \frac{w}{w_s} = \frac{3}{2} \left(1 - \bar{x}^2 \right) + \frac{1}{48} \frac{Gr}{Re} \left(\bar{x}^3 - \bar{x} \right) \cos \varphi. \quad (2.21)$$

В этом соотношении угол наклона φ выступает в качестве параметра, характерного для свободной конвекции, наравне с числом Грасгофа. Для оценки роли свободной конвекции введем эффективное число Грасгофа $Gr_{eff} = Gr \cdot |\cos \varphi|$ и рассмотрим зависимость (2.21) в форме:

$$\bar{w} = \frac{w}{w_s} = \frac{3}{2} \left(1 - \bar{x}^2 \right) + \frac{1}{48} \frac{Gr_{eff}}{Re} \left(\bar{x}^3 - \bar{x} \right) \text{sign}(\cos \varphi). \quad (2.22)$$

В соответствии с этой зависимостью, на рис. 2.4 построены профили скорости в наклонном слое; профиль безразмерной температуры построен согласно (2.16). При нулевом значении параметра Gr_{eff}/Re течение в наклонном слое является вынужденным, и профили скорости на рис. 2.4 имеют форму параболы. Рисунок отражает две ситуации, характерные для смешанной конвекции при $Gr_{eff}/Re = 120$: сонаправленное действие вынужденной и свободной составляющих конвекции (рис. 2.4а) и их противоположное действие (рис. 2.4б). В первом случае восходящий вынужденный поток ускоряется около нагретой стенки и тормозится около холодной стенки. Торможение, как видно из рисунка, может приводить к появлению обратного

течения; при этом сохраняется заданный вынужденной конвекцией расход. Во втором случае свободная конвекция притормаживает опускное течение около нагретой стенки. Здесь возникает подъемное течение теплой среды с интенсивностью, соответствующей заданной величине определяющих параметров ($Gr_{\text{eff}}/Re = 120$); сформировавшийся смешанноконвективный профиль опять-таки отвечает условию сохранения расхода вынужденного течения: ближе к холодной стенке поток ускоряется.

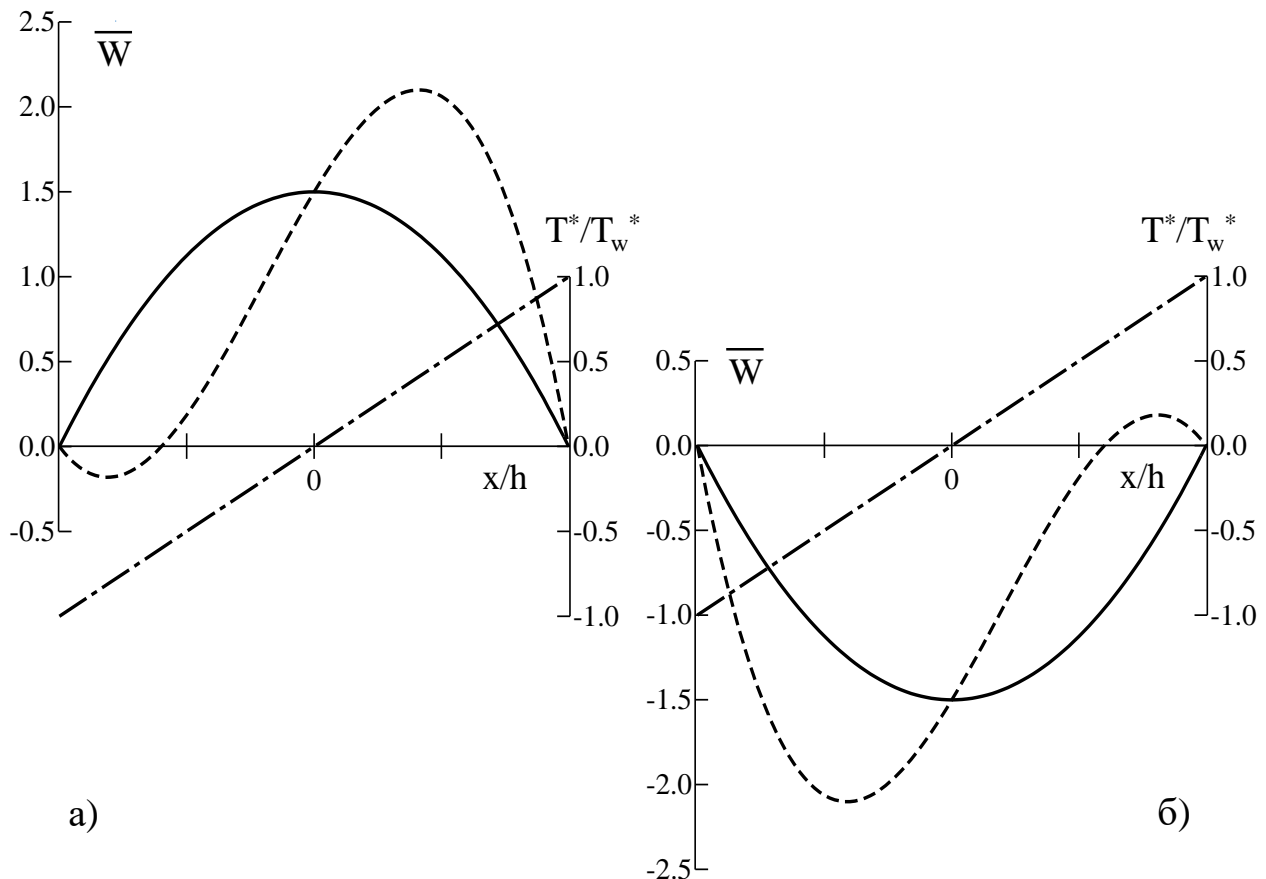


Рис. 2.4. Распределения нормированных скорости и температуры в наклонном слое при вынужденной ($Gr_{\text{eff}}/Re = 0$, сплошные линии) и смешанной ($Gr_{\text{eff}}/Re = 120$, штриховые линии) конвекции: (а) – случай совпадающих направлений свободной и вынужденной конвекции, (б) – случай противоположных направлений; штрих-пунктирные линии – распределение температуры

Линейное распределение температуры поперек слоя во всех случаях свидетельствует о чисто диффузионном характере переноса тепла между стенками, чему отвечает такое же значение числа Нуссельта $Nu = 1$, как и в задаче из раздела 2.1.

2.3. Смешанная конвекция в подогреваемом снизу горизонтальном слое

Рассмотрим конвективное течение в слое жидкости, ограниченном твердыми стенками, поддерживаемыми при различных постоянных температурах (см. схему на рис. 2.3). Пусть вынужденное течение (если оно существует) направлено вдоль оси z . Рассмотрим случаи, для которых слой занимает горизонтальное положение. Очевидно, что это возможно при двух значениях угла φ : $\pi/2$ и $3\pi/2$. В первом случае нагретая стенка расположена снизу, а холодная сверху, во втором случае – наоборот.

В случае с $\varphi = 3\pi/2$ (подогрев сверху) температура в вертикальном направлении увеличивается, то есть у нижней стенки находятся холодные слои жидкости, а у верхней – нагретые. Такое распределение температуры соответствует устойчивой стратификации и не влияет на структуру вынужденного течения или состояние покоя жидкости, поскольку градиент температуры в слое ∇T и сила тяжести направлены в противоположные стороны.

Для случая с $\varphi = \pi/2$ (подогрев снизу) стратификация в слое является неустойчивой. На нагретые около нижней поверхности и на охлажденные около верхней поверхности частицы действует сила плавучести, которая стремится переместить их таким образом, чтобы холодные частицы располагались ниже нагретых. При небольших перепадах температуры или малой толщине слоя, что соответствует малым значениям числа Грасгофа, возникновению циркуляционного, подъемно-опускного движения препятствуют силы вязкости.

Строгие теоретические исследования на основе линейной теории устойчивости, результаты которых описаны в работах [4, 5], показали, что неустойчивая стратификация при подогреве снизу создает циркуляцию среды, когда число Релея ($Ra = Gr \cdot Pr$ и, как в предыдущем разделе, $Gr = 16g\beta_T T_{wh}^3/v^2$) превосходит значение 1708. Это явление известно как неустойчивость Релея-Бенара (см. подробнее об этом явлении в разделе 3.4). При $Ra > 1708$ в слое протекающей в направлении z среды возникают конвективные валиковые структуры, оси которых ориентированы вдоль направления вынужденного течения. В поперечном сечении структуры имеют форму парных вихрей (см. рис. 2.5б). Влияние неустойчивой стратификации на изменение формы ламинарного течения будет проявляться и в наклонных слоях при $0 < \varphi < \pi$, если $Ra_{\text{eff}} = Gr_{\text{eff}} \cdot Pr > 1708$. Заметим, что для учета действия силы плавучести

поперек наклоненного слоя параметр Gr_{eff} следует определять как $Gr_{\text{eff}} = Gr \cdot |\sin\varphi|$.

Для записи уравнений Навье-Стокса предположим, как и в предыдущем разделе, что стационарное течение однородно в направлении оси z , а парные валиковые структуры, ориентированные вдоль направления вынужденного течения, периодичны в направлении оси y . В этом случае течение остается двумерным, то есть его скорость, давление и температура будут зависеть от двух пространственных переменных x и y , а вектор скорости будет иметь три компоненты, продольную $w(x, y)$, как в предыдущих примерах, и две поперечные $u(x, y)$ и $v(x, y)$. С учетом этих замечаний запишем уравнения неразрывности, движения и энергии, которые получаются после соответствующих упрощений системы основных уравнений (1.34–1.38):

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0, \quad (2.23)$$

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{\rho_h} \frac{\partial p^*}{\partial x} - g\beta_T T^* \cdot \sin(\pi - \varphi) + \nu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right), \quad (2.24)$$

$$u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{1}{\rho_h} \frac{\partial p^*}{\partial y} + \nu \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right), \quad (2.25)$$

$$u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} = -\frac{1}{\rho_h} \frac{\partial p^*}{\partial z} + g\beta_T T^* \cdot \cos(\pi - \varphi) + \nu \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right), \quad (2.26)$$

$$u \frac{\partial T^*}{\partial x} + v \frac{\partial T^*}{\partial y} = a \left(\frac{\partial^2 T^*}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T^*}{\partial y^2} \right). \quad (2.27)$$

Система (2.23–2.27) включает в себя уравнения пространственного течения, в которых отражены два эффекта плавучести: образование конвективных ячеек в поперечном сечении слоя под действием компоненты силы плавучести $-g\beta_T(T - T_h) \cdot \sin(\pi - \varphi)$ и влияние плавучести на вынужденный поток под действием компоненты силы $g\beta_T(T - T_h) \cdot \cos(\pi - \varphi)$. Как и ранее (раздел 2.2), расход вынужденного течения определяется величиной $-1/\rho_h \cdot \partial p^* / \partial z = C_0$. Граничные условия на стенках (прилипание и заданная температура) аналогичны условиям (2.14), (2.15). Необходимо также поставить условие периодичности для всех переменных на границах области в направлении оси y , для чего требуется задать в этом направлении размер области течения. Выбранный размер

должен быть кратным размеру области, занимаемой двумя конвективными валиками. Ширину каждого валика можно считать близкой к толщине слоя $2h$.

Уравнения движения (2.23–2.25) указывают на то, что движение жидкости в валиковых структурах не зависит от вынужденной составляющей течения, выраженной полем z -компоненты скорости w . В частности, течение в валиках не изменится в том случае, если вынужденное движение отсутствует. Уравнение (2.26), которое соответствует проекции на ось z векторного уравнения движения (1.32), по форме аналогично уравнению энергии (2.27), но включает два источниковых члена, а именно, z -компоненту силы плавучести и такую же компоненту градиента давления, которые вместе с конвективными слагаемыми в левой части выстраивают сложную форму поля компоненты скорости w (рис. 2.5в).

На рис. 2.5 по результатам расчетов, проведенных с помощью ПК SINP, показана структура течения при смешанной конвекции в горизонтальном слое с нагретой нижней стенкой ($\varphi = \pi/2$) в случае, когда определяющие параметры имеют значения: $Re = 50$, $Gr = 2500$, $Pr = 1$ (то есть $Ra = Gr$) и, соответственно, $Ri = 1$ (здесь масштаб скорости – скорость плавучести U_b).

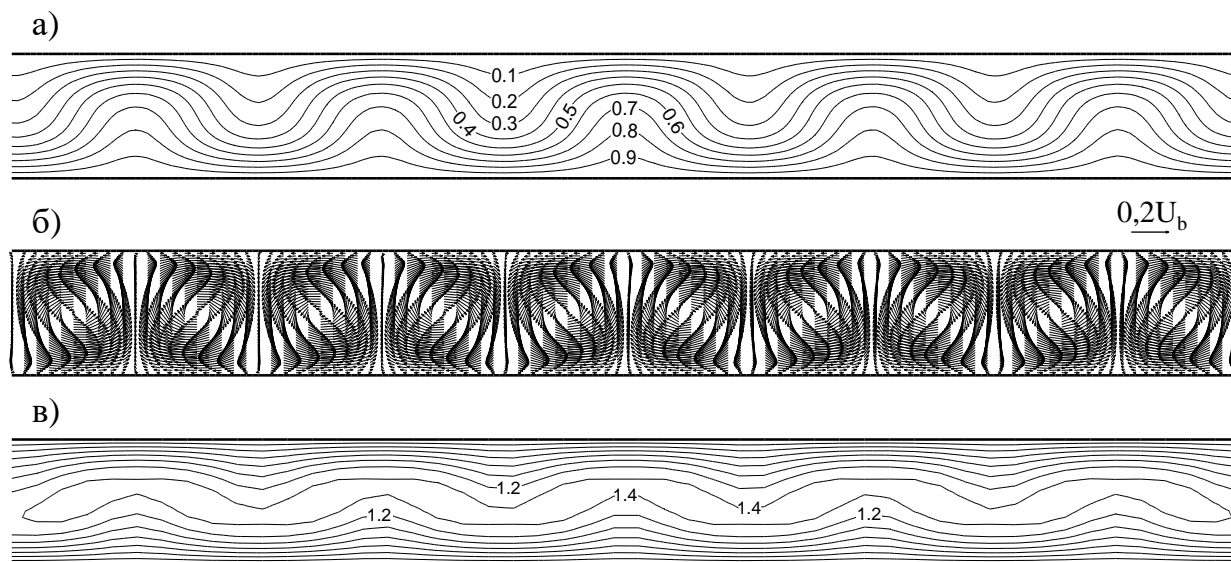


Рис. 2.5. Поля а) безразмерной температуры, б) векторов скорости и в) продольной скорости в поперечном сечении x - y горизонтального слоя, подогреваемого снизу

На изображенном участке слоя видно, что вдоль направления вынужденного течения образовалось пять пар валиковых структур, в каждой из которых в пределах одного валика поперечное течение направлено по часовой стрелке,

а в пределах другого – против. Подъемные и опускные течения нарушают однородность полей температуры и продольной скорости в направлении оси y . Перенос тепла в конвективных ячейках увеличивает среднее число Нуссельта по сравнению с плоским течением, рассмотренным в разделе 2.2. Для представленного примера, когда $Ra = 2500$, среднее значение числа Нуссельта составило $Nu = 1,42$. Это соответствует экспериментальным данным по средней теплоотдаче в подогреваемом снизу горизонтальном слое.

На рис. 2.6 воспроизведена представленная в [5] зависимость числа Нуссельта от числа Релея при умеренных Ra , соответствующих диапазону, в котором проявляется неустойчивость Релея-Бенара (приведены данные для случая, когда вынужденноконвективное течение отсутствует). Видно, что при $Ra < 1,7 \times 10^3$ число Нуссельта равняется единице, что соответствует теплопроводному режиму переноса тепла. При увеличении числа Релея появляется конвективная составляющая теплового потока, о чем можно судить по излому зависимости Nu от Ra при $Ra \approx 1,7 \times 10^3$: это свидетельствует о возникновении свободноконвективного течения. После излома число Нуссельта монотонно растет, что соответствует постепенной интенсификации течения с ростом Ra , однако во всем представленном на рисунке диапазоне чисел Релея, для которого возникают конвективные валиковые структуры ($1,7 \times 10^3 < Ra < 4 \times 10^3$), конвективный тепловой поток остается сравнительно небольшим: число Нуссельта не превышает двух.

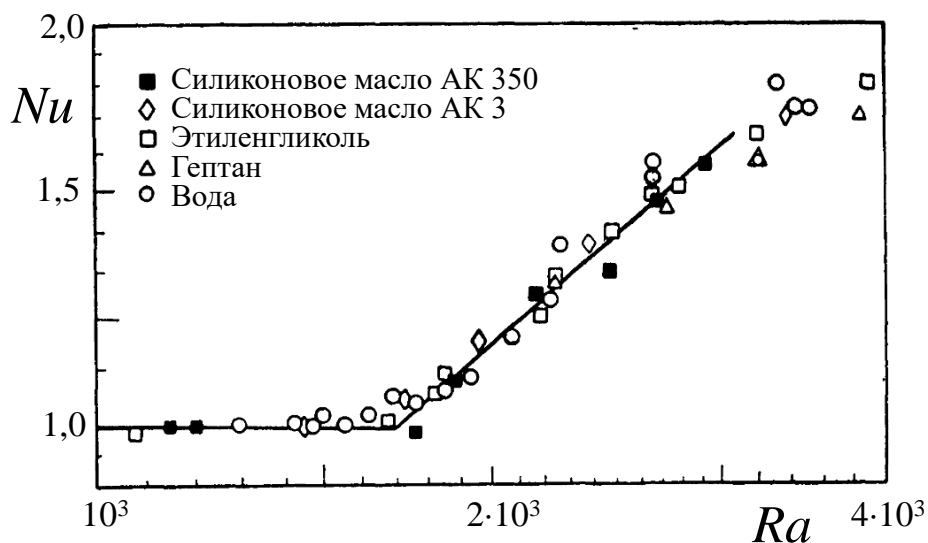


Рис. 2.6. Зависимость числа Нуссельта от числа Релея в подогреваемом снизу горизонтальном слое [5]

2.4. Свободная конвекция в прямоугольных полостях с разнагретыми вертикальными стенками.

Общая постановка задачи. Течение в квадратной полости

Настоящий раздел посвящен свободноконвективным течениям, развивающимся в полостях прямоугольного сечения (рис. 2.7). Такие течения возникают в случае, когда безграничный слой, представленный ранее на рис. 2.1, ограничен в направлении оси z : вертикальные стенки имеют конечный размер. В направлении оси y стенки полости по-прежнему будем считать неограниченными, что позволяет рассматривать приближение двумерного течения.

Форма полости характеризуется ее высотой H и шириной B . В безразмерном виде форму прямоугольных полостей представляют геометрическим параметром $k = H/B$. Вертикальные стенки полости будем считать изотермическими с разными температурами $\pm T_w^*$, а горизонтальные стенки – теплоизолированными; на этих стенках $q_w = 0$.

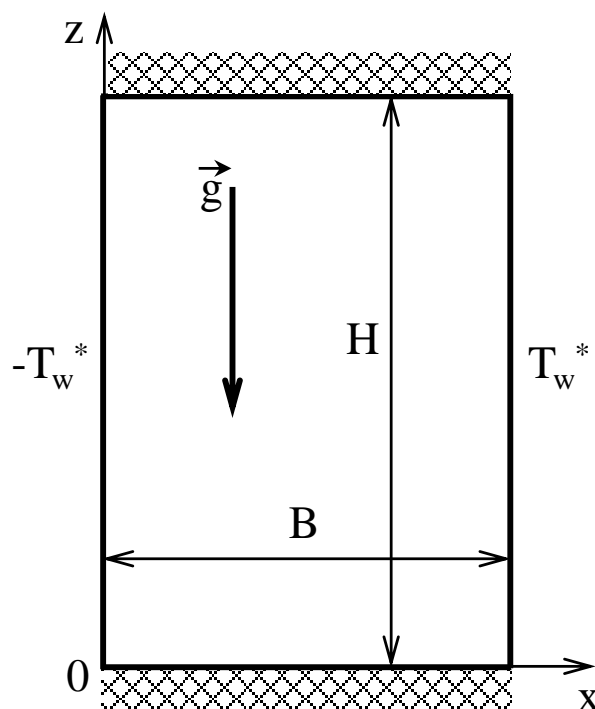


Рис. 2.7. Прямоугольная полость с разнагретыми вертикальными стенками и адиабатически изолированными горизонтальными стенками

В ограниченной по высоте полости восходящее течение около относительно горячей стенки и нисходящее течение около относительно холодной

стенки замыкаются течениями около горизонтальных стенок. Ламинарное течение в такой полости рассмотрим в рамках двумерного приближения, при котором поля скорости и температуры зависят от двух пространственных переменных – x и z . Однородность потока в направлении оси y позволяет пренебречь в уравнениях Навье-Стокса всеми производными по этому направлению, а также y -компонентой вектора скорости. Запишем уравнения (1.34–1.38) для плоского стационарного течения, приняв во внимание выбранное направление осей координат и направление действия силы тяжести:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0, \quad (2.28)$$

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + w \frac{\partial u}{\partial z} = -\frac{1}{\rho_h} \frac{\partial p^*}{\partial x} + \nu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right), \quad (2.29)$$

$$u \frac{\partial w}{\partial x} + w \frac{\partial w}{\partial z} = -\frac{1}{\rho_h} \frac{\partial p^*}{\partial z} + g\beta_T T^* + \nu \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \right), \quad (2.30)$$

$$u \frac{\partial T^*}{\partial x} + w \frac{\partial T^*}{\partial z} = a \left(\frac{\partial^2 T^*}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T^*}{\partial z^2} \right), \quad (2.31)$$

где $T^* = T - T_h$. Граничные условия для системы уравнений (2.28–2.31) состоят из условий прилипания: $u = w = 0$ на всех четырех стенках ($x = 0$; B и $z = 0$; H), тепловых условий первого рода на вертикальных стенках: $T^* = -T_w^*$ при $x = 0$ и $T^* = T_w^*$ при $x = B$ и адиабатических условий на горизонтальных стенках: $\partial T^* / \partial z = 0$ при $z = 0$; H .

Для дальнейшего анализа течений в замкнутых полостях приведем уравнения к безразмерной форме. В качестве линейного масштаба L_s выберем ширину полости B , а в качестве масштаба температуры ΔT_s – перепад температуры между стенками $2T_w^*$. Систему уравнений Навье-Стокса и конвективного теплообмена (2.29–2.31) запишем в безразмерной векторной форме, такой же, как и уравнения (1.52), (1.53) из раздела 1.4:

$$(\vec{V} \cdot \nabla) \vec{V} = -\text{grad } p^* + \vec{e}_g \theta + \frac{1}{\sqrt{Gr}} \Delta \vec{V}, \quad (2.32)$$

$$\vec{V} \cdot \text{grad } \theta = \frac{1}{Pr \sqrt{Gr}} \Delta \theta. \quad (2.33)$$

Граничные условия в безразмерной форме примут следующий вид: для скорости $V_w = 0$ на всех стенках, для температуры $\theta_w = \pm 0,5$ на вертикальных стенках и $(\partial\theta/\partial z)_w = 0$ на адиабатических горизонтальных стенках.

Из постановки задачи следует, что двумерное свободноконвективное течение и теплообмен в полостях прямоугольного сечения определяются значениями числа Грасгофа $Gr = 2g\beta T_w^* B^3/\nu^2$, числа Прандтля и геометрического параметра $\kappa = H/B$. Число Нуссельта определим так: $Nu = \alpha \cdot B/\lambda$, где коэффициент теплоотдачи находится из выражения $\alpha = q_w/(T_{w2} - T_{w1})$, а $q_w = \pm \lambda(\partial T/\partial x)_w$ (для горячей и холодной стенок знак отличается). Местную теплоотдачу будем характеризовать локальным значением числа Нуссельта Nu_{loc} , в котором величина теплового потока $q_{w, loc} = q_w(z)$ имеет переменное по высоте стенки значение. Для количественного описания средней по высоте стенки теплоотдачи будем использовать среднее значение числа Нуссельта, рассчитываемое на основе среднего значения теплового потока на стенке \bar{q}_w .

Наиболее широко представлен в литературе частный случай рассматриваемой задачи – естественная конвекция в квадратной полости, $\kappa = 1$ [2]. Эта задача стала одним из наиболее популярных тестов для программных кодов, используемых при расчете термоконвективных течений.

На рис. 2.8 представлены полученные по результатам расчетов с помощью ПК SINF картины течения и поля температуры в полости квадратного сечения для сред с существенно различными значениями числа Прандтля. Поля величин представлены в безразмерном виде, в соответствии с ранее введенными масштабами, масштабом функции тока служит величина $U_b B$. Число Прандтля $Pr = 0,01$ характеризует жидкие металлы (например, натрий или ртуть), значение $Pr = 0,71$ соответствует воздуху при нормальных условиях, $Pr = 10$ – воде при температуре около 10°C или моторному маслу при температуре около 20°C . Число Грасгофа для всех вариантов одинаково: $Gr = 2,5 \times 10^5$.

В теплопроводной среде ($Pr = 0,01$) характер распределения температуры между вертикальными стенками свидетельствует о существенном влиянии теплопроводности на теплоперенос. Это подтверждает и малое значение среднего числа Нуссельта ($Nu = 1,34$). Вместе с тем развивается интенсивное циркуляционное течение, в основном сосредоточенное в ядре полости, при этом скорости около вертикальных стенок незначительны.

В среде с близкими между собой значениями теплопроводности и кинематической вязкости ($Pr = 0,71$) становятся интенсивными течения около вертикальных стенок, где отмечаются и наибольшие градиенты температуры. Величина среднего числа Нуссельта ($Nu = 5,35$) свидетельствует в пользу преобладающего влияния конвекции на теплоотдачу.

В вязких и мало теплопроводных средах ($Pr = 10$) эти эффекты еще более усиливаются. Течение и наибольшие градиенты температуры сосредотачиваются в тонких пристенных слоях, отчетливо выделяется равномерная вертикальная стратификация температуры в ядре полости. Среднее число Нуссельта достигает еще более высокого значения ($Nu = 11,9$).

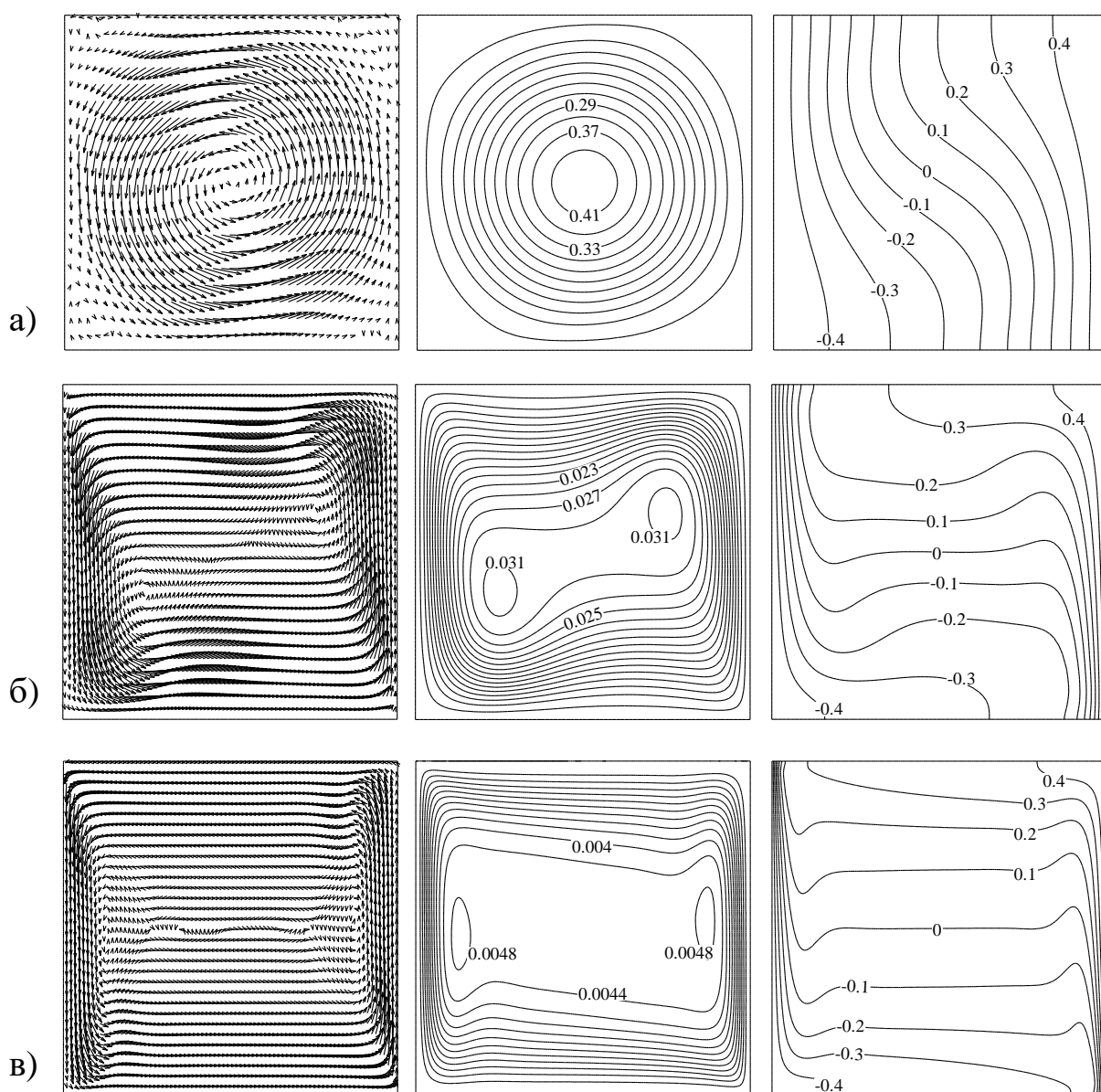


Рис. 2.8. Векторы скорости (слева), линии тока (в центре) и изотермы (справа) в квадратной замкнутой полости ($\kappa = 1$) при $Gr = 2,5 \times 10^5$ и различных значениях числа Прандтля: а) – $Pr = 0,01$, б) – $Pr = 0,7$, в) – $Pr = 10$

На рис. 2.9 приведены линии тока и изотермы для трех значений числа Грасгофа из более высокого диапазона, вплоть до предела потери устойчивости двумерного течения. Значения безразмерной функции тока лежат в диапазонах $0 < \psi < 0,0217$ при $Gr = 1 \times 10^6$, $0 < \psi < 0,0123$ при $Gr = 1 \times 10^7$, и $-0,00018 < \psi < 0,0055$ при $Gr = 2,5 \times 10^8$; на каждой из картин течения представлены 14 уровней функции тока. Отчетливо видно, как возникшие вдоль горячей и холодной стенок вертикальные пограничные слои с ростом числа Грасгофа становятся более тонкими, выделяется стратифицированное ядро. В верхнем левом и нижнем правом углах квадратной полости – там, где восходящий и нисходящий пограничные слои взаимодействуют с верхней и нижней горизонтальной стенкой соответственно – при увеличении числа Грасгофа формируются отчетливо выраженные течения, по своему виду напоминающие струйные. На рис. 2.9в видны возникшие в указанных угловых областях рециркуляционные зоны.

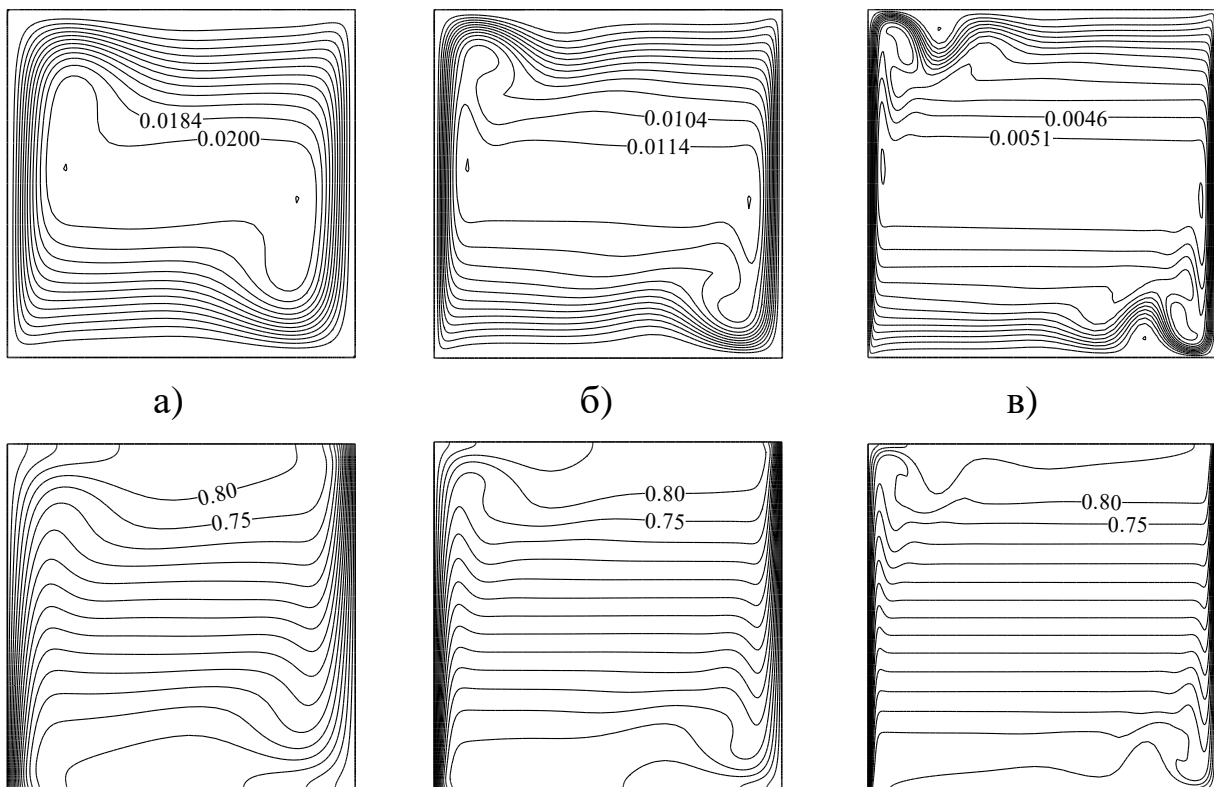


Рис. 2.9. Линии тока (вверху) и изотермы (внизу) в квадратной замкнутой полости ($\kappa = 1$) при $Pr = 0,71$ и различных значениях числа Грасгофа:
 а) – $Gr = 1 \times 10^6$, б) – $Gr = 1 \times 10^7$, в) – $Gr = 2,5 \times 10^8$

Значения расчетных величин теплоотдачи (числа Нуссельта) для полости квадратного сечения приведены в конце следующего раздела, где они сопоставляются с корреляционными зависимостями, полученными из приближенных оценок для полостей прямоугольного сечения, вытянутых в вертикальном направлении.

2.5. Свободная конвекция в прямоугольной полости, вытянутой в вертикальном направлении

Рассмотрим теперь ламинарное течение и теплообмен в замкнутой полости, вытянутой в вертикальном направлении, со значением геометрического параметра $\kappa = 4$ (рис. 2.10). Будем считать, что полость заполнена газом с $Pr = 1$. Проанализируем влияние значения числа Gr на течение и теплообмен в такой полости. На рис. 2.10 показаны поля скорости и температуры для двух существенно различающихся значений числа Грасгофа: $Gr = 100$ и 9×10^4 , полученные по результатам расчетов с помощью ПК SINF.

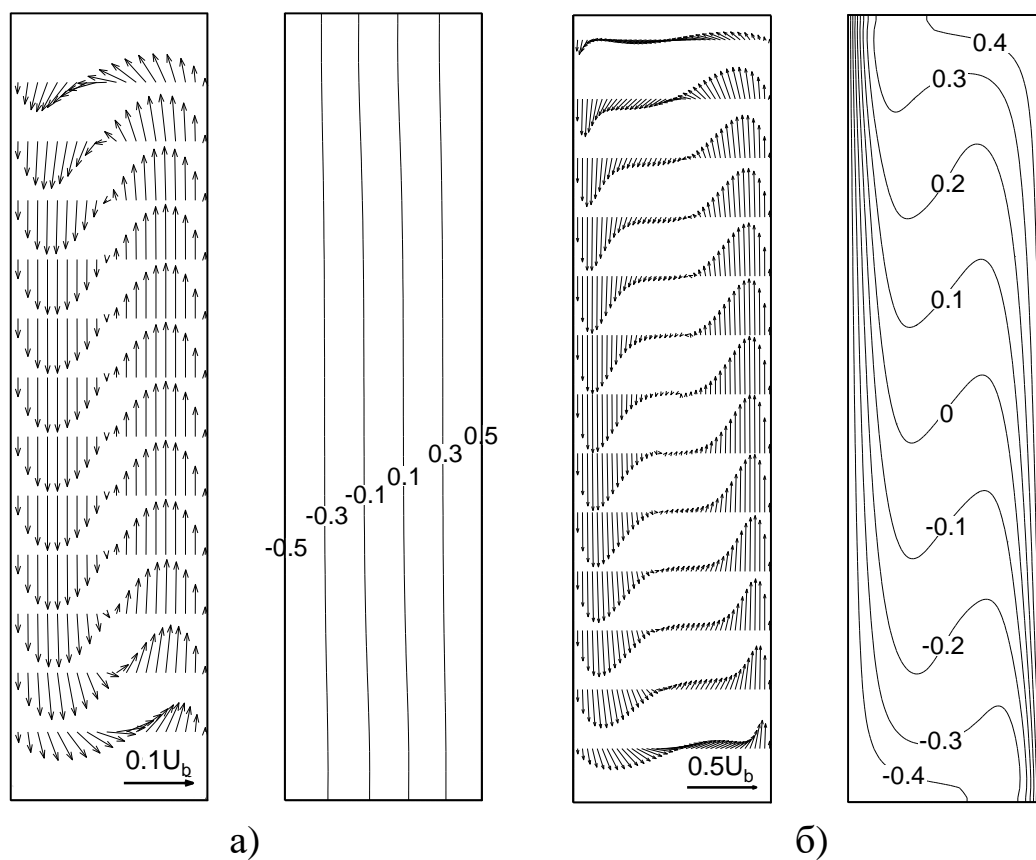


Рис. 2.10. Поля скорости и температуры в вертикально вытянутой замкнутой полости ($\kappa = 4$) при $Pr = 1$ и различных значениях числа Грасгофа:
 а) – $Gr = 100$, б) – $Gr = 9 \times 10^4$

При $Gr = 100$ (рис. 2.10а) распределения скорости и температуры в большей части полости, за исключением участков вблизи горизонтальных стенок, близки к полученным в разделе 2.1 для бесконечного вертикального слоя. Максимальные скорости подъемного и опускного течений составляют около 0,08 от скорости плавучести $U_b = \sqrt{2g\beta_T T_w^* B}$. Изотермы практически параллельны и распределены между вертикальными стенками равномерно, что свидетельствует об очень малом влиянии конвекции на теплообмен. Этому соответствует и среднее значение числа Нуссельта: $Nu = 1,0015$. Некоторое весьма малое отличие значения числа Нуссельта от единицы связано с влиянием горизонтальных стенок.

Поведение локального числа Нуссельта (рис. 2.11, штриховая линия) показывает, что практически на всей протяженности стенки имеет место диффузионный характер теплопереноса. В целом можно заключить, что свободная конвекция в рассматриваемой полости при малом Gr имеет такие же характеристики, как и в неограниченном вертикальном слое.

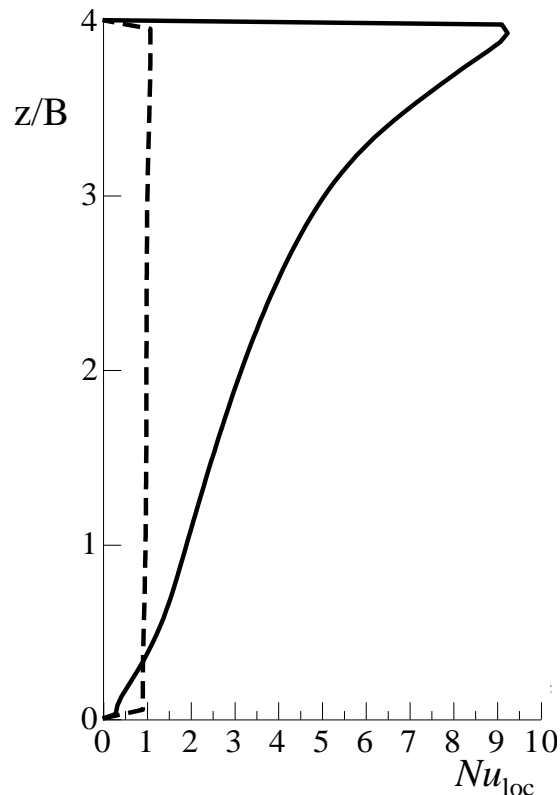


Рис. 2.11. Распределение локальных значений числа Нуссельта на вертикальной относительно холодной стенке полости ($\kappa = 4$) при $Pr = 1$ и различных числах Грасгофа: штриховая линия – $Gr = 100$, сплошная линия $Gr = 9 \times 10^4$

В случае сравнительно больших значений числа Грасгофа ($Gr = 9 \times 10^4$) структура поля скорости и, в особенности, поля температуры существенно меняются (рис. 2.10б). Подъемное и опускное течения локализируются у вертикальных стенок. Максимальные скорости подъемного и опускного течений вблизи срединного горизонтального сечения имеют здесь величину порядка $0,4U_b$. В ядре полости выделяется область с весьма слабым течением. Характер поля температуры также заметно меняется: изотермы сгущаются около вертикальных стенок и волнообразно переходят от одной стороны полости к другой. В целом, в картинах полей скорости и температуры отчетливо проявляются черты центральной симметрии.

Сгущение изотерм к стенкам свидетельствует об увеличении на них теплового потока, а, следовательно, и коэффициента теплоотдачи (рис. 2.11, сплошная линия). Среднее число Нуссельта по сравнению со случаем малого числа Грасгофа увеличивается до $Nu = 3,718$, что демонстрирует преимущественную роль конвективного теплообмена в теплопереносе между стенками при повышенном значении Gr . Вертикальная неравномерность сгущения изотерм около стенок указывает на неравномерность распределения локальной теплоотдачи вдоль стенок. Сверху полости у левой холодной стенки, где формируется опускное течение (рис. 2.10б), теплоотдача имеет максимальное значение, в несколько раз превышающее среднюю величину. Это же относится и к нижней части правой нагретой стенки, где формируется подъемное течение. По мере развития течения у вертикальных стенок увеличиваются толщины пристенных температурных и динамических слоев, а тепловой поток и, соответственно, число Нуссельта уменьшаются.

На рис. 2.12 показаны зависимости среднего числа Нуссельта от формы полости, полученные для трех значений числа Грасгофа и характерного для воздуха числа Прандтля $Pr = 0,71$.

При постоянном Gr зависимость теплоотдачи от геометрического параметра k существенно немонотонна. Максимумы теплоотдачи соответствуют полостям с $k = O(1)$, причем с увеличением числа Грасгофа максимальная теплоотдача достигается в полостях все меньшей высоты. При $Gr \rightarrow 0$ теплоотдача в полостях любой формы должна отвечать режиму теплопроводности, то есть $Nu \rightarrow 1$.

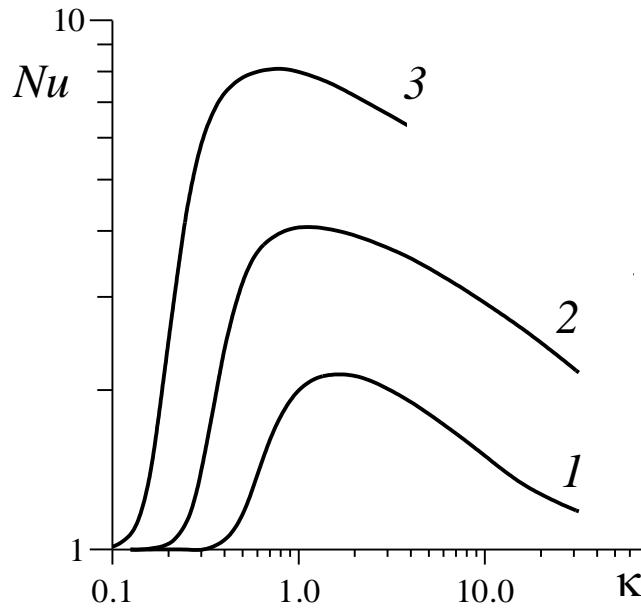


Рис. 2.12. Зависимости средних значений числа Нуссельта от формы полости при $Pr = 0,71$ и различных значениях Gr : 1 – 10^4 , 2 – 10^5 , 3 – 10^6

Вне зависимости от значения числа Грасгофа режим теплопроводности характерен для полостей, сильно вытянутых в горизонтальном ($\kappa \rightarrow 0$) и вертикальном ($\kappa \rightarrow \infty$) направлениях. При меньших Gr режимы теплопереноса с заметным влиянием конвекции лежат в более узких диапазонах изменения κ .

Для случая вытянутых по вертикали полостей ($\kappa > 1$) можно сделать оценки скорости конвективного течения и теплоотдачи, которые характерны для больших значений числа Грасгофа. Очевидно, что конвекция среды вдоль изотермической вертикальной поверхности создается силой плавучести. Выразим это приближенным балансом вертикальной компоненты силы инерции и силы плавучести, пренебрегая другими силами в уравнениях (2.29), (2.30). Из уравнения движения в проекции на ось z (2.30) получим:

$$w \frac{\partial w}{\partial z} \approx g\beta_T T^* . \quad (2.34)$$

Подставим в это приближенное равенство масштабы величин: высоту полости (H), масштаб скорости (V_s) и масштаб перепада температур (ΔT_s) и получим оценку $V_s^2/H = O(g\beta_T \Delta T_s)$. Отсюда следует, что характерная скорость течения должна иметь порядок скорости плавучести $V_s = U_b = \sqrt{g\beta_T \Delta T_s H}$, а число Рейнольдса, построенное по характерной скорости $Re = V_s H/\nu$, можно выразить через число Грасгофа $Gr = g\beta_T \Delta T_s B^3/\nu^2$ следующим образом:

$$Re \approx \sqrt{Gr} \cdot \sqrt{\kappa^3}. \quad (2.35)$$

Таким образом, оказывается, что в случае свободной конвекции в прямоугольной полости при больших значениях числа Грасгофа зависимость характерной скорости течения от Gr становится иной по сравнению с конвекцией при малых значениях числа Грасгофа, где связь скорости и Gr определяется линейной зависимостью (2.11).

Для больших значений числа Грасгофа можно также оценить уровень теплоотдачи на вертикальных стенках прямоугольной полости с $\kappa > 1$. Допустим, что с увеличением числа Gr пристенное течение будет занимать все более узкую область, подобную пограничному слою (см. раздел 2.6). Руководствуясь основным положением теории пограничного слоя о связи толщины слоя с его протяженностью, которое распространим и на пристенное свободноконвективное течение вдоль вертикальных стенок полости, зададим соотношение толщины пристенного слоя δ и высоты полости:

$$\frac{\delta}{H} = O\left(\frac{1}{\sqrt{Re}}\right)$$

или, используя выражение (2.35),

$$\frac{\delta}{H} = O\left(\frac{1}{\sqrt[4]{Gr \cdot \kappa^3}}\right).$$

Толщина пристенного слоя относительно ширины полости тогда будет

$$\frac{\delta}{B} = O\left(\frac{\kappa}{\sqrt[4]{Gr \cdot \kappa^3}}\right) = O\left(\frac{1}{\sqrt[4]{Gr/\kappa}}\right). \quad (2.36)$$

Значение среднего по высоте полости теплового потока на вертикальной стенке, \bar{q}_w , будет зависеть от термического сопротивления пристенного слоя, то есть от его толщины δ , и от перепада температуры поперек слоя ΔT , поэтому в выражении

$$\bar{q}_w = \lambda \left(\frac{\partial T}{\partial x}\right)_w = \lambda \frac{\Delta T}{\delta} \left(\frac{\partial \bar{T}}{\partial \bar{x}}\right)_w$$

величину безразмерной производной $(\partial \bar{T} / \partial \bar{x})_w$ можно положить близкой к единице. Это позволяет представить средний тепловой поток в виде:

$$\bar{q}_w = \lambda \frac{\Delta T}{\delta} \cdot O(1). \quad (2.37)$$

Пользуясь оценками (2.36) и (2.37), представим выражение для числа Нуссельта следующим образом:

$$Nu = \frac{\bar{q}_w B}{\lambda \Delta T} = O(1) \cdot \sqrt[4]{\frac{Gr}{\kappa}}.$$

Поведение теплоотдачи при $\kappa > 1$ и $Pr = O(1)$ с приемлемой точностью отвечает зависимости:

$$Nu = (0,23 \div 0,25) \cdot \sqrt[4]{\frac{Gr}{\kappa}}, \quad (2.38)$$

которая по крайней мере по показателю степени 0,25 согласуется с зависимостями для ламинарных режимов течения, приведенными для других типов течения в таблице 1.1.

Экспериментальные и численные исследования свободной конвекции в прямоугольных полостях позволили заключить, что в диапазоне $Ra \leq 10^3$ с практически достаточной точностью можно считать теплоперенос в полости диффузионным (кондуктивным), при этом $Nu \cong 1$. В диапазоне больших значений Ra существуют вполне универсальные зависимости для теплоотдачи. Для полостей квадратного и немного вытянутого вверх сечений $1 \leq \kappa \leq 2$, чисел Прандтля в практически неограниченном диапазоне $10^{-3} \leq Pr \leq 10^5$ и чисел Релея, отвечающих условию $Ra \cdot Pr / (0,2 + Pr) \geq 10^3$, рекомендуемая зависимость теплоотдачи имеет вид

$$Nu = 0,18 \left(\frac{Pr}{0,2 + Pr} Ra \right)^{0,29}. \quad (2.39)$$

Для прямоугольных полостей с сечениями, сильнее вытянутыми вверх, $2 \leq \kappa \leq 10$, в том же диапазоне чисел Pr и в диапазоне значений числа Релея $10^3 \leq Ra \leq 10^{10}$ зависимость теплоотдачи имеет другой вид, заметно приближенный к виду формулы (2.38):

$$Nu = 0,22 \left(\frac{Pr}{0,2 + Pr} Ra \right)^{0,28} \frac{1}{\kappa^{0,25}}. \quad (2.40)$$

Зависимости (2.40) с хорошей степенью точности отвечает, например, значение средней теплоотдачи, полученное выше при $k = 4$, $Gr = 9 \times 10^4$, $Pr = 1$.

Степень неопределенности данных, обобщенных корреляционными соотношениями, иллюстрирует рис. 2.13. На рисунке приведены средние значения числа Нуссельта на изотермических стенках квадратной полости, см. раздел 2.4, заполненной воздухом ($Pr = 0,71$), полученные численно различными авторами [13, 42, 51-55]. Видно, что представленные в указанных работах сошедшие по сетке результаты расчетов, полученные с использованием различных CFD-кодов, демонстрируют очень хорошее совпадение во всем диапазоне чисел Грасгофа. На график нанесены также две корреляционные зависимости – (2.38) с коэффициентом 0,231 и (2.39). Видно, что эмпирические данные, обобщенные разными авторами, различаются и определяют некоторую полосу значений чисел Нуссельта, в которую данные двумерных расчетов полностью укладываются при $Gr > 10^5$.

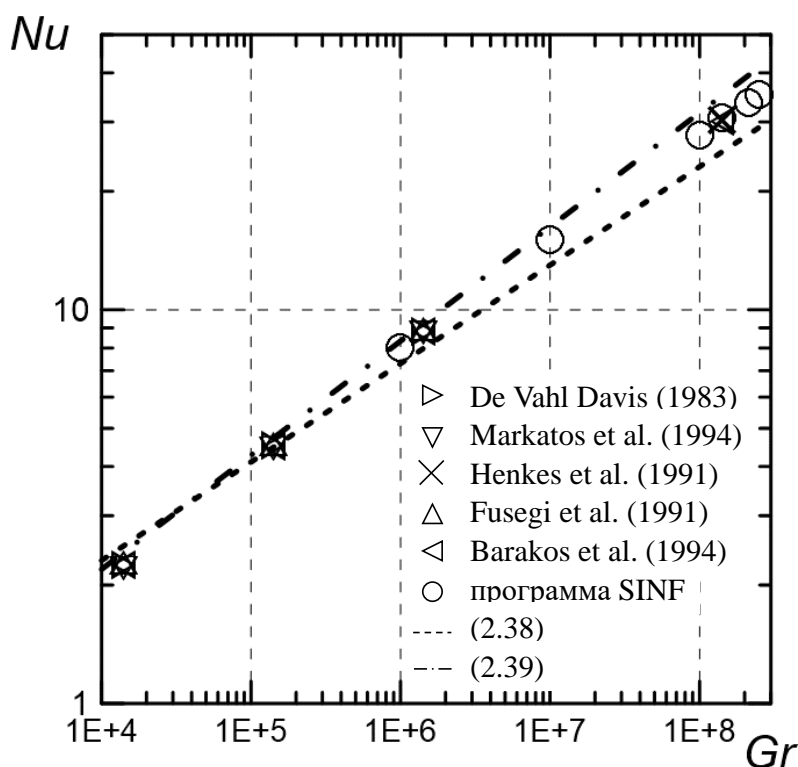


Рис. 2.13. Среднее число Нуссельта на изотермической стенке квадратной полости при $Pr = 0,71$ в зависимости от числа Грасгофа: расчетные данные [13, 42, 51-55] в сопоставлении с корреляционными зависимостями (2.38) с коэффициентом 0,231 и (2.39)

2.6. Свободноконвективный пограничный слой на нагретой вертикальной пластине

В предыдущем разделе показано, что при значениях числа Грасгофа, превышающих 10^4 , и числах Прандтля порядка единицы в вытянутых полостях на вертикальных изотермических стенках формируются сравнительно тонкие слои с большими градиентами температуры и максимальными значениями вертикальной компоненты скорости.

В настоящем разделе демонстрируются характерные свойства вертикальных свободноконвективных пристенных течений при больших числах Грасгофа на основе результатов автомодельного решения асимптотических уравнений, аналогичных уравнениям Прандтля для ламинарного пограничного слоя при вынужденном течении.

Рассмотрим свободную конвекцию газа с $Pr = O(1)$ около тонкой вертикальной изотермической пластины высотой H (рис. 2.14а). Пластину разместим в пространстве, ограниченном снизу горизонтальной адиабатической стенкой, расстояние от которой до нижней кромки пластины положим равным y_0 . На рис. 2.14б воспроизведена приведенная в альбоме М. Ван-Дайка [56] экспериментальная картина (интерферограмма) свободноконвективного течения около вертикальной пластины конечной толщины, включая область перед заостренной передней кромкой (немного ниже y_0 в соответствии со схемой на рис. 2.14а): интерферограмма показывает линии постоянной плотности, которые в рассматриваемых условиях практически постоянного давления одновременно представляют собой изотермы.

Зададим температуры поверхности T_w и окружающей среды T_∞ , причем $T_w > T_\infty$. Положим ширину пластины в направлении оси z достаточной, чтобы пренебречь влиянием боковых вертикальных кромок и считать течение двумерным. Такие условия позволяют допустить, что двумерное течение имеет зеркальную симметрию относительно линии $x = 0$. Примем, что высота пластины, перепад температуры $\Delta T = T_w - T_\infty$ и теплофизические свойства среды таковы, что величина числа Грасгофа $Gr = g\beta_T \Delta T \cdot H^3 / \nu^2$ не превышает 10^9 , что соответствует ламинарному режиму конвекции.

Течение в поставленной задаче описывается такой же, как и для прямоугольной полости, системой уравнений (2.32), (2.33) в безразмерной форме (также в систему входит уравнение неразрывности (1.51)), со следующими

граничными условиями на вертикальной стенке: $\vec{V}_w = 0$ и $\theta_w = (T - T_\infty)/(T_w - T_\infty) = 1$. При получении численного решения задачи на линии $x = 0$, кроме участка, занятого пластиной, используются условия симметрии $\partial \vec{V} / \partial x = 0$ и $\partial \theta / \partial x = 0$, на адиабатической горизонтальной поверхности выполняется условие $(\partial \theta / \partial y)_w = 0$.

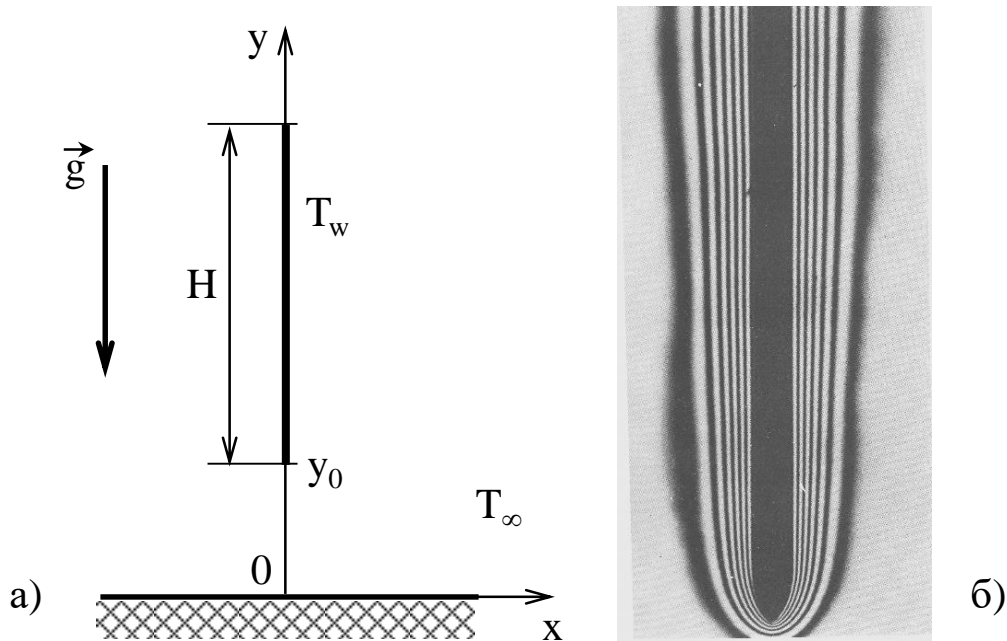


Рис. 2.14. Задача о свободной конвекции около вертикальной нагретой пластины:
 а) схема постановки задачи и б) интерферограмма течения воздуха [56]
 (на расстоянии 10 см от передней кромки $Gr = 5 \times 10^6$)

На рис. 2.15 представлены результаты численного решения уравнений Навье-Стокса (2.32), (2.33) для рассматриваемой задачи в случае свободной конвекции газа с $Pr = 1$ около пластины, поднятой на высоту $y_0 = 0,5H$ над горизонтальной поверхностью. С использованием ПК SINF течение моделировалось в прямоугольной области шириной $0,6H$ и высотой $2,3H$. Расчет, данные которого проиллюстрированы на рис. 2.15, выполнен для $Gr = 4 \times 10^6$.

На рис. 2.15а изображены изолинии безразмерной функции тока. Значения вертикальной координаты отнесены к высоте пластины H , значения функции тока – к величине $U_b \cdot H$. Резкое изменение направления линий тока и их сгущение вблизи пластины свидетельствуют о выделении тонкой сравнительно с высотой пластины пристенной области, где сформировано интенсивное свободноконвективное течение.

Видно, что вдоль линий тока холодный газ подтекает к пластине за счет эжектирующего действия пристенного слоя. Ближе к верхней кромке пластины эффект эжекции усиливается плавучестью нагретой среды в следе за пластиной. В области между нижней кромкой пластины и горизонтальной стенкой течение газа можно считать слабым. Указанные на линиях тока величины безразмерной функции тока позволяют оценить приращение объемного расхода среды, эжектируемой из окружающего пространства в пристенное течение. Отметим, что приращение эжектируемого расхода практически равномерно распределено по высоте восходящего течения.

На рис. 2.15б показаны изотермы поля температуры (линии $\theta = const$), а на рис 2.15в – векторы скорости для части потока, примыкающей к нагретой пластине (масштаб изображения по сравнению с рис. 2.15а увеличен). Для количественной оценки векторного поля показан также масштабный вектор, длина которого соответствует скорости плавучести $U_b = \sqrt{g\beta_T \Delta T H}$. Можно отметить сходство поведения изотерм на рис. 2.15б с экспериментальной картиной на рис. 2.14б. Видно, как изотермы плавно огибают нижнюю кромку пластины, что свидетельствует о влиянии теплопроводности жидкости в окрестности кромки. Этот эффект обеспечивает ненулевую начальную толщину температурного слоя.

Распределения векторов скорости (рис 2.15в) демонстрируют, каким образом внутри температурного пристенного слоя развивается течение с немонотонным изменением скорости по нормали к стенке, которое определяется совместным действием сил плавучести и вязкого трения. Вблизи верхней кромки максимальная скорость пристенного течения достигает приблизительно половины скорости плавучести.

Рисунок также демонстрирует, что при $Pr = 1$ толщины температурного и динамического пристенных слоев практически совпадают. Показанная сплошной линией на рис. 2.15в изотерма $\theta = 0,02$, которую можно считать условной границей пристенного слоя, демонстрирует нарастание его толщины по высоте пластины. Так, у верхнего края пластины толщина слоя составляет величину, близкую к $0,1H$.

Рис. 2.16 изображает профили скорости и изотерму на внешней границе пристенного температурного слоя, полученные в результате расчета при меньшем на порядок значении числа Грасгофа ($Gr = 4 \times 10^5$). Можно отметить, что

с уменьшением Gr пристенный слой существенно утолщается: у верхнего края пластины толщина достигает значения $0,18H$.

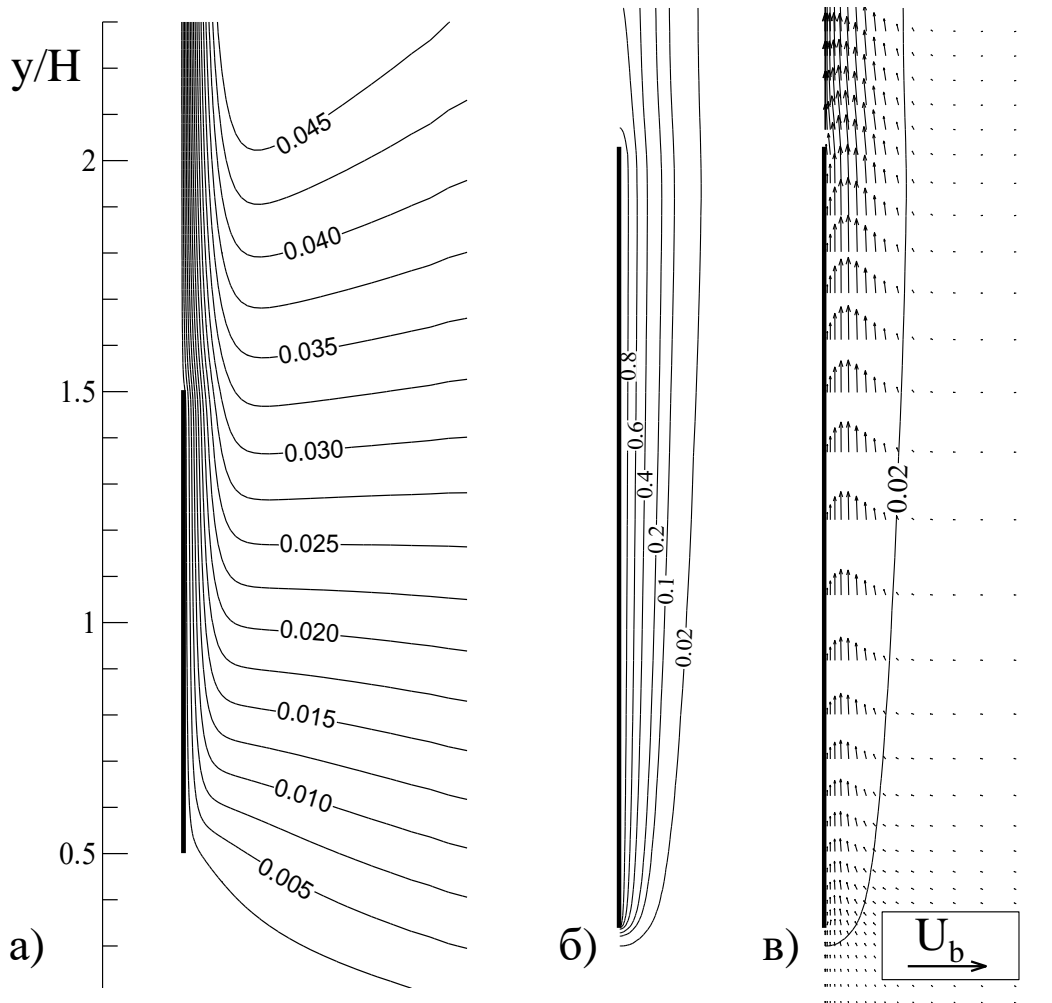


Рис. 2.15. Свободная конвекция около вертикальной пластины при $Gr = 4 \times 10^6$, $Pr = 1$: а) изолинии безразмерной функции тока; б) изотермы; в) векторы скорости вблизи нагретой пластины и изотерма $\theta = 0,02$

Как оказалось, при уменьшении Gr в десять раз толщина слоя увеличилась почти пропорционально $\sqrt[4]{10}$. Это наблюдение можно положить в основу формулировки модели и уравнений свободноконвективного пограничного слоя (СкПС) на вертикальной поверхности.

В качестве масштабов течения выберем высоту H и перепад температур $\Delta T_s = T_w - T_\infty$. При этом будем считать, что $Pr = 1$, а число Грасгофа много больше единицы:

$$Gr = \frac{g \beta_T \Delta T_s L_s^3}{\nu^2} = \frac{g \beta_T (T_w - T_\infty) H^3}{\nu^2} \gg 1. \quad (2.41)$$

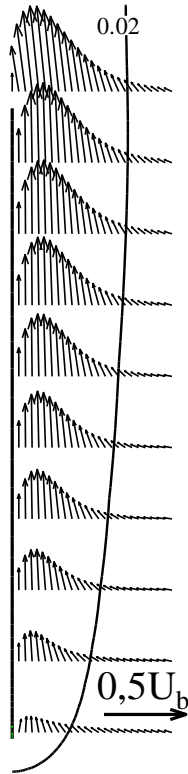


Рис. 2.16. Свободная конвекция около вертикальной пластины при $Gr = 4 \times 10^5$, $Pr = 1$: векторы скорости вблизи нагретой пластины и изотерма $\theta = 0,02$

Для толщины слоя δ будем полагать справедливой оценку, аналогичную полученной ранее при анализе свободноконвективных течений в вытянутых по вертикали замкнутых полостях:

$$\frac{\delta}{H} = O\left(\frac{1}{\sqrt[4]{Gr}}\right). \quad (2.42)$$

Число Прандтля будем считать близким к единице; в этих условиях толщина температурного слоя δ_T , в котором происходит ее изменение от T_w до T_∞ , будет того же порядка, что и δ . Пристенное течение, удовлетворяющее оценке (2.42), называется свободноконвективным пограничным слоем.

Выведем уравнения плоского ламинарного СкПС, аналогичные уравнениям Прандтля для инерционного пограничного слоя. В качестве исходной примем систему уравнений Навье-Стокса и конвективного теплообмена для двумерного свободноконвективного течения, аналогичную системе уравнений (2.28–2.31):

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x} + \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial y} = 0, \quad (2.43)$$

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{\rho_h} \frac{\partial p^*}{\partial x} + \nu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right), \quad (2.44)$$

$$u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{1}{\rho_h} \frac{\partial p^*}{\partial y} + g\beta_T T^* + \nu \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right), \quad (2.45)$$

$$u \frac{\partial T^*}{\partial x} + v \frac{\partial T^*}{\partial y} = a \left(\frac{\partial^2 T^*}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T^*}{\partial y^2} \right). \quad (2.46)$$

С учетом соотношения (2.42) проведем оценку диапазонов изменения переменных в уравнениях (2.43–2.46). В пределах пограничного слоя диапазоны изменения пространственных переменных составляют: $0 < y < H$ и $0 < x < \delta$, или $0 < x < (H/\sqrt[4]{Gr})$. Диапазон изменения вертикальной (продольной) скорости можно оценить скоростью плавучести: $0 < v < U_b$, а диапазон изменения температуры – перепадом температур: $0 < T^* < (T_w - T_\infty)$. Используем эти ограничения для недостающей оценки диапазона изменения горизонтальной (поперечной) компоненты скорости u . Из уравнения неразрывности (2.43) непосредственно следует, что

$$\frac{u}{H/\sqrt[4]{Gr}} + \frac{U_b}{H} \approx 0. \quad (2.47)$$

Соответственно, для этой компоненты скорости диапазон изменения составляет $0 < u < U_b/\sqrt[4]{Gr}$, а для соотношения между компонентами вектора скорости внутри пограничного слоя верна оценка $u = O(v/\sqrt[4]{Gr})$. Таким образом, как и в инерционном пограничном слое Прандтля, в свободноконвективном пограничном слое поперечная относительно основного направления течения компонента скорости должна быть много меньше продольной.

С целью сравнения между собой величин отдельных слагаемых в уравнениях движения и энергии (2.44–2.46), кроме слагаемых, содержащих давление, подставим в эти уравнения сделанные выше оценки. После преобразований с учетом соотношений $\sqrt{Gr} = U_b H/\nu$ и $Pr = \nu/a$ получим (оценки величины каждого слагаемого записана в порядке его следования в исходных уравнениях):

$$\frac{1}{\sqrt[4]{Gr}} + \frac{1}{\sqrt[4]{Gr}} \approx -\frac{1}{\rho_h} \frac{\partial p^*}{\partial x} + \frac{1}{\sqrt[4]{Gr}}, \quad (2.48)$$

$$1 + 1 \approx -\frac{1}{\rho_h} \frac{\partial p^*}{\partial y} + 1 + \left(1 + \frac{1}{\sqrt{Gr}}\right), \quad (2.49)$$

$$1 + 1 \approx \frac{1}{Pr} \left(1 + \frac{1}{\sqrt{Gr}}\right). \quad (2.50)$$

Пренебрежем в этих соотношениях слагаемыми, величина которых имеет порядок $O(1/\sqrt[4]{Gr})$, и меньшими. Из равенства (2.48) следует, что

$$0 = -\frac{1}{\rho_h} \frac{\partial p^*}{\partial x}, \quad (2.51)$$

то есть, в свободноконвективном пограничном слое давление поперек слоя постоянно и равно внешнему гидростатическому давлению. Далее, из равенства (2.49) следует, что $\partial p^*/\partial y \approx 0$, то есть редуцированное давление в свободноконвективном пограничном слое постоянно также и по высоте, а следовательно оно постоянно везде, и, в силу своего определения, $p^* = 0$.

В результате имеем следующую систему уравнений движения и энергии для ламинарного стационарного СкПС на вертикальной поверхности:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0, \quad (2.52)$$

$$u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} = g \beta_T \theta + \nu \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}, \quad (2.53)$$

$$u \frac{\partial \theta}{\partial x} + v \frac{\partial \theta}{\partial y} = a \frac{\partial^2 T^*}{\partial x^2}. \quad (2.54)$$

В набор граничных условий для системы уравнений (2.52–2.54) должны входить краевые условия для полей скорости и температуры относительно поперечной координаты x и начальные условия относительно продольной координаты y . Краевые условия ставятся на стенке и на большом (бесконечном) удалении от пластины. Начальное условие ставится в каком-либо начальном горизонтальном сечении, например, на нижней кромке пластины $y = y_0$ (рис. 2.14а).

Итак, запишем условия прилипания $u = v = 0$ и заданной температуры $T^* = T_w^*$ на стенке (при $x = 0$), условие для покоящейся изотермической среды $v = 0, T^* = 0$ при $x \rightarrow \infty$, а также начальные условия $u = u_0(x), v = v_0(x)$ и $T^* = T_0^*(x)$ при $y = y_0$. Функции $u_0(x), v_0(x)$ и $T_0^*(x)$ характеризуют течение вблизи передней кромки и должны удовлетворять уравнениям пограничного слоя (2.52–2.54).

Для этих уравнений можно найти справедливое на удалении от кромки решение, которое не будет зависеть от начального условия при $y = y_0$. Такое решение, описывающее внутренние свойства ламинарного стационарного пограничного слоя вне зависимости от начального условия, называется автомодельным. Для нахождения автомодельного решения уравнений введем рассмотрение функцию тока ψ :

$$u = \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad v = -\frac{\partial \psi}{\partial x}, \quad (2.55)$$

тождественно удовлетворяющую уравнению (2.52), и применим аффинное (геометрически подобное) преобразование к переменной x и функции тока ψ . Смысл преобразования состоит в исключении явной зависимости решения уравнений (2.52–2.54) от продольной координаты пограничного слоя y .

Для нахождения формы преобразования воспользуемся оценкой (2.42) в локальном значении, то есть для локальной толщины свободноконвективного пограничного слоя справедливо следующее соотношение:

$$\frac{\delta(y)}{y} \sim \frac{1}{\sqrt[4]{Gr_y}}, \quad (2.56)$$

где $Gr_y = \frac{g \beta_T (T_w - T_\infty) y^3}{\nu^2}$.

Масштабом поперечной координаты пограничного слоя x назначим текущую толщину слоя $\delta(y)$ и введем новую безразмерную пространственную переменную:

$$\eta = B \frac{x}{\delta(y)} = \frac{B}{\sqrt[4]{Gr_y} y} x = b(y) x, \quad (2.57)$$

где B – некоторая постоянная. Для преобразования функции тока $\psi(x, y)$ в безразмерную функцию $\phi(\eta)$ воспользуемся локальной оценкой объемного

расхода в пограничном слое, отнесенного к единичной ширине пластины в направлении оси z :

$$\psi = C \cdot U_b \cdot \delta(y) \cdot \phi(\eta) = C \cdot U_b \frac{y}{\sqrt[4]{Gr_y}} \cdot \phi(\eta) = c(y)\phi(\eta), \quad (2.58)$$

где $U_b = \sqrt{g\beta_T T_w^* y}$, C – некоторая постоянная. Введем также в рассмотрение безразмерную температуру $\theta = T^*/T_w^*$. Подставим новые величины в уравнения пограничного слоя (2.52–2.54) и потребуем, чтобы они были безразмерными и не содержали переменной y . Удовлетворив этим требованиям, получим выражения для функций $b(y)$ и $c(y)$:

$$b(y) = \frac{1}{y} \left(\frac{Gr_y}{4} \right)^{1/4} \quad \text{и} \quad c(y) = 4 \nu \left(\frac{Gr_y}{4} \right)^{1/4}. \quad (2.59)$$

Система обыкновенных дифференциальных уравнений для преобразованной безразмерной функции тока и безразмерной температуры примет следующий вид (штрихи здесь указывают на порядок дифференцирования по переменной η):

$$\phi''' + 3\phi\phi'' - 2\phi'^2 + \theta = 0, \quad (2.60)$$

$$\theta'' + 3Pr\phi\theta' = 0, \quad (2.61)$$

с граничными условиями $\phi = \phi' = 0$, $\theta = 1$ при $\eta = 0$, $\phi' = 0$ и $\theta = 0$ при $\eta \rightarrow \infty$. Отметим, что величина ϕ' характеризует автомодельную вертикальную компоненту скорости в пограничном слое.

Решения этих уравнений в виде автомодельных профилей скорости и температуры, полученных для различных значений числа Прандтля, показаны на рис. 2.17.

На рис. 2.18 приведены представленные в автомодельных переменных профили скорости и температуры, извлеченные из продемонстрированного ранее численного решения уравнений Навье-Стокса при $Gr = 4 \times 10^5$ и $Pr = 1$. Как видно из рисунка, при $0,5H < y < H$ все профили ложатся на одну кривую, при этом численное решение уравнений Навье-Стокса хорошо согласуется с автомодельным решением.

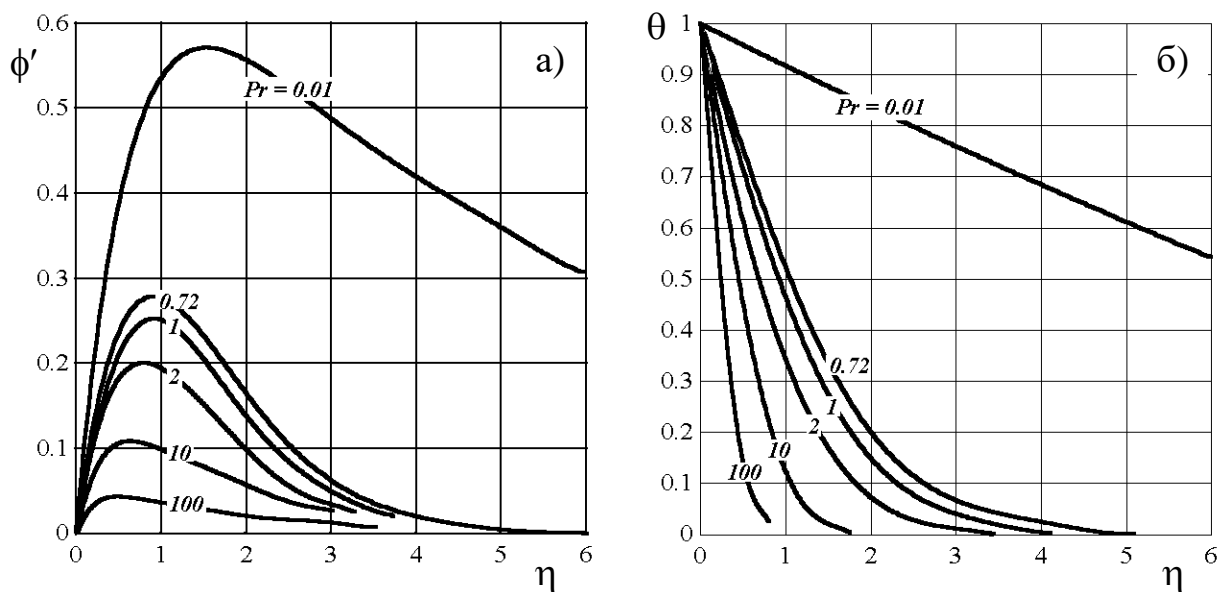


Рис. 2.17. Автомоделные профили а) скорости и б) температуры для различных значений числа Прандтля [3]

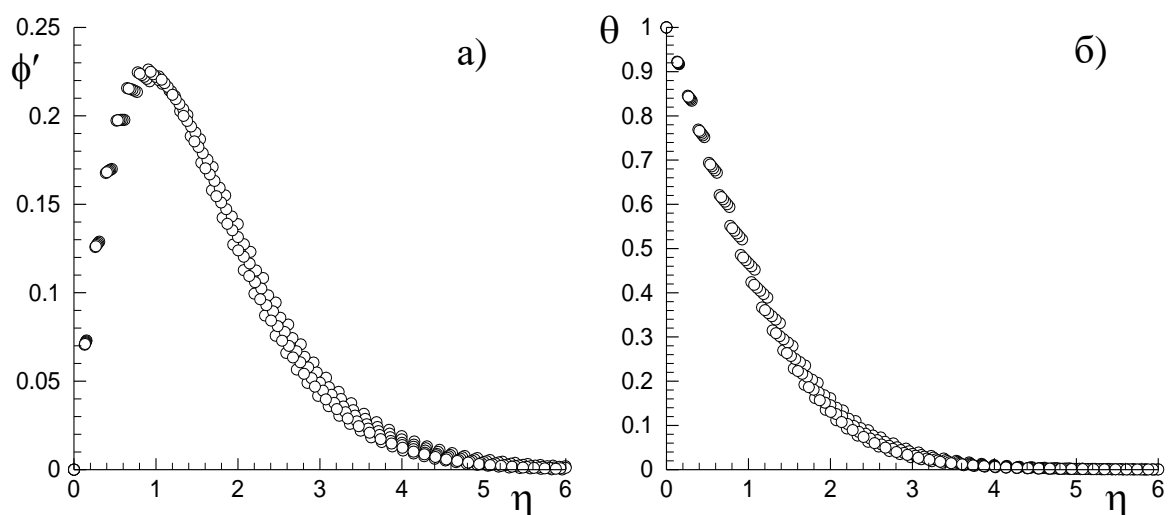


Рис. 2.18. Профили а) вертикальной скорости и б) температуры при $0,5H < y < H$, извлеченные из численного решения уравнений Навье-Стокса и представленные в автомоделных переменных ($Gr = 4 \times 10^5$, $Pr = 1$)

Для автомоделного СкПС зависимость локального коэффициента теплоотдачи $\alpha_y = q_w(y)/T^*$ в безразмерной форме $Nu_y = \alpha_y \cdot y / \lambda$ описывается для произвольных значений числа Pr следующей формулой:

$$Nu_y = H(Pr) Ra_y^{1/4}, \quad (2.62)$$

а среднее значение коэффициента теплоотдачи – формулой

$$Nu = 1,33 \cdot H(Pr) \cdot Ra^{1/4}. \quad (2.63)$$

Для функции $H(Pr)$ в диапазоне $10^{-4} \leq Pr \leq 10^4$, то есть практически для всех жидких и газовых сред, в работе [57] рекомендуется зависимость

$$H(Pr) = \frac{3}{4} \left(\frac{2Pr}{5(1 + 2Pr^{0,5} + 2Pr)} \right)^{0,25}. \quad (2.64)$$

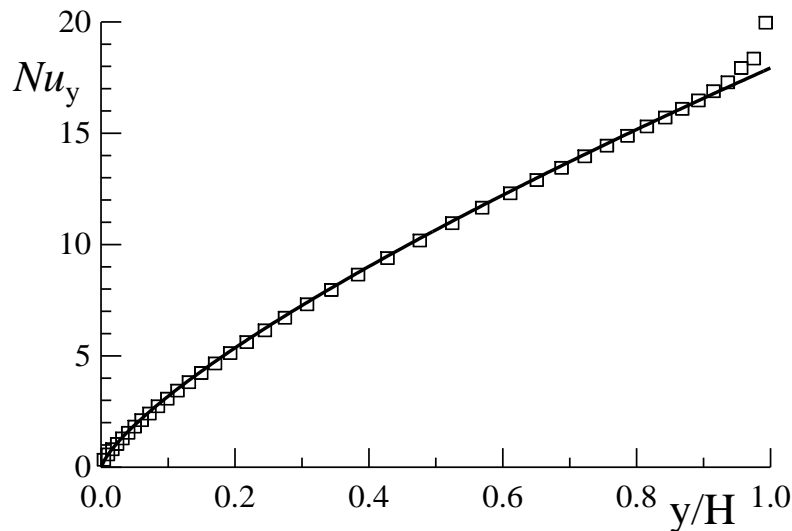


Рис. 2.19. Зависимость безразмерного локального коэффициента теплоотдачи от продольной координаты ($Pr = 1$): сопоставление данных расчета (символы) с автомодельным решением (сплошная линия)

На рис. 2.19 результаты расчета локальных коэффициентов теплоотдачи, полученные при численном решении уравнений Навье-Стокса для задачи, поставленной в начале этого раздела, $Gr = 4 \times 10^6$, $Pr = 1$, сравниваются с оценкой по формуле (2.62). Расчетные данные показаны символами, а зависимости (2.62) отвечает сплошная линия (координата y отсчитывается от нижнего края пластины).

Видно, что по уровню теплоотдачи автомодельное решение отлично согласуется с численным решением почти по всей длине пластины, кроме самой верхней ее части, где некоторое увеличение теплоотдачи в расчете связано с ускоряющим действием плавучей струи на пристенное течение вблизи верхней кромки.

3. УСТОЙЧИВОСТЬ ТЕЧЕНИЙ СО СВОБОДНОЙ КОНВЕКЦИЕЙ

3.1. Вводные замечания

Задачи устойчивости течений со свободной конвекцией в условиях, когда зависимость плотности среды от давления несущественна, традиционно ставятся и решаются с использованием приближения Буссинеска (см. раздел 1.3 пособия). Основное (устойчивое) состояние будем характеризовать следующими параметрами: \vec{V}_{bf} , T_{bf} , ρ_{bf}^* , \vec{f}_{bf} . Будем для простоты предполагать, что основное движение стационарно, то есть $\vec{V}_{bf} = \vec{V}_{bf}(\vec{r})$. Заметим, что в частном случае основным состоянием может быть отсутствие движения, то есть состояние покоя. В этом случае возникает задача устойчивости равновесия.

Введем возмущения скорости, \vec{V}' , давления, p' , и температуры, T' , которые зависят от пространственных координат и времени, а также параметры возмущенного течения: $\vec{V} = \vec{V}_{bf} + \vec{V}'$, $p = p_{bf} + p'$ и $T = T_{bf} + T'$. Очевидно, что основное и возмущенное течения описываются уравнениями Навье-Стокса и конвективного теплообмена (1.29), (1.32) и (1.33). Подставив в эти уравнения выражения для параметров возмущенного течения, можно получить балансовые уравнения для возмущений:

$$\nabla \cdot \vec{V}' = 0, \quad (3.1)$$

$$\frac{\partial \vec{V}'}{\partial t} + (\vec{V}_{bf} \cdot \nabla) \vec{V}' + (\vec{V}' \cdot \nabla) \vec{V}_{bf} + (\vec{V}' \cdot \nabla) \vec{V}' = -\frac{1}{\rho} \text{grad} p' + \nu \Delta \vec{V}' + \vec{f}', \quad (3.2)$$

$$\frac{\partial T'}{\partial t} + (\vec{V}_{bf} \cdot \nabla) T' + (\vec{V}' \cdot \nabla) T_{bf} + (\vec{V}' \cdot \nabla) T' = a \Delta T', \quad (3.3)$$

$$\text{где } \vec{f}' = -\beta_T T' \vec{g} \text{ — возмущение силы плавучести.} \quad (3.4)$$

Граничные и начальные условия для уравнений (3.1–3.3) имеют вид:

$$\vec{V}' = 0 \text{ (прилипание) или } \frac{\partial \vec{V}'}{\partial n} = 0 \text{ (периодичность или симметрия),}$$

$$T' = 0 \text{ или } \frac{\partial T'}{\partial n} = 0, \quad (3.5)$$

$$\vec{V}' = \vec{V}'_0(\vec{r}, t = 0), T' = T'_0(\vec{r}, t = 0). \quad (3.6)$$

Сформулированная задача эволюции возмущений является нелинейной из-за присутствия в уравнениях (3.2), (3.3) членов $(\vec{V}' \cdot \nabla) \vec{V}'$ и $(\vec{V}' \cdot \nabla) T'$. Традиционно рассмотрение вопросов теории устойчивости начинается с исследования влияния бесконечно малых возмущений. В этом случае члены $(\vec{V}' \cdot \nabla) \vec{V}'$ и $(\vec{V}' \cdot \nabla) T'$ отбрасываются как малые второго порядка, а система уравнений (3.1–3.3) линеаризуется.

3.2. Спектральная задача линейной теории устойчивости

Запишем линеаризованную формулировку задачи теории устойчивости (следуя монографии [5]):

$$\nabla \cdot \vec{V}' = 0, \quad (3.7)$$

$$\frac{\partial \vec{V}'}{\partial t} + (\vec{V}_{bf} \cdot \nabla) \vec{V}' + (\vec{V}' \cdot \nabla) \vec{V}_{bf} = -\frac{1}{\rho} \text{grad} p' + \nu \Delta \vec{V}' + \vec{f}', \quad (3.8)$$

$$\frac{\partial T'}{\partial t} + (\vec{V}_{bf} \cdot \nabla) T' + (\vec{V}' \cdot \nabla) T_{bf} = a \Delta T'. \quad (3.9)$$

Линеаризованная система уравнений (3.7–3.9) с соответствующими граничными и начальными условиями (3.5), (3.6) допускает решение, зависящее от времени по экспоненциальному закону, в виде:

$$\vec{V}' = e^{-\lambda t} \vec{u}(\vec{r}), \quad p' = e^{-\lambda t} q(\vec{r}), \quad T' = e^{-\lambda t} s(\vec{r}), \quad (3.10)$$

где $\lambda = \lambda^{(R)} + i\lambda^{(I)}$ – декремент эволюции возмущений, определяющий их поведение во времени и в общем случае включающий вещественную и мнимую части. Функции $\vec{u}(\vec{r})$, $q(\vec{r})$, $s(\vec{r})$ выражают пространственные амплитуды возмущений. Возмущение силы плавучести представим как $\vec{f}' = e^{-\lambda t} \vec{d}(\vec{r})$.

Подставим решение (3.10) в систему уравнений (3.7–3.9):

$$\nabla \cdot \vec{u} = 0, \quad (3.11)$$

$$-\lambda \vec{u} + (\vec{V}_{bf} \cdot \nabla) \vec{u} + (\vec{u} \cdot \nabla) \vec{V}_{bf} = -\frac{1}{\rho} \nabla q + \nu \Delta \vec{u} + \vec{d}, \quad (3.12)$$

$$-\lambda s + (\vec{V}_{bf} \cdot \nabla) s + (\vec{u} \cdot \nabla) T_{bf} = a \Delta s. \quad (3.13)$$

Граничные условия для уравнений (3.11–3.13) могут принимать вид:

$$\vec{u} = 0 \text{ или } \frac{\partial \vec{u}}{\partial n} = 0; \quad s = 0 \text{ или } \frac{\partial s}{\partial n} = 0. \quad (3.14)$$

Очевидно, что такая постановка задачи допускает тривиальное решение – отсутствие возмущений, $\vec{u} = 0$, $s = 0$, однако интерес представляет поиск нетривиальных решений системы уравнений.

Рассматриваемая линейная однородная краевая задача представляет собой спектральную задачу о поиске набора собственных чисел $\{\lambda_n\}$, $n = 1 \dots \infty$, и соответствующих собственных функций (так называемых гидродинамических мод, описывающих амплитуду возмущений). Экспоненциальный множитель в (3.10) определяет особенности эволюции возмущений во времени.

В том случае, если декремент λ является вещественным, имеет место монотонное изменение возмущения с течением времени (нарастание при $\lambda < 0$ и затухание при $\lambda > 0$). В случае комплексного декремента возмущения осциллируют с частотой $\lambda^{(I)}$, а их нарастание или затухание определяется знаком $\lambda^{(R)}$. Устойчивость течения соблюдается, когда вещественные части декрементов всех нормальных возмущений положительны. Наличие в спектре возмущения с отрицательным $\lambda^{(R)}$ означает неустойчивость течения по отношению к такому возмущению. Спектр возмущений является дискретным, и имеет место счетное множество собственных чисел и соответствующих им возмущений.

3.3. Устойчивость равновесия неравномерно нагретой жидкости

Рассмотрим устойчивость равновесия жидкости в условиях ее неравномерного нагрева. Равновесие устойчиво в том случае, если все возникающие возмущения со временем затухают. Нарастание же одного или нескольких возмущений означает неустойчивость положения равновесия относительно таких возмущений, а их развитие во времени приведет к нарушению равновесия и возникновению конвекции.

Выделим два случая неравномерного нагрева жидкости в слое, ориентированном перпендикулярно действию силы тяжести (рис. 3.1).

Первый случай – подогрев сверху (рис. 3.1а,б). Интуитивно понятно, что для жидкостей, в которых плотность с ростом температуры уменьшается в соответствии с формулой (1.27), такое состояние является устойчивым. Градиент температуры направлен в сторону, противоположную направлению действия силы тяжести, а направления градиента плотности и силы тяжести совпадают,

то есть при случайном отклонении от равновесного положения вверх или вниз малый жидкий элемент будет стремиться вернуться в исходное состояние.

Второй случай – подогрев снизу (рис. 3.1в,г). Это состояние, напротив, неустойчиво: направления градиента температуры и силы тяжести совпадают, а градиент плотности направлен в сторону, противоположную направлению действия силы тяжести. В этом случае при случайном отклонении малого жидкого элемента от равновесного положения вверх или вниз сила плавучести будет способствовать дальнейшему отклонению от исходного состояния. Конечно, и в случае неустойчивого положения при определенных условиях возмущения могут затухать под действием диссипативных эффектов – вязкости и теплопроводности.

Задача изучения устойчивости сводится к поиску такого перепада температуры, при котором равновесие жидкости будет невозможно и начнется конвективное движение.

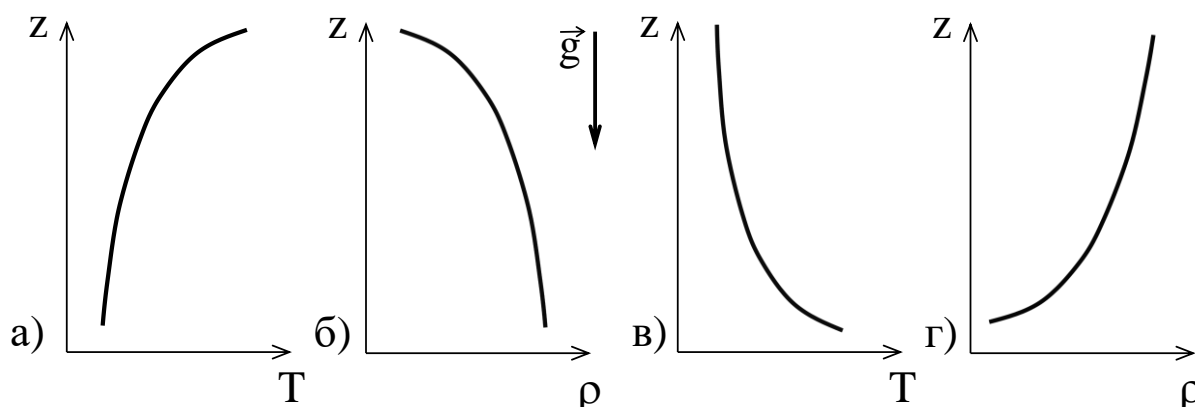


Рис. 3.1. Устойчивость равновесия неравномерно нагретой жидкости: вертикальные распределения температуры и плотности при а), б) подогреве сверху и в), г) подогреве снизу

В предположении, что исходное состояние жидкости представляет собой состояние покоя, $\vec{V}_{bf} = 0$, спектральная задача (3.11–3.14) существенно упрощается. Это соответствует выполнению уравнения теплопроводности в виде $\Delta T_{bf} = 0$, описывающего равновесное распределение температуры. Из общих положений гидростатики известно, что равновесие возможно в том случае, когда плотность распределения массовой силы подчиняется условию $\text{rot} \vec{f}_h = 0$, то есть $\vec{f}_h = -\text{grad} \Pi$, так что $\text{grad} \rho_h \times \vec{f}_h = 0$. Для обсуждаемого случая действия силы тяжести $\vec{f}_h = \vec{g}$, $\text{grad} \rho_h \times \vec{g} = 0$ и $\text{grad} T_{bf} \times \vec{g} = 0$.

В результате имеем, что температура зависит только от координаты, вдоль которой действует сила тяжести, $T_{bf} = T_{bf}(z)$, так что

$$\frac{d^2 T_{bf}}{dz^2} = 0, \quad T_{bf} = -Az + B, \quad \nabla T_{bf} = -A\vec{e}_z, \quad (3.15)$$

где A, B – константы. Таким образом, вводится параметр A с размерностью K/m , характеризующий градиент температуры при неравномерном нагреве.

Запишем систему уравнений для эволюции возмущений, наложенных на исходное состояние покоя жидкости (имеем в (3.12) – $\vec{d} = \beta_T g \vec{e}_z s$):

$$\nabla \cdot \vec{u} = 0, \quad (3.16)$$

$$-\lambda \vec{u} = -\frac{1}{\rho} \nabla q + \nu \Delta \vec{u} + \beta_T g \vec{e}_z s, \quad (3.17)$$

$$-\lambda s - A(\vec{u} \cdot \vec{e}_z) = a \Delta s. \quad (3.18)$$

Граничные условия сохраняют вид (3.14). Приведем систему уравнений (3.16–3.18) к безразмерной форме, используя следующие масштабы:

$$(x, y, z)_s = L, \quad (u)_s = \frac{a}{L}, \quad (q)_s = \frac{\rho \nu a}{L^2}, \quad (t)_s = \frac{L^2}{\nu}, \quad (\lambda)_s = \frac{\nu}{L^2}, \quad (s)_s = AL.$$

В результате преобразований система уравнений (3.16–3.18) в безразмерной форме примет вид (специальные обозначения для безразмерных величин опущены):

$$\nabla \cdot \vec{u} = 0, \quad (3.19)$$

$$-\lambda \vec{u} = -\nabla q + \Delta \vec{u} + Ra \cdot s \cdot \vec{e}_z, \quad (3.20)$$

$$-\lambda s \cdot Pr = \Delta s + u_z. \quad (3.21)$$

В систему входят два безразмерных параметра: числа Прандтля и Релея,

определяемые соотношениями: $Pr = \frac{\nu}{a}$, $Ra = Gr \cdot Pr = \frac{g \beta_T A L^4}{\nu a}$. Отметим, что

число Релея, определенное таким образом, в отличие от критерия подобия в привычном понимании в зависимости от направления градиента температуры (знака параметра A) может принимать как положительные так и отрицательные значения.

Преобразуем теперь уравнение (3.20), применив к нему операцию векторного анализа: $\text{rot} \cdot \text{rot} (\dots) = \text{grad} \cdot \text{div} (\dots) - \Delta (\dots)$. Воспользуемся также известными соотношениями для пространственных производных от скалярных и векторных функций:

$$\text{div}(\varphi \vec{a}) = \varphi \text{div} \vec{a} + \vec{a} \cdot \text{grad} \varphi,$$

$$\text{grad}(\vec{a} \cdot \vec{b}) = (\vec{a} \cdot \nabla) \vec{b} + (\vec{b} \cdot \nabla) \vec{a} + \vec{a} \times \text{rot} \vec{b} + \vec{b} \times \text{rot} \vec{a}$$

и получим для слагаемых уравнения (3.20) в отдельности:

$$\text{rot} \cdot \text{rot} \vec{u} = \text{grad} \cdot \text{div} \vec{u} - \Delta \vec{u} = -\Delta \vec{u};$$

$$\text{rot} \cdot \text{rot}(\text{grad} q) = 0;$$

$$\text{rot} \cdot \text{rot}(\Delta \vec{u}) = -\Delta \Delta \vec{u};$$

$$\begin{aligned} \text{rot} \cdot \text{rot}(s \cdot \vec{e}_z) &= \text{grad} \cdot \text{div}(s \cdot \vec{e}_z) - \Delta(s \cdot \vec{e}_z) = \text{grad}(\vec{e}_z \cdot \text{grad} s) - \Delta(s \cdot \vec{e}_z) = \\ &= (\vec{e}_z \cdot \nabla) \text{grad} s - \Delta(s \cdot \vec{e}_z) = \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial s}{\partial x} \vec{e}_x + \frac{\partial s}{\partial y} \vec{e}_y + \frac{\partial s}{\partial z} \vec{e}_z \right) - \left(\frac{\partial^2 s}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 s}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 s}{\partial z^2} \right) \vec{e}_z. \end{aligned}$$

Записав после преобразований проекцию уравнения (3.20) на ось z и сохранив уравнение (3.21) в неизменном виде, получим систему двух уравнений для вертикальной проекции пространственной части возмущений скорости и пространственной части возмущений температуры:

$$-\lambda \Delta u_z = \Delta \Delta u_z + Ra \left(\frac{\partial^2 s}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 s}{\partial y^2} \right), \quad (3.22)$$

$$-\lambda s \cdot Pr = \Delta s + u_z. \quad (3.23)$$

Граничные условия для уравнений (3.22), (3.23) имеют вид, аналогичный (3.14).

3.4. Устойчивость равновесия жидкости в безграничном горизонтальном слое (задача Релея-Бенара)

Рассмотрим слой жидкости высотой h , заключенный между двумя горизонтальными поверхностями, ориентированными перпендикулярно оси z (рис. 3.2). Слой предполагается безграничным в горизонтальных направлениях x и y . Плоские границы поддерживаются при постоянных значениях температуры, температуру нижней границы слоя обозначим T_1 , верхней – T_2 .

Эта задача известна как задача Релея-Бенара, причем конвекция, показанная на рис. 3.2, возникает при подогреве снизу, то есть когда нижняя граница имеет бóльшую температуру по сравнению с верхней.

Интерес к данной задаче возник после опубликования Бенаром в 1901 году результатов экспериментов [58], проведенных в тонком слое жидкости со свободной поверхностью, в которых было показано, что слой становится неустойчивым, когда разность температур превышает некоторое минимальное значение (парадоксально, но в экспериментах Бенара, положивших начало изучению термогравитационной конвекции, структура течения определялась преимущественно эффектами поверхностного натяжения, так как существенную роль играла термокапиллярная неустойчивость).

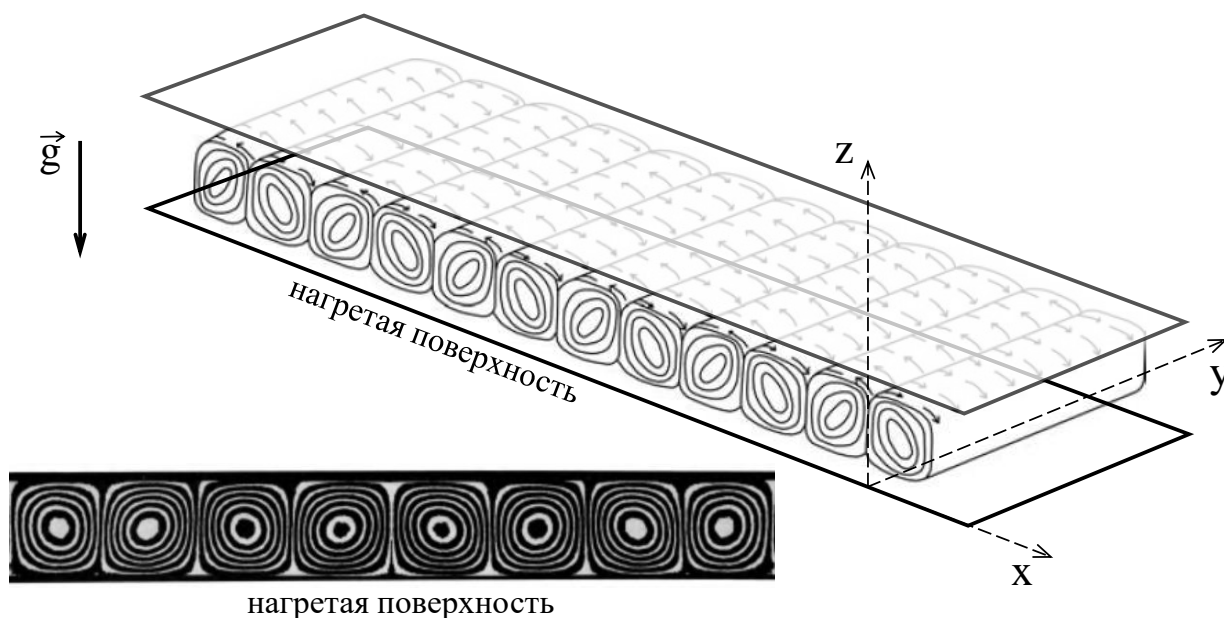


Рис. 3.2. Безграничный горизонтальный слой, подогреваемый снизу: сверху – общая схема задачи, внизу – интерферограмма [56], иллюстрирующая структуру сформировавшегося течения

Задача устойчивости была впервые сформулирована и решена Релеем в 1916 году [59]. Впоследствии было опубликовано множество работ, посвященных теоретическим исследованиям конвективной неустойчивости, а также экспериментальному и численному моделированию ламинарных, переходных и турбулентных режимов конвекции Релея-Бенара.

Для рассматриваемой задачи при определении числа Релея, входящего в уравнения (3.20) и (3.22), в качестве масштаба длины используем толщину слоя, $L = h$, а при определении параметра A в выражениях (3.15) – перепад

температур $(T_1 - T_2)$, так что $A = (T_1 - T_2)/h$. При подогреве снизу $T_1 > T_2$, поэтому параметр A в этом случае принимает положительные значения. В результате число Релея записывается в виде $Ra = g\beta_T(T_1 - T_2)h^3/\nu a$.

В силу безграничности слоя имеет место либо однородность, либо периодичность полей величин в направлении осей x и y . Однородность или периодичность полей позволяет представить решение системы уравнений (3.22), (3.23) в виде нормальных возмущений, периодических в плоскости (x, y) :

$$u_z = \varphi(z) \exp[i(k_x x + k_y y)], \quad (3.24)$$

$$s = \Theta(z) \exp[i(k_x x + k_y y)], \quad (3.25)$$

где $\varphi(z)$ и $\Theta(z)$ – амплитуды возмущений, k_x и k_y – вещественные волновые числа, характеризующие периодичность возмущений, $\vec{k} = (k_x, k_y)$ – волновой вектор. Волновой вектор является параметром формы возмущений в горизонтальном направлении.

Подставив соотношения (3.24), (3.25) в уравнения (3.22), (3.23), получим систему однородных дифференциальных уравнений:

$$-\lambda \cdot \text{Pr} \Theta = \Theta'' - k^2 \Theta + \varphi, \quad (3.26)$$

$$-\lambda(\varphi'' - k^2 \varphi) = (\varphi^{IV} - 2k^2 \varphi'' + k^4 \varphi) - Ra \cdot k^2 \Theta. \quad (3.27)$$

Здесь верхние индексы означают дифференцирование по z , $k^2 = k_x^2 + k_y^2$.

Записанная система обыкновенных дифференциальных уравнений для определения величин φ , Θ имеет шестой порядок. Возможные комбинации граничных условий на горизонтальных границах слоя формулируют три различные постановки рассматриваемой задачи.

Первая постановка отвечает слою, заключенному между двумя твердыми горизонтальными границами, на которых возмущения скорости обращаются в ноль. В этом случае $u_x = u_y = u_z = 0$ при $z = 0; 1$. Соответственно, при $z = 0; 1$ выполняются и условия $\partial u_x / \partial x = 0$, $\partial u_y / \partial y = 0$, что в силу уравнения (3.19) приводит к условию $\partial u_z / \partial z = 0$, то есть $\varphi' = 0$. Возмущения температуры на изотермических границах также обращаются в ноль. В итоге граничные

условия для уравнений (3.22), (3.23) в случае двух твердых границ принимают вид:

$$\varphi = 0, \varphi' = 0 \text{ и } \Theta = 0 \text{ при } z = 0; 1. \quad (3.29)$$

Задача с такими граничными условиями не имеет аналитического решения и интегрируется численно.

Вторая постановка отвечает идеализированному случаю свободных границ. Предположение, что горизонтальные границы остаются плоскими, то есть конвективные возмущения не приводят к изменению их формы, приводит к граничному условию $u_z = 0$. С другой стороны, в рассматриваемой постановке на границах слоя отсутствуют касательные напряжения трения, то есть по отношению к пространственной части возмущений выполняются условия $\partial u_x / \partial z = 0$, $\partial u_y / \partial z = 0$ при $z = 0; 1$. Если продифференцировать по z уравнение (3.19), можно получить граничное условие для вертикальной компоненты вектора скорости u_z :

$$\frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{\partial u_z}{\partial z} \right) = 0 \Rightarrow \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial u_x}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial u_y}{\partial z} + \frac{\partial^2 u_z}{\partial z^2} = 0 \Rightarrow \frac{\partial^2 u_z}{\partial z^2} = 0.$$

Таким образом, набор граничных условий для уравнений (3.26), (3.27) в этой постановке:

$$\varphi = 0, \varphi'' = 0 \text{ и } \Theta = 0 \text{ при } z = 0; 1. \quad (3.30)$$

Именно для этого идеализированного случая Релеем было получено аналитическое решение. В физическом эксперименте задание свободной границы на дне можно имитировать, разместив под рассматриваемым горизонтальным слоем дополнительный слой жидкости с существенно меньшей вязкостью.

Третья постановка представляет собой комбинацию первых двух – в ней одна горизонтальная граница свободная, а вторая – твердая. Этот случай отвечает условиям экспериментов Бенара; как и для случая двух твердых границ аналитическое решение отсутствует, задача может быть решена численно.

Следуя Релею, получим аналитическое решение для задачи в слое с обеими свободными границами (вторая постановка). Граничным условиям (3.30) удовлетворяет решение в виде гармонических функций

$$\varphi_n(z) = \alpha \cdot \sin(n\pi z) \text{ и } \Theta_n(z) = \beta \cdot \sin(n\pi z), \quad (3.31)$$

где α, β – произвольные коэффициенты (амплитуды возмущений), n – параметр формы возмущений в направлении z (целое число).

Параметр n изменяется дискретно, определяя характерный масштаб возмущений по вертикали и их четность. Нечетным значениям $n = 1, 3, 5, \dots$ соответствуют собственные возмущения, у которых вертикальная составляющая скорости и температура являются четными функциями относительно середины слоя $z = 0,5$, а при четных значениях $n = 2, 4, 6, \dots$ реализуются, наоборот, нечетные возмущения.

Подставим функции (3.31) в уравнения (3.26), (3.27) и получим однородную систему линейных алгебраических уравнений для нахождения амплитуд α и β :

$$(n^2\pi^2 + k^2) \cdot (\lambda_n - (n^2\pi^2 + k^2)) \alpha + Ra \cdot k^2 \beta = 0, \quad (3.32)$$

$$\alpha + (\lambda_n Pr - (n^2\pi^2 + k^2)) \beta = 0. \quad (3.33)$$

Собственные числа λ_n находятся из условия существования нетривиальных решений системы (3.32), (3.33), что возможно при равенстве нулю определителя системы, в котором введено обозначение $N = n^2\pi^2 + k^2$,

$$\begin{vmatrix} N(\lambda_n - N) & Ra \cdot k^2 \\ 1 & \lambda_n \cdot Pr - N \end{vmatrix} = 0. \quad (3.34)$$

Вычислив определитель, получим следующее квадратное уравнение относительно λ_n :

$$\lambda_n^2 - \lambda_n N \frac{Pr + 1}{Pr} + \frac{N^2}{Pr} - \frac{Ra \cdot k^2}{Pr \cdot N} = 0. \quad (3.35)$$

Корни этого уравнения дают значения декрементов, которые зависят от волнового числа k , параметра формы n и чисел Релея и Прандтля,

$$\lambda_n = \frac{Pr + 1}{2Pr} N \pm \sqrt{\left(\frac{Pr - 1}{2Pr}\right)^2 N^2 + \frac{Ra \cdot k^2}{Pr \cdot N}}. \quad (3.36)$$

Введя обозначения для первого и второго слагаемого в выражении (3.36), спектр собственных значений для задачи о свободной конвекции в безграничном горизонтальном слое со свободными границами можно представить как:

$$\lambda_{1,2}^{(n)} = A \pm B. \quad (3.37)$$

Проанализируем полученный спектр с точки зрения поведения вносимых в слой малых возмущений. Выделим три случая.

Первый случай – изотермический слой в исходном состоянии, $Ra = 0$ ($T_1 = T_2$). Как легко проверить, $\frac{Pr + 1}{2Pr} N \geq \frac{|Pr - 1|}{2Pr} N$, следовательно в (3.37) имеем $A > B$ ($Pr > 0$), так что соответствующие заданному n собственные значения вещественны и положительны: $\lambda_1^{(n)} > 0$, $\lambda_2^{(n)} > 0$ и, соответственно, внесенные в слой возмущения монотонно затухают.

Второй случай – слой, подогреваемый сверху, $Ra < 0$ ($T_1 < T_2$). В этих условиях подкоренное выражение в соотношении (3.36) может принимать отрицательные значения при $Ra < Ra^*$, где Ra^* – некоторое значение числа Релея, меньшее нуля и рассчитываемое по формуле:

$$Ra^* = -\left(\frac{Pr - 1}{2Pr}\right)^2 \Big/ \frac{k^2}{Pr \cdot N} = \left(\frac{Pr - 1}{2}\right)^2 \frac{N}{Pr \cdot k^2}. \quad (3.38)$$

Собственные числа при выполнении условия $Ra < Ra^*$ становятся комплексными, сопряженными. Вещественные части декрементов λ_n одинаковы и положительны, то есть имеет место колебательное затухание возмущений.

Для большинства газов число Прандтля близко к единице и значение Ra^* при этом оказывается близким к нулю, то есть для газов при подогреве сверху монотонное затухание возмущений возможно только в узком диапазоне чисел Релея, соответствующем малым значениям перепада температур между границами слоя, а в большинстве случаев наблюдается колебательное затухание возмущений.

Третий случай – слой, подогреваемый снизу, $Ra > 0$ ($T_1 > T_2$). Подкоренное выражение в (3.36) в этом случае всегда положительно, так что значения λ_n вещественны и возмущения изменяются со временем монотонно. При некотором значении числа Релея, Ra_{crit} , в (3.37) будет выполнено условие $B > A$, корни уравнения (3.35) при этом будут иметь разный знак: $\lambda_1^{(n)} > 0$, $\lambda_2^{(n)} < 0$, и, следовательно, возмущения, внесенные в подогреваемый снизу слой первой модой, будут монотонно затухать, а второй – монотонно расти.

Анализ спектра собственных значений иллюстрирует рис. 3.3, где для $n = 1$, $k = 2.22$, $Pr = 1/3$ показана зависимость (3.36) вещественной и мнимой

частей декремента возмущений λ_n от числа Релея в подогреваемом снизу безграничном горизонтальном слое со свободными границами. На рис. 3.3а видна критическая точка Ra_{crit} появления неустойчивости при пересечении оси абсцисс нижней ветвью кривой $Re(\lambda_n)$, а также точка Ra^* слияния двух ветвей, в которой возникают колебания (эта точка видна и на рис. 3.3б).

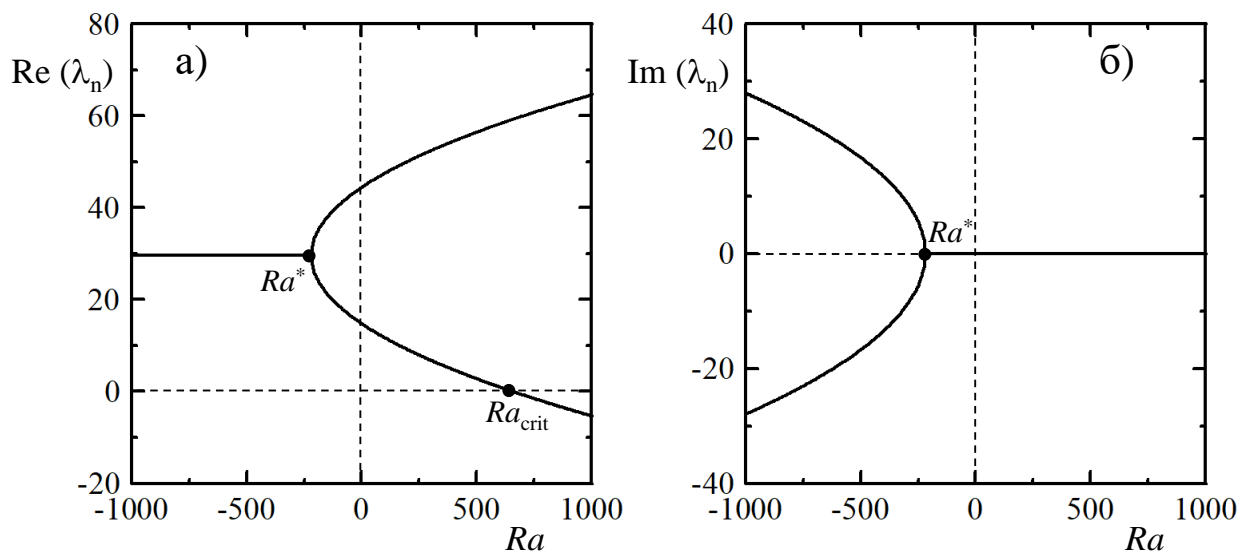


Рис. 3.3. Декременты возмущений λ_n в подогреваемом снизу безграничном горизонтальном слое со свободными границами для $n = 1$, $k = 2,22$, $Pr = 1/3$;
а) – вещественная часть λ_n , б) – мнимая часть λ_n

Критическое число Релея, Ra_{crit} , при котором возникает неустойчивость Релея-Бенара по отношению к возмущению с заданными значениями n и k , определяется из условия $\lambda_n = 0$ в соотношении (3.35), что соответствует пересечению нижней ветви кривой с осью абсцисс на рис. 3.3а. Произведя преобразования в (3.35), получим:

$$Ra_{crit} = \left(n^2 \pi^2 + k^2 \right)^3 / k^2. \quad (3.39)$$

Видно, что значение Ra_{crit} для подогреваемого снизу слоя не зависит от значения числа Прандтля, то есть от физических свойств жидкости. Для любых значений k наименьшее значение критического числа Релея достигается при $n = 1$; именно это возмущение и является наиболее опасным для равновесного состояния:

$$\left(Ra_{crit} \right)_{n=1} = \left(\pi^2 + k^2 \right)^3 / k^2. \quad (3.40)$$

Эта формула задает нейтральную кривую, которая разграничивает области устойчивости и неустойчивости. В области возмущений с короткой длиной волны ($k \gg 1$) Ra_{crit} возрастает с увеличением волнового числа пропорционально k^4 , а при $k \ll 1$ зависимость (3.39) принимает вид $Ra_{crit} \approx n^6 \pi^6 / k^2$.

Найдем минимальное значение критического числа Релея по всем значениям параметра k , записав условие экстремума $\partial(Ra_{crit})_{n=1} / \partial k = 0$. Отсюда легко вычисляется значение волнового числа для наиболее опасного возмущения:

$$k_{crit} = \pi / \sqrt{2} \approx 2,22, \quad (3.41)$$

для этого значения волнового числа и построены кривые на рис. 3.3.

Соответственно, минимальное значение критического числа Релея, при превышении которого в подогреваемом снизу горизонтальном слое жидкости со свободными границами возникает стационарное конвективное движение, равняется:

$$(Ra_{crit})_{min} = \frac{(\pi^2 + \pi^2 / 2)^3}{\pi^2 / 2} \approx 657,5. \quad (3.42)$$

В том случае, если число Релея немного превосходит Ra_{crit} , следует ожидать экспоненциального роста только наиболее опасной моды $n = 1$ при $k \approx k_{crit}$. На рис. 3.4 проиллюстрированы декременты возмущений для первых трех значений параметра формы возмущений n (для двух значений числа Прандтля). Видно, что уже при $n = 2$ критическая точка проявления неустойчивости более чем на порядок смещена в сторону бóльших значений числа Релея по сравнению декрементом при $n = 1$, а для $n = 3$ нижняя ветвь кривой $Re(\lambda_n)$ пересечет ось абсцисс лишь за пределами рисунка.

Расчет спектра декрементов и нахождение критических значений числа Релея и волнового числа для случаев, в которых хотя бы одна из границ слоя твердая, производится численно; результаты применения линейной теории устойчивости для всех типов границ сведены в таблицу 3.1. Повышение критических чисел Релея при переходе от слоя со свободными границами к слою с твердыми границами связано со стабилизирующим действием вязкости у твердых стенок.

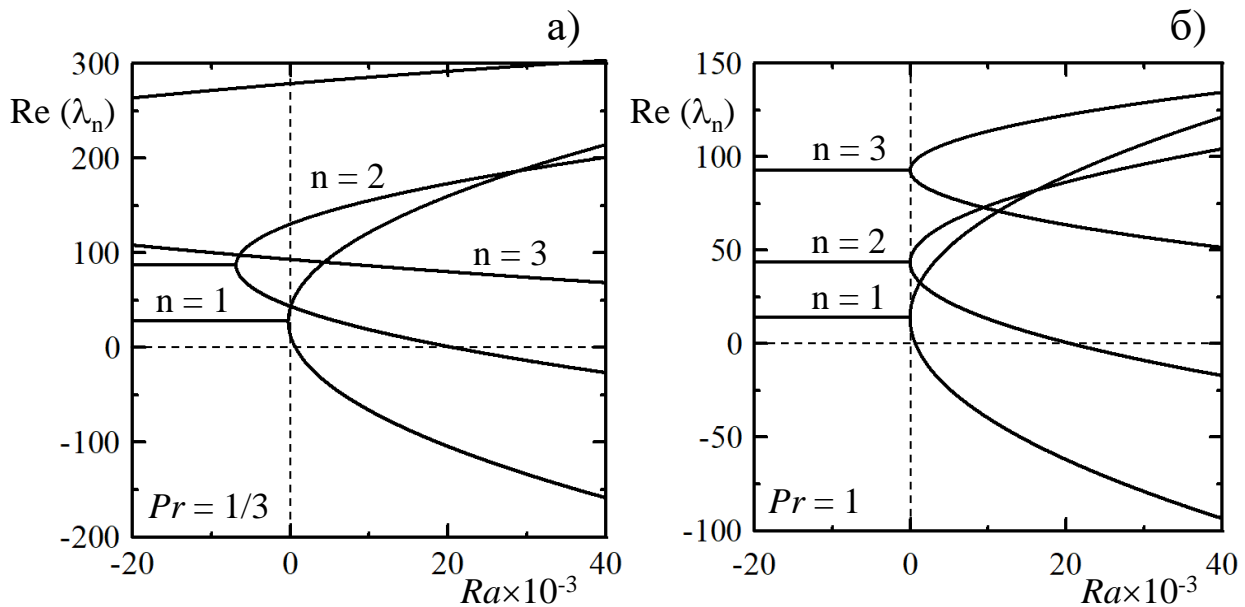


Рис. 3.4. Декременты возмущений в подогреваемом снизу безграничном горизонтальном слое со свободными границами для $k = 2$, а) $Pr = 1/3$ и б) $Pr = 1$

Таблица 3.1. Критические значения числа Релея и волнового числа для безграничного горизонтального слоя с разными типами границ при подогреве снизу

Тип границ	Обе границы свободные	Обе границы твердые	Одна граница твердая, другая – свободная
Ra_{crit}	657,5	1708	1101
k_{crit}	2,22	3,12	2,68

Оценим параметры слоя, отвечающие условиям возникновения конвекции, в размерных единицах. К примеру, для случая двух твердых границ ($Ra_{crit} = 1708$) зададим $\Delta T = 1$ К, $T_1 = 300$ К и найдем для нескольких жидкостей с существенно различающимися физическими свойствами критическую толщину слоя h_{crit} , при которой начнется конвективное движение (см. таблицу 3.2, физические свойства жидкостей при $T = 300$ К взяты из [2]). Как видно, при заданном относительно небольшом перепаде температуры между границами критическая толщина слоя для разных жидкостей составляет от единиц до нескольких десятков миллиметров.

Экспериментальные наблюдения подтверждают выводы теории устойчивости. Так, начало конвекции для случая граничных условий Релея (обе свободные границы) исследовалось при наблюдении неустойчивости слоя силиконового масла, налитого на слой ртути и граничащего сверху со слоем гелия. Вязкость силиконового масла гораздо больше вязкости ртути и гелия,

что моделировало отсутствие вязких напряжений на границах. Измеренное критическое число Релея хорошо согласовано с теоретическим значением, однако при обработке результатов экспериментов приходилось вводить поправку на конечность теплопроводности верхней границы слоя.

Таблица 3.2. Оценка критической толщины безграничного горизонтального слоя, размещенного между двумя твердыми стенками, при подогреве снизу

	Ртуть	Воздух	Вода	Глицерин
Pr	0,025	0,71	6,09	$8,67 \times 10^3$
μ , Па·с	$1,53 \times 10^{-3}$	$1,85 \times 10^{-5}$	$8,9 \times 10^{-4}$	0,95
ρ , кг/м ³	$1,35 \times 10^4$	1,177	$9,97 \times 10^2$	$1,26 \times 10^3$
ν , м ² /с	$1,2 \times 10^{-7}$	$1,57 \times 10^{-5}$	$8,9 \times 10^{-7}$	$1,11 \times 10^{-3}$
β_T , 1/К	$1,8 \times 10^{-4}$	$3,3 \times 10^{-3}$	$2,06 \times 10^{-4}$	$5,4 \times 10^{-4}$
h_{crit} , мм	7,9	26,2	4,8	27,6

Для случая двух твердых границ эксперименты проводились преимущественно со слоями жидкости, заключенными между металлическими пластинами, обладающими высокой теплопроводностью. Такая методика эксперимента позволяет контролировать тепловые граничные условия, однако затрудняет визуальное наблюдение возникновения движения. Фиксация проявления неустойчивости в таких экспериментах осуществлялась с помощью тепловых измерений: при $Ra < Ra_{crit}$ имеет место перенос тепла только за счет теплопроводности, а при возникновении движения появляется конвективная составляющая теплового потока (см. рис. 2.6). Критические значения числа Релея, полученные разными авторами на основе тепловых измерений в экспериментах с различными жидкостями, находились в очень хорошем согласии с результатами теории устойчивости.

В заключение обсудим особенности формы развивающихся возмущений в рассматриваемом безграничном слое. В горизонтальной плоскости задача, очевидно, вырождается, поскольку отсутствует преимущественное направление, и в результате будет иметь место конкуренция между равновероятно направленными возмущениями. В частности, имеет место решение, описывающее двумерные (плоские) конвективные валы с осями, параллельными одной

из горизонтальных осей, см. рис. 3.2. Возможно формирование структур и более сложного вида – в виде пространственных периодических структур (многоугольников), полностью заполняющих слой (т.н. ячейки Бенара).

В любом эксперименте слой ограничен боковыми стенками, так что в реальности будут зарождаться некоторые преимущественные возмущения. К примеру, для слоя в форме параллелепипеда неустойчивая стратификация приводит к формированию течения в виде системы парных валиков, ориентированных вдоль коротких вертикальных стенок, а для цилиндрического слоя могут образовываться либо система валиков, расположенных по окружности, либо гексагональные ячейки. Подробнее о формировании различных структур при развитии конвекции Релея-Бенара можно прочитать в монографии [12].

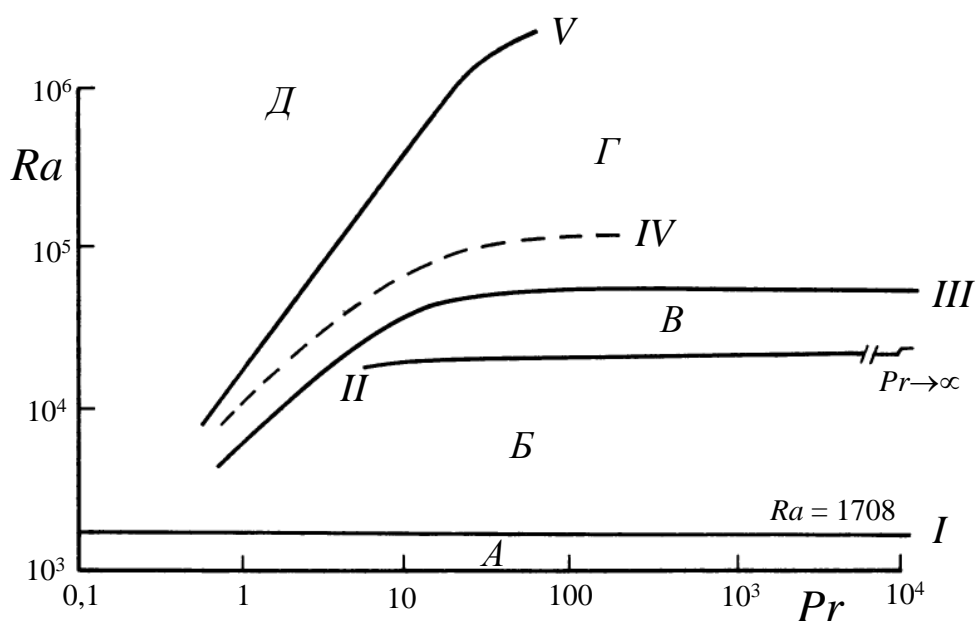


Рис. 3.5. Диаграмма, иллюстрирующая многообразие состояний, наблюдаемых в подогреваемом снизу горизонтальном слое жидкости:

A – состояние равновесия, *B* – установившееся двумерное течение,
B – установившееся трехмерное течение, *Г* – нестационарное трехмерное течение,
Д – турбулентный режим [60]

Потеря устойчивости равновесия и формирование первичного ламинарного течения в виде конвективных ячеек или валиков – лишь первое устойчивое состояние, реализующееся при сравнительно малых Ra . По мере увеличения числа Релея последовательно возбуждаются все более усложняющиеся режимы течения. На рис. 3.5 показаны различные режимы течения по данным экспериментов [60]: на диаграмме выделены пять стадий перехода, отмеченных римскими цифрами; соответствующие режимы обозначены

заглавными буквами. Как видно из диаграммы, в отличие от первого перехода (начало движения), последующие стадии существенно зависят от значения Pr .

3.5. Устойчивость вынужденного движения в горизонтальном слое, подогреваемом снизу

Обратимся к вопросу о влиянии массовых сил на устойчивость ламинарного вынужденного движения жидкости на примере задачи о продольном течении в горизонтальном слое, подогреваемом снизу. Эта задача рассматривалась ранее в разделе 2.3 как пример двумерного смешанноконвективного течения с пространственной трехмерной ориентацией векторов скорости.

Пусть жидкость в слое, заключенном между двумя твердыми стенками (см. схему на рис. 3.2), движется вдоль оси x под действием наложенного в данном направлении перепада давления. В этих условиях формируется основное стационарное движение – течение Пуазейля с параболическим распределением продольной скорости в виде $\vec{V}_{bf} = U(z)\vec{e}_x$, где $U(z)$ – скорость основного течения.

Вспомним уравнения (3.12), (3.13), полученные после подстановки решения вида $\vec{V}' = e^{-\lambda t}\vec{u}(\vec{r})$ в линеаризованную систему уравнений, которые описывают эволюцию возмущений:

$$-\lambda\vec{u} + (\vec{V}_{bf} \cdot \nabla)\vec{u} + (\vec{u} \cdot \nabla)\vec{V}_{bf} = -\frac{1}{\rho}\nabla q + \nu\Delta\vec{u} + \vec{d}, \quad (3.43)$$

$$-\lambda s + (\vec{V}_{bf} \cdot \nabla)s + (\vec{u} \cdot \nabla)T_{bf} = a\Delta s. \quad (3.44)$$

Упростим в этих уравнениях конвективные члены с учетом особенностей рассматриваемого течения:

$$(\vec{V}_{bf} \cdot \nabla)\vec{u} = U\frac{\partial\vec{u}}{\partial x}, \quad (3.45)$$

$$(\vec{u} \cdot \nabla)\vec{V}_{bf} = u_z\frac{\partial U(z)}{\partial z}\vec{e}_x, \quad (3.46)$$

$$(\vec{V}_{bf} \cdot \nabla)s = U\frac{\partial s}{\partial x}. \quad (3.47)$$

В отличие от задачи об устойчивости равновесия жидкости, в данном случае необходимо учесть влияние на развитие возмущений конвективных членов (3.45–3.47). Поскольку в рассматриваемой задаче имеется выделенное

направление, можно положить, что конвективные ячейки (валики), описанные в разделе 3.4, выстроятся вдоль по потоку, то есть в направлении оси x . Отметим, что в условиях отсутствия вынужденного течения валики могут быть ориентированы произвольно. Обычно ориентация валиков определяется несимметрией геометрии в эксперименте: так, конвективные структуры, показанные на рис. 3.2, ориентированы вдоль более короткой стороны [56].

Предположив развитие возмущений, ориентированных вдоль вынужденного потока, можно поставить граничные условия однородности вдоль оси x , сохранив периодические граничные условия вдоль оси y .

Возмущение скорости запишем в виде:

$$u(\vec{r}) = u(z)e^{ik_y y}. \quad (3.48)$$

Принимая во внимание условия однородности, $\partial \bar{u} / \partial x = 0$, $\partial s / \partial x = 0$, можно заключить, что выражения (3.45) и (3.47) не вносят вклада в уравнения эволюции возмущений.

Преобразуем соотношение (3.46), применив к нему, как и ранее, при выводе уравнений устойчивости неравномерно нагретой жидкости в разделе 3.3, операцию $\text{rot} \cdot \text{rot}(\dots)$, введя для сокращения записи обозначение $\Phi = u_z \partial U(z) / \partial z$:

$$\begin{aligned} \text{rot} \cdot \text{rot} \left(u_z \frac{\partial U(z)}{\partial z} \vec{e}_x \right) &\equiv \text{rot} \cdot \text{rot} (\Phi \vec{e}_x) = \text{grad} \cdot \text{div} (\Phi \vec{e}_x) - \Delta (\Phi \vec{e}_x) = \\ &= \text{grad} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x} \right) - \vec{e}_x \Delta \Phi \end{aligned} \quad (3.49)$$

С учетом того, что выбранное возмущение однородно вдоль оси x , $\partial \Phi / \partial x = 0$. Таким образом, в проекции на ось z имеем для преобразованного уравнения (3.46): $\text{rot} \cdot \text{rot}(\dots)|_z = 0$. В результате система уравнений, описывающая эволюцию возмущений, имеет тот же вид, что и система уравнений (3.22), (3.23) в задаче о равновесии неравномерно нагретой жидкости:

$$-\lambda \Delta u_z = \Delta \Delta u_z + Ra \left(\frac{\partial^2 s}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 s}{\partial y^2} \right), \quad (3.50)$$

$$-\lambda s \cdot Pr = \Delta s + u_z. \quad (3.51)$$

Общая картина трехмерного течения в рассматриваемой задаче представляет собой систему конвективных валов, наложенных на основное вынужденное движение (см. рис. 2.5, раздел 2.3). Важно подчеркнуть, что конвективная неустойчивость такого рода возникает при том же значении $Ra_{crit} = 1708$, что и при потере устойчивости равновесного состояния жидкости (см. раздел 3.4). При достаточно больших скоростях основного течения в данной задаче может наблюдаться взаимодействие двух механизмов неустойчивости – конвективного и гидродинамического.

3.6. Устойчивость свободноконвективного движения в вертикальном слое с разнонагретыми стенками

Рассмотрим устойчивость свободноконвективного движения жидкости в вертикальном слое неограниченной протяженности с разнонагретыми изотермическими параллельными стенками (эта задача обстоятельно обсуждена в монографии [6]). Общая схема постановки задачи и соотношения для основного течения были приведены ранее в разделе 2.1 (см. рис. 2.1).

Напомним, что ранее (раздел 2.1) в качестве масштабов при описании основного движения за линейный масштаб была принята ширина слоя $L_s = 2h$, за масштаб перепада температуры – полный перепад температуры через слой $(\Delta T)_s = (T_{w2} - T_{w1})$, за масштаб скорости – величина $w_s = v/L_s = v/(2h)$, за масштаб времени – величина $t_s = L_s^2/v$. Распределения безразмерной скорости и температуры основного течения при этом представляются в виде:

$$w_{bf} = \frac{v}{L_s} \cdot \frac{g\beta_T(\Delta T)_s L_s^3}{48\nu^2} \left(\bar{x} - \bar{x}^3 \right) = \frac{v}{L_s} \cdot \frac{Gr_{2h}}{48} \left(\bar{x} - \bar{x}^3 \right), \quad (3.52)$$

$$T_{bf}^* = T_w^* \cdot \bar{x}, \quad (3.53)$$

где число Грасгофа определено как

$$Gr_{2h} = \frac{g\beta_T(\Delta T)_s L_s^3}{\nu^2} = 16 \frac{g\beta_T T_w^* h^3}{\nu^2},$$

для удобства последующего изложения число Грасгофа, определенное по полной ширине слоя, обозначено нижним индексом «2h» (в разделе 2.1 этот индекс не вводился).

Для изучения устойчивости основного движения относительно малых возмущений на основе линейной теории, следуя [5, 6], переопределим масштабы следующим образом: за линейный масштаб примем полуширину слоя, $L_s = h$, за масштаб перепада температуры – половину перепада через слой, $(\Delta T)_s = 0,5(T_{w2} - T_{w1})$, за масштаб скорости – $w_s = g\beta_T(T_{w2} - T_{w1})h^2/\nu$, за масштаб давления – $p_s = \rho g\beta_T(T_{w2} - T_{w1})h$, за масштаб времени – $t_s = h^2/\nu$. В результате выражения для безразмерных скорости и температуры основного течения примут вид (опустим черту при обозначении безразмерных величин):

$$w_{bf} = \frac{1}{6}(x - x^3), \quad T_b = x, \quad (3.54)$$

при этом определяющим параметром задачи будет служить число Грасгофа, построенное по полуширине слоя h и по половине перепада температуры T_w^* , в 16 раз меньшее, чем Gr_{2h} ,

$$Gr = \frac{g\beta_T T_w^* h^3}{\nu^2}. \quad (3.55)$$

Обратимся к линеаризованной задаче о развитии малых нестационарных возмущений (3.7–3.9) и перепишем эти уравнения в безразмерном виде (как и ранее, не вводя специальные обозначения для безразмерных величин):

$$\nabla \cdot \vec{V}' = 0, \quad (3.56)$$

$$\frac{\partial \vec{V}'}{\partial t} + Gr[(\vec{V}_{bf} \cdot \nabla)\vec{V}' + (\vec{V}' \cdot \nabla)\vec{V}_{bf}] = -\text{grad} p' + \Delta \vec{V}' + T' \vec{e}_z, \quad (3.57)$$

$$\frac{\partial T'}{\partial t} + Gr[(\vec{V}_{bf} \cdot \nabla)T' + (\vec{V}' \cdot \nabla)T_{bf}] = \frac{1}{Pr} \Delta T'. \quad (3.58)$$

В соответствии с (3.54) исходное движение представляет собой течение с параллельными линиями тока: имеется только вертикальная компонента вектора скорости, зависящая от координаты x , то есть $\vec{V}_{bf} = \{0, 0, w_{bf}(x)\}$.

В теории устойчивости плоскопараллельных изотермических течений вводится преобразование Сквайра, которое сводит задачу об устойчивости относительно пространственных возмущений к соответствующей задаче для плоских возмущений, при этом оказывается, что именно плоским возмущениям соответствуют наименьшие критические числа Рейнольдса, то есть плоские возмущения наиболее опасны. Эти выводы теории гидродинамической устойчивости можно обобщить на рассматриваемое

свободноконвективное течение и поставить задачу о распространении плоских возмущений, полагая, что

$$v'_y \equiv v = 0 \quad (3.59)$$

и отсутствует зависимость $v'_x \equiv u$ и $v'_z \equiv w$ от координаты y .

Запишем проекции уравнения (3.57) на оси x, z совместно с уравнением эволюции возмущений температуры (3.58):

$$\frac{\partial u}{\partial t} + Gr \cdot w_{bf} \frac{\partial u}{\partial z} = -\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}, \quad (3.60)$$

$$\frac{\partial w}{\partial t} + Gr \cdot \left(u \frac{dw_{bf}}{dx} + w_{bf} \frac{\partial w}{\partial z} \right) = -\frac{\partial p}{\partial z} + \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} + T', \quad (3.61)$$

$$\frac{\partial T'}{\partial t} + Gr \cdot \left(w_{bf} \frac{\partial T'}{\partial z} + u \frac{dT'_{bf}}{dx} \right) = \frac{1}{Pr} \Delta T'. \quad (3.62)$$

Для плоских возмущений можно ввести функцию тока Ψ , определив ее следующими соотношениями:

$$u = -\frac{\partial \Psi}{\partial z}, \quad w = \frac{\partial \Psi}{\partial x}. \quad (3.63)$$

Продифференцируем уравнение (3.61) по x , а уравнение (3.60) по z и вычтем второе из первого, что позволяет исключить из рассмотрения давление. Аналогичное преобразование выполняется при решении уравнения Орра-Зоммерфельда гидродинамической задачи на собственные значения, описывающего устойчивость плоскопараллельного течения вязкой несжимаемой жидкости с произвольными граничными условиями и профилем скорости. После преобразования получим:

$$\frac{\partial(\Delta \Psi)}{\partial t} + Gr \left(w_{bf} \frac{\partial(\Delta \Psi)}{\partial z} - \frac{d^2 w_{bf}}{dx^2} \frac{\partial \Psi}{\partial z} \right) = \Delta \Delta \Psi + \frac{\partial T'}{\partial x}. \quad (3.64)$$

Сформулируем теперь спектральную задачу, предположив следующий вид нормальных возмущений, удовлетворяющих (3.62), (3.64):

$$\Psi(x, z, t) = e^{-\lambda t} e^{ikz} \varphi(x), \quad (3.65)$$

$$T'(x, z, t) = e^{-\lambda t} e^{ikz} \Theta(x),$$

где $\varphi(x)$, $\Theta(x)$ – амплитуды возмущений, λ – декремент возмущений, k – вещественное волновое число. Подставим выражения (3.65) в уравнения (3.62), (3.64) и получим систему уравнений для спектральной задачи в виде:

$$DD\varphi + ikGr \left(\frac{d^2 w_{bf}}{dx^2} \varphi - w_{bf} D\varphi \right) + \frac{d\Theta}{dx} = -\lambda D\varphi, \quad (3.66)$$

$$\frac{1}{Pr} D\Theta + ikGr \left(\varphi \frac{dT_{bf}}{dx} - w_{bf} \Theta \right) = -\lambda \Theta, \quad (3.67)$$

где введено обозначение для оператора $D = d^2/dx^2 - k^2$.

Граничные условия для возмущений на вертикальных стенках, соответствующие выполнению условий прилипания, непротекания и постоянной температуры, запишутся в виде:

$$\varphi = \varphi' = 0, \quad \Theta = 0 \quad \text{при } x = \pm 1. \quad (3.68)$$

Уравнения (3.66), (3.67) представляют собой систему обыкновенных дифференциальных уравнений шестого порядка и формулируют характеристическую краевую задачу (задачу на собственные числа). Для анализа пределов устойчивости необходимо определить значения декремента λ , для которых имеется нетривиальное решение. Декременты λ находятся как собственные числа краевой задачи, а соответствующие собственные функции φ и Θ определяют форму возмущений скорости и температуры.

Поставленная краевая задача решается численно, при этом собственные значения λ зависят от трех параметров: динамического параметра – числа Грасгофа Gr , свойств жидкости – числа Прандтля Pr , формы возмущений – волнового числа k .

В тех случаях, когда декремент λ оказывается вещественным, соответствующее возмущение монотонно изменяется во времени (при $\lambda < 0$ – нарастает и $\lambda > 0$ – затухает). Если же декремент оказывается комплексным, $\lambda = \lambda^{(R)} + i\lambda^{(I)}$, возмущения осциллируют с частотой $\lambda^{(I)}$, распространяясь в потоке в виде волн с фазовой скоростью, равной $\lambda^{(I)}/k$; затухание или нарастание возмущений определяется знаком $\lambda^{(R)}$. Условие $\lambda(Gr, Pr, k) = 0$ для вещественных декрементов – или $\lambda^{(R)}(Gr, Pr, k) = 0$ для комплексных декрементов – определяет границу устойчивости основного течения относительно малых возмущений.

Следует заметить, что обсуждаемая задача является обобщением классической задачи теории гидродинамической устойчивости, в котором учитываются два дополнительных фактора – наличие силы плавучести в уравнении движения, а также неизотермичности основного течения и возмущений.

Исследование спектра малых нормальных возмущений, границ устойчивости и характеристик критических возмущений обычно начинают с предельного случая малых чисел Прандтля ($Pr \rightarrow 0$). В этом случае благодаря высокой теплопроводности жидкости возмущения температуры хорошо рассеиваются на фоне сравнительно медленно развивающихся возмущений скорости (что характерно, например, для жидких металлов), и можно положить $\Theta = 0$, полностью пренебрегая влиянием тепловых факторов на развитие возмущений.

Задача об устойчивости вызванного эффектами плавучести конвективного течения с кубическим профилем скорости при этом сводится к чисто гидродинамической постановке. Выписанное ранее уравнение для амплитуды возмущений функции тока (3.66) трансформируется в уравнение Орра-Зоммерфельда, определяющее плоские возмущения в изотермическом плоскопараллельном течении; устойчивость при этом определяется формой профиля исходного движения в соответствии с уравнением

$$DD\varphi + ikGr \left(\frac{d^2 w_{bf}}{dx^2} \varphi - w_{bf} D\varphi \right) = -\lambda D\varphi \quad (3.69)$$

с граничными условиями

$$\varphi = \varphi' = 0 \text{ при } x = \pm 1. \quad (3.70)$$

Численное решение уравнения (3.69) позволяет получить диаграмму устойчивости изотермического течения со свободноконвективным кубическим профилем скорости (3.54). На рис. 3.6 приведен пример рассчитанного спектра декрементов для волнового числа $k = 1$ [6]. Как видно из представленного семейства кривых $\lambda^{(R)}$, пронумерованных от 0 до 10, при малых значениях числа Грасгофа все декременты вещественны и положительны, так что соответствующие им возмущения монотонно затухают во времени. С ростом Gr верхние уровни спектра, начиная с кривой 1, попарно сливаются с порождением затухающих колебательных возмущений (штрих-пунктирные линии,

соответствующие вещественной части двух комплексно сопряженных декрементов), а нижний уровень спектра, оставаясь вещественным, пересекает ось абсцисс: правее точки пересечения декремент возмущений отрицателен, что соответствует монотонной неустойчивости. Согласно литературным данным различных авторов (см. обзор в [6]), рассчитанные критические значения числа Грасгофа и волнового числа имеют значения: $Gr_{crit} \approx 496$, $k_{crit} \approx 1,34$.

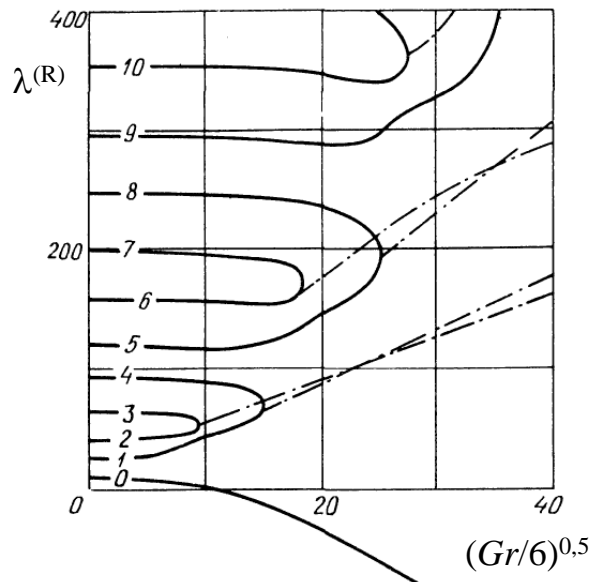


Рис. 3.6. Декременты возмущений течения в вертикальном слое, рассчитанные в предположении отсутствия тепловых возмущений ($Pr \rightarrow 0$), $k = 1$ [6]

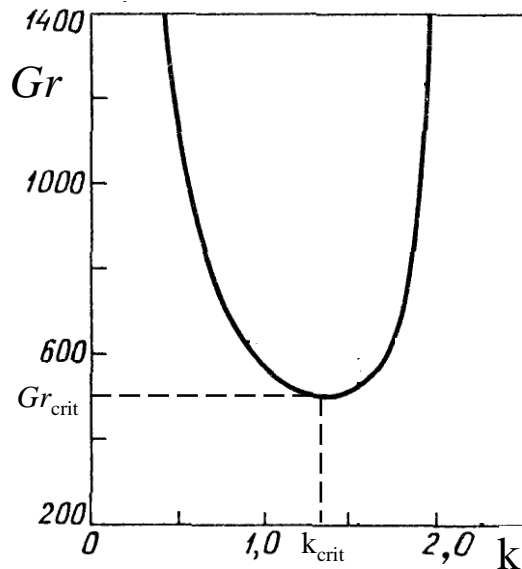


Рис. 3.7. Нейтральная кривая устойчивости конвективного движения в вертикальном слое с разнонагретыми стенками при $Pr = 1$ [6]

Вводя в качестве параметра число Рейнольдса, построенное по максимальному значению кубического профиля скорости основного движения,

$Re = w_{\max} L_s / \nu$, получим, в соответствии с (2.11), $Re = 8 \times 10^{-3} Gr_{2h} = 128 \times 10^{-3} Gr$, то есть критическое значение $Re_{\text{crit}} \approx 64$. Таким образом, конвективное течение с кубическим профилем скорости становится неустойчивым при сравнительно низких значениях числа Рейнольдса (и, соответственно, при небольших скоростях), в отличие, например, от течения Пуазейля. Дело в том, что конвективное течение в вертикальном слое имеет точку перегиба в профиле скорости (аналогично течениям в сдвиговых слоях, струях и следах), а в этом случае проявляется гидродинамическая неустойчивость невязкой природы.

Монотонная неустойчивость, возникающая в пределе $Pr \rightarrow 0$, развивается и при конечных значениях числа Прандтля. На основе решения полной системы (3.66), (3.67) с учетом температурных возмущений были проведены расчеты этой моды неустойчивости в широком диапазоне изменения числа Прандтля. В качестве примера полученного решения на рис. 3.7 показана нейтральная кривая монотонной неустойчивости для $Pr = 1$, имеющая экстремум при $Gr_{\text{crit}} \approx 496$, $k_{\text{crit}} \approx 1,4$, что очень близко к положению, найденному в чисто гидродинамическом приближении. Критические параметры монотонной неустойчивости по данным различных авторов, систематизированным в [6], приведены в таблице 3.3. Видно, что граница монотонной неустойчивости слабо зависит от значения числа Прандтля: изменения критического числа Грасгофа, связанного с проявлением монотонной неустойчивости, во всем диапазоне Pr составляет менее 10%.

Как и для изотермического приближения (см. рис. 3.6), решение задачи с учетом температурных возмущений демонстрирует проявление не только монотонной моды неустойчивости, но и колебательной моды, поведение которой, как оказалось, определяется тепловыми факторами. Анализ спектров декрементов возмущений при различных значениях числа Прандтля показал, что при малых и умеренных Pr колебательные моды, как и в чисто гидродинамическом приближении, затухают, а при больших числах Прандтля проявляется неустойчивость течения, связанная с нарастанием бегущих температурных волн, взаимодействующих с гидродинамическими возмущениями.

Нейтральные кривые, соответствующие колебательной неустойчивости для разных Pr , показаны сплошными линиями на рис. 3.8 [6]; здесь же для сравнения показана нейтральная кривая гидродинамической моды для $Pr \rightarrow 0$.

При увеличении числа Прандтля критическое волновое число растет, а критическое значение числа Грасгофа заметно падает, причем во всем представленном на рис. 3.8 диапазоне чисел Прандтля значения Gr_{crit} , отвечающие развитию колебательной неустойчивости, достигают меньших значений, чем полученные ранее для монотонной неустойчивости.

Таблица 3.3. Критические параметры монотонной неустойчивости течения в вертикальном слое с разнонагретыми стенками

Pr	Gr_{crit}	k_{crit}
0	496	1,34
0,01	488	1,35
0,1	459	1,35
0,7	503	1,41
1	496	1,40
7	492	1,38
10	492	1,38
∞	493	1,38

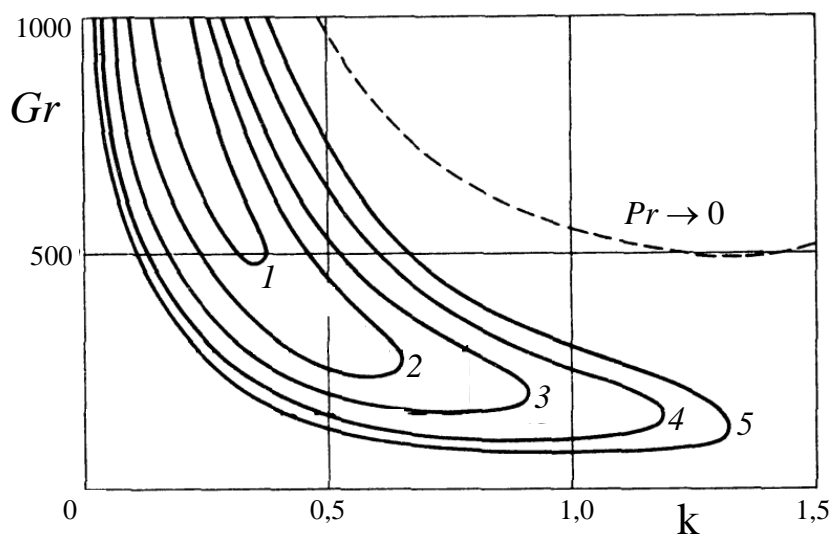


Рис. 3.8. Нейтральные кривые колебательной неустойчивости в вертикальном слое для: 1 – $Pr = 12,5$; 2 – $Pr = 15$; 3 – $Pr = 20$; 4 – $Pr = 30$; 5 – $Pr = 40$; пунктирной линией показана нейтральная кривая монотонной неустойчивости для $Pr \rightarrow 0$ [6]

Этому выводу соответствует график на рис. 3.9, где совместно показаны критические числа Грасгофа, отвечающие проявлению монотонной (кривая 1) и колебательной (кривая 2) неустойчивости; вертикальная пунктирная линия

показывает минимальное число Прандтля $Pr^* \approx 11,56$, начиная с которого проявляется колебательная неустойчивость. Видно, что при $Pr < Pr^*$ неустойчивость вызывается монотонными возмущениями гидродинамической (невязкой) природы. При $Pr > Pr^*$ начинают сосуществовать две моды неустойчивости – гидродинамическая и тепловая, причем при $Pr > 12,45$ тепловая (колебательная) неустойчивость становится более опасной; для таких жидкостей именно температурные волны приводят к появлению вторичного течения. Критические параметры колебательной неустойчивости для разных Pr приведены в таблице 3.4.

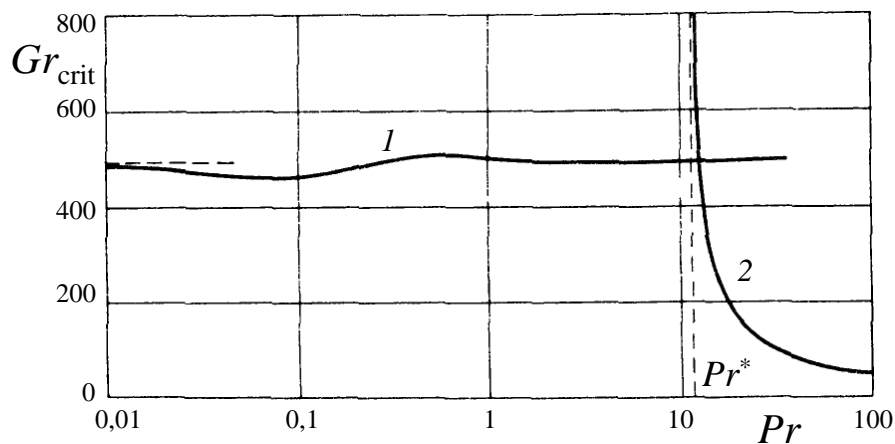


Рис. 3.9. Минимальное критическое число Грасгофа в зависимости от числа Прандтля: 1 – гидродинамическая (монотонная) неустойчивость, 2 – тепловая (колебательная) неустойчивость; пунктирной линией показано пороговое значение Pr , начиная с которого проявляются тепловые волны [5]

Таблица 3.4. Критические параметры колебательной неустойчивости течения в вертикальном слое с разнонагретыми стенками

Pr	Gr_{crit}	k_{crit}
11,7	1268	0,14
12	707	0,25
12,5	480	0,35
15	244	0,61
50	69	1,11
100	47	1,21

Значения критических параметров, найденные для вертикального слоя с помощью линейной теории устойчивости в предположении развития плоских

возмущений, хорошо согласуются с экспериментальными данными. Следует, впрочем, отметить, что в отличие от изотермических потоков, для конвективных течений плоские возмущения не всегда наиболее опасны. Как показали исследования с привлечением более сложных моделей, в наклонных слоях при больших значениях числа Прандтля даже в случае параллельных линий тока наиболее опасными оказываются пространственные возмущения, и именно их развитие определяет критические параметры.

В заключение проиллюстрируем возникающее вторичное течение. На основе решения задачи линейной теории устойчивости можно найти собственные функции спектральной задачи (3.66), (3.67), которые позволяют определить форму возмущений (хотя амплитуда возмущений при этом остается неопределенной). Суммарное движение можно построить как суперпозицию основного плоскопараллельного потока и нормированного возмущения, см. рис. 3.10а, где показаны линии тока вторичного течения [6].

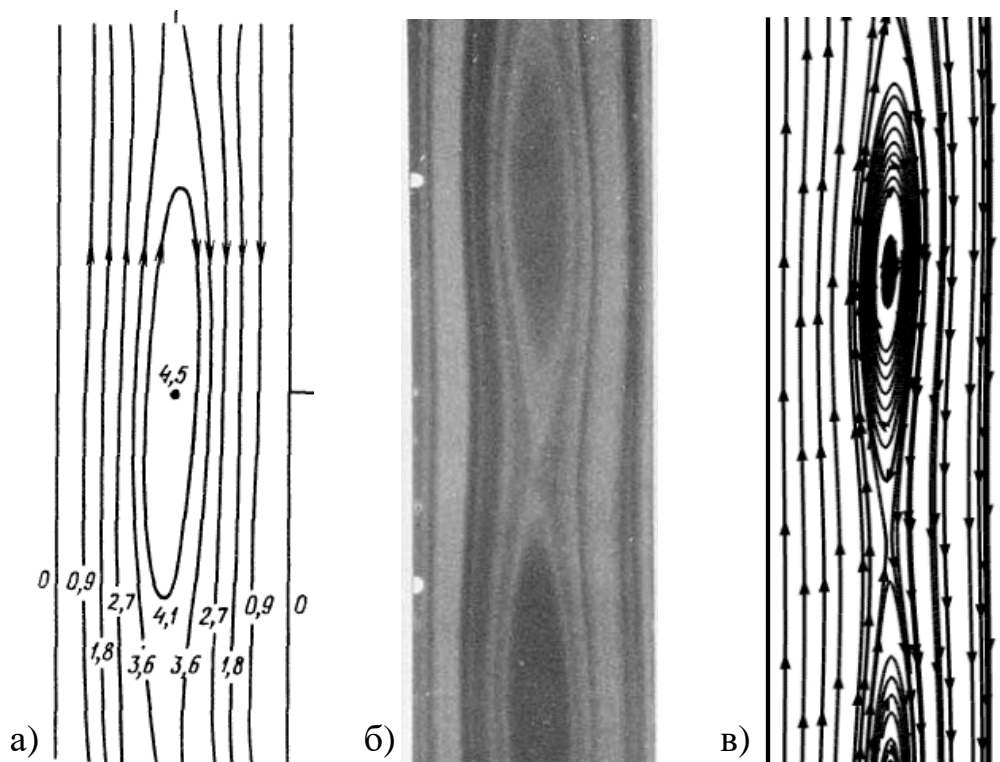


Рис. 3.10. Структура вторичного движения в вертикальном слое с разнонагретыми стенками: а) функция тока по результатам решения спектральной задачи, $Gr \approx 1200$, $Pr = 1$ [6]; б) фотография ячеистой структуры при конвекции воздуха, $Gr = 594$, $Pr = 0,7$ [61]; в) линии тока по результатам расчета конвекции воздуха на основе численного решения уравнений Навье-Стокса, $Gr = 850$, $Pr = 0,7$ [31]

В эксперименте неустойчивость вторичного течения может быть зарегистрирована оптическими измерениями; пример экспериментальной иллюстрации вихревой структуры в слое воздуха при числе Грасгофа, превышающем критическое примерно на 10%, приведен на рис. 3.10б [61]. Развитие вторичного течения может быть продемонстрировано и на основе результатов расчетов двумерного течения, полученных при решении уравнений Навье-Стокса при небольшой надкритичности. Пример таких расчетных данных приведен на рис. 3.10в, где показана картина течения в слое воздуха при $Gr = 850$, полученная с помощью ПК SINF [31].

Картины вторичного течения, показанные на рис. 3.10, свидетельствуют о том, что имеет место неустойчивость границы раздела между встречными потоками (восходящим и нисходящим), приводящая к развитию вихрей в центре слоя, которые из-за характерной формы, вытянутой в вертикальном направлении, в литературе часто называют «кошачьи глаза». При небольшой надкритичности эти вихри неподвижны, однако с ростом числа Грасгофа они начинают прецессировать и течение становится нестационарным.

Все иллюстрации, показанные на рис. 3.10, относятся к развитию гидродинамической (монотонной) неустойчивости. Согласно [6] экспериментальные оценки характеристик тепловой (колебательной) неустойчивости затруднены из-за развития в течениях с высокими значениями числа Прандтля продольного градиента температуры, соответствующего устойчивой стратификации. Качественное согласие между результатами линейной теории устойчивости и экспериментальными данными было тем не менее получено и для колебательного режима.

3.7. Устойчивость и ламинарно-турбулентный переход в свободноконвективном пограничном слое

Свободноконвективный пограничный слой (СкПС), развивающийся даже в полностью неподвижной внешней среде, на достаточно протяженной в вертикальном направлении нагретой плоской поверхности неизбежно будет проходить через последовательные состояния, начиная от устойчивого, в котором малые возмущения затухают. Вверх по потоку состояние слоя станет неустойчивым, с растущими амплитудами возмущений. Далее возмущения в слое приобретут нелинейную многочастотную структуру и возникнут признаки хаотического движения, которое постепенно станет развитым турбулентным с непрерывным спектром пульсаций и механизмом переноса энергии пульсаций от крупных вихрей к мелким, характерным практически для всех турбулентных течений.

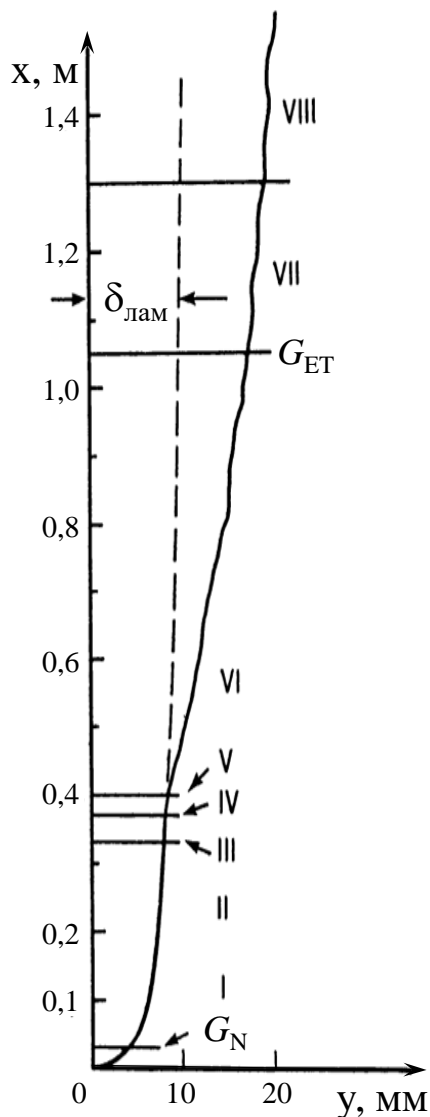


Рис. 3.11. Сценарий ЛТП [2]

На рис. 3.11 показана граница СкПС, развивающегося на вертикальной поверхности высотой около полутора метров. Отметим, что на этой высоте толщина слоя меняется от 0 до более чем 20 мм. Штриховая линия отмечает границу СкПС в том случае, если бы он оставался ламинарным на всем протяжении стенки.

Горизонтальные линии, положение которых не следует считать абсолютно точным, отмечают последовательность событий (сценарий) ламинарно-турбулентного перехода (ЛТП): I – линейные механизмы развития возмущений; II – нелинейные механизмы; III – первые признаки появления турбулентности; IV – начало изменения профиля скорости; V – начало изменения профиля температуры; VI – развитие процесса перехода; VII – каскадный перенос энергии к мелким вихрям; VIII – развитая турбулентность.

На рисунке также отмечены граница G_N нейтральной устойчивости возмущения с максимальной скоростью усиления и граница завершения перехода G_{ET} (End Transition). Параметр G напрямую связан с локальным числом Грасгофа: $G = 4(Gr_x/4)^{1/4} \sim x^{3/4}$ и $Gr_x = g\beta_T(T_w - T_\infty) x^3/\nu^2$.

История исследований устойчивости и ламинарно-турбулентного перехода в СкПС на вертикальной поверхности насчитывает свыше ста лет. Линейная теория устойчивости, учитывающая вязкий механизм взаимодействия возмущений, также развивается в течение длительного времени и весьма богата экспериментальными (например, [62]) и теоретическими результатами (см. обзор в [2]).

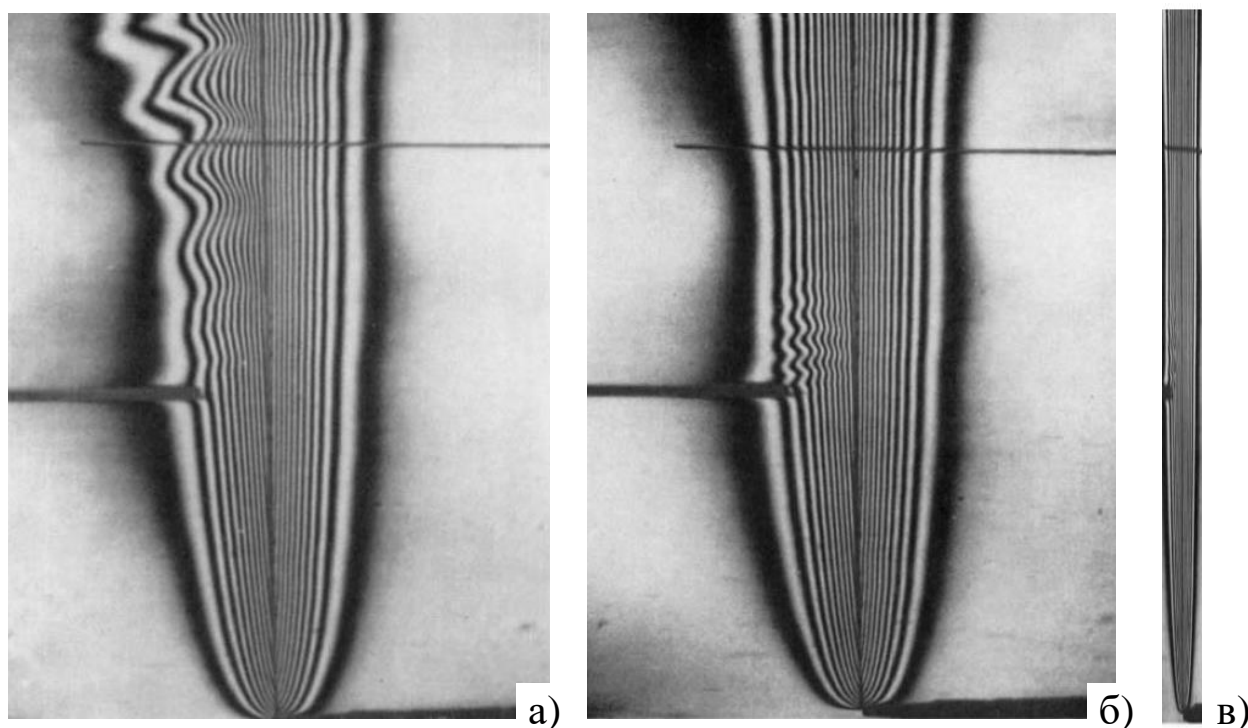


Рис. 3.12. Интерферограммы линейных возмущений в ламинарном СкПС [62]: а) – усиливающиеся возмущения на частоте 3 Гц; б) – затухающие возмущения на частоте 11,5 Гц; в) – то же, что и б), но в реальном масштабе

На рис. 3.12 показаны два случая распространения гармонических возмущений в ламинарном пограничном слое [62]. Источник вынужденных возмущений – колеблющаяся с заданной частотой пластинка, погруженная во внешнюю часть пограничного слоя. На рис. 3.12а видны усиливающиеся в слое вынужденные возмущения на частоте 3 Гц, а на рис. 3.12б – затухающие вынужденные возмущения на частоте 11,5 Гц. Авторы представили изображения растянутыми по горизонтали в шесть раз. Этим объясняется видимое

искажение в действительности синусоидальной формы возмущений. Для наглядности справа (рис. 3.12в) рассматриваемая область пограничного слоя изображена в реальном масштабе.

На рис. 3.13 представлена обобщенная диаграмма устойчивости для сдвиговых свободноконвективных течений [2]. По оси ординат отложена функция Ω , связанная с частотой f соотношением $\Omega = 2\pi f(4x^2)/\nu G^3$, по оси абсцисс – параметр G . На диаграмму штриховыми линиями нанесены траектории линейных возмущений в пограничном слое. Каждой траектории соответствует своя частота возмущения f , причем $f_1 > f_2 > f_3$. Состояния возмущений, соответствующие интерферограммам на рис. 3.12, можно условно показать на траекториях точками А и Б: при одном и том же значении G для точки А частота $f_1 = 11,5$ Гц, для точки Б – $f_2 = 3$ Гц.

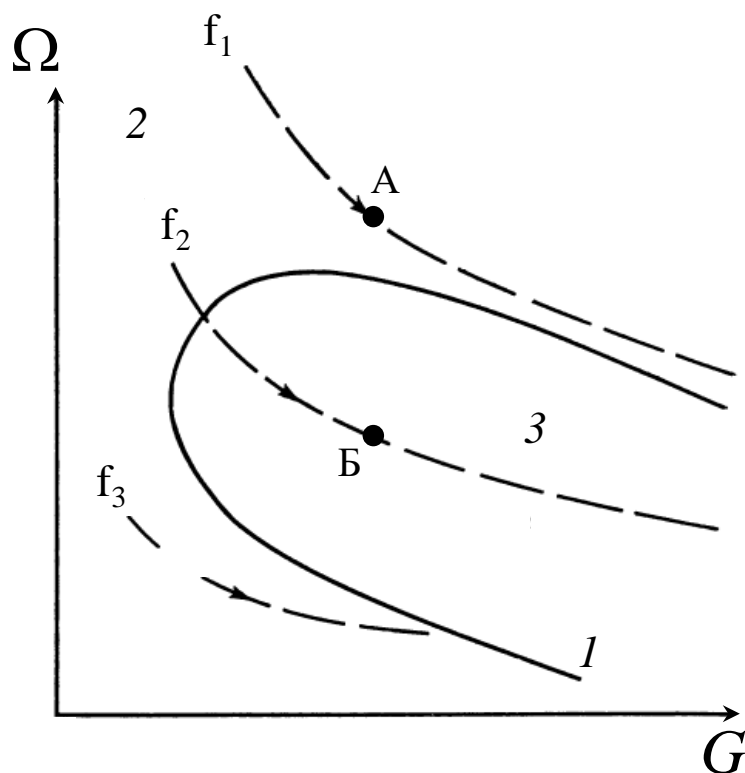


Рис. 3.13. Диаграмма устойчивости свободноконвективного течения около вертикальной поверхности; 1 – нейтральная кривая, 2 – область устойчивости (затухание возмущений), 3 – область неустойчивости (рост возмущений)

Появившийся в последние годы широкий доступ к современным высокопроизводительным суперкомпьютерам открыл новые возможности по проведению высокоточных расчетов ресурсоемких задач моделирования переходного и турбулентного СкПС. Прогресс в теоретическом изучении

явлений неустойчивости и ЛТП, начиная с этапа возникновения механизма нелинейного развития возмущений, то есть этапа II представленного на рис. 3.11 сценария, и заканчивая состоянием развитого турбулентного течения (этап VIII на рис. 3.11), стал возможным, когда применение вихререзающих подходов, таких как метод моделирования крупных вихрей (LES) и прямое численное моделирование (DNS), позволили получить результаты, сравнимые по точности с экспериментальными результатами и превосходящие их по информативности.

Весьма эффективным для моделирования ЛТП в СкПС стал метод Temporal (Time-developing) DNS (TDNS), который основан на подмене пространственного развития моделируемого течения вдоль продольной координаты развитием течения во времени на сравнительно коротком отрезке стенки. В этом подходе время выступает в роли координаты, в направлении которой происходит развитие основного течения. Метод TDNS позволяет, в сравнении с пространственным прямым численным моделированием (Spatial DNS), существенно экономить на размере расчетной области и, как следствие, на размерности расчетной сетки. Метод TDNS широко применяется для моделирования перехода в вынужденноконвективных пограничных слоях (см. обзор в [63]); результаты применения метода TDNS к расчету свободноконвективного пограничного слоя представлены, например, в работе [64].

В качестве примера на рис. 3.14 сопоставляются картины течения, полученные в расчетах по методу TDNS [64] и в эксперименте [65]. На расчетных картинах показаны изотермы и линии равной завихренности, на экспериментальных – изотермы. Расчетные картины получены для течения воды ($Pr = 6$), экспериментальные – для веретенного масла ($Pr = 70$). Для расчетных картин число Грасгофа, построенное по толщине слоя δ , меняется в диапазоне $Gr_\delta = 10^3 \dots 3 \times 10^4$, а для экспериментальных картин число Грасгофа, построенное по текущей вертикальной координате x , меняется в том же диапазоне $Gr_x = 10^3 \dots 3 \times 10^4$. Несмотря на существенное различие в значениях числа Прандтля, на обеих сериях картин видны полностью схожие черты нелинейного развития возмущений и возникновения многомодовых структур, предшествующих появлению турбулентности. На расчетных и экспериментальных картинах видно, как по мере продвижения во времени (в расчете) и

по вертикальной координате (в эксперименте) синусоидальная пространственная волна начинает вести себя подобно морской волне, достигшей мелководья: крутизна ее передних и задних фронтов увеличивается, наблюдается рост высоты и изменение формы гребня, что приводит к срыву вихревых структур с его вершины. Взаимодействие вихревых структур с окружающим течением создает предпосылки для возникновения хаотического, турбулентного течения. Показанные картины можно соотнести с этапами II-VI сценария ЛТП на рис. 3.11.

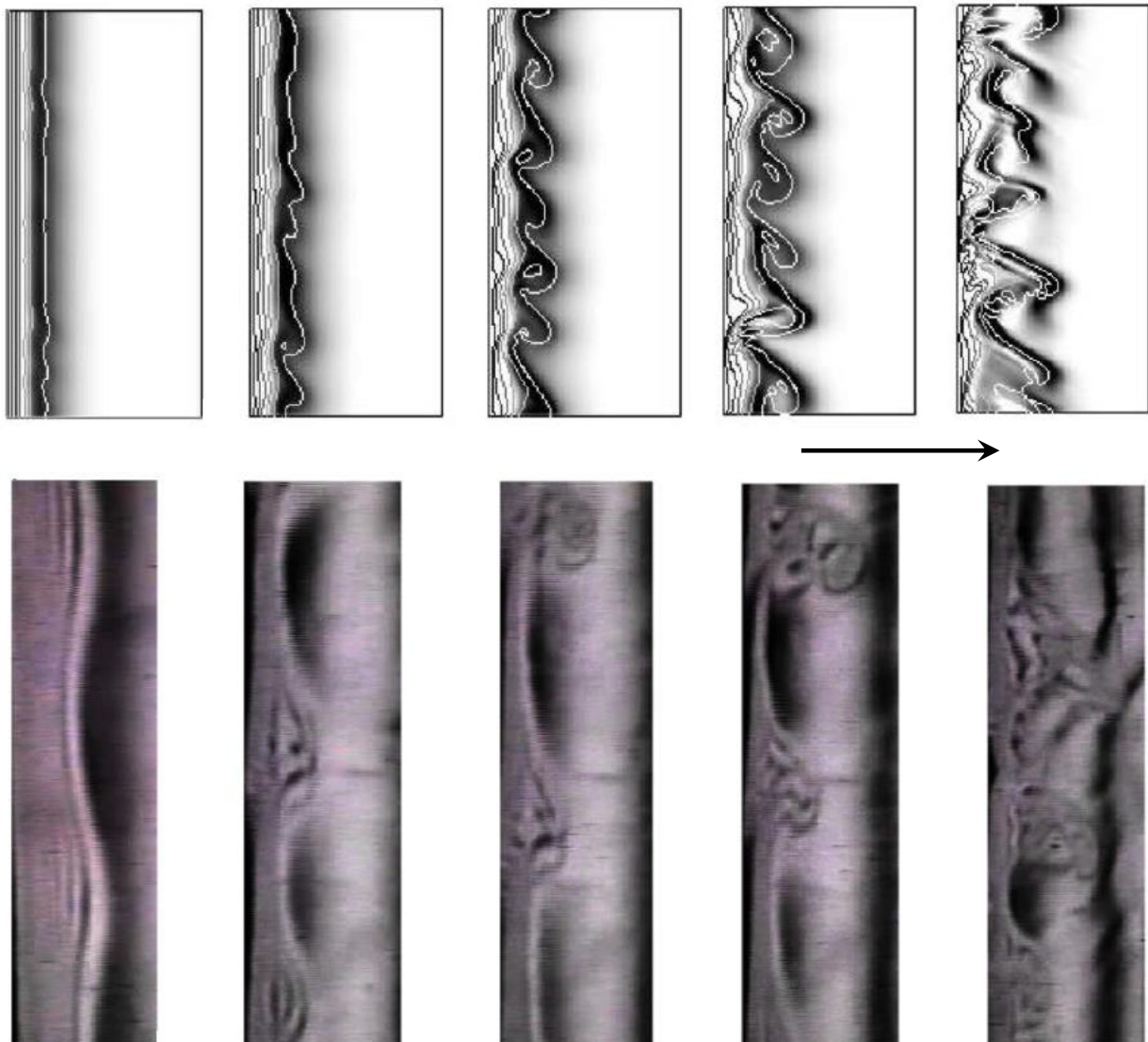


Рис. 3.14. Расчетные (сверху) и экспериментальные (снизу) картины развития СкПС (по материалам [64]). Стрелка показывает направление увеличения времени (сверху) и направление увеличения вертикальной координаты (снизу)

Рассмотрим результаты численного моделирования методом TDNS переходного и турбулентного режимов СкПС, представленные в работах [24-27].

В этих работах содержатся данные моделирования методом TDNS в постановке, отвечающей условиям общепризнанных экспериментов. Весьма обстоятельное экспериментальное исследование развития свободноконвективного пограничного слоя в воздушной среде у нагретой изотермической вертикальной пластины представлено в [66]. Медная пластина, генерирующая в эксперименте восходящее конвективное течение, имела высоту 4 м и ширину 1 м. Основное внимание в исследованиях уделялось изучению режима развитой турбулентности, для которого производились измерения при нескольких значениях продольной координаты осредненных и пульсационных составляющих полей скорости и температуры по нормали к пластине.

Представленные в [24-27] результаты расчетов получены с использованием ПК SINF для условий экспериментов [66]. Подробно рассмотрены численные данные для переходного режима конвекции, которому в экспериментах было уделено меньшее внимание. В расчетах принята модель течения несжимаемой среды с постоянными физическими свойствами, описываемая системой нестационарных трехмерных уравнений Навье-Стокса с силой плаучести в приближении Буссинеска и уравнения баланса энергии, см. уравнения (1.34-1.38).

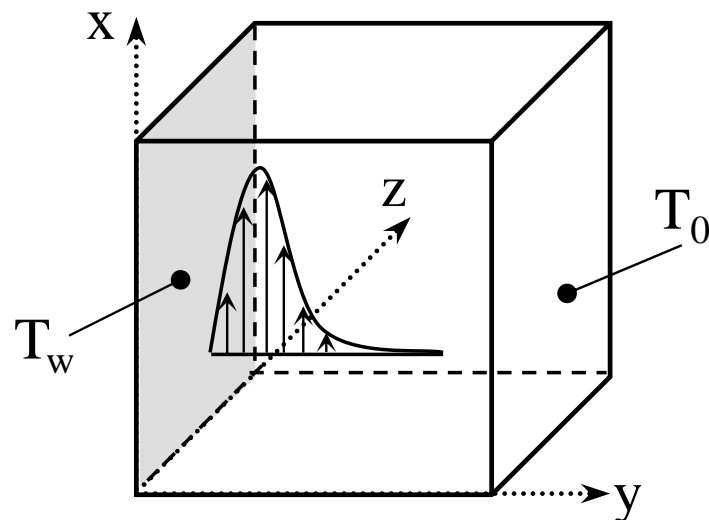


Рис. 3.15. Моделирование СкПС методом TDNS: расчетная область и температурные граничные условия

Расчетная область имела форму куба с длиной ребра 0,24 м (рис. 3.15) и была покрыта расчетной сеткой размерностью 3,2 млн. ячеек. Предварительный анализ экспериментальных данных показал, что выбранный по оси y

размер расчетной области позволяет смоделировать пространственное развитие пограничного слоя примерно до половины реальной высоты пластины, где уже развивалась турбулентная конвекция воздуха. Число Прандтля для воздуха полагалось равным 0,71.

Расчет начинался с состояния нулевых средних скоростей воздушной среды при одинаковой по всей расчетной области температуре T_0 , равной 16°C . По результатам предварительно проведенного теоретического и численного анализа шаг по времени при выполнении основных расчетов был выбран равным 0,002 с. Температура нагретой вертикальной стенки, T_w , составляла 60°C . Параллельная стенке внешняя граница рассматривалась как выходная с заданным на ней постоянным давлением и температурой T_0 . В соответствии с методом TDNS, по однородным координатам (вертикальной, x , и трансверсальной, z) ставились условия периодичности. Следует заметить, что для рассматриваемой задачи применение метода DNS с моделированием пространственного развития конвекции потребовало бы существенного увеличения размера расчетной области в вертикальном направлении, так что идентичная по параметрам расчетная сетка содержала бы более 25 млн ячеек.

По данным расчетов изучено влияние контролируемого уровня начальных возмущений на процесс ламинарно-турбулентного перехода в СкПС. Контроль возмущений в расчетах обеспечивался заданием интенсивности и спектра вырождающейся изотропной турбулентности. Для этого использовался массив данных по результатам описанного в [67] численного моделирования вырождения однородной изотропной турбулентности в кубической полости с периодическими границами. Далее выполнялась переинтерполяция предоставленных авторами [67] распределений пульсаций компонент скорости на топологически идентичную сетку, использованную в расчетах СкПС. Для заданного спектра турбулентности варьировался уровень интенсивности пульсаций скорости, количественной характеристикой которых являлась величина среднеквадратичных пульсаций скорости $\overline{u_i'^2}$, вычисленная путем осреднения по всей расчетной области. Начальное поле температуры полагалось невозмущенным. Влияние уровня начальных возмущений в среде на ЛТП в СкПС изучалось при проведении вариантных расчетов для нескольких значений начальной интенсивности пульсаций поля скорости, в том числе и при отсутствии каких-либо задаваемых возмущений.

При сопоставлении расчетных и экспериментальных данных в качестве масштаба длины использовалась интегральная толщина развивающегося во времени динамического пограничного слоя

$$\delta = \int_0^{\infty} u / U_{\max} dy, \quad (3.71)$$

где U_{\max} – максимальная скорость. Профиль вертикальной компоненты скорости, по которому вычислялось значение δ для каждого момента времени, находился путем осреднения рассчитанного поля скорости по однородным направлениям.

Верификация корректности реализации TDNS-подхода в ПК SINF проводилась на задаче о развитии ламинарного СкПС. Профили скорости и температуры, построенные в автомоделных переменных, полностью согласуются с результатами работы [64] и очень близки к известному аналитическому решению.

На рис. 3.16а показано изменение во времени интегральной толщины пограничных слоев для трех вариантов с разными значениями интенсивности начальных пульсаций (отмеченных цифрами на рис. 3.16в); на графиках отчетливо виден момент резкого нарастания δ , соответствующий началу ЛТП. На рис. 3.16б приведены соответствующие тем же вариантам кривые, отражающие зависимость от времени плотности теплового потока. На этих кривых также легко идентифицируется начало переходного процесса, а в турбулентном режиме конвекции наблюдаются низкочастотные колебания во времени теплового потока, которые обусловлены присутствием в течении крупномасштабных вихревых структур.

Для нахождения критического значения числа Грасгофа выполнен отдельный расчет пространственного развития двумерного стационарного ламинарного СкПС. Это позволило определить зависимость $\delta(x)$ и, по данным рис. 3.16а, найти критическое значение продольной координаты, отсчитываемое от нижнего края пластины. Вычисленные таким образом пространственные положения точек перехода для различных рассчитанных вариантов представлены на рис. 3.16в в форме зависимости от величины $\overline{u_1'^2}$ (экспериментально полученное значение $x_{\text{crit}} \approx 0,7$ м). Видно, что при отсутствии начальных физических возмущений в среде имеет место существенное

«затягивание» перехода ($x_{crit} \approx 3,2$ м), а при наложении начальных возмущений увеличивающейся интенсивности пространственное положение точки перехода, после резкого смещения к нижнему краю пластины, стабилизируется, приближаясь к экспериментальному.

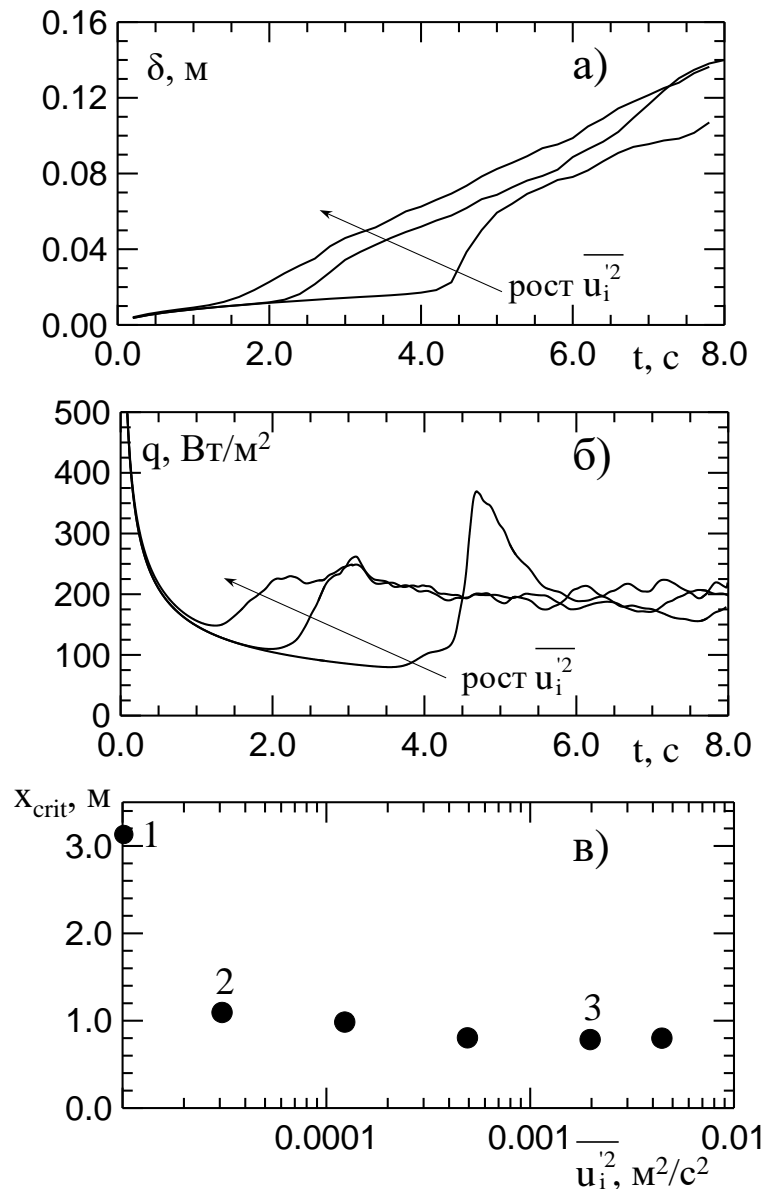


Рис. 3.16. Влияние начальных возмущений на ЛТП: изменение во времени а) интегральной толщины СкПС и б) плотности теплового потока; в) координаты точки перехода в зависимости от уровня начальных возмущений

Развитие течения во времени демонстрируется на рис. 3.17 (для $\overline{u_i'^2} = 4,9 \times 10^{-4} \text{ м}^2/\text{с}^2$, показана область удвоенной высоты). Основной акцент сделан на максимально наглядном представлении процесса эволюции зарождающихся в свободноконвективном пограничном слое вихревых структур: от момента начала ЛТП до установления режима развитой турбулентности. На

рис. 3.17а методом численной шлирен-визуализации показаны поля градиента температуры в пограничном слое: слева – в параллельном стенке сечении $y \approx 0,015$ м, справа – в нормальном к ней вертикальном сечении.

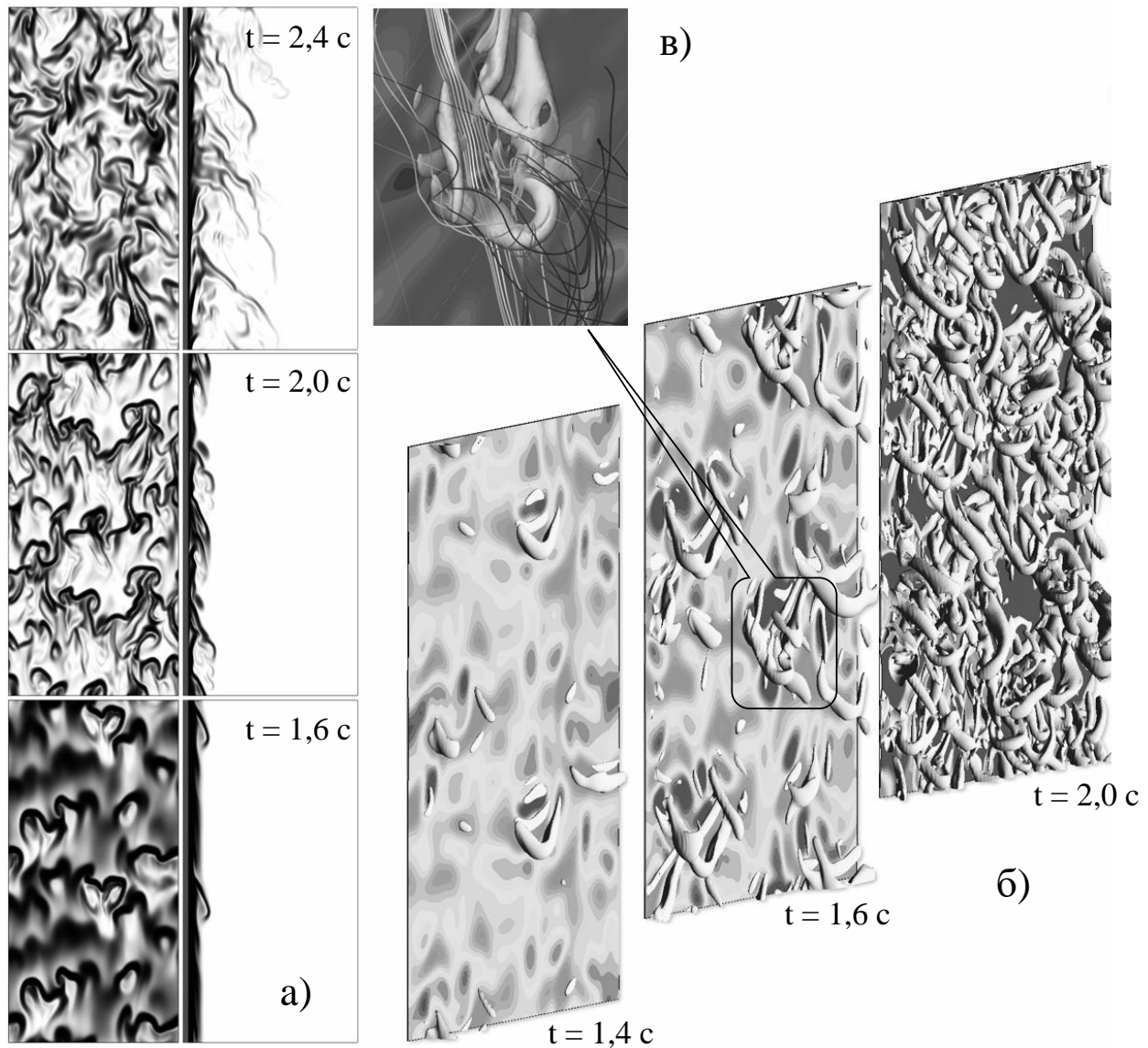


Рис. 3.17. Визуализация развивающегося во времени свободноконвективного течения воздуха у нагретой вертикальной пластины

Пространственное представление об эволюции во времени крупномасштабных вихрей дает рис. 3.17б, где изображены изоповерхности Q-критерия ($Q = 200 \text{ 1/c}^2$), широко используемой при визуализации турбулентных течений характеристики завихренности [68].

Q-критерий представляет собой удобную количественную характеристику для выделения в потоке областей, сходных по форме с вихревыми трубками. Определяется Q-критерий инвариантами полей завихренности Ω и скоростей деформаций \dot{S} :

$$Q = \frac{1}{2} \left(\|\Omega\|^2 - \|\dot{s}\|^2 \right). \quad (3.72)$$

В количественном отношении критерий имеет простой физический смысл: при $Q > 0$ завихренность поля скорости преобладает над скоростями деформаций, при $Q < 0$ наоборот. Граница $Q = 0$ отделяет область с преобладающей завихренностью поля скорости от области, где в поле скорости доминируют скорости деформаций.

Турбулентные структуры в последовательные моменты времени показаны на рис. 3.17б на фоне распределений локального теплового потока на пластине, существенная неоднородность которого связана с проникновением в пристенную область интенсивных вихревых структур. Рис. 3.17в демонстрирует особенности течения в окрестности вихря, формирующегося на стадии переходного режима конвекции (показана изоповерхность $Q = 300 \text{ l/c}^2$ и семейство линий тока на фоне распределения модуля завихренности).

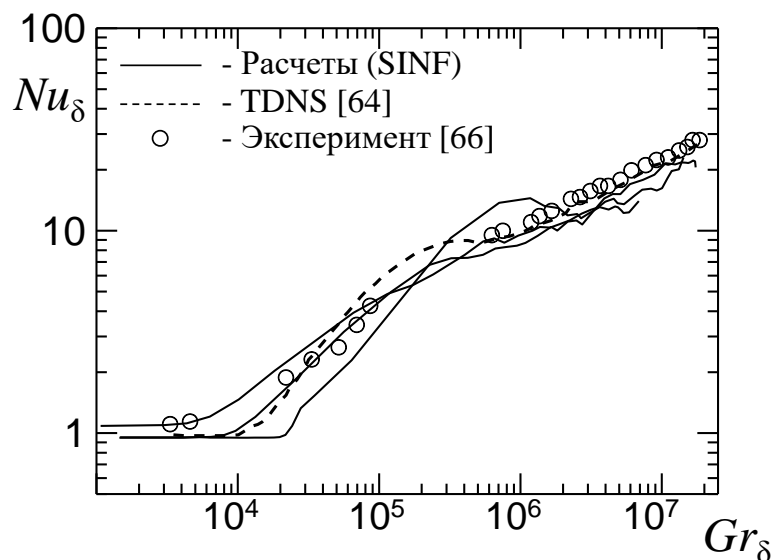


Рис. 3.18. Зависимость $Nu_\delta(Gr_\delta)$: сравнение с экспериментами [66] и расчетами [64]

Графики рассчитанных для трех вариантов зависимостей числа Нуссельта Nu_δ от числа Грасгофа Gr_δ (оба параметра построены по интегральной толщине динамического пограничного слоя δ) показаны на рис. 3.18. Для вариантов с заданием начальных возмущений среды наблюдается хорошее согласие с экспериментальными значениями и данными TDNS [64] во всех режимах конвекции.

3.8. Ламинарно-турбулентный переход в свободноконвективном пограничном слое при возмущающем действии прямоугольных препятствий

На рис. 3.11 в предыдущем разделе видно, что расстояние от области развития возмущений I до границы завершения перехода G_{ET} в СкПС составляет приблизительно один метр и этот участок занимает бóльшую часть показанной на рисунке вертикальной поверхности. При типичных для инженерных задач перепадах температур в условиях естественного перехода на гладких поверхностях участок ЛТП, существенно превосходя протяженность устойчивого ламинарного слоя, может составлять несколько метров. На практике, когда теплоотдача в СкПС используется для охлаждения вертикальных поверхностей, уровень теплоотдачи на ламинарном и переходном участках СкПС часто оказывается недостаточным для отвода необходимого количества тепла. В связи с этим возникает задача интенсификации теплоотдачи в СкПС, которая может быть решена за счет сокращения длины переходного участка благодаря ускоренному переходу от ламинарного к турбулентному режиму течения в пограничном слое. В данном разделе представлены результаты исследования возможностей пассивного управления ЛТП в СкПС посредством установки на нагреваемой поверхности элементов макрошероховатости, исходно представленные в [40, 41].

Расчеты проводились с использованием кода ANSYS Fluent методом пространственного DNS. Расчетная область в форме параллелепипеда показана на рис. 3.19. Здесь ABCD – поверхность нагретой пластины, вертикальный размер которой $L = AB = DC = 2,5$ м. Сегмент AD соответствует нижней кромке пластины ($x = 0$). На поверхности ADHE накладывались условия непроницаемости и скольжения. Трансверсальный размер области составлял 0,48 м; на плоскостях ABFE и DCGH ставились условия периодичности. Внешняя (входная) граница области, параллельная пластине, размещена на расстоянии 0,40 м. На ней и на выходной границе BCGF ставились условия постоянства температуры и постоянного давления, с «мягкими» условиями по скорости, которые реализованы в использованном для расчетов коде.

Варьировалась форма и местоположение элементов макрошероховатости (МШ), возмущающих пограничный слой. Представлены результаты для

четырёх вариантов (таблица 3.5). Первые два расчета (A1, A2) выполнены для термических условий, соответствующих опытам с гладкой пластиной [66], в которых реализовывался естественный переход в пограничном слое: температура пластины $T_w = 60^\circ\text{C}$, температура внешней среды $T_\infty = 16^\circ\text{C}$. В вариантах B1 и B2 температура пластины уменьшена до 32°C , при сохранении температуры внешней среды.

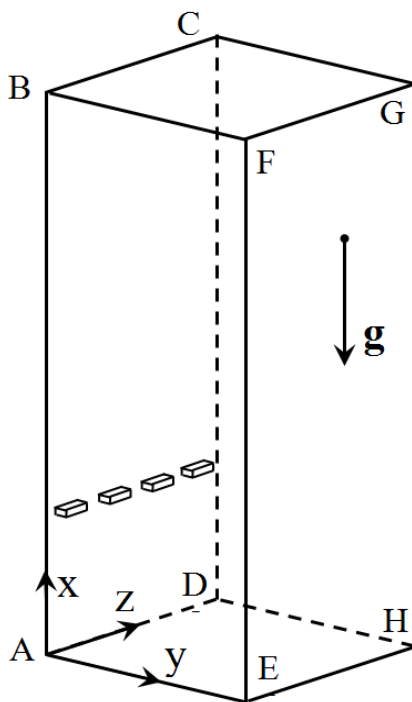


Рис. 3.19. Расчетная область

Вариант A1 с двумерной (2D) МШ соответствует установке на пластине поперечного выступа сечением $l_x \times l_y = 8 \times 8$ мм. Варианты A2 и B1 отвечают случаю трехмерной (3D) МШ в виде периодического ряда параллелепипедов $l_x \times l_y \times l_z = 8 \times 8 \times 30$ мм, расположенных с шагом 60 мм (этот вариант показан на рис. 3.19). В варианте B2 высота элемента МШ, l_y , увеличена вдвое, до 16 мм. Для каждого из вариантов строилась гексаэдральная расчетная сетка, содержащая около 105 млн ячеек.

В таблице 3.5 приводятся также безразмерные параметры задачи. Местоположение препятствий характеризуется локальным числом Грасгофа, $Gr_{x,0}$, которое рассчитывается по расстоянию препятствий от нижней кромки пластины ($x = x_0$). Здесь местное число Грасгофа определяется традиционно: $Gr_x = g\beta_T\Delta T \cdot x^3/\nu^2$, $\Delta T = T_w - T_\infty$. Число Рейнольдса $Re_1 = U_b l_y/\nu$ построено по скорости плавучести и высоте элемента МШ. Величина $U_{\max,0}$ соответствует

максимальной скорости в невозмущенном пограничном слое в месте расположения МШ. Согласно решению автомодельной задачи (см. раздел 2.6), отношение $U_{\max,0}/U_b = C \cdot (Gr_{x,0})^{1/6}$, где постоянная $C = 0,556$ для числа Прандтля $Pr = 0,7$. В последнем столбце таблицы 3.5 приводится число Рейнольдса, построенное по максимальной скорости, $Re_{\max,0} = U_{\max,0} l_y / \nu$.

Таблица 3.5. Параметры расчетных вариантов

Вариант	МШ	$T_w, ^\circ\text{C}$	$x_0, \text{мм}$	$Gr_{x,0} \cdot 10^9$	$10l_y/x_0$	Re_l	$U_{\max,0}/U_b$	$Re_{\max,0}$
A1	2D	60	650	1,453	0,123	13,9	18,7	260
A2	3D	60	500	0,660	0,160	13,9	16,4	228
B1	3D	32	500	0,286	0,160	10,5	14,3	150
B2	3D	32	500	0,286	0,320	21,0	14,3	300

Расчеты для каждого варианта проводились в течение длительного времени, достаточного для получения статистически достоверных данных.

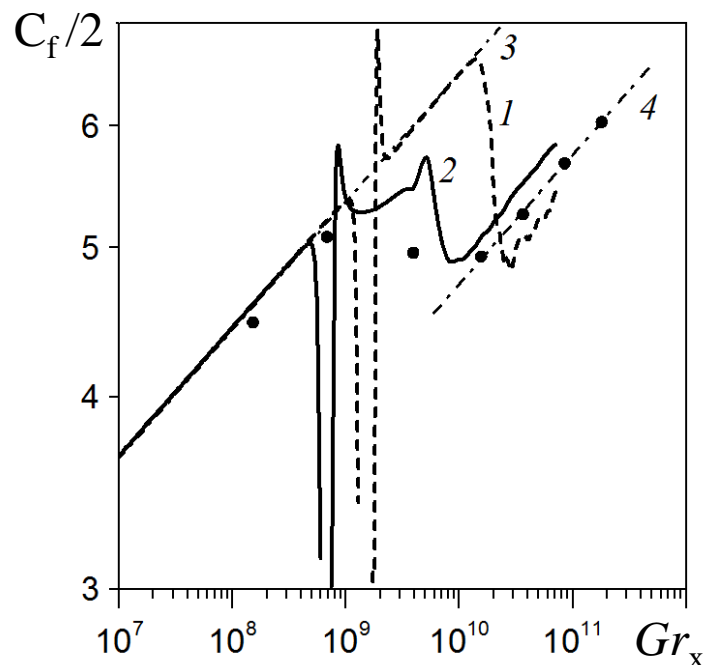


Рис. 3.20. Осредненный по времени и размаху коэффициент трения:
 1, 2 – расчет при возмущающем действии 2D и 3D препятствий (варианты A1 и A2); 3, 4 – корреляции [66] для ламинарного и развитого турбулентного течения в слое; точки – экспериментальные данные [66]

Для вариантов А1 и А2 на рис. 3.20 приводятся рассчитанные зависимости местного коэффициента трения $C_f = 2\tau_w/\rho U_b^2$ от числа Грасгофа; здесь τ_w – осредненное по времени и размаху поверхностное трение. Видно, что смещение расчетной кривой в сторону корреляции для развитого турбулентного течения в случае двумерного выступа происходит при заметно более высоких Gr_x , чем для варианта с трехмерными элементами МШ. Положение перехода при возмущающем действии двумерного препятствия сильно смещено в сторону бóльших значений Gr_x несмотря на то, что двумерный выступ той же высоты возмущает более неустойчивый ламинарный пограничный слой, чем в случае ряда трехмерных выступов: $(Gr_{x,0})_{A1} > (Gr_{x,0})_{A2}$. Это позволяет, в частности, заключить, что и в случае естественного перехода его положение определяется в основном трехмерными внешними возмущениями.

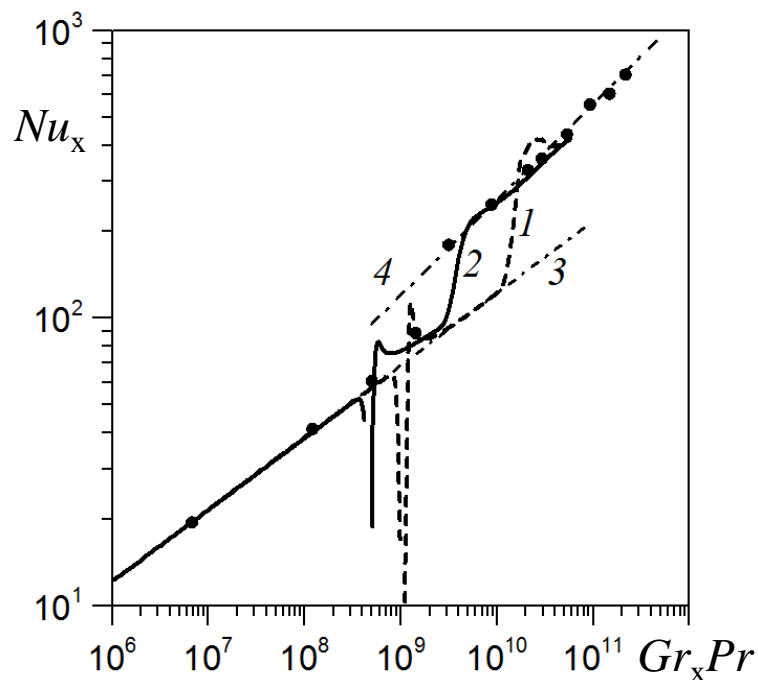


Рис. 3.21. Осредненное по времени и размаху число Нуссельта:
 1,2 – расчет при возмущающем действии 2D и 3D препятствий
 (варианты А1 и А2); 3,4 и точки – экспериментальные данные [66]

На рис. 3.21 для тех же вариантов приводятся расчетные данные для локального числа Нуссельта $Nu_x = q_w x / \lambda \Delta T$, где q_w – осредненный по времени и размаху удельный тепловой поток. Как и на рис. 3.20, расчетные кривые сопоставлены с данными измерений [66]. Можно видеть, что в данной вычислительной модели трехмерная МШ (вариант А2) обеспечивает положение ЛТП, близкое к реализовавшемуся в опытах [66] с гладкой пластиной в

условиях естественного перехода при неконтролируемых внешних возмущениях, предполагавшихся достаточно малыми. Заметим также, что профили осредненной скорости, температуры, интенсивности их пульсаций и взаимных корреляций, полученные в расчетах для участка турбулентного течения, $Gr_x > 10^{10}$, находятся в хорошем согласии с результатами измерений [66].

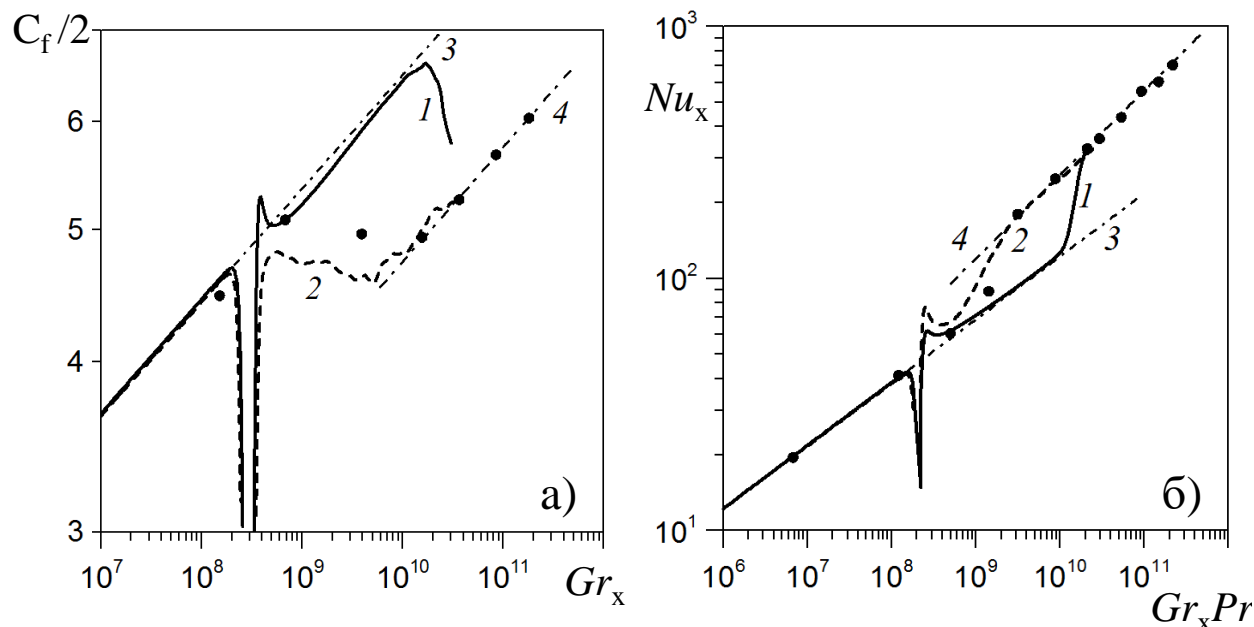


Рис. 3.22. Осредненные по времени и размаху а) коэффициент трения и б) число Нуссельта: 1,2 – расчет для вариантов В1 и В2; 3,4 и точки – опытные данные [66]

Рис. 3.22 иллюстрирует результаты, полученные при существенно уменьшенном значении $Gr_{x,0}$. В варианте В1, с исходной высотой элементов трехмерной МШ ($l_y = 8$ мм), принятой протяженности менее нагретой пластины не хватает для воспроизведения ЛТП в полном объеме; моделируется только его начало. Примечательно, что в этом случае, как и ранее для двумерной МШ (вариант А1), начало ЛТП отвечает значению Gr_x около 10^{10} .

Увеличение вдвое высоты элемента МШ (вариант В2) кардинально изменяет моделируемые процессы. Для данного варианта высота элемента МШ составляет около 85% от полной толщины набегающего на МШ слоя. По существу, в этом случае происходит триггерное возбуждение ЛТП, что представляет несомненный интерес для решения задач интенсификации теплообмена.

Проведенное прямое численное моделирование ЛТП в свободноконвективном пограничном слое с элементами МШ позволило сделать следующие выводы, имеющие методическую и практическую ценность.

Установка на нагреваемой вертикальной пластине двумерной МШ в виде прямоугольного выступа не является эффективным способом пассивного контроля ЛТП в развивающемся на пластине свободноконвективном пограничном слое воздуха. Напротив, широкие возможности по контролю переходных процессов могут обеспечиваться целенаправленным выбором размеров и местоположения прямоугольных элементов трехмерной МШ, периодически расположенных по размаху пластины.

Использованная вычислительная модель с пассивной инициализацией ЛТП трехмерной макрошероховатостью позволила получить статистические характеристики поля течения, близкие к измеренным в опытах с гладкой пластиной, где специфика ЛТП определялась естественными внешними возмущениями. Показана также реализация триггерного возбуждения ЛТП при весьма малых значениях числа Грасгофа, что демонстрирует потенциальные возможности ускорения перехода от ламинарного к турбулентному режиму течения в СкПС с помощью элементов трехмерной МШ.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Мартыненко О.Г., Соковишин Ю.А. Свободно-конвективный теплообмен: Справочник. – Минск: Наука и техника, 1982. – 399 с.
2. Гебхарт Б., Джалурия Й., Махаджан Р.Л., Саммакия Б. Свободно-конвективные течения, тепло- и массообмен. В 2-х книгах: пер. с англ. – М.: Мир, 1991.
3. Джалурия Й. Естественная конвекция: тепло- и массообмен: пер. с англ. – М.: Мир, 1983. – 400 с.
4. Chandrasekhar S. Hydrodynamic and hydromagnetic stability. – Clarendon Press: Oxford University Press, 1961. – 654 p.
5. Гершуни Г.З., Жуховицкий Е.М. Конвективная устойчивость несжимаемой жидкости. – М.: Наука, 1972. – 392 с.
6. Гершуни Г.З., Жуховицкий Е.М., Непомнящий А.А. Устойчивость конвективных течений. – М.: Наука, 1989. – 320 с.
7. Математическое моделирование конвективного тепломассообмена на основе уравнений Навье-Стокса / В.И. Полежаев, А.В. Бунэ, Н.А. Вerezуб и др. – М.: Наука, 1987. – 272 с.
8. Тернер Дж. Эффекты плавучести в жидкости: пер. с англ. – М.: Мир, 1977. – 432 с.
9. Джозеф Д. Устойчивость движений жидкости: пер. с англ. – М.: Мир, 1981. – 638 с.
10. Дразин Ф. Введение в теорию гидродинамической устойчивости: пер. с англ. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2005. – 288 с.
11. Martynenko O.G., Khramtsov P.P. Free-Convective Heat Transfer. – Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2005. – 516 p.
12. Lappa M. Thermal Convection: Patterns, Evolution and Stability. – Wiley, United Kingdom, 2010. – 670 p.
13. Махнова Г.В., Рис В.В., Смирнов Е.М. Двумерная ламинарная свободная конвекция в полости, имеющей форму квадрата со скругленными углами / Труды Второй Российской национальной конференции по теплообмену. – М.: Изд-во МЭИ, 1998. Т.3. – С. 100-103.
14. Makhnova G.V., Ris V.V., Smirnov E.M. Two-Dimensional Laminar Free Convection in the Cavity Having a Shape of a Square with Rounded Angles // Heat Transfer Research. – 2000. – Vol. 31, Iss. 6-8. – P. 493-499.

15. Smirnov E.M. Recent advances in numerical simulation of 3D unsteady convection controlled by buoyancy and rotation / In: Proc. of the 12th Int. Heat Transfer Conf., Grenoble, France, 18-23 August 2002. – 12 p.
16. Abramov A.G., Ivanov N.G., Smirnov E.M. Numerical study of high-Ra Rayleigh-Benard mercury and water convection in confined enclosures using a hybrid RANS/LES technique / In: Heat transfer in unsteady and transitional flows / Proc. of the Eurotherm Seminar 74, March 23-26, 2003, Eindhoven, the Netherlands, ed. by H.C. de Lange and A.A. van Steenhoven, TUE, 2003. – P. 33-38.
17. Китанин Э.Л., Рис В.В., Смирнов Е.М. Теплообмен при свободной и смешанной конвекции в энергетическом оборудовании: результаты численного моделирования сложных пространственных течений // Труды СПбГПУ. Энергомашиностроение. Санкт-Петербург, 2004. – С. 17-34.
18. Abramov A.G., Ivanov N.G., Smirnov E.M. Numerical analysis of turbulent Rayleigh-Benard convection on the base of large eddy simulation technique / In: Proc. International Conference «Advanced Problems in Thermal Convection», Perm, Russia, Publishing of Perm State University, 2004. – P.145-150.
19. Смирнов Е.М., Абрамов А.Г., Иванов Н.Г., Корсаков А.Б. Прямое численное моделирование и метод моделирования крупных вихрей в нестационарных задачах турбулентной термоконвекции // Научно-технические ведомости, №2(36). – СПб.: Изд-во Политехнического университета, 2004. – С. 33-47.
20. Смирнов Е.М., Абрамов А.Г. Численное моделирование турбулентной термоконвекции в замкнутых полостях на основе трехмерных нестационарных формулировок / Труды XVI Школы-семинара молодых ученых и специалистов под руководством академика А.И. Леонтьева «Проблемы и теплообмена в энергетических установках». В 2 томах. – М.: Издательский дом МЭИ, 2007, том 1. – С. 43-49.
21. Иванов Н.Г., Рис В.В., Смирнов Е.М. Численное моделирование теплоотдачи в гладкотрубном пучке при определяющем влиянии эффектов плавучести / Труды Пятой Российской национальной конференции по теплообмену. В восьми томах. Том 3. – Москва: Издательский дом МЭИ, 2010. – С. 78-81.
22. Ivanov N.G., Kirillov A.I., Ris V.V., Smirnov E.M. Numerical modeling of buoyancy-induced fluid flow and heat transfer in a staggered tube bank / In: Proc.

- of the International Heat Transfer Conference IHTC14. August 8-13, 2010, Washington, DC, USA. 2010. – 7 p.
23. Иванов Н.Г., Рис В.В., Щур Н.А. Численное исследование влияния наложенного горизонтального течения на теплоотдачу в гладкотрубном пучке в условиях пассивного теплосъема за счет естественной конвекции // *Тепловые процессы в технике*. – 2012. – Том 4, №10. – С. 434-441.
24. Смирнов Е.М., Абрамов А.Г. Опыт прямого численного моделирования переходной и турбулентной свободной конвекции воздуха у нагретой вертикальной пластины // *Вестник Нижегородского государственного университета им. Н.И. Лобачевского*. – 2011. – №4(3). – С. 1114-1116.
25. Абрамов А.Г., Горячев В.Д., Смирнов Е.М. Прямое численное моделирование турбулентной свободной конвекции, развивающейся во времени у нагретой вертикальной стенки / *Параллельные вычислительные технологии (ПаВТ-2011): труды международной научной конференции (Москва, 28 марта - 1 апреля 2011 г.)*. – Челябинск: Издательский центр ЮУрГУ, 2011. – С. 374-380.
26. Abramov A.G., Goryachev V.D., Smirnov E.M. Identification of vortex structures in transitional free-convection boundary layer using data of Temporal Direct Numerical Simulation / *15th International Symposium on Flow Visualization. Proceedings CD. June 25-28, 2012, Minsk, Belarus*. – 9 p.
27. Abramov A.G., Smirnov E.M., Goryachev V.D. Temporal direct numerical simulation of transitional natural-convection boundary layer under conditions of considerable external turbulence effects // *Fluid Dynamics Research*. – 2014. – Vol. 46, Issue 4. – 17 p.
28. Абрамов А.Г., Смирнов Е.М. Прямое численное моделирование турбулентного обтекания кругового цилиндра жидким натрием при существенном влиянии эффектов плавучести / *Труды VI Российской национальной конференции по теплообмену (РНКТ-6) (27-31 октября 2014 года, Москва) [CD ROM]*. – Москва, МЭИ, 2014. – 4 с.
29. Abramov A., Smirnov E., Smirnovskii A. Numerical simulation of turbulent Rayleigh-Benard conjugate convection of low Pr fluid in a cylindrical container / *In: Advances in Heat Transfer. Proceedings of the 7th Baltic Heat Transfer Conference (BHTC 2015), Tallinn, Estonia, August 24-26, 2015. Dmitri Neshumayev, Bengt Sundén (Eds.)*. – Tallinn University of Technology, 2015. – P. 11-16

30. Ivanov N., Smirnov S. Numerical simulation of turbulent conjugate free convection in horizontal low-Pr fluid layer / In: Advances in Heat Transfer. Proceedings of the 7th Baltic Heat Transfer Conference (BHTC 2015), Tallinn, Estonia, August 24-26, 2015. Dmitri Neshumayev, Bengt Sundén (Eds.). – Tallinn University of Technology, 2015. – P. 29-34.
31. Kunaeva A.I., Ivanov N.G. Numerical simulation of multicellular natural convection in air-filled vertical cavities // Journal of Physics: Conference Series. – 2017. – Vol. 929, 012109. – 6 p.
32. Levchenya A.M., Smirnov E.M., Zhukovskaya V.D., Ivanov N.G. Numerical study of 3D turbulent flow and local heat transfer near a cylinder introduced into the free-convection boundary layer on a vertical plate / In: Proc. of the 16th International Heat Transfer Conference, IHTC-16 August 10-15, 2018, Beijing, China, Paper IHTC16-22916. 2018. – P.5493-5500.
33. Smirnov E.M., Abramov A.G., Smirnovsky A.A., Smirnov P.E. Numerical simulation of turbulence arising in the free convection boundary layer after a cross row of rectangular obstacles // Journal of Physics: Conference Series. – 2018. – Vol. 1128, 012090. – 7 p.
34. Levchenya A.M., Smirnov E.M., Zhukovskaya V.D. Numerical study of 3D flow structure near a cylinder piercing turbulent free-convection boundary layer on a vertical plate // AIP Conference Proceedings. – 2018. – Vol.1959, 050017. – 8 p.
35. Smirnov E.M., Levchenya A.M., Zhukovskaya V.D. RANS-based numerical simulation of the turbulent free convection vertical-plate boundary layer disturbed by a normal-to-plate circular cylinder // Int. J. Heat Mass Transfer. – 2019. – Vol.144. – P. 118573.
36. Levchenya A.M., Kolesnik E.V., Smirnov E.M. Disturbing effects of a cylinder-form macro-roughness on the turbulent free-convection boundary layer: Large Eddy Simulation // Journal of Physics: Conference Series. – 2019. – Vol. 1400, 077031. – 6 p.
37. Kotikova M.R., Levchenya A.M., Zasimova M.A., Smirnov E.M. Vertical-plate free convection boundary layer disturbed by a row of circular cylinders: RANS-based numerical simulation // Journal of Physics: Conference Series. – 2020. – Vol. 1565, 012082. – 6 p.
38. Kolesnik E.V., Smirnovsky A.A., Tschur N.A., Ivanov N.G., Smirnov E.M. Experience in using a synthetic turbulence generator for eddy-resolving simulation

- of the vertical-plate free convection boundary layer // Journal of Physics: Conference Series. – 2020. – Vol. 1565, 012105. – 6 p.
39. Левченя А.М., Трунова С.Н., Колесник Е.В. Оценка возможностей RANS-моделей турбулентности по результатам расчетов свободной конвекции, развивающейся вблизи внезапно нагретой вертикальной пластины // Научно-технические ведомости СПбГПУ. Физико-математические науки. – 2020. – Т. 13. № 2. – С. 27–40.
40. Смирнов Е.М., Иванов Н.Г., Смирнов П.Е. Ламинарно-турбулентный переход в свободноконвективном пограничном слое на вертикальной пластине при возмущающем действии прямоугольных препятствий / Тезисы докладов, представленные на XXIV Международную конференцию «Нелинейные задачи теории гидродинамической устойчивости и турбулентность». Отв. редакторы Н.В. Никитин, Н.В. Попеленская. – М.: Изд-во Московского Университета, 2020. – С.100.
41. Смирнов Е.М., Иванов Н.Г., Панов Д.О., Смирнов П.Е. Численное моделирование ламинарно-турбулентного перехода в свободно-конвективном пограничном слое при возмущающем действии прямоугольных препятствий / Пермские гидродинамические научные чтения: материалы всероссийской конференции с международным участием, посвященной памяти профессоров Г.З. Гершуни, Е.М. Жуховицкого и Д.В. Любимова. Пермский государственный национальный исследовательский университет. – Пермь, 2020. – С. 361-366.
42. Иванов Н.Г. Трехмерная нестационарная конвекция в емкостях, вращающихся вокруг вертикальной оси: численное моделирование для малых чисел Прандтля / Дисс. канд. физ.-мат. наук: 01.02.05 – механика жидкости, газа и плазмы. – СПб.: СПбГТУ, 2000. – 218 с.
43. Абрамов А.Г. Метод моделирования крупных вихрей в приложении к задачам турбулентной конвекции в подогреваемых снизу емкостях: варианты и возможности / Дисс. канд. физ.-мат. наук: 01.02.05 – механика жидкости, газа и плазмы. – СПб.: СПбГТУ, 2003. – 208 с.
44. Smirnov E.M. Solving the full Navier-Stokes equations for very-long-duct flows using the artificial compressibility method / Proc. of the ECCOMAS'2000 Conf., Barcelona, 11-14 September 2000, CD-ROM Proceedings. – 16 p.
45. Смирнов Е.М., Зайцев Д.К. Метод конечных объемов в приложении к задачам гидрогазодинамики и теплообмена в областях сложной геометрии //

- Научно-технические ведомости, №2(36). – СПб.: Изд-во Политехнического университета, 2004. – С. 70-81.
46. Smirnov E.M., Abramov A.G., Ivanov N.G., Smirnov P.E., Yakubov S.A. DNS and RANS/LES-computations of complex geometry flows using a parallel multi-block finite-volume code / In.: *Parallel CFD: Advanced Numerical Methods Software and Applications*, Elsevier, 2004. – P. 219-226.
47. Зайцев Д.К. Численное решение задач гидрогазодинамики и теплообмена с использованием блочно-структурированных сеток. Программный комплекс SINF / Дисс. докт. физ.-мат. наук: 05.13.18 – математическое моделирование, численные методы и комплексы программ. – СПб: СПбПУ, 2016. – 261 с.
48. Hargather M.J., Settles G.S. Background-oriented schlieren visualization of heating and ventilation flows: HVAC-BOS // *HVAC&R Research*. – 2011. – Vol. 17(5). – P. 771-780.
49. Oberbeck A. Über die Wärmeleitung der Flüssigkeiten bei der Berücksichtigung der Strömungen infolge von Temperaturdifferenzen // *Annalen der Physik*. – 1879. – Vol. 243, Issue 6. – P.271-292.
50. Boussinesq J. *Teorie analytique de la chaleur*, Tome II. – Gauthier-Villars, Paris, 1903. – 625 p.
51. De Vahl Davis G. Natural convection of air in a square cavity: a bench mark numerical solution // *Int. J. Num. Meth. Fluids*. – 1983. – Vol. 3. – P.249-264.
52. Markatos N.C., Pericleous K.A. Laminar and turbulent natural convection in an enclosed cavity // *Int. J. Heat Mass Transfer*. – 1984. – Vol. 27, №5. – P.755-772.
53. Henkes R.A.W.M., Van Der Vlugt F.F., Hoogendoorn C.J. Natural-convection flow in a square cavity calculated with low-Reynolds-number turbulence models // *Int. J. Heat Mass Transfer*. – 1991. – Vol. 34, №2. – P.377-387.
54. Fusegi T., Hyun J.M., Kuwahara K., Farouk B. A numerical study of three-dimensional natural convection in a differentially heated cubical enclosure // *Int. J. Heat Mass Transfer*. – 1991. – Vol. 34, №6. – P.1543-1557.
55. Barakos G., Mitsoulis E., Assimacopoulos D. Natural convection flow in a square cavity revisited: laminar and turbulent models with wall functions // *Int. J. Numer. Meth. in Fluids*. – 1994. – Vol. 18. – P.695-719.
56. Ван-Дайк М. Альбом течений жидкости и газа: пер. с англ. – М.: Мир, 1986. – 184 с.

57. Ид А.Дж. Свободная конвекция / В сб.: Успехи теплопередачи. – М.: Мир, 1970. – С. 9-80.
58. Benard H. Les tourbillons cellulaires dans une nappe liquid transportant de la chaleur par convection en regime permanent // Ann. Chim. Phys. – 1901. – Vol. 23 (7). – P. 62-144.
59. Lord Rayleigh O.M. F.R.S. LIX. On convection currents in a horizontal layer of fluid when the higher temperature is on the under side // Philosophical Magazine – 1916. – Vol. 32 (6). – P. 529-546.
60. Krishnamurti R. On the transition to turbulent convection. Part 2. The transition to time-dependent flow // J. Fluid Mech. – 1970. – 42(2). – P. 309-320.
61. Vest C.M., Arpaci V.S. Stability of natural convection in a vertical slot // J. Fluid Mech. – 1969. – Vol. 36, part 1. – P. 1-15.
62. Polimeropoulos C., Gebhart B. Incipient instability in free convection laminar boundary layer // J. Fluid. Mech. – 1967. – Vol. 30, part 2. – P. 225-239.
63. Muthu S., Bhushan S. Comparison between temporal and spatial direct numerical simulations for bypass transition flows // Journal of Turbulence. – 2020 – Vol.21, Nos. 5-6. – P. 311-354.
64. Abedin M.Z., Tsuji T., Hattori Y. Direct numerical simulation for a time-developing natural-convection boundary layer along a vertical plate // Int. J. Heat Mass Transfer. – 2009. – Vol. 52, №19-20. – P. 4525-4534.
65. Fujii T., Takeuchi M., Fujii M., Suzaki K., Uehara H. Experiments on natural convection heat transfer from outer surface of a vertical cylinder to liquids // Int. J. Heat Mass Transfer. – 1970. – Vol. 13, №5. – P. 587-735.
66. Tsuji T., Nagano Y. Characteristics of a turbulent natural convection boundary layer along a vertical flat plate // Int. J. Heat Mass Transfer. – 1988. – Vol. 31, №8. – P. 1723-1734.
67. Shur M., Spalart P.R., Strelets M., Travin A. Detached-Eddy Simulation of an airfoil at high angle of attack // Engineering Turbulence Modelling and Experiments. – 1999. – Vol. 4. – P. 669-678.
68. Hunt J.C.R., Wray A.A., Moin P. Eddies, stream, and convergence zones in turbulent flows / In: Center for Turbulence Research, Proceedings of the Summer Program. – 1988. – P. 193-208.

Абрамов Алексей Геннадьевич

Иванов Николай Георгиевич

Рис Владимир Вольдемарович

ТЕЧЕНИЯ ЖИДКОСТИ В ПОЛЯХ ОБЪЕМНЫХ СИЛ

ЛАМИНАРНЫЕ РЕЖИМЫ И УСТОЙЧИВОСТЬ СВОБОДНОКОНВЕКТИВНЫХ ТЕЧЕНИЙ

Учебное пособие

Налоговая льгота – Общероссийский классификатор продукции
ОК 005-93, т. 2; 95 3005 – учебная литература

Подписано в печать 26.11.2020. Формат 60×84/16.
Усл. печ. л. 7,2. Тираж 60. Заказ 222.

Отпечатано с готового оригинал-макета, предоставленного авторами,
в Издательско-полиграфическом центре Политехнического университета.
195251, Санкт-Петербург, Политехническая ул., 29.
Тел.: (812) 552-77-17; 550-40-14.