

ПРИМЕНЕНИЕ ДЕФОРМИРУЕМЫХ СЕТОК ДЛЯ ЧИСЛЕННОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ ТЕЧЕНИЙ В ОБЛАСТЯХ С ПОДВИЖНЫМИ ГРАНИЦАМИ

Введение

Задачи с изменяющейся геометрией расчетной области часто встречаются на практике – достаточно упомянуть о разнообразных случаях относительного перемещения тел в потоке жидкости, об автоколебаниях плохообтекаемых тел или о деформации обтекаемых поверхностей под действием гидродинамических нагрузок. Для решения такого рода задач могут использоваться различные подходы, отличающиеся как по ограничениям на характер движения, так и по трудоемкости реализации, точности и т.п. Вот лишь некоторые из них.

Метод накладывающихся сеток, используемый также для упрощения генерации расчетных сеток в областях сложной геометрии, позволяет рассматривать произвольное движение тел в потоке жидкости. В данном подходе строится общая (как правило, неподвижная) сетка, покрывающая всю область течения, а для каждого движущегося тела строится своя сетка, которая перекрывается с общей и движется вместе с телом, сохраняя свою форму. Балансовые соотношения решаются как на общей, так и на движущихся сетках, а для стыковки решений осуществляется переинтерполяция полей с общей неподвижной сетки на движущиеся и обратно. Такого рода переинтерполяция в условиях произвольного наложения сеток различной топологии является процедурой весьма громоздкой по логике и, соответственно, сложной в реализации; кроме того, при переинтерполяции полей с одной сетки на другую может нарушаться консервативность балансовых соотношений. Среди коммерческих *CFD* пакетов, активно использующих данный подход, можно упомянуть *CFD-Fastran*.

Технология адаптирующихся сеток также может применяться для анализа течений в областях с изменяющейся геометрией. В данном подходе на каждом шаге по времени сетка полностью или частично перестраивается с учетом перемещения границ. При этом возможно изменение топологии и размерности сетки, что, как и в методе накладываемых сеток, ведет к необходимости переинтерполяции полей со старой сетки на новую. Однако основной проблемой данного подхода является автоматическая генерация новой сетки – существующие универсальные алгоритмы такого рода достаточно сложны и ориентированы на использование неструктурированных сеток, возможности управления качеством получаемой сетки крайне ограничены, а использование заранее подготовленного набора сеток значительно сужает класс решаемых задач. Данный подход реализован, в частности, во всемирно известных *CFD* пакетах *CFX* и *STAR-CD*.

Метод деформируемых сеток идеально подходит для расчета течения жидкости в условиях сравнительно небольшого перемещения (деформации) границ расчетной области. В этом методе изначально созданная сетка деформируется в соответствии с движением границ, не меняя своей структуры и размерности. В отличие от ранее упомянутых подходов, метод довольно прост алгоритмически – движение сетки приводит лишь к небольшой модификации конвективных слагаемых в уравнениях гидродинамики, что облегчает внедрение данного подхода в существующий программный комплекс. Недостатком метода фактически является лишь невозможность рассмотрения больших деформаций, приводящих к ухудшению качества деформированной сетки, что, как правило, не является серьезным ограничением при решении широкого круга задач о колебаниях тел в потоке и/или их деформации под действием гидродинамических нагрузок. Опция расчета на деформируемой сетке доступна во многих современных *CFD* пакетах (*CFX*, *STAR-CD*, *CFD-Ace*, *CFD-Fastran* и

др.), что служит косвенным свидетельством простоты и эффективности данного подхода.

Отмеченные достоинства метода деформируемых сеток послужили основанием к тому, что именно этот подход был выбран авторами для внедрения в гидродинамический программный комплекс широкого профиля *SINF*, разрабатываемый на кафедре гидроаэродинамики СПбГПУ уже более 10 лет. Пакет *SINF* позволяет рассчитывать течение жидкости и газа в областях сложной геометрии, поддерживает моделирование сопряженного тепло- и массообмена, включает широкий спектр моделей турбулентности. Пакет ориентирован на использование блочно-структурированных сеток; дискретизация пространственных операторов выполнена со вторым порядком точности по методу конечного объема; значения искомым величин определяются в центрах расчетных ячеек. Более полные данные о возможностях и апробации программного комплекса *SINF*, а также о реализованных в нем алгоритмах можно найти, например, в [1]. В рамках настоящей работы пакет *SINF* был доработан (при сохранении всех прочих возможностей) для проведения расчетов на деформируемых сетках с использованием оригинального алгоритма деформации блочно-структурированной сетки.

Ниже дано детальное описание метода деформируемых сеток и особенностей его программной реализации в пакете *SINF*. В качестве примера применения данного метода рассмотрена задача о поперечных автоколебаниях цилиндра в однородном потоке.

Метод деформируемых сеток

Основные идеи метода деформируемых сеток можно рассмотреть на примере «стандартного» уравнения баланса некой величины ϕ в произвольном объеме Ω , ограниченном поверхностью S с внешней нормалью \vec{n} :

$$\int_{\Omega} \frac{\partial \rho \phi}{\partial t} d\Omega + \int_S \rho \phi \vec{V} \cdot \vec{n} dS = \int_{\Omega} Q d\Omega - \int_S \alpha \nabla \phi \cdot \vec{n} dS \quad (1)$$

Здесь ρ – плотность среды, \vec{V} – вектор скорости, Q – плотность распределения объемных источников, α – коэффициент диффузии. В качестве ϕ может фигурировать, например, внутренняя энергия текущей среды, концентрация примеси, кинетическая энергия турбулентности и т.д. Интегральная формулировка (1) используется при дискретизации уравнений по методу конечного объема; при этом под Ω подразумевается объем ячейки расчетной сетки. В пределе, при стягивании объема в точку, уравнение (1) приводится к «обычной» дифференциальной форме $\partial \rho \phi / \partial t + \nabla \cdot \vec{q} = Q$ на основании формулы Остроградского-Гаусса.

Если объем Ω движется, первое слагаемое в уравнении (1) можно преобразовать к более удобному для аппроксимации виду, используя трехмерный аналог правила Лейбница для производной от интеграла с переменными пределами:

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega} \Phi d\Omega = \int_{\Omega} \frac{\partial \Phi}{\partial t} d\Omega + \int_S \Phi \frac{d\vec{r}_b}{dt} \cdot \vec{n} dS = \int_{\Omega} \frac{\partial \Phi}{\partial t} d\Omega + \int_S \Phi \vec{v}_b \cdot \vec{n} dS \quad (2)$$

Здесь \vec{r}_b – радиус-вектор точки на поверхности объёма, а $\vec{v}_b = d\vec{r}_b / dt$ – местная скорость движения поверхности. Подстановка (2) в (1) дает искомое уравнение баланса величины ϕ в произвольном движущемся (деформирующемся) объеме Ω , который в данный момент времени ограничен контрольной поверхностью S :

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega} \rho \phi d\Omega + \int_S \rho (\vec{V} - \vec{v}_b) \phi \cdot \vec{n} dS = \int_{\Omega} Q d\Omega - \int_S \alpha \nabla \phi \cdot \vec{n} dS \quad (3)$$

При $\vec{v}_b = 0$ уравнение (3) переходит в соответствующее уравнение для неподвижного объема; в случае $\vec{v}_b = \vec{V}$ (объем движется вместе с жидкостью) по-

лучаем уравнение в форме Лагранжа. Учитывая произвольность движения объема Ω , запись балансовых уравнений в виде (3) часто называют *ALE* (Arbitrary Lagrangian-Eulerian) формулировкой.

Формально, как следует из сравнения уравнений (1) и (3), для внедрения расчета на деформируемой сетке в существующий программный комплекс требуется лишь слегка изменить вычисление конвективных потоков и (или) производной по времени. Нетривиальным моментом при дискретизации уравнения (3) является необходимость выполнения кинематического тождества (4), непосредственно следующего из (2) при $\Phi = 1$. Нарушение данного требования приводит к появлению в уравнениях баланса массы, импульса и др. паразитных источников, обусловленных деформацией сетки и, соответственно, к искажению численного решения (см. например [2]).

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega} d\Omega = \int_S \vec{v}_b \cdot \vec{n} dS \quad (4)$$

Фактически, соотношение (4) накладывает ограничение на способ вычисления скорости движения сетки v_b , который должен быть согласован со способом аппроксимации поверхностных интегралов и производных по времени в уравнении (3); наиболее очевидный подход – прямое дифференцирование координат сетки – в данном случае неприемлем.

При использовании простейших квадратурных формул и неявной трехслойной схемы второго порядка точности по времени, дискретный аналог соотношения (4) для ячейки расчетной сетки может быть записан в следующем виде:

$$\frac{3\Delta\Omega^m - \Delta\Omega^{m-1}}{2\Delta t} = \sum_c (\vec{v}_b \cdot \vec{n})_c S_c \quad (5)$$

Здесь c – индекс суммирования по всем граням ячейки, S_c – площадь грани, $\Delta\Omega^m \equiv \Omega^m - \Omega^{m-1}$ – приращение объема ячейки при переходе с временного слоя

$m-1$ на слой m . Из геометрических соображений ясно, что приращение объема ячейки равно алгебраической сумме объемов, ометаемых гранями ячейки:

$$\Delta\Omega^m = \sum_c \delta\Omega_c^m \quad (6)$$

Подстановка последнего равенства в уравнение (5) приводит к соотношению (7), которое и определяет «правильный» способ вычисления скорости движения грани v_b при аппроксимации уравнения (3).

$$(\vec{v}_b \cdot \vec{n})_c S_c = \frac{3\delta\Omega_c^m - \delta\Omega_c^{m-1}}{2\Delta t} \quad (7)$$

Аналогично, при использовании схемы первого порядка точности по времени ($d\Omega/dt \approx \Delta\Omega^m/\Delta t$) получим для скорости движения грани выражение (7a):

$$(\vec{v}_b \cdot \vec{n})_c S_c = \frac{\delta\Omega_c^m}{\Delta t} \quad (7a)$$

Подчеркнем, что тождество (4) и вытекающие из него соотношения (7) регламентируют способ вычисления нормальной составляющей скорости движения сетки на грани ячейки. Касательная составляющая скорости, которая фактически используется лишь в граничных условиях на движущейся поверхности, может быть определена простым дифференцированием координат сетки.

Алгоритм деформации сетки

Необходимым элементом расчета на деформируемой сетке является алгоритм деформации сетки в соответствии с движением границ расчетной области. В частности, находят применение модели, в которых сетка трактуется как некая упругая система (см. например [3]). Подобные подходы достаточно универсальны, но требуют дополнительных итераций для отыскания текущего «равновесного» состояния сетки. В настоящей работе разработан более про-

стой и эффективный алгоритм, ориентированный на использование блочно-структурированных сеток в пакете *SINF*.

Разработанный алгоритм деформации исходит из того, что в рассматриваемом блоке определен сегмент сетки, координаты всех узлов которого в данный момент времени известны. Сегмент может покрывать весь блок, занимать некоторую область внутри блока или располагаться непосредственно на его поверхности; возможно также задание сразу двух сегментов, расположенных на противоположных гранях блока, что необходимо для деформации многоблочных сеток.

Деформация сетки осуществляется путем поочередного смещения узлов на сеточных линиях, идущих от выделенного сегмента к границам блока. Для каждой сеточной линии вектор смещения задается разностью текущего и исходного положения соответствующего узла на границе сегмента и линейно уменьшается до нуля по мере приближения к границе блока (см. рис. 1). После обработки всех сеточных линий одного индексного направления процедура повторяется для линий другого направления, причем узлы сетки, координаты которых были определены на предыдущем этапе, включаются в состав сегмента, что обеспечивает последовательное смещение всех узлов сетки.

Рис.1

Нетрудно видеть, что в рамках описанного алгоритма текущие координаты узлов сетки определяются их исходным положением и заданным смещением выделенного сегмента; промежуточные положения сетки никак не сказываются на конечном результате. Алгоритм чрезвычайно экономичен – смещение узлов рассчитывается без итераций, по простым алгебраическим формулам, причем каждый узел смещается только один раз. Несмотря на то, что вычисления в каждом блоке выполняются независимо, алгоритм обеспечивает совместность деформации смежной границы соприкасающихся блоков (при соблюдении достаточно очевидных и необременительных правил стыковки). Достоинством алгоритма является также возможность задания движения не только на границе

блока, но и в некотором примыкающем объеме, что позволяет, в частности, избежать ухудшения качества сетки вблизи поверхности движущегося тела. К недостаткам метода можно отнести отсутствие контроля за качеством получаемой сетки.

Тестирование программы

Для проверки блока подпрограмм, ответственных за расчёт течения на движущихся сетках в доработанной версии программного комплекса *SINF*, был решен ряд тестовых задач. В качестве первой серии тестов были рассмотрены стационарные потоки (установившееся течение в канале, до- и сверхзвуковое течение в сопле, неизотермическое течение в каверне с движущейся крышкой и др.), которые, однако, рассчитывались как нестационарные из-за искусственной деформации сетки внутри расчетной области. При этом использовались схемы как первого, так и второго порядка точности по времени, а также различные опции численной диссипации и разные виды стыковки блоков. Во всех случаях возмущения, вносимые в решение движением сетки, не превышали погрешностей аппроксимации.

В качестве второго теста была выбрана задача о внезапном приведении в движение тела в безграничной жидкости (рассматривалось поперечное обтекание цилиндра и шара). Задача решалась в двух математически эквивалентных постановках – в абсолютной и в относительной системе отсчета. В первом случае тело движется с постоянной скоростью в изначально покоившейся жидкости (при этом расчетная сетка деформируется в соответствии с движением тела). Во втором – тело неподвижно (сетка фиксирована), а вся жидкость начинает движение с заданной скоростью. Сопоставление полученных нестационарных решений проводилось как по параметрам потока в точках мониторинга, так и по интегральным характеристикам – гидродинамической нагрузке на тело, времени возникновения отрыва и др.

Расчет автоколебаний цилиндра

В качестве примера применения деформируемых сеток для моделирования течений в областях с подвижными границами была рассмотрена задача о поперечных автоколебаниях упруго закрепленного цилиндра в однородном потоке (см. рис. 2). Источником колебаний цилиндра является периодическое изменение подъемной силы, обусловленное попеременным срывом вихрей то с одной стороны цилиндра то с другой. Если частота схода вихрей близка к частоте собственных колебаний цилиндра, наблюдается резонансное увеличение амплитуды колебаний, что приводит к синхронизации частоты схода вихрей с частотой собственных колебаний цилиндра (т. наз. захват частоты). При этом возможен гистерезис, т.к. синхронизация схода вихрей происходит лишь при достаточно большой амплитуде колебаний цилиндра.

При использовании масштабов U и D , безразмерное уравнение движения цилиндра можно записать в виде (8). Таким образом, помимо гидродинамического критерия – числа Рейнольдса $Re=UD/\nu$ – задача характеризуется относительной массой цилиндра m^* , коэффициентом затухания колебаний ζ и относительной скоростью потока U^* .

$$\frac{d^2 y}{dt^2} + \frac{4\pi\zeta}{U^*} \frac{dy}{dt} + \frac{4\pi^2 y}{(U^*)^2} = \frac{2\pi C_y}{m^*}, \quad C_y = \frac{2F_y}{\rho U^2 DL} \quad (8)$$
$$m^* = \frac{4m}{\pi \rho D^2 L}, \quad \zeta = \frac{C}{2\sqrt{mK}}, \quad U^* = 2\pi \frac{U}{D} \sqrt{\frac{m}{K}}$$

Поскольку подъемная сила F_y определяется из расчета обтекания, которое в свою очередь зависит от движения цилиндра, уравнение (8) должно интегрироваться совместно с уравнениями гидродинамики. В связи с этим программный комплекс *SINF* был доработан применительно к условиям рассматриваемой задачи; для аппроксимации уравнения (8) использовалась центральная схема второго порядка точности.

Расчеты были выполнены для условий проведения экспериментов [4] и [5], отличающихся как параметрами подвески цилиндра, так и режимом течения. В частности, в опытах [4] исследовались колебания цилиндра диаметром $D=1.6$ мм в канале с водой. Число Рейнольдса изменялось от 90 до 150 в зависимости от скорости потока ($U^*=5-8$), что отвечает плоскому ламинарному течению в следе за цилиндром. Относительная масса цилиндра (включая массу подвески) составляла $m^*=149$, коэффициент затухания $\zeta=1.2 \cdot 10^{-3}$.

Рис.3

Рис.3 демонстрирует типичную эволюцию колебаний цилиндра; для наглядности показаны результаты расчета с уменьшенной массой цилиндра (соответственно, в несколько раз сократилось время переходного процесса). При небольшой амплитуде колебаний отчетливо видны низкочастотные биения, обусловленные отличием частоты схода вихрей от частоты собственных колебаний цилиндра. После достижения некоторой пороговой амплитуды колебаний биения исчезают, что свидетельствует о синхронизации схода вихрей с движением цилиндра, т.е. о захвате частоты. Можно отметить также чрезвычайно сильное влияние колебаний цилиндра на величину подъемной силы. В представленном варианте расчет начат с решения, полученного для неподвижного цилиндра, однако для проверки наличия гистерезиса и оценки степени приближения к установившемуся режиму колебаний проводились также расчеты с заданием значительного (порядка $0.5D$) начального отклонения цилиндра от положения равновесия.

Рис.4

На рис.4 представлены итоговые данные по частоте и амплитуде установившихся колебаний цилиндра. В целом, результаты расчета неплохо согласуются с данными измерений [4]. Налицо резонансное увеличение амплитуды колебаний, сопровождаемое захватом частоты. Вне области резонанса частота схода вихрей почти такая же, как для неподвижного цилиндра. Максимум амплитуды колебаний приходится на левую границу области захвата частоты; на правой границе обнаружен небольшой гистерезис (двойственность решения

при $Re=120$). Заметим в скобках, что точность измерений не позволила авторам эксперимента [4] с уверенностью судить о наличии гистерезиса, хотя опыты проводились не только с постепенным увеличением (\rightarrow) и уменьшением (\leftarrow) скорости потока, но и с остановкой цилиндра перед каждым измерением (\triangleleft).

Вместе с тем на рис.4 можно отметить некоторое расхождение результатов. В частности, по результатам расчета максимальная амплитуда колебаний цилиндра почти на 25% ниже, чем в эксперименте, а область захвата частоты сдвинута влево (в сторону меньших Re). Обсуждение возможных причин такого расхождения, а также сравнение результатов настоящего расчета с данными других авторов дано в [6].

В эксперименте [5] цилиндр имел массу $m^*=8.63$, коэффициент затухания составлял $\zeta=1.5 \cdot 10^{-3}$. Измерения проводились в канале шириной $10D$. Число Рейнольдса изменялось от 1700 до 7000 ($U^*=3 - 12$), что отвечает ламинарному отрыву потока от поверхности цилиндра и турбулентному течению в следе. Уровень турбулентности в набегающем потоке не превышал 0.9%.

Как известно, несмотря на двумерность геометрии, турбулентное обтекание цилиндра является существенно трехмерным. Вследствие этого расчеты, выполненные в плоском приближении, не обеспечивают адекватного моделирования течения и, в частности, дают завышенную оценку силы сопротивления. В качестве иллюстрации сказанного на рис.5 представлены графики изменения во времени гидродинамической нагрузки на цилиндр, полученные в рамках $2D$ и $3D$ подходов при $Re=3000$. Видно, что двумерный расчет завышает не только среднюю силу сопротивления (примерно на 50%), но также амплитуду подъемной силы (в три раза) и частоту схода вихрей (на 15%). С другой стороны, в литературе имеются сведения о том, что колебания цилиндра способствуют двумеризации течения в следе [7], что в свою очередь дает надежду на возможность использования более экономичного $2D$ подхода при исследовании автоколебаний.

Рис.5

Для решения вопроса о применимости $2D$ подхода расчет автоколебаний цилиндра в условиях эксперимента [5] был выполнен как в двумерной, так и в трехмерной формулировке; в последнем случае размер расчетной области вдоль образующей цилиндра был равен двум диаметрам, а на торцевых границах задавались условия периодичности. В рамках двумерной постановки для моделирования турбулентности использовалась низкорейнольдсовая SST модель Ментера. С учетом сравнительно небольшого числа Рейнольдса, для экономии вычислительных ресурсов трехмерные расчеты выполнялись без модели турбулентности. Хотя использованная сетка была явно недостаточна для разрешения всех турбулентных масштабов, расчет обтекания неподвижного цилиндра показал существенно трехмерную структуру следа с большим числом «турбулентных» вихрей, что обеспечило вполне удовлетворительное согласие с экспериментальными данными по распределению давления на поверхности цилиндра и силе сопротивления, а также по частоте схода вихрей.

Рис.6

Результаты расчета автоколебаний цилиндра в условиях эксперимента [5] представлены на рис.6. Видно, что трехмерный расчет дает неплохое согласие с данными измерений как по амплитуде резонансных колебаний цилиндра, так и по ширине области захвата частоты; наибольшее расхождение имеет место вблизи левой границы области. Напротив, область захвата частоты, полученная в рамках $2D$ приближения, оказалась значительно уже измеренной. Это косвенно подтверждает отмеченный ранее факт сильного влияния колебаний цилиндра на величину подъемной силы (см. рис.3), т.к. в противном случае из-за трехкратного завышения подъемной силы в $2D$ расчете (см. рис.5) амплитуда автоколебаний была бы значительно выше, а область захвата частоты – шире.

Выводы

Использование деформируемых сеток является эффективным средством численного моделирования течений жидкости в условиях сравнительно не-

большого перемещения границ расчетной области. Метод прост в реализации и легко встраивается в существующий программный комплекс.

В рамках настоящей работы метод деформируемых сеток внедрен в современный программный комплекс *SINF* и дополнен оригинальным алгоритмом деформации блочно-структурированных сеток.

Выполнено численное моделирование поперечных автоколебаний цилиндра в потоке при ламинарном и турбулентном режиме течения в следе. Продемонстрирован эффект захвата частоты и резонансного увеличения амплитуды колебаний цилиндра. Результаты расчета сопоставлены с опытными данными.

Показано, что при турбулентном режиме течения разрешение трехмерной структуры следа с крупномасштабными вихрями является необходимым условием моделирования автоколебаний цилиндра. Решение задачи в двумерном приближении ведет к значительной недооценке области захвата частоты, хотя амплитуда резонансных колебаний близка к измеренной.

Список литературы

1. **Смирнов Е.М., Зайцев Д.К.** Метод конечных объемов в приложении к задачам гидрогазодинамики и теплообмена в областях сложной геометрии // Научно-технические ведомости, 2004, №2(36), с.70-81.
2. **Ferziger J.H., Peric M.** Computational methods for fluid dynamics. – Berlin: Springer, 1999, 389 p.
3. **Thompson J.F., Soni B.K., Weatherill N.P.** Hand Book of Grid Generation. – CRC Press, 1999, 1136 p.
4. **Anagnostopoulos P., Bearman P.W.** Response characteristics of a vortex-exited cylinder at low Reynolds numbers // Journal of Fluids and Structures, 1992, N6, pp.39-50.
5. **Govardhan R.N., Williamson C.H.K.** Modes of vortex formation and frequency response of a freely vibrating cylinder // Journal of Fluid Mechanics, 2000, N420, pp.85-130
6. **Щур Н.А., Зайцев Д.К.** Применение метода деформируемых сеток для моделирования автоколебаний цилиндра в однородном потоке // В кн.: Проблемы газодина-

мики и тепломассообмена в энергетических установках. Тр. XV школы-семинара под руководством акад. А.И. Леонтьева, Калуга, 23-27 мая 2005г. – М.: МЭИ, 2005, Т.1, 420 с., с.125-129

7. **Коорманн Г. Н.** The vortex wakes of vibrating cylinders at low Reynolds numbers // Journal of Fluid Mechanics, 1967, N27, pp.501-512

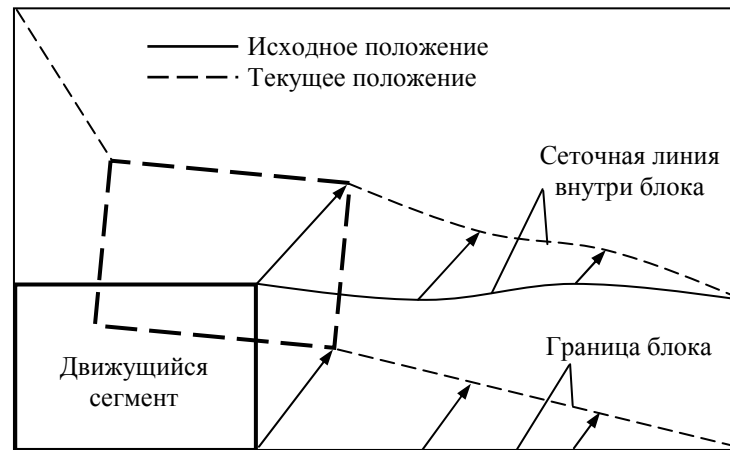


Рис.1. Деформация блока структурированной сетки при движении сегмента

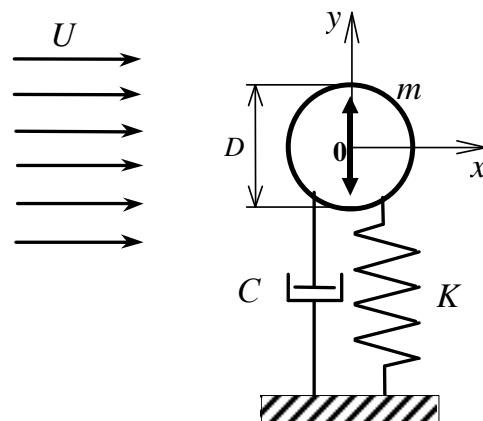


Рис.2. Схема к задаче о колебаниях цилиндра в потоке

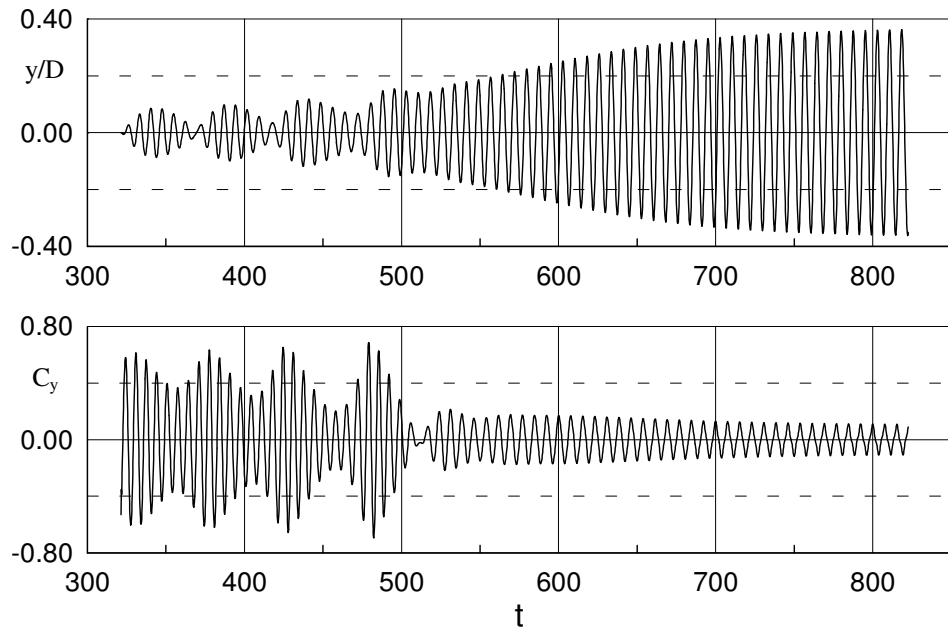


Рис.3. Развитие колебаний цилиндра ($m^*=14.2, Re=125$)

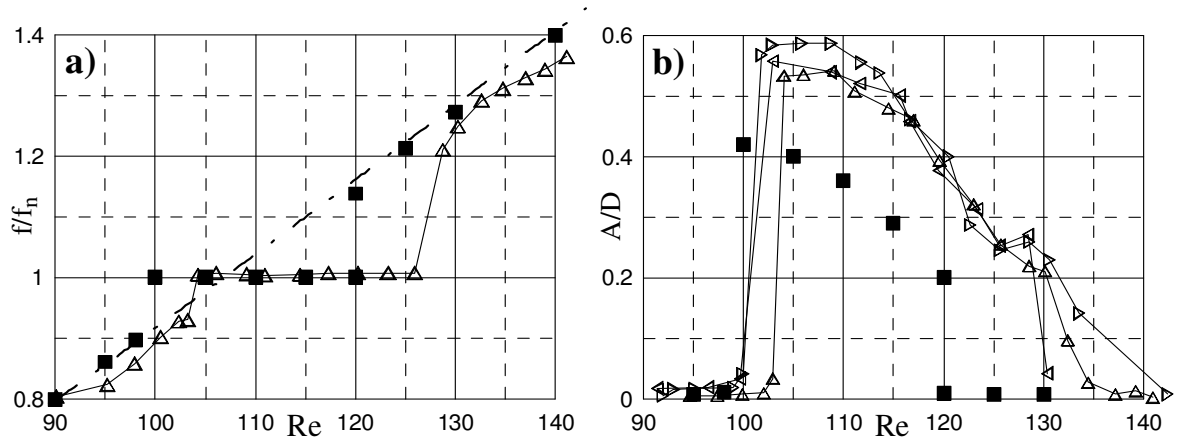


Рис.4. Зависимость частоты схода вихрей (а) и амплитуды установившихся колебаний цилиндра (b) от числа Рейнольдса: $\triangle, \triangleright, \triangleleft$ - эксперимент [4], \blacksquare - настоящий расчёт, $-\cdot-$ - неподвижный цилиндр

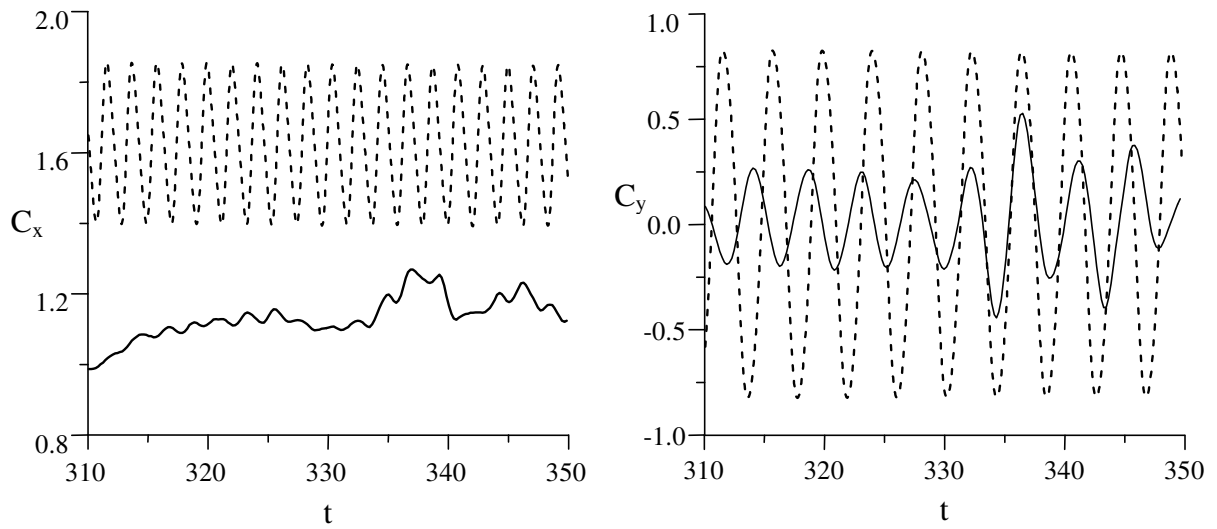


Рис.5. Эволюция коэффициента сопротивления C_x и подъемной силы C_y :
 расчет в рамках $3D$ (сплошные линии) и $2D$ (пунктир) приближения

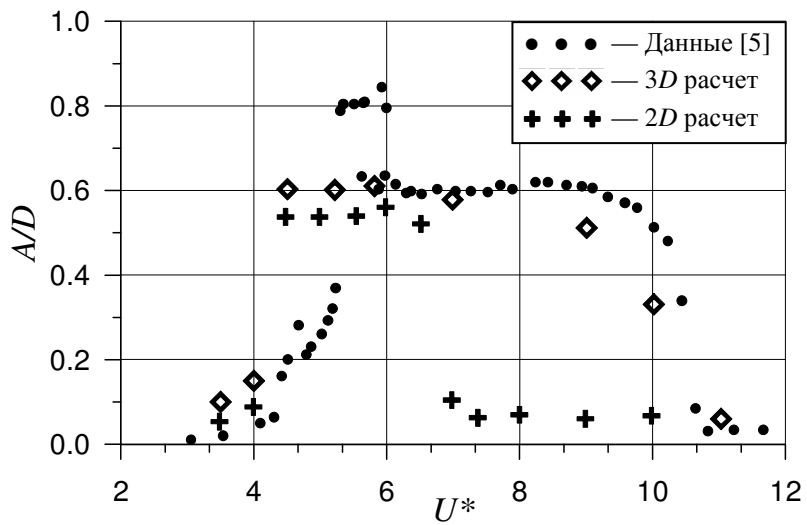


Рис.6 . Зависимость амплитуды установившихся колебаний цилиндра
 от относительной скорости потока ($m^* = 8.63, Re = 1700 - 7000$)