

Федеральное агентство по образованию  
САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ  
ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ПОЛИТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ

*С.В. БУЛОВИЧ, В.Э. ВИКОЛАЙНЕН*

# ВОЛНОВОЕ ДВИЖЕНИЕ ГАЗА В ПРОТЯЖЕННЫХ КАНАЛАХ

Учебное пособие

Санкт-Петербург  
Издательство Политехнического университета  
2006

*Булович С.В., Виколайнен В.Э.* **Волновое движение газа в протяженных каналах:** Учеб. пособие. СПб: Изд-во Политехн. ун-та. 2006. 68 с.

Учебное пособие соответствует государственному образовательному стандарту дисциплин направлений бакалаврской и магистерской подготовки 140500 «Энергомашиностроение» (специализация 140501 «Двигатели внутреннего сгорания») и 010600 «Прикладные математика и физика». Предназначено для студентов четвертого, пятого и шестого курсов энергомашиностроительного и физико-механического факультетов, изучающих дисциплины «Теория газообмена в двигателях» и «Динамика вязкого газа» в рамках бакалаврской и магистерской подготовки.

Рассматриваются нестационарные процессы в потоке газа при его движении в протяженных каналах. Численные оценки явлений базируются на двумерной нестационарной системе уравнений движения и энергии, записанных в приближении «узкого канала» в дивергентной форме. Излагаются методы численного интегрирования системы уравнений, сохраняющие свойства консервативности потока. Даются постановка и результаты решения ряда задач, имеющих практическое значение.

Ил.25. Библиогр.: 41 назв.

Печатается по решению редакционно-издательского совета Санкт-Петербургского государственного политехнического университета.

© Булович С.В., Виколайнен В.Э., 2006

© Санкт-Петербургский государственный политехнический университет, 2006

**ISBN 5-7422-1217-8**

## Содержание

Введение .....	5
1. Математическая формулировка задачи .....	8
1.1. Система уравнений Прандтля .....	8
1.1.1. Дивергентная форма записи и возникающие проблемы .....	9
1.1.2. Смешанная дивергентно-недивергентная форма записи .....	11
1.2. Граничные и начальные условия .....	12
1.2.1. Входная граница .....	13
1.2.2. Непроницаемая граница .....	18
1.2.3. Выходная граница .....	18
1.2.4. Начальные условия .....	20
2. Численный метод .....	21
2.1. Дискретизация во времени. Базовая явно-неявная схема .....	21
2.2. Итерационный алгоритм, восстанавливающий консервативность уравнений .....	23
2.3. Пространственная дискретизация .....	25
2.4. Разностная аппроксимация .....	26
2.5. Метод решения возникающих алгебраических уравнений .....	28
3. Примеры решения задач .....	29
3.1. Истечение газа из цилиндрической полуоткрытой трубы (трубы Людвига) .....	29
3.1.1. Постановка задачи и вычислительные аспекты .....	29
3.1.2. Обсуждение результатов расчета .....	30
3.2. Наполнение газом цилиндрической полуоткрытой трубы .....	33
3.2.1. Постановка задачи. Акустические явления .....	33

3.2.2. Оценки по методу сосредоточенных параметров.....	36
3.2.3. Вычислительные аспекты .....	38
3.2.4. Анализ результатов расчета.....	38
3.3. Нестационарное течение газа в канале, соединяющем две емкости .....	48
3.3.1. Варианты постановки задачи.....	48
3.3.1.1. Быстроразрушающаяся диафрагма на выходе из канала.....	48
3.3.1.2. Быстроразрушающаяся диафрагма на входе в канал .....	49
3.3.2. Анализ результатов расчета.....	51
3.3.2.1. Диафрагма на выходе из канала .....	51
3.3.2.2. Диафрагма на входе в канал .....	56
Заключение.....	60
Литература.....	61

## Введение

Данное учебное пособие посвящено численному решению двумерных нестационарных задач течения газа в протяженных каналах. Подразумевается, что  $L \gg D$ , где  $L$  – длина канала,  $D$  – характерный поперечный размер. Изучение такого класса задач позволяет получить представление как о свойствах волнового движения газа в протяженном канале, так и о нестационарных процессах динамического и теплового взаимодействия газа с ограничивающими стенками. В протяженных каналах нестационарное развитие динамического и теплового пограничных слоев газа может оказывать существенное влияние на формирование течения в ядре потока, которое, в свою очередь, изменяется не только в соответствии с нестационарными граничными условиями на торцевых границах канала, но и из-за обратного влияния пограничных слоев на основное течение.

Одновременное рассмотрение волновых и диффузионных процессов в газе предъявляет определенные требования к вычислительному алгоритму. Это обусловлено тем, что хотя характерные времена протекания названных процессов различаются на порядки, но при течении газа в протяженных каналах, когда общее время развития структуры течения достаточно велико, медленно протекающие процессы диффузии могут играть весьма значимую роль.

Следует упомянуть также, что, например, в задаче установления квазистационарного процесса наполнения или опорожнения протяженной трубы с течением времени последовательно проходитесь весьма широкий диапазон как по числам Маха потока, так и по числам Рейнольдса.

В качестве конкретных задач в пособии рассматриваются:

1. Истечение газа из длинной цилиндрической полуоткрытой трубы (трубы Людвига).
2. Наполнение газом цилиндрической полуоткрытой трубы.
3. Формирование стационарного течения газа в цилиндрическом канале, соединяющем две безграничные емкости, при мгновенном разрушении диафрагмы на его входе или выходе.

Ценность рассматриваемого круга задач заключается в том, что на кафедре гидроаэродинамики, в рамках цикла лабораторных работ, проводится их экспериментальное исследование. В частности, наполнение и опорожнение трубы Людвига является составной частью исследования по формированию струйного течения газа; запуск и развитие течения в протяженных цилиндрических трубах предшествует исследованию квазистационарных гидравлических потерь в трубах на критических и докритических режимах течения газа. Дополнительные теоретические сведения, базирующиеся на численном моделировании отмеченных процессов, позволяют получить более глубокое представление об наблюдаемых экспериментальных закономерностях.

Приведем краткие сведения о возможностях численного моделирования нестационарного течения газа в протяженных каналах. Прямым следствием факта протяженности канала является в большинстве случаев выделение оси или линии симметрии и возможность перейти в описании задачи к двумерным моделям. Несмотря на это существенное упрощение в постановке задачи численное моделирование нестационарного течения газа в рамках полной системы уравнений Навье - Стокса возможно только для относительно коротких каналов. Для каналов, имеющих большие удлинения, адекватный учет явления переноса вдоль по каналу при помощи процесса диффузии в рамках численного моделирования видится проблематичным. Поэтому используются те или иные формы асимптотического приближения. В частности, по мере снижения полноты описания по сравнению с моделированием в рамках полной системы уравнений Навье - Стокса, выделяют так называемое параболическое приближение [1], когда пренебрегают только процессами продольной диффузии. Следующая в иерархии модель – параболизированное приближение [2]. В этой математической модели, помимо отказа от учета диффузии вдоль по каналу, поле давления представляется в виде суммы двух функций, причем одна из них, применяемая для представления градиента давления в осевом направлении, зависит только от этой координаты. Этот прием позволяет исключить взаимовлияние продольного и поперечного градиентов давления. Несмотря на упрощения по сравнению с полной системой уравнений Навье - Стокса использование этих двух моделей для описания нестационарных процессов колебания газа в трубе до сих пор не нашло отражения в литературе.

Полный отказ от учета поперечного градиента давления приводит к системе уравнений Прандтля [3]. Замыкает условный иерархический список математических моделей квазиодномерный подход к описанию течения газа в канале.

В свою очередь еще на уровне постановки задачи каждая из названных моделей допускает редукцию при учете свойства сжимаемости газа. Помимо названных моделей, когда влияние скорости движения на состояние газа учитывается в полной мере, различают гипозвуковое приближение и приближение несжимаемой жидкости.

Границы применимости того или иного приближения определяются в первую очередь геометрией канала и режимом течения. Если для параболических и параболизированных уравнений Навье - Стокса накладывается ограничение лишь на значение числа Рейнольдса, то для системы уравнений Прандтля дополнительным требованием выступает гладкость изменения функций на стенке канала. Это требование применяется к величине локального наклона образующей стенки канала по отношению к направлению оси канала, распределению массопереноса через поверхность трубы и зависимости теплового состояния стенки трубы вдоль по каналу. Для модели квазиодномерного приближения, помимо перечисленных выше ограничений, необходимо располагать априорной информацией о зависимости профиля скорости и профиля температуры в канале от режима движения. Такие зависимости установлены для стационарных режимов движения газа, поэтому моделирование по квазиодномерной модели не находит применения за рамками квазистационарного течения.

Остановимся подробнее на системе уравнений Прандтля. Применительно к внутренним течениям газа система уравнений Прандтля получила название системы уравнений узкого канала, для внешних течений – система уравнений пограничного слоя. Наиболее существенное отличие системы уравнений Прандтля от системы уравнений Навье - Стокса заключается в отсутствии учета проекций количества движения в поперечном направлении. Очевидно, что при рассмотрении ситуаций, когда она действительно мала по сравнению с другой составляющей количества движения или не изменяется во времени, то решения систем уравнений должны совпадать. Систематическое исследование по установлению истинных границ применимости системы уравнений Прандтля, при описании поведения течения газа применительно к внутренним стационарным до- и сверхзвуковым течениям содержится в [4], точность описания течения газа на начальном участке канала в зависимости от значений чисел Рейнольдса и Пекле содержится в [5]. Аналогичного исследования по определению границы применимости для нестационарного режима течения выполнено не было.

Ограничим круг рассматриваемых задач нестационарного течения газа в канале ламинарным режимом движения среды.

# 1. Математическая формулировка задачи

## 1.1. Система уравнений Прандтля

Запишем систему нестационарных уравнений Прандтля в дивергентном виде относительно декартовой ( $\alpha = 0$ ) или цилиндрической ( $\alpha = 1$ ) системы координат [6]

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t}(y^\alpha \rho) + \frac{\partial}{\partial x}(y^\alpha \rho u) + \frac{\partial}{\partial y}(y^\alpha \rho v) &= 0, \\ \frac{\partial}{\partial t}(y^\alpha \rho u) + \frac{\partial}{\partial x}(y^\alpha (\rho u^2 + p)) + \frac{\partial}{\partial y}(y^\alpha \rho uv) - \frac{\partial}{\partial y}\left(y^\alpha \mu \frac{\partial u}{\partial y}\right) &= 0, \\ \frac{\partial}{\partial t}(y^\alpha \rho E) + \frac{\partial}{\partial x}(y^\alpha \rho u H) + \frac{\partial}{\partial y}(y^\alpha \rho v H) - \frac{\partial}{\partial y}\left(y^\alpha \lambda \frac{\partial T}{\partial y}\right) - \frac{\partial}{\partial y}\left(y^\alpha u \mu \frac{\partial u}{\partial y}\right) &= 0.\end{aligned}\tag{1}$$

Здесь  $t$  – время;  $x$ ,  $y$  – продольная и поперечная координата;  $\rho$ ,  $p$ ,  $T$ ,  $E = H - p/\rho$ ,  $H = h + u^2/2$  – плотность, давление, температура, полная удельная энергия и полная удельная энтальпия газа;  $u$  и  $v$  – составляющие вектора скорости в продольном и поперечном направлении;  $\mu$  и  $\lambda$  – коэффициенты динамической вязкости и теплопроводности;  $h = \int c_p dT$  – удельная энтальпия газа,  $c_p$  – удельная теплоемкость газа при постоянном давлении.

Система уравнений (1) должна быть дополнена термодинамическим и калорическим уравнениями состояния. В большинстве случаев, в том числе в настоящем пособии, используется закон Менделеева - Клапейрона  $pm = \rho RT$ , где  $m$  – мольная масса газа,  $R$  – универсальная газовая постоянная; и модель калорически совершенного газа, предполагающего независимость удельных теплоемкостей от температуры и давления:  $c_p = \text{const}$  и  $c_v = \text{const}$ , где  $c_v$  – удельная теплоемкость при постоянном объеме,  $k = c_p/c_v$  – показатель адиабаты Пуассона.

Обратим особое внимание на то, что для системы уравнений (1) продольная составляющая градиента давления в уравнении баланса количества движения



предполагается заданной величиной. При постановке задачи типа пограничного слоя (внешняя задача) искомое распределение давления по внешней границе пограничного слоя устанавливается из решения невязкой задачи газовой динамики. При рассмотрении задачи в постановке узкого канала (внутренняя задача) для определения градиента давления привлекается дополнительное соотношение. В частности, корректным условием выступает второе граничное условие для поперечной составляющей вектора скорости, которое стало избыточным при редукции задачи от системы уравнений Навье - Стокса к системе уравнений Прандтля.

### 1.1.1. Дивергентная форма записи и возникающие проблемы

Существенным моментом является дивергентная форма представления системы уравнений узкого канала. Использование дивергентной формы записи позволяет при численном решении задачи методами сквозного счета, т.е. без аналитического выделения разрывов газодинамических функций в ударных волнах и контактных поверхностях обеспечить правильное моделирование волновых процессов.

Укажем на ряд примеров численного решения нестационарной недивергентной системы уравнений Прандтля как для задач внешнего обтекания [7-18], так и для внутренних течений [19-25]. В названных работах используются достаточно стандартные приемы решения задач параболического типа. Дивергентная форма записи нестационарной системы уравнений Прандтля привносит определенные особенности в вычислительный алгоритм [26-37]. Наиболее выпукло их можно проиллюстрировать при рассмотрении явной схемы интегрирования. В случае представления нестационарного слагаемого в виде комбинаций газодинамических функций  $\rho E$ ,  $\rho H$ ,  $\rho T$  уравнение энергии частично или полностью утрачивает эволюционность (возможность определения газодинамических функций в зависимости от времени). В частности, например, для функции  $\rho T$  уравнение баланса энергии имеет вид

$$\frac{\partial}{\partial t} (y^\alpha \rho T) + \frac{\partial}{\partial x} (y^\alpha \rho u T) + \frac{\partial}{\partial y} (y^\alpha \rho v T) +$$

$$+ \rho \left( \frac{\partial(y^\alpha u)}{\partial x} + \frac{\partial(y^\alpha v)}{\partial y} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left( y^\alpha \lambda \frac{\partial T}{\partial y} \right) - y^\alpha \mu \left( \frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 = 0. \quad (2)$$

Применение явной схемы интегрирования, когда все пространственные производные аппроксимированы на известном временном слое, позволяет непосредственно установить значение  $\rho T$ . По сути, в соответствии с термодинамическим уравнением состояния, – это значение с точностью до множителей соответствует давлению. Но, как отмечалось выше, для задачи внешнего обтекания, давление является известным значением, а для внутренней задачи устанавливается из дополнительного условия, т.е. также по существу наперед известно. Следовательно, в случае дивергентной формы записи уравнения энергии значение нестационарного слагаемого известно *a priori*, т.е. в такой формулировке оно не эволюционно. Очевидно, что не устраняет проблему использование неявного способа интегрирования. Аналогичная ситуация возникает и при записи уравнения сохранения энергии относительно любой газодинамической переменной, которая содержит комбинацию плотности газа с любой другой газодинамической функцией. В частности, использование переменных  $\rho E$  или  $\rho H$  приводит в итоге к эволюционным уравнениям относительно только кинетической энергии, которое может рассматриваться как следствие уравнения сохранения количества движения.

Заметим, что при записи уравнения энергии в недивергентном виде, например, относительно температуры

$$y^\alpha \rho c_v \frac{\partial T}{\partial t} + y^\alpha \rho u c_v \frac{\partial T}{\partial x} + y^\alpha \rho v c_v \frac{\partial T}{\partial y} + \rho \left( \frac{\partial(y^\alpha u)}{\partial x} + \frac{\partial(y^\alpha v)}{\partial y} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left( y^\alpha \lambda \frac{\partial T}{\partial y} \right) - y^\alpha \mu \left( \frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 = 0 \quad (3)$$

не возникает проблем с построением эволюционного решения. Следовательно, для интегрирования уравнения энергии необходим прием, который позволит наряду с сохранением дивергентной формы записи для слагаемых, учитывающих процессы переноса в продольном направлении, использовать для нестационарного слагаемого недивергентное представление. Обратим внимание на то, что разыскиваемые газодинамические функции, получаемые при решении системы уравнений Прандтля, в поперечном направлении не терпят разрывов, поэтому дивергентное и недивергентное

представление слагаемых, которые описывают перенос в поперечном направлении, совпадают с точностью до принятой при их записи аппроксимации.

### 1.1.2. Смешанная дивергентно-недивергентная форма записи

Для решения задачи получим форму записи системы уравнений Прандтля, удовлетворяющей сформулированным условиям. Рассмотрим вектор основных переменных  $\mathbf{F} = (\rho, \rho\mathbf{u}, \rho\mathbf{E})^T$  и вектор вспомогательных переменных  $\mathbf{f} = (\rho, \mathbf{u}, \mathbf{e})^T$ , где  $\mathbf{e} = \int \mathbf{c}_v dT$ . Матрица прямого и обратного перехода от вектора основных переменных  $\mathbf{F}$  к вектору вспомогательных переменных  $\mathbf{f}$  имеет следующий вид

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{u} & \rho & \mathbf{0} \\ \mathbf{E} & \rho\mathbf{u} & \rho \end{pmatrix}, \quad \rho\mathbf{A}^{-1} = \begin{pmatrix} \rho & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ -\mathbf{u} & 1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{u}^2 - \mathbf{E} & -\mathbf{u} & 1 \end{pmatrix}. \quad (4)$$

Комбинируя уравнения Прандтля в соответствии с компонентами матрицы  $\rho\mathbf{A}^{-1}$ , систему уравнений (1) можно привести к следующему виду

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t}(\mathbf{y}^\alpha \rho) + \frac{\partial}{\partial \mathbf{y}}(\mathbf{y}^\alpha \rho \mathbf{v}) &= - \left[ \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}}(\mathbf{y}^\alpha \rho \mathbf{u}) \right], \\ \mathbf{y}^\alpha \rho \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{y}^\alpha \rho \mathbf{v} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{y}} - \frac{\partial}{\partial \mathbf{y}} \left( \mathbf{y}^\alpha \mu \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{y}} \right) &= - \left[ \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}}(\mathbf{y}^\alpha (\rho \mathbf{u}^2 + \mathbf{p})) - \mathbf{u} \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}}(\mathbf{y}^\alpha \rho \mathbf{u}) \right], \\ \mathbf{y}^\alpha \rho \frac{\partial \mathbf{e}}{\partial t} + \mathbf{y}^\alpha \rho \mathbf{v} \frac{\partial \mathbf{e}}{\partial \mathbf{y}} - \frac{\partial}{\partial \mathbf{y}} \left( \mathbf{y}^\alpha \frac{\lambda}{\mathbf{c}_v} \frac{\partial \mathbf{e}}{\partial \mathbf{y}} \right) - \mathbf{y}^\alpha \mu \left( \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{y}} \right)^2 &= \\ = - \left[ \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}}(\mathbf{y}^\alpha \rho \mathbf{u} \mathbf{H}) - \mathbf{u} \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}}(\mathbf{y}^\alpha (\rho \mathbf{u}^2 + \mathbf{p})) + (\mathbf{u}^2 - \mathbf{E}) \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}}(\mathbf{y}^\alpha \rho \mathbf{u}) \right]. \end{aligned} \quad (5)$$

В системе уравнений (5) в правой части сгруппированы слагаемые, которые осуществляют дифференцирование комбинаций газодинамических функций в продольном направлении. При этом в записи этих комбинаций сохранена форма, которая позволяет описывать течение с разрывами газодинамических переменных в продольном

направлении. В левой части системы уравнений остались нестационарные слагаемые и слагаемые, описывающие процессы диффузии и конвекции в поперечном направлении.

## 1.2. Граничные и начальные условия

Формирование граничных условий для внутренних течений является нетривиальной задачей. Изложение наиболее общепринятых концепций по этой проблеме для установившихся режимов течения рабочей среды можно найти, например, в [5] и [38]. Однако прямое их использование для нестационарного режима течения газа не видится обоснованным.

Определение граничных условий начинается с установления типа границы. Их необходимо разделить на проницаемые и непроницаемые. Постановка граничных условий на непроницаемых поверхностях не вызывает затруднений. Иначе обстоит дело для проницаемых границ. В частности, в названной работе [5], указывается на то, что само понятие и применение граничных условий на проницаемых поверхностях является вынужденной мерой из-за ограниченности вычислительных возможностей ЭВМ. В связи с этим выбор критериев, по которым задаются те или иные значения функций на границе области интегрирования, продиктован в большей степени интуитивными соображениями. Очевидно, что естественным требованием выступает получение однозначного решения, но, с другой стороны, как количество, так и значения используемых функций при формулировке граничных условий не должны искажать протекающие процессы, т.е. применяемые граничные условия не должны привносить дополнительных возмущений.

Под проницаемой границей понимается ее участок, где происходит поступление газа в расчетную область (входная граница) или его отвод из расчетной области (выходная граница). Тип проницаемой границы устанавливают по соотношению между направлением вектора скорости и вектором внешней нормали к области исследования ( $\mathbf{V}_n > 0$  – это участок выходной границы;  $\mathbf{V}_n < 0$  – это участок входной границы,  $\mathbf{V}_n = 0$  – непроницаемая граница). В зависимости от типа граничного условия и значения локального числа Маха определяется необходимое количество задаваемых на границе граничных условий. К настоящему времени, для случая установившегося режима поступления или удаления рабочей среды из расчетной области, имеется обширная

практика применения тех или иных приемов по поводу формирования корректных граничных условий на проницаемых границах. Можно ожидать, что в случае протекания квазистационарных процессов их использование незначительно исказит картину моделируемого явления.

В отсутствие вязкости и теплопроводности система уравнений (1) вырождается в систему уравнений газовой динамики. Характеристическая форма записи уравнений газовой динамики естественным образом определяет необходимое количество граничных условий на проницаемой границе области интегрирования. В этом случае система уравнений газовой динамики распадается на независимые уравнения первого порядка. Для случая, когда вектор скорости на границе параллелен вектору нормали, справедливы следующие утверждения. Для выходной сверхзвуковой границы граничные условия не задают, для выходной дозвуковой границы задают одно граничное условие, для входной дозвуковой границы задают два граничных условия, для входной сверхзвуковой границы задают три граничных условия.

Задание большего количества граничных условий приводит, в случае решения стационарной задачи, к так называемым переопределенным граничным условиям. Однако, в случае рассмотрения нестационарной задачи, избыточное определение функций на границе области интегрирования может быть интерпретировано как формирование возмущений, которые поступают в расчетную область через границу из внешней области. Эти возмущения могут отражать физику протекающего процесса.

Остановимся на некоторых типичных ситуациях, возникающих при рассмотрении внутренних течениях.

### **1.2.1. Входная граница**

Построение граничных условий на входной границе расчетной области сводится, как правило, к алгебраическим или дифференциальным соотношениям, устанавливающим связь между газодинамическими функциями. В этих соотношениях присутствуют базовые точки отсчета функций для алгебраических зависимостей или постоянные интегрирования в случае дифференциальных соотношений. Их количественное значение должно быть определено на значительном удалении от входной границы и протекающие процессы при движении газа из бесконечности к входной границе не должны исказить их

количественного значения. Формулировка простых зависимостей возможна для случаев, когда в той или иной степени сделано априорное допущение о структуре потока в окрестности входной границы. Например, когда входная граница представляет собой магистраль или емкость безграничного объема. Получение адекватных соотношений газодинамических функций в остальных случаях эквивалентно рассмотрению течения в окрестности входной границы и, фактически, формулировке граничных условий для ее нового более удаленного положения.

Предположим, что в магистрали или емкости безграничного объема газодинамические процессы описываются изоэнтропическими соотношениями. В этом случае можно говорить о двух газодинамических величинах, количественное значение которых является, по сути, точкой отсчета для остального набора газодинамических функций. Речь идет о значении полного давления  $p_0(t)$  и полной температуры  $T_0(t)$ . Остальные газодинамические функции определяются значением локального числа Маха  $M$  и характером протекания изоэнтропического процесса.

Например, в магистрали, когда в нестационарном процессе отсутствуют причины для искажения плоского волнового фронта, давление и температура связываются с параметрами торможения соотношениями

$$\begin{aligned} p_0 &= p(1 + 0,5(k-1)M^2)^{\frac{2k}{k-1}}, \\ T_0 &= T(1 + 0,5(k-1)M^2)^2. \end{aligned} \quad (6)$$

Вывод приведенных соотношений имеется, например, в [39] и отражает ситуации нестационарного ускорения газового потока.

В случае емкости безграничного объема, когда амплитуды волн по мере удаления от источника возмущений уменьшаются и сами волны вырождаются в акустические возмущения, аналогичные соотношения будут иметь вид

$$\begin{aligned} p_0 &= p(1 + 0,5(k-1)M^2)^{\frac{k}{k-1}}, \\ T_0 &= T(1 + 0,5(k-1)M^2). \end{aligned} \quad (7)$$

По существу, приведенные соотношения (7) описывают стационарное течение газа в канале переменного сечения, а возникающее при этом число Маха отражает ситуацию

разгона газа из состояния покоя на бесконечности в некотором воображаемом канале конфузорной формы до заданного уровня значений, соответствующего режиму течения на входной границе.

Из соотношений (6) или (7) видно, что для двух предельных случаев организации движения на входной границе связующей характеристикой между параметрами торможения потока и газодинамическими функциями при изоэнтропическом процессе поступления газа в расчетную область является число Маха. В свою очередь значение числа Маха может быть установлено из теории характеристик. Например, применительно к конкретной задаче истечения газа из ресивера (емкости безграничного объема) для наиболее типичных ситуаций могут быть востребованы два варианта состояния входной границы. Либо течение реализуется с дозвуковым режимом движения, либо возникает предельный случай звукового режима истечения газа из емкости.

Рассмотрим вариант поступления газа в канал из ресивера бесконечного размера. Форма области перед входной границей предопределяет конфузорный режим движения газа, т.е. по мере приближения газа к входной границе его скорость движения увеличивается. Картина течения газа в виде линий тока схематично изображена на рис. 1. Заметим, что соотношение для скоростей, отражающей разгон газа, предопределяет структуру течения газа в окрестности входной границы. При дозвуковом режиме течения вверх по потоку распространяются звуковые возмущения. В качестве величины, которая может быть использована для отражения этого явления, выступает соответствующий инвариант Римана. Примем, что течение, как это изображено на рисунке, осуществляется слева направо, тогда на границу области исследования из приграничной окрестности со скоростью  $u - a$  будет переноситься второй инвариант Римана  $R^-$  ( $a$  – скорость звука в газе). Его количественное значение определяется по текущему значению газодинамических функций в окрестности границы

$$R^- = \frac{2}{k-1} a - u. \quad (8)$$

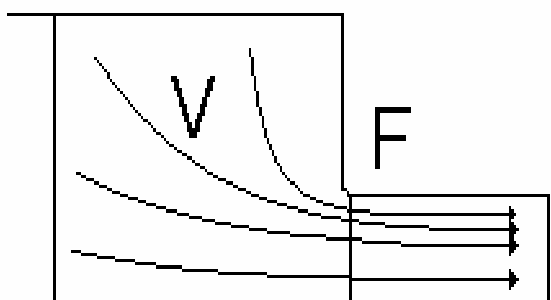
В каждый момент времени значение второго инварианта Римана  $R^-$ , определенного по текущему состоянию газодинамических функций, известно правее входной границы и сохраняется на характеристике второго семейства, пересекающей границу. В этой же точке определен первый инвариант Римана  $R^+$ . Количественная величина этого

инварианта Римана сохраняет свое значение в ресивере на характеристиках первого семейства, которые распространяются вниз по потоку со скоростью  $u + a$ . Имеем

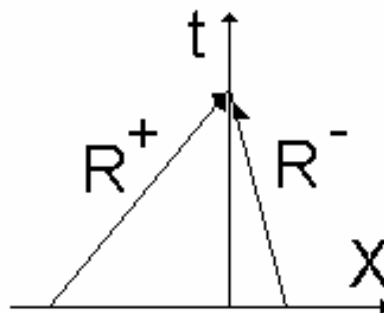
$$R^+ = \frac{2}{k-1} a + u. \quad (9)$$

Графическое представление рассматриваемой ситуации в  $x - t$  диаграмме приведено на рис. 2. Начало координат соответствует положению входной границы, а кривые иллюстрируют характеристики первого и второго семейства, приходящие на границу расчетной области. Значение первого инварианта Римана в предположении изэнтропийного режима течения в ресивере может быть установлено по параметрам торможения газа в ресивере

$$R^+ = \frac{2}{k-1} \sqrt{k \frac{R}{m} T_0}. \quad (10)$$



**Рис. 1.** Схема течения газа в виде линий тока на входной границе.  $F$  – площадь входного сечения,  $V$  – объем резервуара истечения



**Рис. 2.** Схема распространения возмущений на входной дозвуковой границе (течение происходит слева на право)

Комбинация первого и второго инвариантов Римана позволяет установить газодинамические функции скорости  $u$  и скорости звука  $a$  непосредственно для точки, принадлежащей входной границе и, следовательно, значение числа Маха. Разрешая соотношения для инвариантов Римана относительно газодинамических функций скорости и скорости звука, получим



$$\begin{aligned}
u &= \frac{(R^+ - R^-)}{2}, \\
a &= \frac{4}{(k-1)}(R^+ - R^-), \\
M &= \frac{(k-1)}{2} \frac{(R^+ - R^-)}{(R^+ + R^-)}.
\end{aligned}
\tag{11}$$

Как отмечалось, в магистрали и в емкости безграничного объема значения параметров торможения неизменны во времени. В случае емкости конечного объема или при изменении объема емкости параметры торможения будут изменяться. В предположении об адиабатическом режиме истечения газа из ресивера соотношения, описывающие изменение параметров торможения в резервуаре объемом  $V$ , который может изменяться по некоторому закону от времени, представляются в виде уравнений баланса массы и энергии. Их можно записать относительно изменения параметров торможения в следующем виде

$$\begin{aligned}
\frac{d(\rho_0 V)}{dt} &= G, \\
\frac{d(c_v T_0 V)}{dt} &= GH - p_0 \frac{dV}{dt}, \\
G &= F \rho u, \\
p_0 m &= \rho_0 R T_0,
\end{aligned}
\tag{12}$$

где  $G$  – массовый расход газа через площадь  $F$  (см. рис. 1).

Значения  $G$  и  $GH$ , выражающие потоки массы и полной энтальпии из резервуара, определяют по изложенной выше теории для инвариантов Римана. В частности, если в окрестности горла резервуара реализуется трансзвуковой режим течения, то принимают  $M = 1$ , что эквивалентно заданию критического расхода, в остальных случаях значение числа Маха устанавливается в соответствии с текущим значением второго инварианта Римана и значениями полных параметров в резервуаре.

## 1.2.2. Непроницаемая граница

В качестве непроницаемой границы для системы уравнений (1) могут выступать несколько характерных областей в канале: ось симметрии потока, боковые стенки канала и торцевая часть канала, если канал заглушен. На оси канала ставятся следующие граничные условия

$$\frac{\partial u}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial T}{\partial y} = 0, \quad v = 0. \quad (13)$$

На стенке канала реализуется граничное условие, выражающее по скорости условие прилипания и, в зависимости от условия теплового взаимодействия газа с поверхностью, условие по температуре или по тепловому потоку.

$$u = 0, \quad v = 0, \quad T = T_w \quad \text{или} \quad \frac{\partial T}{\partial y} = q_w. \quad (14)$$

На торцевой поверхности канала для продольной составляющей компоненты скорости ставится условие непротекания, по температуре – условие адиабатической изоляции

$$u = 0, \quad \frac{\partial T}{\partial y} = 0. \quad (15)$$

Для поперечной составляющей компоненты скорости граничных условий не требуется.

## 1.2.3. Выходная граница

Для выходной границы при дозвуковом режиме течения газа в качестве граничного условия используется заданное значение давления. Это равносильно заданию определенного значения для инварианта Римана, который поступает в расчетную область с выходной границы. В случае сверхзвукового истечения газа из рассматриваемой области

постановка граничного условия не требуется, т.к. все инварианты Римана покидают расчетную область.

Случай трансзвукового истечения газа из канала требует отдельного рассмотрения. В отличие от сверхзвукового истечения, когда звуковая линия находится внутри расчетной области, и возмущения с выходной границы не попадают в область исследования, то в этом случае положение линии перехода скорости через скорость звука приходится непосредственно на выходную границу области вычислений. Можно отметить, что оба эти режима соответствуют течению с «запираем» потока, когда расход в канале достигает своего максимального значения и перестает зависеть от противодавления. При сверхзвуковом истечении газа значение второго инварианта Римана  $R^-$ , который фактически определяет значение газодинамических функций на входной границе, устанавливается в расчете автоматически по значениям первого инварианта Римана  $R^+$ , определенного на входной границе, и условия  $u = a$  на звуковой линии, т.к. звуковая линия является последней точкой, откуда характеристики второго семейства распространяются против потока. Из этой же точки, в случае сверхзвукового истечения газа, определяется режим течения газа ниже по потоку. Иными словами, при сверхзвуковом истечении газа решение на выходной границе детерминировано формой сопла и состоянием газа в критическом сечении. В ситуации, когда звуковая линия располагается на границе области исследования, значение давления должно быть заранее определено из условия запирания потока и назначено в качестве граничного условия.

Для этого рассмотрим поведение газодинамических функции в окрестности выходной границы на оси симметрии потока. Для этой области течения можно выделить трубку тока и для нее определить текущее значение расхода, количества движения и полную энтальпию по формулам

$$\begin{aligned} G &= \rho u, \\ I &= \rho u^2 + p, \\ H &= c_p T + u^2 / 2. \end{aligned} \tag{16}$$

Воспользовавшись уравнением состояния, приведенные уравнения можно явно разрешить относительно одной из газодинамических переменных. В частности, соотношение относительно давления газа с учетом того, что на линии запирания потока  $u = a$ , можно получить явно в виде квадратного уравнения

$$p^2 - l \cdot p + \frac{2}{k} \cdot \frac{k-1}{k+1} G^2 H = 0. \quad (17)$$

Решение квадратного уравнения дается формулой

$$p_{\pm} = \frac{l}{2} \mp \sqrt{\left(\frac{l}{2}\right)^2 - \frac{2}{k} \cdot \frac{k-1}{k+1} G^2 H}. \quad (18)$$

Оба корня полученного уравнения действительны. Меньшее значение соответствует давлению запираания потока, большее значение – ему же, увеличенному в  $k$  раз.

#### 1.2.4. Начальные условия

Для получения однозначного решения начально-краевой задачи Коши, которой соответствует система уравнений (1), требуется задание всех газодинамических функций в расчетной области. Как правило, это заданный уровень давления и температуры покоящегося газа. При этом может быть рассмотрен случай мгновенно разрушаемой диафрагмы. В этом случае считается, что существует условная поверхность, которая в начальный момент времени разделяет области с разным начальным уровнем давления или температуры.

## 2. Численный метод

### 2.1. Дискретизация во времени. Базовая явно-неявная схема

Система уравнений (5), полученная в результате регуляризации дивергентной формы записи системы уравнений Прандтля, имеет в левой части группу слагаемых, в которых осуществляется дифференцирование в продольном направлении, в правой части – нестационарные слагаемые и слагаемые описывающие конвекцию и диффузионный перенос в поперечном направлении. Такая структура указывает на выбор схемы численного интегрирования. Выглядит целесообразным аппроксимировать слагаемые, осуществляющие дифференцирование в продольном направлении, на известном временном слое, а слагаемые, описывающие процессы переноса в поперечном направлении, по неявной схеме.

Если воспользоваться двухслойной схемой по времени ( $\tau$  – шаг интегрирования по времени,  $n$  – индекс временного слоя) то слагаемые системы уравнений (5) будут определены в соответствии с записью

$$\begin{aligned}
 & y^\alpha \frac{\rho^{n+1} - \rho^n}{\tau} + \frac{\partial}{\partial y} (y^\alpha \rho v)^{n+1} = - \left[ \frac{\partial}{\partial x} (y^\alpha \rho u) \right]^n, \\
 & y^\alpha \rho^n \frac{u^{n+1} - u^n}{\tau} + y^\alpha (\rho v)^n \frac{\partial u^{n+1}}{\partial y} - \frac{\partial}{\partial y} \left( y^\alpha \mu \frac{\partial u}{\partial y} \right)^{n+1} = - \left[ \frac{\partial}{\partial x} (y^\alpha (\rho u^2 + p)) - u \frac{\partial}{\partial x} (y^\alpha \rho u) \right]^n, \\
 & y^\alpha \rho^n \frac{e^{n+1} - e^n}{\tau} + y^\alpha (\rho v)^n \frac{\partial e^{n+1}}{\partial y} - \frac{\partial}{\partial y} \left( y^\alpha \frac{\lambda}{c_v} \frac{\partial e}{\partial y} \right)^{n+1} - y^\alpha \mu^n \left( \frac{\partial u^{n+1}}{\partial y} \right)^2 = \quad (19) \\
 & = - \left[ \frac{\partial}{\partial x} (y^\alpha \rho u H) - u \frac{\partial}{\partial x} (y^\alpha (\rho u^2 + p)) + (u^2 - E) \frac{\partial}{\partial x} (y^\alpha \rho u) \right]^n.
 \end{aligned}$$

Явно-неявная аппроксимация системы уравнений Прандтля выявляет три аспекта решаемой задачи. Во-первых, неявная аппроксимация слагаемых в поперечном направлении согласована с характеристическими свойствами системы уравнений

Прандтля. Во-вторых, для обеспечения точности вычислений в расчетах пристенных течений используют сетки, в которых отношение шага дискретизации в продольном направлении в несколько раз больше шага дискретизации в поперечном направлении. Неявная аппроксимация снимает возникающее при этом ограничение на значение числа Куранта. В-третьих, явная аппроксимация процессов в продольном направлении позволяет с высокой точностью, фактически на любом шаблоне, с числами Куранта близкими к единице, разрешить возникающую в потоке структуру газодинамических разрывов.

Явно-неявная аппроксимация приводит к тому, что решение задачи (19), сформулированной для двумерной области, фактически сводится к решению серии независимых между собой одномерных задач. Количество решаемых задач определяется количеством рассматриваемых сечений. Остановимся на деталях решения системы уравнений (19). Уравнение для продольной составляющей скорости может быть решено независимо от других уравнений системы. Далее может быть решено уравнение для удельной энергии. Уравнение баланса массы служит для определения значения поперечной составляющей скорости. При этом нестационарное слагаемое, описывающее изменение плотности, в данном случае выступает как известная функция. Его значение, для задачи типа пограничного слоя, определяется непосредственно по заданному уровню давления и установленному распределению температуры (энергии). При постановке задачи типа узкого канала уровень давления в каждом сечении должен быть установлен. Для этого воспользуемся соотношением, выражающим интегральный баланс массы в сечении

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_0^w \rho y^\alpha dy = - \left[ \frac{\partial}{\partial x} \int_0^w \rho u y^\alpha dy + y^\alpha \rho v \Big|_0^w \right]. \quad (20)$$

Здесь символами  $\mathbf{0}$  и  $\mathbf{w}$  обозначены пределы интегрирования, соответствующие оси и стенке канала. Заметим, что в приведенном равенстве, во втором слагаемом в правой части соотношения (20) использовано дополнительное, в рамках системы уравнений Прандтля, условие для поперечной составляющей вектора скорости.

Правая часть уравнения (20) – известные функции, поэтому левая часть уравнения (20) может быть использована для определения давления. Исключая при помощи уравнения состояния плотность газа и разрешая уравнение явно относительно значения

давления на верхнем временном слое, получаем формулу для определения уровня давления в рассматриваемом сечении.

$$p^{n+1} = \frac{\frac{1}{\tau} \int_0^W \rho^n y^\alpha dy - \left[ \frac{\partial}{\partial x} \int_0^W \rho u y^\alpha dy + y^\alpha \rho v \Big|_0^W \right]^n}{\frac{1}{\tau} \frac{m}{R} \int_0^W \frac{1}{T^{n+1}} y^\alpha dy}. \quad (21)$$

Далее, при помощи уравнения состояния по известным значениям давления и температуры устанавливается распределение плотности по сечению канала. В результате для уравнения баланса массы в системе уравнений (19) известно значение двух из трех слагаемых, поэтому простым интегрированием этого уравнения в поперечном направлении определяется значение поперечной составляющей вектора скорости.

Подчеркнем, что предложенный алгоритм не обладает в общепринятом смысле свойствами консервативности и дивергентности, т.к. расчет ведется относительно вектора вспомогательных переменных, а правая часть системы уравнений (19) обеспечивает баланс потоков только в продольном направлении. Тем не менее, позволяет описывать течения газа, имеющего разрывы в поведении функций. Этот алгоритм решения может быть рассмотрен как отправная точка в семействе алгоритмов численного интегрирования нестационарной системы уравнений Прандтля. В частности, при помощи небольших изменений в способе формирования решения относительно верхнего временного слоя можно восстановить утраченные свойства консервативности и дивергентности.

## 2.2. Итерационный алгоритм, восстанавливающий консервативность уравнений

Введем в рассмотрение  $\Delta_F = (\Delta_p, \Delta_{\rho u}, \Delta_{\rho E})^T$  – вектор невязки системы уравнений (1) по формулам

$$\Delta_p = \frac{(y^\alpha \rho)^{n+1} - (y^\alpha \rho)^n}{\tau} + \frac{\partial}{\partial y} (y^\alpha \rho v)^{n+1} + \frac{\partial}{\partial x} (y^\alpha \rho u)^n,$$

$$\Delta_{\rho u} = \frac{(\mathbf{y}^\alpha \rho \mathbf{u})^{n+1} - (\mathbf{y}^\alpha \rho \mathbf{u})^n}{\tau} + \frac{\partial}{\partial \mathbf{y}} (\mathbf{y}^\alpha \rho \mathbf{u} \mathbf{v})^{n+1} - \frac{\partial}{\partial \mathbf{y}} \left( \mathbf{y}^\alpha \mu \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{y}} \right)^{n+1} + \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} (\mathbf{y}^\alpha (\rho \mathbf{u}^2 + \mathbf{p}))^n, \quad (22)$$

$$\Delta_{\rho E} = \frac{(\mathbf{y}^\alpha \rho E)^{n+1} - (\mathbf{y}^\alpha \rho E)^n}{\tau} + \frac{\partial}{\partial \mathbf{y}} (\mathbf{y}^\alpha \rho \mathbf{v} \mathbf{H})^{n+1} - \frac{\partial}{\partial \mathbf{y}} \left( \mathbf{y}^\alpha \lambda \frac{\partial T}{\partial \mathbf{y}} \right)^{n+1} - \frac{\partial}{\partial \mathbf{y}} \left( \mathbf{y}^\alpha \mathbf{u} \mu \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{y}} \right)^{n+1} +$$

$$+ \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} (\mathbf{y}^\alpha \rho \mathbf{u} \mathbf{H})^n.$$

Располагая текущим набором газодинамических функций на временных слоях  $\mathbf{n}$  и  $\mathbf{n} + 1$ , можно вычислить значения производных и определить количественное значение  $\Delta_F$ . Располагая невязкой системы уравнений (1), можно сформулировать задачу относительно поправок к вспомогательным переменным  $\mathbf{u}$  и  $\mathbf{e}$ , которые определены относительно верхнего временного слоя. Для этого введем в рассмотрение поправки к функциям  $\Delta \mathbf{u}$  и  $\Delta \mathbf{e}$ , которые выражают меру отклонения текущего состояния этих функций от «точного» их значения на верхнем временном слое. При этом значения функций на верхнем временном слое уточняются в результате итераций, а значения поправок к функциям стремятся к нулю. Связь между невязками и поправками можно установить приемом, который был использован при формулировке системы уравнений (5). Будем иметь

$$\mathbf{y}^\alpha \rho \frac{\Delta \mathbf{u}}{\tau} + \mathbf{y}^\alpha \rho \mathbf{v} \frac{\partial(\Delta \mathbf{u})}{\partial \mathbf{y}} - \frac{\partial}{\partial \mathbf{y}} \left( \mathbf{y}^\alpha \mu \frac{\partial(\Delta \mathbf{u})}{\partial \mathbf{y}} \right) = -[\Delta_{\rho u} - \mathbf{u} \Delta_{\rho}], \quad (23)$$

$$\mathbf{y}^\alpha \rho \frac{\Delta \mathbf{e}}{\tau} + \mathbf{y}^\alpha \rho \mathbf{v} \frac{\partial(\Delta \mathbf{e})}{\partial \mathbf{y}} - \frac{\partial}{\partial \mathbf{y}} \left( \mathbf{y}^\alpha \frac{\lambda}{c_v} \frac{\partial(\Delta \mathbf{e})}{\partial \mathbf{y}} \right) = -[\Delta_{\rho E} - \mathbf{u} \Delta_{\rho u} + (\mathbf{u}^2 - E) \Delta_{\rho}].$$

По общепринятой терминологии в правой части от знака равенства системы уравнений (23) – невязка, в левой части – стабилизирующий оператор, который действует на поправки к функциям. При такой трактовке назначение стабилизирующего оператора, во-первых, обеспечить «простоту» и устойчивость вычислений, во-вторых, сформировать «нулевые» значения поправок к функциям за возможно меньшее число итераций. В частности, целесообразно отказаться от учета диссипации в стабилизирующем операторе. Это позволяет упростить его структуру и решать уравнения системы (23) независимо друг от друга. Для ускорения сходимости итераций целесообразно использовать при формировании окончательной поправки к функциям метод верхней релаксации.



### 2.3. Пространственная дискретизация

Для численного интегрирования системы уравнений (19) или (22-23) проведем дискретизацию расчетной области. Для этого представим всю расчетную область в виде элементарных четырехугольных ячеек. Определим значения всех газодинамических функций относительно центра ячейки за исключением поперечной составляющей скорости  $\mathbf{v}$ , которую определим на верхней и нижней грани ячейки.

Для реализации граничных условий по скорости и температуре воспользуемся законтурными ячейками. В этих ячейках значение газодинамических функций будет назначаться на каждом шаге по времени и уточняться в ходе итераций из соображения обеспечения требуемого значения потока массы, количества движения и энергии через рассматриваемый участок границы, заключенный между двумя ячейками. В частности, реализация граничного условия первого рода на стенке канала со вторым порядком аппроксимации по пространству дается на двухточечном шаблоне соотношением

$$\mathbf{f}_N = 2\mathbf{f}_w - \mathbf{f}_{N-1}, \quad (24)$$

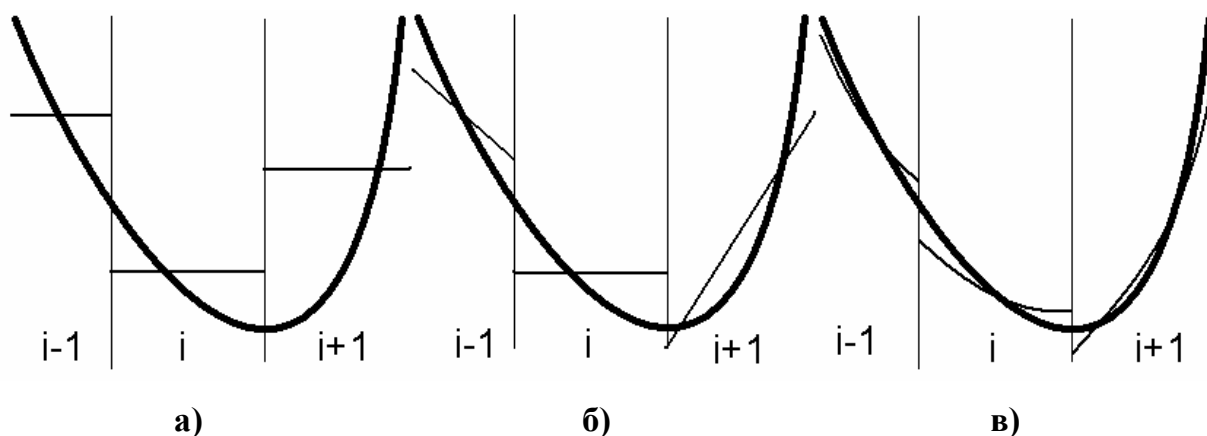
где индекс  $\mathbf{N}$  у функции соответствует законтурной ячейке, индекс  $\mathbf{N} - 1$  – примыкающей к ней внутренней ячейки, индекс  $\mathbf{w}$  – заданному значению скорости или температуры газа на стенке канала. Аналогичным образом формируются значения газодинамических переменных на оси канала.

Законтурные ячейки в торцевых частях канала служат также для представления граничных условий. Для проницаемой входной границы значения переменных в законтурных ячейках назначаются в соответствии с формулами (6) и (7). В случае выходной границы значения газодинамических переменных в законтурных ячейках совпадают с их значениями в соседних внутренних ячейках за исключением значения давления, которое назначается равным заданному граничному условию. Заметим, что если разностное решение задачи (1) опирается на решение задачи Римана о распаде произвольного разрыва, то исключение влияния противодавления при сверхзвуковом истечении газа из расчетной области будет происходить автоматически на стадии

формирования потока газодинамических величин через границу расчетной ячейки. Вариант непроницаемой торцевой адиабатической границы реализуется при помощи формирования значений для газодинамических функций в законтурной ячейке равными соответствующим их значениям во внутренней соседней ячейке. При этом изменяется на противоположное значение продольной составляющей вектора скорости. В этом случае решение задачи Римана о распаде произвольного разрыва приведет к значению нулевых потоков массы, импульса и энергии на грани, разделяющей внутреннюю и законтурную ячейки.

## 2.4. Разностная аппроксимация

При использовании дивергентной формы записи системы уравнений (1) целесообразно выполнить разностную аппроксимацию дифференциальных соотношений по методу контрольного объема. При этом изменение газодинамических величин в ячейках связано со значением потоков массы, импульса и энергии на гранях контрольного объема. Для определения величины потока в продольном направлении через границы контрольной ячейки воспользуемся задачей Римана о распаде произвольного разрыва. Порядок аппроксимации системы уравнений (1) определяется принятой в расчете зависимостью газодинамических функций от координат. В частности, в оригинальной работе Годунова С. К. [40] было использовано кусочно-постоянное распределение функции в расчетной ячейке. Помимо кусочно-постоянного распределения функции в пределах ячейки, известно применение кусочно-линейного и параболического представления. Иллюстрация применения различного способа представления функции приведена на рис. 3. Для примера рассмотрена некоторая функция, имеющая локальный минимум. На рис. 3 а) продемонстрирована ее аппроксимация в пределах ячейки в виде кусочно-постоянного представления, на рис. 3 б) и рис. 3 в) – в виде кусочно-линейного и параболического представления соответственно. В каждом случае использовался типичный трехточечный шаблон. Заметим, что параболическое представление поведения функции в расчетной ячейке эквивалентно использованию двух линейных распределений в пределах ячейки, которые определяют различные значения наклонов на разных гранях ячейки.



**Рис. 3. Аппроксимация функции на трехточечном шаблоне в виде кусочно-постоянной, кусочно-линейной и квадратичной зависимости в пределах расчетной ячейки дискретизации**

Известно, что выбор кусочно-постоянного представления поведения функции в пределах ячейки, несмотря на трехточечную аппроксимацию балансовых соотношений, приводит к схемам первого порядка точности. Использование кусочно-линейного или параболического представления поведения функции в пределах ячейки расширяет фактический шаблон, на котором выполняется аппроксимация производных в продольном направлении, до пяти ячеек. При этом точность вычислений для непрерывных функций составляет второй или третий порядок и снижается до первого или второго порядка для функций, терпящих разрывы. В каждой конкретной ситуации тот или иной порядок точности вычислений обеспечивается выбором закона изменения функции в пределах ячейки, то есть наклона. Настоящая реализация аппроксимации балансовых соотношений в продольном направлении выполнена со вторым порядком точности согласно методике работы [41].

В соответствии с принятым законом изменения газодинамической функции формируются их значения по обе стороны от границы, разделяющей расчетные ячейки. Для полученного набора данных решается задача Римана о распаде произвольного разрыва. Полученные в результате решения значения газодинамических функций используются для формирования значений потоков газодинамических величин через границу расчетной ячейки.

Для аппроксимации функций в поперечном направлении были использованы более простые зависимости. Для описания конвективного переноса в поперечном направлении использовались стандартные двухточечные центрально-разностные аппроксимации второго порядка точности. Повторная производная, которая служит для моделирования

процессов диффузии, выполнена в виде стандартной трехточечной разности, которая также имеет второй порядок точности.

В итоге, в результате принятых аппроксимаций, порядок точности вычислений по пространству поддерживается не ниже второго. Выбранный явно-неявный способ аппроксимации слагаемых системы уравнений (19) или (22-23) приводит к первому порядку аппроксимации по времени.

## **2.5. Метод решения возникающих алгебраических уравнений**

Использованная разностная аппроксимация позволяет решать алгебраическое уравнение для количества движения и уравнение баланса энергии независимо друг от друга при помощи высокоэкономичной в вычислительном плане процедуры скалярной трехточечной прогонки. Уравнение для давления алгебраическое, а уравнение баланса массы решается по схеме бегущего счета. Ряд значений функций в левой части системы уравнений (19) в виде сомножителей перед значениями производных, являющимися элементами матрицы Якоби, целесообразно определить на верхнем временном слое и уточнять при помощи итераций.

Сочетание итераций с процедурой коррекции решения по методу верхней релаксации при расчете по формулам (22-23) позволяет обеспечить изменение невязки уравнений сохранения импульса и энергии на 6-8 порядков за 5-8 итераций. Заметим, что получение решения в рамках базового алгоритма по схеме (19) требует для достижения той же точности вычислений 2-3 итераций.

### 3. Примеры решения задач

#### 3.1. Истечение газа из цилиндрической полукрытой трубы (трубы Людвиг)

##### 3.1.1. Постановка задачи и вычислительные аспекты

Рассмотрим цилиндрическую трубу с заглушенным с одной стороны торцом. На другом торце трубы расположена быстроразрушающаяся диафрагма, которая отделяет неподвижный, сжатый в трубе газ от безграничного резервуара с газом меньшего давления. При разрушении диафрагмы в трубе начнется волновое движение газа, которое будет сопровождаться формированием динамических и температурных пограничных слоев на стенке трубы.

Проведем численное моделирование процесса опорожнения заглушенной с одного конца цилиндрической трубы при следующих геометрических параметрах: диаметр трубы  $D = 16,0 \cdot 10^{-3}$  м, длина трубы  $L = 10,0$  м. Исходное состояние газа в трубе определяется давлением  $p_0 = 10,0$  МПа и температурой  $T_0 = 300,0$  К, давление газа в области истечения считаем с течением времени неизменным и равным  $p_a = 0,1$  МПа. В качестве рабочего тела принят воздух. Температура стенки трубы считается неизменной и равной  $T_w = 300,0$  К.

Расчет выполнялся на структурированной неподвижной сетке, состоящей из 40 узлов в поперечном направлении и 1000 узлов в продольном направлении. Шаг интегрирования по времени составлял  $\tau = 1,0 \cdot 10^{-6}$  с.

### 3.1.2. Обсуждение результатов расчета

Время наблюдения истечения газа из цилиндрической трубы составляло 250 мс. Для иллюстрации изменения состояния газа в трубе остановимся на мониторинге средних значений температуры и скорости в сечениях трубы. Точка 1 – заглушенный торец трубы, 2 – точка с координатой  $0,25 \cdot L$ , 3 – точка с координатой  $0,5 L$ , 4 – точка с координатой  $0,75 \cdot L$ , 5 – выходное сечение трубы.

Опишем основные стадии процесса. После мгновенного разрушения диафрагмы на выходе заглушенной с одного торца цилиндрической трубы возникает волна разрежения, распространяющаяся во внутрь трубы. В волне разрежения происходит нестационарный разгон газа. При этом будет увеличиваться скорость течения газа, а температура и давление газа в выходном сечении трубы будут уменьшаться. Для выбранного варианта начального отношения давлений в трубе  $p_0$  и в области истечения  $p_a$  происходит течение газа с запирианием потока, т.е. в выходном сечении трубы давление и температура газа будут уменьшаться до определенного уровня, до тех пор пока скорость потока не сравняется со скоростью звука. Этот момент времени для выходного сечения определяется выбранной дискретизацией области и наступает приблизительно к первой мс. После этого давление газа в выходном сечении трубы будет определяться формулой (18). При этом изменяется закон зависимости переменных от времени. Дальнейшее медленное снижение уровня давления сопряжено не с нестационарным разгоном газа, а с формированием пограничного слоя на стенке трубы и изменением структуры течения в выходном сечении.

На формирование нестационарного пограничного слоя оказывает влияние изменение переменных на внешней границе пограничного слоя. Волна разрежения, достигнув заглушенного торца трубы, отражается от него в виде волны разрежения. В результате этого разгон газа в трубе в первой волне разрежения сменяется его торможением в отраженной волне. При этом текущие значения чисел Рейнольдса в каждом сечении уменьшаются, что приводит к дальнейшему росту толщины пограничного слоя. Как можно судить по рис. 4, отраженная волна разрежения достигает выходного сечения трубы к 50 мс.

Волна разрежения, достигнув открытого торца трубы, приводит к активному изменению переменных в выходном сечении. В частности, к 150 мс давление в выходном сечении, определяемое по формуле (18), снижается до уровня  $p_a$ , что приводит к

дозвуковому режиму истечения газа из трубы. Зависимость давления в точках мониторинга от времени дает рис. 5.

Отметим некоторые детали нестационарного теплообмена газа в трубе. Из-за истечения газа из трубы происходит понижение его давления, плотности и температуры. При этом на стенках трубы помимо динамического пограничного слоя формируется температурный пограничный слой. Для рассматриваемых моментов времени сохраняется ядро течения, поэтому температура в ядре течения продолжает понижаться. Если на текущую толщину динамического пограничного слоя оказывает влияние положение сечения относительно заглушенного торца трубы и значение скорости в ядре потока, то для рассматриваемого режима течения толщина температурного пограничного слоя зависит только от наличия разности температуры стенки и ядра потока. К концу рассматриваемого интервала времени прогрев газа в трубе приводит к тому, что средняя по объему температура газа в трубе начинает увеличиваться. На заметное изменение зависимости температуры от времени указывает точка мониторинга № 5 на рис. 6. Как можно судить, температура газа по мере продвижения к открытому торцу трубы повышается.

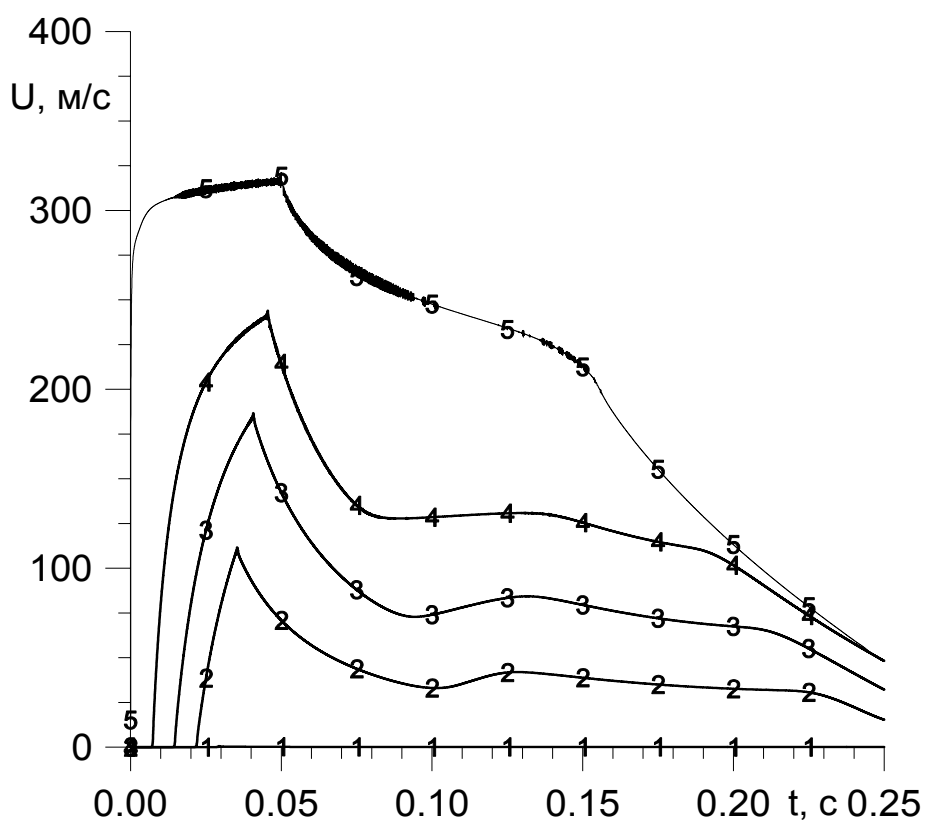


Рис. 4. Зависимость в точках мониторинга средней скорости потока от времени

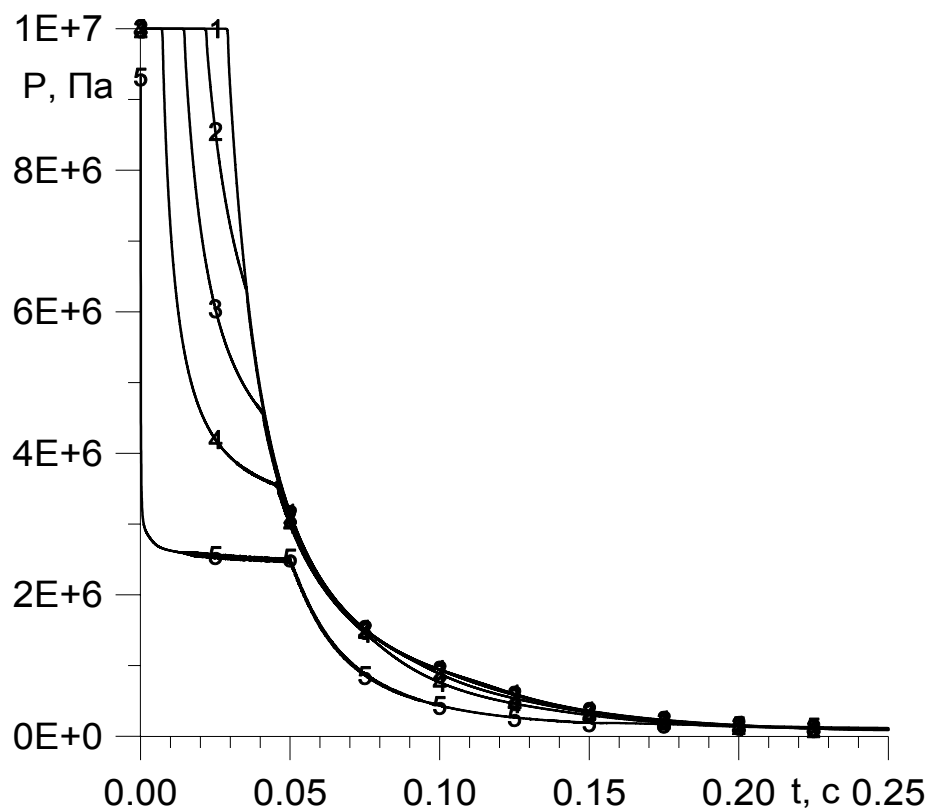


Рис. 5. Зависимость в точках мониторинга давления газа от времени

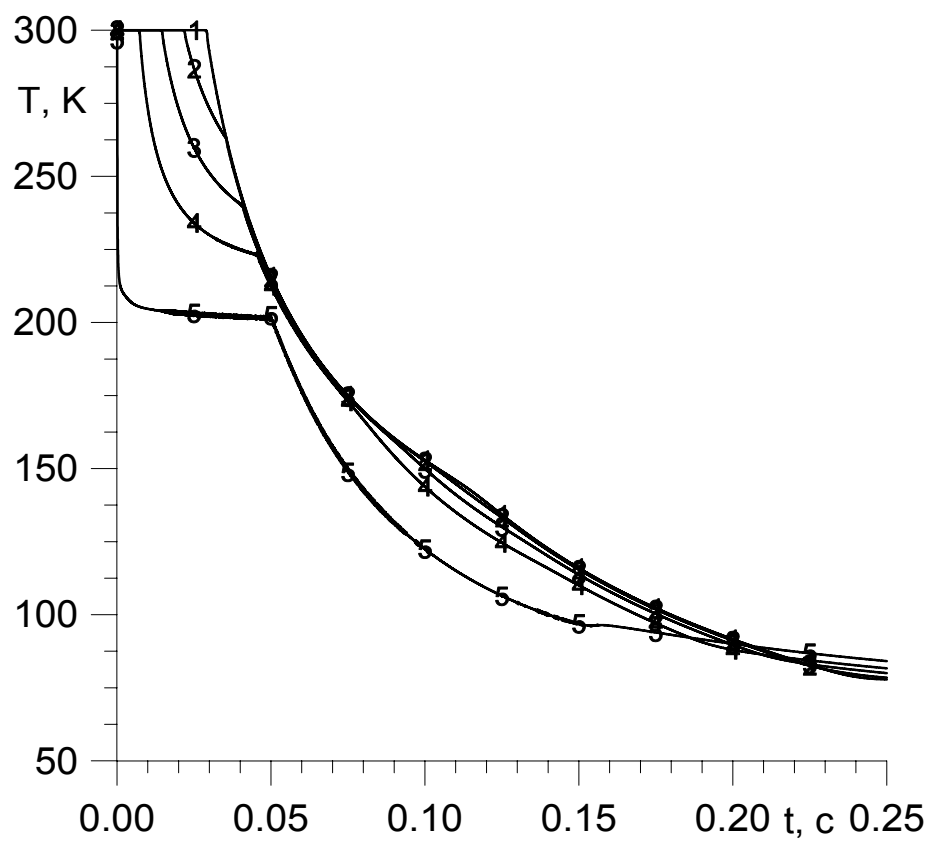


Рис. 6. Зависимость в точках мониторинга средней температуры газа от времени



## **3.2. Наполнение газом цилиндрической полуоткрытой трубы**

### **3.2.1. Постановка задачи. Акустические явления**

Рассмотрим полуоткрытую трубу (трубу Людвига), являющуюся элементом лабораторной установки по исследованию импульсных газовых струй. Подготовка установки к работе включает наполнение сжатым газом трубы, которая служит в экспериментах камерой высокого давления. Для этого используют напуск газа через редуктор из резервуара, содержащего газ при еще более высоком давлении. Во время наполнения газом трубы Людвига давление в ней должно увеличиться от исходного состояния до некоторого наперед заданного значения. При проведении лабораторной работы изменение давления регистрируют манометром, подсоединенным к трубе Людвига в окрестности участка напуска.

Проанализируем детали процесса подачи газа через редуктор. Редуктор представляет собой дроссельное устройство. Течение газа через редуктор не является изоэнтропическим, т.к. происходит при наличии сопротивления и в условиях активного теплообмена. При дроселировании происходит расширение газа с понижением давления и плотности при незначительном изменении температуры. На изменение температуры оказывают влияние два процесса: теплообмен газа со стенками редуктора и эффект Джоуля-Томсона. Таким образом, температура газа при выходе из редуктора определяется тремя параметрами: исходной температурой газа до дросселирования (температурой торможения), температурой стенки редуктора и температурой инверсии, которая, в соотношении с текущей температурой газа, определяет направление изменения температуры потока в эффекте Джоуля-Томсона. При некоторой идеализации процесса дросселирования, в частности, допущении о стационарном адиабатическом характере течения газа выполняется условие о сохранении полной энтальпии потока. В этом случае изменение температуры газа при проходе через дроссельное устройство определяется только эффектом Джоуля-Томсона. Если расчет характеристик газа в редукторе выделить в отдельную задачу, то можно считать, что за редуктором известно значение скорости и температуры газа. Поэтому для данного случая проницаемой входной границы несколько

скорректируем постановку граничных условий. В этом случае в качестве граничных условий задачи вместо параметров торможения газа будут выступать температура и скорость поступающего газа.

Условие заданного расхода газа через редукторное устройство моделировалось следующим образом. На входной границе фиксировалось значение скорости и температуры заданием соответствующих значений газодинамических функций в законтурной ячейке. Это эквивалентно заданию значения числа Маха потока. Помимо этого, задавалось условие нулевого градиента давления, которое, при дозвуковом режиме течения, моделировало ситуацию поступления возмущений на входную границу изнутри расчетной области. Плотность газа пересчитывалась по уравнению состояния.

Проведем численное моделирование процесса наполнения заглушенной с одного конца цилиндрической трубы сжатым газом. Выполним расчет для следующих значений параметров задачи. Диаметр трубы  $D = 16,0 \cdot 10^{-3}$  м, длина  $L = 1,024$  м. Скорость подачи газа через редуктор составляет  $u_0 = 2,0$  м/с, температура подаваемого газа –  $T_0 = 300,0$  К. Исходное давление и температура газа в трубе Людвига  $p_s = 0,1$  МПа,  $T_s = 300,0$  К. В качестве рабочего тела был рассмотрен воздух. Температура стенки трубы считается неизменной за все время рассматриваемого процесса и равной  $T_w = 300,0$  К. Требуемый уровень давления газа после процесса наполнения должен составлять  $p_e = 1,0$  МПа.

Для разъяснения сути акустических явлений определим значения некоторых чисел подобия. В частности, в качестве меры для интенсивности движения выступает значение числа Маха, которое для параметров на входе в трубу составляет  $M_0 = u_0/a_0 = 5,75 \cdot 10^{-3}$  ( $a_0 = \sqrt{\gamma R m^{-1} T_0}$ ). Режим движения газа в трубе, при квазистационарном характере потока, определяется при помощи числа Рейнольдса, которое построено по скорости подачи газа и диаметру трубы. В рассматриваемом примере оно имеет значение  $Re = u_0 D / \nu = 2000$  ( $\nu = \frac{\mu}{\rho}$  – кинематическая вязкость). В случае возбуждения волнового движения газа определяющим параметром становится частота акустических колебаний газового столба. Для рассматриваемых геометрических и режимных параметров задачи она составляет  $f = a_0 / 2L = 170$  Гц ( $\omega = 2\pi f = 1068$  рад·с<sup>-1</sup>). При возбуждении акустических колебаний в качестве числа подобия вместо числа Рейнольдса выступает число Стокса  $S$ , являющееся отношением радиуса трубы к характерной толщине динамического пограничного слоя. Для указанной частоты колебаний газа и диаметра

канала оно составляет величину, равную  $S = 0,5D/\sqrt{2\nu/\omega} = 20$ . При волновом движении газа критическое значение числа Рейнольдса определяется соотношением  $Re_{кр} = 700 \cdot S$  и может существенно превышать его значение, установленное для стационарного режима движения. Количественная оценка значений чисел подобия указывает на ламинарный режим движения газа со значимостью акустических процессов.

Подача газа с постоянным расходом приводит к формированию ударной волны. Ее интенсивность определяется скоростью подачи газа, которую в этом случае можно интерпретировать как скорость спутного потока за ударной волной. Следовательно, начальная стадия подачи газа возбудит в трубе Людвига акустическую ударную волну. Так как скорость распространения ударной волны выше скорости звука, то соответствующая ей частота колебаний газа больше собственной акустической частоты колебаний газового столба в трубе. Ударная волна будет совершать движение в трубе, поочередно отражаясь от заглушенного правого торца трубы и от левого торца трубы, через который осуществляется подача газа. С течением времени на эволюцию ударной волны будут оказывать влияние ряд процессов.

К увеличению амплитуды колебаний ударной волны может привести изменение собственной акустической частоты колебаний газового столба. Из-за прогрева газа в результате сжатия и из-за диссипации кинетической энергии в ударной волне температура газа постепенно увеличивается, при этом возрастет собственная частота колебаний, что неизбежно приведет, при совпадении частот, на какое то время к резонансным колебаниям, сопровождающимся увеличением амплитуды колебаний. Дальнейший рост температуры газа увеличивает собственную частоту колебаний газового столба и выводит систему из резонанса.

Параллельно с этим развиваются процессы, приводящие к уменьшению амплитуды колебаний. Фактором, влияющим на амплитуду колебания, служит наличие контактной поверхности. В определенном смысле контактную поверхность, которую можно ввести для идентификации границы раздела между газом, который был в трубе Людвига до начала процесса сжатия, и поступившим газом, можно отождествить с поршнем, вдвигаем в трубу. При этом отражение ударных волн будет происходить не только от торцевых поверхностей трубы, но и от контактной поверхности. Продвижение контактной поверхности от одного торца к другому будет порождать все новые высокочастотные гармоники ударных волн меньшей интенсивности, ослабляя при этом интенсивность исходной ударной волны.

### 3.2.2. Оценки по методу сосредоточенных параметров

Перед анализом результатов расчета, полученных по двумерной методике, которая позволяет учитывать тепловое и динамическое взаимодействие со стенкой трубы, проведем некоторые оценки процесса по так называемой 0-мерной модели наполнения. Если геометрические параметры трубы Людвиг описывать при помощи площади сечения трубы  $F$  и объема  $V = FL$ , то уравнения баланса массы, энергии и уравнения состояния для некоторых средних значений переменных  $\bar{\rho}$ ,  $\bar{T}$  и  $\bar{p}$ , описывающих текущее состояние газа в трубе Людвиг, могут быть записаны в следующем виде

$$\begin{aligned}\frac{d(V\bar{\rho})}{dt} &= F\bar{\rho}u_0, \\ \frac{d(V\bar{\rho}c_v\bar{T})}{dt} &= F\bar{\rho}u_0c_pT_0, \\ \bar{p}m &= \bar{\rho}R\bar{T},\end{aligned}\tag{25}$$

где функции скорости и температуры газа с индексом  $0$  соответствуют параметрам подачи газа из редуктора. Уравнения могут быть проинтегрированы аналитически. Если определить начальное состояние газодинамических переменных в трубе как  $\bar{\rho}_s$ ,  $\bar{T}_s$ ,  $\bar{p}_s$ , то их изменение со временем, согласно уравнениям (25), при подаче газа в трубу со скоростью  $u_0$  и значением температуры  $T_0$ , будут описываться следующими формулами

$$\begin{aligned}\frac{\bar{\rho}}{\bar{\rho}_s} &= \exp\left(\frac{u_0t}{L}\right), \\ \frac{\bar{p}}{\bar{p}_s} &= 1 + k\frac{T_0}{\bar{T}_s}\left(\exp\left(\frac{u_0t}{L}\right) - 1\right), \\ \frac{\bar{T}}{\bar{T}_s} &= \exp\left(-\frac{u_0t}{L}\right) + k\frac{T_0}{\bar{T}_s}\left(1 - \exp\left(-\frac{u_0t}{L}\right)\right).\end{aligned}\tag{26}$$

Анализ приведенных зависимостей позволяет сделать следующие выводы. В трубе, по мере подачи газа, будут экспоненциально увеличиваться плотность и давление. На изменение давления оказывает влияние отношение температур поступающего и находящегося в трубе газа и величина показателя адиабаты Пуассона. Характерное время процесса роста давления и плотности газа составляет  $\tau = Lu_0^{-1}$ , т.е. прямо пропорционально длине трубы и обратно пропорционально скорости подачи газа. При этом температура газа в трубе с течением времени асимптотически приближается к значению  $T = kT_0$ , и не зависит от того, какая начальная температура газа была в трубе или во сколько раз изменилось давление газа в трубе.

Подчеркнем, что величина  $kT_0$  характеризует температурное состояние системы в среднем. Так как все новые порции газа поступают при постоянной температуре и испытывают меньшее, по сравнению с ранее поступившими частями газа степень сжатия, то в трубе возникнет градиент температуры. Наиболее сжатый, а, следовательно, более высокой температуры газ располагается у заглушенного торца трубы. В частности, если температура газа подачи в трубу совпадает с температурой газа в трубе на момент начала процесса, то наиболее высокая температура газа возникнет у заглушенного торца трубы. Для оценки ее изменения справедлива формула адиабатического сжатия

$$\frac{\bar{T}}{\bar{T}_s} = \left( \frac{\bar{p}}{\bar{p}_s} \right)^{\frac{k-1}{k}}, \quad (27)$$

где текущее состояние давления в трубе может быть оценено по второму соотношению формулы (26).

Это достаточно грубая оценка начальной стадии процесса наполнения газом емкости. Она не учитывает теплообмен со стенками трубы и пространственную неоднородность переменных, которые оказывают существенное влияние на характер протекающих процессов.

### 3.2.3. Вычислительные аспекты

Расчет был проведен на структурированной неподвижной сетке, состоящей из 40 узлов в поперечном направлении и 500 узлов в продольном направлении. Шаг интегрирования по времени составлял  $\tau = 1,25 \cdot 10^{-7}$  с.

Расчет состоял из двух этапов. На первом этапе левый торец трубы считался входной границей, на которой были заданы температура и скорость поступающего газа (однородные по высоте канала профили скорости и температуры), соответствующие дозвуковому режиму течения. Правый торец трубы заглушен, т.е. реализовано условие непротекания и условие адиабатической изоляции. При достижении значения давления в точки мониторинга заданного уровня  $p_e$  на левом торце трубы изменялся тип граничного условия. Условие заданного расхода заменяли условием непротекания через торцевую поверхность канала. На втором этапе, для заглушенного с двух сторон канала, определяли релаксацию значений газодинамических функций в условиях нестационарного теплообмена.

### 3.2.4. Анализ результатов расчета

Рассмотрим решение задачи в рамках системы уравнений Прандтля. Представление о характере протекающих процессов сделаем при помощи мониторинга газодинамических функций в наиболее характерных точках трубы. В качестве точек, где отслеживается изменение функций во времени, выберем следующие точки: 1 – область подачи газа через торец трубы, 2 – точка с координатой  $0,25 \cdot L$ , 3 – точка с координатой  $0,5 L$ , 4 – точка с координатой  $0,75 L$ , 5 – заглушенный торец трубы.

Рассмотрим график зависимости давления от времени, приведенный на рис. 7. Он состоит из участка монотонного увеличения функции, который соответствует подаче газа в трубу Людвига, и участку релаксации функции до некоторого меньшего значения, соответствующего переходу системы сжатый газ – стенка трубы в термодинамическое равновесие. В приведенном на рисунке масштабе изменения функций давления все кривые точек мониторинга сливаются в одну кривую, что свидетельствует о незначительности продольных градиентов давления. Здесь же пунктирной линией

приведено решение по формуле (26), полученное по 0-мерной методике. Имея в виду схожесть в поведении интегральной кривой с кривыми мониторинга локальных значений давления, можно констатировать, что процесс моделирования медленного наполнения газом трубы Людвига в рамках системы уравнений узкого канала описывается достаточно точно. Связано это в первую очередь с невысоким значением скорости подачи газа, что приводит к акустическому характеру протекания газодинамических процессов.

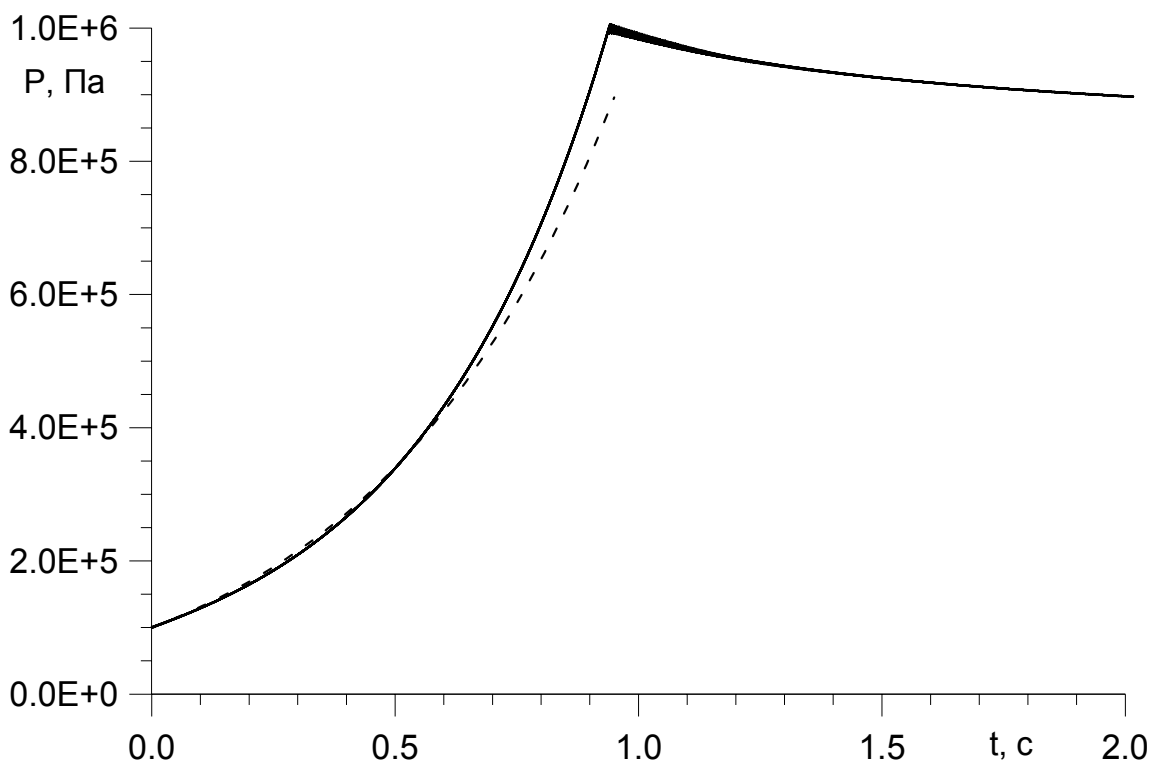


Рис. 7. Зависимость давления от времени в точках мониторинга трубы

Рассмотрим подробнее начальную стадию наполнения трубы. Если первые циклы колебаний газа проходят при росте толщины пограничного слоя (высокое значение числа Стокса) и его влияние на движение газа незначительно, то, с течением времени, значение числа Стокса уменьшается и происходит демпфирование амплитуды колебаний. Например, для рассматриваемого случая  $S = 20$  размеры сформировавшегося пограничного слоя составляют порядка 10 % от пропускной площади канала.

После исчезновения ударной волны происходит квазистационарное как бы послышное наполнение газом трубы Людвига. Каждая следующая порция газа, поступающие при все более высоком значении давления, сжимают ранее поступившие порции газа. Возникающая при этом температурная стратификация представлена на рис. 8

в виде зависимости от времени в точках мониторинга средней по сечению температуры. По моменту времени, когда изменяется наклон кривой, можно судить о проходе контактной поверхности мимо точки мониторинга. В частности, кривая с номером 5 иллюстрирует процесс сжатия массы газа, которая была заключена в трубе Людвига до начала подачи газа через редуктор и, теоретически, не может зарегистрировать движение контактной поверхности.

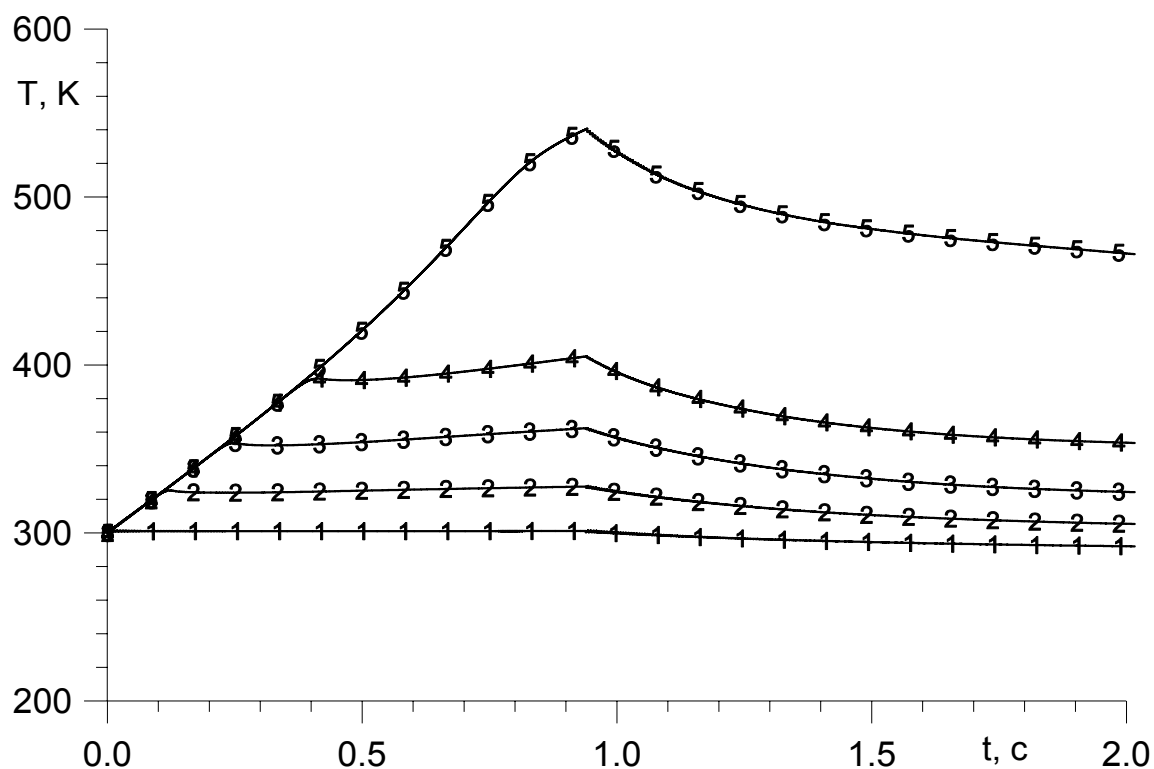


Рис. 8. Зависимость средней по сечению температуры от времени в точках мониторинга трубы

График зависимости удельного теплового потока от времени в точках мониторинга приведен на рис. 9. Высокочастотные колебания газа на ранних стадиях наполнения трубы Людвига приводят к соответствующим осцилляциям в величине теплового потока. Одновременно с этим, из-за увеличения температуры газа в ядре течения, увеличивается количества тепла, отведенного от газа в стенку трубы.

Изменение средней по сечению скорости в зависимости от времени представлено на рис. 10. Эти графики хорошо иллюстрируют на начальных стадиях напуска газа наличие в системе волновых процессов и их последующее демпфирование в результате нарастания пограничного слоя и отстройки от резонансных колебаний в результате прогрева газа.



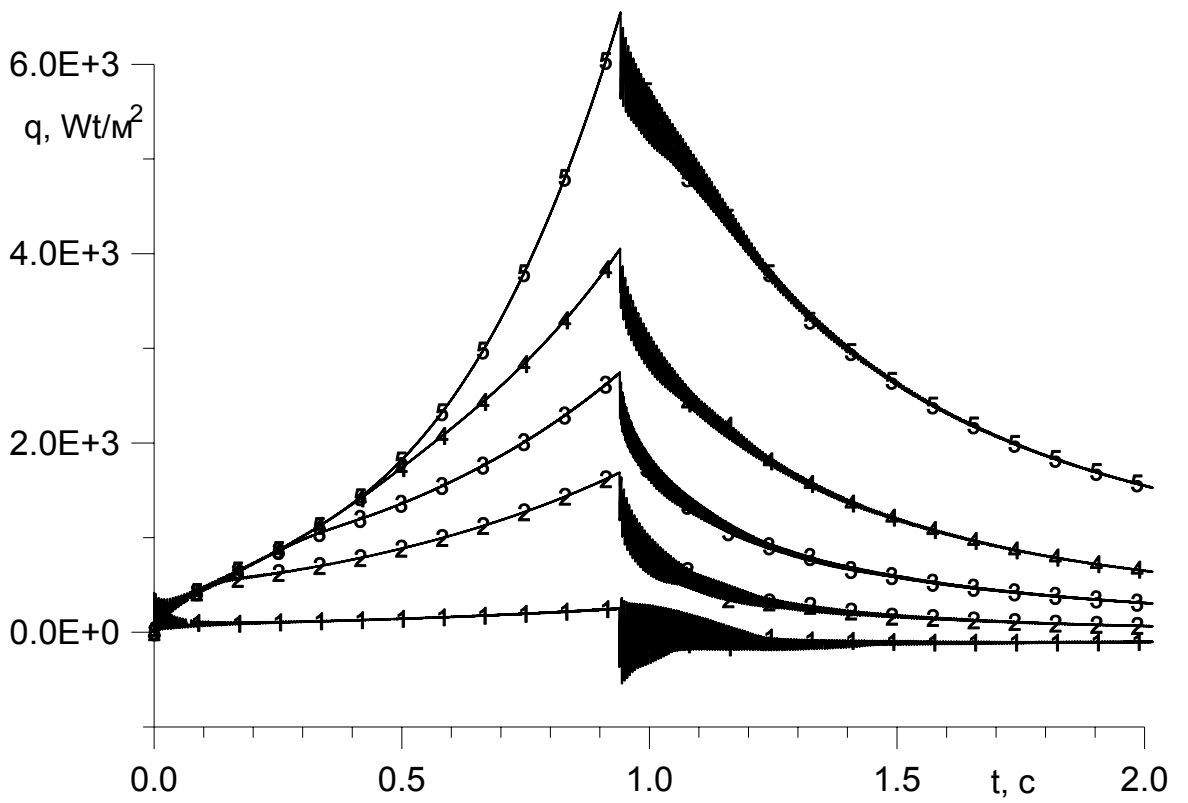


Рис. 9. Зависимость удельного теплового потока от времени в точках мониторинга трубы

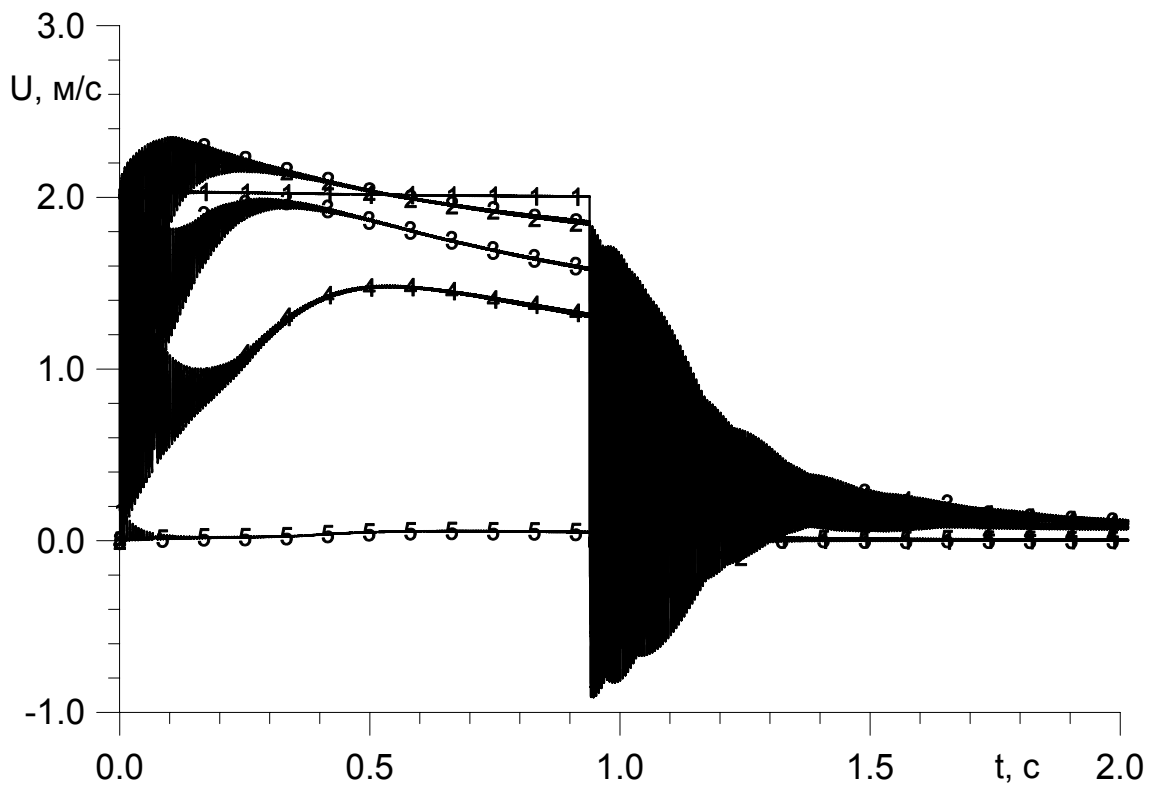


Рис. 10. Зависимость средней по сечению скорости от времени в точках мониторинга трубы

Графики демонстрируют, что амплитуда колебаний сопоставима с уровнем значения функции, следовательно, динамические и тепловые процессы на стенке канала протекают в условиях нестационарного процесса.

Демпфирование акустических колебаний газа в трубе приводит процесс наполнения газом трубы Людвига к квазистационарному течению. Продольное распределение средней по сечению скорости имеет линейный характер с максимумом в левой части трубы на участке подачи газа и минимумом в правой торцевой части трубы. Неравномерное торможение линий тока в окрестности оси и стенки канала приводит к тому, что линии тока в окрестности оси канала достигают торца и разворачиваются вдоль стенки. Иными словами, несбалансированность процессов конвективного переноса приводит к формированию в окрестности торцевой части канала пристенной зоны обратного тока. Этому процессу способствует нестационарный теплообмен газа со стенкой канала. Интенсивное охлаждение газа на стенке трубы и, как следствие, локальное увеличение плотности газа, приводит к формированию радиального течения газа от оси канала к стенке. Эту ситуацию иллюстрируют линии равного значения продольной составляющей вектора скорости, приведенные на рис. 11 для момента времени, соответствующего заключительной стадии наполнения газом трубы Людвига (продольная координата – ось, поперечная координата – радиус). На рис. 12, для этого же момента времени, приведены изотермы (температура в каждой точке отнесена к температуре стенки канала).

В момент времени  $t \approx 0,94$  с значение давления в трубе достигло величины  $p_e = 1,0$  МПа. При этом было изменено граничное условие для левой торцевой части канала. Изменение граничного условия привело к нарушению динамического равновесия в системе. Квазистационарный режим течения поддерживался за счет того, что скоростной напор подаваемой очередной порции газа соответствовал работе сжатия и работе силы трения о боковые стенки канала. При прекращении подачи газа поступательное инерционное движение газа в трубе привело к образованию волны разрежения в окрестности левого торца трубы, где осуществлялась подача газа, а в окрестности другого торца (правого) при этом сформировалась волна сжатия. В результате этого в системе вновь возникло волновое движение газа на частоте собственных колебаний газового столба, которая соответствует практически линейному распределению температуры газа вдоль по трубе.

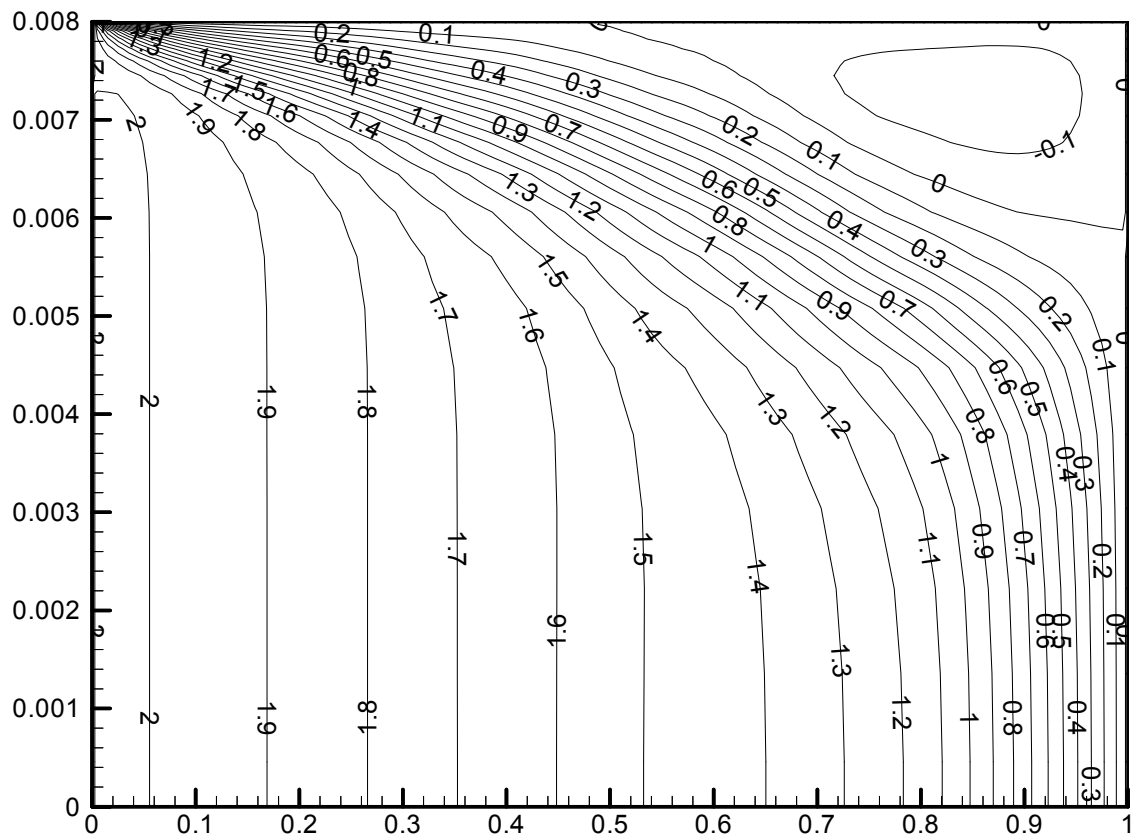


Рис. 11. Линии равного значения продольной составляющей вектора скорости в трубе

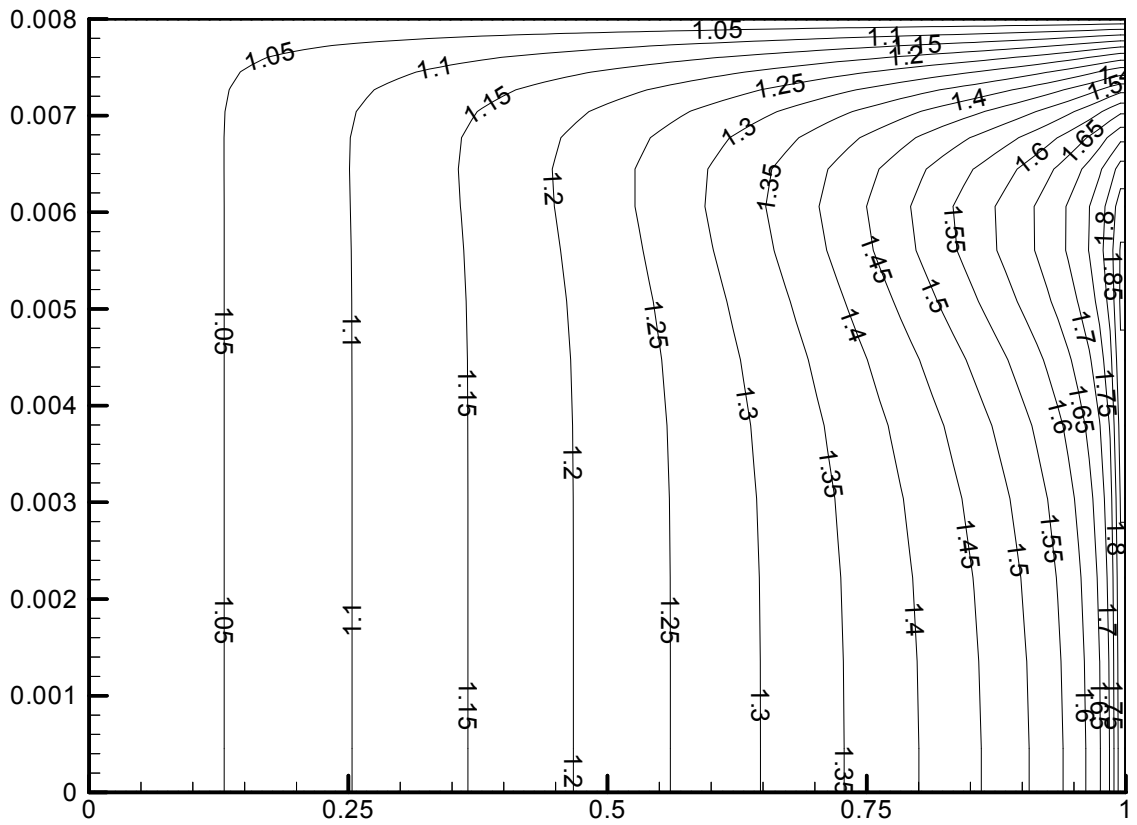


Рис. 12. Изотермы в трубе

Как и в ранее рассмотренной ситуации при наполнении газом трубы Людвига, с течением времени, в результате теплообмена, собственная частота газового столба уменьшается, и колебания перестают быть резонансными. Помимо этого происходит демпфирование колебаний из-за взаимодействия потока со стенкой трубы. Релаксационные процессы для вышерассмотренных газодинамических переменных проиллюстрированы на рис. 7-10 моментами времени большими, чем  $t \approx 0,94$  с. Общее понижение температуры в газе, вызванное теплообменом со стенками канала, приводит к изменению среднего уровня давления. Заметим, что градиент температуры вдоль по трубе, возникший из-за неравномерного сжатия порций газа, выравнивается достаточно медленно. Поэтому снижение среднего уровня давления в трубе приводит к тому, что в окрестности левого торца трубы возникает участок, когда стенка наоборот, нагревает газ.

Детали колебательного движения газа на примере изменения средней скорости в точках мониторинга для начального момента времени (рис. 13 а)- б)) и для момента закрытия трубы (рис. 13 в)- д)) приведены на иллюстрациях. По повторяемости во времени характерных элементов формы кривой можно определить частоту колебаний. Как можно судить по данным рис. 13 а) и рис. 13 б) частота колебаний газа на начальной стадии наполнения составляет  $\approx 182$  Гц и согласуется с ожидаемым результатом. Рис. 13 а), характеризующийся крутыми фронтами при изменении значения функций, иллюстрирует первые циклы движения ударной волны. На рис. 13 б) отражены колебания средней скорости газа в трубе в точках мониторинга спустя  $1,0 \cdot 10^{-2}$  с. Можно отметить изменение формы колебаний (отсутствие крутых фронтов) и уменьшение амплитуды колебаний.

Оценим собственную частоту колебаний газового столба в момент закрытия канала. При линейном распределении температуры по длине трубы частота колебаний определяется формулой

$$f = \frac{a_L + a_R}{4L}, \quad (28)$$

где  $a_L$  и  $a_R$  – скорость звука на левом и правом конце трубы. Прямое измерение частоты по результатам, приведенным на рис. 13 в)-д), частота колебаний составляет  $f = 195$  Гц и демонстрирует удовлетворительное соответствие со значением частоты, которое вычислено по формуле (28) и составляет  $f = 204$  Гц. На рис. 13 в) проиллюстрированы

первые циклы колебания средней скорости для момента времени  $t \approx 0,94$  с. По рис. 13 г) и рис. 13 д) можно судить об эволюции колебаний во времени. В частности, на фоне акустических колебаний большой амплитуды можно отметить периодическое возбуждение и гашение высокочастотных гармоник небольшой амплитуды.

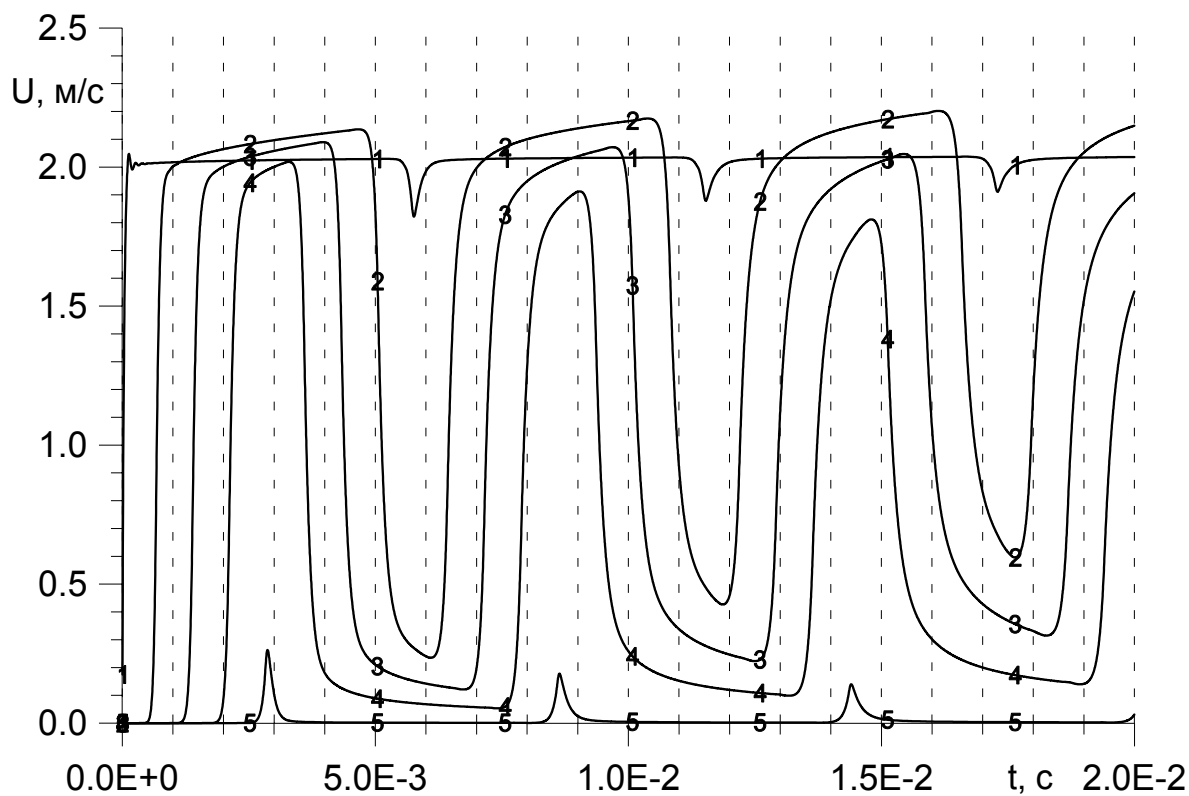


Рис.13 а) Начальная стадия колебаний скорости с частотой  $\approx 182$  Гц

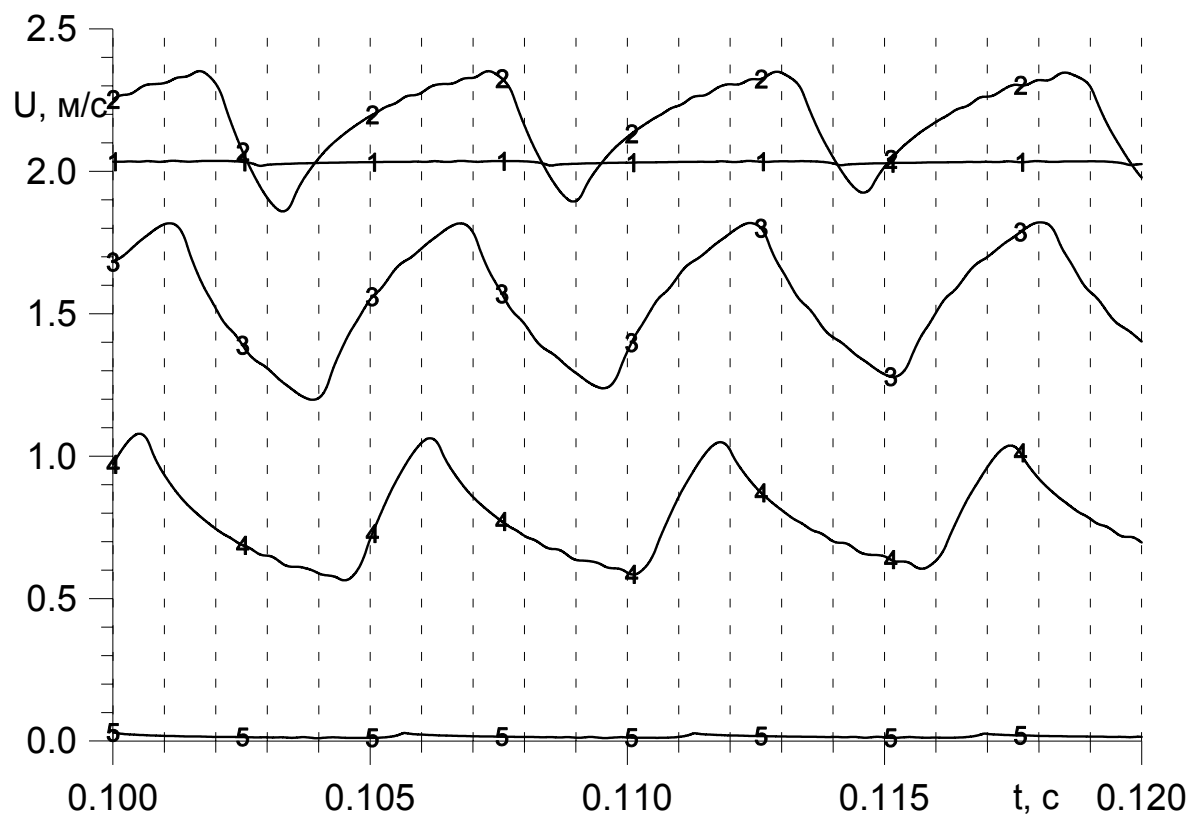


Рис.13 б) Эволюция колебаний скорости с частотой  $\approx 182$  Гц

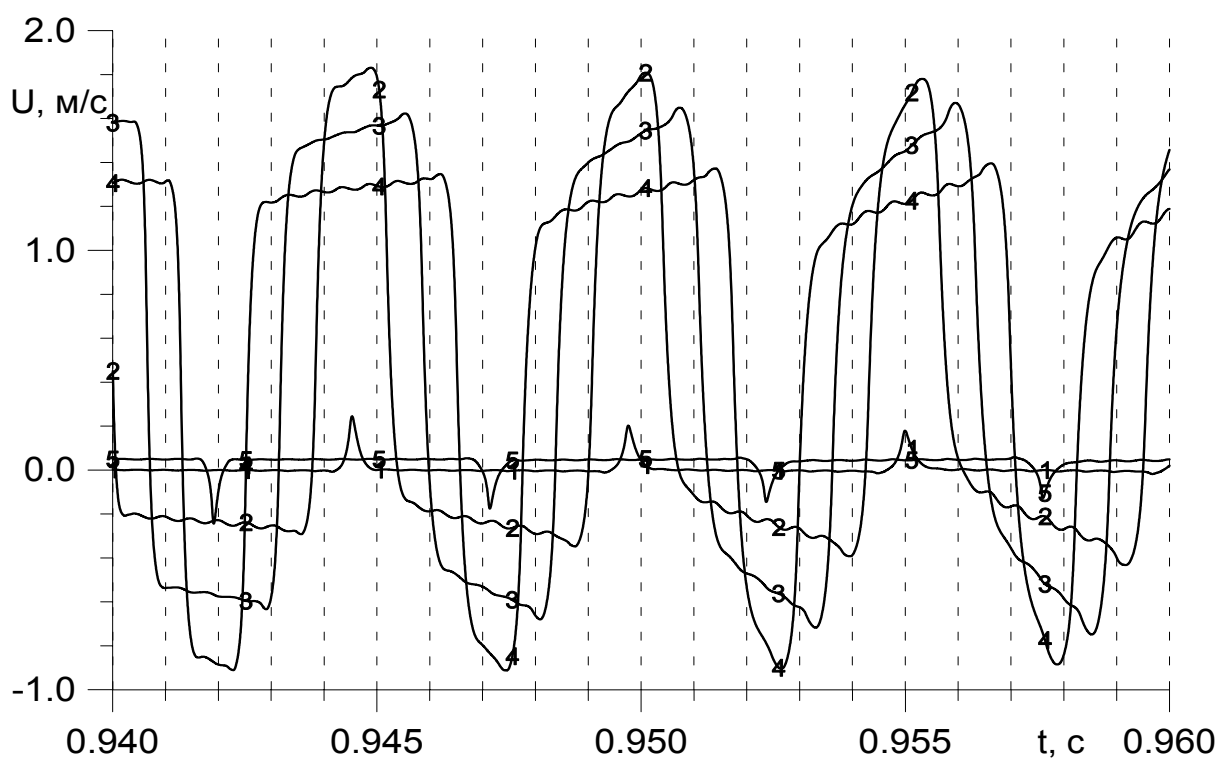


Рис.13 в) Начальная стадия колебаний скорости с частотой  $\approx 195$  Гц

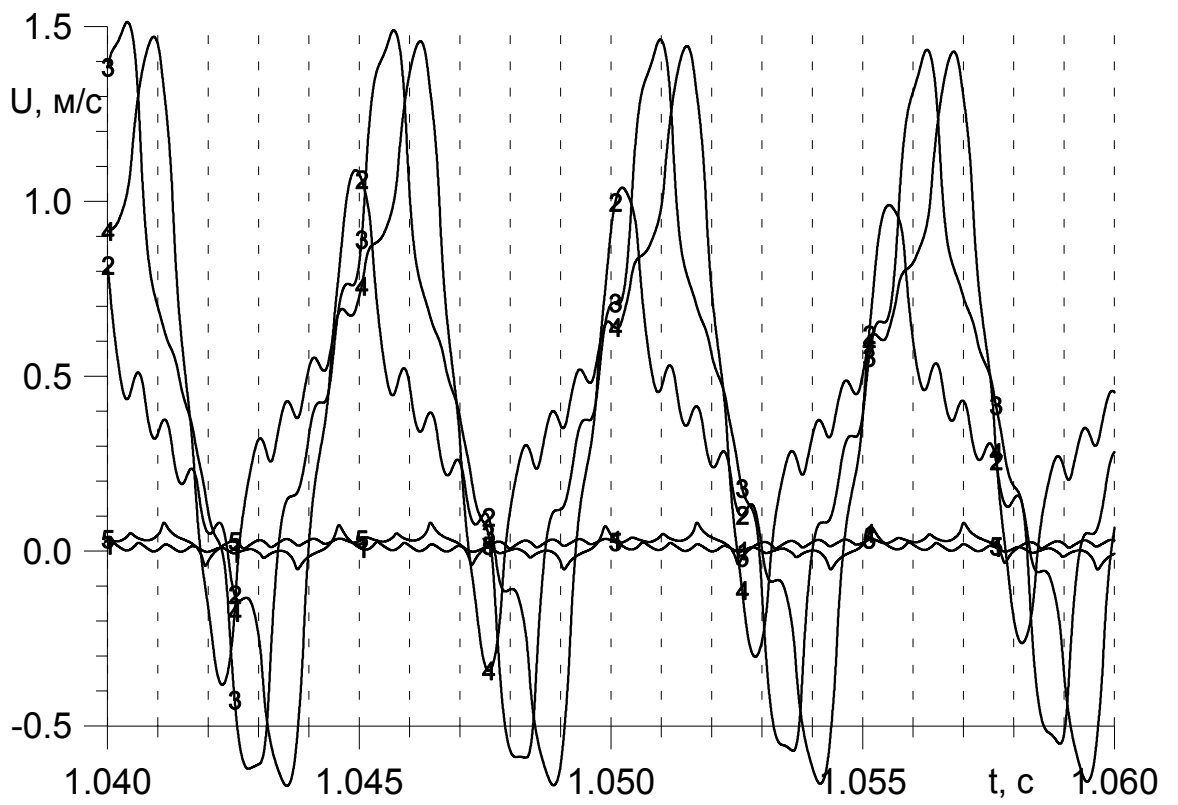


Рис.13 г) Эволюция колебаний скорости с частотой  $\approx 195$  Гц

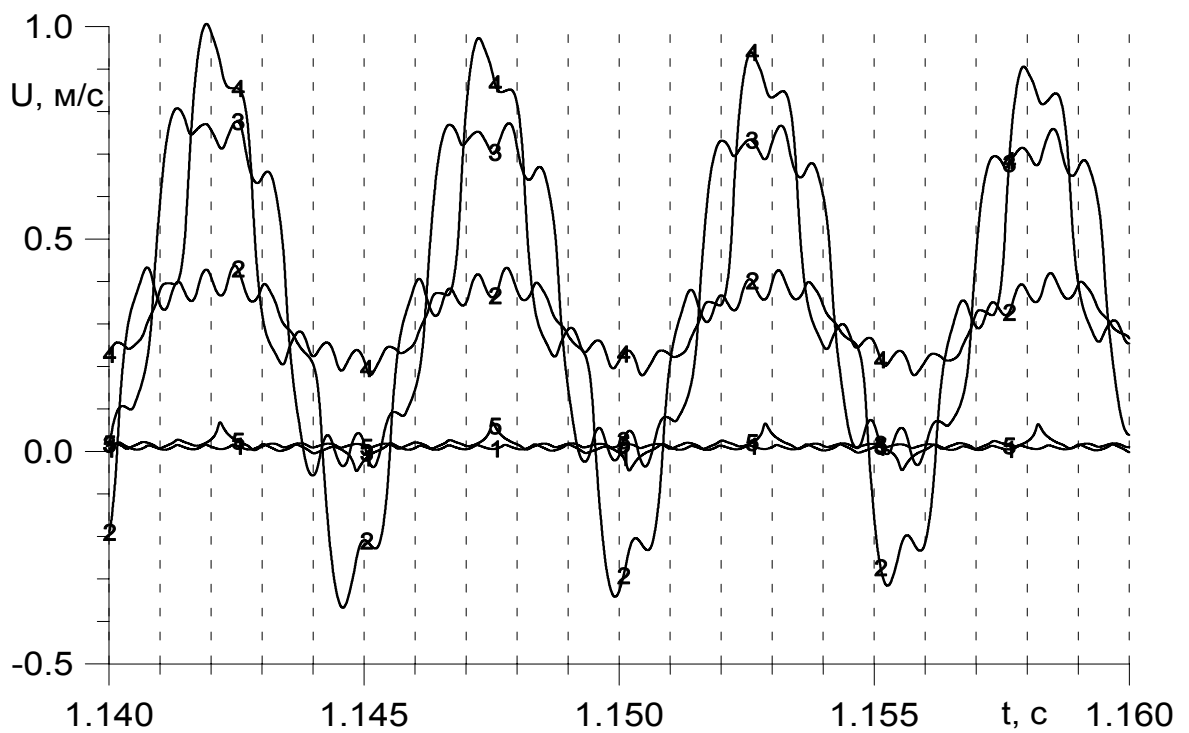


Рис.13 д) Дальнейшая эволюция колебаний скорости с частотой  $\approx 195$  Гц

### **3.3. Нестационарное течение газа в канале, соединяющем две емкости**

#### **3.3.1. Варианты постановки задачи**

Рассмотрим цилиндрическую трубу, которая соединяет два безграничных резервуара, наполненных газом при разных давлениях. На одном из торцов трубы расположена быстроразрушающаяся диафрагма. При разрушении диафрагмы в трубе начнется волновое движение газа, которое будет сопровождаться формированием динамических и температурных пограничных слоев на стенке трубы.

Рассмотрим трубу диаметром  $D = 4,0 \cdot 10^{-3}$  м и длиной  $L = 1,0$  м. Исходное состояние газа в трубе определяется расположением диафрагмы и соответствует или давлению в левом ресивере  $p_0 = 1,0$  МПа или давлению  $p_a = 0,1$  МПа правого ресивера. Температура газа  $T_0 = 300,0$  К. В качестве рабочего тела был рассмотрен воздух. Температура стенки трубы считается неизменной и равной  $T_w = 300,0$  К.

Перед анализом результатов расчета укажем на совершенно различный сценарий формирования течения в трубе при различном положении диафрагмы, разделяющей два резервуара.

##### **3.3.1.1. Быстроразрушающаяся диафрагма на выходе из канала**

В случае расположения диафрагмы на выходе из трубы инициация движения происходит через формирование волны разрежения. Отношение давлений по разные стороны диафрагмы определяет интенсивность волны разрежения. Возможны два варианта течения газа, которые различаются по величине числа Маха потока в месте расположения диафрагмы. Один вариант – реализация дозвукового режима истечения газа из трубы без запирания потока. При этом значение числа Маха меньше единицы в любой точке трубы и характеристики с выходной границы достигают входную границу.



Формирование течения определяется двумя временными масштабами. «Быстропротекающий» процесс – распространение звуковых волн по каналу и формирование параметров на входе в трубу в соответствии с интенсивностью волны разрежения. «Медленно» протекающий процесс – формирование динамического пограничного слоя на стенке трубы. Нарастание пограничного слоя приводит к уменьшению пропускной способности трубы, и, в соответствии с этим, корректируются параметры газа на входе в трубу.

Несколько другой вариант реализуется при более высоких отношениях давления на диафрагме. Интенсивная волна разрежения порождает звуковое истечение газа и, как следствие, запирает поток. В результате этого давление газа в резервуаре, которое инициировало движение газа, перестает оказывать влияние на течение. На выходе из трубы давление газа определяется значением числа Маха, равным единице и находится по формуле (18) в соответствии с текущим значением расхода газа, импульсом и энтальпией потока. В остальных чертах вариант с запирающим потоком схож с вышерассмотренным случаем дозвукового истечения газа. Можно ожидать, что стабилизация течения газа по времени в режиме с запирающим потоком будет более длительной из-за того, что скорость распространения возмущений вверх по потоку, определяемая разностью  $u - a$ , мала.

### **3.3.1.2. Быстроразрушающаяся диафрагма на входе в канал**

В случае расположения диафрагмы на входе в трубу инициация движения происходит через формирование ударной волны, вызванной разрушением диафрагмы. Помимо ударной волны, распространяющейся по неподвижному газу, по трубе движется т.н. контактная поверхность, отделяющая газ, поступивший из ресивера и газ, ранее находившийся в трубе. В зависимости от отношения давлений на диафрагме возможны режимы течения как без, так и с запирающим потоком на входе в канал.

Ситуация, когда реализуется режим течения без запирающего потока на входе, наиболее проста в описании. По каналу распространяется ударная волна. Из-за влияния пограничного слоя ее скорость распространения и амплитуда уменьшаются по мере продвижения по трубе. При достижении ударной волной выходной границы происходит ее отражение в виде волны разрежения. Рассмотрение ситуации с распространением

волны разрежения от выходной границы вверх по потоку подпадает под вышерассмотренный случай расположения диафрагмы на выходе из канала.

Ситуация, когда реализуется режим течения с запираемостью потока на входе, более сложна в разложении на элементарные процессы. В общем случае распространение интенсивной ударной волны приводит к формированию спутного потока с трансзвуковой скоростью движения. Режим запираемости газа на входе в трубу приводит к тому, что значения функций на входе в канал полностью детерминированы состоянием газа в ресивере. При этом значение давления в канале, после прохождения ударной волны, как правило, существенно ниже давления в ресивере. Указанная разность давлений (давление на входе в трубу и давление в трубе) приводит к нестационарному течению газа. Происходит формирование высоких градиентов давления, скорости потока и температуры. Локальные значения чисел Маха могут существенно превышать единицу.

Структурные изменения потока происходят и на входе в канал. Обусловлено это образованием пограничного слоя на стенках трубы. Толщина пограничного слоя на стенках трубы неодинакова. Достаточно тонкий пограничный слой на входе в трубу, т.к. на этом участке он достиг своего стационарного состояния (подразумевается, что пограничный слой начинается от входной границы). Другая точка, где толщина пограничного слоя равна нулю, совпадает с распространяющейся по трубе ударной волной. Между этими точками пограничный слой продолжает формироваться (увеличиваться в размерах) пока не достигнет в каждой точке трубы своего стационарного состояния. Формирующийся пограничный слой изменяет пропускную способность трубы. Поэтому, автоматически запираемость потока будет происходить на участке, где возникает текущая минимальная площадь внутри трубы. При этом участки трубы, из-за образования пограничного слоя, будут сопоставимы с соплом Лавала. В результате, из трубы вслед за ударной волной, инициированной разрывом диафрагмы, происходит истечение сверхзвукового спутного потока.

Сверхзвуковое истечение газа требует соответствующего задания граничных условий на выходной границе, устраняющих влияние параметров газа вверх по потоку. В момент времени, когда минимальная площадь внутри трубы достигнет выходной границы, число Маха потока на выходной границе снижается до единицы. В этот момент значение противодавления выбирается как максимум из возможных двух значений: по формуле (18) и заданного значения давления в резервуаре. В зависимости от выбранного давления реализуется либо течение с запираемостью потока, либо дозвуковой режим истечения газа в область с заданным уровнем давления. Обратим внимание, что изменение в процессе

вычислений задания граничного условия на выходной границе, в зависимости от локального значения числа Маха, продиктовано физикой протекающих процессов.

После прекращения активной фазы формирования течения, связанных с распространением акустических возмущений от проницаемых границ, наступает «медленная» фаза стабилизации положения пограничного слоя на стенках трубы. Установление динамического и температурного пограничных слоев приводит к незначительной перестройке параметров газа на входной границе и ядре потока.

### 3.3.2. Анализ результатов расчета

Расчет выполнялся на структурированной неподвижной сетке, состоящей из 40 узлов в поперечном направлении и 200 узлов в продольном направлении. Шаг интегрирования по времени составлял  $\tau = 1,0 \cdot 10^{-6}$  с.

#### 3.3.2.1. Диафрагма на выходе из канала

Для рассматриваемого варианта отношения давлений на диафрагме реализуется вариант течения с запираемостью потока на выходной границе. Нестационарный разгон газа в окрестности выходной границы трубы приводит к тому, что связь между полной температурой неподвижного газа и температурой движущегося связаны между собой соотношением (7). Как следствие, при нестационарном разгоне газа устанавливается более низкий уровень температуры и скорости звука по сравнению со стационарным разгоном газа. Поэтому для достижения на выходной границе значения числа Маха, равного единице, требуются более низкие значения скорости. Текущее противодавление на выходной границе определяется по соотношению (18) и существенно больше заданного давления в резервуаре ( $n = p_{out}/p_a \approx 12$ ).

Волна разрежения, достигнув входной границы, инициализирует квазистационарное втекание газа в трубу. При этом полные параметры в резервуаре истечения связаны с параметрами на входе в трубу при помощи соотношений (7). Значение числа Маха на входной границе определяется из соотношений (11). Новое состояние газодинамических функций на входной границе вызывает коррекцию переменных и на выходной границе.

Помимо этого, из-за формирования пограничного слоя на стенке трубы уменьшается проходное сечение на выходной границе. Уменьшение расхода в трубе вызывает уменьшение значения числа Маха на входной границе и, как следствие, приближение давления и температуры и их значениям в резервуаре истечения. По сравнению со временем протекания акустических процессов это достаточно медленный процесс, как в силу формирования пограничного слоя, так и в силу медленной передачи возмущений вверх по потоку при трансзвуковом режиме течения.

Стационарный разгон газа в резервуаре истечения и стационарный режим течения в трубе приводит к тому, что газодинамические функции в ядре течения (вне пограничного слоя) подчиняются стационарным изоэнтропическим соотношениям. Эффективная площадь трубы, с учетом толщины вытеснения из-за влияния пограничного слоя, превращает трубу в конфузورный канал, в котором реализуется трансзвуковой режим течения с запираем потока. Для рассматриваемого режима течения в резервуаре, в который осуществляется истечение газа, должна возникнуть недорасширенная струя с более высоким значением параметра нерасчетности  $n \approx 25$ .

Рассматриваемый интервал времени составляет 5 мс. На рис. 14 – рис. 18 приведены распределения переменных вдоль по трубе через 1 мс. Соответствующие моменты времени обозначены номерами 0 – 5. Картина равных значений чисел Маха к 5 мс представлена на рис. 19.

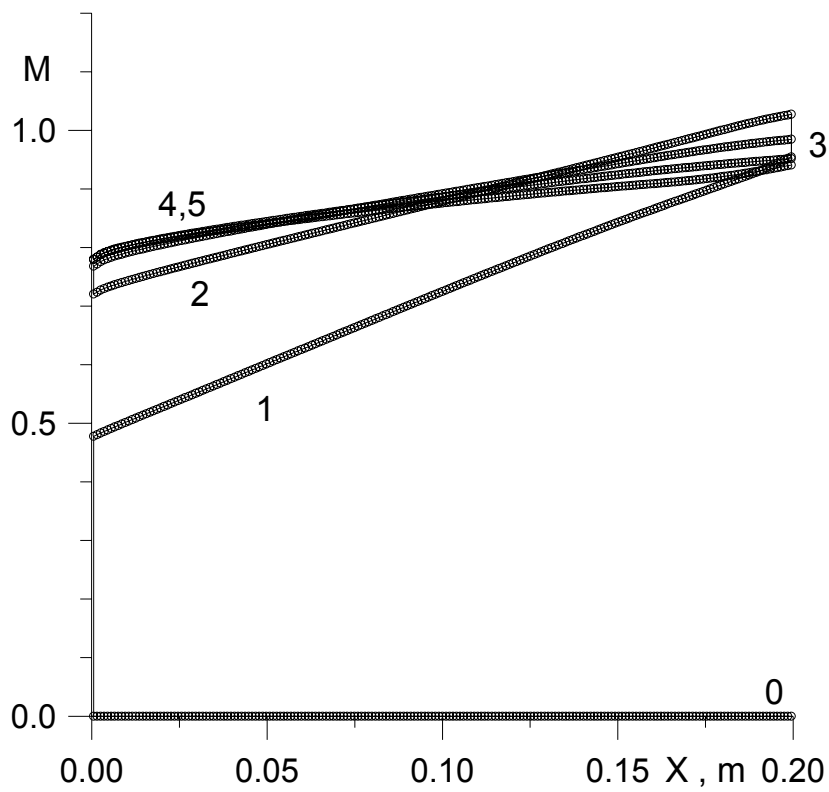


Рис. 14. Продольное распределение среднего по сечению значения числа Маха в зависимости от времени

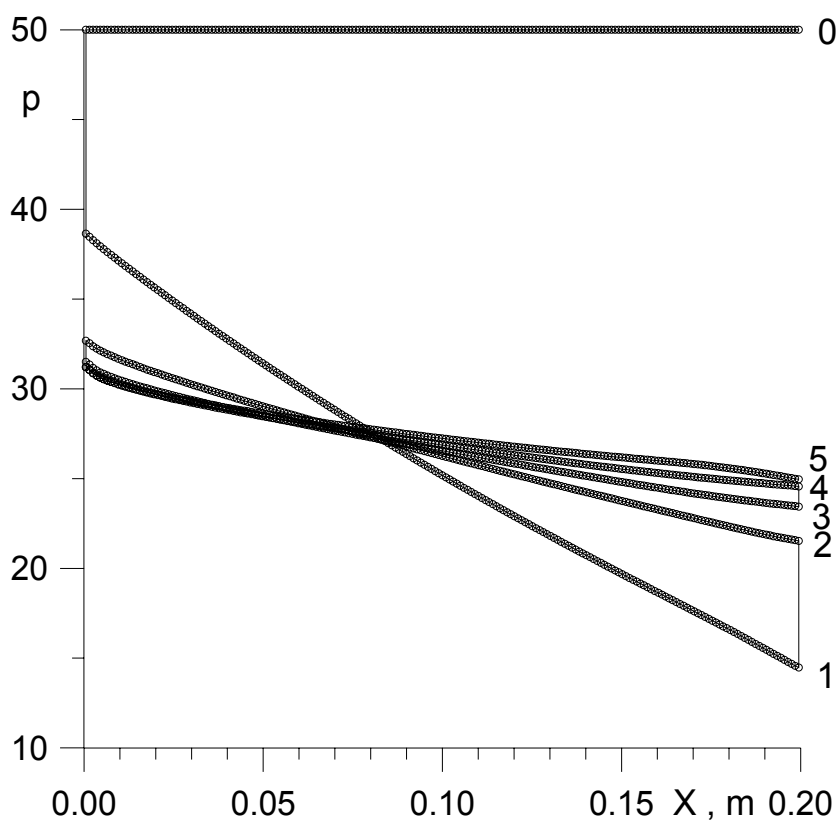


Рис. 15. Продольное распределение давления в зависимости от времени

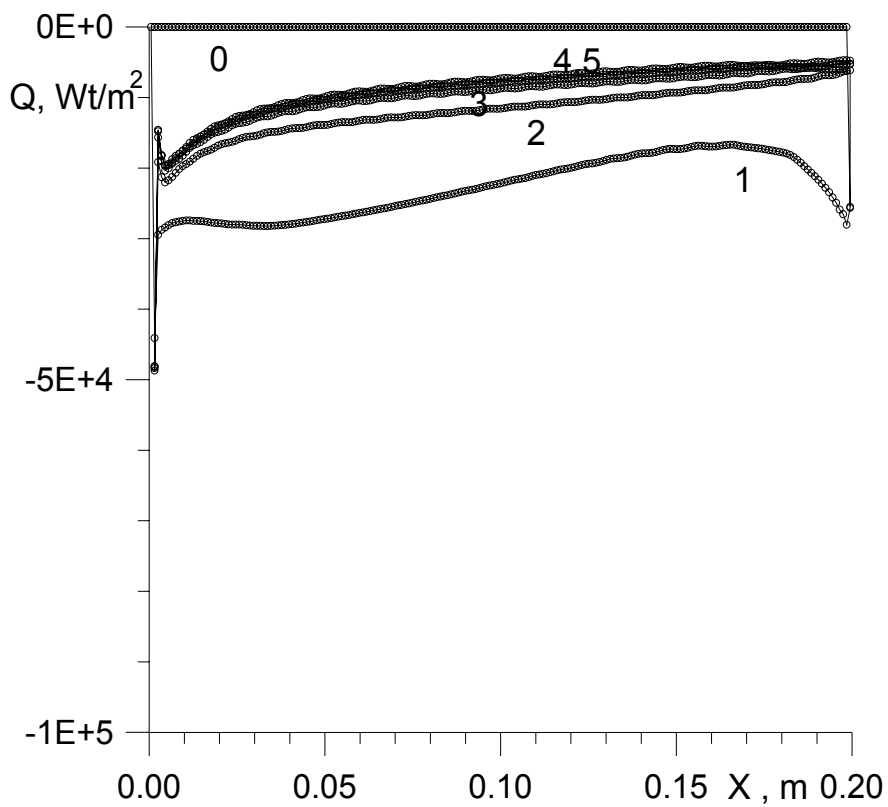


Рис. 16. Продольное распределение теплового потока в зависимости от времени

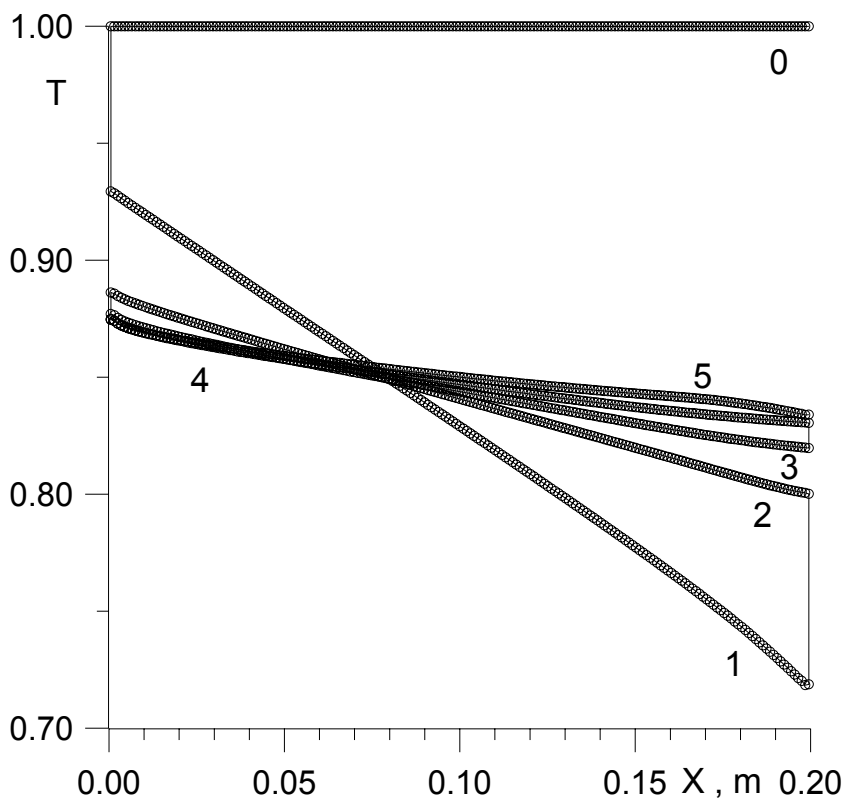


Рис. 17. Продольное распределение средней по сечению температуры в зависимости от времени

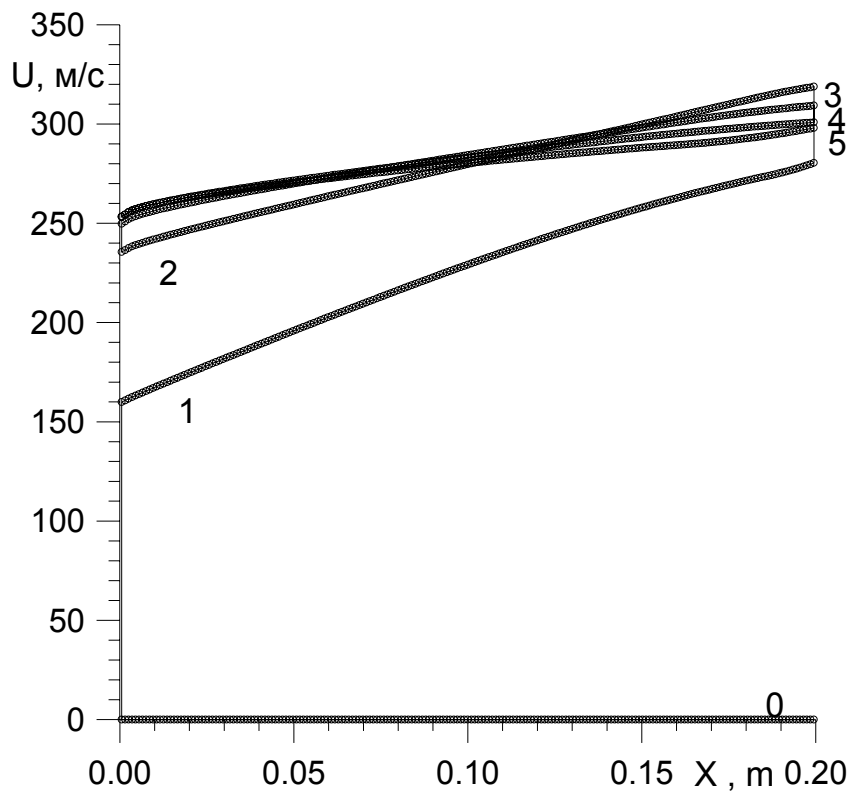


Рис. 18. Продольное распределение средней по сечению скорости в зависимости от времени

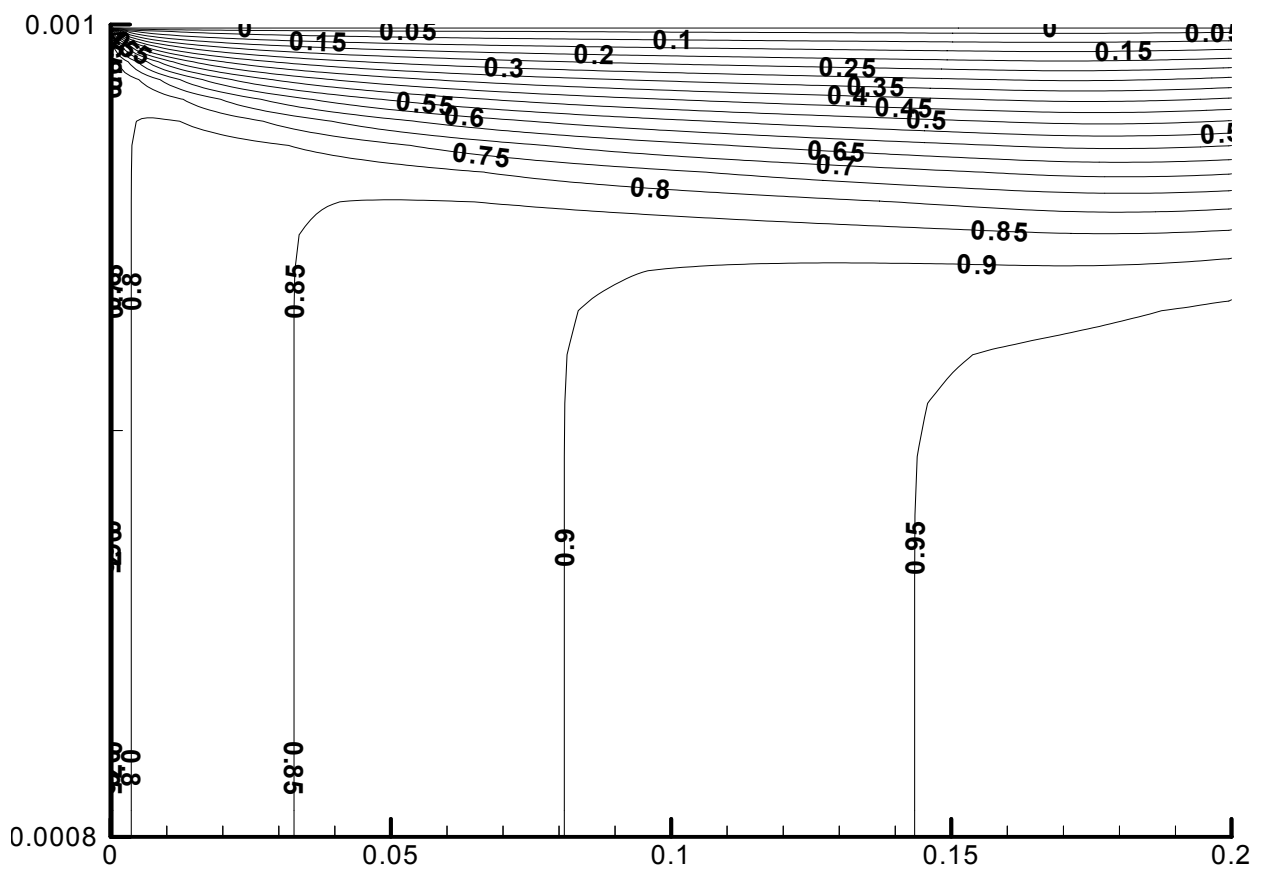


Рис. 19. Линии равных значений числа Маха

### 3.3.2.2. Диафрагма на входе в канал

Для рассматриваемого варианта отношения давлений на диафрагме реализуется вариант течения с запираемостью потока на входной границе. Таким образом, в первые моменты времени скорость движения контактной поверхности лимитирована скоростью звука. Перед контактной поверхностью распространяется ударная волна. По мере продвижения по каналу ее скорость движения и амплитуда нарастает. В итоге, для рассматриваемого набора геометрических и режимных параметров реализуется сверхзвуковое истечение при числах Маха  $\approx 2,2$ . Это привело бы к формированию в ресивере, куда происходит истечение газа нестационарной недорасширенной струи с параметром нерасчетности  $n \approx 7$ .

По мере перемещения критического сечения по трубе от входной до выходной границы происходит перестройка газодинамических переменных. Корректировка газодинамических функций охватывает всю область расчета. Так как варианты различаются только положением диафрагмы, то конечные состояния стационарного течения газа у них одинаковые. Из-за более высоких изменений значений функций в процессе решения вариант с диафрагмой на входе в канал выходит на стационарное состояние более медленно, чем вариант с диафрагмой на выходе из канала.

Проиллюстрируем начальные стадии процесса формирования течения газа после разрушения диафрагмы на входе в трубу. Весь интервал времени для стабилизации течения газа в трубе составляет более 50 мс. На рис. 20 – рис. 25 представлены распределения некоторых газодинамических переменных вдоль по трубе в интервале времени 25 мс с шагом 5 мс. Соответствующие моменты времени обозначены номерами 0 – 5. Картина изотерм и изотак в трубе к 25 мс представлена на рис. 24 и 25 соответственно.



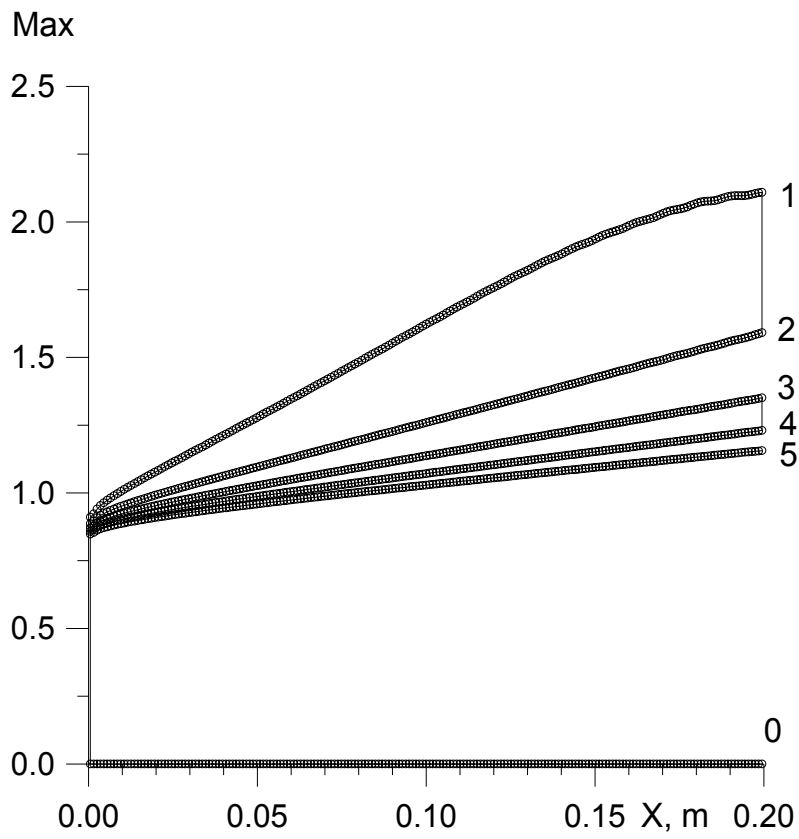


Рис. 20. Распределение числа Маха в канале в различные моменты времени

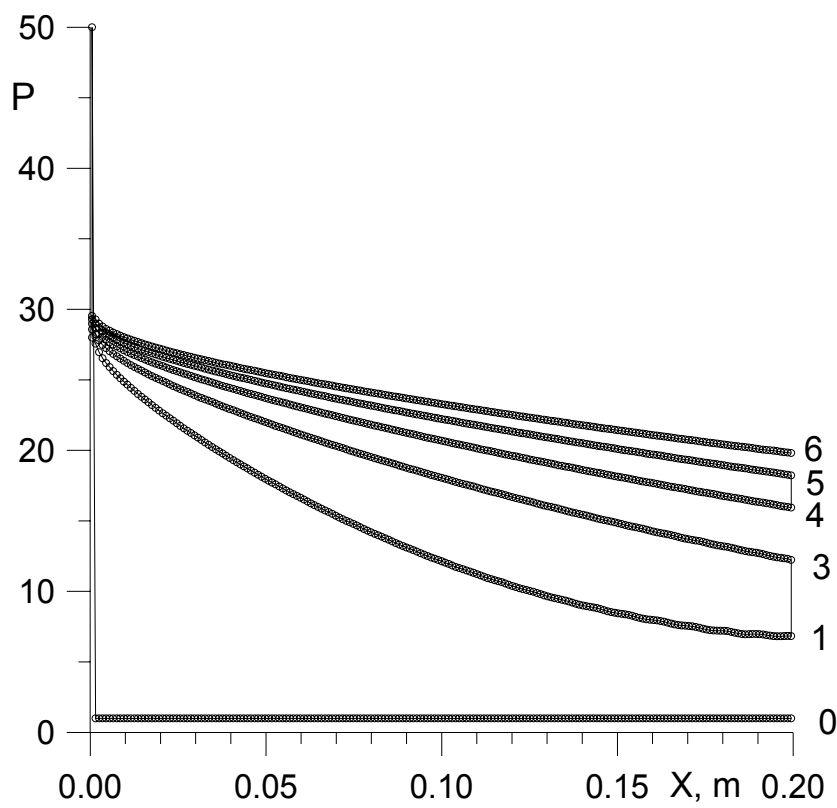


Рис. 21. Продольное распределение давления в трубе в различные моменты времени

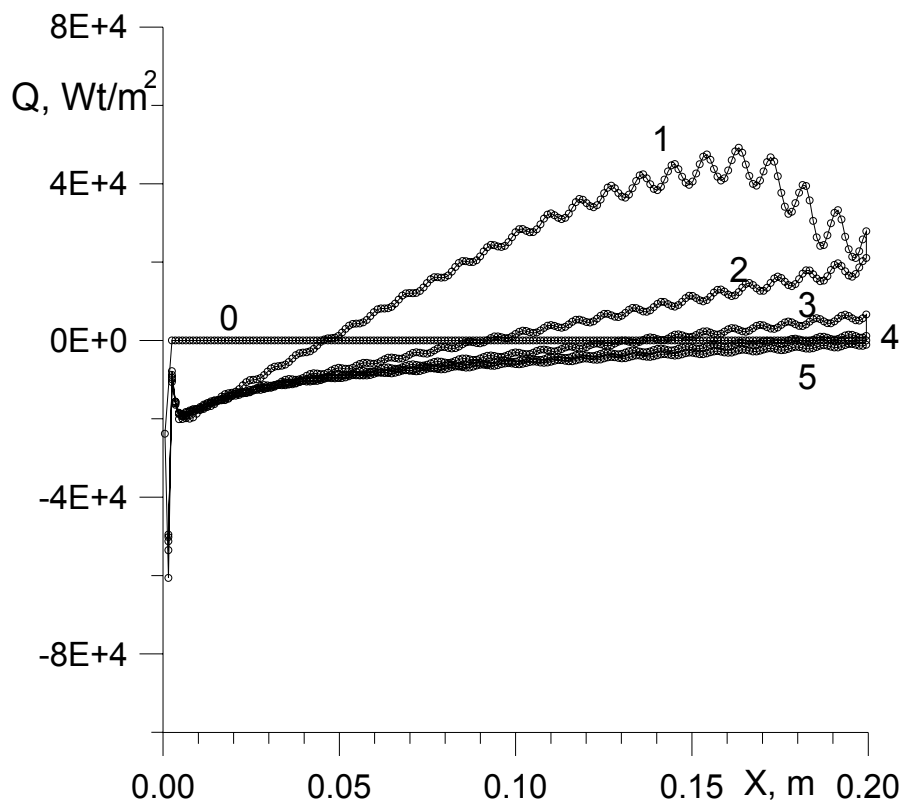


Рис. 22. Распределение удельного теплового потока по длине трубы в зависимости от времени

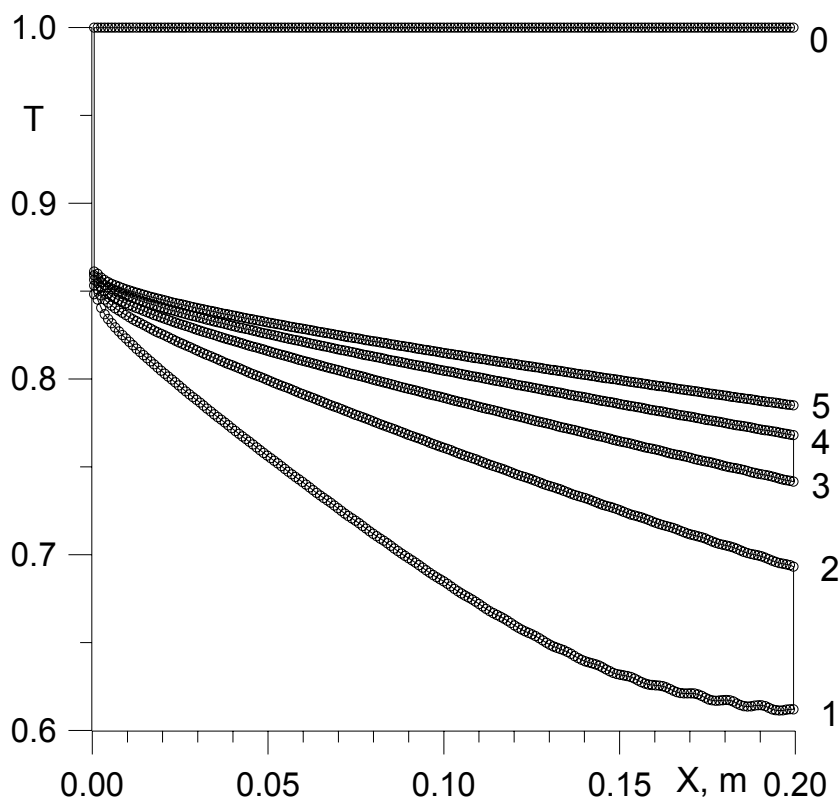


Рис. 23. Распределение по длине трубы средней по сечению температуры в зависимости от времени

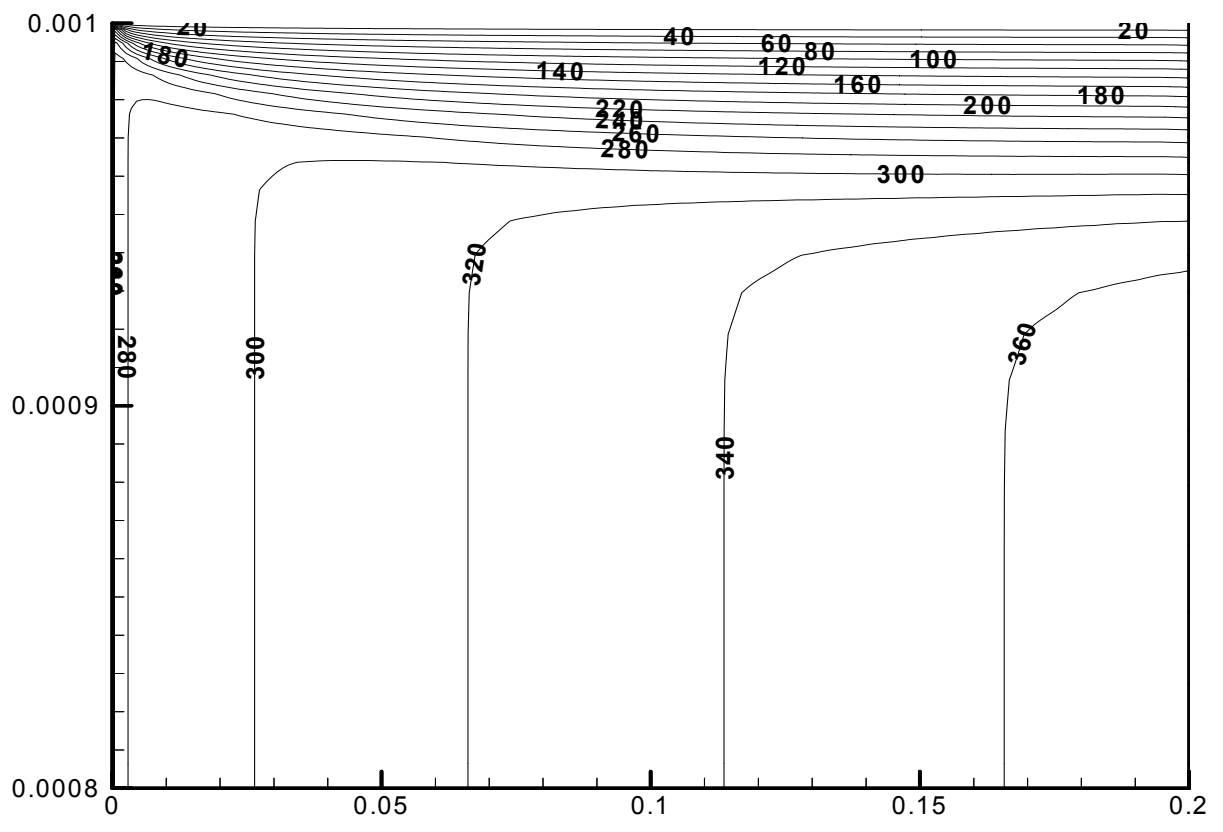


Рис. 24. Изогахи

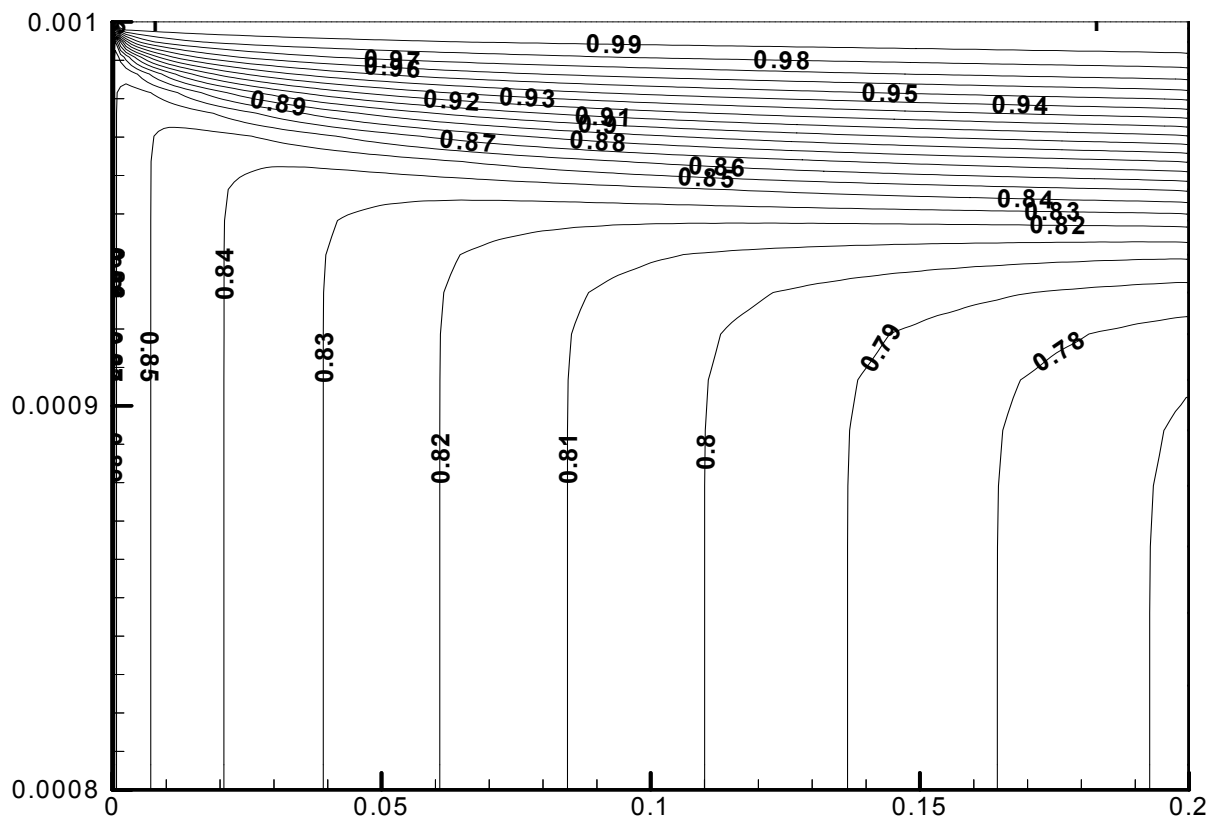


Рис. 25. Изотермы

## **Заключение.**

Рассмотрены варианты моделирования нестационарного течения газа в протяженных каналах в рамках системы уравнений узкого канала. Для правильного отображения волновых процессов в тракте канала использована дивергентная форма записи. Приведены алгоритмы численного интегрирования системы уравнений узкого канала в дивергентной форме записи. Рассмотрена постановка и численная реализация различных нестационарных граничных условий для проницаемых границ.

Описание существенно разномасштабных по времени явлений требует применения специальных алгоритмов интегрирования. Были использованы явно-неявные схемы интегрирования, согласованные с характеристическими свойствами рассматриваемой системы уравнений.

При исследовании нестационарного режима течения газа в протяженном тракте выявлено влияние на течение в ядре потока формирования динамического пограничного слоя. Исследованы режимы течения с возбуждением колебаний газа на основной частоте в полуоткрытом и замкнутом с обоих торцов каналах. Исследованы режимы истечения газа из полуоткрытой протяженной трубы с запирающим потоком. Уделено большое внимание температурным пограничным слоям и влиянию теплового потока на динамическую структуру течения.

Приведенные сведения позволяют сформировать более полное представление о волновом движении газа в протяженных каналах.

## Литература

1. **Rubin S. G.** Numerical and Physical Aspects of Aerodynamic Flows I. New York, Berlin, Heidelberg: Springer – 1981, Pp. 171 – 186.
2. **Patankar S. V. and Spalding D. B.** A calculation procedure for heat, mass and momentum transfer in three-dimensional parabolic flows // Int. J. Heat Mass Transfer. 1972. V. 15. Pp. 1787 – 1806.
3. **Бубенчиков А. М., Харламов В. Ф.** Математические модели течения и теплообмена во внутренних задачах динамики вязкого газа. Томск: Изд. Том. гос. ун-та, 1993.
4. **Егоров Ю. Э., Стрелец М. Х., Шур М. Л.** Границы применимости параболических моделей для численного исследования течений в соплах Лаваля. Приближение узкого канала. Препринт № 4. Гос. ин-т прикл. химии. Ленинград. 1991. 65 с.
5. **Лапин Ю. В., Стрелец М. Х.** Внутренние течения газовых смесей – М.: Наука, 1989. – 366 с.
6. **Гликман Б. Ф.** Математические модели пневмогидравлических систем. – М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1986. – 368с.
7. **Синглтон Р. Е, Нэш Дж. Ф.** Метод расчета нестационарного турбулентного пограничного слоя в двух- и трехмерных течениях. – Ракетная техника и космонавтика. 1974, т. 12, № 5, с.20-26.
8. **Уильямс III Дж. К.** Математическое условие отрыва нестационарного сжимаемого пограничного слоя. – Ракетная техника и космонавтика. 1980, т. 18, № 4, с.260-262.
9. **Уильямс III Дж. К., Уэнг Т. Дж.** Полуавтомодельные решения уравнений нестационарного ламинарного сжимаемого пограничного слоя. – Аэрокосмическая техника. 1985, т. 3, № 8, с.124-131.
10. **Зуев В. И.** Численное моделирование конвективного теплообмена в нестационарном пограничном слое за ударной волной, движущейся вдоль плоской поверхности. // Численное моделирование нестационарной газодинамики и МГД-течений. – 1989 – с.39-52.

11. **Царев А. Б.** Численное решение задачи о течении вблизи колеблющейся в своей плоскости пластины. // Средства и методы повышения мореходных качеств судов. – Л., 1989. – с.128-133.
12. **Мальковский В. И., Иванов В. М.** Нестационарное охлаждение пластины ламинарным потоком газа при изменении теплоподвода. // Известия вузов. Энергетика. – 1990 – № 2 – с.102-104.
13. **Wu Tzuyin, Shen Shan-Fu** A multizone time-marching technique for unsteady separating three-dimensional boundary layers and its application to the symmetry-plane solution of an impulsively started prolate spheroid. // Trans. ASME. J. Fluids Eng. – 1991. v. 113 – № 2, p.228-239.
14. **Sun M., Liu J., Wu L.** Zonal vortex method impulsively started flow around a circular cylinder. // AIAA Journal. – 1991, v. 29. – № 12 – p.2029-2030.
15. **Karant D., Rankin G. W., Sridhar K.** A finite difference calculation of forced convective heat transfer from an oscillating cylinder // Int. J. Heat and Mass Transfer – 1994 – v. 37, № 11, p.1619-1630.
16. **Ishizawa Shingo, Kasagi Shin-ichi** Theoretical analysis for unsteady boundary layer on a linearly retarded semi-infinite flat plate. // JSME Int. J.B. – 1994 – v. 37, № 4, p.795-805.
17. **Xiao Z., Adams E., Conlisk A. J.** Terminal structure of unsteady classical and interacting boundary layer. //AIAA Pap. – 1995 – № 2158, p.1-12.
18. **Попов С. П.** Нестационарный отрыв пограничного слоя с неблагоприятным градиентом давления. // М.: ВЦ РАН, 1995, 19с.
19. **Манина М. П., Поспелов В.А., Ходжиев С.** Решение прямой задачи сопла Лавалья в приближении «узкого канала» методом установления. // В сб.: Гидрогазодинамика. – Л.: 1983, с.26-30.
20. **Куликовский В. А.** Нестационарные течения запыленного газа за детонационными волнами, распространяющимися в каналах переменного сечения с учетом трения и теплообмена со стенками. // Неравновесные течения газа с физикохимическими превращениями. – М., 1989 – с.42-51.
21. **Зарянкин А. Е., Грибин В. Г., Дмитриев С. С.** О механизме возникновения отрыва потока от стенок гладких каналов. // Теплофиз. высок. температур. – 1989, т. 27 – № 5, с.913-919.
22. **Гигов В. К., Щукин Л. Н.** Гидродинамика колеблющихся потоков со сложной конфигурацией амплитуды. // Теплоэнергетика. – 1991 – № 3 с.68-71.

23. **Badcock K. J.** A numerical simulation of boundary layer effects in a shock tube. // Int. J. Numer. Meth. Fluids. – 1992, v.14 – № 10 p.1151-1171.
24. **Бубенчиков А. М., Комаровский А. В., Харламов С. Н.** Математические модели течения и теплообмена во внутренних задачах динамики вязкого газа. Томск, Том. гос. ун-т, 1993, 182с.
25. **Vasilev V. T.** Computation of separated duct flows using the boundary-layer equations. // AIAA Journal. – 1994 –v. 32, № 6, p.1191-1199.
26. **Анисимова Н. А., Булович С. В., Виколайнен В. Э.** Решение задачи сопла Лаваля в рамках системы уравнений узкого канала методом установления. Международная научно-техническая конференция "100 лет российскому автомобилю. Промышленность и высшая школа" 26-28 ноября 1996г. Россия, Москва. МАМИ,с.42-43.
27. **Булович С. В.** Решение прямой задачи сопла Лаваля в рамках системы уравнений приближения узкого канала. Международная научно-техническая конференция "100 лет российскому автомобилю. Промышленность и высшая школа" 26-28 ноября 1996г. Россия, Москва. МАМИ,с.44-45.
28. **Булович С. В., Виколайнен В. Э.** Расчет нестационарного пограничного слоя в цилиндре. Международная научно-техническая конференция “Двигатель-97” МГТУ, Москва, 1997, с.26.
29. **Bulovich S. V., Vikolainen V. E.** Decision of a direct problem nozzle Laval within the framework of a system of equations of a slender channel. GAMMA Jahrestagung 1997 an der Universitat Regensburgvom 24. bis 27. Marz 1997.
30. **Булович С. В., Виколайнен В. Э.** Интегрирование нестационарных уравнений узкого канала. Фундаментальные исследования в технических университетах. Материалы научно-технической конференции. 25-26 июня 1998г. Санкт-Петербург.
31. **Bulovich S. V., Vikolainen V. E., Molchanova N. V.** Mathematical Modeling of the Channel Openin. MOTAUTO'98 Proceeding Volume I Sofia-Vitosha, 14-16 October 1998.
32. **Bulovich S. V., Vikolainen V. E., Molchanova N. V.** An Algorithm of an Integration of System of Nonstationary Equations of Narrow Groove. MOTAUTO'98 Proceeding Volume I Sofia-Vitosha, 14-16 October 1998.
33. **Булович С. В.** Численное интегрирование нестационарной системы уравнений Прандтля. Вестник ИВТОБ №2, СПб, 2004, приложение к журналу «Клио». Стр. 86-93.

- 34. Булович С. В., Виколайнен В. Э., Полковникова Л. С.** Нестационарные вязкие течения газа в протяженных заглушенных каналах. Вестник ИВТОБ №2, СПб, 2004, приложение к журналу «Клио». Стр. 102-109.
- 35. Булович С. В., Виколайнен В. Э., Петров Р. Л., Полковникова Л. С.** Численное исследование формирования ударно-волновой структуры движения газа в закрытой трубе, вызванного гармоническими колебаниями поршня. Тезисы докладов XX юбилейного международного семинара по струйным, отрывным и нестационарным течениям, Санкт-Петербург, 1-3 июля 2004 г. СПб.: СПб ГУТД, 2004. с. 47-48.
- 36. Булович С. В.** Алгоритмы численного интегрирования нестационарной системы уравнений узкого канала. Формирование технической политики инновационных наукоемких технологий. Материалы научно-практической конференции и школы-семинара. 17-20 июня 2004. СПб.: Изд-во Политехн. Ун-та, 2004. стр. 188-207.
- 37. Булович С. В., Петров Р. Л.** Пневматический разгон поршня в стволе. Письма в Журнал Технической Физики, 2005, том 31, выпуск 16. Стр. 12-18.
- 38. Ильгамов М. А., Гильманов А. Н.** Неотражающие условия на границах расчетной области – М.: Физматлит, 2003 – 238 с.
- 39. Лойцянский Л. Г.** Механика жидкости и газа. – Глав. ред. физ.-мат. лит. изд. «Наука, М.: 1973. – 849 с.
- 40. Годунов С. К., Забродин А. В., Иванов М. Я. и др.** Численное решение многомерных задач газовой динамики. Глав. ред. физ.-мат. лит. Изд-ва «Наука», М., 1976, 400с.
- 41. Булович С. В., Миклухо Е. О.** Исследование неявных схем типа Годунова повышенного порядка точности. Формирование технической политики инновационных наукоемких технологий. Материалы научно-практической конференции и школы семинара 14-16 июня 2001г. Том II. СПб.: Изд-во СПбГТУ, 2001. 172с, стр. 44-55.