

**ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ТУРБУЛЕНТНОЙ КОНВЕКЦИИ
ВОЗДУХА В ПОДОГРЕВАЕМОЙ СБОКУ ПОЛОСТИ
КВАДРАТНОГО СЕЧЕНИЯ**

© 2006 г. А. Г. Абрамов, Е. М. Смирнов

Санкт-Петербургский государственный политехнический университет

Поступила в редакцию 17.12.2004 г.

При числе Рэлея 1.58×10^9 на основе трехмерной нестационарной системы уравнений выполнены расчеты турбулентной статистически двухмерной конвекции воздуха в замкнутой полости с нагретыми до разных температур боковыми стенками. Для моделирования турбулентности используется уравнение переноса кинетической энергии турбулентного движения с различным способом вычисления скорости диссипации вблизи и вдали от стенок. Проведено сопоставление результатов расчетов с известными данными экспериментальных и численных исследований других авторов. Обсуждаются возможности используемого подхода для предсказания осредненных характеристик свободной конвекции.

ВВЕДЕНИЕ

Разработка методов расчета турбулентной естественной конвекции в подогреваемых сбоку полостях по-прежнему остается актуальной задачей как для фундаментальных исследований, так и для практических приложений. До недавнего времени численные исследования данной проблемы проводились на основе осредненных уравнений Навье–Стокса или уравнений Рейнольдса (в англоязычной литературе Reynolds–Averaged Navier–Stokes, RANS). При этом результаты расчетов существенно зависели от выбора замыкающей модели турбулентности, а приемлемое согласие с экспериментальными данными по ряду интегральных характеристик удавалось получить лишь путем специальной настройки моделей применительно к рассматриваемому классу задач.

В настоящее время для решения трехмерных нестационарных задач турбулентной конвекции используются метод прямого численного моделирования (Direct Numerical Simulation, DNS) [1, 2] и метод моделирования крупных вихрей (Large Eddy Simulation, LES) [3]. Современные возможности метода DNS с определением всех составляющих движения ограничены расчетами при относительно невысоких числах Рэлея, не превышающих величину порядка 10^8 . Метод LES по сравнению с DNS может применяться для расчетов течений с существенно большими числами Рэлея. Однако использование метода LES для расчета пристенных течений требует либо введения дополнительного “эмпиризма”, заключающегося в параметризации прилегающего к стенке слоя, либо применения сеток, приближающихся по своим характеристикам к сеткам метода DNS [4, 5].

В настоящее время большую популярность приобретают комбинированные (гибридные) подходы к моделированию турбулентности, сочетающие в себе преимущества методов LES и RANS. Наиболее значимые результаты в этой области получены на основе гибридного подхода, известного как метод моделирования “отсоединенных” вихрей (Detached Eddy Simulation, DES) [5]. Основная идея данного подхода состоит в том, что пристенные слои рассчитываются по нестационарному методу RANS, а удаленные от стенок области – по методу LES. Причем в LES для вычисления турбулентных характеристик используется та же модель турбулентности, что и для области RANS, но с переопределенным характерным масштабом длины, обеспечивающим необходимый уровень диссипации турбулентной энергии. Достаточно детальное описание результатов применения “стандартного” метода DES к расчету течений с обширными областями отрыва потока содержится в работах [6, 7]. Как правило, в рамках DES пограничный слой или большая его часть рассчитывается с помощью метода RANS, что в определяющей мере достигается структурой расчетной сетки. Напротив, в “нестандартном” методе DES, применяемом к расчетам внутренних течений [8, 9], только часть пристенного сдвигового слоя рассчитывается по RANS. Такой подход может рассматриваться как метод LES с особым способом разрешения близких к стенкам областей, что является альтернативой метода пристенных функций.

Результаты применения нестандартного метода DES, основанного на использовании одного уравнения для кинетической энергии турбулентности, к расчетам турбулентной конвекции Рэлея–Бенара в замкнутых полостях простой формы приводят

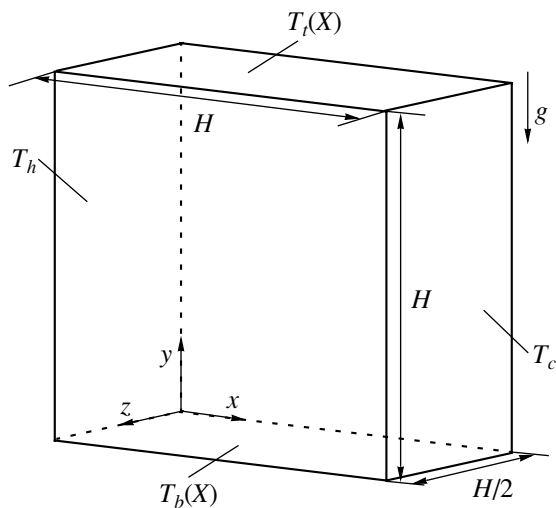


Рис. 1. Схема полости и граничные условия.

ся в недавно опубликованных работах [10, 11]. В нашей работе исследуются возможности применения того же, что в [10, 11], гибридного подхода к численному моделированию характеристик турбулентной конвекции воздуха в замкнутой полости квадратного сечения с боковыми стенками, нагретыми до разных температур.

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ И ОСНОВНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Расчеты, результаты которых представлены ниже, выполнены для условий недавно проведенного экспериментального исследования [12]. Рассматривается статистически двухмерная естественная конвекция воздуха в полости квадратного сечения с (противоположными) вертикальными стенками, температуры которых поддерживаются постоянными T_h и T_c ($T_h > T_c$), и теплопроводящими горизонтальными стенками, на которых температуры $T_b(x)$, $T_t(x)$ соответствуют измеренным в эксперименте распределениям [12] (рис. 1). Отметим, что в экспериментах использовалась полость с размерами $H \times H \times 2H$ с нетеплопроводящими торцевыми вертикальными стенками. В [12] было показано, что в средней части полости конвекция может рассматриваться как статистически двухмерная, однородная в направлении торцевых стенок.

В этой связи предположим, что осредненное во времени течение происходит в плоскости (X, Y) , при этом вертикальная ось Y направлена противоположно вектору гравитационного ускорения. Учитывая выводы работы [3], посвященной применению метода LES для решения той же задачи, примем протяженность расчетной области в однородном направлении Z равной половине высоты

полости. На граничных плоскостях $Z = 0$ и $Z = H/2$ задавались условия периодичности.

В рамках приближения Буссинеска систему безразмерных уравнений, описывающих нестационарные поля скорости, давления и температуры, представим в виде

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{V} &= 0, \\ \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} &= (\mathbf{V} \cdot \nabla) \mathbf{V} = -\nabla p^* + 2\nabla(v_{\text{eff}} \mathbf{S}) - T e_g, \\ \frac{\partial T}{\partial t} &+ (\mathbf{V} \cdot \nabla) T = \nabla(a_{\text{eff}} \nabla T). \end{aligned} \quad (1)$$

Здесь за масштабы длины, скорости и температуры принимаются соответственно высота полости H , скорость плавучести V_b и разность температур $\Delta T = T_h - T_c$. Время нормировано на отношение H/V_b . В выражение для эффективного безразмерного кинематического коэффициента вязкости $v_{\text{eff}} = \sqrt{\text{Pr}/\text{Ra}} + v_t$, входит вихревая (турбулентная) вязкость v_t , определяемая с помощью той или иной модели турбулентности. Эффективный коэффициент температуропроводности в (1) записывается следующим образом: $a_{\text{eff}} = \sqrt{\text{Pr}/\text{Ra}} + v_t/\text{Pr}_t$, где $\text{Pr}_t = 0.4$ – турбулентное число Прандтля. Как и в эксперименте [12], число Рэлея Ra полагалось равным 1.58×10^9 , а число Прандтля – $\text{Pr} = 0.71$.

МОДЕЛИРОВАНИЕ ТУРБУЛЕНТНОСТИ

Применяемый в настоящей работе гибридный подход к моделированию турбулентности основан на дифференциальной модели с одним уравнением, описывающим перенос кинетической энергии k турбулентного движения [9–11]. Как и в стандартном методе DES, модель предусматривает решение единого уравнения для k во всей расчетной области. В модели LES решается уравнение для кинетической энергии подсеточного движения, а в RANS – уравнение для полной кинетической энергии турбулентности. Уравнение для k записывается в виде

$$\frac{dk}{dt} = \frac{\partial}{\partial x_j} \left[v + v_t \frac{\partial k}{\partial x_j} \right] + P_k - \bar{\epsilon},$$

где $P_k = 2v_t \bar{S}_{ij} \bar{S}_{ij}$ – генерационный, а $\bar{\epsilon} = \max\{\epsilon^{\text{RANS}}, \epsilon^{\text{LES}}\}$ – диссипативный члены. “Переключение” между областями RANS и LES осуществляется по принципу выбора максимума из двух значений $\bar{\epsilon}$, рассчитанных двумя способами:

$$\begin{aligned} \epsilon^{\text{RANS}} &= k^{3/2}/(l F_\epsilon), \quad l = \kappa C_\mu^{-3/4} y, \\ F_\epsilon &= f(\text{Re}_y), \quad \text{Re}_y = \sqrt{k} y / \nu; \\ \epsilon^{\text{LES}} &= C_\epsilon k^{3/2} / \bar{\Delta}, \quad \bar{\Delta} = \sqrt[3]{\Delta_1 \Delta_2 \Delta_3}. \end{aligned} \quad (2)$$

Согласно соотношению (2), характерный (недемпфированный) линейный масштаб турбулентности для области RANS полагается пропорциональным расстоянию до ближайшей стенки. Турбулентная вязкость вычисляется как

$$\nu_t = C_\mu f_\mu k^2 / \bar{\epsilon}.$$

Функции F_μ, f_μ задаются такими, как в полуэмпирической модели турбулентности Вольфштейна [13]

$$\begin{aligned} F_\epsilon &= 1 - \exp(-Re_y/A_\epsilon), \\ f_\mu &= 1 - \exp(-Re_y/A_\mu). \end{aligned} \quad (3)$$

Для обеспечения непрерывного изменения турбулентной вязкости вблизи границы между областями LES и RANS демпфирующая функция f_μ в модели LES записывается в виде, отличном от (3), а именно:

$$\begin{aligned} f_\mu &= 1 - \exp[-Re_t/A_\mu (\kappa C_\mu^{-3/4} F_\epsilon(Re_y))^{-1}], \\ l_t &= \min\{lF_\epsilon \bar{\Delta}/C_\epsilon\}, \quad Re_t = \sqrt{k}l_t/\nu. \end{aligned}$$

Эмпирические постоянные модели принимались следующими: $C_\mu = 0.09$, $C_\epsilon = 0.75$, $\kappa = 0.41$, $A_\mu = 10$, $A_\epsilon = 5.1$.

ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЕ АСПЕКТЫ

При проведении расчетов использовался разрабатываемый в течение более десяти лет на кафедре гидроаэродинамики СПбГПУ программный комплекс SINF (Supersonic to INcompressible Flows), предназначенный для решения трехмерных уравнений Навье–Стокса. Этот комплекс позволяет проводить расчеты стационарных и нестационарных, до- и сверхзвуковых течений жидкости или газа, развивающихся в областях сложной геометрии [14]. Численный метод основан на применении многоблочных структурированных неравномерных сеток, согласованных с границами области течения. Пространственная дискретизация осуществляется по методу конечных объемов со вторым порядком точности. Для расчетов течений несжимаемой жидкости и низкоскоростных течений газа применяется метод искусственной сжимаемости. Продвижение по времени установления осуществляется с помощью неявных схем типа метода приближенной факторизации или релаксационных схем Гаусса–Зейделя. Для решения нестационарных задач используется неявная трехслойная схема второго порядка. В этом случае итерационный процесс по времени установления организуется на каждом слое по физическому времени. Программный комплекс SINF включает ряд высоко- и низкорейнольдсовых версий одно- и двухпараметрических дифференциальных моделей турбулентности, что позволяет проводить варианты расчетов турбулентных

течений с использованием метода RANS. В 2000–2002 гг. базовая версия SINF была дополнена возможностью описания турбулентности на основе методов LES и DES. Применяемая в расчетах на высокопроизводительных кластерных системах параллельная версия SINF предусматривает разделение расчетной области на подобласти (блоки), применение стратегии SPMD (Single Program Multiple Data) и стандарта MPI (Message Passing Interface) [15].

Расчеты конвекции в полости квадратного сечения проводились на неравномерной сетке, содержащей 157 тыс. ячеек, со сгущением узлов ко всем стенкам полости, так что безразмерная координата Y^+ центров ячеек сетки, ближайших к стенке, была меньше единицы.

Шаг по безразмерному времени принимался равным 0.05. В качестве начальных задавались нулевые значения относительных скоростей и среднее значение безразмерной температуры. Решение было получено для интервала времени в 200 временных единиц. При определении средних во времени характеристик отбрасывался начальный участок развития конвекции длительностью 50 временных единиц.

В рамках используемого способа описания турбулентной конвекции система уравнений RANS решалась от стенки до значений $Y^+ \approx 15$ ($Y \approx 0.01$) на 9–10 узлах расчетной сетки. Именно здесь наблюдались максимальные значения турбулентной вязкости, в 3–4 раза превосходящие величину молекулярной вязкости. Важно отметить, что ячейки расчетной сетки в пристенных областях имели сильно вытянутую форму, так что размер ближайших к стенке ячеек около центральных сечений полости ($X = 0.5$ и $Y = 0.5$) достигал ста. На таких сетках модели подсеточных напряжений в методе LES не могут обеспечить достаточно точного разрешения динамически важных для потока вихревых структур вблизи стенок. В данном гибридном подходе метод LES используется вдали от стенок, где пространственная анизотропия ячеек сетки не столь выражена.

РЕЗУЛЬТАТЫ РАСЧЕТОВ И ОБСУЖДЕНИЕ

Рис. 2 иллюстрирует рассчитанные (осредненные по времени и направлению Z) поля скорости и температуры в плоскости (X, Y) . Видно, что иницированное плавучестью течение в основном локализовано в сравнительно тонких пристенных слоях, при этом восходящее течение около горячей стенки “закрывается” с нисходящим вблизи холодной стенки посредством перетеканий вдоль горизонтальных стенок. Подсасывающее действие интенсивных струй, формирующихся у горизонтальных стенок, приводит к образованию вытянутых вдоль стенок рециркуляционных структур.

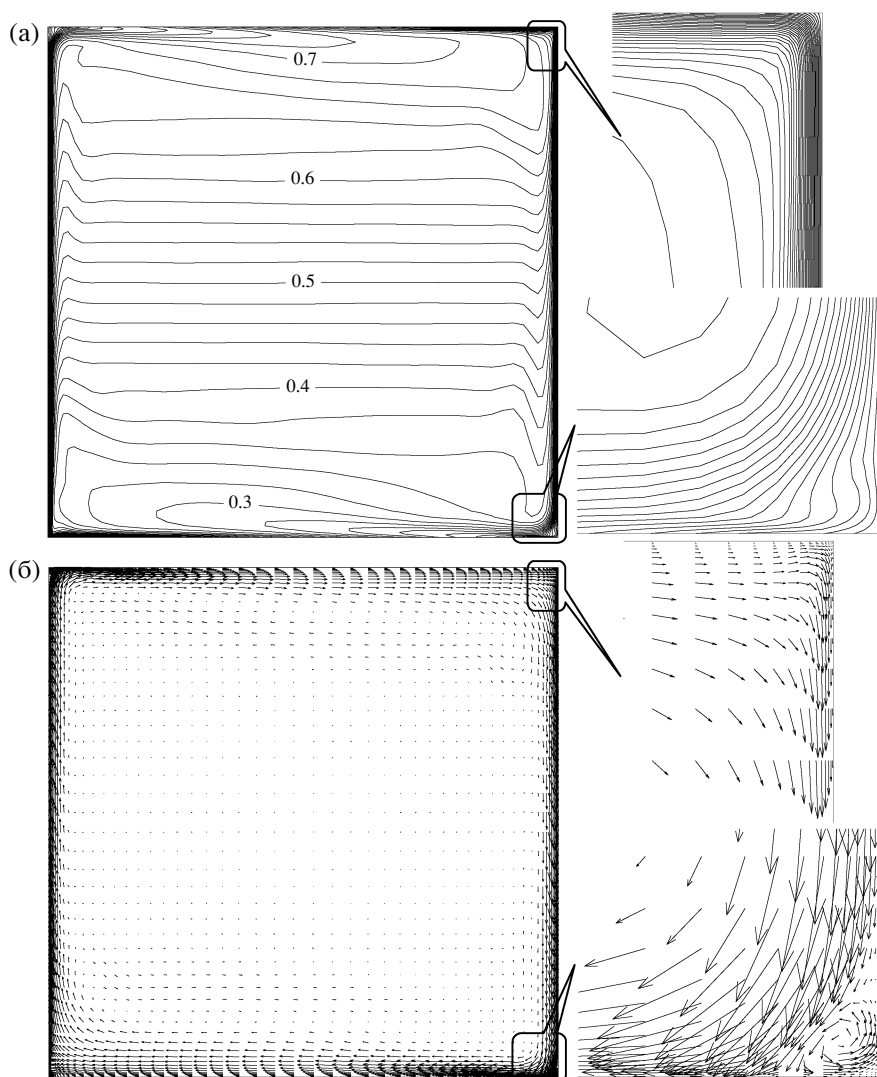


Рис. 2. Осредненные поля скорости (а) и температуры (б) в вертикальном сечении полости и фрагменты течения в углах полости.

В углу, образованном пересечением вертикальной холодной и нижней горизонтальной стенок, а также в противоположном (по диагонали) углу формируются вихри относительно слабой интенсивности. Наибольшие температурные градиенты наблюдаются у вертикальных стенок полости. В центральной части полости изотермы практически горизонтальны и распределены по сечению равномерно. Изменение температуры по высоте соответствует устойчивой стратификации, которая подавляет развитие турбулентности в ядре потока. Однако в пограничных слоях у горизонтальных теплопроводящих стенок полости имеет место неустойчивая стратификация температуры. При этом ширина неустойчиво стратифицированной области растет по мере развития пристенных струй, где происходят вертикальные выбросы жидкости в виде термиков, характерных для

конвекции Рэлея–Бенара [10, 16]. В целом поля скорости и температуры имеют отчетливо выраженную центральную симметрию. Рассчитанные поля скорости и температуры вполне удовлетворительно согласуются с результатами экспериментов [12].

На рис. 3 показано сравнение рассчитанных в нашей работе и измеренных в [12] профилей температуры и вертикальной компоненты скорости на разных расстояниях от дна полости. Из рис. 3 видно, что и в эксперименте, и в расчете толщина теплового пограничного слоя монотонно возрастает по мере развития течения у изотермических стенок. Вместе с тем толщина скоростного пограничного слоя и максимальное значение вертикальной составляющей скорости изменяются немонотонно: рост толщины в направлении среднего горизонтального сечения сменяется уменьшением по мере приближения к противоположной верхней

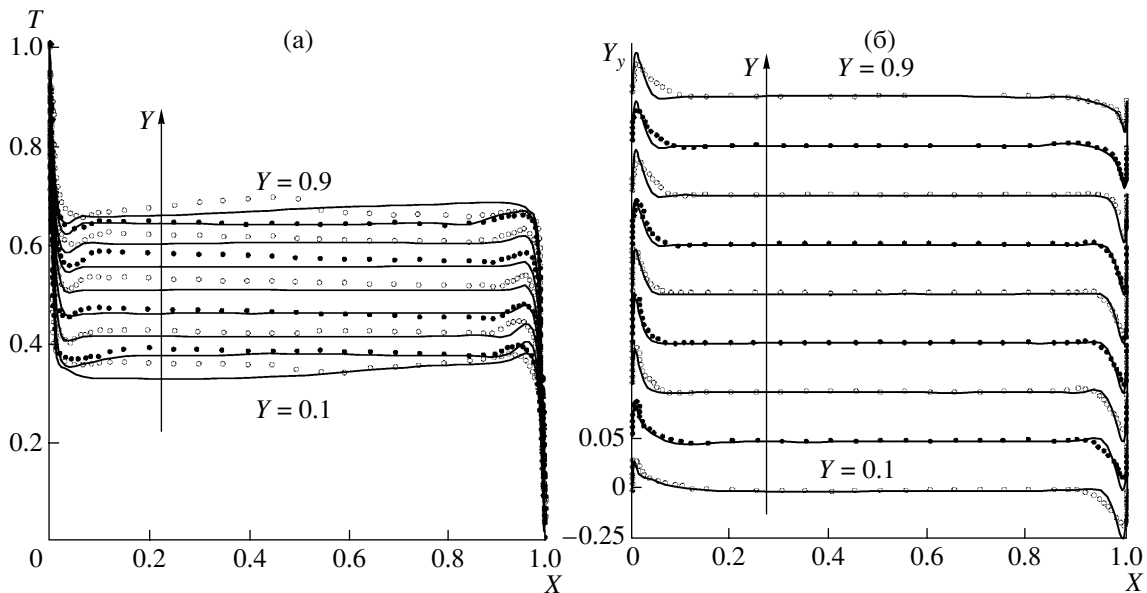


Рис. 3. Профили температуры (а) и вертикальной составляющей скорости на разных расстояниях Y от дна полости. Кривые – наш расчет, точки – эксперимент [12].

горизонтальной стенке. Экспериментальные профили скорости и температуры хорошо совпадают с расчетными в средней части полости, однако вблизи горизонтальных стенок расчет дает заметно меньшую толщину пограничных слоев и на 15–20% завышенные максимальные значения скорости. На рис. 4 в увеличенном масштабе показаны изменения скорости и температуры в пристенном слое на нагретой вертикальной стенке. Из рис. 4 следует, что рассчитанные и измеренные профили вполне удовлетворительно согласуются между собой вблизи $Y = 0.5$. Отметим, что в этой области скоростной пограничный слой оказывается заметно тоньше температурного. Обратим внимание на то, что участок основного роста вертикальной составляющей скорости, а также большая часть температурного пограничного слоя оказались в зоне, где характеристики турбулентности рассчитываются по методу RANS.

Изменение температуры и горизонтальной компоненты скорости вдоль вертикальной линии, проходящей через центр полости, показано на рис. 5. Как и для течения у вертикальных стенок, расчет дал несколько завышенные скорости $V_{x \max}$ вблизи горизонтальных границ. Максимальные рассчитанные значения $V_{x \max}$ примерно в два раза меньше $V_{y \max}$, что отмечается и в эксперименте. На профилях, показанных на рис. 5, наблюдаются участки с направлением скорости, противоположным основному движению, что указывает на наличие рециркуляционных структур вблизи внешней границы струй, формирующихся у горизонтальных стенок. В целом результаты наших расчетов так же хорошо согласуются с экспериментом, как и

данные, полученные по “чистому” методу LES [3]. Следует отметить, что в методе LES [3] использовалась алгебраическая динамическая модель подсеточной турбулентности на сетке, содержащей 580 тыс. ячеек.

Полученные в расчете и эксперименте распределения коэффициента трения C_f по периметру полости показаны на рис. 6. Начало отсчета соответствует $X = 0, Y = 0$, т.е. низу горячей стенки. Максимальная величина трения достигается в сечениях $Y \approx 0.4$ на горячей и $Y \approx 0.6$ на холодной вертикальных стенках. Отрицательные значения C_f отвечают изменению направления движения

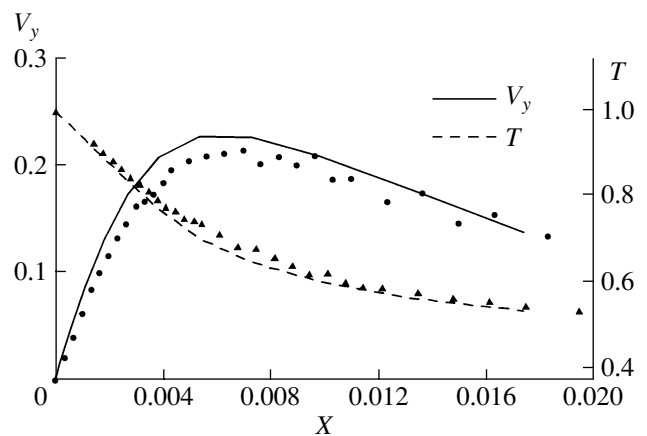


Рис. 4. Фрагменты профилей температуры и вертикальной составляющей скорости вблизи нагретой стенки полости в сечении $Y = 0.5$. Кривые – наш расчет, точки – эксперимент [12].

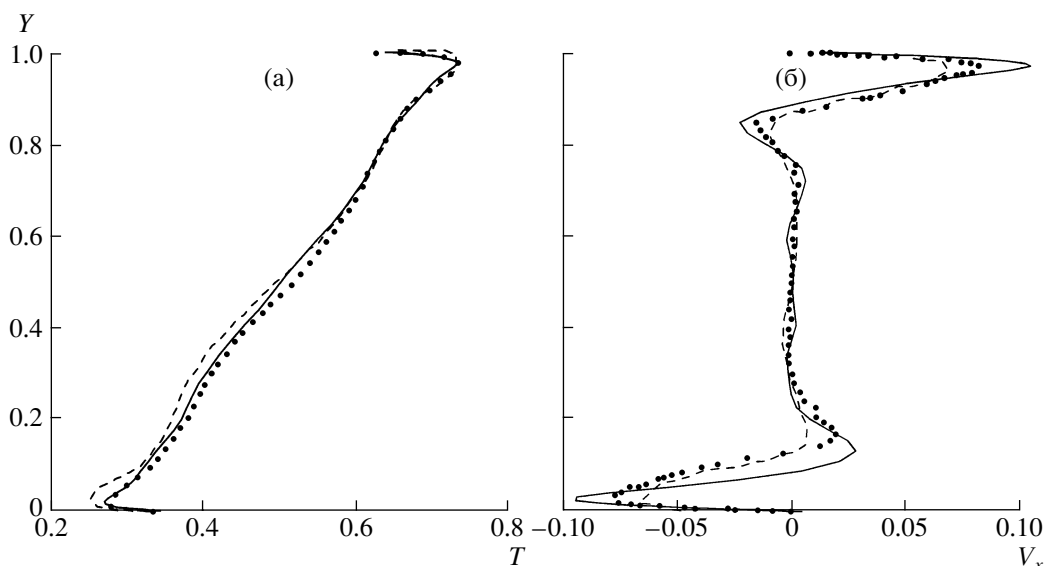


Рис. 5. Изменения температуры (а) и составляющей скорости V_x – (б) вдоль вертикальной линии ($X = 0.5$). Сплошные кривые – наш расчет, штриховые – расчет по методу LES [3], точки – эксперимент [12].

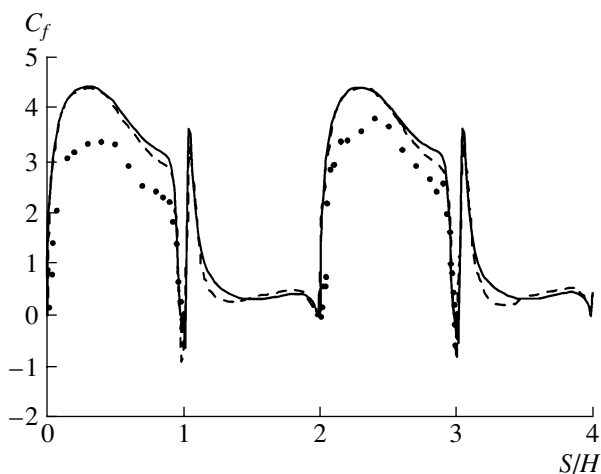


Рис. 6. Распределение коэффициента трения по периметру полости. Сплошные кривые – наш расчет, штриховые – расчет по методу LES [3], точки – эксперимент [12].

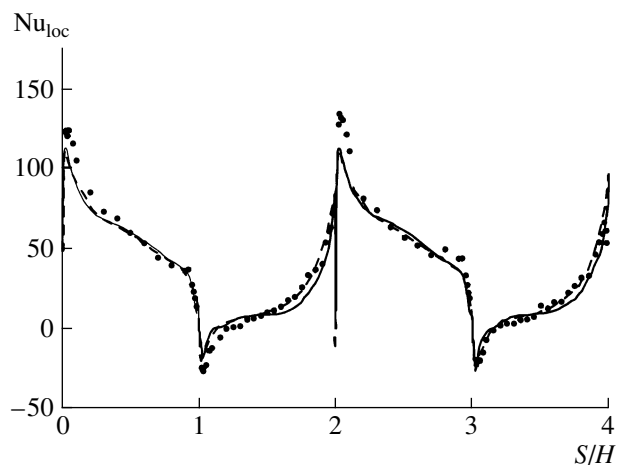


Рис. 7. Распределение локального безразмерного теплового потока по периметру полости. Сплошные кривые – наш расчет, штриховые – расчет по методу LES [3], точки – эксперимент [12].

жидкости вблизи двух углов полости, где формируются вихревые структуры. Из рис. 6 видно, что полученные в нашем расчете и в работе [3] значения коэффициента трения несколько завышены по сравнению с данными эксперимента. Однако качественный характер распределений совпадает.

Обратимся к тепловым характеристикам конвекции. Сравнение расчетных и экспериментальных распределений локального числа Нуссельта Nu_{loc} (безразмерного теплового потока) вдоль стенок полости приводится на рис. 7. Видно, что на изотермических стенках максимальные значения локального теплового потока наблюдаются внизу горячей и сверху холодной стенок, где тол-

щина температурных пограничных слоев минимальна. В эти области воздух от противоположных (соответственно холодной или горячей) стенок доставляется горизонтальными пристенными струями. В соответствии с рассмотренной выше структурой полей температуры локальный тепловой поток уменьшается по мере развития основного течения. В наших вычислениях, как и в расчетах по методу LES [3], максимальные числа Nu_{loc} примерно на 15% меньше, чем экспериментальные значения. Таким образом, интегральное число Нуссельта Nu_v в нашем расчете оказалось равным 60.1 по сравнению со значением 64.6 в эксперименте. Расчетные распределения чисел

Nu_{loc} вдоль горизонтальных стенок выявили наличие наблюдавшихся в эксперименте областей с различным направлением теплового потока. Интегральное значение числа Нуссельта Nu_v для горизонтальных стенок составляет 14.1 в расчете и 15.3 в эксперименте.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Анализ результатов расчетов турбулентной статистически двухмерной конвекции воздуха в замкнутой полости с боковыми стенками, нагретыми до разных температур, при числе Рэлея 1.58×10^9 позволил сделать следующие выводы. Гибридный RANS/LES-подход, использующий уравнение переноса кинетической энергии турбулентности, дал возможность на сетках относительно небольшой размерности воспроизвести все основные особенности полей скорости и температуры, а также распределений коэффициента трения и локального теплового потока вдоль стенок полости. Расчетные характеристики удовлетворительно согласуются с экспериментальными данными и результатами вычислений по методу LES, полученными на существенно более мелкой расчетной сетке. Учитывая, что применение гибридного RANS/LES-подхода к моделированию турбулентной конвекции Рэлея–Бенара и к расчету нашей задачи, позволило получить очень близкие к экспериментальным результаты, можно предложить использовать данную методику для численного исследования естественноконвективных течений в замкнутых полостях при произвольных тепловых условиях на границах.

Обозначения. a – коэффициент температуропроводности; g – ускорение силы тяжести; \mathbf{e}_g – единичный вектор в направлении действия силы тяжести; H – высота полости; T_h, T_c – температуры горячей и холодной стенок, соответственно; $\Delta T = T_h - T_c$ – масштаб изменения температуры; T – нормированная температура; $V_b = (g\beta\Delta TH)^{1/2}$ – скорость плавучести; \mathbf{V} – вектор скорости; t – безразмерное время; p^* – редуцированное давление; ρ – плотность жидкости; β – температурный коэффициент расширения; ν – кинематический коэффициент вязкости; $Pr = \nu/a$ – число Прандтля; $Ra = (g\beta\Delta TH^3)/(\nu a)$ – число Рэлея; q_w – локальный тепловой поток; λ – коэффициент теплопроводности; $Nu_{loc} = (q_w H)/(\lambda \Delta T)$ – локальный безразмерный тепловой поток; Nu_v – безразмерный тепловой поток, осредненный по вертикальной стенке; Nu_h – безразмерный тепловой поток, осредненный по горизонтальной стенке; \mathbf{S} – тензор скоростей деформации осредненного движения; C_f – коэффициент трения; ν_t – турбулентная вязкость; Pr_t – турбулентное число Прандтля; k – кинетическая энергия турбулентности; $\langle \tau_w \rangle$ – среднее по

времени напряжение трения на стенке; n – расстояние до ближайшей стенки; $Y^+ = (\langle \tau_w \rangle / \rho)^{1/2} n_1 / \nu$ – безразмерная координата центров ячеек расчетной сетки, ближайших к стенке; Δi – линейный размер расчетной ячейки в направлении X_1 .

Работа выполнена в рамках Российской программы поддержки ведущих научных школ (грант НШ-1389.2003.8) и при содействии Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 05-02-17189-а).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Versteegh T.A., Nieuwstadt F.T.M.* Turbulent Budgets of Natural Convection in an Infinite, Differentially Heated, Vertical Channel // Intern. J. Heat Fluid Flow. 1997. V. 19. P. 135.
2. *Boudjemadi R., Maupu V., Laurence D., Le Quere P.* Direct Numerical Simulation of Natural Convection in a Vertical Channel: A Tool for Second-Moment Closure Modelling // Proc. Engineering Turbulence Modelling and Experiments 3. Amsterdam: Elsevier, 1996. P. 39.
3. *Peng S.-H., Davidson L.* Large Eddy Simulation of Turbulent Buoyant Flow in a Confined Cavity // Intern. J. Heat Fluid Flow. 2001. V. 22. P. 323.
4. *Cabot W., Moin P.* Approximate Wall Boundary Conditions in the Large-Eddy Simulation of High Reynolds Number Flow // Flow, Turbulence and Combustion. 1999. V. 63. P. 269.
5. *Spalart P.R.* Strategies for Turbulence Modelling and Simulations // Intern. J. Heat Fluid Flow. 2000. V. 21. P. 252.
6. *Strelets M.* Detached Eddy Simulation of Massively Separated Flows // AIAA Paper. 2001–0879.
7. *Стрелец М.Х., Травин А.К., Шур М.Л., Спаларт Ф.Р.* Метод моделирования отсоединенных вихрей для расчета отрывных турбулентных течений: предпосылки, основная идея и примеры применения // Науч.-тех. ведомости СПбГПУ. 2004. № 2(36). С. 22.
8. *Nikitin N.V., Nicoud F., Wasistho B. et al.* An Approach to Wall Modeling in Large-Eddy Simulations // Phys. Fluids. 2000. V. 12(7). P. 1629.
9. *Smirnov E.M.* Recent Advances in Numerical Simulation of 3D Unsteady Convection Controlled by Buoyancy and Rotation // Proc. 12th Intern. Heat Transfer Conf. Grenoble, France (CD-ROM proceedings). 2002. P. 12.
10. *Абрамов А.Г.* Метод моделирования крупных вихрей в приложении к задачам турбулентной конвекции в подогреваемых снизу емкостях: варианты и возможности. Дис. ... канд. физ.-мат. наук. СПб: СПбГПУ, 2003. 219 с.
11. *Abramov A.G., Ivanov N.G., Smirnov E.M.* Numerical Study of High-Ra Rayleigh-Benard Mercury and Water Convection in Confined Enclosures Using a Hybrid RANS/LES Technique // Proc. Eurotherm Seminar 74. Eindhoven, The Netherlands. 2003. P. 33.
12. *Tian Y.S., Karayiannis T.G.* Low Turbulence Natural Convection in an Air Filled Square Cavity. Part I: The Thermal and Fluid Flow Fields // Intern. J. Heat Mass Transfer. 2000. V. 43. P. 849.

13. *Wolfshtein M.* The Velocity and Temperature Distribution in One-Dimensional Flow with Turbulence Augmentation and Pressure Gradient // Intern. J. Heat and Mass Transfer. 1969. V. 12. P. 301.
14. *Смирнов Е.М., Зайцев Д.К.* Метод конечных объемов в приложении к задачам гидрогазодинамики и теплообмена в областях сложной геометрии // Науч.-тех. ведомости СПбГПУ. 2004. № 2(36). С. 70.
15. *Smirnov E.M., Abramov A.G., Ivanov N.G. et al.* DNS and RANS/LES-Computations of Complex Geometry Flows Using a Parallel Multiblock Finite-Volume Code. In: Parallel Computational Fluid Dynamics. Advanced Numerical Methods Software and Applications / Eds. Chetverushkin B. et al. Amsterdam: Elsevier, 2004. P. 219.
16. *Зимин В.Д., Фрик П.Г.* Турбулентная конвекция. М.: Наука, 1988. 173 с.