

МОДЕЛИРОВАНИЕ КРУПНЫХ ВИХРЕЙ В ЗАДАЧЕ ТУРБУЛЕНТНОЙ КОНВЕКЦИИ ВО ВРАЩАЮЩЕМСЯ СЛОЕ, ПОДОГРЕВАЕМОМ СНИЗУ

А.Г. Абрамов

Санкт-Петербургский государственный технический университет,
Санкт-Петербург, 195251, Политехническая ул., 29, aerofmf@citadel.stu.neva.ru

АННОТАЦИЯ

Техника моделирования крупных вихрей (LES) применяется к задаче турбулентной конвекции во вращающемся бесконечном слое, подогреваемом снизу. В качестве априорного теста результатов, получаемых по методу LES, используются высокоточные данные прямого численного моделирования (DNS) турбулентной конвекции, представленные в [1] вплоть до значений для числа Релея порядка 10^8 при числе Прандтля равном единице. Для описания «подсетежного» (SGS) движения используются модель Смагоринского или модель одного уравнения. Граничные условия на стенке удовлетворяются по методу пристенных функций. Показывается, что и при таком подходе для получения приемлемых данных по теплопередаче через слой необходимо введение демпфирования SGS вязкости вблизи твердых стенок.

1. ВВЕДЕНИЕ

В настоящее время метод крупных вихрей (Large Eddy Simulation – LES) находит все более широкое применение в задачах конвективного теплообмена, в том числе для расчетов течений, контролируемых массовыми силами различной природы. Применение метода прямого численного моделирования (DNS), несмотря на существенно возросшие вычислительные возможности, все еще ограничивается модельными задачами в упрощенной геометрии при невысоких числах Рейнольдса Re . Техника LES требует значительно меньших вычислительных затрат и является весьма привлекательной для решения практических задач, характеризующихся сложной геометрией и высокими числами Re .

Задача о турбулентной конвекции Релея-Бенара в присутствии вращения с начала 50-х годов привлекает внимание исследователей [2, 3]. В последние годы существенный рост вычислительных возможностей повысил интерес к численному моделированию турбулентной конвекции при достаточно высоких числах Ra [1, 4].

В настоящей работе производится попытка применения техники LES к задаче турбулентной конвекции во вращающемся бесконечном слое, подогреваемом снизу. Корректность результатов LES оценивается в сравнении с высокоточными данными DNS, представленными в [1] для широкого диапазона чисел Ra . В указанной работе для расчета конвекции применялся спектральный метод с размерностью расчетной сетки, возрастающей от $64 \times 64 \times 33$ узлов при $Ra \approx 3 \times 10^4$ до $384 \times 384 \times 193$ узлов при $Ra \approx 1.13 \times 10^8$. Очевидно, что расчеты на подобных сетках требуют значительных вычислительных и временных затрат.

2. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассматривается бесконечный слой, ограниченный снизу и сверху горизонтальными твердыми стенками и вращающийся вокруг вертикальной оси с угловой скоростью Ω (рис. 1).

Верхняя стенка считается холодной, нижняя – горячей; разность $\Delta T = T_2 - T_1$ определяет характерный перепад температуры. Эффекты плавучести в поле центробежной силы как, и в [1], полагаются пренебрежимо малыми. В горизонтальных направлениях ставятся условия периодичности. Размер расчетной области составляет $2L \times 2L \times L$, где L – глубина слоя, выбранная в качестве характерной длины. Уравнения Навье-Стокса записываются во вращающейся системе координат. Эффекты плавучести в поле силы тяжести учитываются в приближении Буссинеска.

В принятых условиях конвекция определяется тремя безразмерными параметрами: числом Прандтля $Pr = \nu / a$, числом Релея $Ra = g\beta \Delta T L^3 / \nu a$ и числом Тэйлора $Ta = \Omega \cdot L^2 / \nu$.

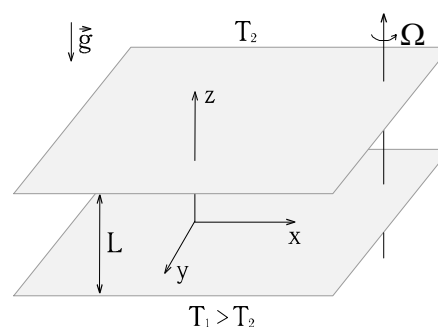


Рис. 1. Вращающийся горизонтальный слой. Геометрия и граничные условия.

3. МЕТОД МОДЕЛИРОВАНИЯ КРУПНЫХ ВИХРЕЙ И «ПОДСЕТОЧНЫЕ» МОДЕЛИ

Используемая при численном моделировании техника LES основана на фильтрации по пространству системы исходных трехмерных уравнений Навье-Стокса. Эффект неразрешаемых масштабов учитывается через SGS напряжения, которые необходимо моделировать [5]. В данной работе были опробованы: широко известная алгебраическая SGS модель Смагоринского и модель одного уравнения.

Модель Смагоринского, полученная на основе предположения о локальном равновесии мелкомасштабного движения, приводит к следующему соотношению для SGS вязкости [6]

$$v^{sgs} = (C_s \Delta)^2 |\bar{S}| = C \Delta^2 |\bar{S}|, \quad |\bar{S}| = (2\bar{S}_{ij}\bar{S}_{ij})^{1/2}, \quad (1)$$

где $\Delta = (\Delta x_1, \Delta x_2, \Delta x_3)^{1/3}$ размер фильтра (пропорциональный размеру ячейки сетки), $C = C_s^2$ - константа Смагоринского, \bar{S} - модуль тензора скоростей деформации. В настоящих расчетах значение константы Смагоринского C_s было выбрано равным 0.3.

Модель одного уравнения предусматривает решение уравнения для кинетической энергии «подсеточного» движения k^{sgs} [7]

$$\frac{dk}{dt} = \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\left(v + \frac{v^{sgs}}{\sigma_k} \right) \frac{\partial k}{\partial x_j} \right] + 2v^{sgs} \bar{S}^2 - \frac{C_\epsilon k^{3/2}}{\Delta} \quad (2)$$

$$v^{sgs} = C_\nu k_{sgs}^{1/2} \Delta \quad (3)$$

Значения констант $C_\epsilon = 0.75$, $C_\nu = 0.12$ выбраны, исходя из имеющихся литературных данных [7, 8].

Одним из существенных недостатков SGS моделей является некорректное предсказание движения вблизи твердых стенок. Для улучшения результатов LES применяется демпфирование SGS вязкости вблизи стенок с использованием различных подходов [9]. Основанный на широко известной формуле Ван-Дрифта [10] и ее модификациях демпфирующий фактор в экспоненциальной форме применялся для пристенной области в работах [11, 12]. В настоящих расчетах используется демпфирующий фактор, предложенный в [13], что приводит к следующей модификации модели Смагоринского

$$v^{sgs} = D^2 (C_s \Delta)^2 |\bar{S}|, \quad y^+ < 33 \quad (4)$$

$$v^{sgs} = (C_s \Delta)^2 |\bar{S}|, \quad y^+ \geq 33$$

$$u_* \equiv \sqrt{\tau_w / \rho}, \quad y^+ \equiv y u_* / \nu, \quad D = y^+ / 33 \quad (5)$$

где τ_w – напряжение на стенке, y – расстояние до стенки, D – демпфирующий множитель.

По аналогии с моделью Смагоринского, для модели одного уравнения вводится демпфирование SGS вязкости вблизи стенок в следующем виде

$$v^{sgs} = D^2 C_\nu k_{sgs}^{1/2} \Delta, \quad y^+ < 33 \quad (6)$$

$$v^{sgs} = C_\nu k_{sgs}^{1/2} \Delta, \quad y^+ \geq 33$$

Для определения параметров вблизи твердых стенок используется метод пристенных функций [14, 15], позволяющий резко сократить число узлов расчетной сетки в этих областях.

4. ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЕ АСПЕКТЫ ЗАДАЧИ

Задача решалась с помощью разработанного на кафедре гидроаэродинамики СПбГТУ программного комплекса SINP-2, в котором метод контрольного объема применен для расчетов стационарных и нестационарных течений несжимаемой жидкости или совершенного газа, развивающихся в общем случае в областях сложной геометрии. Для получения нестационарных решений применяется неявная схема второго порядка по физическому времени. Для продвижения по фиктивному времени установления на каждом шаге по физическому времени используется метод искусственной сжимаемости. Для расчета конвективных слагаемых применяется схема QUICK [16], а при дискретизации дифференциальных операторов, отражающих действие вязкости, используется центральная разностная схема второго порядка.

При проведении расчетов использовалась расчетная сетка размерностью 49x49x29 ячеек, в вертикальном сечении узлы сетки были сгущены к стенкам слоя, достигая у стенки размера 0.01L, в горизонтальных направлениях сетка равномерная.

Для «раскачки» конвекции исходные граничные условия периодичности по горизонтальным направлениям заменялись на условия прилипания к стенкам, движущимся с постоянной скоростью в вертикальном направлении. В качестве начальных условий были взяты нулевые поля скорости и нормированной температуры $T=0$. Значение шага по безразмерному физическому времени было выбрано равным 0.05. Видоизмененные граничные условия использовались со старта расчета в течение около 100 временных шагов, в результате чего развивался турбулентный режим конвекции в слое. Затем граничные условия периодичности восстанавливались, и для разных вариантов моделей SGS производился расчет нескольких тысяч временных шагов для получения достоверных выборок.

Распределения скоростей и температуры осреднялись в пространстве на каждом временном шаге с последующим осреднением одномерных профилей во времени.

5. РЕЗУЛЬТАТЫ РАСЧЕТОВ И ОБСУЖДЕНИЕ

Расчеты производились при следующих значениях определяющих параметров: $Pr=1$, $Ra=1.13 \times 10^8$, $Ta=2.0 \times 10^8$.

На рис. 2 приведены распределения безразмерной скорости и температуры в горизонтальном сечении, расположенном вблизи границы градиентного слоя, а также в одном из вертикальных сечений (скорость нормирована на скорость плавучести $V_b = \sqrt{g\beta\Delta T L}$).

Видно, что в слое формируется развитое турбулентное течение с характерными вихревыми структурами, определяющими его конвективные

свойства. Размеры и интенсивность структур соответствует картинам, представленным в работе [1] при тех же значениях определяющих параметров.

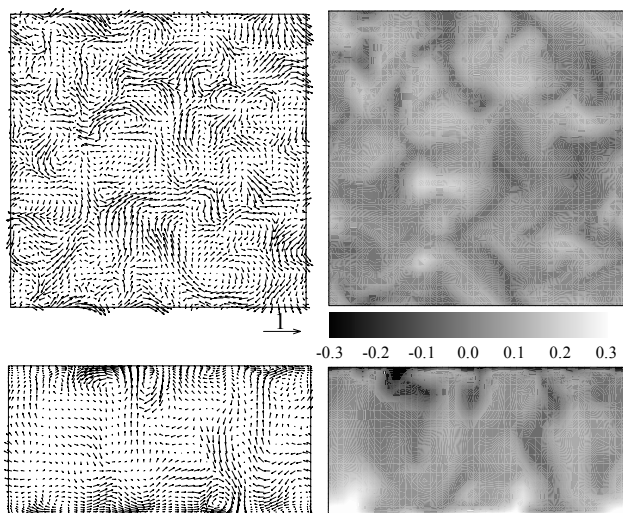


Рис. 2. Характерные мгновенные распределения скорости и температуры.

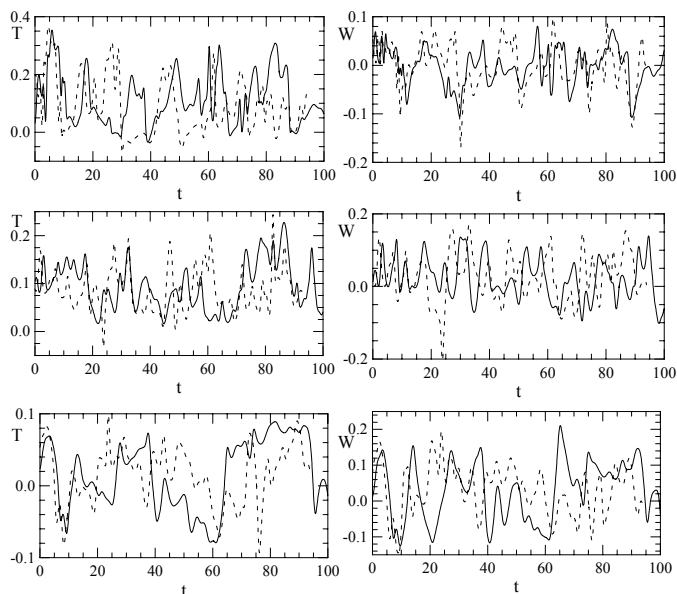


Рис. 3. Колебания температуры (слева) и вертикальной скорости (справа) в точках с вертикальными координатами (сверху вниз) $z=0.036, 0.129$ и 0.5 .

Эволюцию во времени температуры и вертикальной скорости в трех точках мониторинга, расположенных в слое на разной глубине иллюстрирует рис. 3. Колебания имеют хаотический характер, соответствующий режиму развитой турбулентности. Колебания температуры достигают 40% от общего перепада. Амплитуда колебаний безразмерной вертикальной скорости достигает 20% в среднем сечении слоя ($z=0.5$).

На рис. 4 приведены полученные в результате осреднения данных LES распределения температуры в слое в сравнении с данными DNS [1]. Видно достаточно хорошее совпадение результатов расчетов с некоторыми отклонениями вблизи стенок, обусловленными недостаточным разрешением пристенных высокоградиентных слоев на использованной сетке.

Таблица 1 содержит рассчитанные значения интегрального теплового потока (числа Нуссельта, Nu) через твердые стенки для различных SGS моделей в сравнении с данными DNS. В отсутствие демпфирования вязкости значение Nu на 40% превосходит полученное в работе [1]. При введении демпфирования «подсеточной» вязкости вблизи стенок различие в числах Nu составляет около 6%. Полученное существенное улучшение результатов LES однозначно указывает на целесообразность применения демпфирования SGS вязкости вблизи твердых стенок для обеих использованных моделей.

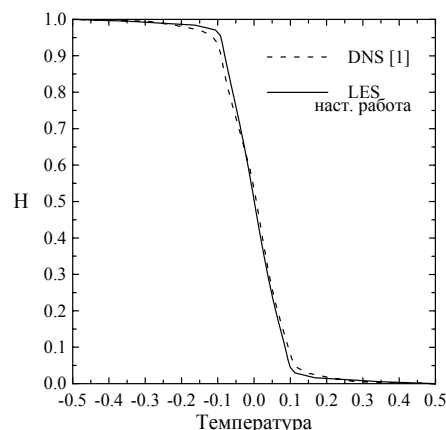


Рис. 4. Профили осредненной температуры. Сравнение результатов DNS и LES.

Таблица 1. Значения числа Нуссельта, полученные для разных SGS моделей в сравнении с данными DNS

Расчет	Nu
LES, модель Смагоринского (без демпфирования SGS вязкости)	44.3
LES, модель одного уравнения (без демпфирования SGS вязкости)	44.5
LES, модель Смагоринского (с демпфированием SGS вязкости)	29.6
LES, модель одного уравнения (с демпфированием SGS вязкости)	29.4
DNS [1]	31.1

Флуктуации во времени осредненного по площади $2Lx2L$ теплового потока, рассчитанные для моделей с демпфированием SGS вязкости, иллюстрируются на рис. 5. Видно, что интегральный тепловой поток нестационарен во времени, амплитуда колебаний для выбранной расчетной области $2Lx2L$ может достигать 10% от среднего значения.

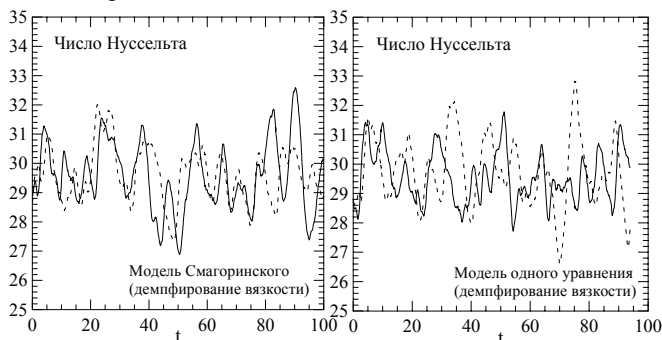


Рис. 5. Изменение во времени интегрального теплового потока через твердые стенки.

6. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Произведены расчеты по методу LES турбулентной конвекции во вращающемся слое, подогреваемом снизу при числах $Ra \approx 10^8$. Расчетные распределения температуры в слое хорошо согласуются с данными DNS для обеих использованных SGS моделей. Тепловые потоки на твердых стенках достаточно аккуратно предсказываются в рамках LES, если вводится демпфирование SGS вязкости вблизи стенок.

БЛАГОДАРНОСТИ

Автор выражает признательность Е.М. Смирнову за помощь и научное руководство работой.

СПИСОК ОБОЗНАЧЕНИЙ

LES (Large Eddy Simulation) – метод моделирования крупных вихрей;
DNS (Direct Numerical Simulation) – метод прямого численного моделирования;
SGS (Subgrid Scale) – «подсеточный» масштаб;
Re — число Рейнольдса;
Ra — число Рэлея;
Pr — число Прандтля;
Ta — число Тэйлора;
Nu — число Нуссельта;
 ΔT — перепад температуры между границами слоя;
L — глубина слоя;
g — ускорение свободного падения, м/с²;
 β — коэффициент температурного расширения, 1/К;
a — коэффициент теплопроводности, м²/с;
 ν — кинематическая вязкость, м²/с;
 Ω — угловая скорость вращающегося слоя, рад/с;
 ν^{sgs} — «подсеточная» вязкость, м²/с;
 Δ — размер фильтра;
 \bar{S} — модуль тензора скоростей деформации;
 C_s, C_ϵ, C_v - константы моделей турбулентности;
 k^{sgs} — кинетическая энергия «подсеточного» движения, м²/с²;
 τ_w — напряжение на стенке, кг/мс²;
y — расстояние до стенки, м;
D — демпфирующий множитель;
 V_b — скорость плавучести, м/с

Индексы:

i, j — порядковый номер орта системы координат.

ЛИТЕРАТУРА

1. Julien K., Legg S., McWilliams J., Werne J. Rapidly rotating turbulent Rayleigh-Benard convection. // J. Fluid Mech., 1996, Vol. 322, P. 243-273.
2. Chandrasekhar S. The instability of a layer of fluid heated below and subject to Coriolis forces. // Proc. R. Soc. Lond. A, 1953, Vol. 217, P. 306-327.
3. Nagakawa Y., Frenzen P. A theoretical and experimental study of cellular convection in rotating fluids. // Tellus, Vol. 7, P. 1-21.
4. Klinger B.A., Marshall J. Regimes and scaling laws for rotating deep convection in the ocean. // Dyn. Atmos. Oceans, 1995, Vol. 21, P. 227-256.
5. Piomelli U. Large-eddy simulation of turbulent flows // In: Advances in turbulence modelling. Lecture Series 1998-05, Von Karman Institute of Fluid Dynamics, 1998, March 23-27, P. 1-54.
6. Smagorinsky J. Numerical Study of Small-scale Intermittency in Three-Dimensional Turbulence. // Mon. Weather Rev., 1963, Vol. 91, P. 99-164.
7. Yoshizawa A. Statistical Theory for Compressible Turbulent Shear Flow with the application to Subgrid modelling. // Phys. Fluids A., 1986, Vol. 29(7), P. 2152-2164.
8. Sohankar A., Davidson L., Norberg C. A dynamic one-equation subgrid model for simulation of flow around a square cylinder. // In: Engineering Turbulence and Experiments-4, 1999, Elsevier Science.
9. Cabot W., Moin P. Approximate wall boundary conditions in the large-eddy simulation of high Reynolds number flow. // Flow, Turbulence and Combustion, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 1999, Vol. 63, P. 269-291.
10. Van Driest E.R. On turbulent flow near a wall // J. Aeronaut. Sci., 1956, Vol. 23, P. 1007.
11. Balaras E., Benocci C., Piomelli U. Two-layer approximate boundary conditions for large-eddy simulations. // AIAA J., 1996, Vol. 34, P. 1111-1119.
12. Cabot W. Near-wall models in large eddy simulations of flow behind a backward-facing step. // In: Annual Research Briefs. Center for Turbulence Research, Stanford, CA, 1996, P. 199-210.
13. Зябриков В.В., Лойцянский Л.Г. Демпфирующий фактор в теории пути смешения Прандтля. // МЖГ, 1987, N5.
14. Launder B.E., Spalding D.B. The numerical computation of turbulent flows // Comput. Methods Appl. Mech. Eng., 1974, Vol. 3, P. 269-289.
15. Белов И.А., Кудрявцев Н.А. Теплоотдача и сопротивление пакетов труб. Л.: Энергоатомиздат, 1987.
16. Leonard B.P. A stable and accurate convective modelling procedure based on quadratic upstream interpolation // Comput. Methods Appl. Mech. Eng., 1979, Vol. 19, P. 59-98.

SUMMARY

A.G. Abramov (Saint-Petersburg State Technical University, 195251, Politechnicheskaya, 29, Saint-Petersburg, Russia), **LARGE EDDY SIMULATION OF TURBULENT CONVECTION IN A ROTATING LAYER HEATED FROM BELOW**

Turbulent convection in a boundless rotating layer heated from below was computed using large eddy simulation (LES) in combination with the wall-function technique. High-accuracy data of direct numerical simulation of turbulent convection [1] was used as a *priori* test of LES results at a Prandtl number of 1 and for a Rayleigh number about of 10^8 . Smagorinsky or one-equation models were applied to define the effects of subgrid-scale (SGS) motion. It has been shown that introducing a near-wall damping of SGS viscosity considerably the accuracy of heat transfer predictions.